21世纪高等院校教材

大学数学教程

(上 册)

姜东平　江惠坤 编

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书分上、下两册. 上册内容包括极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程和差分方程简介、级数中的常数项级数、函数项级数、幂级数和傅里叶级数. 在附录里介绍了双曲函数、极坐标和复数的基本概念.下册内容包括空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线与曲面积分、场论初步、 线性代数中的行列式、矩阵与向量、线性方程组、矩阵的对角化和实二次型. 本书将微积分、空间解析几何、线性代数纳于一体， 内容安排上经过新的组合， 注意各知识之间的联系, 更加合理、更加精炼.

本书可供理、工、农、医类中除数学、物理、天文等对数学要求特高的专业以外的本科生作教材和参考书用.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学教程. 上册 / 姜东平, 江惠坤编. —北京: 科学出版社, 2005
(21 世纪高等院校教材)

ISBN 7-03-015232-8

I.大… II.①姜… ②江… III.高等数学-高等学校-教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005) 第 044988 号

责任编辑: 姚莉丽 / 责任校对: 钟 洋
责任印制: 安春生 / 封面设计: 陈 敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2005 年 7 月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2005 年 7 月第一次印刷 印张：20 3/4
印数: 1—3 000 字数: 394 000

定价: 26.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈路通印〉)

前　言

本书是为南京大学的化学、化工、生化、医学、地学及环境科学所属各专业编写的基础课教材, 也可作为普通高等院校理工农医类学生的数学基础课教材和教学参考书. 本书 2004 年成为国家级精品课程教材之一. 编者曾在南京大学有关各系的教师、学生中作过广泛的调查研究, 在准确了解了后续的专业课对数学的要求的基础上, 于 1994 年完成了初稿. 在此后十年的使用过程中, 根据教学改革过程中课程设置以及教育部关于硕士生入学统一考试对数学二、三、四类考生的要求的不断变化, 作了多次修改, 形成了目前的版本.

本书分上下两册, 共 12 章. 上册 7 章, 内容包括极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、广义积分、微分方程与差分方程、级数. 下册 5 章, 内容包括空间解析几何、多元函数微分学及其应用、多重积分、线面积分、场论初步、线性代数. 全书教程约需 160~200 授课学时, 可根据各不同专业要求和课时计划取舍部分内容.

在成书过程中, 编者注意到：

一、将微积分、空间解析几何、线性代数纳于一体. 这样, 既能比较好地阐述彼此的联系, 对教师及学生使用起来也比较方便. 对空间解析几何不作深入讨论, 仅围绕多元函数微积分的需要作必要的介绍. 对线性代数不追求体系上的完整, 凡可以合并处理的均合并处理, 减少平行的论述, 以求用尽量少的篇幅涵盖尽量多的内容.

二、不追求理论上的严密而着重于方法的阐述, 目的在于为学生的专业课的学习提供必要的足够的数学知识和常用的基本的数学方法. 虽然若干定理的证明被删去, 但为理解这些定理所必须的概念以及由这些定理所导出的公式、方法都力求阐述清楚, 以求读者熟练掌握和灵活运用.

三、注意全书各个部分之间的联系. 例如：全微分方程与线积分, 矩阵的对角化与一阶线性微分方程组, 级数与极限, 向量与矩阵 …… 指出这些联系, 为的是加深读者对相关内容的理解, 从而灵活、有效地运用有关方法.

四、将少量并非各专业都需要的内容以小字排印, 教师可以按不同专业决定取舍.

五、在每册书的最后, 给出了全部习题的答案, 供读者核对之用.

由于水平、能力所限, 不当之处在所难免, 恳请同行、专家不吝赐教.

编者

2005 年于南京大学

目　　录

第 1 章　极限与连续 ········· 1

1.1　极限 ········· 1

1.1.1　数列及其简单性质 ········· 1

1.1.2　数列的极限 ········· 3

1.1.3　收敛数列的性质, 极限的运算 ········· 7

1.1.4　函数的极限 ········· 10

1.1.5　有极限的函数的性质, 函数极限的运算 ········· 16

习题 1.1 ········· 18

1.2　极限存在准则, 两个重要极限 ········· 20

1.2.1　极限存在的两条准则 ········· 20

1.2.2　两个重要极限 ········· 21

习题 1.2 ········· 25

1.3　无穷小与无穷大 ········· 26

1.3.1　无穷小量 ········· 26

1.3.2　极限的另一种表述形式 ········· 27

1.3.3　无穷小量的性质 ········· 27

1.3.4　无穷小的比较 ········· 28

1.3.5　无穷大量 ········· 30

习题 1.3 ········· 32

1.4　函数的连续性 ········· 33

1.4.1　函数连续性的定义 ········· 33

1.4.2　间断点及其分类 ········· 36

1.4.3　连续函数的运算 ········· 38

1.4.4　初等函数的连续性 ········· 40

1.4.5　闭区间上的连续函数的性质 ········· 42

1.4.6*　一致连续性 ········· 44

习题 1.4 ········· 45

第 2 章　导数与微分 ………… 47
2.1　导数及其运算 ………… 47
2.1.1　变化率问题 ………… 47
2.1.2　导数的定义 ………… 48
2.1.3　导数基本公式表 ………… 51
2.1.4　导数的运算法则 ………… 55
2.1.5　隐函数的导数 ………… 63
2.1.6　参数方程所给定的函数的导数 ………… 65
2.1.7　高阶导数 ………… 67
习题 2.1 ………… 72
2.2　微分及其应用 ………… 75
2.2.1　微分的定义 ………… 75
2.2.2　函数可微的条件 ………… 76
2.2.3　微分的几何意义 ………… 78
2.2.4　微分基本公式和微分法则 ………… 78
2.2.5　一阶微分的形式不变性 ………… 79
2.2.6　微分的应用 ………… 80
习题 2.2 ………… 82
第 3 章　导数的应用 ………… 84
3.1　中值定理 ………… 84
3.1.1　罗尔定理 ………… 84
3.1.2　拉格朗日中值定理 ………… 85
3.1.3　柯西中值定理 ………… 88
习题 3.1 ………… 88
3.2　洛必达法则 ………… 90
3.2.1　$\frac{0}{0}$ 的不定型 ………… 90
3.2.2　$\frac{\infty}{\infty}$ 的不定型 ………… 92
3.2.3　其他的不定型($0\cdot\infty$、$\infty-\infty$、0^0、∞^0、1^∞) ………… 93
习题 3.2 ………… 95
3.3　泰勒公式 ………… 95
习题 3.3 ………… 99

3.4 函数的单调性, 极值 …… 100
3.4.1 函数的单调性 …… 100
3.4.2 函数的极值 …… 102
3.4.3 最大值与最小值 …… 104
习题 3.4 …… 106
3.5 曲线的凹凸性, 拐点 …… 107
3.5.1 曲线的凹凸性 …… 107
3.5.2 曲线的拐点 …… 109
习题 3.5 …… 110
3.6 曲线的渐近线, 函数作图 …… 110
3.6.1 曲线的渐近线 …… 110
3.6.2 函数作图 …… 112
习题 3.6 …… 114
3.7 平面曲线的曲率 …… 114
3.7.1 曲率的定义 …… 114
3.7.2 曲率的计算公式 …… 115
习题 3.7 …… 116
3.8* 方程的近似解 …… 117
3.8.1 弦位法 …… 117
3.8.2 切线法(牛顿法) …… 119
习题 3.8 …… 120
第 4 章 不定积分 …… 121
4.1 不定积分与原函数 …… 121
4.1.1 不定积分与原函数的概念 …… 121
4.1.2 基本积分表 …… 122
4.1.3 不定积分的性质 …… 124
习题 4.1 …… 125
4.2 换元积分法, 分部积分法 …… 126
4.2.1 第一换元法(凑微方法) …… 126
4.2.2 第二换元法 …… 129
4.2.3 分部积分法 …… 134
习题 4.2 …… 137

4.3 几种特殊类型的积分 …… 138
4.3.1 有理函数的分解 …… 138
4.3.2 有理函数的积分 …… 141
4.3.3 三角函数有理式的积分 …… 143
4.3.4 简单无理函数的积分 …… 146
4.3.5 结束语 …… 149
习题 4.3 …… 150
第 5 章 定积分及其应用 …… 152
5.1 定积分及其一般性质 …… 152
5.1.1 曲边梯形的面积, 变力所做的功 …… 152
5.1.2 定积分的定义 …… 153
5.1.3 定积分的性质, 中值定理 …… 155
习题 5.1 …… 159
5.2 定积分的计算 …… 160
5.2.1 用牛顿-莱布尼茨公式计算定积分 …… 160
5.2.2 用换元法计算定积分 …… 161
5.2.3 用分部积分法计算定积分 …… 165
5.2.4 定积分的近似计算 …… 167
习题 5.2 …… 171
5.3 广义积分与函数$\Gamma(x)$ …… 172
5.3.1 无穷区间上的积分 …… 172
5.3.2 无界函数的积分 …… 173
5.3.3 函数$\Gamma(x)$ …… 175
习题 5.3 …… 177
5.4 定积分的应用 …… 177
5.4.1 微元法 …… 177
5.4.2 平面图形的面积 …… 178
5.4.3 截面面积为已知的立体的体积 …… 181
5.4.4 曲线的弧长与弧微分 …… 184
5.4.5 旋转面的表面积 …… 188
5.4.6 功, 液体的压力 …… 190
习题 5.4 …… 192
第 6 章 微分方程 …… 194

6.1 基本概念 …… 194
6.1.1 微分方程与它的阶 …… 194
6.1.2 微分方程的解与积分曲线 …… 195
习题 6.1 …… 196
6.2 变量分离的微分方程 …… 196
6.2.1 可分离变量的微分方程 …… 196
6.2.2 可化为变量分离的方程 …… 199
习题 6.2 …… 202
6.3 一阶线性微分方程 …… 203
6.3.1 一阶线性齐次方程 …… 203
6.3.2 一阶线性非齐次方程 …… 204
6.3.3 伯努利方程 …… 206
习题 6.3 …… 207
6.4 一阶微分方程应用举例 …… 207
习题 6.4 …… 212
6.5 几种特殊类型的高阶微分方程 …… 212
6.5.1 方程 $y^{(n)} = f(x)$ …… 212
6.5.2 方程 $y'' = f(x, y')$ …… 213
6.5.3 方程 $y'' = f(y, y')$ …… 215
习题 6.5 …… 217
6.6 线性微分方程的解的结构 …… 217
习题 6.6 …… 220
6.7 常系数线性微分方程 …… 220
6.7.1 常系数线性齐次方程 …… 220
6.7.2 常系数线性非齐次方程 …… 224
6.7.3 欧拉方程 …… 231
6.7.4 应用举例 …… 232
习题 6.7 …… 235
6.8 差分方程简介 …… 236
6.8.1 差分, 差分方程 …… 236
6.8.2 一阶常系数线性差分方程 …… 237
6.8.3* 二阶常系数线性差分方程 …… 239
6.8.4 结束语 …… 241

习题 6.8 ······ 241
第 7 章　级数 ······ 242
7.1　常数项级数 ······ 242
7.1.1　收敛级数及其性质 ······ 242
7.1.2　正项级数 ······ 247
7.1.3　任意项级数 ······ 253
习题 7.1 ······ 256
7.2　函数项级数 ······ 258
7.2.1　一般概念 ······ 258
7.2.2*　一致收敛的函数项级数 ······ 259
7.2.3*　一致收敛性的判别法 ······ 261
习题 7.2* ······ 262
7.3　幂级数 ······ 262
7.3.1　幂级数的收敛半径 ······ 262
7.3.2　幂级数的运算 ······ 266
7.3.3　函数的幂级数展开 ······ 270
7.3.4　幂级数的应用举例 ······ 275
7.3.5*　微分方程的幂级数解法简介 ······ 278
习题 7.3 ······ 282
7.4　傅里叶级数 ······ 284
7.4.1　三角级数, 三角函数系的正交性 ······ 284
7.4.2　函数的傅里叶级数 ······ 285
7.4.3　正弦级数与余弦级数 ······ 290
7.4.4　函数在任意区间上的傅里叶级数 ······ 292
习题 7.4 ······ 295
附录 A　双曲函数 ······ 297
附录 B　极坐标 ······ 300
附录 C　复数 ······ 305
附录 D　习题答案与提示 ······ 308

第 1 章　极限与连续

高等数学的主要部分之一是数学分析. 极限理论是数学分析的基础. 一方面, 极限概念是数学分析的最基本的概念之一, 数学分析的其他基本概念无非是这样或那样的极限, 都需要用极限概念来表达; 另一方面, 数学分析中非常重要的微分运算与积分运算的引进和讨论都要借助于极限这个工具. 因此, 深刻理解极限的定义及与之有关的无穷小与无穷大的概念, 掌握极限存在的判定准则, 熟练地进行极限的运算, 对于学好数学分析是至关重要的.

数学作为描述自然现象的工具, 极限刻画了变量的变化趋势, 而函数的连续性则刻画了变量在变化的全过程中不间断或没有突然的变化 (例如时间的推移, 温度的升高与降低等就是如此. 而电路中电流的接通或断开, 则与此不同, 是一种突然的变化). 本章首先建立极限这个重要基础, 然后介绍函数的连续与间断的概念, 并讨论连续函数的性质及其运算规则.

1.1　极　　限

1.1.1　数列及其简单性质

按一定顺序排列的无穷多个相等或不相等的数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

称为一个**无穷数列**，简称为**数列**，记为 $\{x_n\}$. 数列 $\{x_n\}$ 中的每一个数称为数列的项, 而第 n 项 x_n 称为它的通项, 这是一个依赖于自然数 n (称为足码) 的变量. 数列也可以看作是定义在自然数集 $\mathbf{N} = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ 上的一个函数 $f(n) = x_n$. 在不致产生混淆时, 也将数列 $\{x_n\}$ 记为 x_n, 例如,

(1) $x_n : 1, 4, 7, \cdots, 1 + 3(n-1), \cdots$

(2) $y_n : \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3^2}, \dfrac{1}{3^3}, \cdots, \dfrac{1}{3^n}, \cdots$

(3) $z_n : 1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$

(4) $w_n : -1, 1, -1, 1, \cdots, (-1)^n, \cdots$

(5) $u_n : 1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{4}, \cdots, (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}, \cdots$

(6) $v_n : 2, 0, \dfrac{2}{3}, 0, \cdots, \dfrac{1 + (-1)^{n-1}}{n}, \cdots$

(7) $r_n: 1, 1, 1, \cdots, 1, \cdots$
都是数列的例子, 它们的通项依次是

$$x_n = 1 + 3(n-1), \qquad y_n = \frac{1}{3^n}, \qquad z_n = (-1)^{n+1},$$
$$w_n = (-1)^n, \qquad u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \qquad v_n = \frac{1+(-1)^{n-1}}{n},$$
$$r_n = 1.$$

注意, 给定一个数列, 不但给定了成为数列的项的那些数, 而且还给定了这些数的排列次序. 在 (3) 和 (4) 中, 数列 $\{z_n\}, \{w_n\}$ 都由数 1 和 -1 排列而成, 但由于排列的次序不同, 数列 (3) 和 (4) 是不相同的数列!

如果 $x_n = y_n (n = 1, 2, \cdots)$, 则说数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 相等; 数列 $\{x_n + y_n\}$ 称为 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 的和; 数列 $\{x_n y_n\}$ 称为 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 的积; 数列 $\{kx_n\}$ 称为数 k 与数列$\{x_n\}$ 之积. 例如, 在上面的例中, $\{v_n\}$ 与 $\{r_n\}$ 之和为 $\left\{1 + \dfrac{1+(-1)^{n-1}}{n}\right\}$, 可简记为

$$v_n + r_n = 1 + \frac{1+(-1)^{n-1}}{n}.$$

$\{z_n\}$ 是 $\{w_n\}$ 与 -1 的积, 可简记为 $z_n = -w_n$. r_n 是 $\{-z_n\}$ 与 $\{w_n\}$ 的积, 也可简记为 $r_n = -z_n w_n$.

总之, 数列的“相等”、“和”、“积”、“与数的乘积”的概念就是函数的对应概念, 只要记住数列就是自然数集上的函数就可以了. 下面关于数列的单调性和有界性的定义也可以用函数的单调性和有界性去理解.

定义 1.1.1(单调数列)　如果

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \cdots,$$

则称 $\{x_n\}$ 为不减数列; 如果严格地成立不等式

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots,$$

则称 $\{x_n\}$ 为严格的递增数列. 反之, 如果

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant \cdots,$$

则称 $\{x_n\}$ 为不增数列; 如果严格地成立不等式

$$x_1 > x_2 > \cdots > x_n > x_{n+1} > \cdots,$$

则称 $\{x_n\}$ 为严格的递减数列.

不减 (增) 数列也称为广义的递增 (减) 数列. 递增数列和递减数列, 无论是广义的还是严格的, 统称为**单调数列**.

例如, 数列 (1) 是严格递增的, 数列 (2) 是严格递减的, 数列 (7) 既是单调不增的, 也是单调不减的, 数列 (3), (4), (5), (6) 都不是单调的.

定义 1.1.2 (有界数列)　如果存在与 n 无关的正数 M, 使得数列 $\{x_n\}$ 的每一项都满足 $|x_n| \leqslant M$, 则说 $\{x_n\}$ 是**有界数列**(也说 x_n 是**有界**的).

如果这样的正数 M 不存在, 则说 $\{x_n\}$ 是**无界数列**(也说 x_n 是**无界**的).

如果存在与 n 无关的常数 L, 使得数列 $\{x_n\}$ 的每一项都满足 $x_n \leqslant L(\geqslant L)$, 则说 x_n 有**上** (**下**) **界**.

例如, 数列 (2)~(7) 都是有界数列, 而 (1) 是无界数列, 它有下界但无上界. 由于不等式 $|x_n| \leqslant M$ 等价于 $-M \leqslant x_n \leqslant M$, 可见, 若数列 $\{x_n\}$ 是有界的, 则它的一切项都落在数轴上的有限区间 $[-M, M]$ 内, 并且易知:

数列 $\boldsymbol{x_n}$ 是有界的, 当且仅当存在数 $\boldsymbol{A, B}$, 使得 $\boldsymbol{A < x_n < B}$ 对一切 $\boldsymbol{n}$ 成立.

1.1.2　数列的极限

我们已经知道, 数列 $\{x_n\}$ 的项 x_n 是依赖于 n 的变量, 它随着 n 的变化而变化, 现在我们来考察当 n 无限增大时 x_n 的变化趋势.

对于数列 (1), 随着 n 的增大, x_n 也跟着增大. 由此可见, 对数轴上无论哪一点 a (也就是无论哪一个实数 a), 随着 n 的无限制增大, x_n 与 a 的距离也将无限制增大 (虽然对于最初有限个 n, 当 x_n 小于 a 时, x_n 可以随 n 的增加而与 a 越来越近).

对于数列 (3) 和 (4), z_n 和 w_n 都轮流取值 1 和 -1, 虽然它们不像 (1) 中的 x_n 那样, 与不论哪一点 a 的距离最终都无限制地增大, 但这一距离却也不能总是无限制地小. 即 z_n 也罢, w_n 也罢, 都不能随 n 的无限制增大而总是任意接近定数 a.

与数列 (1)、(3)、(4) 不同, 数列 (2)、(5)、(6)、(7) 却是另一种情形, 当 n 无限制增大时, (2) 中的 $y_n = \dfrac{1}{3^n}$ 无限制地接近于数轴上的定点 $x = 0$. (5) 中的 u_n 时而正时而负, (6) 中的 v_n 时而等于 0 时而异于 0, 但只要 n 很大, 它们与定点 $x = 0$ 的距离就可以很小. 亦即随 n 的无限制增大, y_n, u_n 以及 v_n 与常数 0 的差就其绝对值而言都可任意小. 至于数列 (7), 它的每一项都等于 1, 因而与数轴上的定点 $x = 1$ 的距离都是 0, 当然也可以看成是该距离要小到什么程度就小到什么程度的, 亦即随着 n 无限制增大, r_n 可任意接近常数 1.

数列的项在变化趋势上的这种不同, 数学上的精确描述就归结为无极限和有极限. 下面, 用所谓“ε-N”语言给出数列极限的定义.

定义 1.1.3 (数列的极限)　对已知的数列 $\{x_n\}$, 如果存在一个常数 a 满足下面的条件: 对于任意给定的正数 ε, 都存在正整数 N, 使得对于满足 $n > N$ 的一切项 x_n, 都成立不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

则说 a 是数列 $\{x_n\}$ (当 n 趋于无穷时）的极限, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad 或 \quad x_n \to a\,(n\to\infty).$$

有极限的数列称为**收敛数列**; $n\to\infty$ 时 x_n 的极限是 a 也说成 $n\to\infty$ 时 x_n 收敛于 a. 没有极限的数列称为**发散数列**.

这是对数列极限的定量精确的描述. 通常可以简述为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Longleftrightarrow \forall\,\varepsilon>0, \exists\, N\in\mathbf{N}, \text{s.t. 对 } n>N \text{ 的一切 } x_n, \text{恒有 } |x_n-a|<\varepsilon\ .$$

(s.t. 是 such that(使得) 的缩写.)

开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 称为以 a 为中心、ε 为半径的**邻域**, 简称为 a 的 ε 邻域. 于是数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限的**几何意义**是: 对于定点 a 的任意给定的无论多小的 ε 邻域, 都存在正整数 N, 数列 $\{x_n\}$ 的第 N 项以后的一切项都落在 a 的 ε 邻域内. 见图 1.1.

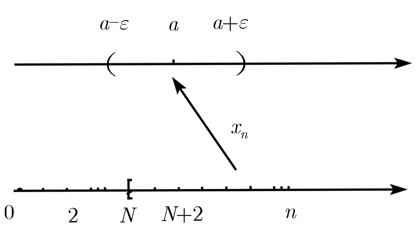

图 1.1

对于定义 1.1.3 以及它的几何解释, 需要特别强调的是: 第一, 一定先有 ε, 再有 N, 且 ε 是任意给定的. 每给一个 ε, 都应该有相应的正整数 N. 第二, N 必须与 n 无关, 只与 ε 有关. 一旦确定了 N, 则对于大于 N 的一切自然数 n, x_n 无一例外地都适合 $|x_n-a|<\varepsilon$ (即落在 a 的 ε 邻域内, 图 1.1).

例如, 我们再考察数列 (4), $\{w_n\}=\{(-1)^n\}$, 取定常数 0, 对于给定的 $\varepsilon=2$, 很明显, $\{w_n\}$ 的一切项都在邻域 $(-2,2)$ 内, 因而对这一 ε , 任意正整数 N 都满足定义 1.1.3 的要求. 可是, 若给定 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$, 则一切 w_n 都在邻域 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 以外. 对这样的 ε, 相应的正整数 N 就不存在了.

若改取常数 $a=1$, 对于 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$, a 的 ε 邻域是开区间 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$, 则 w_n 的一切偶数项都在这个邻域内, 换成更小 (无论多小) 正数 ε 也仍然如此, 可是全部奇数项却都在这个邻域以外. 可见, $a=1$ 和 $a=0$ 一样, 同样不满足定义 1.1.3 的要求, 因而它们都不是 $\{w_n\}$ 的极限.

读者可以说明, 任何实数 a 都不是 $\{w_n\}$ 的极限, 即数列 $\{w_n\}$ 没有极限, 因而是发散的.

数列 (5) 就不同了, 给定 $\varepsilon=\dfrac{1}{10}$, 可取 $N=10$, 从第 11 项起, 一切项 $u_{11}, u_{12}, \cdots$ 都落在常数 0 的邻域 $\left(-\dfrac{1}{10},\dfrac{1}{10}\right)$ 内, 将 ε 换成更小的 $\dfrac{1}{50}$, 则可取 $N=50$, 从第 51 项起, 一切项都落在 $\left(-\dfrac{1}{50},\dfrac{1}{50}\right)$ 内, 对于更小的 $\varepsilon=10^{-10}$, 则可取 $N=10^{10}, \cdots\cdots$

不难想像, 对无论多小的正数 ε, 相应的 N 都是可以求得的. 我们确信: $\{u_n\}$ 有极限 0. 不过, 这种分析, 既不简洁又欠严密. 现在按定义 1.1.3 的要求给出证明.

例 1.1.1 对于数列 (5), $u_n=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{n}\,(n=1,2,\cdots)$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

证 因为 $|u_n-0|=\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}-0\right|=\dfrac{1}{n}$, $\forall\,\varepsilon>0$, 取正整数 N 使 $N\geqslant\dfrac{1}{\varepsilon}$, 则对一切的 $n>N$,

$$\frac{1}{n}<\frac{1}{N}\leqslant\varepsilon,$$

因而

$$|u_n-0|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0.$$ □

例 1.1.2 对于数列 (6), $v_n=\dfrac{1+(-1)^{n-1}}{n}\,(n=1,2,\cdots)$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$.

证 因为 $|v_n-0|=\left|\dfrac{1+(-1)^{n-1}}{n}\right|\leqslant\dfrac{2}{n}$, $\forall\,\varepsilon>0$, 取正整数 N 使 $N\geqslant\dfrac{2}{\varepsilon}$, 则对一切 $n>N$,

$$\frac{2}{n}<\frac{2}{N}\leqslant\varepsilon,$$

因而

$$|v_n-0|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}v_n=0.$$ □

例 1.1.3 对于数列 (2), $y_n=\dfrac{1}{3^n}(n=1,2,\cdots)$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$.

证 因为 $|y_n-0|=\dfrac{1}{3^n}$, $\forall\,\varepsilon>0$ (不妨设 $\varepsilon<1$), 注意 $\dfrac{1}{3^n}<\varepsilon$ 相当于 $3^n>\dfrac{1}{\varepsilon}$, 取正整数 $N\geqslant\log_3\dfrac{1}{\varepsilon}$, 则对于一切的 $n>N$,

$$\frac{1}{3^n}<\frac{1}{3^N}\leqslant\varepsilon,$$

于是

$$|y_n-0|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}y_n=0.$$ □

例 1.1.4 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$.

解 若 $a=1$, 则对一切 n, $\sqrt[n]{a}=1$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

若 $a>1$, 则

$$|\sqrt[n]{a}-1|=\sqrt[n]{a}-1.$$

欲要 $\sqrt[n]{a}-1<\varepsilon$, 只需 $\sqrt[n]{a}<1+\varepsilon$. 于是 $\forall\,\varepsilon>0$, 取正整数 N, 使 $N\geqslant\dfrac{1}{\log_a(1+\varepsilon)}$, 则对大于 N 的一切 n,

$$|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon.$$

若 $a<1$, 则

$$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|=1-\sqrt[n]{a}.$$

欲要 $1-\sqrt[n]{a}<\varepsilon$, 只需 $\sqrt[n]{a}>1-\varepsilon$. 于是 $\forall\varepsilon>0$ (不妨限制 $\varepsilon<1$), 取 N, 使 $N\geqslant\dfrac{1}{\log_a(1-\varepsilon)}$, 则当 $n>N$ 时,

$$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon.$$

总之, 对于任何正数 a, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$. □

例 1.1.5 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+1}{n^2+3}=2$.

证 因为 $\left|\dfrac{2n^2+1}{n^2+3}-2\right|=\left|\dfrac{-5}{n^2+3}\right|=\dfrac{5}{n^2+3}<\dfrac{5}{n^2}<\dfrac{1}{n}$(当$n>5$). $\forall\,\varepsilon>0$, 取正整数 N, 使 $N>\max\left\{5,\dfrac{1}{\varepsilon}\right\}$①, 则对 $n>N$,

$$\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\varepsilon,$$

从而

$$\left|\frac{2n^2+1}{n^2+3}-2\right|<\varepsilon,$$

亦即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{n^2+3}=2.$$ □

在例 1.1.5 中, 由于将 $\dfrac{5}{n^2+3}$ 放大为 $\dfrac{1}{n}$, 由 $\dfrac{1}{N}<\varepsilon$ 寻求 N 比由 $\dfrac{5}{N^2+3}<\varepsilon$ 求 N 简单了许多.

1.1.3　收敛数列的性质, 极限的运算

定理 1.1.1 (极限的唯一性)　如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则它只有一个极限.

证 (反证法) 设 $\{x_n\}$ 有两个极限, 记较小者为 a, 较大者为 b, 给定 $\varepsilon=\dfrac{b-a}{2}$, 由定义 1.1.3, 存在正整数 N_1 和 N_2, 使得 $n>N_1$ 时, $|x_n-a|<\dfrac{b-a}{2}$

[0] ① 注: $\max\{a,b\}$ 表示 a 与 b 之较大者, 例如 $\max\{1,4\}=4,\max\{2,2\}=2$.

成立, 于是 $x_n < \dfrac{b-a}{2} + a = \dfrac{a+b}{2}$. $n > N_2$ 时, $|x_n - b| < \dfrac{b-a}{2}$ 成立, 于是 $b - \dfrac{b-a}{2} = \dfrac{b+a}{2} < x_n$. 取 $N = \max(N_1, N_2)$, 则当 $n > N$ 时,

$$\frac{a+b}{2} < x_n < \frac{a+b}{2}.$$

由此可得到 $\dfrac{a+b}{2} < \dfrac{a+b}{2}$, 这是不可能的. 这一矛盾证明了收敛数列 $\{x_n\}$ 只有一个极限. □

建议读者联系数列的极限的几何意义去理解上述证明.

定理 1.1.2 (有界性) 收敛数列 $\{x_n\}$ 是有界的.

证 设 $\{x_n\}$ 以 a 为极限, 给定 $\varepsilon = 1$, 存在正整数 N, 对一切 $n > N$, $|x_n - a| < 1$ 成立, 从而

$$|x_n| < |a| + 1 \quad (n > N).$$

取

$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, |a| + 1\},$$

则 $|x_n| \leqslant M$ 对一切 n 成立, 按定义 1.1.2, $\{x_n\}$ 是有界的. □

定理 1.1.2 表明, 无界数列一定是发散的. 例如 1.1.1 节的数列 (1) 是无界数列, 因而是发散的. 但需注意, 数列的有界性只是收敛的必要条件. 即有界数列未必是收敛的. 例如, 在 1.1.1 节曾指出, 数列 (3), (4) 都没有极限, 但它们却都是有界的.

定理 1.1.3 (极限的四则运算) 若数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 分别以 a, b 为极限, 则

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = a - b$;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab$;

(iv) 若 $b \neq 0, y_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.

证 (i) 和 (ii) 的证明十分简单, 读者可自做练习, (iii) 和 (iv) 证明是类似的, 兹以 (iv) 为例, 给出证明.

$$\begin{aligned}\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| &= \left|\frac{bx_n - ay_n}{by_n}\right| = \left|\frac{b(x_n - a) - a(y_n - b)}{by_n}\right| \\ &\leqslant \left|\frac{b}{by_n}\right| |x_n - a| + \left|\frac{a}{by_n}\right| |y_n - b|,\end{aligned} \tag{1.1}$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, 给定 $\varepsilon_1 = \dfrac{|b|}{2}$, 存在正整数 N_1, 对一切 $n > N_1$ 成立

$$|y_n - b| < \frac{|b|}{2}, \qquad 即 \qquad |b - y_n| < \frac{|b|}{2},$$

所以

$$|b| - |y_n| < \frac{|b|}{2}, \quad |y_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2},$$

代入 (1.1) 得

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| < \frac{2}{|b|}\,|x_n - a| + \left|\frac{2a}{b^2}\right| |y_n - b|.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 N_2 和 N_3, 使

$$n > N_2 \text{ 时}, |x_n - a| < \frac{|b|}{4}\varepsilon,$$

$$n > N_3 \text{ 时}, |y_n - b| < \left|\frac{b^2}{4a}\right| \varepsilon,$$

于是, 取 $N = \max(N_1, N_2, N_3)$, 则对一切 $n > N$,

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

这就证明了 (iv). □

由 (iii) 可知, 对给定的常数 c 以及正整数 k, 成立

$$\lim_{n\to\infty} (cx_n) = ca, \qquad \lim_{n\to\infty} (x_n)^k = a^k.$$

定理 1.1.3 的结论可以写为

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n;$$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n)(\lim_{n\to\infty} y_n);$$

$$\lim_{n\to\infty} (cx_n) = c \lim_{n\to\infty} x_n, \quad \text{其中 } c \text{ 为常数};$$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n)^k = (\lim_{n\to\infty} x_n)^k, \quad \text{其中 } k \text{ 为正整数};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}, \quad \text{当 } y_n \neq 0\ (n = 1, 2, \cdots) \text{ 且 } \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0.$$

下面的例子, 计算甚为简单, 但读者要搞清楚在每一个运算步骤用到了定理 1.1.3 的哪些结论.

例 1.1.6　求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+1}{n^2+3n-2}$.

解　$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n^2+3n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \dfrac{1}{n^2}}{1 + \dfrac{3}{n} - \dfrac{2}{n^2}} = 2.$$ □

例 1.1.7 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}+\dfrac{1}{n}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{n}\right)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}+\dfrac{1}{n}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{n^2}\right)=1.$ □

例 1.1.8 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+a}-\sqrt{n+b}\right)$, 其中 a,b 为常数.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+a}-\sqrt{n+b}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a-b}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n+b}}=0.$ □

注意, 当 $n\to\infty$ 时例 1.1.6 的分子和分母都没有极限, 例 1.1.7 的第一个因子没有极限, 例 1.1.8 的减数和被减数都没有极限, 因而不能写

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{n^2+3n-2}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2n^2+1)}{\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+3n-2)},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}+\frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+a}-\sqrt{n+b}\right)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+a}-\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+b}.$$

定理 1.1.4 (不等式两端取极限) 设数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 分别以 a,b 为极限. 如果存在正整数 N, 使得对于大于 N 的一切 n 成立 $x_n\geqslant y_n$, 则 $a\geqslant b$.

证 (反证法) 设 $a<b$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$, 给定 $\varepsilon=\dfrac{b-a}{2}$, 存在正整数 N_1,N_2, 使得 $n>N_1$ 时, $|x_n-a|<\dfrac{b-a}{2}$, 从而 $x_n<a+\dfrac{b-a}{2}=\dfrac{b+a}{2}$; $n>N_2$ 时, $|y_n-b|<\dfrac{b-a}{2}$, 从而 $y_n>b-\dfrac{b-a}{2}=\dfrac{b+a}{2}$. 于是, 对于 $n>N=\max(N_1,N_2)$ 将有

$$x_n<\frac{a+b}{2}<y_n,$$

而这与 $n>N$ 时 $x_n\geqslant y_n$ 矛盾, 这就证明了 $a\geqslant b$. □

定理 1.1.4 表示: 若 $x_n\geqslant y_n(n>N)$, 则

$$\lim_{n\to\infty}x_n\geqslant\lim_{n\to\infty}y_n.$$

由定理的证明立刻可得如下推论.

推论 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n<\lim\limits_{n\to\infty}y_n$, 则存在正整数 N, 使得 $n>N$ 时 $x_n<y_n$.

但是, 定理 1.1.4 的反向不对, 即由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 不能得出 $x_n\geqslant y_n$ $(n>N)$. 例如, $x_n=\dfrac{1}{2n}+1$, $y_n=\dfrac{1}{n}+1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$, 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}y_n$. 但是对一切自然数 n, $x_n<y_n$. 由此例也可知, 由 $x_n<y_n$ 也不能得出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n<\lim\limits_{n\to\infty}y_n$, 只能得出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ (即定理 1.1.4).

1.1.4　函数的极限

在 1.1.2 节研究了数列的极限, 考察的是当自变量 n 取正整数值趋于无穷时因变量 $f(n)$ 的变化趋势. $x_n = f(n)$ 是以一切正整数所成的集合为定义域的函数. 现在转而考察定义在区间上的一般的函数 $f(x)$ 的极限问题. 关于这一问题, 需要分为两种不同情况讨论：一是当 x 与一个确定的数 a 无限接近时 $f(x)$ 的变化趋势, 另一是当 x 的绝对值无限增大 (记为 $x \to \infty$) 时 $f(x)$ 的变化趋势, 分别讨论如下.

(1) $x \to a$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限

先考察一个具体的例子：$f(x) = 2x + 1$, 当 x 无限接近 0 时函数 $f(x)$ 的变化趋势如何. 从函数 $y = 2x + 1$ 的图形 (见图 1.2) 可以看到, 不论 x 是大于 0 趋向于 0 还是小于 0 趋向于 0, 对应的函数值 $f(x)$ 都趋向于 1, 尽管 $f(x)$ 可以大于 1 (当 $x > 0$ 时) 也可以小于 1 (当 $x < 0$ 时), 但只要 x 与 0 充分接近, $f(x)$ 与 1 就充分接近. 两个数 a, b 充分接近, 用数学符号表示就是 $|a - b|$ 充分小.

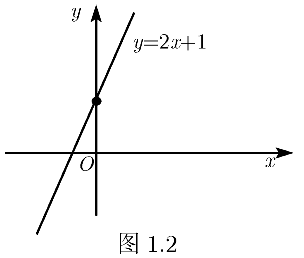

图 1.2

于是 x 趋向于 0 时 $f(x) = 2x + 1$ 的变化趋势就可以描述为：只要 $|x - 0|$ 小到适当程度, $|f(x) - 1|$ 就可以小到预先指定的程度. 例如, 要 $|f(x) - 1|$ 小于 10^{-2}, 由于

$$|f(x) - 1| = |2x|,$$

可见只要 $|x - 0|$ 小于 $\frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$ 就可以了. 同样, 要使得 $|f(x) - 1|$ 小于 10^{-10}, 只需 $|x - 0|$ 小于 $\frac{1}{2}10^{-10}$ 就行了. 一般地, 对于随意给定的正数 ε, 只要 $|x - 0| < \frac{\varepsilon}{2}$, 就足以保证 $|f(x) - 1| < \varepsilon$. 此时, 就说在 x 趋向于 0 时 $f(x)$ 趋向于 1, 或说 x 趋向于 0 时 $f(x)$ 以 1 为极限.

完全类似于此, 若 x 趋向于 a 时, $f(x)$ 趋向于 A, 就说 x 趋向于 a 时 $f(x)$ 以 A 为极限. 准确地说, 有下述定义.

定义 1.1.4 (函数的极限)　对给定的函数 $f(x)$ 和常数 a , 如果存在常数 A 满足下面的条件：对于任意给定的正数 ε, 都存在正数 δ, 使得对于适合不等式 $0 < |x - a| < \delta$ 的一切 x, 函数值 $f(x)$ 都满足

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则说 x 趋向于 a 时 $f(x)$ 以 A 为极限, 记为

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A\ (\text{当 } x \to a).$$

x 趋向于 a 时 $f(x)$ 以 A 为极限也说成 $f(x)$ 在点 a 时有极限 A.

这是对函数极限的定量精确的描述, 通常称为“ε-δ” 语言. 定义 1.1.4 也可以简述为

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A \Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon>0, \exists\,\delta>0$, s.t. 对适合 $0<|x-a|<\delta$ 的一切 x, 其函数值 $f(x)$ 恒满足

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

数轴上满足 $0<|x-a|<\delta$ 的一切点所成的集合称为点 a 的空心 δ 邻域, 它由开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 除去点 a 而成. 而 $|f(x)-A|<\varepsilon$, 即

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon,$$

表示 $f(x)$ 在 A 的 ε 邻域 $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ 内. 于是, $f(x)$ 在**点 a 以 A 为极限的几何意义为:** 对于点 A 的任给的 ε 邻域, 都存在 a 的空心 δ 邻域, 使得只要 x 在 a 的空心 δ 邻域内, $f(x)$ 就在 A 的 ε 邻域内, 也就是, 当横坐标满足不等式

$$a-\delta<x<a+\delta, \quad x\neq a$$

时, 函数 $y=f(x)$ 的相应的那一段图形在由两条水平线 $y=A-\varepsilon, y=A+\varepsilon$ 所形成的条形区域内 (见图 1.3).

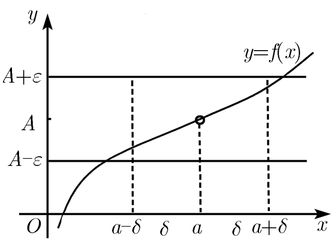

图 1.3

注意, 在定义 1.1.4 中, 一定先有 ε , 再有 δ. 为断定 $f(x)$ 在点 a 有极限 A, 由任意给定的正数 ε, 都要确定相应的 δ, 进而考察 a 的 δ 邻域内不等于 a 的那些 x, 看它们所对应的函数值 $f(x)$ 是否都满足

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

至于在点 a, 即 $x=a$ 时, 这个不等式是允许不成立的. 不仅如此, 当 x 趋向于 a 时 $f(x)$ 有极限 A, 但 $f(x)$ 在 $x=a$ 时却可以连定义都没有. 很快我们就会看到, 这种函数是大量存在的.

例 1.1.9 证明: 若 $f(x)\equiv c$, 此处 c 为常数. 则对一切 a 成立 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$, 即

$$\lim_{x\to a} c=c.$$

证 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 只要随便取正数 δ, 则对满足 $0<|x-a|<\delta$ 的一切 x 都成立

$$|f(x)-c|=|c-c|=0<\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to a} c=c$. □

例 1.1.10 证明 $\lim\limits_{x\to a} x=a$.

证　这里令 $f(x)=x$. 任给 $\varepsilon>0$, 只要取 $\delta=\varepsilon$, 于是, 只要 $0<|x-a|<\delta$, 就必定成立

$$|f(x)-a|=|x-a|<\varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{x\to a}x=a$. □

例 1.1.11　证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$.

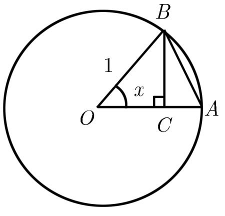

图 1.4

证　因为我们要考虑的是 $|\sin x|$, 所以不妨设 $0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}$. 在半径为 1 的圆 (如图 1.4) 上可看到, $|\sin x|\leqslant|AB|\leqslant|x|$. 于是, 任给 $\varepsilon>0$, 只要取 $\delta=\varepsilon$, 则当 $0<|x-a|<\delta$, 就必定成立

$$|\sin x-0|\leqslant|x-0|<\varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{x\to a}\sin x=0$. □

例 1.1.12　证明 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

证　由三角公式和上例可得, $|\cos x-1|=2\left|\sin^2\dfrac{x}{2}\right|\leqslant\left|\dfrac{x^2}{2}\right|\leqslant|x|^2$. 于是, 任给 $\varepsilon>0$, 只要取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$, 则当 $0<|x-0|<\delta$, 就必定成立

$$|\cos x-1|\leqslant|x|^2<\varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$. □

这几个简单的例子, 在求其他函数的极限时将被反复应用.

例 1.1.13　证明 $\lim\limits_{x\to 0}a^x=1(a>0)$.

证　若 $a=1$, 由例 1.1.9 知结论成立.

若 $a>1$, 由例 1.1.4, $\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$, 由此, 利用定理 1.1.3 又得 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{-\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}}=1$, 于是, 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使

$$1-\varepsilon<a^{-\frac{1}{N}},\quad a^{\frac{1}{N}}<1+\varepsilon.$$

取 $\delta=\dfrac{1}{N}$, 则当 $|x|<\delta$ 时,

$$-\frac{1}{N}<x<\frac{1}{N},$$

从而由 $a>1$ 得

$$1-\varepsilon<a^{-\frac{1}{N}}<a^x<a^{\frac{1}{N}}<1+\varepsilon,$$

亦即

$$|a^x-1|<\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to 0}a^x=1$.

若 $a<1$, 可以类似地证明同样的结论. □

例 1.1.14　证明 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+3x+1}{x+1}=-1$.

证　按定义 1.1.4, $x\to-1$ 但 $x\neq-1$, 所以 $x+1\neq0$. 于是, 在分子和分母中约去不等于 0 的公因子 $x+1$, 得

$$\left|\frac{2x^2+3x+1}{x+1}-(-1)\right|=\left|\frac{(x+1)(2x+1)}{x+1}+1\right|=2|x+1|=2|x-(-1)|.$$

由此可见, 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 只需取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$, 则当 $0<|x-(-1)|<\delta$ 时, 就有

$$\left|\frac{2x^2+3x+1}{x+1}-(-1)\right|<2\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$ □

例 1.1.14 中的函数当 $x\to-1$ 时有极限, 但 $x=-1$ 时函数没有定义.

在定义 1.1.4 中, 自变量 x 既可以在 a 的右侧趋向于 a, 也可以在 a 的左侧趋向于 a. 但有些问题, 限制 x 在 a 的某一侧变动就可以了. 如果 x 在 a 的右侧趋向于 a 时 $f(x)$ 有极限, 则称之为 $f(x)$ 在 $x\to a$ 时的右极限; 如果 x 在 a 的左侧趋向于 a 时 $f(x)$ 有极限, 则称之为 $f(x)$ 在 $x\to a$ 时的左极限, 即有如下定义.

定义 1.1.5 (右极限和左极限)　对给定的函数 $f(x)$ 和常数 a, 如果存在常数 A 满足下面的条件：对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对于满足不等式 $a<x<a+\delta$ $(a-\delta<x<a)$ 的一切 x, 其函数值 $f(x)$ 恒满足

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 A (常数) 为 $x\to a$ 时 $f(x)$ 的右 (左) 极限.

右极限记为 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ 或 $\lim\limits_{x\to a_+}f(x)$, 左极限记为 $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$ 或 $\lim\limits_{x\to a_-}f(x)$. 右极限, 也简记为 $f(a+0)$ 或 $f(a_+)$; 左极限, 也简记为 $f(a-0)$ 或 $f(a_-)$. 注意这最后四个记号虽然没有冠以极限符号, 但它们表示的却是极限值, 与记号 $f(a)$ 表示 $f(x)$ 在 $x=a$ 时的函数值意义不同.

左极限和右极限统称为**单侧极限**.

定理 1.1.5　$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 成立的充分必要条件是当 x 趋向于 a 时 $f(x)$ 有左、右极限且都等于 A.

证　必要性　任意给定 $\varepsilon>0$, 由于 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, 故存在 $\delta>0$, 使得对于满足 $0<|x-a|<\delta$ 的一切 x 都成立

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

但只要 $a<x<a+\delta$ 或 $a-\delta<x<a$ 成立, 则必 $0<|x-a|<\delta$, 因而 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 由定义 1.1.5 知 $\lim\limits_{x\to a_-}f(x)=\lim\limits_{x\to a_+}f(x)=A$.

充分性　任意给定 $\varepsilon > 0$, 由于

$$\lim_{x\to a_+} f(x) = \lim_{x\to a_-} f(x) = A,$$

存在正数 δ_1 和 δ_2 使得

$$a < x < a+\delta_1(\text{即}0 < x-a < \delta_1)\text{ 时}|f(x)-A| < \varepsilon,$$
$$a-\delta_2 < x < a(\text{即}-\delta_2 < x-a < 0)\text{ 时}|f(x)-A| < \varepsilon.$$

取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ (即 δ_1, δ_2 之较小者), 则当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, $|f(x)-A| < \varepsilon$, 亦即

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$ □

由定理 1.1.5 可知, 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 时单侧极限不全存在或存在而不相等, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 时没有极限.

例 1.1.15　证明函数 $f(x) = \mathrm{sgn} x$ 当 $x \to 0$ 时没有极限.

证　按定义,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

仿例 1.1.9, 由定义 1.1.5 易知 $f(0_+) = 1, f(0_-) = -1$, 即 $f(x)$ 在 $x=0$ 的左、右极限不相等, 由定理 1.1.5 的必要性知 $x \to 0$ 时 $f(x)$ 没有极限. □

(2) $x \to \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

在 x 的绝对值无限增大时, x 本身可以只取正值, 也可以只取负值, 还可以既取正值也取负值, 这三种情况分别以 $x \to +\infty, x \to -\infty, x \to \infty$ 来表示. 在这三种情况下 $f(x)$ 的极限的定义是类似的. 例如, 对于第一种情形, 若函数 $f(x)$ 对正的无论多大的 x 都有定义, 而当 x 取正值无限地增大时, 函数值 $f(x)$ 与常数 A 任意接近, 则说 x 趋向于正无穷大时 $f(x)$ 以 A 为极限. 采用精确的数学语言, 可以写成如下定义.

定义 1.1.6　对给定的函数 $f(x)$, 如果存在常数 A 满足下面的条件：对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 都存正数 L, 使得对于适合不等式 $x > L$ 的一切 x, 函数值 $f(x)$ 都满足

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则说 x 趋向于正无穷大时 $f(x)$ 以 A 为极限, 记为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A\ (\text{ 当 } x \to +\infty).$$

在此定义中, 将 $x > L$ 改为 $x < -L$, 则得 x 趋向于负无穷大时 $f(x)$ 以 A 为极限的定义, 记为

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A\ (\ 当 x \to -\infty).$$

将 $x > L$ 改为 $|x| > L$, 则得 x 趋向于无穷大时 $f(x)$ 以 A 为极限的定义, 记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A\ (\ 当\ x \to \infty).$$

此定义也称为描述函数极限的"ε-L 语言". $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, 在几何上表示为: 只要 $x > L$, 函数 $y = f(x)$ 的图形就被限制在预先画好的两条水平直线 $y = A+\varepsilon$, $y = A-\varepsilon$ 所形成的带状区域内 (见图 1.5).

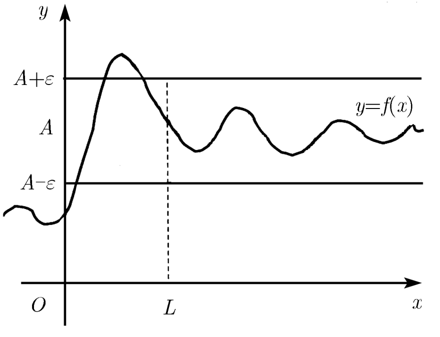

图 1.5

对于 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ 以及 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, 读者可自行给出几何解释.

例 1.1.16 证明 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

证 因为 $\left|\dfrac{1}{x} - 0\right| = \dfrac{1}{|x|}$, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 取 $L = \dfrac{1}{\varepsilon}$, 则当 $|x| > L$ 时,

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \frac{1}{L} = \varepsilon.$$

按定义 1.1.6, 这就证明了 $\lim\limits_{x\to\infty} = \dfrac{1}{x} = 0$. □

例 1.1.17 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3\sqrt{x}+4}{2\sqrt{x}+1} = \dfrac{3}{2}$.

证 对于 $x > 0$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{3\sqrt{x}+4}{2\sqrt{x}+1} - \frac{3}{2}\right| &= \frac{5}{2(2\sqrt{x}+1)} < \frac{3}{2\sqrt{x}+1} \\ &< \frac{3}{2\sqrt{x}} < \frac{2}{\sqrt{x}},\end{aligned}$$

对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 取 $L = \dfrac{4}{\varepsilon^2}$, 则当 $x > L$ 时,

$$\left|\frac{3\sqrt{x}+4}{2\sqrt{x}+1} - \frac{3}{2}\right| < \frac{2}{\sqrt{L}} = \varepsilon.$$

这就是所要证明的. □

1.1.5　有极限的函数的性质, 函数极限的运算

这一节将把 1.1.3 节的主要内容从数列的情形移植到一般的函数的情形. 由于证明方法的相似性, 除对少量定理给出证明外, 其余的证明都省去了. 在定理的陈述中, 如果不指出自变量 x 的趋向, 即表示可以是 $x \to a, x \to +\infty, x \to -\infty, x \to \infty$ 的任何一种.

定理 1.1.6(唯一性)　若 $\lim f(x)$ 存在, 则必唯一.

定理 1.1.7　如果 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, 而 $A > A_0$ $(< A_0)$, 则存在 δ, 使得 $0 < |x-a| < \delta$ 时, $f(x) > A_0$ $(< A_0)$.

证　设 $A > A_0$, 给定正数 $\varepsilon = \dfrac{A-A_0}{2}$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $0 < |x-a| < \delta$ 时,

$$|f(x) - A| < \frac{A-A_0}{2}.$$

由此得

$$f(x) - A > -\frac{A-A_0}{2}, \quad 即 \quad f(x) > \frac{A+A_0}{2} > A_0.$$

$A < A_0$ 的情形可类似地证明. □

类似地, 有如下定理.

定理 1.1.7′　若 $x \to +\infty$ $(x \to -\infty, x \to \infty)$ 时 $f(x) \to A, A \neq A_0$, 则存在正数 L, 使得 $x > L$ $(x < -L, |x| > L)$ 时 $f(x)$ 与 A 在 A_0 的同侧.

定理 1.1.8　若 $f(x) \geqslant A_0 (\leqslant A_0)$, $\lim f(x) = A$, 则 $A \geqslant A_0 (\leqslant A_0)$.

证　(反证法) 以 $x \to a, A \geqslant A_0$ 的情形为例证明如下. 设 $A < A_0$, 则由定理 1.1.7 知, 存在 $\delta > 0$, 使得 $0 < |x-a| < \delta$ 即 $a - \delta < x < a + \delta$ 时 $f(x) < A_0$, 而这与已知条件 $f(x) \geqslant A_0$ 是矛盾的, 这一矛盾表明定理是正确的. $A \leqslant A_0$ 时可类似地证明. □

对于 $x \to +\infty$ 等三种情形可利用定理 1.1.7 ′ 证得.

定理 1.1.9 (极限的四则运算)　若 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$, 则

$$\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B = \lim f(x) \pm \lim g(x);$$

$$\lim f(x)g(x) = A \cdot B = \lim f(x) \cdot \lim g(x);$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} \quad (B \neq 0);$$

$$\lim cf(x) = cA = c\lim f(x) \quad (c\ 为常数);$$

$$\lim[f(x)]^k = A^k = [\lim f(x)]^k \quad (k\ 为正整数).$$

定理 1.1.10 (不等式两端取极限)　若 $f(x) \geqslant g(x)$, 且 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 则 $A \geqslant B$.

证　令 $F(x)=f(x)-g(x)$, 则 $F(x)\geqslant 0$. 由定理 1.1.8 (让 $A_0=0$) 得 $\lim F(x)\geqslant 0$. 但由定理 1.1.9,

$$\lim F(x)=\lim[f(x)-g(x)]=\lim f(x)-\lim g(x)=A-B,$$

所以 $A-B\geqslant 0$, 即 $A\geqslant B$. □

例 1.1.18　求 $\lim\limits_{x\to x_0}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)$, 其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 为常数.

解　由定理 1.1.9, 并利用例 1.1.9 和例 1.1.10, 得

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to x_0}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)\\
=&\lim_{x\to x_0}(a_0x^n)+\lim_{x\to x_0}(a_1x^{n-1})+\cdots+\lim_{x\to x_0}(a_{n-1}x)+\lim_{x\to x_0}a_n\\
=&a_0\lim_{x\to x_0}x^n+a_1\lim_{x\to x_0}x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lim_{x\to x_0}x+a_n\\
=&a_0(\lim_{x\to x_0}x)^n+a_1(\lim_{x\to x_0}x)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lim_{x\to x_0}x+a_n\\
=&a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x_0+a_n.\end{aligned}$$ □

例 1.1.18 表明, 求 $x\to x_0$ 时 x 的多项式 $P(x)$ 的极限, 只需将变量 x 换成 x_0 就行:

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=P(x_0).$$

由此, 容易求得两个多项式的商 (有理分式) 的极限.

例 1.1.19　若 $F(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 $P(x),Q(x)$ 为多项式, $Q(x_0)\neq 0$, 求 $\lim\limits_{x\to x_0}F(x)$.

解　由定理 1.1.9 并利用例 1.1.18, 得

$$\lim_{x\to x_0}F(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=F(x_0).$$ □

可见, 求 $x\to x_0$ 时 x 的有理分式的极限, 也只需以 x_0 代替变量 x, 但需注意与多项式的情形不同, 这里要假设分母在 x_0 的值不为 0.

例 1.1.20　求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

由于 $x=1$ 时 $x-1=0$, 不能应用定理 1.1.9, 但回忆极限的定义 $x\to 1, x$ 是不能等于 1 的, 因此在所给分式的分子分母中约去非 0 的因子 $x-1$ 是可以的.

解　$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2.$ □

例 1.1.21　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-x}{3x^3-2x^2+2}$.

由于记号“∞”不是数, 不能将它直接代入分子与分母. 我们可以用 x^3 同除分子分母, 再利用定理 1.1.9 与例 1.1.16 的结论.

解 $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2-x}{3x^3-2x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^3}}=\frac{2}{3}.$$ □

完全同样地, 有如下例题.

例 1.1.22 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+1}{x^3+x+2}$.

解 $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{x^3+x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^3}}{1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}}=0.$$ □

习 题 1.1

1. 举例说明下列说法都是错误的.
   1) 有界数列必定是收敛数列;
   2) 发散数列必定是无界数列;
   3) 单调数列必定是收敛数列;
   4) 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 时有极限, 则 $f(x)$ 在 x_0 有定义;
   5) 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 时极限不存在, 则 $|f(x)|$ 在 $x=x_0$ 时也没有极限;
   6) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

2. 在数轴上作出下列诸数列的前若干个项所对应的点, 并由此观察哪些数列有极限, 哪些没有?

   1) $x_n=\dfrac{1}{2^n}$; 2) $x_n=\dfrac{n+1}{n+2}$; 3) $x_n=(-1)^n\cdot n^2$; 4) $x_n=(-1)^n\cdot\dfrac{1}{n}$.

3. 试用极限的定义证明：

   1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{3n+2}=\dfrac{2}{3}$; 3) $\lim\limits_{x\to2}(2x-1)=3$;

   4) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x-x^3}{x+1}=-2$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{x}=2$; 6) $\lim\limits_{x\to8}\sqrt[3]{x}=2$.

4. 证明：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$.

5. 证明：极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{|x|}$ 不存在.

6. 下列运算或推理是否正确?

   1) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$
   $$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+n}=0+0+\cdots+0=0;$$

   2) 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, 且 $f(x)>0$, 则 $A>0$;

3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$;

4) 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A,\ A\geqslant 0$, 则在点 a 的某去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$.

7. 求下列极限:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+1}{(n-1)^2}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)(n+4)(n+6)}{n^4+1}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n}}{n+4}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}}$;

9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3}{2x-1}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3-2x+1}{x-4}+1\right)$;

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+3x^2}{x^6+x^5+2x^2}$;

12) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$;

13) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$;

14) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$;

15) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$ (n 为正整数);

16) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ (m,n 为正整数);

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$;

18) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$;

19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$;

20) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$;

21) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$;

22) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$;

23) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$;

24) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

8. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^2+bx-5}{3x-2}=2$, 则 $a=$______, $b=$______.

9. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}-\lambda x-\mu\right)=0$, 则 $\lambda=$______, $\mu=$______.

10. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{x-1}, & x<0;\\ 0, & x=0;\\ x, & 0<x<1;\\ 1, & 1\leqslant x<2.\end{cases}$

求 $f(x)$ 在 $x\to 0$ 及 $x\to 1$ 时的左、右极限, 并说明在这两点 $f(x)$ 有没有极限.

11. 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 3;\\ 7-x, & x<3.\end{cases}$

求 $x \to 3$ 及 $x \to 0$ 时 $f(x)$ 的极限.

1.2 极限存在准则, 两个重要极限

1.2.1 极限存在的两条准则

这一节, 要介绍两条关于极限存在性的判别准则, 它们对于数列和函数都是有效的, 有时, 我们可以利用这些准则断定某个变量有极限, 然后再设法将它求出.

准则 I(夹逼定理) 若

1) $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$ $(n > N_0, N_0$为某个正整数$)$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$,

则数列 x_n 也有极限, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

证 由条件 2), 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对于大于 N 的一切 n 成立

$$|y_n - a| < \varepsilon, \quad |z_n - a| < \varepsilon,$$

亦即

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon, \qquad a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon.$$

于是再由条件 1) 得

$$a - \varepsilon < y_n \leqslant x_n \leqslant z_n < a + \varepsilon,$$

从而当 $n > N$ 时

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

这就证明

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a. \qquad \square$$

例 1.2.1 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots + \left(\frac{1}{10}\right)^n}$.

解 因为

$$1^n < 1^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots + \left(\frac{1}{10}\right)^n < 10 \cdot 1^n,$$

所以

$$1 < \sqrt[n]{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots + \left(\frac{1}{10}\right)^n} = \sqrt[n]{10}.$$

但 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{10} = 1$ (例 1.1.4), 故由夹逼定理得

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{10}\right)^n} = 1. \qquad \square$$

准则 I 对于函数的极限也是成立的.

准则 I′(夹逼定理) 若

1) $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$,

2) $\lim g(x) = \lim h(x) = A$,

则 $\lim f(x)$ 存在且等于 A. 这里的极限过程可以是 $x \to x_0$, 也可以是 $x \to +\infty$, 或 $x \to -\infty$, 或 $x \to \infty$.

读者自己可以给出证明.

准则 II (单调有界原理) 如果数列 x_n 单调不减 (增) 且有上 (下界), 即若两组条件

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots \quad \text{且} \quad x_n \leqslant M \ (n = 1, 2, \cdots)$$

或

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant \cdots \quad \text{且} \quad x_n \geqslant M \ (n = 1, 2, \cdots)$$

之一成立时, 数列 x_n 必有极限.

这一原理的严格证明超出了本书的范围, 我们只从几何上理解它的正确性. 对于单调不减的数列, 它的每一项所对应的点在数轴上随 n 的增大而向右移动, 因而其变化趋势或是无限制向右远去, 或者无限制地接近某一个固定的点. 但是由于对一切 n 成立 $x_n \leqslant M$, 即所有的点都不能位于 M 的右方, 当然就不能无限制向右远去, 因而就只能无限制接近某个定点, 于是这个定点的坐标 A 就是 x_n 的极限 (见图 1.6).

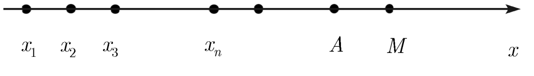

图 1.6

下面, 我们利用这一节所介绍的两条准则证明高等数学中两个非常重要的极限.

1.2.2 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$ (1.2)

证 因为 $\dfrac{\sin(-x)}{-x} = \dfrac{\sin x}{x}$, 所以, 可以只考虑 $x \to 0_+$ 的情形. 在半径为 1 的圆 O 内考察圆心角 $x = \angle AOB \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$, 作正弦线 BC 和正切线 AD (见图 1.7), 则