LISTA DE EJERCICIOS 4: ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES I

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, BOGOTÁ
PRIMER SEMESTRE 2024

PROFESOR: OSCAR RIAÑO

1. Ecuación del calor

Notación. Recordemos que para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, $\Phi(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ denota la *solución fundamental de la ecuación del calor.*

Ejercicio 1. i) *Suponga que u es una solución suave de la ecuación del calor $u_t - \Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Encuentre una familia de términos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $u_\lambda(x,t) = u(\lambda^a x, \lambda^b t)$ también sea solución de la ecuación del calor para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$.*

ii) *Use el ejercicio anterior para mostrar que $v(x,t) := x \cdot \nabla u(x,t) + 2t u_t(x,t)$ también soluciona la ecuación del calor.*

iii) *Suponga que u es una solución suave de la ecuación del calor no lineal $u_t - \Delta u = u^3 u_{x_1}$ en $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Encuentre una familia de términos $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $u_\lambda(x,t) = \lambda^a u(\lambda^b x, \lambda^c t)$ también sea solución de tal ecuación del calor no lineal para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$.*

Ejercicio 2. *Sea $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ con $g(0) = 0$. Derive la fórmula*

$$u(x,t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{-x^2}{4(t-s)}} g(s)\, ds$$

para encontrar una solución del problema mixto (valor inicial/contorno)

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{en } \mathbb{R}^+ \times (0,\infty), \\ u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^+ \times \{t = 0\}, \\ u = g & \text{en } \{x = 0\} \times [0,\infty). \end{cases}$$

Sugerencia. *Sea $v(x,t) := u(x,t) - g(t)$, extienda v a $x < 0$ por reflexión impar (es decir, para $x < 0$, defina $v(x,t) = -\big(u(-x,t) - g(t)\big)$) y aplique la fórmula de soluciones de la ecuación del calor no lineal en $\mathbb{R} \times (0,\infty)$.*

Ejercicio 3. *Considere el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u = g, & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

i) *Suponga que $g \in C(\mathbb{R}^n)$ es una función absolutamente integrable, es decir, $\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|\, dx < \infty$. Muestre que para $0 \leq \beta < \frac{n}{2}$ existe una solución $u(x,t)$ del problema de Cauchy anterior que satisface*

$$\lim_{t \to \infty} t^\beta u(x,t) = 0,$$

uniformemente en $x \in \mathbb{R}^n$.
Sugerencia. *Considere* $u(x,t) = \big(\Phi(\cdot,t) * g\big)(x)$ *y muestre que* $|u(x,t)| \leq \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\|g\|_{L^1}$.

ii) *Sea* $m > n + \frac{1}{4}$, *donde* $n \geq 1$ *entero denota la dimensión del espacio* $\mathbb{R}^n$. *Suponga que* $g \in C(\mathbb{R}^n)$ *es una función tal que* $|x|^m g(x)$ *es acotada (es decir,* $\||x|^m g(x)\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} ||x|^m g(x)| < \infty$*). Muestre que para* $0 \leq \beta < \frac{n}{2} - \frac{1}{8}$, *existe una solución* $u(x,t)$ *del problema de Cauchy anterior que satisface*

$$\lim_{t\to\infty} t^{\beta}|x|^{\frac{1}{4}}u(x,t) = 0,$$

uniformemente en $x \in \mathbb{R}^n$.
Sugerencia. *Primero, dado* $l > 0$, *deduzca que existe una constante* $c_l > 0$ *tal que* $(a+b)^l \leq c_l(a^l + b^l)$, *para todo* $a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. *Con este resultado muestre que para alguna constante* $c > 0$

$$|x|^{\frac{1}{4}} \leq c\big(|x-y|^{\frac{1}{4}} + |y|^{\frac{1}{4}}\big),$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. *Segundo, utilizando la hipótesis sobre* g, *muestre que* $|x|^{\frac{1}{4}}g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
Sea $u(x,t) = \big(\Phi(\cdot,t) * g\big)(x)$, *por el primer resultado previo, obtenemos que*

$$\begin{aligned}||x|^{\frac{1}{4}}u(x,t)| \leq &\frac{c}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int |x-y|^{\frac{1}{4}}e^{\frac{-|x-y|^2}{4t}}|g(y)|\,dy\\ &+ \frac{c}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int e^{\frac{-|x-y|^2}{4t}}|y|^{\frac{1}{4}}|g(y)|\,dy.\end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad anterior y el hecho que $|x|^{\frac{1}{4}}g(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *concluya el límite cuando* $t \to 0^+$.

Ejercicio 4. *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$. *El teorema de aproximación de Weierstrass afirma que toda función* f *continua sobre* $[a,b]$ *(es decir,* $f \in C([a,b])$*) se puede aproximar uniformemente por polinomios. La ideas de este ejercicio es mostrar este resultado de aproximación.*

i) *Muestre que podemos suponer que* $f(a) = f(b) = 0$.
Sugerencia. *Encuentre* $c, d \in \mathbb{R}$ *tales que la función* $g(x) = cx + d$ *satisface* $g(a) = f(a)$ *y* $g(b) = f(b)$. *Luego, si mostramos el teorema de aproximación para la función* $h(x) = f(x) - g(x)$, *donde notamos* $h(a) = h(b) = 0$, *entonces justifique que el resultado deseado se sigue para* $f \in C([a,b])$.

ii) *Asumiendo que* $f(a) = f(b) = 0$ *por i), extienda a* f *como una función* $\widetilde{f}$ *con dominio* $\mathbb{R}$ *como* $\widetilde{f}(x) = 0$ *si* $x < a$ *o* $x > b$, $\widetilde{f}(x) = f(x)$, *si* $x \in [a,b]$. *Muestre que*

$$\begin{aligned}u(x,t) =&\big(\Phi(\cdot,t) * \widetilde{f}\big)(x)\\ =&\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\widetilde{f}(y)\,dy,\end{aligned}$$

satisface que $u(x,t) \to f(x)$ *cuando* $t \to 0^+$ *uniformemente para todo* $x \in [a,b]$.

iii) *Utilizando la serie de potencias de la exponencial, para todo entero* $m \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ *definimos*

$$u_m(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} \sum_{k=0}^{m} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{k!} \frac{(-|x-y|^2)^k}{(4t)^k} \widetilde{f}(y)\, dy.$$

Muestre que para cada $t > 0$ *fijo,* $u_m(x,t)$ *es un polinomio de grado* $\leq 2m$ *en la variable* x. *Además, muestre que para cada* $t > 0$ *fijo,* $u_m(x,t) \to u(x,t)$ *cuando* $m \to \infty$ *uniformemente para* $x \in [a,b]$.

iv) *Combinando ii) y iii) concluya el teorema de aproximación de Weierstrass.*

Ejercicio 5. *Dados* $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $r > 0$, *recordamos la definición de la* bola del calor

$$E(x,t;r) = \left\{ (y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ s \leq t,\ \Phi(x-y, t-s) \geq \frac{1}{r^n} \right\}.$$

i) *Muestre que*

$$\frac{1}{4r^n} \iint_{E(x_0,t_0;r)} \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2}\, dyds = 1.$$

ii) *Muestre la propiedad del valor medio para la ecuación del calor: sea* $u \in C_1^2(U_T)$ *solución de la ecuación del calor* $\partial_t u - \Delta u = 0$ *en* U. *Entonces*

$$u(x,t) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x,t;r)} u(y,s) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}\, dyds$$

para cada $E(x,t;r) \subset U_T$.

Sugerencia. *Para ii), justifique la demostración en el libro de Evans, Partial Differential Equations, Sección 2.3, Teorema 3.*

Ejercicio 6. *Sea* U *un abierto acotado de* $\mathbb{R}^n$, $T > 0$. *Recordemos que* $U_T = U \times (0,T]$ *y* $\Gamma_T = \overline{U_T} \setminus U_T$. *Decimos que una función* $v \in C_1^2(U_T)$ *es una subsolución de la ecuación del calor si*

$$v_t - \Delta v \leq 0, \qquad \text{en } U_T.$$

i) *Demuestre que si* v *es una subsolución, entonces*

$$v(x) \leq \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x,t;r)} v(y,s) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}\, dyds,$$

para todo $E(x,t;r) \subset U_T$.

Sugerencia. *Argumente como en la demostración de la propiedad del valor medio para la ecuación del calor, ve la Sección 2.3, Teorema 3 del libro de Evans.*

ii) *Como consecuencia demuestre que* $\max_{\overline{U_T}} v = \max_{\Gamma_T} v$.

Sugerencia. *Siga las ideas de la demostración del principio del máximo en las notas de clase.*

iii) *Sea* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función suave convexa* ($\phi'' \geq 0$). *Demuestre que si* u *es una solución de la ecuación del calor, entonces la función* $v = \phi(u)$ *es una subsolución.*

iv) *Demuestre que si* u *soluciona la ecuación del calor, entonces* $v = |\nabla u|^2 + u_t^2$ *es subsolución.*

Ejercicio 7. *Primero, recordemos que dado* $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$ *y* $r \geq 0$ *definimos el cilindro circular cerrado de radio* r, *altura* r^2 *y centro de la parte superior* (x,t) *como*

$$C(x,t;r) = \{(y,s) : |x-y| \leq r, \, t-r^2 \leq s \leq t\}.$$

Demuestre el teorema de acotación de derivadas para soluciones de la ecuación del calor. Más precisamente, para cada multi-índices α *y* β *existe una constante* $C_{\alpha,\beta} > 0$ *tal que*

$$\begin{aligned} \max_{C(x,t;\frac{r}{2})} |\partial_x^\alpha \partial_t^\beta u| \leq & \frac{C_{\alpha,\beta}}{r^{|\alpha|+2|\beta|+n+2}} \Big(\int_{C(x,t;r)} |u| \, dx \Big) \\ = & \frac{C_{\alpha,\beta}}{r^{|\alpha|+2|\beta|+n+2}} \|u\|_{L^1(C(x,t;r))}, \end{aligned}$$

para todo cilindro $C(x,t;\frac{r}{2}) \subset C(x,t;r) \subset U_T$ *y toda solución* u *de la ecuación del calor en* U_T.

Sugerencia. *Justifique la demostración en el libro de Evans, Partial Differential Equations, Sección 2.3, Teorema 9.*

Ejercicio 8. *Demuestre el siguiente principio del máximo en* $\mathbb{R}^n$*: sea* $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ *solución del problema de contorno*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,T), \\ u = g & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}, \end{cases}$$

tal que

$$u(x,t) \leq Ae^{a|x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \, 0 \leq t \leq T,$$

para algunas constantes $A, a > 0$. *Entonces*

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} g.$$

Sugerencia. *Justifique los argumentos del libro de Evans, Sección 2.3, Teorema 6.*

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá
Email address: `ogrianoc@unal.edu.co`