Ecuaciones Diferenciales Parciales: Taller 4

16 de agosto del 2024

Universidad Nacional de Colombia

Oscar Guillermo Riaño Castañeda

Andrés David Cadena Simons acadenas@unal.edu.co
David Felipe Viuche Malaver dviuchem@unal.edu.co

Problema 1:

1. Suponga que u es una solución suave de la ecuación del calor $u_t - \Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Encuentre una familia de términos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $u_\lambda(x,t) = u(\lambda^a x, \lambda^b t)$ también sea solución de la ecuación del calor para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
2. Use el ejercicio anterior para mostrar que $v(x,t) := x \cdot \nabla u(x,t) + 2tu_t(x,t)$ también soluciona la ecuación del calor.
3. Suponga que u es una solución suave para la ecuación del calor no lineal $u_t - \Delta u = u^3 u_{x_1}$ en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Encuentre una familia de términos $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $u_\lambda(x,t) = \lambda^a u(\lambda^b x, \lambda^c t)$ también sea solución de tal ecuación del calor no lineal para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Solución:

1. Suponga que u es una solución suave de la ecuación del calor $u_t - \Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Encuentre una familia de términos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $u_\lambda(x,t) = u(\lambda^a x, \lambda^b t)$ también sea solución de la ecuación del calor para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
   Suponga que $u_\lambda(x,t)$ satisface la ecuación del calor, es decir:
   $$\partial_t u_\lambda(x,t) - \Delta u_\lambda(x,t) = 0,$$
   en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$, luego:
   $$\begin{aligned} \partial_t u_\lambda(x,y) &= u_t(\lambda^a x, \lambda^b t) \\ &= u_t(\lambda^a x, \lambda^b t)(\lambda^b) \\ \Delta u_\lambda &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u_\lambda(x,t)}{\partial x_i x_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_i}(\lambda^a x, \lambda^b t)(\lambda^a)^2 \end{aligned}$$
   Luego:
   $$\begin{aligned} u_{\lambda_t}(x,t) - \Delta u_\lambda(x,t) &= \lambda^b u_t(\lambda^a x, \lambda^b t) - \lambda^{2a} \Delta u(\lambda^a x, \lambda^b t) \\ &= \lambda^c (u_t(\lambda^a x, \lambda^b t) - \Delta u(\lambda^a x, \lambda^b t)) \\ &= 0 \end{aligned}$$
   Luego $\lambda^c = \lambda^b = \lambda^{2a}$, por lo que podemos concluir en que $2a = b$, luego $u_\lambda(x,t) = u(\lambda^a x, \lambda^{2a} t)$ es solución para la ecuación del calor para todo $a \in \mathbb{R}$.

   ♥

2. Use el ejercicio anterior para mostrar que $v(x,t) := x \cdot \nabla u(x,t) + 2tu_t(x,t)$ también soluciona la ecuación del calor.

Problema 1 continúa en la siguiente página...

Note que si tomamos $a = 1$, como para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$ se cumple que $u_{\lambda_t}(x,t)$ soluciona la ecuación del calor, es decir:

$$\begin{aligned}\partial_t u_\lambda(x,t) - \Delta u_\lambda(x,y) &= \lambda^2 u_t(\lambda x, \lambda^2 t) - \lambda^2 \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t),\\ &= 0,\end{aligned}$$

luego si derivamos respecto a λ:

$$\begin{aligned}\partial_\lambda(\partial_t u_\lambda(x,t) - \Delta u_\lambda(x,y)) &= \partial_\lambda(\lambda^2 u_t(\lambda x, \lambda^2 t)) - \partial_\lambda(\lambda^2 \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)),\\ &= 2\lambda u_t(\lambda x, \lambda^2 t) + \lambda^2 u_{t\lambda}(\lambda x, \lambda^2 t) - 2\lambda \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t) - \lambda^2 \partial_\lambda \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)),\\ &= (2\lambda)(u_t(\lambda x, \lambda^2 t) - \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)) + (\lambda^2)(\partial_\lambda u_t(\lambda x, \lambda^2 t) - \partial_\lambda \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)),\\ &= (\lambda^2)(\partial_\lambda u_t(\lambda x, \lambda^2 t) - \partial_\lambda \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)),\\ &= (\lambda^2)(\partial_t \partial_\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t) - \Delta \partial_\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)),\\ &= 0.\end{aligned}$$

Por lo que podemos asegurar que $\partial_\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)$ también es solución de la ecuación del calor.
Ahora calculemos $\partial_\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)$:

$$\partial_\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t) = \nabla u(\lambda x, \lambda^2 t) \cdot x + 2\lambda t u_t(\lambda x, \lambda^2 t),$$

fijando $\lambda = 1$ se tiene que:

$$x \cdot \nabla u(x,t) + 2t u_t(x,t) = v(x,t),$$

por lo que se puede asegurar que $v(x,t)$ es una solución de la ecuación del calor.

♥

3. Suponga que u es una solución suave para la ecuación del calor no lineal $u_t - \Delta u = u^3 u_{x_1}$ en $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Encuentre una familia de términos $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $u_\lambda(x,t) = \lambda^a u(\lambda^b x, \lambda^c t)$ también sea solución de tal ecuación del calor no lineal para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
Suponga que $u_\lambda(x,t)$ es solución de la ecuación del calor no lineal, es decir:

$$\partial_t u_\lambda(x,t) - \Delta u_\lambda(x,t) = [u_\lambda(x,t)]^3 \partial_{x_1} u_\lambda(x,t),$$

en donde:

$$\begin{aligned}\partial_t u_\lambda(x,t) &= \lambda^{a+c} u_t(\lambda^b x, \lambda^c t),\\ \Delta u_\lambda(x,t) &= \lambda^{a+2b} \Delta u(\lambda^b x, \lambda^c t),\\ \partial_{x_1} u_\lambda(x,t) &= \lambda^{a+b} \partial_{x_1} u(\lambda^b x, \lambda^c t),\end{aligned}$$

por lo que tenemos que:

$$\lambda^{a+c}u_t(\lambda^b x, \lambda^c t) - \lambda^{a+2b}\Delta u(\lambda^b x, \lambda^c t) = \lambda^{4a+b}u^3(\lambda^b x, \lambda^c t)\partial_{x_1}u(\lambda^b x, \lambda^c t),$$

lo que implica que:

$$\begin{aligned}\lambda^{-3a-b+c}u_t(\lambda^b x, \lambda^c t) - \lambda^{-3a+b}\Delta u(\lambda^b x, \lambda^c t) &= u^3(\lambda^b x, \lambda^c t)\partial_{x_1}u(\lambda^b x, \lambda^c t),\\ \lambda^d(u_t(\lambda^b x, \lambda^c t) - \Delta u(\lambda^b x, \lambda^c t)) &= u^3(\lambda^b x, \lambda^c t)\partial_{x_1}u(\lambda^b x, \lambda^c t),\end{aligned}$$

en donde d tiene que ser igual a 0, por lo que se tiene que:

$$\begin{aligned}-3a - b + c &= 0,\\ -3a + b &= 0,\end{aligned}$$

de lo que podemos deducir que si $a \in \mathbb{R}$, entonces $b = 3a$ y $c = 6a$, por lo que podemos asegurar que para la familia de términos $(a, 3a, 6a)$ con $a \in \mathbb{R}$ se cumple que $u_\lambda(x,t) = \lambda^a u(\lambda^{3a}x, \lambda^{6a}t)$ es solución de la ecuación del calor no lineal anteriormente mencionada.

♥

Problema 2:

Considere el problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g, & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

1. Suponga que $g \in C(\mathbb{R}^n)$ es una función absolutamente integrable, es decir, $\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty$. Muestre que para $0 < \beta < \frac{n}{2}$ existe una solucion $u(x,t)$ del problema de Cauchy anterior que satisface:

$$\lim_{t\to\infty} t^\beta u(x,t) = 0,$$

uniformemente en $x \in \mathbb{R}^n$.
Sugerencia. Considere $u(x,t) = (\phi(\cdot,t) * g)(x)$ y muestre que $|u(x,t)| \leq \frac{\|g\|_{L^1}}{(4\pi t)^{n/2}}$.

Solución:

Note que:

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}} g(y) dy \right|, \\ &\leq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left| e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) \right| dy, \\ &\leq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \, dy, \\ &\leq \frac{\|g\|_{L^1}}{(4\pi t)^{n/2}}. \end{aligned}$$

Luego, usando esto sabemos que:

$$\begin{aligned} |\lim_{t\to\infty} t^\beta u(x,t)| &= \lim_{t\to\infty} t^\beta |u(x,t)|, \\ &\leq \lim_{t\to\infty} \frac{t^\beta \|g\|_{L^1}}{(4\pi t)^{n/2}}, \\ &\leq \lim_{t\to\infty} \frac{C}{t^{n/2-\beta}}, \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Luego como $|\lim_{t\to\infty} t^\beta u(x,t)| = 0$, entonces $\lim_{t\to\infty} t^\beta u(x,t) = 0$.

♥

Problema 3:

Pregunta

Solución:

Solución

♥

Problema 4:

Demuestre el teorema de acotación de derivadas para soluciones de la ecuación del calor. Más precisamente, para cada multi-índices α y β existe una constante $C_{\alpha,\beta} > 0$ tal que

$$\max_{C(x,t;\frac{r}{2})} |\partial_x^\alpha \partial_t^\beta u| \leq \frac{C_{\alpha,\beta}}{r^{|\alpha|+2|\beta|+n+2}} ||u||_{L^1(C(x,t;r))},$$

para todo cilindro $C(x,t;\frac{r}{2}) \subset C(x,t;r) \subset U_T$ y toda solución u de la ecuación de la ecuación del calor en U_T.

Solución:

Solución. Primero fijemos un punto $(x_0,t_0) \in U_T$ y $r > 0$ suficientemente pequeño para que $C := C(x_0,t_0;r) \subset U_T$. Definamos también $C' := C(x_0,t_0;\frac{3}{4}r)$ y $C'' := C(x_0,t_0;\frac{r}{2})$, con el mismo centro superior (x_0,t_0). Tomemos una función suave de cierre $\zeta = \zeta(x,t)$ tal que

Extendamos $\zeta \equiv 0$ en $(\mathbb{R}^n \times [0,t_0]) - C$.

Como u es solución en U_T entonces $u \in C^\infty(U_T)$ y si tomamos

$$v(x,t) := \zeta(x,t)u(x,t) \qquad (x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq t_0).$$

Entonces

$$v_t = \zeta u_t + \zeta_t u, \Delta v = \zeta \Delta u + 2\nabla\zeta \cdot \nabla u + \nabla \zeta u.$$

Luego

$$v = 0 \qquad \text{en } \mathbb{R}^n \times t = 0,$$

y

$$\begin{aligned} v_t - \Delta v &= \zeta u_t + \zeta_t u - \zeta \Delta u - 2\nabla\zeta \cdot \nabla u - \nabla\zeta u \\ &= \zeta(u_t - \Delta u) + \zeta_t u - 2\nabla\zeta \cdot \nabla u - \nabla\zeta u \\ &= \zeta_t u - 2\nabla\zeta \cdot \nabla u - \nabla\zeta u =: \tilde{f} \end{aligned}$$

en $\mathbb{R}^n \times (0,t_0)$. Ahora tome

$$\tilde{v} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s)\tilde{f}(y,s)dyds.$$

De acuerdo a la fórmula de Duhamel

♥