

Решение интегралов адаптивным методом трапеций

Блинец Владимир, ЗММ

December 3, 2024

1 Введение

Адаптивный метод трапеций — метод для вычисления определённых интегралов, который регулирует шаг интегрирования h , обеспечивая заданную точность ε . Данный метод оптимизирует количество вычислений, адаптируя шаг h в зависимости от локальной кривизны функции.

2 Описание алгоритма

Метод основан на классической формуле трапеций, при $h = \frac{b-a}{n}$:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(a + ih) + f(b) \right],$$

Пример кода

```
double trap(double a, double b, double h) {  
    int n = int((b - a) / h);  
    double integral = 0.5 * (f(a) + f(b));  
    for (int i = 1; i < n; ++i)  
        integral += f(a + i * h);  
    return integral * h;  
}
```

Чтобы автоматически выбрать шаг интегрирования для метода используем оценки Рунге. Апостериорная оценка погрешности методом Рунге может быть записана как:

$$E(h) \approx \frac{y(h) - y\left(\frac{h}{2}\right)}{2^p - 1}$$

где:

- $E(h)$ — апостериорная оценка погрешности,
- $y(h)$ и $y\left(\frac{h}{2}\right)$ — приближенные решения, полученные с шагами h и $\frac{h}{2}$,
- p — порядок метода интегрирования.

Адаптивная версия метода использует два вычисления интеграла на каждом отрезке: с шагом h (I_h) и с шагом $h/2$ ($I_{h/2}$). Оценка ошибки вычислений:

$$\text{Ошибка} = \frac{|I_{h/2} - I_h|}{3}.$$

Если ошибка меньше заданного порога ε , результат на текущем отрезке принимается, иначе шаг h уменьшается.

Алгоритм

- 1. Начальное значение шага: $h = h_{\text{initial}}$.

- 2. На каждом шаге вычисляются два значения интеграла I_h и $I_{h/2}$.
- 3. Если ошибка удовлетворяет условию точности Ошибка $< \varepsilon$ или достигнут минимальный шаг h_{\min} , значение добавляется к сумме интеграла.
- 4. Если ошибка превышает ε , шаг уменьшается вдвое ($h = h/2$).
- 5. Процесс повторяется до достижения верхнего предела интегрирования b .

Пример кода с вычислением ошибки по Рунге

```
double adaptiveTrap(double a, double b,
double h_initial, double eps, double hmin)
{
    double h = h_initial;
    double sum = 0, h1, h2, err;
    double x = a;
    while (x < b) {
        if (x + h > b) h = b - x;
        h1 = trap(x, x + h, h);
        h2 = trap(x, x + h, h / 2);

        err = abs(h2 - h1) / 3;
        if (err < eps || (h <= hmin)) {
            sum += h1;
            x += h;
        } else {
            h *= 0.5;
        }
    }
    return sum;
}
```

3 Пример расчета

Рассмотрим функцию $f(x) = \sin(x)^3$ на интервале $[0, 2]$. Теоретическое значение интеграла:

$$\int_0^2 \sin(x)^3 dx = \left(-\cos(x) + \frac{\cos(x)^3}{3} \right) \Big|_0^2 = 1.05879$$

Параметры для адаптивного метода:

- Начальный шаг: $h_{\text{initial}} = 0.1$,
- Минимальный шаг: $h_{\min} = 1 \times 10^{-4}$,
- Погрешность: $\varepsilon = 10^{-7}$.

Результаты вычислений:

Численное значение: ≈ 1.0587900 , конечный шаг: $9,76 \times 10^{-5}$

4 Заключение

Адаптивный метод трапеций является эффективным методом численного интегрирования. Использование адаптивного шага позволяет достичь высокой точности при минимальном количестве вычислений.