

# Ecuaciones Diferenciales Parciales: Taller 4

16 de agosto del 2024

*Universidad Nacional de Colombia*

Oscar Guillermo Riaño Castañeda

Andrés David Cadena Simons  
David Felipe Viuche Malaver

acadenas@unal.edu.co  
dviuchem@unal.edu.co

## Problema 1:

1. Suponga que  $u$  es una solución suave de la ecuación del calor  $u_t - \Delta u = 0$  en  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ . Encuentre una familia de términos  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que  $u_\lambda(x, t) = u(\lambda^a x, \lambda^b t)$  también sea solución de la ecuación del calor para todo  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ .
2. Use el ejercicio anterior para mostrar que  $v(x, t) := x \cdot \nabla u(x, t) + 2tu_t(x, t)$  también soluciona la ecuación del calor.
3. Suponga que  $u$  es una solución suave para la ecuación del calor no lineal  $u_t - \Delta u = u^3 u_{x_1}$  en  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ . Encuentre una familia de términos  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tales que  $u_\lambda(x, t) = \lambda^a u(\lambda^b x, \lambda^c t)$  también sea solución de tal ecuación del calor no lineal para todo  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ .

### Solución:

1. Suponga que  $u$  es una solución suave de la ecuación del calor  $u_t - \Delta u = 0$  en  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ . Encuentre una familia de términos  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que  $u_\lambda(x, t) = u(\lambda^a x, \lambda^b t)$  también sea solución de la ecuación del calor para todo  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ .  
Suponga que  $u_\lambda(x, t)$  satisface la ecuación del calor, es decir:

$$u_{\lambda_t}(x, t) - \Delta u_\lambda(x, t) = 0,$$

en  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ , luego:

$$\begin{aligned} u_{\lambda_t}(x, y) &= u_t(\lambda^a x, \lambda^b t) \\ &= u_t(\lambda^a x, \lambda^b t)(\lambda^b) \\ \Delta u_\lambda &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u_\lambda(x, t)}{\partial x_i \partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i}(\lambda^a x, \lambda^b t)(\lambda^a)^2 \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} u_{\lambda_t}(x, t) - \Delta u_\lambda(x, t) &= \lambda^b u_t(\lambda^a x, \lambda^b t) - \lambda^{2a} \Delta u(\lambda^a x, \lambda^b t) \\ &= \lambda^c (u_t(\lambda^a x, \lambda^b t) - \Delta u(\lambda^a x, \lambda^b t)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego  $\lambda^c = \lambda^b = \lambda^{2a}$ , por lo que podemos concluir en que  $2a = b$ , luego  $u_\lambda(x, t) = u(\lambda^a x, \lambda^{2a} t)$  es solución para la ecuación del calor para todo  $a \in \mathbb{R}$ .



2. Use el ejercicio anterior para mostrar que  $v(x, t) := x \cdot \nabla u(x, t) + 2tu_t(x, t)$  también soluciona la ecuación del calor.

Note que si tomamos  $a = 1$ , como para todo  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  se cumple que  $u_{\lambda t}(x, t)$  soluciona la ecuación del calor, es decir:

$$\begin{aligned} u_{\lambda t}(x, t) - \Delta u_{\lambda}(x, y) &= \lambda^2 u_t(\lambda x, \lambda^2 t) - \lambda^2 \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t), \\ &= 0, \end{aligned}$$

luego si derivamos respecto a  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \partial_{\lambda}(u_{\lambda t}(x, t) - \Delta u_{\lambda}(x, y)) &= \partial_{\lambda}(\lambda^2 u_t(\lambda x, \lambda^2 t)) - \partial_{\lambda}(\lambda^2 \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)), \\ &= 2\lambda u_t(\lambda x, \lambda^2 t) + \lambda^2 u_{t\lambda}(\lambda x, \lambda^2 t) - 2\lambda \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t) - \lambda^2 \partial_{\lambda} \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t), \\ &= (2\lambda)(u_t(\lambda x, \lambda^2 t) - \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)) + (\lambda^2)(\partial_{\lambda} u_t(\lambda x, \lambda^2 t) - \partial_{\lambda} \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)), \\ &= (\lambda^2)(\partial_{\lambda} u_t(\lambda x, \lambda^2 t) - \partial_{\lambda} \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)), \\ &= (\lambda^2)(\partial_t \partial_{\lambda} u(\lambda x, \lambda^2 t) - \Delta \partial_{\lambda} u(\lambda x, \lambda^2 t)), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo que podemos asegurar que  $\partial_{\lambda} u(\lambda x, \lambda^2 t)$  también es solución de la ecuación del calor.

Ahora calculemos  $\partial_{\lambda} u(\lambda x, \lambda^2 t)$ :

$$\partial_{\lambda} u(\lambda x, \lambda^2 t) = \nabla u(\lambda x, \lambda^2 t) \cdot x + 2\lambda t u_t(\lambda x, \lambda^2 t),$$

fijando  $\lambda = 1$  se tiene que:

$$x \cdot \nabla u(x, t) + 2t u_t(x, t) = v(x, t),$$

por lo que se puede asegurar que  $v(x, t)$  es una solución de la ecuación del calor.

3. Suponga que  $u$  es una solución suave para la ecuación del calor no lineal  $u_t - \Delta u = u^3 u_{x_1}$  en  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ . Encuentre una familia de términos  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tales que  $u_{\lambda}(x, t) = \lambda^a u(\lambda^b x, \lambda^c t)$  también sea solución de tal ecuación del calor no lineal para todo  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ .

## Problema 2:

Pregunta

**Solución:**

Solución No tengo ni puta idea



## Problema 3:

Pregunta

**Solución:**

Solución



## Problema 4:

Pregunta

**Solución:**

Solución

