

# Ecuaciones Diferenciales Parciales: Taller 4

16 de agosto del 2024

*Universidad Nacional de Colombia*

Oscar Guillermo Riaño Castañeda

Andrés David Cadena Simons  
David Felipe Viuche Malaver

acadenas@unal.edu.co  
dviuchem@unal.edu.co

## Problema 1:

1. Suponga que  $u$  es una solución suave de la ecuación del calor  $u_t - \Delta u = 0$  en  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ . Encuentre una familia de términos  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que  $u_\lambda(x, t) = u(\lambda^a x, \lambda^b t)$  también sea solución de la ecuación del calor para todo  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ .
2. Use el ejercicio anterior para mostrar que  $v(x, t) := x \cdot \nabla u(x, t) + 2tu_t(x, t)$  también soluciona la ecuación del calor.
3. Suponga que  $u$  es una solución suave para la ecuación del calor no lineal  $u_t - \Delta u = u^3 u_{x_1}$  en  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ . Encuentre una familia de términos  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tales que  $u_\lambda(x, t) = \lambda^a u(\lambda^b x, \lambda^c t)$  también sea solución de tal ecuación del calor no lineal para todo  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ .

### Solución:

1. Suponga que  $u$  es una solución suave de la ecuación del calor  $u_t - \Delta u = 0$  en  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ . Encuentre una familia de términos  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que  $u_\lambda(x, t) = u(\lambda^a x, \lambda^b t)$  también sea solución de la ecuación del calor para todo  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ .  
Suponga que  $u_\lambda(x, t)$  satisface la ecuación del calor, es decir:

$$\partial_t u_\lambda(x, t) - \Delta u_\lambda(x, t) = 0,$$

en  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ , luego:

$$\begin{aligned} \partial_t u_\lambda(x, t) &= u_t(\lambda^a x, \lambda^b t) \\ &= u_t(\lambda^a x, \lambda^b t)(\lambda^b) \\ \Delta u_\lambda &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u_\lambda(x, t)}{\partial x_i^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(\lambda^a x, \lambda^b t)(\lambda^a)^2 \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} u_{\lambda_t}(x, t) - \Delta u_\lambda(x, t) &= \lambda^b u_t(\lambda^a x, \lambda^b t) - \lambda^{2a} \Delta u(\lambda^a x, \lambda^b t) \\ &= \lambda^c (u_t(\lambda^a x, \lambda^b t) - \Delta u(\lambda^a x, \lambda^b t)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego  $\lambda^c = \lambda^b = \lambda^{2a}$ , por lo que podemos concluir en que  $2a = b$ , luego  $u_\lambda(x, t) = u(\lambda^a x, \lambda^{2a} t)$  es solución para la ecuación del calor para todo  $a \in \mathbb{R}$ .



2. Use el ejercicio anterior para mostrar que  $v(x, t) := x \cdot \nabla u(x, t) + 2tu_t(x, t)$  también soluciona la ecuación del calor.

Note que si tomamos  $a = 1$ , como para todo  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  se cumple que  $u_{\lambda^t}(x, t)$  soluciona la ecuación del calor, es decir:

$$\begin{aligned}\partial_t u_\lambda(x, t) - \Delta u_\lambda(x, y) &= \lambda^2 u_t(\lambda x, \lambda^2 t) - \lambda^2 \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t), \\ &= 0,\end{aligned}$$

luego si derivamos respecto a  $\lambda$ :

$$\begin{aligned}\partial_\lambda(\partial_t u_\lambda(x, t) - \Delta u_\lambda(x, y)) &= \partial_\lambda(\lambda^2 u_t(\lambda x, \lambda^2 t)) - \partial_\lambda(\lambda^2 \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)), \\ &= 2\lambda u_t(\lambda x, \lambda^2 t) + \lambda^2 u_{t\lambda}(\lambda x, \lambda^2 t) - 2\lambda \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t) - \lambda^2 \partial_\lambda \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t), \\ &= (2\lambda)(u_t(\lambda x, \lambda^2 t) - \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)) + (\lambda^2)(\partial_\lambda u_t(\lambda x, \lambda^2 t) - \partial_\lambda \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)), \\ &= (\lambda^2)(\partial_\lambda u_t(\lambda x, \lambda^2 t) - \partial_\lambda \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)), \\ &= (\lambda^2)(\partial_t \partial_\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t) - \Delta \partial_\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)), \\ &= 0.\end{aligned}$$

Por lo que podemos asegurar que  $\partial_\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)$  también es solución de la ecuación del calor.

Ahora calculemos  $\partial_\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)$ :

$$\partial_\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t) = \nabla u(\lambda x, \lambda^2 t) \cdot x + 2\lambda t u_t(\lambda x, \lambda^2 t),$$

fijando  $\lambda = 1$  se tiene que:

$$x \cdot \nabla u(x, t) + 2tu_t(x, t) = v(x, t),$$

por lo que se puede asegurar que  $v(x, t)$  es una solución de la ecuación del calor.



3. Suponga que  $u$  es una solución suave para la ecuación del calor no lineal  $u_t - \Delta u = u^3 u_{x_1}$  en  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ . Encuentre una familia de términos  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tales que  $u_\lambda(x, t) = \lambda^a u(\lambda^b x, \lambda^c t)$  también sea solución de tal ecuación del calor no lineal para todo  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ . Suponga que  $u_\lambda(x, t)$  es solución de la ecuación del calor no lineal, es decir:

$$\partial_t u_\lambda(x, t) - \Delta u_\lambda(x, t) = [u_\lambda(x, t)]^3 \partial_{x_1} u_\lambda(x, t),$$

en donde:

$$\begin{aligned}\partial_t u_\lambda(x, t) &= \lambda^{a+c} u_t(\lambda^b x, \lambda^c t), \\ \Delta u_\lambda(x, t) &= \lambda^{a+2b} \Delta u(\lambda^b x, \lambda^c t), \\ \partial_{x_1} u_\lambda(x, t) &= \lambda^{a+b} \partial_{x_1} u(\lambda^b x, \lambda^c t),\end{aligned}$$

por lo que tenemos que:

$$\lambda^{a+c}u_t(\lambda^b x, \lambda^c t) - \lambda^{a+2b}\Delta u(\lambda^b x, \lambda^c t) = \lambda^{4a+b}u^3(\lambda^b x, \lambda^c t)\partial_{x_1}u(\lambda^b x, \lambda^c t),$$

lo que implica que:

$$\begin{aligned}\lambda^{-3a-b+c}u_t(\lambda^b x, \lambda^c t) - \lambda^{-3a+b}\Delta u(\lambda^b x, \lambda^c t) &= u^3(\lambda^b x, \lambda^c t)\partial_{x_1}u(\lambda^b x, \lambda^c t), \\ \lambda^d(u_t(\lambda^b x, \lambda^c t) - \Delta u(\lambda^b x, \lambda^c t)) &= u^3(\lambda^b x, \lambda^c t)\partial_{x_1}u(\lambda^b x, \lambda^c t),\end{aligned}$$

en donde  $d$  tiene que ser igual a 0, por lo que se tiene que:

$$\begin{aligned}-3a - b + c &= 0, \\ -3a + b &= 0,\end{aligned}$$

de lo que podemos deducir que si  $a \in \mathbb{R}$ , entonces  $b = 3a$  y  $c = 6a$ , por lo que podemos asegurar que para la familia de términos  $(a, 3a, 6a)$  con  $a \in \mathbb{R}$  se cumple que  $u_\lambda(x, t) = \lambda^a u(\lambda^{3a}x, \lambda^{6a}t)$  es solución de la ecuación del calor no lineal anteriormente mencionada.

## Problema 2:

Considere el problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g, & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

- Suponga que  $g \in C(\mathbb{R}^n)$  es una función absolutamente integrable, es decir,  $\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty$ . Muestre que para  $0 < \beta < \frac{n}{2}$  existe una solución  $u(x, t)$  del problema de Cauchy anterior que satisface:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\beta u(x, t) = 0,$$

uniformemente en  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Sugerencia.** Considere  $u(x, t) = (\phi(\cdot, t) * g)(x)$  y muestre que  $|u(x, t)| \leq \frac{\|g\|_{L^1}}{(4\pi t)^{n/2}}$ .

### Solución:

Note que:

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}} g(y) dy \right|, \\ &\leq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left| e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) \right| dy, \\ &\leq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy, \\ &\leq \frac{\|g\|_{L^1}}{(4\pi t)^{n/2}}. \end{aligned}$$

Luego, usando esto sabemos que:

$$\begin{aligned} \left| \lim_{t \rightarrow \infty} t^\beta u(x, t) \right| &= \lim_{t \rightarrow \infty} t^\beta |u(x, t)|, \\ &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^\beta \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{(4\pi t)^{n/2}}, \\ &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C}{t^{n/2-\beta}}, \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Luego como  $|\lim_{t \rightarrow \infty} t^\beta u(x, t)| = 0$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} t^\beta u(x, t) = 0$ .



2. Sea  $m > n + \frac{1}{4}$ , donde  $n \geq 1$  denota la dimensión del espacio  $\mathbb{R}^n$ . Suponga que  $g \in C(\mathbb{R}^n)$  es una función tal que  $|x|^m g(x)$  es acotada (es decir,  $\| |x|^m g(x) \|_{L^\infty} < \infty$ ). Muestre que para  $0 \leq \beta \leq \frac{n}{2} - \frac{1}{8}$  existe una solución  $u(x, t)$  del problema de Cauchy anterior que satisface:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\beta |x|^{\frac{1}{4}} u(x, t) = 0,$$

uniformemente en  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Sugerencia.** Primero, dado  $l > 0$ , deduzca que existe una constante  $c_l > 0$  tal que  $(a + b)^l \leq c_l(a^l + b^l)$ , para todo  $a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ . Con este resultado muestre que para alguna constante  $c > 0$ :

$$|x|^{\frac{1}{4}} \leq c(|x - y|^{\frac{1}{4}} + |y|^{\frac{1}{4}}),$$

para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Segundo, utilizando la hipótesis sobre  $g$ , muestre que  $|x|^{\frac{1}{4}} g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Sea  $u(x, t) = (\Phi(\cdot, t) * g)(x)$ , por el primer resultado previo, obtenemos que:

$$\begin{aligned} ||x|^{\frac{1}{4}} u(x, t)| &\leq \frac{c}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |g(y)| dy \\ &\quad + \frac{c}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |y|^{\frac{1}{4}} |g(y)| dy. \end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad anterior y el hecho de que  $|x|^{\frac{1}{4}} g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$  concluya el límite cuanto  $t \rightarrow 0^+$ .

### Solución:

Note que para el caso  $a = 0$  o  $b = 0$ , la desigualdad es trivial, por lo que nos concentraremos en el caso  $a \neq b \neq 0$ :

$$\begin{aligned} (a + b)^l &= \frac{(a + b)^l}{b^l} b^l, \\ &= \left( \frac{a}{b} + 1 \right)^l b^l. \\ a^l + b^l &= \left( \left( \frac{a}{b} \right)^l + 1 \right) b^l. \end{aligned}$$

Suponga  $z = \frac{a}{b}$  y note que:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{(z + 1)^l}{z^l + 1} = 1,$$

por lo que usando la propiedad arquimediana, podemos asegurar que existe un  $c_l$  tal que  $(z + 1)^l \leq c_l(z^l + 1)$ , lo cual implica que  $(a + b)^l \leq c_l(a^l + b^l)$  para todo  $a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ .

Luego, utilizando este resultado sabemos que:

$$\begin{aligned} |x|^{1/4} &\leq |x - y + y|^{1/4}, \\ &\leq (|x - y| + |y|)^{1/4}, \\ &\leq c(|x - y|^{1/4} + |y|^{1/4}), \end{aligned}$$

para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

Ahora, veamos que  $|x|^{1/4}g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .

Definimos  $k = d(m, \frac{1}{4})$ , luego como  $n = d(n + \frac{1}{4}, n)$  y  $n \geq 1$ , entonces  $k > 1$ , de lo que sigue que:

$$\begin{aligned} \||x|^{1/4}g(x)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| |x|^{1/4}g(x) \right| dx, \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{|x|^m g(x)}{|x|^k} \right| dx, \\ &\leq \||x|^m g(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x|^k} dx, \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Ahora note que:

$$\begin{aligned} \left| \lim_{t \rightarrow \infty} t^\beta |x|^{1/4} u(x, t) \right| &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \left| t^\beta |x|^{1/4} g(x) \right|, \\ &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} t^\beta \left( \frac{c}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{1/4} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |g(y)| dy \right. \\ &\quad \left. + \frac{c}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |y|^{1/4} |g(y)| dy \right), \\ &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{ct^\beta}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} (I + J), \end{aligned}$$

de lo cuál nos conviene ver que  $I < \infty$  y  $J < \infty$ .

Para  $I$  note que si suponemos  $z = \frac{|x-y|^2}{4t}$  tenemos que:

$$\||x - y|^{1/4} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = ct^{\frac{1}{8}} \||z|^{1/4} e^{-z^2}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

de lo que sigue que:

$$\begin{aligned}
I &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |g(y)| dy, \\
&\leq \| |x-y|^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy, \\
&\leq (ct^{\frac{1}{8}}) \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy \\
&\leq (ct^{\frac{1}{8}}) \left( \int_{B(0,1)} |g(y)| + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)} |g(y)| \right), \\
&\leq (ct^{\frac{1}{8}}) \left( \int_{B(0,1)} |g(y)| + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)} |y|^{\frac{1}{4}} |g(y)| \right), \\
&\leq (ct^{\frac{1}{8}}) \left( k + \| |x|^{\frac{1}{4}} g \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \right), \\
&\leq kt^{\frac{1}{8}}.
\end{aligned}$$

Ahora, note que para  $J$  tenemos que:

$$\begin{aligned}
J &\leq \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |y|^{\frac{1}{4}} |g(y)| dy, \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |y|^{\frac{1}{4}} |g(y)| dy, \\
&\leq k.
\end{aligned}$$

Por lo que recordando que  $0 \leq \beta \leq \frac{n}{2} - \frac{1}{8}$ , es decir  $0 < \frac{n}{2} - \beta - \frac{1}{8}$ , podemos concluir que:

$$\begin{aligned}
\left| \lim_{t \rightarrow \infty} t^\beta |x|^{\frac{1}{4}} u(x, t) \right| &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{ct^\beta}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} (kt^{\frac{1}{8}} + k), \\
&\leq \lim_{t \rightarrow \infty} m \frac{1}{t^{\frac{n}{2} - \beta - \frac{1}{8}}}, \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Por lo que se concluye que  $\lim_{t \rightarrow \infty} t^\beta |x|^{\frac{1}{4}} u(x, t) = 0$ .



### Problema 3:

Sea  $U$  un abierto cotado de  $\mathbb{R}^n, T > 0$ .

- Muestre que si  $v$  es subsolución, entonces

$$v(x) \leq \frac{1}{4r^n} \int \int_{E(x,t;r)} v(y,s) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} dy ds,$$

para todo  $E(x,t;r) \subset U_T$ .

- Como consecuencia muestre que  $\max_{\overline{U_T}} v = \max_{\Gamma_T} v$ .
- Sea  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave convexa ( $\phi'' \geq 0$ ). Demuestre que si  $u$  es una solución de la ecuación del calor, entonces la función  $v = \phi(u)$  es una subsolución.
- Demuestre que si  $u$  soluciona la ecuación del calor, entonces  $v = |\nabla u|^2 + u_t^2$  es una subsolución.

#### Solución:

Como en la prueba de Evans, comenzaremos con un desplazamiento para quedar con  $x = 0, t = 0$ . Y tomamos

$$\begin{aligned} \phi(r) &:= \frac{1}{r^n} \int \int_{E(r)} u(y,s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds \\ &= \int \int_{E(1)} u(r y, r^2 s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds. \end{aligned}$$

Calculamos

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \int \int_{E(1)} \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i \frac{|y|^2}{s^2} + 2r u_s \frac{|y|^2}{s} dy ds \\ &= \frac{1}{r^n + 1} \int \int_{E(r)} \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i \frac{|y|^2}{s^2} + 2u_s \frac{|y|^2}{s} dy ds \\ &:= A + B. \end{aligned}$$

Note que  $\partial E(0,0;r) = \left\{ (y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} : s \leq 0, \frac{1}{(-4\pi s)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|y|^2}{4s}} = \frac{1}{r^n} \right\}$ . Es decir, en  $\partial E(r)$  se tiene que

$$\frac{|y|^2}{4s} = -n \log(r) + \frac{n}{2} \log(-4\pi s).$$

Por lo que si definimos

$$\psi := -\frac{n}{2} \log(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s} + n \log(r)$$

Es claro que  $\psi = 0$  en  $\partial E(r)$ . Además note que  $\psi_{y_i} = \frac{y_i}{2s}$  para  $i = 1, \dots, n$ . Luego  $\sum_{i=1}^n y_i \psi_{y_i} = \frac{|y|^2}{2s}$ , por lo que podemos escribir B como sigue

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{r^{n+1}} \int \int_{E(r)} 4u_s \sum_{i=1}^n y_i \psi_{y_i} dy ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \int \int_{E(r)} 4 \sum_{i=1}^n (u_s y_i) \psi_{y_i} dy ds. \end{aligned}$$

Integrando por partes respecto a cada  $y_i$  y teniendo en cuenta que  $\psi$  se anula en  $\partial E(r)$  siempre se perderá el término de borde y en consecuencia

$$\begin{aligned} B &= -\frac{1}{r^{n+1}} \int \int_{E(r)} 4 \sum_{i=1}^n (u_s y_i)_{y_i} \psi dy ds \\ &= -\frac{1}{r^{n+1}} \int \int_{E(r)} 4 \sum_{i=1}^n (u_s + u_{s y_i} y_i) \psi dy ds \\ &= -\frac{1}{r^{n+1}} \int \int_{E(r)} 4n u_s \psi + 4 \sum_{i=1}^n u_{s y_i} y_i \psi dy ds. \end{aligned}$$

Ahora integramos por partes respecto a  $s$  en el segundo término y obtenemos

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{r^{n+1}} \int \int_{E(r)} -4n u_s \psi + 4 \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i \psi_s dy ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \int \int_{E(r)} -4n u_s \psi + 4 \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i \left( -\frac{n}{2s} - \frac{|y|^2}{4s^2} \right) dy ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \int \int_{E(r)} -4n u_s \psi - \frac{2n}{s} \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i dy ds - A. \end{aligned}$$

Ahora es cuando usaremos que  $u$  es subsolución ( $u_t \leq \Delta u$ ).

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= A + B \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \int \int_{E(r)} -4n u_s \psi - \frac{2n}{s} \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i dy ds \\ &\geq \frac{1}{r^{n+1}} \int \int_{E(r)} -4n \Delta u \psi - \frac{2n}{s} \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i dy ds. \end{aligned}$$

Donde al usar una fórmula de Green (integrar por partes varias veces) en el primer término obtenemos

$$\begin{aligned}
 \phi'(r) &\geq \frac{1}{r^{n+1}} \int \int_{E(r)} 4n \nabla u \cdot \nabla \psi - \frac{2n}{s} \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i dy ds \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{r^{n+1}} \int \int_{E(r)} 4n u_{y_i} \psi_{y_i} - \frac{2n}{s} u_{y_i} y_i dy ds \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{r^{n+1}} \int \int_{E(r)} 4n u_{y_i} \left( \frac{y_i}{2s} \right) - \frac{2n}{s} u_{y_i} y_i dy ds \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Si tomamos  $0 < \delta < r$ , se cumple

$$\int_{\delta}^r \phi'(z) dz = \phi(r) - \phi(\delta) \geq 0.$$

Luego,  $\phi(r) \geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \phi(\delta) = u(0, 0) \left( \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta^n} \int \int_{E(\delta)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds \right)$ .

Solamente nos queda ver el valor de  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta^n} \int \int_{E(\delta)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = \int \int_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds$ .

Por como está definida  $E(1)$  podemos plantear los límites de integración como sigue:

$$\int_{-\frac{1}{4\pi}}^0 \int_{|y| \leq \sqrt{2ns \log(-4\pi s)}} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds,$$

Hacemos un cambio a coordenadas polares y otro cambio de variable  $w = \frac{y}{r}$

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\frac{1}{4\pi}}^0 \int_0^{\sqrt{2ns \log(-4\pi s)}} \int_{\partial B(0,1)} \frac{|rw|^2}{s^2} r^{n-1} dS(w) dr ds \\
 &= \int_{-\frac{1}{4\pi}}^0 \int_0^{\sqrt{2ns \log(-4\pi s)}} \int_{\partial B(0,1)} \frac{r^{n+1}}{s^2} dS(w) dr ds \\
 &= |B(0, 1)| \int_{-\frac{1}{4\pi}}^0 \int_0^{\sqrt{2ns \log(-4\pi s)}} \frac{r^{n+1}}{s^2} dr ds \\
 &= \frac{|B(0, 1)|}{n+2} \int_{-\frac{1}{4\pi}}^0 \frac{(2ns \log(-4\pi s))^{\frac{n}{2}+1}}{s^2} ds \\
 &= \frac{|B(0, 1)|(2n)^{\frac{n}{2}+1}}{n+2} \int_{-\frac{1}{4\pi}}^0 \frac{(\log(-4\pi s))^{\frac{n}{2}+1}}{s^2} ds
 \end{aligned}$$

Ahora sigamos viendo esta última integral. Considerando la sustitución  $x = -4\pi s$  tenemos:

$$\int_{-\frac{1}{4\pi}}^0 \frac{(s \log(-4\pi s))^{\frac{n}{2}+1}}{s^2} ds = \int_1^0 \frac{((- \frac{x}{4\pi}) \log(x))^{\frac{n}{2}+1}}{(s^{\frac{x}{4\pi}})^2} (-\frac{1}{4\pi}) dx,$$

tomando  $z = -\log(x)$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{((- \frac{e^{-z}}{4\pi}) \log(x))^{\frac{n}{2}+1}}{(- \frac{e^{-z}}{4\pi})^2} (-e^{-z}) dz \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty e^{-\frac{nz}{2}} z^{\frac{n}{2}+1} dz \end{aligned}$$

Cambiando  $w = \frac{nz}{2}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty e^{-w} \left(\frac{2w}{n}\right)^{\frac{n}{2}+1} \frac{2}{n} dw \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}+1} \int_0^\infty e^{-w} w^{\frac{n}{2}+1} dw \\ &= \frac{1}{2^n \pi^{\frac{n}{2}} 2^{-\frac{n}{2}-2} n^{\frac{n}{2}+2}} \int_0^\infty e^{-w} w^{\frac{n}{2}+2-1} dw \end{aligned}$$

Por como está definida la función  $\Gamma$ , se tiene que

$$= \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}} 2^{\frac{n}{2}-2} n^{\frac{n}{2}+2}} \Gamma(2 + \frac{n}{2})$$

Juntando ahora todas las constantes concluimos

$$\frac{(2n)^{\frac{n}{2}+1}}{n+2} |B(0,1)| \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}} 2^{\frac{n}{2}-2} n^{\frac{n}{2}+2}}$$



Ahora veamos que como consecuencia se tiene que  $\max_{\overline{U_T}} v = \max_{\Gamma_T} v$ .

Suponga  $v_\epsilon(x, t) = u(x, t) - \epsilon t$ , con  $u$  solución de la ecuación del calor, entonces:

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta)v &= (\partial_t - \Delta)(u - \epsilon t), \\ &= (\partial_t - \Delta)u - \epsilon, \\ &< 0. \end{aligned}$$

Luego, usando el principio del máximo para soluciones de la ecuación del calor se tiene que:

$$\begin{aligned} \max_{\overline{U_T}} u &= \max_{\overline{U_T}} v_\epsilon, \\ &= \max_{\Gamma_T} v_\epsilon(u - \epsilon t), \\ &\leq \max_{\Gamma_T} u. \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}\frac{\max}{\overline{U_T}} u &= \frac{\max}{\overline{U_T}} u - \epsilon t + \epsilon t, \\ &\leq \frac{\max}{\overline{U_T}} v_\epsilon - \epsilon T,\end{aligned}$$

de lo que se sigue que:

$$\begin{aligned}\frac{\max}{\overline{U_T}} u - \epsilon T &\leq \frac{\max}{\overline{U_T}} v, \\ &\leq \frac{\max}{\Gamma_T} u.\end{aligned}$$

Ahora si tomamos  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , se puede concluir que:

$$\frac{\max}{\overline{U_T}} u \leq \frac{\max}{\Gamma_T} u,$$

de lo que se sigue que:

$$\frac{\max}{\overline{U_T}} v = \frac{\max}{\Gamma_T} v.$$

Lo cual concluye la demostración.



## Problema 4:

Demuestre el teorema de acotación de derivadas para soluciones de la ecuación del calor. Más precisamente, para cada multi-índices  $\alpha$  y  $\beta$  existe una constante  $C_{\alpha,\beta} > 0$  tal que

$$\max_{C(x,t;\frac{r}{2})} |\partial_x^\alpha \partial_t^\beta u| \leq \frac{C_{\alpha,\beta}}{r^{|\alpha|+2|\beta|+n+2}} \|u\|_{L^1(C(x,t;r))},$$

para todo cilindro  $C(x,t;\frac{r}{2}) \subset C(x,t;r) \subset U_T$  y toda solución  $u$  de la ecuación de la ecuación del calor en  $U_T$ .

### Solución:

Solución. Primero fijemos un punto  $(x_0, t_0) \in U_T$  y  $r > 0$  suficientemente pequeño para que  $C := C(x_0, t_0; r) \subset U_T$ . Definamos también  $C' := C(x_0, t_0; \frac{3}{4}r)$  y  $C'' := C(x_0, t_0; \frac{r}{2})$ , con el mismo centro superior  $(x_0, t_0)$ . Tomemos una función suave de cierre  $\zeta = \zeta(x, t)$  tal que

$$\begin{cases} 0 \leq \zeta \leq 1, \zeta \equiv 1 \text{ en } C', \\ \zeta \equiv 0 \text{ cerca del borde parabólico de } C. \end{cases}$$

Extendamos  $\zeta \equiv 0$  en  $(\mathbb{R}^n \times [0, t_0]) - C$ .

Como  $u$  es solución en  $U_T$  entonces  $u \in C^\infty(U_T)$  y si tomamos

$$v(x, t) := \zeta(x, t)u(x, t) \quad (x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq t_0).$$

Entonces

$$v_t = \zeta u_t + \zeta_t u, \Delta v = \zeta \Delta u + 2\nabla \zeta \cdot \nabla u + \nabla \zeta u.$$

Luego

$$v = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times t = 0,$$

y

$$\begin{aligned} v_t - \Delta v &= \zeta u_t + \zeta_t u - \zeta \Delta u - 2\nabla \zeta \cdot \nabla u - \nabla \zeta u \\ &= \zeta(u_t - \Delta u) + \zeta_t u - 2\nabla \zeta \cdot \nabla u - \nabla \zeta u \\ &= \zeta_t u - 2\nabla \zeta \cdot \nabla u - \nabla \zeta u =: \tilde{f} \end{aligned}$$

en  $\mathbb{R}^n \times (0, t_0)$ . Ahora tome

$$\tilde{v} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) \tilde{f}(y, s) dy ds.$$

De modo que,

$$\begin{cases} \tilde{v}_t - \Delta \tilde{v} = \tilde{f} \text{ en } \mathbb{R}^n \times (0, t_0), \\ \tilde{v} = 0 \text{ en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Como tanto  $v$  como  $\tilde{v}$  satisfacen la misma ecuación del calor y por como están definidas podemos concluir que están acotadas. Luego,  $v \equiv \tilde{v}$  debido al teorema de unicidad de solución. Así tenemos que

$$v(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) \tilde{f} dy ds.$$

Ahora supongamos  $(x, t) \in C''$ . Como  $\zeta \equiv 0$  fuera del cilindro  $C$ , entonces, la definición de  $\tilde{f}$  la igualdad anterior implican

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \zeta(x, t)u(x, t) = 1 \cdot u(x, t) = u(x, t) \\ &= \int \int_C \Phi(x - y, t - s) [(\zeta_s(y, s) - \Delta \zeta(y, s))u(y, s) - 2\nabla \zeta(y, s) \cdot \nabla u(y, s)] dy ds. \end{aligned}$$

Note que en la ecuación anterior, la expresión entre paréntesis cuadrados se hace 0 en una región cercana a la singularidad de  $\Phi$ , véase  $\mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$  por como se definió  $\zeta$ . Ahora,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int \int_C [\Phi(x - y, t - s)(\zeta_s(y, s) - \Delta \zeta(y, s))u(y, s) - 2\Phi(x - y, t - s)\nabla \zeta(y, s) \cdot \nabla u(y, s)] dy ds \end{aligned} \quad (1)$$

(2)

Fijémonos únicamente en el segundo término e integremos por partes

$$\begin{aligned} \int_C -2\Phi(x - y, t - s)\nabla \zeta(y, s) \cdot \nabla u(y, s) dy ds &= \\ &= \int_{\partial C} -2\Phi(x - y, t - s)\nabla \zeta(y, s) \cdot u(y, s) dy ds - \\ &\int_C -2\nabla_y \Phi(x - y, t - s)\nabla \zeta(y, s) \cdot u(y, s) dy ds \\ &= \int_C 2\nabla_y \Phi(x - y, t - s)\nabla \zeta(y, s) \cdot u(y, s) dy ds. \end{aligned}$$

Así, (1) nos queda como sigue:

$$u(x, t) = \int \int_C [\Phi(x - y, t - s)(\zeta_s(y, s) - \Delta \zeta(y, s)) + 2\nabla_y \Phi(x - y, t - s)\nabla \zeta(y, s)] u(y, s) dy ds.$$

La fórmula anterior tiene la forma

$$u(x, t) = \int \int_C K(x, y, t, s) u(y, s) dy ds \quad ((x, t) \in C'').$$

Ahora, al cambiar coordenadas, podemos asumir que el punto de tope  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ . Asumiendo que  $C(1) := C(0, 0; 1)$  está en  $U_T$ . Sea  $C(\frac{1}{2}) := C(0, 0; \frac{1}{2})$ . La fórmula anterior nos queda de la siguiente manera

$$u(x, t) = \int \int_{C(1)} K(x, y, t, s) u(y, s) dy ds \quad ((x, t) \in C(\frac{1}{2})).$$

Donde  $K$  es una función suave puesto que  $\Phi, \zeta, u$  lo son en  $U_T$ . En consecuencia

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq \int \int_{C(1)} |K(x, y, t, s)| |u(y, s)| dy ds \\ |\partial_{x_i}^\alpha \partial_t^m u(x, t)| &\leq \int \int_{C(1)} |\partial_{x_i}^\alpha \partial_t^m K(x, y, t, s)| |u(y, s)| dy ds \\ &\leq C_{\alpha m} \|u\|_{L^1(C(1))} \end{aligned}$$

Para una constante  $C_{\alpha m}$ .

Ahora supongamos que el cilindro  $C(r) := C(0, 0; r)$  reposa en  $U_T$ . Sea  $C(\frac{r}{2}) := C(0, 0; \frac{r}{2})$ .

Reescalamos como sigue

$$v(x, t) := u(rx, r^2t).$$

Entonces  $v_t - \Delta v = 0$  en el cilindro  $C(1)$ . De acuerdo a lo anterior,

$$|\partial_{x_i}^\alpha \partial_t^m v(x, t)| \leq C_{\alpha m} \|v\|_{L^1(C(1))} \quad \text{en } ((x, t) \in C(\frac{1}{2})).$$

Pero  $\partial_{x_i}^\alpha \partial_t^m v(x, t) = r^{2m+|\alpha|} \partial_{x_i}^\alpha \partial_t^m u(rx, r^2t)$  y  $\|v\|_{L^1(C(1))} = \frac{1}{r^{n+2}} \|u\|_{L^1(C(r))}$ .

De modo que

$$\max_{C(x, t; \frac{r}{2})} |\partial_{x_i}^\alpha \partial_t^m u| \leq \frac{C_{\alpha m}}{r^{|\alpha| + 2m + n + 2}} \|u\|_{L^1(C(x, t; r))}.$$