

$$1) \hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}$$

$$P = X(X^T X)^{-1} X^T \quad M = I_n - P$$

$$\hat{\beta} = \left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T Y$$

$$= \left(\begin{bmatrix} x_1^T \\ x_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T Y$$

$$= \begin{bmatrix} x_1^T x_1 & x_1^T x_2 \\ x_2^T x_1 & x_2^T x_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1^T \\ x_2^T \end{bmatrix} Y$$

$$= \begin{bmatrix} x_1^T x_1 & x_1^T x_2 \\ x_2^T x_1 & x_2^T x_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1^T Y \\ x_2^T Y \end{bmatrix}$$

$$A = x_1^T x_1 \quad B = x_1^T x_2 \quad C = x_2^T x_1 \quad D = x_2^T x_2$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & (A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$(A - BD^{-1}C)^{-1} = (x_1^T x_1 - x_1^T x_2 (x_2^T x_2)^{-1} x_2^T x_1)^{-1}$$

$$= (x_1^T (x_1 - x_2 (x_2^T x_2)^{-1} x_2^T x_1))^{-1}$$

$$= (x_1^T (I_n - x_2 (x_2^T x_2)^{-1} x_2^T) x_1)^{-1}$$

$$= (x_1^T (I_n - P_2) x_1)^{-1}$$

$$= (x_1^T M_2 x_1)^{-1}$$

$$-(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} = -(x_1^T M_2 x_1)^{-1} x_1^T x_2 (x_2^T x_2)^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 (D - CA^{-1}B)^{-1} &= (X_2^T X_2 - X_2^T X_1 (X_1^T X_1)^{-1} X_1^T X_2)^{-1} \\
 &= (X_2^T (X_2 - X_1 (X_1^T X_1)^{-1} X_1^T X_2))^{-1} \\
 &= (X_2^T (I_n - X_1 (X_1^T X_1)^{-1} X_1^T) X_2)^{-1} \\
 &= (X_2^T (I_n - P_1) X_2)^{-1} \\
 &= (X_2^T M_1 X_2)^{-1}
 \end{aligned}$$

$$-(D - CA^{-1}B)^{-1} CA^{-1} = -(X_2^T M_1 X_2)^{-1} X_2^T X_1 (X_1^T X_1)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (X_1^T M_2 X_1)^{-1} & -(X_1^T M_2 X_1)^{-1} X_1^T X_2 (X_2^T X_2)^{-1} \\ -(X_2^T M_1 X_2)^{-1} X_2^T X_1 (X_1^T X_1)^{-1} & (X_2^T M_1 X_2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^T Y \\ X_2^T Y \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta}_1 &= (X_1^T M_2 X_1)^{-1} X_1^T Y - (X_1^T M_2 X_1)^{-1} X_1^T X_2 (X_2^T X_2)^{-1} X_2^T Y \\
 &= (X_1^T M_2 X_1)^{-1} [X_1^T Y - X_1^T X_2 (X_2^T X_2)^{-1} X_2^T Y] \\
 &= (X_1^T M_2 X_1)^{-1} [X_1^T (Y - X_2 (X_2^T X_2)^{-1} X_2^T Y)] \\
 &= (X_1^T M_2 X_1)^{-1} [X_1^T (I_n - X_2 (X_2^T X_2)^{-1} X_2^T) Y] \\
 &= (X_1^T M_2 X_1)^{-1} [X_1^T (I_n - P_2) Y]
 \end{aligned}$$

$$\hat{\beta}_1 = (X_1^T M_2 X_1)^{-1} (X_1^T M_2 Y)$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta}_2 &= -(X_2^T M_1 X_2)^{-1} X_2^T X_1 (X_1^T X_1)^{-1} X_1^T Y + (X_2^T M_1 X_2)^{-1} X_2^T Y \\
 &= (X_2^T M_1 X_2)^{-1} [X_2^T Y - X_2^T X_1 (X_1^T X_1)^{-1} X_1^T Y] \\
 &= (X_2^T M_1 X_2)^{-1} [X_2^T (Y - X_1 (X_1^T X_1)^{-1} X_1^T Y)] \\
 &= (X_2^T M_1 X_2)^{-1} [X_2^T (I_n - X_1 (X_1^T X_1)^{-1} X_1^T) Y] \\
 &= (X_2^T M_1 X_2)^{-1} [X_2^T (I_n - P_1) Y] \\
 \hat{\beta}_2 &= (X_2^T M_1 X_2)^{-1} X_2^T M_1 Y
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{\beta}_1 = (X_1^T M_2 X_1)^{-1} (X_1^T M_2 Y)}$$

$$\boxed{\hat{\beta}_2 = (X_2^T M_1 X_2)^{-1} X_2^T M_1 Y}$$