Entraînement : Arbres structure récursive

Pour tous les exercices, la grille d'évaluation est la suivante.

Application d'algorithmes.

A (20)	Valeur des fonctions et interprétation correcte
C (11)	Valeurs des fonctions correctes mais mauvaise interprétation en général.
D (8)	Erreurs pour les valeurs dans une des deux fonctions.
E (1)	Les deux sont fausses.

Conception d'algorithmes.

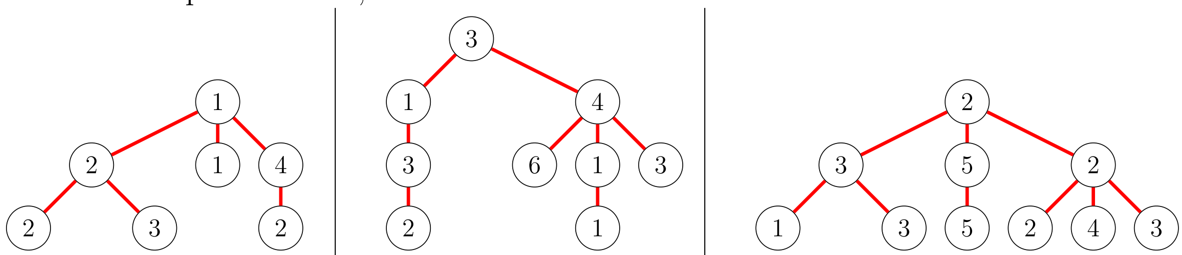
A (20)	L'algorithme répond correctement au problème posé, il est écrit de façon claire et la complexité est optimale.
B (16)	L'algorithme contient quelques erreurs mais reste globalement juste et la complexité est optimale.
C (11)	L'algorithme fonctionne uniquement dans certains cas ou bien la complexité n'est pas optimale.
D (8)	L'algorithme ne fonctionne pas.
E (1)	Algorithme quasi inexistant ou ne répondant pas du tout au problème posé.

Les questions ♣ sont "bonus" : on ne mettra que A, B ou C, il faut les réussir pour avoir 20 mais elles n'affectent pas la validation du partiel.

Exercice 1.
On définit la structure suivante pour représenter les arbres :

```
Structure Arbre :
    valeur, un entier
    nbFils, un entier
    Fils, un tableau de taille nbFils contenant des Arbres
```

Et les trois exemples suivants,



Exemple 1 — Exemple 2 — Exemple 3

(1) Donner les valeurs de `mystere1` et `mystere2` sur les 3 exemples d'arbres donnés.

```
Fonction mystere1(Arbre arbre):
    s = 1
    Pour chaque fils f de arbre:
        s = s + mystere1(f)
    retourner s

Fonction mystere2(Arbre arbre):
    m = 0
    Pour chaque fils f de arbre:
```

```
        h = mystere2(e)
        Si h > m:
            m = h
    retourner m + 1
Fin fonction
```

(2) Que calculent `mystere1` et `mystere2` ?

(3) Donner une fonction qui calcule le nombre de *feuilles* de l'arbre (nombre de nœuds qui n'ont pas de fils). La fonction doit retourner 4 sur l'exemple 1, 4 sur l'exemple 2 et 6 sur l'exemple 3.

(4) ♣ On dit qu'un arbre est équilibré si toutes les feuilles sont à la même profondeur. Dans les arbres donnés en exemple, seul l'exemple 3 est équilibré (toutes ses feuilles sont à la profondeur 3, pour les exemples 1 et 2, il y a des feuilles aux profondeurs 2 et 3). Proposer un algorithme qui teste si un arbre donné est équilibré. (Note : il y a plusieurs solutions possibles, plus l'algorithme est optimal en terme de complexité, mieux c'est).

Solution

(1) mystère 1 : Exemple 1 = 7, Exemple 2 = 9, Exemple 3 = 10. mystère 2 : Exemple 1 = 3, Exemple 2 = 4, Exemple 3 = 3.

(2) mystère 1 : nombre de nœuds. mystère 2 : hauteur de l'arbre.

(3)

```
Feuilles(Arbre a):
    Si a.nbFils = 0:
        Retourner 1
    s <- 0
    Pour chaque fils f de a:
        s <- s + Feuilles(f)
    Retourner s
```

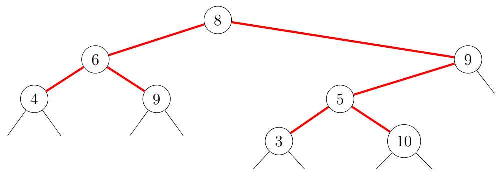
(4) Une solution possible (pas la seule), on effectue un parcours en largeur par niveaux

```
Equilibre(Arbre a):
   N1 <- [a] (tableau contenant a)
   Tant que len(N1) > 0:
       N2 <- [] (tableau vide)
       TousFeuilles <- Vrai
       UneFeuille <- Faux
       Pour chaque n dans N1:
          Si n.nbFils = 0:
              UneFeuille <- Vrai
          Sinon :
              TousFeuilles <- Faux
              Pour chaque b dans n.Fils :
                  N2.append(b)
       Si TousFeuilles :
           Retourner Vrai
       Sinon :
           Si UneFeuille :
               RetournerFaux
```

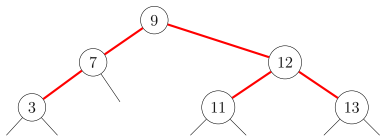
Exercice 2 (Arbres Binaires).
On définit la structure suivante pour représenter les arbres binaires :

```
Structure ArbreBinaire :
    valeur, un entier
    filsGauche, un ArbreBinaire
    filsDroit, un ArbreBinaire
```

Si un fils est vide, on considérera qu'il est égal à `None`, sur les exemples, on représente les arbres vides par des arrêtes sans noeud au bout.



Exemple 1



Exemple 2

(1) Donner un algorithme calculant la hauteur d'un arbre binaire. Sur les exemples, vous devez trouver 4 sur l'Exemple 1 et 3 sur l'Exemple 2.

(2) Donner les valeurs de la fonction `Strahler` sur les 2 exemples d'arbres donnés.

```
Strahler
Input :
    - A, un arbre binaire ou bien None
Output :
    - Un entier
Procédé :
        Si A = None:
            retourner 0
        s1 <- Strahler(A.filsGauche)
        s2 <- Strahler(A.filsDroit)
        Si s1 = s2:
            retourner s1+1
        Sinon:
            retourner max(s1,s2)
```

(3) Donner le résultat de la fonction suivante sur les deux exemples d'arbres donnés. Comment s'appelle ce parcours ?

```
Parcours
Input :
    - A, un arbre binaire ou bien None
Output :
    - Une liste d'entiers
Procédé :
        Si A = None:
            retourner [] # Liste vide
        L <- [A.valeur] # liste contenant une seule valeur
        L1 <- Parcours(A.filsGauche)
        L2 <- Parcours(A.filsDroit)
        retourner L1 + L + L2 # concaténation de listes
```

(4) On rappelle qu'un arbre binaire de recherche est un arbre tel que pour chaque noeud, les noeuds de son sous arbre gauche ont des valeurs **plus petites ou égales** et les noeuds de son sous arbre droit ont des valeurs **strictement supérieures**. L'exemple 1 n'est pas un arbre binaire de recherche et l'exemple 2 en est un.

(a) Écrivez une fonction qui prend en paramètre un arbre binaire de recherche et un entier v et qui retourne Vrai si v est dans l'arbre et Faux sinon.

(b) De quoi dépend la complexité de votre algorithme ?

(c) Quelle est la particularité d'un parcours infixe dans un arbre binaire de recherche ?

(d) ♣ Utilisez cette propriété pour écrire une fonction qui teste si un arbre donné est un arbre binaire de recherche. (Vous pouvez utiliser les fonctions précédentes)