

Ecuaciones Diferenciales Parciales: Taller 4

16 de agosto del 2024

Universidad Nacional de Colombia

Oscar Guillermo Riaño Castañeda

Andrés David Cadena Simons
David Felipe Viuche Malaver

acadenas@unal.edu.co
dviuchem@unal.edu.co

Problema 1:

1. Suponga que u es una solución suave de la ecuación del calor $u_t - \Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Encuentre una familia de términos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $u_\lambda(x, t) = u(\lambda^a x, \lambda^b t)$ también sea solución de la ecuación del calor para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
2. Use el ejercicio anterior para mostrar que $v(x, t) := x \cdot \nabla u(x, t) + 2tu_t(x, t)$ también soluciona la ecuación del calor.
3. Suponga que u es una solución suave para la ecuación del calor no lineal $u_t - \Delta u = u^3 u_{x_1}$ en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Encuentre una familia de términos $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $u_\lambda(x, t) = \lambda^a u(\lambda^b x, \lambda^c t)$ también sea solución de tal ecuación del calor no lineal para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Solución:

1. Suponga que u es una solución suave de la ecuación del calor $u_t - \Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Encuentre una familia de términos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $u_\lambda(x, t) = u(\lambda^a x, \lambda^b t)$ también sea solución de la ecuación del calor para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
Suponga que $u_\lambda(x, t)$ satisface la ecuación del calor, es decir:

$$\partial_t u_\lambda(x, t) - \Delta u_\lambda(x, t) = 0,$$

en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$, luego:

$$\begin{aligned} \partial_t u_\lambda(x, y) &= u_t(\lambda^a x, \lambda^b t) \\ &= u_t(\lambda^a x, \lambda^b t)(\lambda^b) \\ \Delta u_\lambda &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u_\lambda(x, t)}{\partial x_i \partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i}(\lambda^a x, \lambda^b t)(\lambda^a)^2 \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} u_{\lambda_t}(x, t) - \Delta u_\lambda(x, t) &= \lambda^b u_t(\lambda^a x, \lambda^b t) - \lambda^{2a} \Delta u(\lambda^a x, \lambda^b t) \\ &= \lambda^c (u_t(\lambda^a x, \lambda^b t) - \Delta u(\lambda^a x, \lambda^b t)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego $\lambda^c = \lambda^b = \lambda^{2a}$, por lo que podemos concluir en que $2a = b$, luego $u_\lambda(x, t) = u(\lambda^a x, \lambda^{2a} t)$ es solución para la ecuación del calor para todo $a \in \mathbb{R}$.



2. Use el ejercicio anterior para mostrar que $v(x, t) := x \cdot \nabla u(x, t) + 2tu_t(x, t)$ también soluciona la ecuación del calor.

Note que si tomamos $a = 1$, como para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$ se cumple que $u_{\lambda t}(x, t)$ soluciona la ecuación del calor, es decir:

$$\begin{aligned}\partial_t u_{\lambda}(x, t) - \Delta u_{\lambda}(x, y) &= \lambda^2 u_t(\lambda x, \lambda^2 t) - \lambda^2 \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t), \\ &= 0,\end{aligned}$$

luego si derivamos respecto a λ :

$$\begin{aligned}\partial_{\lambda}(\partial_t u_{\lambda}(x, t) - \Delta u_{\lambda}(x, y)) &= \partial_{\lambda}(\lambda^2 u_t(\lambda x, \lambda^2 t)) - \partial_{\lambda}(\lambda^2 \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)), \\ &= 2\lambda u_t(\lambda x, \lambda^2 t) + \lambda^2 u_{t\lambda}(\lambda x, \lambda^2 t) - 2\lambda \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t) - \lambda^2 \partial_{\lambda} \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t), \\ &= (2\lambda)(u_t(\lambda x, \lambda^2 t) - \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)) + (\lambda^2)(\partial_{\lambda} u_t(\lambda x, \lambda^2 t) - \partial_{\lambda} \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)), \\ &= (\lambda^2)(\partial_{\lambda} u_t(\lambda x, \lambda^2 t) - \partial_{\lambda} \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)), \\ &= (\lambda^2)(\partial_t \partial_{\lambda} u(\lambda x, \lambda^2 t) - \Delta \partial_{\lambda} u(\lambda x, \lambda^2 t)), \\ &= 0.\end{aligned}$$

Por lo que podemos asegurar que $\partial_{\lambda} u(\lambda x, \lambda^2 t)$ también es solución de la ecuación del calor.

Ahora calculemos $\partial_{\lambda} u(\lambda x, \lambda^2 t)$:

$$\partial_{\lambda} u(\lambda x, \lambda^2 t) = \nabla u(\lambda x, \lambda^2 t) \cdot x + 2\lambda t u_t(\lambda x, \lambda^2 t),$$

fijando $\lambda = 1$ se tiene que:

$$x \cdot \nabla u(x, t) + 2t u_t(x, t) = v(x, t),$$

por lo que se puede asegurar que $v(x, t)$ es una solución de la ecuación del calor.



3. Suponga que u es una solución suave para la ecuación del calor no lineal $u_t - \Delta u = u^3 u_{x_1}$ en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Encuentre una familia de términos $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $u_{\lambda}(x, t) = \lambda^a u(\lambda^b x, \lambda^c t)$ también sea solución de tal ecuación del calor no lineal para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Suponga que $u_{\lambda}(x, t)$ es solución de la ecuación del calor no lineal, es decir:

$$\partial_t u_{\lambda}(x, t) - \Delta u_{\lambda}(x, t) = [u_{\lambda}(x, t)]^3 \partial_{x_1} u_{\lambda}(x, t),$$

en donde:

$$\begin{aligned}\partial_t u_{\lambda}(x, t) &= \lambda^{a+c} u_t(\lambda^b x, \lambda^c t), \\ \Delta u_{\lambda}(x, t) &= \lambda^{a+2b} \Delta u(\lambda^b x, \lambda^c t), \\ \partial_{x_1} u_{\lambda}(x, t) &= \lambda^{a+b} \partial_{x_1} u(\lambda^b x, \lambda^c t),\end{aligned}$$

por lo que tenemos que:

$$\lambda^{a+c}u_t(\lambda^b x, \lambda^c t) - \lambda^{a+2b}\Delta u(\lambda^b x, \lambda^c t) = \lambda^{4a+b}u^3(\lambda^b x, \lambda^c t)\partial_{x_1}u(\lambda^b x, \lambda^c t),$$

lo que implica que:

$$\begin{aligned}\lambda^{-3a-b+c}u_t(\lambda^b x, \lambda^c t) - \lambda^{-3a+b}\Delta u(\lambda^b x, \lambda^c t) &= u^3(\lambda^b x, \lambda^c t)\partial_{x_1}u(\lambda^b x, \lambda^c t), \\ \lambda^d(u_t(\lambda^b x, \lambda^c t) - \Delta u(\lambda^b x, \lambda^c t)) &= u^3(\lambda^b x, \lambda^c t)\partial_{x_1}u(\lambda^b x, \lambda^c t),\end{aligned}$$

en donde d tiene que ser igual a 0, por lo que se tiene que:

$$\begin{aligned}-3a - b + c &= 0, \\ -3a + b &= 0,\end{aligned}$$

de lo que podemos deducir que si $a \in \mathbb{R}$, entonces $b = 3a$ y $c = 6a$, por lo que podemos asegurar que para la familia de términos $(a, 3a, 6a)$ con $a \in \mathbb{R}$ se cumple que $u_\lambda(x, t) = \lambda^a u(\lambda^{3a}x, \lambda^{6a}t)$ es solución de la ecuación del calor no lineal anteriormente mencionada.

Problema 2:

Considere el problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g, & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

- Suponga que $g \in C(\mathbb{R}^n)$ es una función absolutamente integrable, es decir, $\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty$. Muestre que para $0 < \beta < \frac{n}{2}$ existe una solución $u(x, t)$ del problema de Cauchy anterior que satisface:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\beta u(x, t) = 0,$$

uniformemente en $x \in \mathbb{R}^n$.

Sugerencia. Considere $u(x, t) = (\phi(\cdot, t) * g)(x)$ y muestre que $|u(x, t)| \leq \frac{\|g\|_{L^1}}{(4\pi t)^{n/2}}$.

Solución:

Note que:

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}} g(y) dy \right|, \\ &\leq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left| e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) \right| dy, \\ &\leq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy, \\ &\leq \frac{\|g\|_{L^1}}{(4\pi t)^{n/2}}. \end{aligned}$$

Luego, usando esto sabemos que:

$$\begin{aligned} \left| \lim_{t \rightarrow \infty} t^\beta u(x, t) \right| &= \lim_{t \rightarrow \infty} t^\beta |u(x, t)|, \\ &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^\beta \|g\|_{L^1}}{(4\pi t)^{n/2}}, \\ &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C}{t^{n/2-\beta}}, \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Luego como $|\lim_{t \rightarrow \infty} t^\beta u(x, t)| = 0$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} t^\beta u(x, t) = 0$.



Problema 3:

Pregunta

Solución:

Solución



Problema 4:

Pregunta

Solución:

Solución

