

Ecuaciones Diferenciales Parciales: Taller 4

16 de agosto del 2024

Universidad Nacional de Colombia

Oscar Guillermo Riaño Castañeda

Andrés David Cadena Simons
David Felipe Viuche Malaver

acadenas@unal.edu.co
dviuchem@unal.edu.co

Problema 1:

1. Suponga que u es una solución suave de la ecuación del calor $u_t - \Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Encuentre una familia de términos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $u_\lambda(x, t) = u(\lambda^a x, \lambda^b t)$ también sea solución de la ecuación del calor para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
2. Use el ejercicio anterior para mostrar que $v(x, t) := x \cdot \nabla u(x, t) + 2tu_t(x, t)$ también soluciona la ecuación del calor.
3. Suponga que u es una solución suave para la ecuación del calor no lineal $u_t - \Delta u = u^3 u_{x_1}$ en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Encuentre una familia de términos $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $u_\lambda(x, t) = \lambda^a u(\lambda^b x, \lambda^c t)$ también sea solución de tal ecuación del calor no lineal para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Solución:

1. Suponga que u es una solución suave de la ecuación del calor $u_t - \Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Encuentre una familia de términos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $u_\lambda(x, t) = u(\lambda^a x, \lambda^b t)$ también sea solución de la ecuación del calor para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
Suponga que $u_\lambda(x, t)$ satisface la ecuación del calor, es decir:

$$\partial_t u_\lambda(x, t) - \Delta u_\lambda(x, t) = 0,$$

en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$, luego:

$$\begin{aligned} \partial_t u_\lambda(x, y) &= u_t(\lambda^a x, \lambda^b t) \\ &= u_t(\lambda^a x, \lambda^b t)(\lambda^b) \\ \Delta u_\lambda &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u_\lambda(x, t)}{\partial x_i \partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i}(\lambda^a x, \lambda^b t)(\lambda^a)^2 \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} u_{\lambda_t}(x, t) - \Delta u_\lambda(x, t) &= \lambda^b u_t(\lambda^a x, \lambda^b t) - \lambda^{2a} \Delta u(\lambda^a x, \lambda^b t) \\ &= \lambda^c (u_t(\lambda^a x, \lambda^b t) - \Delta u(\lambda^a x, \lambda^b t)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego $\lambda^c = \lambda^b = \lambda^{2a}$, por lo que podemos concluir en que $2a = b$, luego $u_\lambda(x, t) = u(\lambda^a x, \lambda^{2a} t)$ es solución para la ecuación del calor para todo $a \in \mathbb{R}$.



2. Use el ejercicio anterior para mostrar que $v(x, t) := x \cdot \nabla u(x, t) + 2tu_t(x, t)$ también soluciona la ecuación del calor.

Note que si tomamos $a = 1$, como para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$ se cumple que $u_{\lambda t}(x, t)$ soluciona la ecuación del calor, es decir:

$$\begin{aligned}\partial_t u_{\lambda}(x, t) - \Delta u_{\lambda}(x, y) &= \lambda^2 u_t(\lambda x, \lambda^2 t) - \lambda^2 \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t), \\ &= 0,\end{aligned}$$

luego si derivamos respecto a λ :

$$\begin{aligned}\partial_{\lambda}(\partial_t u_{\lambda}(x, t) - \Delta u_{\lambda}(x, y)) &= \partial_{\lambda}(\lambda^2 u_t(\lambda x, \lambda^2 t)) - \partial_{\lambda}(\lambda^2 \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)), \\ &= 2\lambda u_t(\lambda x, \lambda^2 t) + \lambda^2 u_{t\lambda}(\lambda x, \lambda^2 t) - 2\lambda \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t) - \lambda^2 \partial_{\lambda} \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t), \\ &= (2\lambda)(u_t(\lambda x, \lambda^2 t) - \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)) + (\lambda^2)(\partial_{\lambda} u_t(\lambda x, \lambda^2 t) - \partial_{\lambda} \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)), \\ &= (\lambda^2)(\partial_{\lambda} u_t(\lambda x, \lambda^2 t) - \partial_{\lambda} \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)), \\ &= (\lambda^2)(\partial_t \partial_{\lambda} u(\lambda x, \lambda^2 t) - \Delta \partial_{\lambda} u(\lambda x, \lambda^2 t)), \\ &= 0.\end{aligned}$$

Por lo que podemos asegurar que $\partial_{\lambda} u(\lambda x, \lambda^2 t)$ también es solución de la ecuación del calor.

Ahora calculemos $\partial_{\lambda} u(\lambda x, \lambda^2 t)$:

$$\partial_{\lambda} u(\lambda x, \lambda^2 t) = \nabla u(\lambda x, \lambda^2 t) \cdot x + 2\lambda t u_t(\lambda x, \lambda^2 t),$$

fijando $\lambda = 1$ se tiene que:

$$x \cdot \nabla u(x, t) + 2t u_t(x, t) = v(x, t),$$

por lo que se puede asegurar que $v(x, t)$ es una solución de la ecuación del calor.



3. Suponga que u es una solución suave para la ecuación del calor no lineal $u_t - \Delta u = u^3 u_{x_1}$ en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Encuentre una familia de términos $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $u_{\lambda}(x, t) = \lambda^a u(\lambda^b x, \lambda^c t)$ también sea solución de tal ecuación del calor no lineal para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Suponga que $u_{\lambda}(x, t)$ es solución de la ecuación del calor no lineal, es decir:

$$\partial_t u_{\lambda}(x, t) - \Delta u_{\lambda}(x, t) = [u_{\lambda}(x, t)]^3 \partial_{x_1} u_{\lambda}(x, t),$$

en donde:

$$\begin{aligned}\partial_t u_{\lambda}(x, t) &= \lambda^{a+c} u_t(\lambda^b x, \lambda^c t), \\ \Delta u_{\lambda}(x, t) &= \lambda^{a+2b} \Delta u(\lambda^b x, \lambda^c t), \\ \partial_{x_1} u_{\lambda}(x, t) &= \lambda^{a+b} \partial_{x_1} u(\lambda^b x, \lambda^c t),\end{aligned}$$

por lo que tenemos que:

$$\lambda^{a+c}u_t(\lambda^b x, \lambda^c t) - \lambda^{a+2b}\Delta u(\lambda^b x, \lambda^c t) = \lambda^{4a+b}u^3(\lambda^b x, \lambda^c t)\partial_{x_1}u(\lambda^b x, \lambda^c t),$$

lo que implica que:

$$\begin{aligned}\lambda^{-3a-b+c}u_t(\lambda^b x, \lambda^c t) - \lambda^{-3a+b}\Delta u(\lambda^b x, \lambda^c t) &= u^3(\lambda^b x, \lambda^c t)\partial_{x_1}u(\lambda^b x, \lambda^c t), \\ \lambda^d(u_t(\lambda^b x, \lambda^c t) - \Delta u(\lambda^b x, \lambda^c t)) &= u^3(\lambda^b x, \lambda^c t)\partial_{x_1}u(\lambda^b x, \lambda^c t),\end{aligned}$$

en donde d tiene que ser igual a 0, por lo que se tiene que:

$$-3a - b + c = 0,$$

$$-3a + b = 0,$$

de lo que podemos deducir que si $a \in \mathbb{R}$, entonces $b = 3a$ y $c = 6a$, por lo que podemos asegurar que para la familia de términos $(a, 3a, 6a)$ con $a \in \mathbb{R}$ se cumple que $u_\lambda(x, t) = \lambda^a u(\lambda^{3a}x, \lambda^{6a}t)$ es solución de la ecuación del calor no lineal anteriormente mencionada.

Problema 2:

Considere el problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u = g, & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

- Suponga que $g \in C(\mathbb{R}^n)$ es una función absolutamente integrable, es decir, $\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty$. Muestre que para $0 < \beta < \frac{n}{2}$ existe una solución $u(x, t)$ del problema de Cauchy anterior que satisface:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\beta u(x, t) = 0,$$

uniformemente en $x \in \mathbb{R}^n$.

Sugerencia. Considere $u(x, t) = (\phi(\cdot, t) * g)(x)$ y muestre que $|u(x, t)| \leq \frac{\|g\|_{L^1}}{(4\pi t)^{n/2}}$.

Solución:

Note que:

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}} g(y) dy \right|, \\ &\leq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left| e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) \right| dy, \\ &\leq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy, \\ &\leq \frac{\|g\|_{L^1}}{(4\pi t)^{n/2}}. \end{aligned}$$

Luego, usando esto sabemos que:

$$\begin{aligned} \left| \lim_{t \rightarrow \infty} t^\beta u(x, t) \right| &= \lim_{t \rightarrow \infty} t^\beta |u(x, t)|, \\ &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^\beta \|g\|_{L^1}}{(4\pi t)^{n/2}}, \\ &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C}{t^{n/2-\beta}}, \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Luego como $|\lim_{t \rightarrow \infty} t^\beta u(x, t)| = 0$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} t^\beta u(x, t) = 0$.



Problema 3:

Pregunta

Solución:

Solución



Problema 4:

Demuestre el teorema de acotación de derivadas para soluciones de la ecuación del calor. Más precisamente, para cada multi-índices α y β existe una constante $C_{\alpha,\beta} > 0$ tal que

$$\max_{C(x,t;\frac{r}{2})} |\partial_x^\alpha \partial_t^\beta u| \leq \frac{C_{\alpha,\beta}}{r^{|\alpha|+2|\beta|+n+2}} \|u\|_{L^1(C(x,t;r))},$$

para todo cilindro $C(x,t;\frac{r}{2}) \subset C(x,t;r) \subset U_T$ y toda solución u de la ecuación de la ecuación del calor en U_T .

Solución:

Solución. Primero fijemos un punto $(x_0, t_0) \in U_T$ y $r > 0$ suficientemente pequeño para que $C := C(x_0, t_0; r) \subset U_T$. Definamos también $C' := C(x_0, t_0; \frac{3}{4}r)$ y $C'' := C(x_0, t_0; \frac{r}{2})$, con el mismo centro superior (x_0, t_0) . Tomemos una función suave de cierre $\zeta = \zeta(x, t)$ tal que

$$\begin{cases} 0 \leq \zeta \leq 1, \zeta \equiv 1 \text{ en } C', \\ \zeta \equiv 0 \text{ cerca del borde parabólico de } C. \end{cases}$$

Extendamos $\zeta \equiv 0$ en $(\mathbb{R}^n \times [0, t_0]) - C$.

Como u es solución en U_T entonces $u \in C^\infty(U_T)$ y si tomamos

$$v(x, t) := \zeta(x, t)u(x, t) \quad (x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq t_0).$$

Entonces

$$v_t = \zeta u_t + \zeta_t u, \Delta v = \zeta \Delta u + 2\nabla \zeta \cdot \nabla u + \nabla \zeta u.$$

Luego

$$v = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times t = 0,$$

y

$$\begin{aligned} v_t - \Delta v &= \zeta u_t + \zeta_t u - \zeta \Delta u - 2\nabla \zeta \cdot \nabla u - \nabla \zeta u \\ &= \zeta(u_t - \Delta u) + \zeta_t u - 2\nabla \zeta \cdot \nabla u - \nabla \zeta u \\ &= \zeta_t u - 2\nabla \zeta \cdot \nabla u - \nabla \zeta u =: \tilde{f} \end{aligned}$$

en $\mathbb{R}^n \times (0, t_0)$. Ahora tome

$$\tilde{v} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) \tilde{f}(y, s) dy ds.$$

De modo que,

$$\begin{cases} \tilde{v}_t - \Delta \tilde{v} = \tilde{f} \text{ en } \mathbb{R}^n \times (0, t_0), \\ \tilde{v} = 0 \text{ en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Como tanto v como \tilde{v} satisfacen la misma ecuación del calor y por como están definidas podemos concluir que están acotadas. Luego, $v \equiv \tilde{v}$ debido al teorema de unicidad de solución. Así tenemos que

$$v(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) \tilde{f} dy ds.$$

Ahora supongamos $(x, t) \in C''$. Como $\zeta \equiv 0$ fuera del cilindro C , entonces, la definición de \tilde{f} la igualdad anterior implican

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \zeta(x, t)u(x, t) = 1 \cdot u(x, t) = u(x, t) \\ &= \int \int_C \Phi(x - y, t - s) [(\zeta_s(y, s) - \Delta\zeta(y, s))u(y, s) - 2\nabla\zeta(y, s) \cdot \nabla u(y, s)] dy ds. \end{aligned}$$

Note que en la ecuación anterior, la expresión entre paréntesis cuadrados se hace 0 en una región cercana a la singularidad de Φ , véase $\mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$ por como se definió ζ . Ahora,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int \int_C [\Phi(x - y, t - s)(\zeta_s(y, s) - \Delta\zeta(y, s))u(y, s) - 2\Phi(x - y, t - s)\nabla\zeta(y, s) \cdot \nabla u(y, s)] dy ds \end{aligned} \quad (1)$$

Fijémonos únicamente en el segundo término e integremos por partes

$$\begin{aligned} \int_C -2\Phi(x - y, t - s)\nabla\zeta(y, s) \cdot \nabla u(y, s) dy ds &= \\ &= \int_{\partial C} -2\Phi(x - y, t - s)\nabla\zeta(y, s) \cdot u(y, s) dy ds - \\ &\int_C -2\nabla_y \Phi(x - y, t - s)\nabla\zeta(y, s) \cdot u(y, s) dy ds \\ &= \int_C 2\nabla_y \Phi(x - y, t - s)\nabla\zeta(y, s) \cdot u(y, s) dy ds. \end{aligned}$$

Así, (1) nos queda como sigue:

$$u(x, t) = \int \int_C [\Phi(x - y, t - s)(\zeta_s(y, s) - \Delta\zeta(y, s)) + 2\nabla_y \Phi(x - y, t - s)\nabla\zeta(y, s)] u(y, s) dy ds.$$

La fórmula anterior tiene la forma

$$u(x, t) = \int \int_C K(x, y, t, s) u(y, s) dy ds \quad ((x, t) \in C'').$$

Ahora, al cambiar coordenadas, podemos asumir que el punto de tope $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Asumiendo que $C(1) := C(0, 0; 1)$ está en U_T . Sea $C(\frac{1}{2}) := C(0, 0; \frac{1}{2})$. La fórmula anterior nos queda de la siguiente manera

$$u(x, t) = \int \int_{C(1)} K(x, y, t, s) u(y, s) dy ds \quad ((x, t) \in C(\frac{1}{2})).$$

Donde K es una función suave puesto que Φ, ζ, u lo son en U_T . En consecuencia

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq \int \int_{C(1)} |K(x, y, t, s)| |u(y, s)| dy ds \\ |\partial_{x_i}^\alpha \partial_t^m u(x, t)| &\leq \int \int_{C(1)} |\partial_{x_i}^\alpha \partial_t^m K(x, y, t, s)| |u(y, s)| dy ds \\ &\leq C_{\alpha m} \|u\|_{L^1(C(1))} \end{aligned}$$

Para una constante $C_{\alpha m}$.

Ahora supongamos que el cilindro $C(r) := C(0, 0; r)$ reposa en U_T . Sea $C(\frac{r}{2}) := C(0, 0; \frac{r}{2})$.

Reescalamos como sigue

$$v(x, t) := u(rx, r^2t).$$

Entonces $v_t - \Delta v = 0$ en el cilindro $C(1)$. De acuerdo a lo anterior,

$$|\partial_{x_i}^\alpha \partial_t^m v(x, t)| \leq C_{\alpha m} \|v\|_{L^1(C(1))} \quad \text{en } ((x, t) \in C(\frac{1}{2})).$$

Pero $\partial_{x_i}^\alpha \partial_t^m v(x, t) = r^{2m+|\alpha|} \partial_{x_i}^\alpha \partial_t^m u(rx, r^2t)$ y $\|v\|_{L^1(C(1))} = \frac{1}{r^{n+2}} \|u\|_{L^1(C(r))}$.

De modo que

$$\max_{C(x, t; \frac{r}{2})} |\partial_{x_i}^\alpha \partial_t^m u| \leq \frac{C_{\alpha m}}{r^{|\alpha| + 2m + n + 2}} \|u\|_{L^1(C(x, t; r))}.$$