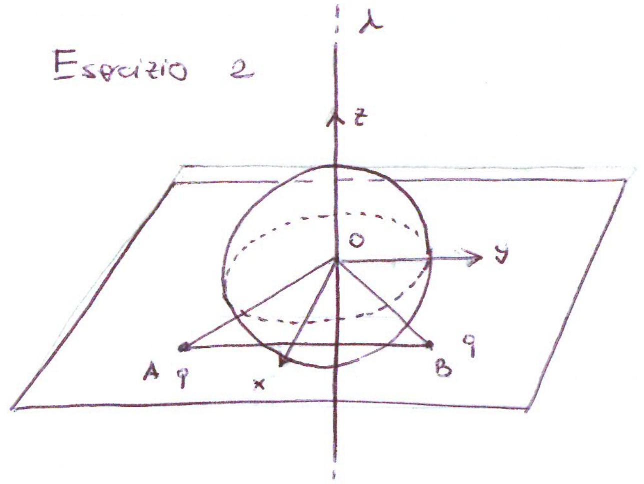
Scritto del 06/02/2013

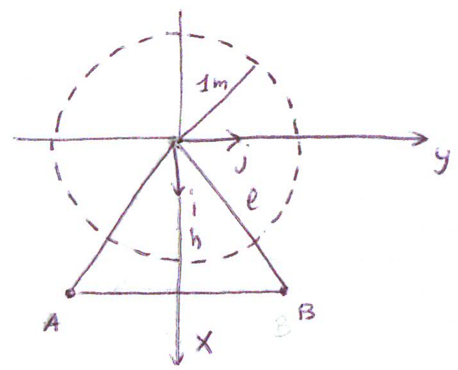
Esercizio 1

$$\vec{a} = -\sqrt{3}\,\vec{i} + 2\vec{j}$$
$$\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$$

- vettore differenza $\quad \vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (-\sqrt{3}-1)\vec{i} + (2-(-1))\vec{j} = -(1+\sqrt{3})\vec{i} + 3\vec{j}$
- modulo del vettore $\vec{a}$
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{3+4} = \sqrt{7}$$
- prodotto scalare
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = -\sqrt{3}\cdot 1 + 2\cdot(-1) = -(2+\sqrt{3})$$

Esercizio 2





a) Tenuto conto che l'altezza del triangolo ABO è:

$$h = l \sin 60° = \sqrt{3} \sim 1.73$$

le coordinate dei punti A e B in cui sono poste le due cariche puntiformi sono, rispettivamente:

$$A = (\sqrt{3}\,m, -1\,m) \quad e \quad B = (\sqrt{3}\,m, 1\,m)$$

Essi cadono, pertanto, al di fuori della sfera di raggio $R = 1\,m$ la cui proiezione sul piano xy è data dalla condizione

$$x^2 + y^2 \leq 1\,m^2$$

Segue che la carica elettrica complessiva contenuta all'interno della sfera è pari a quella distribuita su un tratto di filo di lunghezza pari al diametro della sfera stessa:

$$Q_R = \lambda\, 2R = 10^{-3}\,C/m\; 2\,m = 2\cdot 10^{-3}\,C$$

b) Il campo elettrico risultante nel punto C è dato esclusivamente dal campo generato dal filo rettilineo dato che i contributi delle due cariche puntiformi poste in A e B si elidono reciprocamente (le cariche sono uguali, allineate ed alla stessa distanza da C)

Avremo quindi;

$$\vec{E}_c = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 h}\vec{i} = \frac{10^{-3}\,C/m}{2\pi\; 8.85\times10^{-12}\frac{C^2}{Nm^2}\sqrt{3}\,m}\vec{i} \sim 1\cdot10^{7}\,N/C\,\vec{i}$$

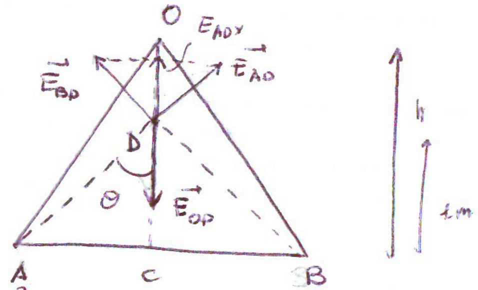
c) la carica, posta 1 m dalla base dista

$$h' = h - 1m = (\sqrt{3}-1)\,m \sim 0.73\,m$$

dal filo percorso da corrente, il cui contributo al campo totale in D sarà, quindi:

$$\vec{E}_{OD} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 h'}\vec{i} = \frac{10^{-3}\,C/m}{2\pi\; 8.85\times10^{-12}\frac{C^2}{Nm^2}\,0.73\,m}\vec{i} \sim 2.5\times10^{7}\,N/C\,\vec{i}$$

Anche in questo caso le due cariche elettriche poste in A e B hanno la stessa distanza dal punto D in cui vogliamo determinare il campo e il modulo del campo elettrico generato da ciascuna di esse nel punto è dato da:



$$E_{AD} = E_{BD} = K_0\frac{q}{r_{AD}^2} = 9\times10^{9}\frac{Nm^2}{C^2}\cdot\frac{2\cdot10^{-3}\,C}{2\,m^2} \cong 9\times10^{6}\,N/C$$

dove abbiamo usato $r_{AD} = \sqrt{(\ell/2)^2 + (1m)^2} = \sqrt{(1+1)\,m^2} = \sqrt{2}\,m$

Le componenti y di $\vec{E}_{AD}$ e $\vec{E}_{BD}$ si elidono vicendevolmente mentre le componenti x sono date da

$$E_{ADx} = E_{BDx} = -9\times10^{6}\,N/C\,\cos(45°) \sim -6.4\times10^{6}\,N/C$$

dove si è osservato che ADC è un triangolo rettangolo isoscele ($\theta = 45°$) e che il verso è quello x negativo

Il campo elettrico totale in D è quindi:

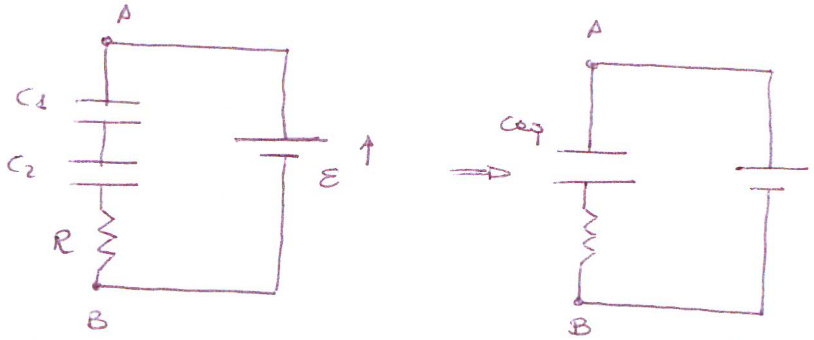
$$\vec{E}_{TOT} = \vec{E}_{OD} + \vec{E}_{AD} + \vec{E}_{BD} = (2.5\times10^{7} - 2\cdot6.4\times10^{6})\,N/C\,\vec{i}$$
$$\cong 1.2\times10^{7}\,N/C\,\vec{i}$$

L'accelerazione subita dalla carica q_0 posta in D è, dunque:

$$\vec{F} = q_0\vec{E}_{TOT} = m\vec{a} \rightarrow \vec{a} = \frac{q_0}{m}\vec{E}_{TOT} = \frac{2\cdot10^{-6}\,C}{10^{-1}\,kg}\,1.2\times10^{7}\,N/C\,\vec{i} = 2.4\cdot10^{2}\,m/s^2\,\vec{i}$$

Esercizio 3

Circuito (1)



a) i due condensatori sono collegati in serie e possono essere sostituiti dal condensatore equivalente (sottoposto alla d.d.p complessiva e portante sulle armature la stessa carica portata da C_1 e C_2 singolarmente) di capacità

$$C_{eq} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad \frac{2 \cdot 10^{-6}F \, 4 \cdot 10^{-6}F}{(2+4) \times 10^{-6}F} = 1.3 \times 10^{-6} F$$

In condizioni di stazionarietà il condensatore è carico e non circola più corrente: la differenza di potenziale V_{A-B}, coincidente con la d.d.p fornita dal generatore, corrisponde alla caduta di potenziale tra le armature del condensatore equivalente

Avremo quindi un'energia immagazzinata data da:

$$E = \frac{1}{2} C_{eq} \mathcal{E}^2 = \frac{1}{2} 1.3 \times 10^{-6} F \, 9V^2 = 5.9 \times 10^{-6} J$$

b) Sul condensatore C_1 è presente la carica:

$$Q_1 = C_1 \Delta V_1 = C_{eq} \mathcal{E} = 1.3 \times 10^{-6} F \cdot 3\,V \simeq 3.9 \times 10^{-6} Q$$

c) Per un circuito RLC in serie si ha l'impedenza:

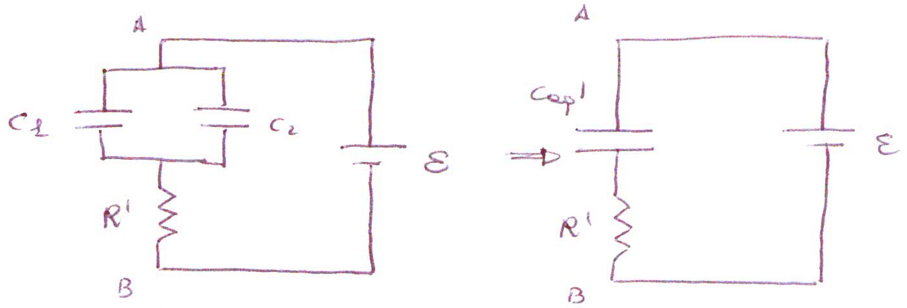
$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

In questo caso ($L = 0$ e $C = C_{eq}$):

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C_{eq}^2}} = \sqrt{10^6 \Omega^2 \frac{1}{10^6 s^{-2} (1.3)^2 \times 10^{-12} F^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{(1.3)^2}} \times 10^3 \Omega$$
$$\hat{=} 1.26 \times 10^3 \Omega$$

A. Prato

Circuito (2)



Tenuto conto che i due condensatori ora sono posti in parallelo procediamo analogamente al caso (1) calcolando la capacità del condensatore equivalente (che, sottoposto alla stessa d.d.p. di ciascun condensatore, ha sulle armature la carica complessivamente portata da C_1 e C_2):

$$C_{ep}' = C_1 + C_2 = 6 \times 10^{-6} F$$

a) $E = \frac{1}{2} C_{ep}' \mathcal{E}^2 = \frac{1}{2}\, 6 \times 10^{-6} F \; 3 V^2 = 27 \times 10^{-6} J$

b) $Q_1 = C_1 \Delta V_1 \equiv C_1 \mathcal{E} = 2 \times 10^{-6} F \; 3 V = 6 \times 10^{-6} C$

c) $Z_2 = \sqrt{R'^2 + \frac{1}{\omega^2 C_{ep}'^2}} = Z_1 \Rightarrow R'^2 = Z_1^2 - \frac{1}{\omega^2 C_{ep}^2}$

$$R' = \sqrt{Z_1^2 - \frac{1}{\omega^2 C_{ep}^2}}$$

$$= \sqrt{(1.26)^2 - \frac{1}{6^2}} \times 10^3 \Omega = 1.25 \times 10^3 \Omega$$

$=$