A. Primo

Prova del 13/06/12

Esercizio 1

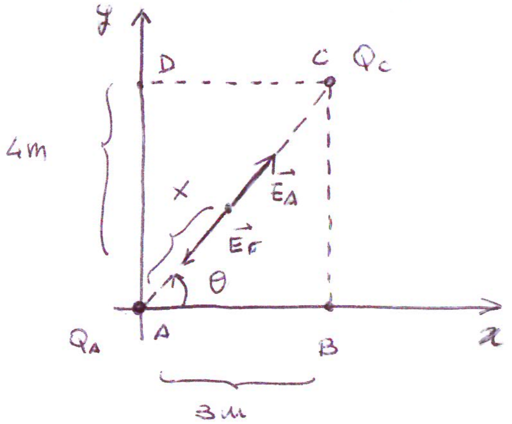
$$\vec{a} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$$
$$\vec{b} = 5\hat{\imath}$$

- Vettore differenza: $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (3-5)\hat{\imath} + (4-0)\hat{\jmath} = -2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$

  Il suo modulo è $|\vec{d}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

- Prodotto scalare $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 0 = 15$

Esercizio 2



a) $Q_A = +54\,mC$

$Q_C = +128\,mC$

La distanza d tra i punti A e B è:

$$d = |\vec{AC}| = \sqrt{3m^2 + 4m^2} = \sqrt{9+16}\,m = 5m$$

Nel punto a distanza X da A lungo la congiungente AC il campo elettrico ha modulo:

$$E(X) = E_A(x) - E_B(x) = K_0 \left(\frac{Q_A}{x^2} - \frac{Q_C}{(d-x)^2} \right)$$

Per determinare il punto di annullamento imponiamo la condizione $E(x) = 0$:

$$\frac{Q_A}{x^2} - \frac{Q_C}{(d-x)^2} = 0$$

$$Q_A (d-x)^2 - Q_C x^2 = 0 \implies x^2(Q_A - Q_C) - 2d\,x\,Q_A + Q_A d^2 = 0$$

$$x = \frac{dQ_A \pm \sqrt{\cancel{d^2 Q_A^2} - d^2 Q_A (\cancel{Q_A} - Q_C)}}{Q_A - Q_C} = \frac{dQ_A \pm \sqrt{d^2 Q_A Q_C}}{Q_A - Q_C}$$

A. PRITO

$$x = \frac{d\,(Q_A \pm \sqrt{Q_A Q_C})}{Q_A - Q_C} = \frac{5\,m\,(54 \pm \sqrt{54 \cdot 128}) \times 10^{-3}\,C}{(54-128)\times 10^{-3}\,C}$$

$$x = \frac{5\,(54 \pm 83)}{-74}\,m \quad \begin{cases} x_1 = -9.3\,m \\ x_2 = 1.96\,m \sim 2\,m \end{cases}$$

La soluzione x_1 è da scartare (ricadrebbe nel terzo quadrante) perché collocata in una regione in cui i campi $\vec{E}_A$ ed $\vec{E}_C$ sono paralleli e non possono annullarsi. Il campo elettrico è, quindi, nullo a distanza $x_2 = 2\,m$ dalla carica Q_A. Tenuto conto che:

$$\theta = \text{arctg}\left(\frac{|\vec{CB}|}{|\vec{AB}|}\right) = \text{arctg}\left(\frac{4}{3}\right) \sim 53°$$

abbiamo che il punto x_2 ha coordinate:

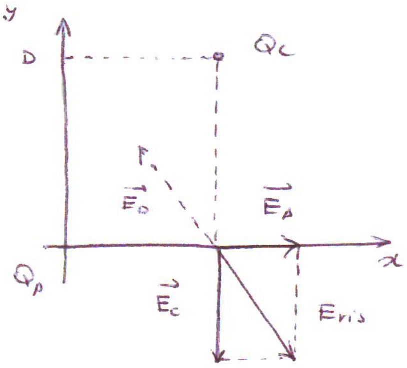
$$x_2 = (2\cos(53°)\,m,\ 2\sin(53°)\,m) = (1{,}2\,m,\ 1.6\,m)$$

b) Ponendo a zero il potenziale all'infinito, la condizione di annullamento sarebbe:

$$V(x) = k_0\left(\frac{Q_A}{|x|} + \frac{Q_C}{|d-x|}\right) = 0$$

Essa non è mai soddisfatta, dal momento che richiederebbe l'annullarsi della somma di due quantità positive.

c) Iniziamo a determinare il campo elettrico $\vec{E}_{ris}$ generato da Q_A e Q_C nel punto B:



$$|\vec{E}_A| = k_0 \frac{Q_A}{|\vec{AB}|^2} = 9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \; \frac{54 \times 10^{-3}\,C}{9\,m^2} = 54 \times 10^6\,N/C$$

$$|\vec{E}_B| = k_0 \frac{Q_C}{|\vec{BC}|^2} = 9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \; \frac{128 \times 10^{-3}\,C}{16\,m^2} = 72 \times 10^6\,N/C$$

$$\vec{E}_{ris} = \vec{E}_A + \vec{E}_C = 54\times10^6\,N/C\,\hat{i} - 72\times10^6\,N/C\,\hat{j}$$

$$|\vec{E}_{ris}| = \sqrt{54^2+72^2}\times10^6\,N/C = 90\times10^6\,N/C$$

Il campo elettrico generato da una carica posta in D avrà la stessa direzione di $\vec{E}_{ris}$ ma dovrà avere verso opposto affinché il campo totale in B possa annullarsi; concludiamo che la carica posta in D debba avere segno negativo. Il suo valore assoluto è determinato dalla condizione:

$$|\vec{E}_C| = k_0\frac{|Q_C|}{d^2} = |\vec{E}_{ris}| \Rightarrow |Q_C| = \frac{|\vec{E}_{ris}|d^2}{k_0}$$

$$|Q_C| = \frac{90\times10^6\,N/C\ 25\,m^2}{9\times10^9\,\frac{N\,m^2}{C^2}} = 25\times10^{7-9}\,C = 250\,mC$$

ovvero $Q_C = -250\,mC$

d) Calcoliamo il potenziale elettrico prodotto da Q_A e Q_C in D:

$$V_D = k_0\frac{Q_A}{|\vec{AD}|} + k_0\frac{Q_C}{|\vec{DC}|}$$

$$= 9\times10^9\frac{Nm^2}{C^2}\left(\frac{54}{4}+\frac{128}{3}\right)\times10^{-3}\frac{C}{m} \simeq 506\times10^6\,V$$

Il lavoro compiuto dal campo elettrostatico per spostare Q_D dall'infinito al punto D è, quindi:

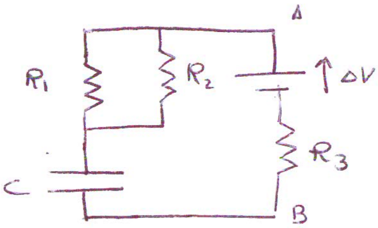
$$W_{\infty\to D} = -Q_D\,\Delta V_{\infty\to D} = -Q_D(V_D - V_\infty) \qquad V_\infty = 0$$

$$= -Q_D V_D = 250\times10^{-3}\,C\cdot506\times10^6\,V \sim 127\times10^6\,J$$

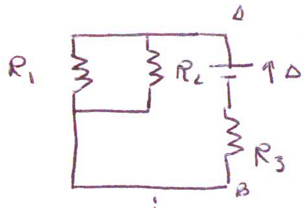
A. Primo

Esercizio 3

a) All'istante t_1 in cui l'interruttore si porta in posizione P_1 e in cui il circuito da studiare è:

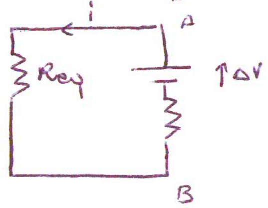


il condensatore, inizialmente scarico, si comporta da corto circuito e possiamo "sostituirlo" con un tratto di filo a resistenza nulla:



R_1 ed R_2 sono poste in parallelo e la loro resistenza equivalente vale:

$$R_{eq} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 100\,\Omega$$



R_{eq} ed R_3 sono in serie e dalla legge di Ohm ricaviamo che la corrente in circolo in questo ramo è

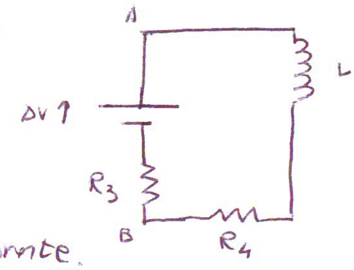
$$i = \frac{\Delta V}{R_{TOT}} = \frac{\Delta V}{R_{eq} + R_3} = \frac{10\,V}{200\,\Omega} = 0{,}05\,A$$

La caduta di potenziale ai capi di R_3 è, quindi:

$$\Delta V_3 = i R_3 = 0.05\,A \cdot 100\,\Omega = 5\,V$$

da cui segue $\quad \Delta V_{AB} = \Delta V - \Delta V_3 = 10\,V - 5\,V = 5\,V$

b) All'istante t_2 il circuito da studiare diventa:



e inizialmente, opponendosi alla variazione di flusso del campo magnetico L si comporta da circuito aperto così che nel circuito (e quindi in R_3) non circoli corrente.

Segue allora che $\Delta V_{AB} = \Delta V = 10\,V$

c) Dopo molto tempo L si riduce ad un corto circuito e il sistema è ridotto ad un generatore collegato a due resistenze in serie:

$$i = \frac{\Delta V}{R_{TOT}} = \frac{\Delta V}{R_3 + R_4} = \frac{10\,V}{500\,\Omega} = 0{,}02\,A \rightarrow \Delta V_3 = i R_3 = 2\,V \rightarrow \Delta V_{AB} = \Delta V - \Delta V_3 = 8\,V$$

Impedenza totale

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad \omega = 2\pi\nu = 100\pi \text{ rad/s}$$

$\nu = 50$ Hz

A. PRIMO

Interruttore in posizione P_1

$$Z_1 = \sqrt{R_{12}^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = \sqrt{4 \cdot 10^4 \Omega^2 + \frac{1}{\pi^2 10^4 10^{-10}} \Omega^2}$$

$$= 376 \ \Omega$$

Interruttore in posizione P_2

$$Z_2 = \sqrt{R_{34}^2 + \omega^2 L^2} = \sqrt{25 \cdot 10^4 \Omega^2 + \pi^2 10^4 10^{-2} \Omega^2}$$

$$= 501 \ \Omega$$