Compito del 05/09/2012

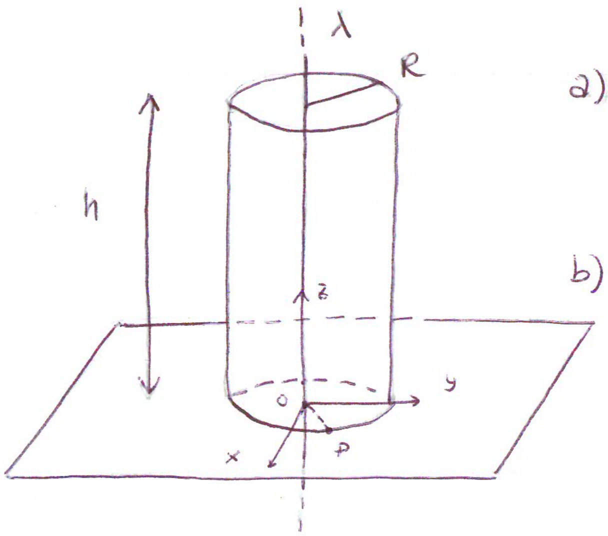
A Reito

Esercizio 1 $\qquad \vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$

$\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$

- Vettore differenza $\quad \vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (1-3)\vec{i} + (2-2)\vec{j} = -2\vec{i}$
- modulo di $\vec{a}$ $\quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$
- prodotto scalare $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 7$

Esercizio 2



a) All'interno del cilindro è contenuta la carica totale

$$Q_h = \lambda \cdot h = 10^{-3} \frac{C}{m} \, 2m = 2 \cdot 10^{-3} C = 2mC$$

b) Il teorema di Gauss afferma che il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è proporzionale alla carica elettrica contenuta al suo interno:

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Utilizzando il risultato del punto a) abbiamo:

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{Q_h}{\varepsilon_0} = \frac{2 \cdot 10^{-3} C}{8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}} = 2.3 \times 10^8 \frac{N}{C} m^2$$

c) Notiamo che $\sqrt{x_P^2 + y_P^2} = \sqrt{9m^2 + 16m^2} = 5m$ ovvero il punto P considerato appartiene alla superficie cilindrica di raggio $R = 5m$ e giace sulla sua sezione $z=0$ (vedi figura)

È noto che nel caso di un filo di lunghezza infinita il campo elettrico prodotto è diretto radialmente (il verso è uscente dato che $\lambda > 0$) e che il suo modulo può dipendere esclusivamente dalla distanza dal filo stesso

A. Pratò

Dalla definizione di flusso del campo elettrico:

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \int_\Sigma \vec{E} \cdot \vec{n}\, d\Sigma$$

è chiaro che nel nostro caso l'unico contributo a $\Phi_\Sigma(\vec{E})$ è dato dalla superficie laterale del cilindro, dato che il versore normale alle due superfici di base risulta ortogonale al vettore campo elettrico.

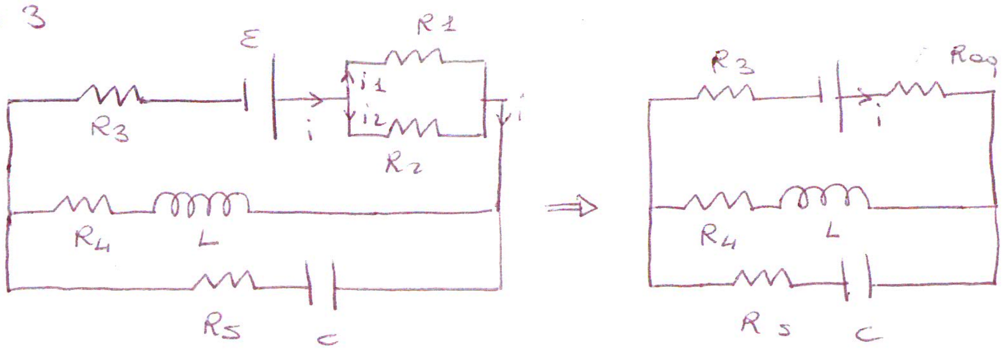
Avremo, quindi: $$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \int_{\Sigma_{lat}} \underbrace{E(R)d\Sigma}_{\vec{E} \parallel \vec{n}_{lat}} = E(R)\int_{\Sigma_{lat}} d\Sigma = E(R)2\pi R h$$

Utilizzando il valore di $\Phi_\Sigma(\vec{E})$ calcolato al punto b) abbiamo:

$$E(R) = \frac{\Phi_\Sigma(\vec{E})}{2\pi R h} = \frac{2.3\times10^{8}\,\frac{N\,m^2}{C}}{2\pi \cdot 2\,m \cdot 5\,m} = 3.7\times10^{6}\,N/C$$

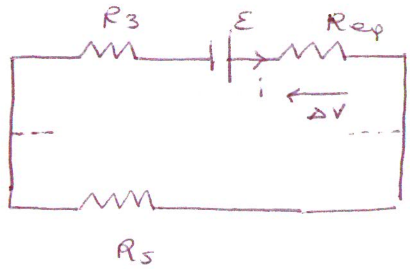
$E(R)$ è il modulo del campo elettrico in tutti i punti che distano R dall'asse z ed, in particolare, nel punto P considerato.

Esercizio 3



1. PRIMO

a) A t=0 s (chiusura dell'interruttore) il condensatore scarico si comporta da cortocircuito mentre l'induttore impedisce il passaggio di corrente in R_4; possiamo limitarci a studiare il circuito:



$$R_{eq} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{60 \cdot 30\,\Omega^2}{60+30\,\Omega} = 20\,\Omega$$

(parallelo $R_1 - R_2$)

La corrente totale in circolo nel circuito è data da:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R_{TOT}} = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq}+R_5+R_3} = \frac{30\,V}{(20+60+20)\,\Omega} = 0.3\,A$$

Da cui segue la caduta di potenziale ΔV ai capi del parallelo R_{eq}:

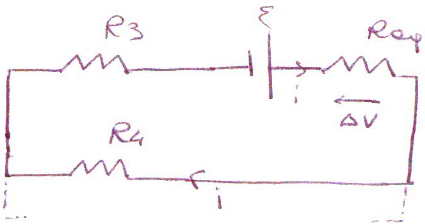
$$\Delta V = i R_{eq} = 0.3\,A \cdot 20\,\Omega = 6\,V$$

Le correnti che attraversano le due resistenze sono, quindi:

$$i_1 = \frac{\Delta V}{R_1} = 0.1\,A\ , \quad i_2 = \frac{\Delta V}{R_2} = 0,2\,A$$

(si noti che in accordo con la legge dei nodi $i_1 + i_2 = i$

b) $t = \infty$ (condizioni di stazionarietà). Dopo molto tempo l'induttore si comporta da cortocircuito mentre il condensatore carico impedisce il passaggio di corrente in R_5. Dobbiamo studiare il circuito:



Procediamo in analogia al caso precedente:

- $R_{eq} = 20\,\Omega$
- corrente totale: $i = \frac{\mathcal{E}}{R_{TOT}} = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq} + R_4 + R_3} = \frac{30\,V}{(20+20+20)\,\Omega} = 0.5\,A$
- caduta di potenziale ai capi di R_{eq}:

$$\Delta V = R_{eq} \cdot i = 20\,\Omega \cdot 0.5\,A = 10\,V$$

- correnti:

$$i_1 = \frac{\Delta V}{R_1} \simeq 0.17\,A \qquad i_2 = \frac{\Delta V}{R_2} \cong 0.38\,A$$

(ancora vale la legge dei nodi)

c) L'energia totale immagazzinata nel circuito a $t = \infty$ è data dalla somma delle energie immagazzinate da condensatore ed induttore:

$$E = \frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} C \Delta V^2$$

dove i è la corrente che percorre l'induttore, coincidente in questo caso con la corrente che attraversa R_4 ossia con la corrente totale calcolata al punto b) mentre la ddp ai capi del condensatore, osservando che esso è in parallelo con R_4 è data da:

$$\Delta V = R_4 \cdot i = 20\,\Omega\, 0.5\,A = 10\,V$$

Abbiamo allora:

$$E = \frac{1}{2} 10^{-1} H\, 0.5^2 A^2 + \frac{1}{2} 150 \times 10^{-6} F\, 10^2 V^2$$

$$= 0.0125\,J + 0.0075\,J$$

$$= (12.5 \times 10^{-3} + 7.5 \times 10^{-3})\,J = 2 \cdot 10^{-2}\,J$$

A. Petto