



FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA

MODELAMIENTO MATEMÁTICO
Viviana Niño Celis
2198130

Aproximación de diferencia finita hacia adelante de la derivada parcial.

$$\frac{\partial F}{\partial x} \approx \frac{F(x + \Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x} \quad (1)$$

Aproximación de diferencia finita hacia atrás de la derivada parcial.

$$\frac{\partial F}{\partial x} \approx \frac{F(x, y) - F(x - \Delta x, y)}{\Delta x} \quad (2)$$

Aproximación de diferencia finita central de la derivada parcial.

$$\frac{\partial F}{\partial x} \approx \frac{F(x + \frac{1}{2}\Delta x, y) - F(x - \frac{1}{2}\Delta x, y)}{\Delta x} \quad (3)$$

Segunda derivada, por centrales

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \approx \frac{F(x + \Delta x, y) - 2F(x, y) + F(x - \Delta x, y)}{(\Delta x)^2} \quad (4)$$

$$\frac{F_{i+1}^j - 2F_i^j + F_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} \quad (5)$$

1D Ecuación de calor

$$u_t - \Delta f = f \quad (6)$$

$$u(0) = u_0 \quad (7)$$

Con condiciones de frontera

$$u(a, t) = \alpha(t) \quad (8)$$

$$u(b, t) = \beta(t) \quad (9)$$

Se discretizan en un intervalo $[a, b]$ en $N + 1$ intervalos de igual longitud, quedando cada uno de longitud $\frac{b-a}{N+1}$ y $\Delta x = a + ih$.

Para el intervalo temporal $[t_0, t_n]$ en $t+1$ intervalos de longitud $\Delta t = \frac{t_f - t_0}{t+1}$ y $t_n = t_0 + n\Delta t$.

Usan diferencias finitas centrales para discretizar la derivada en el espacio x_i y diferencias finitas hacia atrás para discretizar la derivada temporal en el tiempo t^n .

$$\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = f_i^n \quad (10)$$

$$u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(-u_{i+1}^n + 2u_i^n - u_{i-1}^n) = \Delta t f_i^n + u_i^{n-1} \quad (11)$$

Si fuera $i=1$ y $i=N$, entonces

$$U_1^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(-u_2^n + 2u_1^n - u_0^n) = \Delta t f_1^n + u_1^{n-1} \quad (12)$$

$$U_N^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(-u_{N+1}^n + 2u_N^n - u_{N-1}^n) = \Delta t f_N^n + u_N^{n-1} \quad (13)$$

Ahora utilizando las condiciones iniciales en los valores en u_0^n y u_{N+1}^n . Queda lo siguiente:

$$u_1^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(u_2^n + 2u_1^n) = \Delta t f_1^n + u_1^{n-1} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\alpha(t_n) \quad (14)$$

$$u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(u_{i+1}^n + 2u_i^n - u_{i-1}^n) = \Delta t f_i^n + u_i^{n-1} \quad (15)$$

$$u_N^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(2u_N^n - u_{N-1}^n) = \Delta t f_N^n + u_N^{n-1} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\beta(t_n) \quad (16)$$

En 2D Ecuación de Calor

Se trabaja sobre un dominio rectangular de longitud L y altura H

Se necesita discretizar el dominio, es decir, dividir el dominio en una serie finita de puntos.

$$u_t - \Delta f = f \quad (17)$$

$$u(0) = u_0 \quad (18)$$

Se define como Δx y Δy los pasos del espacio y el Δt el paso en el tiempo que será dividido el dominio. El dominio está limitado a un tiempo final T .

$$x_i = (i - 1) * \Delta x \quad (19)$$

$$y_j = (j - 1) * \Delta y \quad (20)$$

$$t_n = (n - 1) * \Delta t \quad (21)$$

$$(22)$$

con $i = 1, 2, \dots, M$, $j = 1, 2, \dots, K$, $n = 1, 2, \dots, N$.

El tamaño de x, y, t está dado por:

$$\Delta x = \frac{L}{M - 1} \quad (23)$$

$$\Delta y = \frac{L}{K - 1} \quad (24)$$

$$\Delta t = \frac{T}{N - 1} \quad (25)$$

Para que la solución estable, se necesita cumplir la siguiente desigualdad:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \frac{1}{8}$$

y se define el

$$\Delta t = \frac{T}{N - 1}$$

Se despeja N

$$N = \frac{T}{\Delta t} + 1$$

Se reemplaza

$$\Delta t = \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{8}$$

Se encuentra la N

$$N = \frac{8T}{\Delta x^2 + \Delta y^2} + 1$$

Ahora se tiene que tener en cuenta la siguientes condiciones iniciales y de frontera.

Sea $u(x_i, y_j, t^n) = u_{i,j}^n$ con las condiciones iniciales de $u(x, y, 0) = f(x, y) \rightarrow u_1^{i,j} = f_{i,j}$ con $i = 1, 2, \dots, M$ y $j = 1, 2, \dots, k$

Condiciones de frontera:

$$u|_{\Gamma_1} = g_1 \text{ Dirichlet}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = l_1 \text{ Neumann}$$

$$u|_{\Gamma_3} = g_2 \text{ Dirichlet}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_4} = l_2 \text{ Neumann}$$

Se aproxima la ecuación de calor por medio de las aproximaciones de la derivada, teniendo entonces:

$$\frac{du(x_i, y_j, t^n)}{dt} = c^2 \left(\frac{d^2 u(x_i, y_j, t^n)}{dx^2} + \frac{d^2 u(x_i, y_j, t^n)}{dy^2} \right) \quad (26)$$

o equivalente a:

$$\left(\frac{du}{dt} \right)_{i,j}^n = c^2 \left(\left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right)_{ij}^n + \left(\frac{d^2 u}{dy^2} \right)_{ij}^n \right) \quad (27)$$

con $i=2, \dots, M-1$, $j=2, \dots, K-1$, $n=2, \dots, N$

La $n=2$ porque en el primer tiempo ya se obtuvo

utilizando los puntos del mallado para aproximar las derivadas en la siguiente forma.

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{ij}^n \approx \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (28)$$

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_{ij}^n \approx \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \quad (29)$$

$$\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)_{ij}^n \approx \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \quad (30)$$

Desarrollo de la serie de Taylor alrededor de un punto en el mallado, por último se obtiene la ecuación de diferencias

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = c^2 \left(\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \quad (31)$$

Se quiere ver la temperatura en $n + 1$

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \frac{c^2 \Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n) + \frac{c^2 \Delta t}{\Delta y^2} (u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n) \quad (32)$$

CONDICIONES DE FRONTERA FALTA ANALIZAR BIEN BIEN!!!