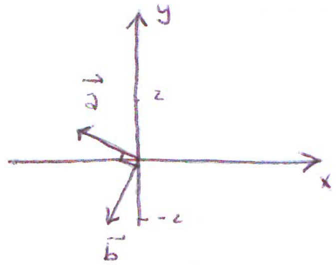
Scritto del 18/09/2012

Esercizio 1

$\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j}$

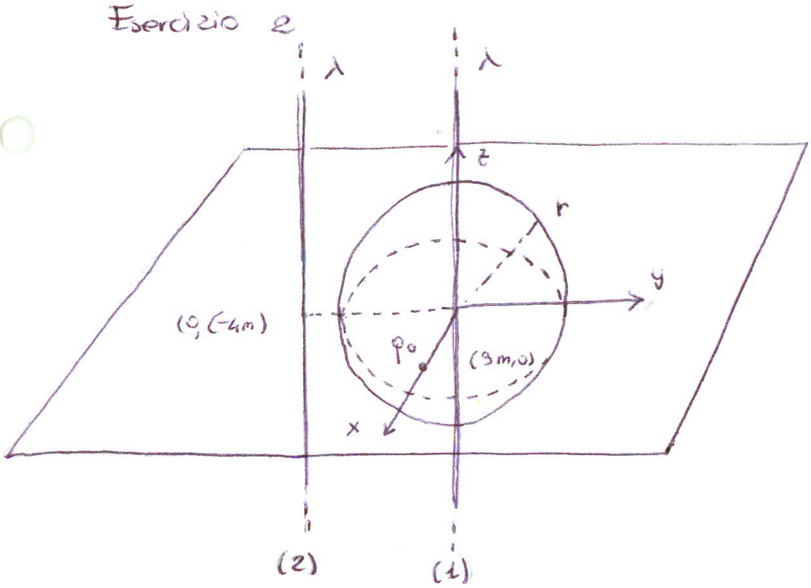
$\vec{b} = -\vec{i} - 2\vec{j}$



- vettore differenza $\quad \vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (-2-(-1))\vec{i} + (2-(-2))\vec{j} = -\vec{i} + 3\vec{j}$
- modulo del vettore $\vec{a}$ $\quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$
- prodotto scalare $\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = -2\cdot(-1) + 1\cdot(-2) = 2 - 2 = 0$

(i due vettori sono ortogonali)

Esercizio 2



$\lambda = 10^{-6}\, C/m$

$q_0 = 2\cdot 10^{-6}\, C$

a) Il filo (2), che intercetta il piano xy nel punto (0m, -4m) cade esternamente alla sfera considerata, la cui proiezione sul piano è individuata dalla condizione

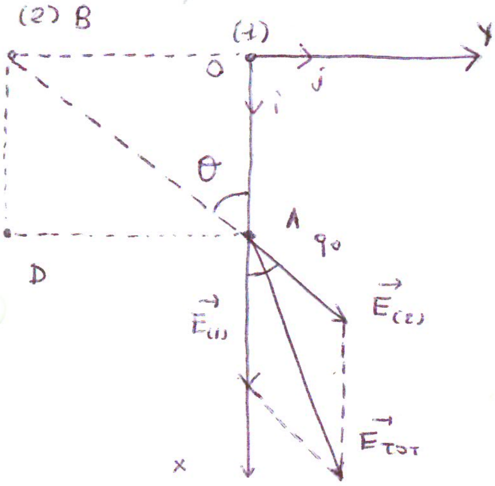
$$x^2 + y^2 \leq (3.5\,m)^2$$

La carica di prova q_0 risulta, invece, interna alla sfera così come un tratto di filo (1) lungo $2r$, dato che esso è disposto lungo il diametro di una delle circonferenze massimali.

La carica elettrica totale contenuta nella sfera di raggio $r = 3.5\,m$ è, quindi:

$$Q_r = q_0 + \lambda\cdot 2r = 2\cdot 10^{-6}\,C + 10^{-6}\,C/m \cdot 7\,m = 9\times 10^{-6}\,C$$

b)



Ricordiamo che il campo generato da un filo di lunghezza infinita uniformemente carico ha direzione radiale (verso uscente per $\lambda > 0$) e modulo:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Il campo generato dal filo (1) nel punto in cui è situata q_0 è, quindi:

$$\vec{E}_{(1)} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r_{A0}}\vec{i} = \frac{10^{-6}\,C/m}{2\pi\, 8.85\times 10^{-12}\frac{C^2}{Nm^2}\, 3m} = 6\times 10^{3}\,N/C\ \vec{i}$$

La distanza tra il filo (2) e la carica di prova q_0 è:

$$r_{BA} = \sqrt{(-4m)^2 + (3m)^2} = \sqrt{16+9}\ m = 5m$$

il modulo del campo elettrico che (2) genera nel punto A è, di conseguenza:

$$E_{(2)} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r_{BA}} = \frac{10^{-6}\ C/m}{2\pi\ 8.85\times10^{-12}\ \frac{C^2}{Nm^2}\ 5m} = 3.6\times10^3\ N/C$$

L'angolo θ che $\vec{E}_{(2)}$ forma con l'asse x (vedi figura) è dato da:

$$\theta = \arctg\left(\frac{|-4m|}{3m}\right) = \arctg(4/3) \simeq 53°$$

da cui segue che, vettorialmente:

$$\vec{E}_{(2)} = E_{(2)}\cos(53°)\vec{i} + E_{(2)}\sin(53°)\vec{j}$$
$$= 2.2\times10^3\ N/C\ \vec{i} + 2.8\times10^3\ N/C\ \vec{j}$$

Il campo elettrico totale che agisce sulla carica di prova q_0 è, quindi:

$$\vec{E}_{TOT} = \vec{E}_{(1)} + \vec{E}_{(2)} = (6+2.2)\times10^3\ N/C\ \vec{i} + 2.8\times10^3\ N/C\ \vec{j}$$
$$= 8.2\times10^3\ N/C\ \vec{i} + 2.8\times10^3\ N/C\ \vec{j}$$

c) Il campo elettrico generato dalla carica Q posta nel punto D = (3m, -4m) nel punto A in cui si trova q_0 è diretto parallelamente all'asse y; se vogliamo che la forza totale agente su q_0 sia diretta esclusivamente lungo x dobbiamo richiedere che $\vec{E}_Q$ sia uguale ed opposto alla componente y di $\vec{E}_{TOT}$. Q deve, quindi, avere segno negativo e avere valore assoluto dato dalla condizione:

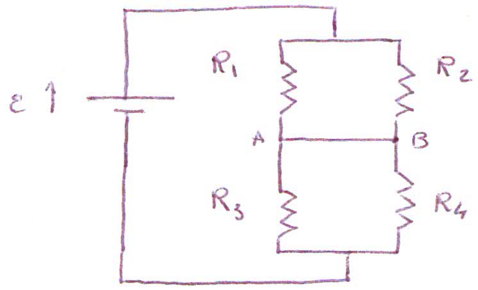
$$E_Q = E_{TOT\,y} \Rightarrow k_0 \frac{|Q|}{r_{DA}^2} = E_{TOT\,y}$$

da cui
$$|Q| = \frac{E_{TOT\,y}\, r_{DA}^2}{k_0} = \frac{2.8\times10^3\ N/C\ 16m^2}{9\times10^9\ \frac{Nm^2}{C^2}} \sim 5.2\times10^{-6}\ C$$

ovvero $Q = -5.2\,\mu C$

Esercizio 3

a) A $t=0$ (chiusura interruttore) il condensatore è scarico ovvero non porta carica elettrica sulle proprie armature e si comporta come un corto-circuito:



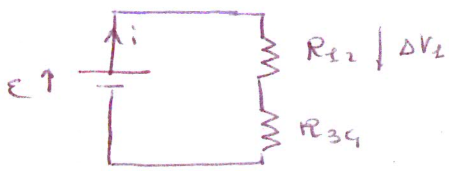
A. Tritto

Essendo A e B allo stesso potenziale, segue che tanto R_1 ed R_2 quanto R_3 ed R_4 sono in parallelo:

$$R_{12} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10\,\Omega\, 20\,\Omega}{(10+20)\,\Omega} = 6.7\,\Omega$$

$$R_{34} = \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)^{-1} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{20\,\Omega \cdot 80\,\Omega}{(20+80)\,\Omega} = 16\,\Omega$$

Il circuito è equivalente a:



e la corrente totale è data da: $i = \dfrac{\varepsilon}{R_{12} + R_{34}} = \dfrac{6\,V}{(6.7+16)\,\Omega} = 0{,}26\,A$

La d.d.p ai capi di R_{12} (che coincide con quella ai capi di R_1) è:

$$\Delta V_1 = i\, R_{12} = 0.26A\; 6.7\,\Omega = 1.8\,V$$

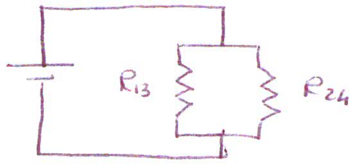
Segue, allora, che la corrente che circola in R_1 è:

$$i_1 = \frac{\Delta V_1}{R_1} = \frac{1.8\,V}{10\,\Omega} = 0{,}18\,A$$

b) a $t=\infty$ (stazionarietà) il condensatore si è caricato e tra le sue armature si è instaurata la d.d.p $\Delta V = V_A - V_B$.

In questo caso il circuito può essere semplificato calcolando prima le resistenze equivalenti alle serie $R_1 - R_3$ e $R_2 - R_4$:

$$R_{13} = 10\,\Omega + 20\,\Omega = 30\,\Omega$$
$$R_{24} = 20\,\Omega + 80\,\Omega = 100\,\Omega$$



R_{13} e R_{24} sono in parallelo ovvero sono entrambe sottoposte alla d.d.p fornita dal generatore.

Le correnti che scorrono in esse (e che coincidono, rispettivamente con le correnti che attraversano R_1 e R_2) sono:

$$i_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_{13}} = \frac{6\,V}{30\,\Omega} = 0{,}2\,A$$

$$i_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_{24}} = \frac{6\,V}{100\,\Omega} = 0{,}06\,A$$

La d.d.p ai capi di R_1 e R_2 rispettivamente, sono:

$$\Delta V_1 = R_1 i_1 = 0.2\,A \cdot 10\,\Omega = 2\,V$$

$$\Delta V_2 = R_2 i_2 = 0.06\,A \cdot 20\,\Omega = 1.2\,V$$

Possiamo calcolare la differenza di potenziale tra le armature del condensatore come:

$$\Delta V = \Delta V_1 - \Delta V_2 = (2 - 1.2)\,V = 0.8\,V$$

da cui segue la carica depositata:

$$Q = C\Delta V = 50 \times 10^{-9}\,F\; 0.8\,V = 40\,nC$$

c) Nulla cambia all'istante iniziale. Se ragioniamo come nel punto b) per $t = \infty$ abbiamo:

$$R_{13} = (10 + 20)\,\Omega = 30\,\Omega$$
$$R_{24} = (10 + 40)\,\Omega = 60\,\Omega$$

da cui seguono
$$i_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_{13}} = \frac{6\,V}{30\,\Omega} = 0.2\,A$$

$$i_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_{24}} = \frac{6\,V}{60\,\Omega} = 0{,}1\,A$$

e $\Delta V_1 = R_1 i_1 = 10\,\Omega \cdot 0.2\,A = 2\,V$, $\Delta V_2 = R_2 i_2 = 20\,\Omega\; 0.1\,A = 2\,V$ ossia il condensatore non accumula carica sulle proprie armature.

A. Pietro