Contents

CHAPTER 1

Phương Pháp Tính Lũy Thừa Ma Trận Vuông

1.1 Một số kiến thức chuẩn bị

Bài toán: Cho ma trận vuông là $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Tính lũy thừa A^n, $n \in \mathbb{Z}$.

- Ký hiệu: $A^n = \underbrace{A\cdot A\cdots A}_{n \text{ ma trận } A}$ là lũy thừa cấp n của ma trận A.
- $[d1, d2, \cdots, d_m] = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_m \end{bmatrix}$ là ma trận đường chéo.
- Ký hiệu I_m là ma trận đơn vị cấp m.
- $[d, d, \cdots, d] = \begin{bmatrix} d & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & d & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d \end{bmatrix} = d\cdot I_m$ là ma trận vô hướng.
- Ký hiệu O là ma trận không.

Ví dụ 1. Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$, khi đó

- $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$.

- $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 9 \\ 45 & -18 \end{bmatrix}$.

Ví dụ 2. Cho ma trận đường chéo $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_{12} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$.

Khi đó $A^n = \begin{bmatrix} a_{11}^n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_{12}^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm}^n \end{bmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.2 Tìm ma trận thông qua phép tính toán trực tiếp

Ví dụ 1. Tìm tất cả các ma trận $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, sao cho $A^n = \begin{bmatrix} a^n & b^n \\ c^n & d^n \end{bmatrix}$, với mọi số nguyên dương n. (Đề DTQG năm 2009)

- Trước hết ta nhận thấy ma trận không $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ là một ma trận cần tìm.

- Từ đẳng thức $A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & b^2 \\ c^2 & d^2 \end{bmatrix}$, ta có

- $\begin{cases} a^2 + bc = a^2 \\ b(a+d) = b^2 \\ c(a+d) = c^2 \\ bc + d^2 = d^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bc = 0 \quad (1) \\ b(a+d-b) = 0 \quad (2) \\ c(a+d-c) = 0 \quad (3) \end{cases}$

- **Trường hợp 1.** Nếu $c \neq 0$, thì từ hệ trên ta có

$$\begin{cases} b = 0 \\ a + d - c = 0 \quad (4) \end{cases}$$

Từ đẳng thức $A^3 = \begin{bmatrix} a^3 & 0 \\ c^3 & d^3 \end{bmatrix} = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ c(a+d) & d^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^3 & 0 \\ ac(a+d) + d^2c & d^3 \end{bmatrix}$.
Từ đó ta có $c^3 = ac(a+d) + cd^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + ad + d^2$. Từ (4) ta có $c = a + d$, thay vào phương trình này ta có $(a+d)^2 = a^2 + ad + d^2 \Rightarrow ad = 0$

- Nếu $a = 0$, thì từ phương trình (4) ta có $\begin{cases} b = a = 0 \\ d = c \neq 0 \end{cases}$ Vậy ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & c \end{bmatrix}, c \neq 0$.
- Nếu $d = 0$, thì từ phương trình (4) ta có $\begin{cases} b = d = 0 \\ a = c \neq 0 \end{cases}$ Vậy ma trận $A = \begin{bmatrix} c & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}, c \neq 0$.

- **Trường hợp 2.** Nếu $b \neq 0$, thì lý luận tương tự như trên ta có

$$A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{bmatrix}, \quad b \neq 0 \quad \text{hoặc} \quad A = \begin{bmatrix} b & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b \neq 0.$$

- **Trường hợp 3.** Nếu $b = c = 0$, thì $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$. Thử lại thấy cả 5 trường hợp trên đều thỏa mãn. Vậy các ma trận cần tìm là

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & a \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} b & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & c \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} d & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix}, \text{với} \quad a, \cdots, f \in \mathbb{R}.$$

1.2.1 Bài tập

Bài 1. Tìm các ma trận thực, vuông cấp hai A sao cho $A^2 = I$. (Đề thi QG - 1993)

HƯỚNG DẪN GIẢI

- Đặt $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
- Ta có $A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $\begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ bc + d^2 = 1 \end{cases}$

– **Trường hợp 1.** Xét $a + d \neq 0$, khi đó $b = c = 0$

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ d^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ d = \pm 1 \end{cases}$$

Vậy ma trận $A = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$

– **Trường hợp 2.** Xét $a + d = 0$, khi đó $a = -d$

Vậy ma trận $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, thỏa $a^2 + bc = 1$.

Bài 2. Tồn tại hay không một ma trận thực A vuông cấp hai sao cho

$$A^{2010} = \begin{bmatrix} -2008 & 2010 \\ 0 & -2009 \end{bmatrix} \quad \text{Đề thi QG - 2009}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

- Giả sử tồn tại ma trận A thỏa mãn yêu cầu đề bài. Đặt $A^{1005} = b = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Ta có:

$$B^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc & (a + d)\, b \\ (a + d)\, c & d^2 + bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2008 & 2010 \\ 0 & -2009 \end{bmatrix}$$

Theo giả thuyết, ta có: $(a + d)\, c = 0$

– **Trường hợp 1.** Xét $c = 0$

$$\begin{bmatrix} a^2 + bc & (a + d)\, b \\ 0 & d^2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -2008 & 2010 \\ 0 & -2009 \end{bmatrix}$$

– **Trường hợp 2.** Xét $a + d = 0$ hay $a = -d$, khi đó $a^2 + bc = d^2 = bc = \lambda$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -2008 & 2010 \\ 0 & -2009 \end{bmatrix}$$

Vậy không tồn tại ma trận A thỏa mãn bài toán.