

Entraînement : analyse d'un algorithme récursif

Pour tous les exercices, la grille d'évaluation est la suivante.

A (20)	Toutes les réponses sont correctes et précises.
B (16)	Il y a quelques imprécisions ou bien les cas de terminaisons n'ont pas été donnés.
C (11)	La complexité et le calcul sur des valeurs données sont correctes.
D (8)	La complexité ou le calcul sur des valeurs données sont correctes.
E (1)	Ni la complexité, ni le calcul particulier n'est correct.

Exercice 1.

Voici un algorithme récursif

```
MonCalcul
Input :
    - n, un entier
Procédé :
    Si n = 1 :
        Retourner 0
    Retourner 1 + MonCalcul(n/2)
```

- (1) Calculer la valeur retournée pour les entrées : 1, 2, 3, 4, 5.
- (2) Donner une valeur d'entrée telle que le résultat soit 4.
- (3) Sur quelles valeurs d'entrée cet algorithme termine-t-il et que calcule-t-il de façon générale ?
- (4) Combien d'appels récursifs sont effectués pour la valeur d'entrée 10.
- (5) Exprimer le nombre d'appels récursives sous forme d'une fonction mathématiques récursives.
- (6) Donner la complexité de la fonction.

Solution

- (1) $1 \rightarrow 0 - 2 \rightarrow 1 - 3 \rightarrow 1 - 4 \rightarrow 2 - 5 \rightarrow 2$
- (2) 16
- (3) Termine sur les entiers supérieurs ou égaux à 1 et calcule Le logarithme en base 2 (partie entière).
- (4) 4 (3 si on ne compte pas le premier appel)
- (5) $f(n) = 1 + f(n/2)$ et $f(1) = 1$
- (6) $O(\log(n))$

Exercice 2 (Partiel 2017-18).

Voici un algorithme récursif

```
MonCalcul
Input :
    - n, un entier
Procédé :
    Si n = 0 :
        Retourner 1
    Retourner 2*MonCalcul(n-1)
```

- (1) Calculer la valeur retournée pour les entrées : 1, 2, 3.
- (2) Sur quelles valeurs d'entrée cet algorithme termine-t-il et que calcule-t-il de façon générale ?
- (3) Combien d'appels récursifs sont effectués pour la valeur d'entrée 10.
- (4) Exprimer le nombre d'appels récursives sous forme d'une fonction mathématiques récursives.
- (5) Donner la complexité de la fonction.

Solution

- (1) $1 \rightarrow 2 - 2 \rightarrow 4 - 3 \rightarrow 8$
- (2) Termine si $n \geq 0$ et calcule 2^n .
- (3) 11 (ou 10 si on ne compte pas le premier appel)
- (4) $f(n) = f(n-1) + 1$ et $f(0) = 1$
- (5) $O(n)$

Question donnée au partiel 1 2017-2018, résultats obtenus :

A	B	C	D	E
42.9%	57.1%	0%	0%	0%

Exercice 3 (Partiel 2018-2019).

Voici un algorithme récursif

```

MonCalcul
Input :
    - n, un entier
Procédé :
    Si n = 0 ou n = 1 :
        Retourner 1
    Retourner MonCalcul(n-1) + MonCalcul(n-2)
  
```

- (1) Calculer la valeur retournée pour les entrées : 1, 2, 3, 4.
- (2) Sur quelles valeurs d'entrée cet algorithme termine-t-il ? (On ne demande pas les cas d'arrêt mais toutes les valeurs d'entrée où l'on obtient une réponse).
- (3) Combien d'appels récursifs sont effectués pour la valeur d'entrée 5.
- (4) Exprimer le nombre d'appels récursifs sous forme d'une fonction mathématique récursive.
- (5) Donner la complexité de la fonction.

Solution

- (1) $1 \rightarrow 1 - 2 \rightarrow 2 - 3 \rightarrow 3 - 4 \rightarrow 5$
- (2) Termine si $n \geq 0$.
- (3) 15
- (4) $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$
- (5) $O(2^n)$

Question donnée au partiel 1 2018-2019, résultats obtenus :

A	B	C	D	E
45%	14%	5%	36%	0%

Exercice 4 (2019 – 2020).

Voici un algorithme récursif

```

MonCalcul
Input  :
    – a, b, 2 entiers
Procédé :
    Si a = 0 ou si b = 0 :
        Renvoyer 0
    Si a < 0 :
        Renvoyer MonCalcul(-a, b)
    Si a > b :
        Renvoyer MonCalcul(b, a)
    Si a%2 = 0 :
        c ← MonCalcul(a/2, b)
        Renvoyer c+c
    Sinon :
        c ← MonCalcul((a-1)/2, b)
        Renvoyer b + c + c

```

- (1) Calculer la valeur retournée pour les entrées : $a = 8, b = 10$
- (2) Que calcule cet algorithme de façon générale ?
- (3) Sur quelles valeurs d'entrée cet algorithme termine-t-il ? (On ne demande pas les cas d'arrêt mais toutes les valeurs d'entrée où l'on obtient une réponse).
- (4) Combien d'appels récursifs sont effectués pour les valeurs $a = 8, b = 10$
- (5) Exprimer le nombre d'appels récursifs sous forme d'une fonction mathématique récursive.
- (6) Donner la complexité de la fonction.

Solution

- (1) 80
- (2) $a \times b$
- (3) Termine pour tout a, b
- (4) 5
- (5) $f(a) = 1 + f(\frac{a}{2})$
- (6) $O(\log(n))$ où $n = \min(a, b)$

Question donnée au partiel 2019 – 2020, résultats obtenus :

A	B	C	D	E
41%	4%	33%	11%	11%