

## 概率论与数理统计练习题 (公共)

系\_\_\_\_\_专业\_\_\_\_\_班 姓名\_\_\_\_\_学号\_\_\_\_\_

### 第一章 随机事件及其概率 (一)

#### 一. 选择题

1. 对掷一颗骰子的试验, 在概率论中将“出现奇数点”称为 [ C ]  
 (A) 不可能事件 (B) 必然事件 (C) 随机事件 (D) 样本事件

2. 甲、乙两人进行射击,  $A$ 、 $B$  分别表示甲、乙射中目标, 则  $\bar{A} \cup \bar{B}$  表示 [ C ]  
 (A) 二人都没射中 (B) 二人都射中  
 (C) 二人没有都射中 (D) 至少一个射中

3. 以  $A$  表示事件“甲种产品畅销, 乙种产品滞销”, 则其对应事件  $\bar{A}$  为.  
 [ D ]

(A) “甲种产品滞销, 乙种产品畅销”; (B) “甲、乙两种产品均畅销”;  
 (C) “甲种产品滞销”; (D) “甲种产品滞销或乙种产品畅销”

4. 在电炉上安装了 4 个温控器, 其显示温度的误差是随机的. 在使用过程中, 只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度  $t_0$ , 电炉就断电. 以  $E$  表示事件“电炉断电”, 设  $T_{(1)} \leq T_{(2)} \leq T_{(3)} \leq T_{(4)}$  为 4 个温控器显示的按递增排列的温度值, 则事件  $E$  等于 (考研题 2000) [ C ]

(A)  $\{T_{(1)}\} \geq t_0$  (B)  $\{T_{(2)}\} \geq t_0$  (C)  $\{T_{(3)}\} \geq t_0$  (D)  $\{T_{(4)}\} \geq t_0$

5. 掷两颗均匀的骰子, 事件“点数之和为 3”的概率是 [ B ]

(A)  $\frac{1}{36}$  (B)  $\frac{1}{18}$  (C)  $\frac{1}{12}$  (D)  $\frac{1}{11}$

6.  $A$ 、 $B$  为两事件, 若  $P(A \cup B) = 0.8$ ,  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.2$ , 则 [ B ]

(A)  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.32$  (B)  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.2$

(C)  $P(B - A) = 0.4$  (D)  $P(\bar{B} \cap A) = 0.48$

7. 有 6 本中文书和 4 本外文书, 任意往书架摆放, 则 4 本外文书放在一起的概率是 [ D ]

(A)  $\frac{4! \cdot 6!}{10!}$  (B)  $\frac{7}{10}$  (C)  $\frac{4}{10}$  (D)  $\frac{4! \cdot 7!}{10!}$

#### 二. 填空题:

1. 设  $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$ ,  $P(AB) = 0$ ,  $P(AC) = P(BC) = \frac{1}{8}$ , 则  $A$ 、 $B$ 、 $C$  全不发的概率为  $\frac{1}{8}$ .

生的概率为  $\frac{1}{2}$ 。

2. 设  $A$  和  $B$  是两事件,  $B \subset A$ ,  $P(A) = 0.9, P(B) = 0.36$ , 则  $P(A\bar{B}) = 0.54$ 。

3. 在区间  $(0,1)$  内随机取两个数, 则两个数之差的绝对值小于  $\frac{1}{2}$  的概率为  $\frac{3}{4}$ 。(考

研题 2007)

三、计算题:

1. 一盒内放有四个球, 它们分别标上 1, 2, 3, 4 号, 试根据下列 3 种不同的随机实验, 写出对应的样本空间:

(1) 从盒中任取一球后, 不放回盒中, 再从盒中任取一球, 记录取球的结果;

(2) 从盒中任取一球后放回, 再从盒中任取一球, 记录两次取球的结果;

(3) 一次从盒中任取 2 个球, 记录取球的结果。

(1)  $\{(i, j) | i \neq j, i, j = 1, 2, 3, 4\};$

(2)  $\{(i, j) | i, j = 1, 2, 3, 4\};$

(3)  $\{(i, j) | i < j, i, j = 1, 2, 3, 4\}$

2. 罐中有 12 颗围棋子, 其中 8 颗白子, 4 颗黑子, 若从中任取 3 颗, 求:

(1) 取到的都是白子的概率; (2) 取到的两颗白子, 一颗黑子的概率;

(3) 取到的 3 颗中至少有一颗黑子的概率; (4) 取到的 3 颗棋子颜色相同的概率。

$$(1) \frac{C_8^3}{C_{12}^3} = \frac{14}{55};$$

$$(2) \frac{C_8^2 C_4^1}{C_{12}^3} = \frac{28}{55};$$

$$(3) 1 - \frac{C_8^3}{C_{12}^3} = \frac{41}{55};$$

$$(4) \frac{C_8^3}{C_{12}^3} + \frac{C_4^3}{C_{12}^3} = \frac{3}{11}.$$

3. 甲乙两艘轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头, 它们在一昼夜内到达的时间是等可能的. 如果甲船的停泊时间是一小时, 乙船的停泊时间是两小时, 求它们中任何一艘都不需要等候码头空出的概率是多少?

解: 设  $X$  表示甲到时刻,  $Y$  表示乙到时刻, 则应满足

$$\begin{cases} 0 \leq X \leq 24 \\ 0 \leq Y \leq 24 \\ Y - X \geq 1 \\ X - Y \geq 2 \end{cases}$$

$$\frac{\frac{1}{2} \times 23 \times 23 + \frac{1}{2} \times 22 \times 22}{24 \times 24} = 0.879$$

## 概率论与数理统计练习题

系\_\_\_\_\_专业\_\_\_\_\_班 姓名\_\_\_\_\_学号\_\_\_\_\_

### 第一章 随机事件及其概率 (二)

#### 一、选择题：

1. 设  $A, B$  为两个事件,  $P(A) \neq P(B) > 0$ , 且  $A \supset B$ , 则下列必成立是 [ A ]

(A)  $P(A|B)=1$  (D)  $P(B|A)=1$  (C)  $P(B|\bar{A})=1$  (D)  $P(A|\bar{B})=0$

2. 设盒中有 10 个木质球, 6 个玻璃球, 木质球有 3 个红球, 7 个蓝色; 玻璃球有 2 个红色, 4 个蓝色。现在从盒中任取一球, 用  $A$  表示“取到蓝色球”,  $B$  表示“取到玻璃球”, 则  $P(B|A)=[ D ]$ 。

(A)  $\frac{6}{10}$  (B)  $\frac{6}{16}$  (C)  $\frac{4}{7}$  (D)  $\frac{4}{11}$

#### 二、填空题：

1. 设  $P(A)=0.6, P(A \cup B)=0.84, P(\bar{B}|A)=0.4$ , 则  $P(B)= \underline{0.6}$

2. 若  $P(A)=0.6, P(B)=0.8, P(B|\bar{A})=0.5$ , 则  $P(A|B)= \underline{0.75}$

3. 某产品的次品率为 2%, 且合格品中一等品率为 75%。如果任取一件产品, 取到的是一等品的概率为 0.735

4. 已知  $A_1, A_2, A_3$  为一完备事件组, 且  $P(A_1)=0.1, P(A_2)=0.5, P(B|A_1)=0.2$

$P(B|A_2)=0.6$

$P(B|A_3)=0.1$ , 则  $P(A_1|B)= \underline{1/18}$

5. 从数 1,2,3,4 中任取一个数, 记为  $X$ , 再从  $1, \dots, X$  中任取一个数, 记为  $Y$ , 则  $P(Y=3) = \underline{13/48}$  (考研题 2005)

#### 三、计算题：

1. 某产品由甲、乙两车间生产, 甲车间占 60%, 乙车间占 40%, 且甲车间的正品率为 90%, 乙车间的正品率为 95%, 求:

(1) 任取一件产品是正品的概率;

(2) 任取一件是次品, 它是乙车间生产的概率。

解：设  $A_1$  = “甲车间生产的产品”       $A_2$  = “乙车间生产的产品”       $B$  = “正品”

$$\begin{aligned}(1) \quad P(B) &= P(A_1 B) + P(A_2 B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) \\ &= 0.6 \times 0.9 + 0.4 \times 0.95 = 0.92\end{aligned}$$

$$(2) \quad P(A_2 | \bar{B}) = \frac{P(A_2 \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A_2)P(\bar{B}|A_2)}{P(\bar{B})} = \frac{0.4 \times 0.05}{0.08} = 0.25$$

2. 为了防止意外，在矿内同时设有两报警系统  $A$  与  $B$ ，每种系统单独使用时，其有效的概率系统  $A$  为 0.92，系统  $B$  为 0.93，在  $A$  失灵的条件下， $B$  有效的概率为 0.85，求：

(1) 发生意外时，这两个报警系统至少一个有效的概率；

(2)  $B$  失灵的条件下， $A$  有效的概率。

解：(1)  $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\bar{A}\bar{B})$

$$= 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A}) = 1 - 0.08 \times 0.15 = 1 - 0.012 = 0.988$$

$$\begin{aligned}(2) \quad P(A|\bar{B}) &= \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A - AB)}{P(\bar{B})} = \frac{P(A \cup B - B)}{P(\bar{B})} = \frac{P(A \cup B) - P(B)}{P(\bar{B})} \\ &= \frac{0.988 - 0.93}{0.07} = 0.82857\end{aligned}$$

#### 四、证明题

1. 设  $A, B$  为两个事件， $P(A|B) = P(A|\bar{B}), P(A) > 0, P(B) > 0$ ，证明  $A$  与  $B$  独立。

$$\text{证： 由于 } P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad P(A|\bar{B}) = \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(AB)}{1 - P(B)}$$

$$\text{已知 } P(A|B) = P(A|\bar{B})$$

$$\text{有 } \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A) - P(AB)}{1 - P(B)}$$

$$\text{即 } P(AB) = P(A)P(B)$$

所以  $A$  与  $B$  独立

2.  $n$  张签中有  $k(0 < k < n)$  张是好的。三人按顺序抽签，甲先，乙次，丙最后。证明三人抽到好签的概率相等。

证： $P(\text{甲抽到好签}) = k/n$

$$P(\text{乙抽到好签}) = \frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1} + \frac{n-k}{n} \cdot \frac{k}{n-1} = \frac{k}{n}$$

$P(\text{丙抽到好签}) =$

$$\frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1} \frac{k-2}{n-2} + \frac{k}{n} \cdot \frac{n-k+1}{n-1} \frac{k-1}{n-2} + \frac{n-k}{n} \frac{n-k+1}{n-1} \frac{k}{n-2} + \frac{n-k}{n} \frac{k}{n-1} \frac{k-1}{n-2} = \frac{k}{n}$$

## 概率论与数理统计练习题

系\_\_\_\_\_专业\_\_\_\_\_班 姓名\_\_\_\_\_学号\_\_\_\_\_

### 第一章 随机事件及其概率 (三)

一、选择题:

1. 某人打靶的命中率为 0.8, 现独立的射击 5 次, 那么 5 次中有 2 次命中的概率是

[ D ]

- (A)  $0.8^2 \times 0.2^3$       (B)  $0.8^2$       (C)  $\frac{2}{5} \times 0.8^2$       (D)  $C_5^2 0.8^2 \times 0.2^3$

2. 设  $A, B$  是两个相互独立的事件, 已知  $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}$ , 则  $P(A \cup B) =$

[ C ]

- (A)  $\frac{1}{2}$       (B)  $\frac{5}{6}$       (C)  $\frac{2}{3}$       (D)  $\frac{3}{4}$

3. 设  $AB$  和  $BC$  是两两独立, 则事件  $A, B, C$  相互独立的充要条件是(考研题 2000) [ A ]

- (A)  $A$  和  $BC$  独立      (B)  $AB$  和  $A \cup C$  独立  
(C)  $AB$  和  $BC$  独立      (D)  $A \cup B$  和  $B \cup C$  独立

4. 将一枚硬币独立掷两次, 设  $A_1 = \{ \text{掷第一次出现正面} \}, A_2 = \{ \text{掷第二次出现正面} \}, A_3 = \{ \text{正}$

$\text{反面各掷出一次} \}, A_4 = \{ \text{掷二次都出现正面} \}$ . 则事件 ( 考 研 题 2003)

[ C ]

- (A)  $A_1, A_2, A_3$  相互独立      (B)  $A_2, A_3, A_4$  相互独立  
(C)  $A_1, A_2, A_3$  两两独立      (D)  $A_2, A_3, A_4$  两两独立

5. 对于任意两个事件  $A$  和  $B$  ( 考 研 题 2003)

[ B ]

- (A) 若  $AB \neq \phi$ , 则  $A, B$  一定独立      (B) 若  $AB \neq \phi$ , 则  $A, B$  有可能独立  
(C) 若  $AB = \phi$ , 则  $A, B$  一定独立      (D) 若  $AB = \phi$ , 则  $A, B$  一定不独立

6. 设事件  $A$  与事件  $B$  互不相容, 则 (考研题 2009) [D]

(A)  $P(\overline{AB})=0$  (B)  $P(AB)=P(A)P(B)$  (C)  $P(A)=1-P(B)$  (D)  $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$

二、填空题:

1. 设  $\overline{A}$  与  $B$  是相互独立的两事件, 且  $P(\overline{A})=0.7, P(B)=0.4$ , 则  $P(AB)=$  0.12

2. 设两两独立的事件  $A, B, C$  满足条件  $ABC=\phi$ ,  $P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$ , 且已知

$P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$ , 则  $P(A)=$  1/4 (考研题 1999)

三、计算题:

1. 设两个相互独立的事件都不发生的概率为  $\frac{1}{9}$ ,  $A$  发生  $B$  不发生的概率与  $B$  发生  $A$  不发生的概率相等, 求  $A$  发生的概率  $P(A)$

解: 已知  $P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=\frac{1}{9}$  又  $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$

而  $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$   $P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)$

所以, 有  $P(A)=P(B)$   $P(\overline{A})=\frac{1}{3}$

故  $P(A)=\frac{2}{3}$

2. 一质量控制检查员通过一系列相互独立的在线检查过程 (每一过程有一定的持续时间) 以检查新生产元件的缺陷。已知若缺陷确实存在, 缺陷在任一在线检查过程被查出的概率为  $p$ 。

(1) 求缺陷在第二个过程结束前被查出的概率 (缺陷若在一个过程查出就不再进行下一个过程);

(2) 求缺陷在第  $n$  个过程结束之前被查出的概率;

(3) 若缺陷经 3 个过程未被查出, 该元件就通过检查, 求一个有缺陷的元件通过检查的概率;

注: (1)、(2)、(3) 都是在缺陷确实存在的前提下讨论的。

(4) 设随机地取一元件, 它有缺陷的概率为 0.1, 设当元件无缺陷时将自动通过检查, 求在 (3) 的假设下一元件通过检查的概率;

(5) 已知一元件已通过检查, 求该元件确实是有缺陷的概率 (设  $p=0.5$ )。

解：以  $A_i (i=1, 2, \dots, n)$  记事件“缺陷在第  $i$  个过程被检出”。按题设  $P(A_i) = p (i=1, 2, \dots, n)$

且  $A_1, A_2, \dots, A_n$  相互独立。

(1) 按题意所讨论的事件为，缺陷在第一个过程就被查出或者缺陷在第一个过程未被查出但在第二个过程被查出，即  $A_1 \cup \bar{A}_1 A_2$ ，因而所求概率为

$$P(A_1) + P(\bar{A}_1 A_2) = p + P(\bar{A}_1)P(A_2) = p + (1-p)p = 2p - p^2.$$

(2) 与 (1) 类似可知所求概率为

$$\begin{aligned} & P(A_1) + p(\bar{A}_1 A_2) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) + \dots + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_{n-1} A_n) \\ &= p + (1-p)p + (1-p)^2 p + \dots + (1-p)^{n-1} p = 1 - (1-p)^n. \end{aligned}$$

(3) 所求概率为  $P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = (1-p)^3$ .

(4) 以  $B$  记事件“元件是有缺陷的”，所求概率为

$P(\text{元件有缺陷且 3 次检查均未被查出} \cup \text{元件无缺陷})$

$$\begin{aligned} &= P(\bar{B} \cup (\bar{B} \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) | B) = P(\bar{B} | B) + P(\bar{B} \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 | B) \\ &= (1-p)^3 \times 0.1 + (1-p)^3 \times 0.9 \end{aligned}$$

(5) 所求概率为

$$\begin{aligned} P(\text{有缺陷} | \text{通过}) &= \frac{P(\text{通过} | \text{有缺陷})P(\text{有缺陷})}{P(\text{通过})} \\ &= \frac{(1-p)^3 \times 0.1}{(1-p)^3 \times 0.1 + 0.9} = 0.0137 (\text{其中 } p = 0.5) \end{aligned}$$

# 概率论与数理统计练习题

系\_\_\_\_\_专业\_\_\_\_\_班 姓名\_\_\_\_\_学号\_\_\_\_\_

## 第二章 随机变量及其分布 (一)

一. 选择题:

1. 设  $X$  是离散型随机变量, 以下可以作为  $X$  的概率分布是 [ B ]

$$(A) \begin{array}{c|cccc} X & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline p & 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/16 \end{array}$$

$$(B) \begin{array}{c|cccc} X & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline p & 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/8 \end{array}$$

$$(C) \begin{array}{c|cccc} X & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline p & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/12 \end{array}$$

$$(D) \begin{array}{c|cccc} X & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline p & 1/2 & 1/3 & 1/4 & -1/1 \end{array}$$

2. 设随机变量  $X$  的分布列为  $\begin{array}{c|cccc} X & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline p & 0.1 & 0.3 & 0.4 & 0.2 \end{array}$ ,  $F(x)$  为其分布函数, 则  $F(2) =$

[ C ]

(A) 0.2

(B) 0.4

(C) 0.8

(D) 1

二、填空题:

1. 设随机变量  $X$  的概率分布为  $\begin{array}{c|ccc} X & 0 & 1 & 2 \\ \hline p & a & 0.2 & 0.5 \end{array}$ , 则  $a =$  0.3

2. 某产品 15 件, 其中有次品 2 件。现从中任取 3 件, 则抽得次品数  $X$  的概率分布为

$P\{X=0\}=22/35; P\{X=1\}=12/35; P\{X=2\}=1/35$

3. 设射手每次击中目标的概率为 0.7, 连续射击 10 次, 则击中目标次数  $X$  的概率分布为

$P\{X=k\}=C_{10}^k 0.7^k \times 0.3^{10-k}, k=0, \dots, 10$  或  $X \sim B(10, 0.7)$

三、计算题:

1. 同时掷两颗骰子, 设随机变量  $X$  为“两颗骰子点数之和”求:

(1)  $X$  的概率分布; (2)  $P(X \leq 3)$ ; (3)  $P(X > 12)$

(1)  $P\{X=2\}=P\{X=12\}=1/36; P\{X=3\}=P\{X=11\}=1/18;$

$P\{X=4\}=P\{X=10\}=1/12; P\{X=5\}=P\{X=9\}=1/9;$

$P\{X=6\}=P\{X=8\}=5/36; P\{X=7\}=1/6$

(2)  $P\{X=2\}=1/36; P\{X=3\}=1/18$

(3)  $P\{X>12\}=0$

2. 产品有一、二、三等品及废品四种, 其中一、二、三等品及废品率分别为 60%, 10%, 20% 及 10%, 任取一个产品检查其质量, 试用随机变量  $X$  描述检查结果。



记  $X=4$  表示产品为废品； $X=1, 2, 3$  分别指产品为一、二、三等品。

$$\underline{P\{X=1\}=0.6; \quad P\{X=2\}=0.1; \quad P\{X=3\}=0.2; \quad P\{X=4\}=0.1}$$

3. 已知随机变量  $X$  只能取  $-1, 0, 1, 2$  四个值，相应概率依次为  $\frac{1}{2c}, \frac{3}{4c}, \frac{5}{8c}, \frac{7}{16c}$ ，试

确定常数  $c$ ，并计算  $P(X < 1)$ 。

$$c=37/16; \quad P\{X < 1\}=20/37$$

4. 一袋中装有 5 只球编号 1, 2, 3, 4, 5. 在袋中同时取 3 只，以  $X$  表示取出的 3 只球中最大号码，写出随机变量  $X$  的分布律和分布函数。

$$\underline{P\{X=3\}=0.1; \quad P\{X=4\}=0.3; \quad P\{X=5\}=0.6;}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 3 \\ 0.1 & 3 \leq x < 4 \\ 0.4 & 4 \leq x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$

5. 设随机变量  $X \sim B(2, P), Y \sim B(3, P)$ ，若  $P\{X \geq 1\} = \frac{5}{9}$ ，求  $P\{Y \geq 1\}$ 。

$$P\{Y > 1\}=19/27$$

第二章 随机变量及其分布 (二)

一、选择题:

1. 设连续性随机变量  $X$  的密度函数为  $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ , 则下列等式成立的是

[ A ]

- (A)  $P(X \geq -1) = 1$  (B)  $P(X = \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$  (C)  $P(X < \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$  (D)

$$P(X > \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

2. 设连续性随机变量  $X$  的密度函数为  $f(x) = \begin{cases} \ln x & x \in [1, b] \\ 0 & x \notin [1, b] \end{cases}$ , 则常数  $b =$

[ A ]

- (A)  $e$  (B)  $e+1$  (C)  $e-1$  (D)  $e^2$

3. 设  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 要使  $Y \sim N(0, 1)$ , 则

[ C ]

- (A)  $Y = \frac{X}{\sigma} + \mu$  (B)  $Y = \sigma X + \mu$  (C)  $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$  (D)  $Y = \sigma X - \mu$

4. 设  $X \sim N(0, 1)$ ,  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  ( $x \geq 0$ ), 则下列等式不成立的是

[ C ]

- (A)  $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$  (B)  $\Phi(0) = 0.5$  (C)  $\Phi(-x) = \Phi(x)$  (D)

$$P(|X| < a) = 2\Phi(a) - 1$$

5.  $X$  服从参数  $\lambda = \frac{1}{9}$  的指数分布, 则  $P(3 < X < 9) =$

[ C ]

- (A)  $F(1) - F(\frac{1}{3})$  (B)  $\frac{1}{9}(\frac{1}{\sqrt[3]{e}} - \frac{1}{e})$  (C)  $\frac{1}{\sqrt[3]{e}} - \frac{1}{e}$  (D)  $\int_3^9 e^{-\frac{x}{9}} dx$

- \*6. 设  $F_1(x), F_2(x)$  是随机变量的分布函数,  $f_1(x), f_2(x)$  是相应的概率密度函数, 则以下必为概率密度的是 (考研题 2011)

[ D ]

(A)  $f_1(x)f_2(x)$     (B)  $2f_1(x)F_2(x)$     (C)  $f_1(x)F_2(x)$     (D)  $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

二、填空题:

1. 设连续性随机变量  $X$  的密度函数为  $f(x) = \begin{cases} Ax^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ , 则常数  $A = \underline{3}$

2. 设随机变量  $X \sim N(2, \sigma^2)$ , 已知  $P(2 \leq X \leq 4) = 0.4$ , 则  $P(X \leq 0) = \underline{0.1}$

三、计算题:

1. 设  $X \sim U(1, 4)$ , 求  $P(X \leq 5)$  和  $P(0 \leq X \leq 2.5)$

$P(X \leq 5) = 1$

$P(0 \leq X \leq 2.5) = 0.5$

2. 设随机变量  $X$  的密度函数为  $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ ax+b & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ , 且  $P(0 < X \leq \frac{3}{2}) = \frac{7}{8}$ .

求: (1) 常数  $a, b$     (2)  $P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2})$     (3)  $X$  的分布函数  $F(x)$

(1)  $a=-1, b=2$ ;    (2)  $0.75$     (3)  $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.5x^2 & 0 \leq x < 1 \\ -0.5x^2 + 2x - 1 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$

3. 设某种电子元件的使用寿命  $X$  (单位:  $h$ ) 服从参数  $\lambda = \frac{1}{600}$  的指数分布, 现某种仪器

使用三个该电子元件, 且它们工作时相互独立, 求:

(1) 一个元件时间在  $200 h$  以上的概率;

(2) 三个元件中至少有两个使用时间在  $200 h$  以上的概率。

$$(1) e^{-\frac{1}{3}} \quad (2) 3e^{-\frac{2}{3}} - 2e^{-1}$$

### 概率论与数理统计练习题

系\_\_\_\_\_专业\_\_\_\_\_班 姓名\_\_\_\_\_学号\_\_\_\_\_

#### 第二章 随机变量及其分布 (三)

1. 已知  $X$  的概率分布列为

$X$	-2	-1	0	1	2	3
$p_i$	$2a$	$0.1$	$3a$	$a$	$a$	$2a$

，试求：

(1) 常数  $a$ ;      (2)  $Y = X^2 - 1$  的概率分布列。

$$(1) \quad a=0.1$$

$$(2) \quad P\{Y=-1\}=0.3; \quad P\{Y=0\}=0.2; \quad P\{Y=3\}=0.3 \quad P\{Y=8\}=0.2$$

2. 设随机变量  $X$  在  $(0, 1)$  服从均匀分布，求：

(1)  $Y = e^X$  的概率密度；

(2)  $Y = -2\ln X$  的概率密度。

$$(1) \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & 1 < y < e \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

$$(2) \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} & 0 < y < +\infty \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

3. 设  $X \sim N(0,1)$ ，求：

(1)  $Y = 2X^2 + 1$  的概率密度;

(2)  $Y = |X|$  的概率密度。

$$(1) \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y-1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2(y-1)}}, & y > 1 \\ 0, & \text{other} \end{cases}$$

$$(2) \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} & y \geq 0 \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

4. 设随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & x \in [1, 8], \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ,  $F(x)$  是  $X$  的分布函数, 求随

机变量  $Y = F(X)$  的分布函数。(考研题 2003)

解: 易见, 当  $x < 1$  时,  $F(x) = 0$ ; 当  $x > 8$  时,  $F(x) = 1$ .

对于  $x \in [1, 8]$ , 有

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} dt = \sqrt[3]{x} - 1.$$

设  $G(y)$  是随机变量  $Y = F(X)$  的分布函数. 显然, 当  $y < 0$  时,  $G(y) = 0$ ; 当  $y \geq 1$  时,  $G(y) = 1$ .

对于  $y \in [0, 1]$ , 有

$$\begin{aligned} G(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{F(X) \leq y\} \\ &= P\{\sqrt[3]{X} - 1 \leq y\} = P\{X \leq (y+1)^3\} \\ &= F[(y+1)^3] = y. \end{aligned}$$

于是,  $Y = F(X)$  的分布函数为

$$G(y) = \begin{cases} 0, & \text{若 } y < 0, \\ y, & \text{若 } 0 \leq y < 1, \\ 1, & \text{若 } y \geq 1. \end{cases}$$



## 概率论与数理统计练习题

系\_\_\_\_\_专业\_\_\_\_\_班 姓名\_\_\_\_\_学号\_\_\_\_\_

### 第三章 多维随机变量及其分布 (一)

一、填空题:

1、设二维随机变量  $(X, Y)$  的联合密度函数为  $f(x, y) = \begin{cases} Axy^2, 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, \text{其他} \end{cases}$ , 则常数

$A = \underline{6}$ 。

2、设二维随机变量  $(X, Y)$  的联合分布函数为  $F(x, y) = \begin{cases} A \arctan x \cdot \arctan y, x > 0, y > 0 \\ 0, \text{其他} \end{cases}$ ,

则常数  $A = \underline{\frac{4}{\pi^2}}$ 。

二、计算题:

1. 在一箱子中装有 12 只开关, 其中 2 只次品, 在其中取两次, 每次任取一只, 考虑两种实验:

(1) 放回抽样; (2) 不放回抽样。我们定义随机变量  $X, Y$  如下:

$$X = \begin{cases} 0 & \text{若第一次出的是正品} \\ 1 & \text{若第一次出的是次品} \end{cases}, \quad Y = \begin{cases} 0 & \text{若第二次出的是正品} \\ 1 & \text{若第二次出的是次品} \end{cases}$$

试分别就 (1), (2) 两种情况, 写出  $X$  和  $Y$  的联合分布律。

#### 二、1. (1) 放回抽样

$\begin{smallmatrix} Y \\ X \end{smallmatrix}$	0	1
0	25/36	5/36
1	5/36	1/36

#### (2) 不放回抽样

$\begin{smallmatrix} Y \\ X \end{smallmatrix}$	0	1
0	15/22	5/33
1	5/33	1/66

2. 设二维随机变量  $(X, Y)$  在  $G$  上服从均匀分布, 其中  $G$  由  $x - y = 0, x + y = 2$  与  $y = 0$

围成。求 (1) 边缘密度  $f_X(x)$ ; (2) 条件概率密度  $f_{X|Y}(x|y)$ 。(考研题 2011)

解: (1)  $f(x, y) = \begin{cases} 1, & (X, Y) \in G \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

当  $x < 0$  或  $x > 2$  时,  $f_X(x) = 0$

当  $0 \leq x \leq 1$  时,  $f_X(x) = \int_0^x dy = x$

当  $1 \leq x \leq 2$  时,  $f_X(x) = \int_0^{2-x} dy = 2-x$

综上,  $f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2-x, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(II)  $f_Y(y) = \begin{cases} \int_y^{2-y} dx, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} 2-2y, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{2-2y}, & y < x < 2-y \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

\*3. 设二维随机变量  $(X,Y)$  的联合密度函数为  $f(x,y) = Ae^{-2x^2+2xy-y^2}$ ,  $-\infty < x < +\infty$ ,

$-\infty < y < +\infty$ . 求  $A$  及  $f_{Y|X}(y|x)$ . (考研题 2010)

解: 因  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx dy = 1$ , 即  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-2x^2+2xy-y^2} dx dy = A\pi = 1$ , 故  $A = \frac{1}{\pi}$ .

又  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} e^{-2x^2+2xy-y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$

故  $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2+2xy-y^2}$

4. 设随机变量  $(X,Y)$  的概率密度为  $f(x,y) = \begin{cases} k(6-x-y) & 0 < x < 2, 2 < y < 4 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ , 求:

(1) 常数  $k$ ; (2) 求  $P\{X < 1, Y < 3\}$ ; (3)  $P\{X < 1.5\}$ ; (4)  $P\{X+Y \leq 4\}$ .

4. (1)  $\int_0^2 \int_2^4 k(6-x-y) dy dx = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{8}$ ;

4. (2)  $P(X < 1, Y < 3) = \int_0^1 \int_2^3 \frac{1}{8}(6-x-y) dy dx = \frac{3}{8}$ ;

(3)  $P(X < 1.5) = P(X < 1.5, 2 < Y < 4) = \int_0^{1.5} \int_2^4 \frac{1}{8}(6-x-y) dy dx$

(4)  $P(X+Y \leq 4) = \int_0^2 \int_2^{4-x} \frac{1}{8}(6-x-y) dy dx = \frac{2}{3}$ .



## 概率论与数理统计练习题

系\_\_\_\_\_专业\_\_\_\_\_班 姓名\_\_\_\_\_学号\_\_\_\_\_

### 第三章 多维随机变量及其分布 (二)

一、选择题:

1、设随机变量  $X$  与  $Y$  独立, 且  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ , 则  $Z = X - Y$  仍服从正态分布, 且有 [ D ]

- (A)  $Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$  (B)  $Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 - \sigma_2^2)$   
(C)  $Z \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 - \sigma_2^2)$  (D)  $Z \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

2、若  $(X, Y)$  服从二维均匀分布, 则 [ B ]

- (A) 随机变量  $X, Y$  都服从均匀分布 (B) 随机变量  $X, Y$  不一定服从均匀分布  
(C) 随机变量  $X, Y$  一定不服从均匀分布 (D) 随机变量  $X + Y$  服从均匀分布

二、填空题:

1、设二维随机变量  $(X, Y)$  的密度函数为  $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3}, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ,

则  $P(X + Y \geq 1) = \underline{65/72}$ 。

2、设随机变量  $X, Y$  同分布,  $X$  的密度函数为  $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 设  $A = \{X > a\}$

与  $B = \{Y > a\}$  相互独立, 且  $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ , 则  $a = \underline{\sqrt[3]{4}}$ 。

三、计算题:

1. 已知  $P\{X = k\} = \frac{a}{k}, P\{Y = -k\} = \frac{b}{k^2}, (k = 1, 2, 3)$ ,  $X$  与  $Y$  独立, 确定  $a, b$  的值, 求出

$(X, Y)$  的联合概率分布以及  $X + Y$  的概率分布。

三.1. 由正则性  $\sum_k P(X=k) = a + \frac{a}{2} + \frac{a}{3} = \frac{11a}{6} = 1 \Rightarrow a = \frac{6}{11}$

$$\sum_k P(Y=-k) = b + \frac{b}{4} + \frac{b}{9} = \frac{49b}{36} = 1 \Rightarrow b = \frac{36}{49}$$

$(X, Y)$  的联合概率分布为

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	-3	-2	-1
1	24/539	54/539	216/539
2	12/539	27/539	108/539
3	8/539	18/539	72/539

$(X+Y)$  的概率分布为

$X+Y$	-2	-1	0	1	2
$P$	$\frac{24}{539}$	$\frac{66}{539}$	$\frac{251}{539}$	$\frac{126}{539}$	$\frac{72}{539}$

2. 随机变量  $X$  与  $Y$  的联合密度函数为  $f(x, y) = \begin{cases} 12e^{-3x-4y}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 分别求下列概

率密度函数: (1)  $Z = X + Y$ ; (2)  $M = \max\{X, Y\}$ ; (3)  $N = \min\{X, Y\}$ 。

三、 2. (1)  $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) = \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dx dy$

$$= \int_0^z dx \int_0^{z-x} 12e^{-3x-4y} dy = 3 \int_0^z e^{-3x} (1 - e^{-4(z-x)}) dx = 1 - 4e^{-3z} + 3e^{-4z}$$

即  $F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 1 - 4e^{-3z} + 3e^{-4z} & z \geq 0 \end{cases} \therefore f_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 12e^{-3z} - 12e^{-4z} & z \geq 0 \end{cases}$

2. (2)  $F_M(z) = P(M \leq z) = P(X \leq z, Y \leq z) = \int_0^z \int_0^z 12e^{-3x-4y} dx dy$

$$= (1 - e^{-3z})(1 - e^{-4z})$$

$\therefore f_M(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ 3e^{-3z}(1 - e^{-4z}) + 4e^{-4z}(1 - e^{-3z}) = 3e^{-3z} + 4e^{-4z} - 7e^{-7z} & z > 0 \end{cases}$

2. (3)  $F_N(z) = P(N \leq z) = 1 - P(N > z) = 1 - P(X > z, Y > z) =$

$$= 1 - \int_z^{+\infty} \int_z^{+\infty} 12e^{-3x-4y} dx dy = 1 - e^{-7z}$$

$\therefore f_N(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ 7e^{-7z} & z > 0 \end{cases}$

3. 设  $X$  和  $Y$  相互独立, 其概率密度函数分别为  $f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ ,

$f_Y(y) = \begin{cases} Ae^{-y} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$ , 求: (1) 常数  $A$ , (2) 随机变量  $Z = X + Y$  的概率密度函数。

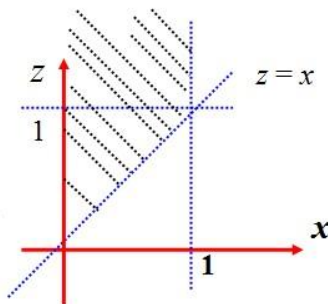
4. (1)  $\int_0^{+\infty} Ae^{-y} dy = 1 \Rightarrow A = 1$

(2)  $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$

(a)  $z < 0$  时,  $f_Z(z) = 0$

(b)  $0 < z < 1$  时,  $f_Z(z) = \int_0^z e^{-(z-x)} dx = 1 - e^{-z}$

(c)  $1 < z$  时,  $f_Z(z) = \int_0^1 e^{-(z-x)} dx = e^{-z}(e-1)$



\*4. 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立,  $X$  的概率分布为  $P(X=i) = \frac{1}{3} (i=-1,0,1)$ ,  $Y$  的概率密度为

$f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$  记  $Z = X + Y$ , 求  $Z$  的概率密度。(考研题 2008)



# 概率论与数理统计练习题

系\_\_\_\_\_专业\_\_\_\_\_班 姓名\_\_\_\_\_学号\_\_\_\_\_

## 第四章 随机变量的数字特征 (一)

一、选择题:

1. 设随机变量  $X$ , 且  $E(X)$  存在, 则  $E(X)$  是

[ B ]

- (A)  $X$  的函数 (B) 确定常数 (C) 随机变量 (D)  $x$  的函数

2. 设  $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}e^{-\frac{x}{9}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ , 则  $E(-\frac{1}{9}X) =$

[ C ]

- (A)  $\frac{1}{9} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{\frac{x}{9}} dx$  (B)  $-\frac{1}{9} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{\frac{x}{9}} dx$  (C)  $-1$  (D)  $1$

3. 设  $\xi$  是随机变量,  $E(\xi)$  存在, 若  $\eta = \frac{\xi-2}{3}$ , 则  $E(\eta) =$

[ D ]

- (A)  $E(\xi)$  (B)  $\frac{E(\xi)}{3}$  (C)  $E(\xi) - 2$  (D)  $\frac{E(\xi)}{3} - \frac{2}{3}$

4. 设随机变量  $X$  和  $Y$  独立且在  $(0, \theta)$  上服从均匀分布, 则  $E\{\min(X, Y)\} =$  (考研题 2011)

[ C ]

- (A)  $\frac{\theta}{2}$  (B)  $\theta$  (C)  $\frac{\theta}{3}$  (D)  $\frac{\theta}{4}$

二、填空题:

1. 设随机变量  $X$  的可能取值为  $0, 1, 2$ , 相应的概率分布为  $0.6, 0.3, 0.1$ , 则  $E(X) =$  0.5

2. 设  $X$  为正态分布的随机变量, 概率密度为  $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+1)^2}{8}}$ , 则  $E(2X^2 - 1) =$  9

3. 设随机变量  $X$  的概率分布

$X$	-2	-1	0	1	2
$P$	1/5	1/6	1/5	1/15	11/30

, 则  $E(X + 3X^2) =$  116/15

4. 设随机变量  $X$  的密度函数为  $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} (-\infty < x < +\infty)$ , 则  $E(X) =$  0

\*5. 设随机变量  $X_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n)$  独立且同分布,  $E(X_{ij}) = 2$ , 则行列式

$$Y = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn} \end{vmatrix} \text{的数学期望 } E(Y) = \underline{\quad 0 \quad} \quad (\text{考研题 1999})$$

三、计算题：

1. 袋中有 5 个乒乓球，编号为 1, 2, 3, 4, 5，从中任取 3 个，以  $X$  表示取出的 3 个球中最大编号，求  $E(X)$ 。

$$\begin{array}{c|c|c|c} \text{三、 1. } X & 3 & 4 & 5 \\ \hline p & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{6}{10} \end{array}$$

$$E(X \leq 3) = 3 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{3}{10} + 5 \cdot \frac{6}{10} = 4.5$$

2. 设随机变量  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，求  $E(|X - \mu|)$ 。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x - \mu| \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx &= \frac{x - \mu}{\sigma} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |y| e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \end{aligned}$$

3. 设随机变量  $X$  的密度函数为  $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ ，试求下列随机变量的数学期望。

$$(1) Y_1 = e^{-2X}; \quad (2) Y_2 = \max\{X, 2\}; \quad (3) Y_3 = \min\{X, 2\}$$

$$\begin{aligned} (1) E(Y_1) &= \int_0^{+\infty} e^{-2x} \cdot e^{-x} dx = \frac{1}{3} \\ (2) E(Y_2) &= \int_0^2 2e^{-x} dx + \int_2^{+\infty} xe^{-x} dx = 2 + e^{-2} \\ (3) E(Y_3) &= \int_0^2 xe^{-x} dx + \int_2^{+\infty} 2e^{-x} dx = 1 - e^{-2} \end{aligned}$$

## 概率论与数理统计练习题

\_\_\_\_\_系\_\_\_\_\_专业\_\_\_\_\_班 姓名\_\_\_\_\_学号\_\_\_\_\_

### 第四章 随机变量的数字特征 (二)

一、选择题:

1 . 已知  $E(X) = -1, D(X) = 3$  , 则  $E[X^2] =$  €

[ B ]

(A) 9

(B) 6

(C) 30

(D) 36

2 . 设  $X \sim$  , 则 有

[ D ]

(A)  $E(2X - 1) = 2np$

(B)  $D(2X - 1) = 4np(1 - p) + 1$

(C)  $E(2X + 1) = 4np + 1$

(D)  $D(2X - 1) = 4np(1 - p)$

3 . 设  $\xi$  服从参数为  $\lambda$  的泊松分布 ,  $\eta = 2\xi - 3$  , 则

[ D ]

(A)  $E(\eta) = 2\lambda - 3$   $D(\eta) = 2\lambda - 3$

(B)  $E(\eta) = 2\lambda$   $D(\eta) = 2\lambda$

(C)  $E(\eta) = 2\lambda - 3$   $D(\eta) = 4\lambda - 3$

(D)  $E(\eta) = 2\lambda - 3$   $D(\eta) = 4\lambda$

二、填空题:

1. 设随机变量  $X$  的可能取值为 0, 1, 2, 相应的概率分布为 0.6, 0.3, .01, 则  $D(X) =$  0.45

2. 设随机变量  $X$  的密度函数为  $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$  ( $-\infty < x < +\infty$ ), 则  $D(X) =$  2

3. 随机变量  $X$  服从区间[0, 2]上的均匀分布, 则  $\frac{D(X)}{[E(X)]^2} =$  1/3

4. 设正态分布  $Y$  的密度函数是  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(y-3)^2}$ , 则  $D(X) =$  1/2

5. 设随机变量  $X$  服从参数为  $\lambda = 1$  的泊松分布, 则  $P\{X = E(X^2)\} =$  1/2e (考

研题 2008)

三、计算题:

1. 设随机变量  $X$  的可能取值为 1, 2, 3, 相应的概率分布为 0.3, 0.5, 0.2, 求  $Y = 2X - 1$  的期望与方差;

$$\text{三、 } 1. E(X) = 1 \times 0.3 + 2 \times 0.5 + 3 \times 0.2 = 1.9$$

$$D(X) = E(X^2) - (EX)^2 = 1 \times 0.3 + 4 \times 0.5 + 9 \times 0.2 - (1.9)^2$$

$$E(Y) = 2E(X) - 1 = 2.8 \quad = 0.49$$

$$D(Y) = 4D(X) = 1.96$$

2. 设随机变量  $X \sim N(0,1)$ , 试求  $E|X|$ 、 $D|X|$ 、 $E(X^3)$ 与 $E(X^4)$ .

$$2. E(|X|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$D(|X|) = E(X^2) - E^2(|X|) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \frac{2}{\pi} = 1 - \frac{2}{\pi}$$

$$E(X^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0 \quad E(X^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 3$$

3. 设随机变量  $X$  的分布密度为  $f(x) = \begin{cases} ax & 0 < x < 2 \\ bx+c & 2 \leq x < 4 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ , 已知

$E(X) = 2, P(1 < X < 3) = \frac{3}{4}$ , 求: (1) 常数  $A, B, C$  的值; (2) 方差  $D(X)$ ; (3)

随机变量  $Y = e^X$  的期望与方差。

$$3.(1) E(X) = 2 \Rightarrow \int_0^2 x \cdot ax dx + \int_2^4 x \cdot (bx+c) dx = 2 \Rightarrow \frac{8}{3}a + \frac{56}{3}b + 6c = 2 \dots (1)$$

$$P(1 < X < 3) = \frac{3}{4} \Rightarrow \int_1^2 x \cdot ax dx + \int_2^3 x \cdot (bx+c) dx = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{3}{2}a + \frac{5}{2}b + c = \frac{3}{4} \dots (2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow 2a + 6b + 2c = 1 \dots (3)$$

$$(1)-(3) \text{ 联立解得 } a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{4}, c = 1.$$

$$(2) D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-2)^2 f(x) dx = \int_0^2 \frac{1}{4} x(x-2)^2 dx + \int_2^4 (1-\frac{1}{4}x)(x-2)^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$(3) E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x f(x) dx = \int_0^2 \frac{1}{4} x e^x dx + \int_2^4 (1-\frac{1}{4}x) e^x dx = \frac{1}{4}(e^2-1)^2$$

$$D(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2x} f(x) dx - [\frac{1}{4}(e^2-1)^2]^2 = \frac{1}{4}e^2(e^2-1)^2$$



# 概率论与数理统计练习题

系\_\_\_\_\_专业\_\_\_\_\_班 姓名\_\_\_\_\_学号\_\_\_\_\_

## 第四章 随机变量的数字特征 (三)

一、选择题:

1. 对任意两个随机变量  $X, Y$ , 若  $E(XY) \neq E(X)E(Y)$ , 则

[ B ]

(A)  $D(XY) = D(X)D(Y)$  (B)  $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$

(C)  $X$  与  $Y$  相互独立 (D)  $X$  与  $Y$  不相互独立

2. 将一枚硬币重复掷  $n$  次, 以  $X$  和  $Y$  分别表示正面向上和反面向上的次数, 则  $X$  和  $Y$  的相关系数等于 (考研题 2001)

[ A ]

(A)  $-1$  (B)  $0$  (C)  $\frac{1}{2}$  (D)  $1$

二、填空题:

1. 设随机变量  $(X, Y)$  服从正态分布  $N(0, 0, 1, 1, 0)$ , 则  $D(3X - 2Y) = \underline{13}$ 。

2. 设  $X$  与  $Y$  独立, 且  $D(X) = 6$ ,  $D(Y) = 3$ , 则  $D(2X - Y) = \underline{27}$ 。

3. 设  $D(X) = 25$ ,  $D(Y) = 36$ ,  $\rho_{XY} = 0.4$ , 则  $D(X - Y) = \underline{37}$ 。

三、计算题:

1. 已知二维随机变量  $(X, Y)$  的分布律如

表:

试验证  $X$  与  $Y$  不相关, 但  $X$  与  $Y$  不独立。

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	0.125	0.125	0.125
0	0.125	0	0.125
1	0.125	0.125	0.125

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - 0 \cdot 0 = 0$$

$$\therefore \rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = 0 \therefore X \text{ 与 } Y \text{ 不相关}$$

$$\text{又} \because P\{X = -1, Y = -1\} \neq P\{X = -1\} \cdot P\{Y = -1\}$$

$\therefore X$  与  $Y$  不独立

2. 设  $X \sim N(0, 4)$ ,  $Y \sim U(0, 4)$ , 且  $X, Y$  相互独立, 求:  $E(XY)$ ,  $D(X+Y)$ ,  $D(2X-3Y)$ .

$$\therefore X \sim N(0, 4), Y \sim U(0, 4) \therefore E(X) = 0, D(X) = 4;$$

$$E(Y) = 2, D(Y) = \frac{4^2}{12} = \frac{4}{3}, E(XY) = EXEY = 0$$

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) = 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

$$D(2X-3Y) = 4D(X) + 9D(Y) = 28$$

3. 设  $A$  和  $B$  为随机变量, 且  $P(A) = \frac{1}{4}, P(B|A) = \frac{1}{3}, P(A|B) = \frac{1}{2}$ , 令

$$X = \begin{cases} 1, & A \text{ 发生;} \\ 0, & A \text{ 不发生;} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1, & B \text{ 发生;} \\ 0, & B \text{ 不发生.} \end{cases}$$

(1) 求二维随机变量  $(X, Y)$  的概率分布; (2) 求  $X$  和  $Y$  的相关系数  $\rho_{XY}$ 。(考研题 2004)

22. 【详解】 (1) 因为  $P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{12}$ , 于是  $P(B) = \frac{P(AB)}{P(A|B)} = \frac{1}{6}$ ,

则有  $P\{X=1, Y=1\} = P(AB) = \frac{1}{12}$

$$P\{X=1, Y=0\} = P(\overline{AB}) = P(A) - P(AB) = \frac{1}{6},$$

$$P\{X=0, Y=1\} = P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB) = \frac{1}{12},$$

$$P\{X=0, Y=0\} = P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(AB)] = \frac{2}{3},$$

(2)

$$EX^2 = P(A) = \frac{1}{4}, \quad EY^2 = P(B) = \frac{1}{6},$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{3}{16}, \quad DY = EY^2 - (EY)^2 = \frac{5}{16},$$

$$Cov(X, Y) = E(XY) - EXEY = \frac{1}{24},$$

所以  $X$  与  $Y$  的相关系数  $\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY}} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$ .

4. (1) 设随机变量  $W = (aX + 3Y)^2, E(X) = E(Y) = 0, D(X) = 4, D(Y) = 16, \rho_{XY} = -0.5$ 。

求常数  $a$  使  $E(W)$  为最小, 并求  $E(W)$  的最小值。

(2) 设随机变量  $(X, Y)$  服从二维正态分布, 且有  $D(X) = \sigma_X^2, D(Y) = \sigma_Y^2$ 。证明当

$a^2 = \sigma_X^2 / \sigma_Y^2$  时, 随机变量  $W = X - aY$  与  $V = X + aY$  相互独立。

$$(1) E(W) = E[(aX + 3Y)^2] = a^2 E(X^2) + 6a E(XY) + 9 E(Y^2)$$

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) \quad \therefore E(X^2) = 4 \quad \text{同理} \quad E(Y^2) = 16$$

$$\text{又} \rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}} \Rightarrow Cov(X, Y) = -4, \text{ 而}$$

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \quad \therefore E(XY) = -4$$

$$\therefore E(W) = 4a^2 - 24a + 16 \cdot 9 \quad \therefore a = 3 \text{ 时, } E_{\min}(W) = 108$$

(2) 证:  $(X, Y)$  服从二维正态分布,  $W=X-aY$  与  $V=X+aY$  都服从正态分布, 当  $a^2=\sigma_X^2 /$

$\sigma_Y^2$  时,

$$\text{Cov}(W, V) = \text{Cov}(X-aY, X+aY)$$

$$= \text{Cov}(X, X) - a^2 \text{Cov}(Y, Y)$$

$$= D(X) - a^2 D(Y)$$

$$= \sigma_X^2 - a^2 \sigma_Y^2 = 0$$

$\therefore \rho_{WV}=0$ , 即  $W$  与  $V$  相互独立.

# 概率论与数理统计练习题

系\_\_\_\_\_专业\_\_\_\_\_班 姓名\_\_\_\_\_学号\_\_\_\_\_

## 第五章 大数定律与中心极限定理、第六章 样本及其分布

一、选择题:

1. 设  $\mu_n$  是  $n$  次重复试验中事件  $A$  出现的次数,  $p$  是事件  $A$  在每次试验中出现的概率, 则

对任意的  $\varepsilon > 0$  均有  $\lim_{n \rightarrow \infty} P \left| \frac{\mu_n}{n} - p \right| < \varepsilon$

[A]

(A) = 0 (B) = 1 (C) > 0 (D) 不存在

2. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  为独立同分布的随机变量列, 且均服从参数为  $\lambda (\lambda > 1)$  的指数分布, 记

$\Phi(x)$  为正态分布函数, 则 (考研题 2005)

[C]

$$(A) \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda}{\lambda\sqrt{n}} \leq x \right\} = \Phi(x) \quad (B) \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq x \right\} = \Phi(x)$$

$$(C) \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\lambda \sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}} \leq x \right\} = \Phi(x) \quad (D) \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq x \right\} = \Phi(x)$$

3. 设随机变量  $X \sim N(0, 1)$ ,  $Y \sim N(0, 1)$  则 (考研题 2002)

[C]

(A)  $X+Y$  服从正态分布 (B)  $X^2+Y^2$  服从  $\chi^2$  分布

(C)  $X^2$  和  $Y^2$  服从  $\chi^2$  分布 (D)  $X^2/Y^2$  服从  $F$  分布

二、填空题:

1. 对于随机变量  $X$ , 仅知其  $E(X)=3, D(X)=\frac{1}{25}$ , 则可知  $P\{|X-3|<3\} \geq \frac{224}{225}$ \_\_

2. 设总体  $X$  服从参数为 2 的指数分布,  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  是来自总体  $X$  的简单随机样本,

则当  $n \rightarrow \infty$  时,  $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  依概率收敛于 1/2 (考研题 2003)

3. 设总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为其样本, 记  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ,

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \text{ 则 } Y = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu) / S \text{ 服从的分布是 } \underline{t(n-1)}.$$

三、计算题:

1. 计算器在进行加法时, 将每个加数舍入最靠近它的整数, 设所有舍入误差是独立的且在  $(-0.5, 0.5)$  上服从均匀分布。问: (1) 若将 1500 个数相加, 误差总和的绝对值超过 15 的概率是多少? (2) 最多可有几个数相加使得误差总和的绝对值小于 10 的概率不小于 0.90 ?

$$(1) X \sim U(-0.5, 0.5), E(\sum_{i=1}^{1500} X_i) = 0, D(\sum_{i=1}^{1500} X_i) = 1500 \times \frac{1}{12} = 125.$$

$$P(|\sum_{i=1}^{1500} X_i| > 15) = P(\frac{|\sum_{i=1}^{1500} X_i|}{\sqrt{125}} > \frac{15}{\sqrt{125}}) \approx 2[1 - \Phi(\frac{3\sqrt{5}}{5})] \approx 2[1 - \Phi(1.3)] = 0.18.$$

$$(2) P(|\sum_{i=1}^n X_i| < 10) = P(\frac{|\sum_{i=1}^n X_i|}{\sqrt{n}} < \frac{10}{\sqrt{n}}) \geq 0.90 \Rightarrow \Phi(\frac{10}{\sqrt{n}}) \geq 0.95$$

$$\text{根据}\Phi\text{的单调性得, } \frac{10}{\sqrt{n}} \geq 1.645, \text{ 故 } n \leq 12 \times (\frac{10}{1.645})^2 \approx 443.4.$$

$\therefore n$  最多为 443 个数相加.

2. 一食品店有三种蛋糕出售, 由于售出哪一种蛋糕是随机的, 因而售出一只蛋糕的价格是一个随机变量, 它取 1 元、1.2 元、1.5 元各个值的概率分别为 0.3、0.2、0.5。某天售出 300 只蛋糕。

(1) 求收入至少 400 元的概率; (2) 求售出价格为 1.2 元的蛋糕多于 60 只的概率。

(1) 设第  $i$  只蛋糕的价格为  $X_i, i = 1, 2, \dots, 300$ , 则  $X_i$  有分布律:

$$P(X_i = 1) = 0.3, P(X_i = 1.2) = 0.2, P(X_i = 1.5) = 0.5.$$

$$\text{由此得 } E(X_i) = 1.29, D(X_i) = E(X_i^2) - [E(X_i)]^2 = 1.713 - 1.29^2$$

以  $X$  表示这天的总收入, 则  $X = \sum_{i=1}^{300} X_i$ , 由定理得

$$P(X \geq 400) = P(\frac{\sum_{i=1}^{300} X_i - 300 \times 1.29}{\sqrt{300 \times 0.0489}} \geq \frac{400 - 300 \times 1.29}{\sqrt{300 \times 0.0489}})$$

$$\approx 1 - \Phi(3.39) = 1 - 0.9997 = 0.0003.$$

(2) 以  $Y$  记 300 只蛋糕中售价为 1.2 元的蛋糕的只数, 于是

$$Y \sim B(300, 0.2), E(Y) = 300 \times 0.2, D(Y) = 300 \times 0.2 \times 0.8$$

由棣莫弗-拉普拉斯定理得

$$P(Y > 60) = 1 - P(Y \leq 60) = 1 - P(\frac{Y - 60}{\sqrt{48}} \leq \frac{60 - 60}{\sqrt{48}})$$

$$\approx 1 - \Phi(0) = 0.5.$$

3. 总体  $N(\mu, \sigma^2)$ ，在该总体中抽取一个容量为  $n=16$  的样本  $(X_1, X_2, \dots, X_{16})$ 。

求：(1)  $P\{\frac{\sigma^2}{2} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \leq 2\sigma^2\}$ ； (2)  $P\{\frac{\sigma^2}{2} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \leq 2\sigma^2\}$ 。

$$\begin{aligned} \text{(1)} \quad & P\{\frac{\sigma^2}{2} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \leq 2\sigma^2\} = P\{\frac{n}{2} \leq \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \leq 2n\} \\ & = P(8 \leq \chi^2(16) \leq 32) = P\{\chi^2(16) > 8\} - P\{\chi^2(16) > 32\} = 0.95 - 0.01 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2)} \quad & P\{\frac{\sigma^2}{2} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \leq 2\sigma^2\} = P\{\frac{n}{2} \leq \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \leq 2n\} \\ & = P(8 \leq \chi^2(15) \leq 32) = P\{\chi^2(15) > 8\} - P\{\chi^2(15) > 32\} = 0.9 - 0.005 \end{aligned}$$

# 概率论与数理统计练习题

系\_\_\_\_\_专业\_\_\_\_\_班\_\_\_\_\_姓名\_\_\_\_\_学号\_\_\_\_\_

## 第七章 参数估计 (一)

一、选择题:

1. \_\_\_\_\_矩估计必然  
[ C ]

(A) 无偏估计 (B) 总体矩的函数 (C) 样本矩的函数 (D) 极大似然估计

2. 设  $X_1, X_2$  是正态总体  $N(\mu, 1)$  的容量为 2 的样本,  $\mu$  为未知参数,  $\mu$  的无偏估计是  
[ D ]

(A)  $\frac{2}{3}X_1 + \frac{4}{3}X_2$  (B)  $\frac{1}{4}X_1 + \frac{2}{4}X_2$  (C)  $\frac{3}{4}X_1 - \frac{1}{4}X_2$  (D)  $\frac{2}{5}X_1 + \frac{3}{5}X_2$

3. 设某钢珠直径  $X$  服从正态总体  $N(\mu, 1)$  (单位: mm), 其中  $\mu$  为未知参数, 从刚生产的一大堆钢珠抽出 9 个, 求的样本均值  $\bar{X} = 31.06$ , 样本方差  $S_9^2 = 0.98^2$ , 则  $\mu$  的极大似然估计值为 [ A ]

(A) 31.06 (B)  $(31.06 - 0.98, 31.06 + 0.98)$  (C) 0.98 (D)  $9 \times 31.06$

二、填空题:

1. 如果  $\hat{\theta}_1$  与  $\hat{\theta}_2$  都是总体未知参数  $\theta$  的估计量, 称  $\hat{\theta}_1$  比  $\hat{\theta}_2$  有效, 则  $\hat{\theta}_1$  与  $\hat{\theta}_2$  的期望与方差一定满足  $\text{---}E\hat{\theta}_1 = E\hat{\theta}_2, D\hat{\theta}_1 < D\hat{\theta}_2\text{---}$

2. 设样本  $x_1 = 0.5, x_2 = 0.5, x_3 = 0.2$  来自总体  $X \sim f(x, \theta) = \theta x^{\theta-1}$ , 用最大似然法估计参数  $\theta$  时, 似然函数为  $L(\theta) = \text{---}\theta^3(0.05)^{\theta-1}\text{---}$

3. 假设总体  $X$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ( $n > 1$ ) 为  $X$  的样本,  $\sigma^2 = C \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$  是  $\sigma^2$  的一个无偏估计, 则  $C = \text{---}\frac{1}{2(n-1)}\text{---}$

三、计算题:

1. 设总体  $X$  具有分布律, 其中  $\theta$  ( $0 < \theta < 1$ ) 为未知参数,

$X$	1	2	3
$p_i$	$\theta^2$	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

已知取得了样本值  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1$ , 试求  $\theta$  的最大似然估计值。

**三、1. 解:** 该样本的似然函数为

$$L(\theta) = \theta^4 \cdot 2\theta(1-\theta) = 2\theta^5 - 2\theta^6.$$

$$\text{令 } L'(\theta) = 0 \text{ 得 } \theta = \frac{5}{6}.$$

2. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自于总体  $X \sim f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{其它} \end{cases} (\theta > 0)$  的样本,

试求: (1)  $\theta$  的一个无偏估计  $\theta_1$ ; (2)  $\theta$  的极大似然估计  $\theta_2$ .

$$\text{2. (1)} E(X) = \frac{\theta}{2} = \bar{X} \Rightarrow \hat{\theta} = 2\bar{X}, \quad E(\hat{\theta}) = 2E(\bar{X}) = 2 \cdot \frac{\theta}{2} = \theta$$

$\therefore \theta$  的一个无偏估计为  $2\bar{X}$ .

$$\text{(2) 似然函数为: } L(\theta; X_1, \dots, X_n) = \theta^{-n}, 0 < X_i \leq \theta, i = 1, \dots, n$$

显然  $L$  是  $\theta$  的一个单值递减函数.

要使  $L(\theta; X_1, \dots, X_n) = \theta^{-n}$  达到极大, 就要使  $\theta$  达到最小, 但  $\theta$

不能小于每一个  $X_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ ,

所以  $\theta$  的极大似然估计量为:  $\theta_2 = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ .

3. 设总体  $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ , 其中  $\theta > -1$  是未知参数,

$X_1, X_2, \dots, X_n$  为一个样本, 试求参数  $\theta$  的矩估计量和最大似然估计量.

$$\text{3. } \because \textcircled{1} EX = \int_0^1 x \cdot (\theta+1)x^\theta dx = \frac{\theta+1}{\theta+2},$$

用样本一阶原点矩作为总体一阶原点矩的估计,

$$\text{即 } \bar{X} = EX = \frac{\theta+1}{\theta+2}, \text{ 得 } \hat{\theta} = \frac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}. \text{ 故 } \theta \text{ 的矩估计量为 } \frac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}.$$

$$\textcircled{2} \text{ 设似然函数 } L(\theta) = \prod_{i=1}^n (\theta+1)x_i^\theta$$

$$\text{即 } \ln L(\theta) = n \ln(\theta+1) + \theta \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

$$\text{则 } \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{\theta+1} + \sum_{i=1}^n \ln x_i, \quad \text{令 } \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = 0$$

$$\text{得 } \hat{\theta}_L = -1 - \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}$$

\*4. 设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为来自正态总体  $N(\mu_0, \sigma^2)$  的简单随机样本, 其中  $\mu_0$  已知,  $\sigma^2 > 0$  未知,

$\bar{X}$  和  $S^2$  分别表示样本均值和样本方差. (1) 求  $\sigma^2$  的极大似然估计  $\hat{\sigma}^2$ ; (2), 计算

$E\hat{\sigma}^2$  和  $D\hat{\sigma}^2$ . (考研题 2002)



## 概率论与数理统计练习题

\_\_\_\_\_系\_\_\_\_\_专业\_\_\_\_\_班 姓名\_\_\_\_\_学号\_\_\_\_\_

### 第七章 参数估计 (二)

一、选择题:

1. 设总体  $X$  服从正态分布  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 其中  $\mu$  未知,  $\sigma^2$  已知,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为样本,

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , 则  $\mu$  的置信水平为 0.95 的置信区间是

[ D ]

- (A)  $(\bar{X} - Z_{0.95} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + Z_{0.95} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$       (B)  $(\bar{X} - Z_{0.05} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + Z_{0.05} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$   
 (C)  $(\bar{X} - Z_{0.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + Z_{0.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$       (D)  $(\bar{X} - Z_{0.025} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + Z_{0.025} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

2. 设总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 对参数  $\mu$  或  $\sigma^2$  进行区间估计时, 不能采用的样本函数有

[ D ]

- (A)  $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$       (B)  $\frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}}$       (C)  $\sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2$       (D)  $\bar{X}_n - X_1$

二、计算题:

1. 设总体  $X$  的方差为  $(0.3)^2$ , 根据来自  $X$  的容量为 5 的简单随机样本, 测得样本均值为 21.8, 求  $X$  的数学期望的置信度为 0.95 的置信区间。

**二、**  $(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{0.025}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{0.025}) = (21.525, 22.075).$

2. 设冷抽铜丝的折断力服从正态分布  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 从一批铜丝任取 10 根, 测得折断

力如下: 578、572、570、568、572、570、570、596、584、572, 求方差  $\sigma^2$  的 0.90 的置信

**三、1. 解:**  $\mu$  未知, 求  $\sigma^2$  置信水平为  $1-\alpha$  的置信区间为

$$\left( \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} \right).$$

这里  $n=10, S^2=75.73, \alpha=0.1, \chi_{0.05}^2(9)=16.919,$

$$\chi_{0.95}^2(9)=3.325.$$

代入  $\sigma^2$  得的置信区间为  $(40.284, 204.984).$

3. 设来自总体  $X \sim N(\mu, 25)$  得到容量为 10 的样本, 算的样本均值  $\bar{X}=19.8$ , 来自总体

$Y \sim N(\mu, 36)$  得到容量为 10 的样本，算的样本均值  $\bar{Y} = 24.0$ ，两样本的总体相互独立，求  $\mu_1 - \mu_2$  的 90% 的置信区间。

解：  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  均已知，求  $\mu_1 - \mu_2$  置信水平为  $1 - \alpha$  的置信区间为

$$(\bar{X} - \bar{Y} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \bar{X} - \bar{Y} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}})$$

这里  $n_1 = n_2 = 10, \bar{X} = 19.8, \bar{Y} = 24.0, \sigma_1^2 = 25, \sigma_2^2 = 36, \alpha = 0.1, Z_{0.05} = 1.645$ . 代入  $\mu_1 - \mu_2$  得的置信区间为  $(-8.2628, -0.1372)$ .

4. 某车间两条生产线生产同一种产品，产品的质量指标可以认为服从正态分布，现分别从两条生产线的产品中抽取容量为 25 和 21 的样本检测，算的修正方差分别是 7.89 和 5.07，求产品质量指标方差比的 95% 的置信区间。

解：  $\mu_1, \mu_2$  未知，求  $\sigma_1^2 / \sigma_2^2$  置信水平为  $1 - \alpha$  的置信区间为

$$(\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)}, \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)})$$

这里  $n_1 = 25, n_2 = 21, S_1^2 = 7.89, S_2^2 = 5.07, \alpha = 0.05, F_{0.025}(24, 20)$

$$F_{0.975}(24, 20) = \frac{1}{F_{0.025}(20, 24)} = \frac{1}{2.33}.$$

代入  $\sigma_1^2 / \sigma_2^2$  的置信区间为  $(0.6457, 3.6260)$ .

## 第八章 假设检验 (一)

### 一、选择题:

1. 假设检验中, 显著性水平为  $\alpha$ , 则 [ B ]

- (A) 犯第二类错误的概率不超过  $\alpha$  (B) 犯第一类错误的概率不超过  $\alpha$   
(C)  $\alpha$  是小于等于 10% 的一个数, 无具体意义 (D) 可信度为  $1-\alpha$ .

2. 设某产品使用寿命  $X$  服从正态分布, 要求平均寿命不低于 1000 小时, 现从一批这种产品中随机抽出 25 只, 测得平均寿命为 950 小时, 方差为 100 小时, 检验这批产品是否合格可用 [ A ]

- (A)  $t$  检验法 (B)  $\chi^2$  检验法 (C)  $Z$  检验法 ( $U$  检验法) (D)  $F$

检验法

3. 从一批零件中随机抽出 100 个测量其直径, 测得的平均直径为 5.2cm, 标准方差为 1.6cm, 若这批零件的直径是符合标准 5cm, 采用了  $t$  检验法, 在显著性水平  $\alpha$  下, 接受域为 [ A ]

- (A)  $|t| < t_{\frac{\alpha}{2}}(99)$  (B)  $|t| < t_{\frac{\alpha}{2}}(100)$  (C)  $|t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(99)$  (D)  $|t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(100)$

4. 设样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  来自正态分布  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 在进行假设检验时, 采用统计量

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \quad \text{是} \quad \text{对} \quad \text{于}$$

[ C ]

- (A)  $\mu$  未知, 检验  $\sigma^2 = \sigma_0^2$  (B)  $\mu$  已知, 检验  $\sigma^2 = \sigma_0^2$   
(C)  $\sigma^2$  未知, 检验  $\mu = \mu_0$  (D)  $\sigma^2$  已知, 检验  $\mu = \mu_0$

### 二、计算题:

1. 已知某炼铁厂铁水含碳量在正常情况下, 服从正态分布  $N(4.52, 0.108^2)$ , 现在测定了 5 炉铁水, 其含碳量分别为

4.29 4.33 4.77 4.35 4.36

若标准差不变, 给定显著性水平  $\alpha = 0.05$ , 问

(1) 现在所炼铁水总体均值  $\mu$  有无显著性变化?

(2) 若有显著性变化, 可否认为现在生产的铁水总体均值  $\mu < 4.52$ ?

**二、1. 提出假设:  $H_0: \mu = 4.52, H_1: \mu \neq 4.52$**

$$\text{选统计量 } Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

在给定显著性水平  $\alpha = 0.05$  下, 取临界值为  $z_{0.025} = 1.96$ ,

由于  $\bar{x} = 4.42, \sigma^2 = 0.108^2$

$$\text{计算 } |Z| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| = \left| \frac{\sqrt{5}(4.42 - 4.52)}{0.108} \right| = 2.07 > 1.96$$

所以, 现在所炼铁水总体均值  $\mu$  有显著性变化。

二、1. (2) 提出假设:  $H_0: \mu < 4.52$ ,  $H_1: \mu \geq 4.52$

$$\text{选统计量 } Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

在给定显著性水平  $\alpha = 0.05$  下, 取临界值为  $z_{0.05} = 1.645$ ,

由于  $\bar{x} = 4.42$ ,  $\sigma^2 = 0.108^2$

$$\text{计算 } Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}(4.42 - 4.52)}{0.108} = -2.07 < 1.645$$

所以, 接受原假设。可以认为现在生产的铁水总体均值  $\mu < 4.52$

2. 设某种灯泡的寿命服从正态分布, 按规定其寿命不得低于 1500 小时, 今从某日生产的一批灯泡中随机抽取 9 只灯泡进行测试, 得到样本平均寿命为 1312 小时, 样本标准差为 380 小时, 在显著水平  $\alpha = 0.05$  下, 能否认为这批灯泡的平均寿命显著地降低?

二、2. 提出假设:  $H_0: \mu \geq 1500$ ,  $H_1: \mu < 1500$

$$\text{选统计量 } T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

在给定显著性水平  $\alpha = 0.05$  下, 取临界值为

$$t_{0.05}(n-1) = t_{0.05}(8) = 1.8595,$$

由于  $\bar{x} = 1312$ ,  $S = 380$ , 计算

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} = \frac{1312 - 1500}{380 / 3} = -1.48 > -1.8595$$

所以应该接受  $H_0$ , 即认为这批灯泡的平均寿命没有显著地降低。

3. 某维尼龙厂长期生产的维尼龙纤度服从正态分布  $N(\mu, 0.048^2)$ 。由于近日设备的更换, 技术人员担心生产的维尼龙纤度的方差会大于  $0.048^2$ 。现随机地抽取 9 根纤维, 测得其纤维为

1.38    1.40    1.41    1.40    1.41    1.40    1.35    1.42    1.43

给定显著性水平  $\alpha = 0.05$ , 问这批维尼龙纤度的方差会大于  $0.048^2$ ?

二、3. 提出假设:  $H_0: \sigma^2 > 0.048^2$ ,  $H_1: \sigma^2 \leq 0.048^2$

$$\text{选统计量 } \chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

在给定显著性水平  $\alpha = 0.05$  下, 取临界值为

$$\chi_{0.95}^2(n-1) = \chi_{0.95}^2(8) = 2.733,$$

$$\text{由于 } S^2 = 0.00055, \chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{8 \times 0.00055}{0.048^2} = 1.91 < 2.733$$

所以应该拒绝  $H_0$ , 认为这批维尼龙纤度的方差会小于  $0.048^2$

4. 某厂生产的铜丝, 要求其折断力的方差不超过  $16N^2$ 。今从某日生产的铜丝随机抽取容量为 9 的样本, 测得其折断力如下 (单位: N): 289 286 285 286 284 285 286 298 292 设总体服从正态分布, 问该日生产的铜丝的折断力的方差是否符合标准 ( $\alpha = 0.05$ )

二、4. 提出假设:  $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2, H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$

$$\text{选统计量 } \chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

在给定显著性水平  $\alpha = 0.05$  下, 取临界值为

$$\chi_{\alpha}^2(n-1) = \chi_{0.05}^2(8) = 15.507, \text{使得 } P\{\chi^2 > \chi_{\alpha}^2(n-1)\} = \alpha$$

$$\text{由于 } S^2 = 20.36, n = 9, \chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{8 \times 20.36}{16}$$

所以应该接受  $H_0$ , 该日生产的铜丝的折断力的方差符合标准.

## 概率论与数理统计练习题

系\_\_\_\_\_专业\_\_\_\_\_班\_\_\_\_\_姓名\_\_\_\_\_学号\_\_\_\_\_

### 第八章 假设检验(二)

1. 欲知某种新血清是否能抑制白血球过多症,选择已患该病的老鼠 9 只,并将其中 5 只施予此种血清,另外 4 只则不然,从实验开始,其存活年限如下:

在  $\alpha = 0.05$  的显著性水平下,且假定两总体均方差相同的正态分布,试检验此种血清是否有效?

接受血清	2.1	5.3	1.4	4.6	0.9
未接受血清	1.9	0.5	2.8	3.1	

2. 某设备改装前后的生产效率(件/小时)记录如下:

改装前 20 21 24 24 21 22 21 19 17  
改装后 25 21 25 26 24 30 28 18 20 23

设改装前后的生产效率均服从正态分布,且标准差不变,问改装前后生产效率有无显著差异?  
( $\alpha = 0.05$ )

3. 某地区居民平时比较喜欢吃豆腐.该地区一家超市打算对每千克豆腐提价 0.2 元,但又担心提价后会降低销售量.于是通过居委会对 10 个爱吃豆腐的家庭调查了每个月对豆腐的需求量(千克/月):

提价前 2.7 2.6 2.8 2.9 3.0 3.2 3.5 3.8 4.0 4.1  
提价后 2.8 2.5 2.9 2.7 3.1 3.0 3.3 3.6 3.7 4.0

设商品的价格变动对销售量的影响服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2$  未知.给定显著性水平  $\alpha = 0.05$ ,问:该地区居民对豆腐的需求量会显著下降吗?

4. 某轴承厂按传统工艺制造一种钢珠，根据长期生产资料知钢珠直径服从以  $\mu_0 = 1\text{cm}, \sigma_0^2 = 0.15^2 \text{cm}^2$  为参数的正态分布，为了提高产品质量，采用了一种新工艺，为了检验新工艺的优劣，从新工艺生产的钢珠中抽取 10 个，测其直径并算出样本平均值  $\bar{x} = 1.1\text{cm}$ 。假定新工艺生产的钢珠直径仍服从正态分布，且方差与以前的相同，问：

- (1) 对于给定显著性水平  $\alpha = 0.05$ ，能否采用新工艺？
- (2) 对于给定显著性水平  $\alpha = 0.01$ ，能否采用新工艺？

5. 非典型性肺炎患者的体温都很高，药物治疗若能使患者的体温下降，说明该药有一定疗效。设药物疗效服从正态分布。为试验“抗非典一号”药的疗效，现测试 9 名患者服用该药前的体温，依次为

38.2°    38.6°    38.5°    38.8°    38.2°    38.6°    38.4°    38.9°    38.9°

服用该药 24 小时后再测试这 9 名患者的体温，依次为

37.6°    38.7°    38.6°    38.4°    38.2°    38.4°    38.1°    38.6°    38.7°

给定显著性水平  $\alpha = 0.05$ ，问服用该药有无显著性效果？