

# Решение системы нелинейных уравнений методом Якоби с итерационным методом Ньютона

Блинец Владимир, 3ММ

November 26, 2024

## 1 Введение

Нелинейный метод Якоби представляет собой итерационный алгоритм для решения систем нелинейных уравнений. Этот метод применяется к системам вида:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

На каждом шаге  $k$  метод требует решения  $m$  скалярных уравнений для обновления переменных  $x_i^{k+1}$ , используя итерационные методы, такие как метод Ньютона.

## 2 Алгоритм метода Якоби с методом Ньютона

Метод Якоби предполагает пошаговое обновление переменных  $x_i$  системы уравнений. Для каждого уравнения  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_m)$  обновление происходит согласно схеме:

$$f_i(x_1^k, x_2^k, \dots, x_{i-1}^k, x_i^{k+1}, x_{i+1}^k, \dots, x_m^k) = 0.$$

Для нахождения  $x_i^{k+1}$  используется итерационный метод Ньютона:

$$x_i^{k+1} = x_i^k - \frac{f_i(x_1^k, \dots, x_{i-1}^k, x_i^k, x_{i+1}^k, \dots, x_m^k)}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_1^k, \dots, x_{i-1}^k, x_i^k, x_{i+1}^k, \dots, x_m^k)}.$$

## 3 Условия сходимости метода

1. Доминантность диагонали: Если для каждой строки матрицы абсолютные значения диагонального элемента больше суммы абсолютных значений остальных элементов, то метод будет сходиться.
2. Симметричность и положительная определенность: Если матрица симметрична и положительно определенная, метод Якоби также будет сходиться.

## 4 Пример расчета

Рассмотрим систему нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3) &= 4x_1 - x_2 - x_3 - \sin(x_1) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, x_3) &= -x_1 + 4x_2 - x_3 - \cos(x_2) = 0, \\ f_3(x_1, x_2, x_3) &= -x_1 - x_2 + 4x_3 - \ln(1 + x_3^2) = 0. \end{aligned}$$

Начальное приближение:  $x_1^0 = 0.5$ ,  $x_2^0 = 0.5$ ,  $x_3^0 = 0.5$ .

Итерационный процесс:

1. Для каждого уравнения вычисляем значение функции  $f_i$  и её производную по  $x_i$ .
2. Обновляем  $x_i$  с использованием метода Ньютона:

$$x_i^{k+1} = x_i^k - \frac{f_i(x_1^k, x_2^k, x_3^k)}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_1^k, x_2^k, x_3^k)}.$$

Решение системы:  $x_1 \approx 0.139744$ ,  $x_2 \approx 0.305324$ ,  $x_3 \approx 0.114362$ .

## 5 Заключение

Метод Якоби, комбинируемый с итерационным методом Ньютона, эффективно решает системы нелинейных уравнений. Алгоритм обеспечивает сходимость при условии правильного выбора начального приближения и соблюдения условий сходимости, что в свою очередь ограничивает количество задач, которые можно решить данным методом. На примере системы из трёх уравнений показана реализация метода, и полученные результаты соответствуют неплохой точности.