

Projet Champions League



INTRODUCTION

Tous les ans, après la phase de groupe, la Ligue des Champion de l'UEFA se prépare à la phase finale. Pour cela, il faut tirer au sort les équipes qui s'affronteront lors des 8ème de finale. Mais comment fonctionne ce tirage ? Toutes les équipes ont-elles la même probabilité de s'affronter ?

Mots clés : couplages, probabilité, graphes.

Le principe du projet est d'étudier une question mathématique complexe de façon autonome et originale en utilisant l'outil informatique. **L'ensemble du projet est à faire par groupe de 3 étudiants.** Le projet est divisé en 2 sections : théorique et pratique. La première partie est **obligatoire**, la seconde partie correspond à des **pistes de travail**.

Rendu du projet.

Vous devrez rendre :

- un **rapport de mi-projet** répondant aux questions de la section 1 ;
- un **exposé** en fin de projet présentant votre travail et vos résultats sur la section 2.

Le rapport.

Date de rendu : cf site du cours <https://www.lri.fr/~pons/teaching-mathinfo-11.html>

Que faut-il faire ? Répondre aux questions de la section 1.

Quel format ? Format PDF obligatoire. Si vous souhaitez ajouter des dessins, vous pouvez les scanner et les ajouter à votre document.

Qui réalise le rapport ? Les membres du groupe réfléchissent ensemble au rapport mais rédigent chacun leur propre rapport. N'oubliez pas de préciser sur votre document qui sont les autres membres du groupe !

Comment le rendre ? Dans votre projet CoCalc, vous trouverez un dossier « Rapport », c'est là qu'il faut uploader votre rapport PDF.

L'exposé.

Quand ? Les exposés auront lieu courant mai, la date sera précisée ultérieurement.

Que doit-on présenter ? Vous devez présenter le travail effectué sur la section 2 du projet, en particulier les résultats que vous avez obtenus, les algorithmes que vous avez utilisés, les images ou vidéos produites, etc.

En combien de temps ? Vous aurez 10 minutes de présentation, puis 5 minutes de questions.

Sur quel support ? Vous aurez un vidéo projecteur et un ordinateur à disposition (ou le votre si vous le souhaitez). Vous pourrez donc présenter votre exposé sous forme d'un powerpoint ou pdf. Vous pouvez aussi montrer des images, vidéos, démos de code.

Qui parle ? Tout le monde ! Les 3 étudiants doivent participer.

Doit-on présenter notre code ? Vous pouvez utiliser un notebook CoCalc pour présenter des démos de code, cependant nous ne notons pas la programmation mais bien les résultats obtenus !

Doit-on répondre aux questions ? Les questions de la section 2 ne sont pas obligatoires, ce sont des pistes de travail, vous pouvez les suivre, ou pas...

1. ÉTUDE THÉORIQUE DU PROBLÈME

1.1. Description du problème. La ligue des champions de l'UEFA est une compétition internationale de football qui voit d'affronter les meilleurs clubs européens. Lors d'une première phase appelée "Phase de groupe", les équipes sont réparties en 8 groupes. Des matchs ont lieu au sein de chaque groupe pour décider d'un classement : le premier et le second de chaque groupe sont sélectionnés pour la phase finale. On a donc 16 équipes, chaque équipe appartenant à un groupe (A, B, C, D, E, F, G, H) et avec un classement (1er ou 2ème). À la fin de cette phase, au mois de décembre, le tirage au sort a lieu pour décider des **8 matchs** qui feront les 8ème de finale. Le but du projet est d'étudier ce tirage au sort en suivant les règles de l'UEFA.

Les règles sont les suivantes :

- (1) Chaque match est constitué d'une équipe arrivée première et d'une équipe arrivée seconde.
- (2) Chaque match est constitué de deux équipes issues de groupes différents.
- (3) Deux équipes d'un même pays ne peuvent pas s'affronter en 8ème de finale.

Par exemple, voilà le résultat de la phase de groupe lors de la ligue des Champions 2017-2018.

Groupe	1er	2ème
A	 Dortmund	 Atlético de Madrid
B	 FC Barcelone	 Tottenham Hotspur
C	 Paris Saint-Germain	 Liverpool FC
D	 FC Porto	 Schalke 04
E	 Bayern Munich	 Ajax Amsterdam
F	 Manchester City	 Olympique lyonnais
G	 Real Madrid	 As Roma
H	 Juventus FC	 Manchester United

Dans la suite on appellera "équipe de type 1" les équipes arrivées premières et "équipes de type 2", les équipes arrivées secondes. Ainsi, *Dortmund* ne peut pas jouer contre *Paris Saint-Germain* car elles sont toutes les deux de type 1. Elle ne peut pas non plus jouer

contre *Atlético de Madrid* car elles sont issus du même groupe. Et enfin elle ne peut pas jouer contre *Schalke 04* car les deux sont des équipes allemandes.

Voilà les matchs qui ont été tirés au sort et qui seront joués cette saison. Finalement, *Dortmund* affrontera *Tottenham Hotspur*.

 Schalke 04	 Manchester City
 Atlético de Madrid	 Juventus FC
 Manchester United	 Paris Saint-Germain
 Tottenham Hotspur	 Dortmund
 Olympique lyonnais	 FC Barcelone
 As Roma	 FC Porto
 Ajax Amsterdam	 Real Madrid
 Liverpool FC	 Bayern Munich

Mais quelle était la probabilité d'un tel match ? Combien de tirages étaient possibles ? Quelle était la probabilité de ce tirage en particulier ? Voilà les questions que nous allons nous poser pendant le projet.

1.2. Questions. Une façon d'aborder ce problème est de le *simplifier*. Dans cette première étude théorique, nous allons aborder différents cas où les contraintes et le nombre d'équipes sont réduites.

- (1) **Moins de contraintes.** Dans les questions suivantes, on ne conserve que la condition (1) (on ignore le groupe et la nationalité des équipes). Par ailleurs, nous travaillons sur le problème théorique donc les exemples ne correspondent plus forcément à la réalité de cette année. Supposons pour l'instant qu'on ne cherche à organiser que 3 matchs. On a donc 6 équipes différentes. Prenons la situation où les équipes de type 1 sont *Manchester United*, le *Paris Saint-Germain* et *Liverpool* et les équipes de type 2 sont le *Bayern Munich*, la *Juventus* et le *Real Madrid*. Une possibilité de configuration est donc :

Manchester United	Juventus
Paris Saint-Germain	Bayern Munich
Liverpool	Real Madrid

- (a) Donnez toutes les configuration possibles. (Vous devez en trouver 6)
- (b) En supposant que chaque configuration apparaît avec la même probabilité, quelle est la probabilité que *Manchester United* joue contre la *Juventus* ?
- (c) Si on cherche maintenant à organiser 4 matchs (donc 8 équipes en tout : 4 de type 1 et 4 de type 2), combien de configurations différentes sont possibles ?
- (d) Donnez et justifiez une formule donnant le nombre de configurations possibles pour l'organisation de n matchs (donc $2n$ équipes : n de type 1 et n de type 2).
- (2) **Un peu plus de contraintes.** On rajoute la contrainte (2) sur les groupes des équipes. Reprenons la configuration précédente à 3 matchs / 6 équipes. On suppose à présent que les équipes sont réparties en groupe selon le schéma de la Figure 1.







Groupe	1er	2ème
A	 Manchester United	 Bayern Munich
B	 Paris Saint-Germain	 Juventus
C	 Liverpool	 Real Madrid

FIGURE 1. Conditions à 3 matchs

- (a) Donnez les deux configurations possibles selon ces conditions.
- (b) En supposant que chaque configuration apparaît avec la même probabilité, quelle est la probabilité que *Manchester United* joue contre la *Juventus* ?
- (c) On rajoute un nouveau groupe *D* et on obtient les conditions à 4 équipes du schéma Figure 2. Donnez les 9 configurations possibles.

Groupe	1er	2ème
A	 Manchester United	 Bayern Munich
B	 Paris Saint-Germain	 Juventus
C	 Liverpool	 Real Madrid
D	 Tottenham Hotspur	 Porto

FIGURE 2. Conditions à 4 matchs

- (d) Le tirage de l'UEFA fonctionne de cette façon : on tire au hasard une équipe de type 2, puis on tire une équipe parmi ses adversaires possibles restants et on recommence jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de choix.









Par exemple en suivant les conditions de la Figure 1 :

- Je tire la *Juventus* parmi 3 équipes. **Probabilité** $\frac{1}{3}$.
- Les adversaires possibles sont : *Manchester United* et *Liverpool*. Je tire *Manchester United*. **Probabilité** $\frac{1}{2}$.
- Il n'y a plus qu'une seule solution possible pour le reste de la configuration : le *Bayern Munich* contre *Liverpool* et *Real Madrid* contre le *Paris Saint-Germain*.

La probabilité d'obtenir exactement ce **tirage** est le **produit** des probabilités qui apparaissent, donc $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. La probabilité d'obtenir cette **configuration** est la **somme** des probabilités sur chacun des tirages.

Donnez les 6 tirages possibles en suivant les contraintes de la Figure 1 et vérifiez que vous obtenez une probabilité $\frac{1}{2}$ pour chacune des 2 configurations possibles.

- (e) On se place maintenant sur les conditions à 8 équipes de la Figure 2 et on suppose qu'on a obtenu la configuration suivante :

 Juventus	 Manchester United
 Bayern Munich	 Paris Saint-Germain
 Real Madrid	 Tottenham Hotspur
 Porto	 Liverpool







Par exemple, elle a pu être obtenue avec le tirage : Type 2 Bayern Munich (sur 4 possibilités) – Type 1 Paris-Saint-Germain (sur 3 possibilités) puis Type 2 Juventus (sur 3 possibilités) – Type 1 Manchester United (sur 3 possibilités). Ensuite le tirage s'arrête car il n'y a plus qu'une seule possibilité d'organiser les matchs restants. Ce tirage particulier a donc une probabilité de $\frac{1}{108} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$. Cependant, ce n'est pas le seul tirage qui permet d'obtenir cette configuration, il y en a 20 ! Trouvez les 20 tirages avec les probabilités associées. La probabilité d'obtenir la configuration est la somme des probabilités : vous devez obtenir une probabilité totale $\frac{5}{54}$.

- (f) Cette règle de tirage permet-elle d'obtenir une probabilité uniforme (la même probabilité) sur toutes les configurations ?
- (3) **Avec toutes les contraintes de l'UEFA.** On rajoute à présent la condition (3) sur le pays d'origine des clubs (les pays sont représentés par des drapeaux).
- (a) Donnez les **2** configurations à 8 équipes qui vérifient les conditions de la Figure 3

Groupe	1er	2ème
A	 Barcelona	 Juventus
B	 Paris Saint-Germain	 Sevilla
C	 Roma	 Real Madrid
D	 Tottenham Hotspur	 Porto

FIGURE 3. Conditions à 4 équipes avec contraintes de pays

- (b) Existe-t-il une configuration qui vérifie les contraintes suivantes :

Groupe	1er	2ème
A	 Barcelona	 Juventus
B	 Roma	 Sevilla
C	 Tottenham Hotspur	 Porto

- (c) Donnez 3 exemples sur 4 matchs (8 équipes) qui n'ont pas de possibilité.
- (d) On peut utiliser le **Théorème de Hall** pour vérifier qu'un système de contraintes contient au moins une configuration possible. Voilà comment le théorème s'exprime dans notre cas précis :

Le système de contraintes a au moins une solution si et seulement si : pour tout sous-ensemble \mathcal{E} de taille $k \leq n$ d'équipes de type 1, l'ensemble \mathcal{F} des équipes de type 2 qui peuvent jouer avec **au moins** une des équipes de \mathcal{E} est de taille supérieure ou égale à k .

Par exemple, sur les contraintes de la Figure 3. Si on prend $\mathcal{E} = \{\text{Barcelona, Paris Saint-Germain}\}$ l'ensemble \mathcal{F} est constitué de la *Juventus*, du *Real Madrid* et de *Porto*. L'ensemble \mathcal{E} est de taille 2, et l'ensemble \mathcal{F} est de taille 3 donc la condition est bien vérifiée sur ce sous-ensemble. Pour que le système ait une solution, il faut que ce soit vérifié sur **tous** les sous-ensembles (pour 4 équipes de type 1, ça fait $2^4 = 16$ sous-ensembles).

Trouvez au moins un sous-ensembles qui **ne vérifie** pas la condition dans chacun des exemples de contraintes impossibles que vous avez trouvé à la question précédente.

2. MODÉLISATION ET EXPLORATION

Le but de cette partie est de modéliser de différentes façons le tirage de l'UEFA et de calculer les probabilités associées. Nous vous proposons ici des pistes, à vous de les explorer ou d'en proposer de nouvelles. L'ordre qu'on vous donne est *indicatif*, vous pouvez explorer les pistes dans l'ordre que vous voulez.

2.1. Méthode de Monte-Carlo. Le principe de cette méthode est de simuler le tirage de l'UEFA un grand nombre de fois et d'en déduire une valeur approchée des probabilités associées à chaque configuration. La probabilité approchée d'obtenir une configuration est donnée par

$$\frac{\text{Nombre de fois que j'ai obtenu la configuration}}{\text{Nombre de tirages effectués}}$$

- (1) Commencez par ignorer la condition 3 sur les pays et simulez des tirages sur des petits nombres d'équipes selon la méthode de l'UEFA décrite dans l'étude théorique (par tirage successif des équipes). Voilà certaines questions que vous devrez vous poser.
 - (a) Quelle structure de donnée utiliser pour stocker les équipes en prenant en compte leur type et leur groupe ?
 - (b) Comment effectuer un tirage uniforme sur un ensemble d'équipes possibles ?

- (c) Comment savoir quand arrêter le tirage ?
- (d) Comment stocker les configurations et le nombre de fois qu'elles apparaissent ?
- (2) Observez les résultats avec plus d'équipes (par exemple avec 16 équipes comme pour la ligue des Champions) et essayez de comprendre quelles sont les configurations qui sont plus probables que les autres.
- (3) Comment faire pour rajouter la contrainte du pays ?
 - (a) Comment modéliser cette contrainte ?
 - (b) Comment vérifier qu'une configuration est possible ?
 - (c) Comment éliminer les configurations impossibles lors du tirage ?
- (4) Arrivez-vous à simuler les probabilités associées aux conditions de l'UEFA 2017-2018 ?
 - (a) Combien d'essai avant que les probabilités ne se "stabilisent" ?
 - (b) Combien de configurations possibles trouvez-vous ?
 - (c) Quelle était la probabilité d'obtenir la configuration qui va être jouée cette année ?
 - (d) Quels sont les matchs qui avaient le plus de probabilité d'apparaître ?

2.2. Comptage des configurations. On voudrait savoir si les probabilités obtenue par la méthode de Monte-Carlo sont proche de la distribution uniforme, c'est-à-dire celle ou chaque configuration a la même probabilité d'être choisie que les autres donnée par

$$\frac{1}{\text{Nombre de configurations possible}}$$

- (1) Écrivez un programme qui vous donne la liste de toutes les configurations possible à partir d'un système de contraintes. Commencez avec peu d'équipes. Vous pouvez aussi ignorer la contrainte du pays dans un premier temps.
- (2) Lorsqu'il n'y a pas de contraintes de pays, le nombre de configurations peut se calculer facilement. Cherchez comment calculer ces nombres et programmez la formule qui les calcule.

2.3. Probabilités exactes. Lors de l'étude théorique, nous avons calculé tous les tirages possibles avec 6 équipes et les probabilités associées. Programmez ce calcul qui vous permettra d'obtenir des probabilités exactes que vous pourrez comparer avec celles obtenues par la méthode de Monte-Carlo.

- (1) Commencez avec un petit nombre d'équipes (6, 8, 10).
- (2) Votre programme fonctionne-t-il avec les 16 équipes de la coupe des champions ou devient-il très très lent voire ne termine jamais ? Réfléchissez à comment vous pouvez l'améliorer : certains calculs sont peut-être inutiles ou redondants.

Quelques pistes en plus : explorez ce que sont les **graphes**, les **graphes bipartites**, et les **isomorphismes de graphes**.

2.4. Et la Ligue Europa ? Et la phase de groupe ? La ligue Europa offre un challenge plus important avec cette fois 32 équipes ! Par ailleurs, vous pourriez essayer de modéliser l'ensemble de la coupe et non plus seulement le tirage au sort de la phase finale en ajoutant par exemple des probabilités pour le résultats des matchs et comme ça "deviner" qui a le plus de chance de gagner la ligue des champions !