5-шаговый метод Адамса-Мультона для ОДУ

Блинец В.М., 3мм

March 1, 2025

1 Введение

Неявный метод Адамса-Мультона 5-го порядка применяется для численного решения систем ОДУ, где $\mathbf{y}$ — вектор состояния дифференциальных, уравнений вида:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0,$$

2 Математическая формулировка

Формула для 5-шагового метода Адамса-Мультона: Для стартовых точек $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ используется метод Рунге-Кутты 4-го порядка.

$$\mathbf{y}_{n+4} = \mathbf{y}_{n+3} + h\left(\frac{251}{720}\mathbf{f}(t_{n+4}, \mathbf{y}_{n+4}) + \frac{646}{720}\mathbf{f}(t_{n+3}, \mathbf{y}_{n+3}) - \frac{264}{720}\mathbf{f}(t_{n+2}, \mathbf{y}_{n+2}) + \frac{106}{720}\mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}) - \frac{19}{720}\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n)\right).$$

3 Реализация на C++

```cpp
State rungeKutta4(DerivativeFunc f, double t, const State& y, double h) {
    State k1 = f(t, y);
    State k2 = f(t + h/2, y + k1 * (h/2));
    State k3 = f(t + h/2, y + k2 * (h/2));
    State k4 = f(t + h, y + k3 * h);
    return y + (k1 + k2*2.0 + k3*2.0 + k4) * (h/6.0);
}
State adamsMoulton5Step(DerivativeFunc f, double t,
    const vector<State>& prev_states, double h, double eps = 1e-8) {

    const State& yn = prev_states[0], &yn1 = prev_states[1];
    const State& yn2 = prev_states[2], &yn3 = prev_states[3];

    State y_pred = yn3;
    for (int iter = 0; iter < 20; ++iter) {
        State term =
            f(t + 4*h, y_pred) * (251.0/720.0) +
            f(t + 3*h, yn3)    * (646.0/720.0) +
            f(t + 2*h, yn2)    * (-264.0/720.0) +
            f(t + h, yn1)      * (106.0/720.0) +
            f(t, yn)           * (-19.0/720.0);

        State y_next = yn3 + term * h;
        if (max_diff(y_next, y_pred) < eps) break;
        y_pred = y_next;
    }
    return y_pred;
}
```

4 Примеры расчетов

4.1 Тест 1:

Система:

$$\begin{cases} x' = y - x, \\ y' = -x - y, \end{cases} \qquad \mathbf{y}(0) = [1.0, 1.0].$$

Точное решение:

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t}(\cos t + \sin t), \\ y(t) = e^{-t}(\cos t - \sin t). \end{cases}$$

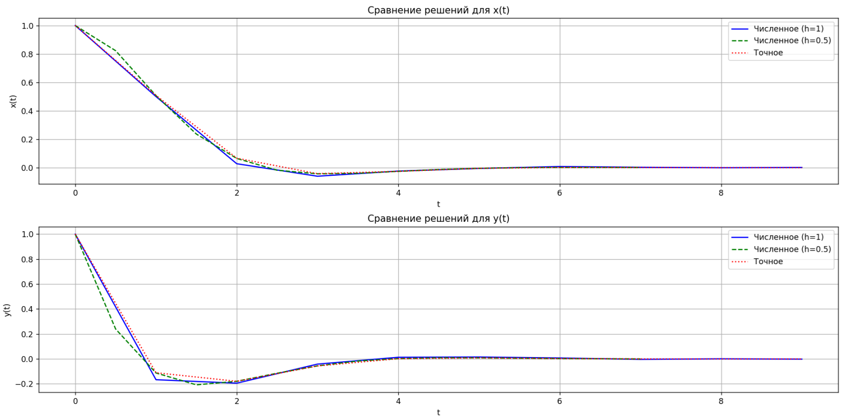
4.2 Тест 2

Система:

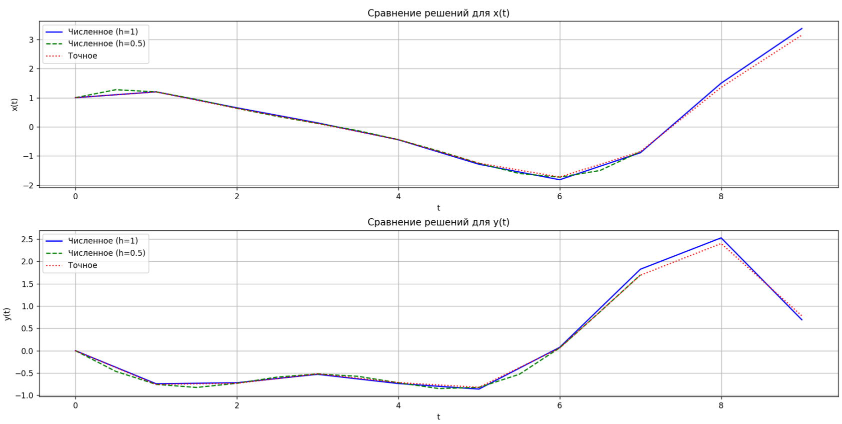
$$\begin{cases} x' = y + e^{-t}, \\ y' = -x + \sin t, \end{cases} \qquad \mathbf{y}(0) = [1.0, 0.0].$$

Точное решение:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{3}{2}\cos t + \frac{1}{2}t\cos t - \frac{1}{2}e^{-t}, \\ y(t) = -\frac{3}{2}\sin t + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}t\sin t - \frac{1}{2}e^{-t}. \end{cases}$$



Тест 1.



Тест 2.

5 Заключение

- Метод демонстрирует 5-й порядок точности для гладких решений.
- Инициализация через Рунге-Кутту 4-го порядка обеспечивает стартовые точки с погрешностью $O(h^5)$.