Ecuaciones Diferenciales Parciales: Taller 4

16 de agosto del 2024

Universidad Nacional de Colombia

Oscar Guillermo Riaño Castañeda

Andrés David Cadena Simons	acadenas@unal.edu.co
David Felipe Viuche Malaver	dviuchem@unal.edu.co

Problema 1:

1. Suponga que u es una solución suave de la ecuación del calor $u_t - \Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Encuentre una familia de términos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $u_\lambda(x,t) = u(\lambda^a x, \lambda^b t)$ también sea solución de la ecuación del calor para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
2. Use el ejercicio anterior para mostrar que $v(x,t) := x \cdot \nabla u(x,t) + 2tu_t(x,t)$ también soluciona la ecuación del calor.
3. Suponga que u es una solución suave para la ecuación del calor no lineal $u_t - \Delta u = u^3 u_{x_1}$ en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Encuentre una familia de términos $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $u_\lambda(x,t) = \lambda^a u(\lambda^b x, \lambda^c t)$ también sea solución de tal ecuación del calor no lineal para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Solución:

1. Suponga que u es una solución suave de la ecuación del calor $u_t - \Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Encuentre una familia de términos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $u_\lambda(x,t) = u(\lambda^a x, \lambda^b t)$ también sea solución de la ecuación del calor para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
   Suponga que $u_\lambda(x,t)$ satisface la ecuación del calor, es decir:
   $$u_{\lambda t}(x,t) - \Delta u_\lambda(x,t) = 0,$$
   en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$, luego:
   $$\begin{aligned} u_{\lambda t}(x,y) &= u_t(\lambda^a x, \lambda^b t) \\ &= u_t(\lambda^a x, \lambda^b t)(\lambda^b) \\ \Delta u_\lambda &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u_\lambda(x,t)}{\partial x_i x_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_i}(\lambda^a x, \lambda^b t)(\lambda^a)^2 \end{aligned}$$
   Luego:
   $$\begin{aligned} u_{\lambda_t}(x,t) - \Delta u_\lambda(x,t) &= \lambda^b u_t(\lambda^a x, \lambda^b t) - \lambda^{2a} \Delta u(\lambda^a x, \lambda^b t) \\ &= \lambda^c (u_t(\lambda^a x, \lambda^b t) - \Delta u(\lambda^a x, \lambda^b t)) \\ &= 0 \end{aligned}$$
   Luego $\lambda^c = \lambda^b = \lambda^{2a}$, por lo que podemos concluir en que $2a = b$, luego $u_\lambda(x,t) = u(\lambda^a x, \lambda^{2a} t)$ es solución para la ecuación del calor para todo $a \in \mathbb{R}$.

   ♥

2. Use el ejercicio anterior para mostrar que $v(x,t) := x \cdot \nabla u(x,t) + 2tu_t(x,t)$ también soluciona la ecuación del calor.

Problema 1 continúa en la siguiente página. . .

Note que si tomamos $a = 1$, como para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$ se cumple que $u_{\lambda_t}(x,t)$ soluciona la ecuación del calor, es decir:

$$\begin{aligned} u_{\lambda_t}(x,t) - \Delta u_\lambda(x,y) &= \lambda^2 u_t(\lambda x, \lambda^2 t) - \lambda^2 \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t), \\ &= 0, \end{aligned}$$

luego si derivamos respecto a λ:

$$\begin{aligned} \partial_\lambda(u_{\lambda_t}(x,t) - \Delta u_\lambda(x,y)) &= \partial_\lambda(\lambda^2 u_t(\lambda x, \lambda^2 t)) - \partial_\lambda(\lambda^2 \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)), \\ &= 2\lambda u_t(\lambda x, \lambda^2 t) + \lambda^2 u_{t\lambda}(\lambda x, \lambda^2 t) - 2\lambda \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t) - \lambda^2 \partial_\lambda \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)), \\ &= (2\lambda)(u_t(\lambda x, \lambda^2 t) - \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)) + (\lambda^2)(\partial_\lambda u_t(\lambda x, \lambda^2 t) - \partial_\lambda \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)), \\ &= (\lambda^2)(\partial_\lambda u_t(\lambda x, \lambda^2 t) - \partial_\lambda \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)), \\ &= ((\lambda^2)(\partial_t \partial_\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t) - \Delta \partial_\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo que podemos asegurar que $\partial_\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)$ también es solución de la ecuación del calor.
Ahora calculemos $\partial_\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)$:

$$\partial_\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t) = \nabla u(\lambda x, \lambda^2 t) \cdot x + 2\lambda t u_t(\lambda x, \lambda^2 t),$$

fijando $\lambda = 1$ se tiene que:

$$x \cdot \nabla u(x,t) + 2t u_t(x,t) = v(x,t),$$

por lo que se puede asegurar que $v(x,t)$ es una solución de la ecuación del calor.

♥

3. Suponga que u es una solución suave para la ecuación del calor no lineal $u_t - \Delta u = u^3 u_{x_1}$ en $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Encuentre una familia de términos $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $u_\lambda(x,t) = \lambda^a u(\lambda^b x, \lambda^c t)$ también sea solución de tal ecuación del calor no lineal para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

♥

Problema 2:

Pregunta

Solución:

Solución

♥

Problema 3:

Pregunta

Solución:

Solución

Problema 4:

Pregunta

Solución:

Solución