FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA

MODELAMIENTO MATEMÁTICO
Viviana Niño Celis
2198130

Aproximación de diferencia finita hacia adelante de la derivada parcial.

$$\frac{\partial F}{\partial x} \approx \frac{F(x+\Delta x, y) - F(x,y)}{\Delta x} \tag{1}$$

Aproximación de diferencia finita hacia atrás de la derivada parcial.

$$\frac{\partial F}{\partial x} \approx \frac{F(x,y) - F(x-\Delta x, y)}{\Delta x} \tag{2}$$

Aproximación de diferencia finita central de la derivada parcial.

$$\frac{\partial F}{\partial x} \approx \frac{F(x+\frac{1}{2}\Delta x, y) - F(x-\frac{1}{2}\Delta x, y)}{\Delta x} \tag{3}$$

Segunda derivada, por centrales

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \approx \frac{F(x+\Delta x, y) - 2F(x,y) + F(x-\Delta x, y)}{(\Delta x)^2} \tag{4}$$

$$\frac{F^j_{i+1} - 2F^j_i + F^j_{i-1}}{(\Delta x)^2} \tag{5}$$

1D Ecuación de calor

$$u_t - \Delta f = f \tag{6}$$

$$u(0) = u_0 \tag{7}$$

Con condiciones de frontera

$$u(a,t) = \alpha(t) \tag{8}$$

$$u(b,t) = \beta(t) \tag{9}$$

Se discretizan en un intervalo [a,b] en $N+1$ intervalos de igual longitud, quedando cada uno de longitud $\frac{b-a}{N+1}$ y $\Delta x = a + ih$.

Para el intervalo temporal $[t_0, t_n]$ en t+1 intervalos de longitud $\Delta t = \frac{t_f - t_0}{t+1}$ y $t_n = t_0 + n\Delta t$.

Usan diferencias finitas centrales para discretizar la derivada en el espacio x_i y diferencias finitas hacia atrás para discretizar la derivada temporal en el tiempo t^n.

$$\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = f_i^n \tag{10}$$

$$u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(-u_{i+1}^n + 2u_i^n - u_{i-1}^n) = \Delta t f_i^n + u_i^{n-1} \tag{11}$$

Si fuera i=1 y i=N, entonces

$$U_1^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(-u_2^n + 2u_1^n - u_0^n) = \Delta t f_1^n + u_1^{n-1} \tag{12}$$

$$U_N^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(-u_{N+1}^n + 2u_N^n - u_{N+1}^n) = \Delta t f_N^n + u_N^{n-1} \tag{13}$$

Ahora utilizando las condiciones iniciales en los valores en u_0^n y u_{N+1}^n. Queda lo siguiente:

$$u_1^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(u_2^n + 2u_1^n) = \Delta t f_1^n + u_1^{n-1} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\alpha(t_n) \tag{14}$$

$$u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(u_{i+1}^n + 2u_i^n - u_{i-1}^n) = \Delta t f_1^n + u_i^{n-1} \tag{15}$$

$$u_N^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(2u_n^N - u_{N-1}^n) = \Delta t f_n^N + u_1^{n-1} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\beta(t_n) \tag{16}$$

En 2D Ecuación de Calor

Se trabaja sobre un dominio rectangular de longitud L y altura H

Se necesita discretizar el dominio, es decir, dividir el dominio en una serie finita de puntos.

$$u_t - \Delta f = f \tag{17}$$
$$u(0) = u_0 \tag{18}$$

Se define como Δx y Δy los pasos del espacio y el Δt el paso en el tiempo que será dividido el dominio. El dominio está limitado a un tiempo final T.

$$x_i = (i-1) * \Delta x \tag{19}$$
$$y_j = (i-1) * \Delta y \tag{20}$$
$$t_n = (n-1) * \Delta t \tag{21}$$
$$\tag{22}$$

con $i = 1, 2, ..., M$, $j = 1, 2, ..., K$, $n = 1, 2, ...N$.

El tamaño de x,y,t está dado por:

$$\Delta x = \frac{L}{M-1} \tag{23}$$
$$\Delta y = \frac{L}{K-1} \tag{24}$$
$$\Delta t = \frac{L}{N-1} \tag{25}$$

Ahora se tiene que tener en cuenta la siguientes condiciones iniciales y de frontera.

Sea $u(x_i, y_j, t^n) = u_{i,j}^n$ con las condiciones iniciales de $u(x, y, 0) = f(x, y) \rightarrow u_1^{i,j} = f_{i,j}$ con $i = 1, 2, ..., M$ y $j = 1, 2, ..k$

Condiciones de frontera:

$u|_{\Gamma 1} = g_1$ Dirichlet

$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = l_1$ Neumann

$u|_{\Gamma 3} = g_2$ Dirichlet

$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_4} = l_2$ Neumann

Se aproxima la ecuación de calor por medio de las aproximaciones de la derivada, teniendo entonces:

$$\frac{du(x_i, y_j, t^n)}{dt} = c^2 \left(\frac{d^2u(x_i, y_j, t^n)}{dx^2} + \frac{d^2u(x_i, y_j, t^n)}{dy^2} \right) \tag{26}$$

o equivalente a:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{i,j}^n = c^2 \left(\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_{ij}^n + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)_{ij}^n \right) \tag{27}$$

con i=2,...,M-1, j=2,..,K-1, n=2,...,N

La n=2 porque en el primer tiempo ya se obtuvo

utilizando los puntos del mallado para aproximar las derivadas en la siguiente forma.

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{ij}^n \approx \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} \tag{28}$$

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_{ij}^n \approx \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \tag{29}$$

$$\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)_{ij}^n \approx \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \tag{30}$$

Desarrollo de la serie de Taylor alrededor de un punto en el mallado, por último se obtiene la ecuación de diferencias

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = c^2 \left(\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \tag{31}$$

Se quiere ver la temperatura en $n+1$

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \frac{c^2\Delta t}{\Delta x^2}(u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n) + \frac{c^2\Delta t}{\Delta y^2}(u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n) \tag{32}$$

CONDICIONES DE FRONTERA FALTA ANALIZAR BIEN BIEN!!!