



FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA

MODELAMIENTO MATEMÁTICO
Viviana Niño Celis
2198130

Planteamiento del problema

Aplicación de métodos numéricos para darle solución a ecuaciones diferenciales parciales y utilización de herramientas como clases, bash, Dataframe.

Objetivo

Modelar matemáticamente y realizar simulaciones para la ecuación de calor, la cual describe la evolución de la temperatura de un cuerpo sólido en función del tiempo y del espacio.

Solución

La ecuación diferencial se soluciona por medio de diferencias finitas, por lo tanto se dará una introducción de ella.

Sea una función $f(x)$ (Figura1) definida en x_0 con n -ésimas derivadas alrededor de dicho punto x_0 , entonces esta función se puede representar por medio de la serie de Taylor:

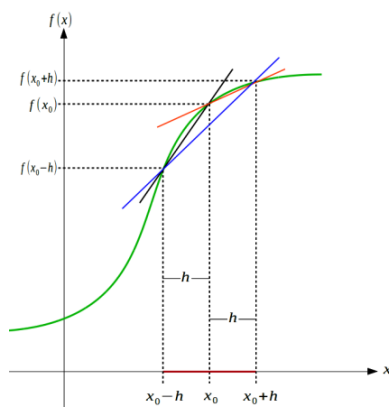


Figura 1: $f(x)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \dots \quad (1)$$

Como se observa en la figura se tiene dos puntos cercanos a x_0 , uno a la izquierda separada a una distancias $h : (x_0 - h)$ y el segundo a la derecha a una distancias $h : (x_0 + h)$, por la tanto al evaluar la ecuación (1) en estos dos determinados puntos vecinos de x_0 se tendrá:

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(-h)^n + \dots \quad (2)$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(h)^n + \dots \quad (3)$$

Pero si se toma el valor de h sea un valor muy pequeño respecto a la unidad, de modo que la aproximación de la función en cada punto será:

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h \quad (4)$$

$$f(x_0 - h) \approx f(x_0) - f'(x_0)h \quad (5)$$

Despejando $f'(x_0)$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \quad (6)$$

Siguiendo la misma idea se obtiene la segunda derivada dada por:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \approx \frac{F(x + h, y) - 2F(x, y) + F(x - h, y)}{(h)^2} \quad (7)$$

$$\frac{F_{i+1}^j - 2F_i^j + F_{i-1}^j}{(h)^2} \quad (8)$$

Ecuación de Calor

$$u_t - \Delta f = f \quad (9)$$

$$u(0) = u_0 \quad (10)$$

Se aproxima la ecuación de calor por medio de las aproximaciones de la derivada, teniendo entonces:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{i,j}^n = c^2 \left(\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_{i,j}^n + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)_{i,j}^n \right) \quad (11)$$

con $i = 2, \dots, M - 1, j = 2, \dots, K - 1, n = 2, \dots, N$ con $M, K, N \in \mathbb{R}$

La $n = 2$ porque en el primer tiempo ya se obtuvo

utilizando los puntos del mallado para aproximar las derivadas en la siguiente forma.

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{i,j}^n \approx \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (12)$$

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_{i,j}^n \approx \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \quad (13)$$

$$\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)_{i,j}^n \approx \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \quad (14)$$

Desarrollo de la serie de Taylor alrededor de un punto en el mallado, por último se obtiene la ecuación de diferencias

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = c^2 \left(\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \quad (15)$$

Se quiere ver la temperatura en $n + 1$

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \frac{c^2 \Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n) + \frac{c^2 \Delta t}{\Delta y^2} (u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n) \quad (16)$$

Siendo $\frac{c^2 \Delta t}{\Delta x^2} = \lambda$ y $\frac{c^2 \Delta t}{\Delta y^2} = \lambda$

Entonces

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \lambda (u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n) + \lambda (u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n) \quad (17)$$

Para que la ecuación diferencial y su solución tenga estabilidad y convergencia el λ cumple que:

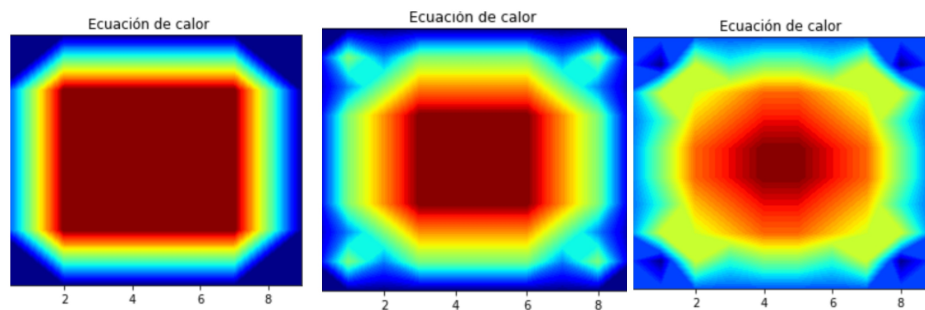
Si $\lambda \leq \frac{1}{2}$ se observa que los valores de los errores de la solución no crecen, estos tiende a oscilar.
 si $\lambda \leq \frac{1}{4}$ se observa que los errores de la solución no oscilas.
 si $\lambda \leq \frac{1}{6}$ tiende a minimizar los errores por truncamiento.

Condiciones de frontera:

Por el momento solo se trabajará condiciones de frontera Dirichlet.

Algunos resultados

Se va a observar que sucede si $\lambda = 1/2$



Se observa que el comportamiento no va hacer el intuitivo, ya que las soluciones tienden a oscilar.

Para temperatura inicial 100 y condiciones iniciales cero, su observación es más intuitiva ya que el calor se disipa a través del tiempo.

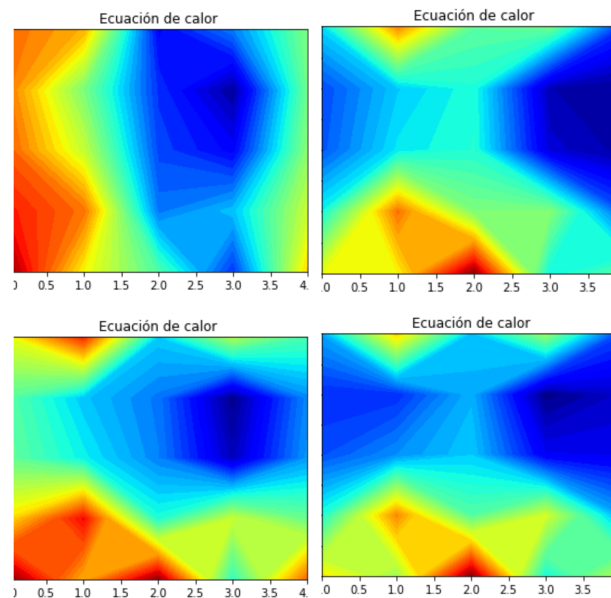


Para una temperatura inicial 100 pero uno de los valores de frontera 300 y los demás 0



Su verificación también estuvo en el cálculo de algunos puntos de la matriz lo cual dieron el valor esperado por el método de diferencias finitas.

Por último, en el trabajo se utilizó clases en el cual lo puede observar en el repositorio, carpeta proyecto (IntentoClasesFINAL). Además, se utilizó bash generando las matrices con sus respectivos gráficos pero con sus condiciones iniciales aleatorias.



Trabajo a futuro:

1. Con las matrices de temperaturas obtenidas podemos obtener de ellas solo las temperaturas máximas de cada iteración así forma una respectiva tabla y empezar a usar Dataframe.
2. Utilizar diferentes método números para la realización de la ecuación diferencial parcial y ver cual es el más optimo.

3. Además empezar a utilizar condiciones de frontera de Neumann ya que esta vez solo se trabajó con condiciones de frontera Dirichlet.
4. Empezar a implementar esto en el verdadero proyecto de grado.