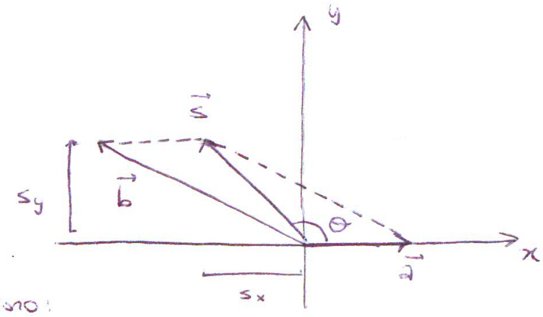
Compito del 10/07/12

Esercizio 1

$\vec{a} = 3\vec{i}$

$\vec{b} = -6\vec{i} + 3\vec{j}$



Le componenti cartesiane del vettore somma sono:

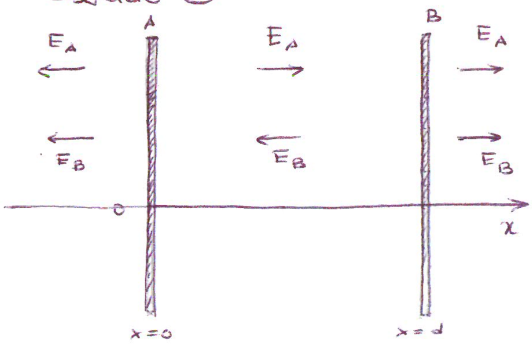
$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = (3-6)\,i + (0+3)\,\vec{j} = -3\vec{i} + 3\vec{j}$$

$\vec{s}$ ha modulo $\quad |\vec{s}| = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

L'angolo θ formato da $\vec{s}$ con l'asse x è dato da:

$$\theta = 180° - \operatorname{arctg}\left(\left|\frac{s_y}{s_x}\right|\right) = 180° - \operatorname{artg}(1) = 135°$$

Esercizio 2



Considerato che $\sqrt{S} \gg d$ possiamo trascurare gli effetti di bordo e assumere di lavorare con distribuzioni piane infinite di carica. Il teorema di Gauss ci permette di ottenere che il campo generato da ciascuna delle piastre, diretto perpendicolarmente ad essa ha modulo $\quad |\vec{E}| = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad$ con $\sigma = Q/S$

Si noti che esso non dipende dalla distanza dall'armatura.

a) Il sistema non è un condensatore dal momento che, essendo le cariche depositate sulle due piastre dello stesso segno. Il campo elettrico non può annullarsi al di fuori del dispositivo ovvero le linee di campo non partono da una piastra per chiudersi sull'altra.

b) Calcoliamo i moduli dei campi elettrici generati dalle due piastre:

- $\sigma_A = \dfrac{Q_A}{S} = \dfrac{4\times10^{-3}\,C}{10^4\,m^2} = 4\times10^{-7}\,C/m^2$

$$E_A = \frac{\sigma_A}{2\varepsilon_0} = \frac{4\times10^{-7}\,C/m^2}{2\;8.85\times10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}} = 2.3\times10^4\,N/C$$

A PRIMO

- $\sigma_B = \dfrac{Q_B}{S} = \dfrac{2\times10^{-3}\,C}{10^4\,m^2} = 2\times10^{-7}\,C/m^2$

$$E_B = \frac{\sigma_B}{2\varepsilon_0} = \frac{2\times10^{-7}\,C/m^2}{2\;8.85\times10^{-12}\,\frac{C}{Nm^2}} = 1.1\times10^4\,N/C$$

Direzione e verso di $\vec{E}_A$ e $\vec{E}_B$ nelle 3 regioni sono mostrate in figura.

Avremo, quindi:

$$x<0 \qquad \vec{E} = -(E_A+E_B)\,\vec{i} = -3.4\times10^4\,\frac{N}{C}\,\hat{i}$$

$$0<x<d \qquad \vec{E} \quad (E_A-E_B)\,\vec{i} = 1.2\times10^4\,N/C\,\hat{i}$$

$$x>d \qquad \vec{E} = (E_A+E_B)\,\hat{i} = 3.4\times10^4\,N/C\,\hat{i}$$

c) Dalla relazione $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$

che per un problema unidimensionale come il nostro si riduce a

$$E = -\frac{dV}{dx}$$ (E è il modulo del campo, che è diretto lungo x)

possiamo scrivere $\int dV = -\int E\,dx$

da cui, tenuto conto che per $0<x<d$ il campo elettrico è uniforme abbiamo, internamente alle piastre:

$$\underbrace{V(x)-V(d)}_{=0} = V(x) = \int_{V(d)}^{V(x)} dV = -E\int_d^x dx' = E\int_x^d dx' = E(d-x)$$

Si noti che, correttamente, troviamo $V(d)=0$ mentre sulla piastra A si ha:

$$V(0) = Ed = 1.2 \times 10^{4} \frac{N}{C} \, 10^{-1} m = 1.2 \times 10^{3} V$$

Tra le due piastre il potenziale decresce linearmente con la distanza dalla piastra A da tale valore fino a raggiungere lo zero in $x = d$.

d) Utilizziamo la conservazione ~~dell'energia totale~~, in questo caso data dalla somma di energia cinetica ed energia potenziale elettrostatica della carica. In $x = d$ il potenziale elettrico è nullo e il valore minimo di velocità che la particella deve possedere in $x = d/4$ è quello che le consente di raggiungere la piastra B con velocità nulla (la carica è, infatti, decelerata dalla forza elettrica che è diretta lungo l'asse x negativo)

In $x = d$ l'energia totale è, quindi, nulla.

Per conservazione si avrà:

$$E\left(\frac{d}{4}\right) = E(d)$$

$$\frac{1}{2} m v_{min}^2 + U(d/4) = 0$$

Utilizzando l'espressione di $V(x)$ determinata al punto c) abbiamo che:

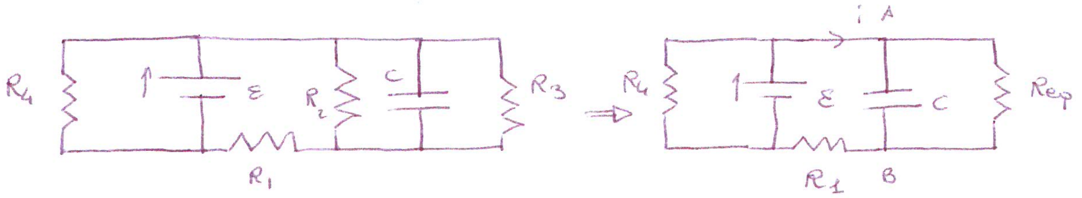
$$U(d/4) = q_0 V(d/4) = q_0 E \frac{3}{4} d = \frac{3}{4} q_0 V(0)$$

da cui segue:

$$v_f = \sqrt{\frac{2}{m}\left(-U(d/4)\right)} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{10^{-1} kg} \frac{10^{-5} C \; 1.2 \times 10^{3} V}{4}}$$

$$= 4.2 \; 10^{-1} m/s =$$

Esercizio 3



$$R_{eq} = \left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)^{-1} = \frac{R_2 R_3}{R_2+R_3} = \frac{600\,\Omega \cdot 300\,\Omega}{(600+300)\,\Omega} = 200\,\Omega$$

(parallelo $R_2 - R_3$)

a) A $t = \infty$ (condizione di stazionarietà) il condensatore è carico e l'energia immagazzinata è data da:

$$E = \frac{1}{2} C \Delta V^2$$

essendo ΔV la d.d.p tra le armature del condensatore, in questo caso coincidente con la caduta di potenziale ai capi di R_{eq}.

(Si noti che ciò che accade alla maglia contenente R_4 non ha alcuna importanza

La corrente nella maglia di destra (R_{eq} e R_1 sono in serie) è:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_{eq}} = \frac{6\,V}{(100+200)\,\Omega} = 0.02\,A$$

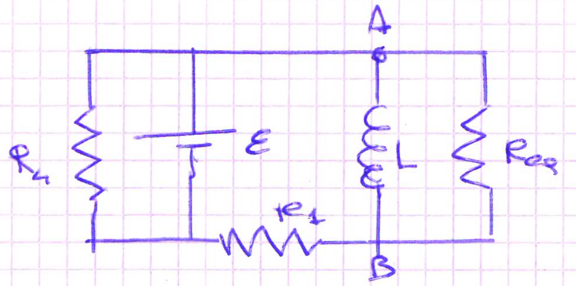
Per la legge di Ohm:

$$\Delta V = R_{eq}\, i = 200\,\Omega\; 0.02\,A = 4\,V$$

e, di conseguenza:

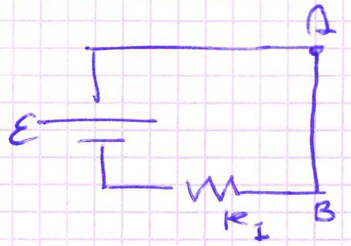
$$E = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2}\, 144 \times 10^{-6}\,F\,(4\,V)^2 = 1.15 \times 10^{-3}\,J$$

d) Il circuito da studiare diventa



$$R_{eq} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

In condizioni stazionarie la corrente della maglia di destra circola tutta nell'induttore (per $t \to \infty$ l'induttore si comporta come corto-circuito)



$$i' = \frac{\mathcal{E}}{R_1} = \frac{6V}{100\Omega} = 6 \cdot 10^{-2} A$$

Energia immagazzinata nell'induttore $U_m = \frac{1}{2} L i'^2$

Energia immagazzinata nel condensatore (punto a) $U_e = \frac{1}{2} C(\Delta V)$

$$\frac{1}{2} L i'^2 = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 \rightarrow L = C \left(\frac{\Delta V}{i'} \right)^2 = 0.64\ H$$