Curso de Jogos Digitais

Disciplina de Computação Gráfica

Fundamentos Matemáticos – Matrizes

Aula 02

Professor: André Flores dos Santos

Santa Maria – RS
2025

SUMÁRIO

Matrizes

- Definição: Uma matriz A n x m é uma tabela retangular de elementos com n linhas e m colunas, e que possui a seguinte notação:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

- Onde a_{ij} representa o elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna;
  - Cada elemento pode armazenar informações referentes números, funções ou expressões numéricas;
  - Na maioria das linguagens, os índices começam em 0 ao invés de 1;

Matrizes

- Todas as **transformações geométricas** podem ser representadas na forma de **equações.**

- O problema é que manipulações de objetos gráficos normalmente envolvem **muitas operações de aritmética simples.**

- As matrizes são muito usadas nessas manipulações porque **são mais fáceis de usar** e entender do que as equações algébricas, o que explica por que programadores e engenheiros as usam extensivamente;

Matrizes

- Matrizes são **semelhantes** ao modelo organizacional da **memória dos computadores**;

- Isso facilita o trabalho dos programadores, pois possibilita uma **maior velocidade** para aplicações críticas como jogos e aplicações em realidade virtual.

- É devido a esse fato que os computadores com "**facilidades vetoriais**" (placas de vídeo) têm sido muito usados junto a aplicações de computação gráfica.

Matrizes

- Devido ao **padrão de coordenadas** usualmente adotado para representação de pontos no plano (x,y) e no espaço tridimensional (x,y,z), pode ser conveniente manipular esses pontos em matrizes quadradas de 2×2 ou 3×3 elementos.

- Através de matrizes e de sua **multiplicação**, podemos representar todas **as transformações lineares 2D e 3D**.

- Várias transformações podem ser combinadas resultando em uma única matriz denominada **matriz de transformação**.

Operações com matrizes

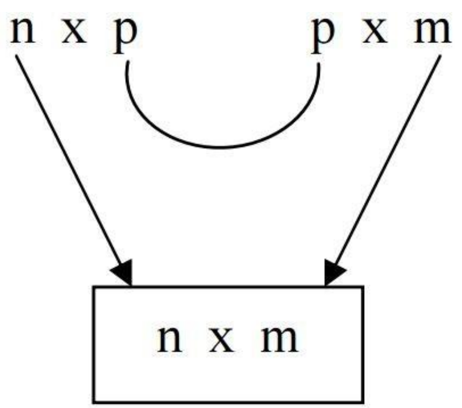
- **Soma e subtração de matrizes:**
  - A soma de duas matrizes A e B com mesmas dimensões é uma matriz C = A + B, obtida pela soma dos seus respectivos elementos:
    - $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
  - A diferença de duas matrizes A e B de mesmas dimensões é dada por C = A – B, também obtida pela diferença dos seus elementos:
    - $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$
  - Ex:
    - $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ e B=$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

Operações com matrizes

- **Produto de duas matrizes**:
  - A multiplicação de duas matrizes, denotado por AB, de uma matriz A (n x p) por uma matriz B (p x m) resulta em uma matriz C (n x m), em que:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, m \text{ e } j = 1, 2, \ldots, n$$

  - Pela definição, duas matrizes podem ser multiplicadas somente se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda:



Operações com matrizes

- **Produto de duas matrizes:**
  - Ex: Multiplicação das seguintes matrizes:
    - $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{6} \end{bmatrix}$ **e** $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{9} \end{bmatrix}$
    - Como A é 2x3 e B é 3x2, a multiplicação é possível, e o resultado é uma matriz C 2x2:
    - $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_{\mathbf{00}} & \boldsymbol{c}_{\mathbf{01}} \\ \boldsymbol{c}_{\mathbf{10}} & \boldsymbol{c}_{\mathbf{11}} \end{bmatrix}$

Operações com matrizes

- **Produto de duas matrizes:**
  - Ex: Multiplicação das seguintes matrizes:
    - $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$
    - Como A é 2x3 e B é 3x2, a multiplicação é possível, e o resultado é uma matriz C 2x2:
    - $\begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 3 \quad 2} \\ 4 \quad 7 \quad 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{matrix}} & \begin{matrix} 8 \\ 1 \\ 9 \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{c_{00}} & c_{01} \\ c_{10} & c_{11} \end{bmatrix}$

Operações com matrizes

- **Produto de duas matrizes:**
  - Ex: Multiplicação das seguintes matrizes:
    - $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$
    - Como A é 2x3 e B é 3x2, a multiplicação é possível, e o resultado é uma matriz C 2x2:
    - $\begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 3 \quad 2} \\ 4 \quad 7 \quad 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{matrix}} & \begin{matrix} 8 \\ 1 \\ 9 \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 5} & c_{01} \\ c_{10} & c_{11} \end{bmatrix}$

Operações com matrizes

- **Produto de duas matrizes:**
  - Ex: Multiplicação das seguintes matrizes:

    - $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{6} \end{bmatrix}$ **e B** $= \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{9} \end{bmatrix}$

    - Como A é 2x3 e B é 3x2, a multiplicação é possível, e o resultado é uma matriz C 2x2:

    - $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 5} & \boldsymbol{c_{01}} \\ \boldsymbol{c_{10}} & \boldsymbol{c_{11}} \end{bmatrix}$

Operações com matrizes

- **Produto de duas matrizes:**
  - Ex: Multiplicação das seguintes matrizes:
    - $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$
    - Como A é 2x3 e B é 3x2, a multiplicação é possível, e o resultado é uma matriz C 2x2:
    - $\begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 3 \quad 2} \\ 4 \quad 7 \quad 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & \boxed{\begin{matrix} 8 \\ 1 \\ 9 \end{matrix}} \\ 3 & \\ 5 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{c_{10}}{1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 5} & \underset{c_{11}}{\boxed{1 \cdot 8 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 9}} \end{bmatrix}$

Operações com matrizes

- **Produto de duas matrizes:**
  - Ex: Multiplicação das seguintes matrizes:
    - $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$
    - Como A é 2x3 e B é 3x2, a multiplicação é possível, e o resultado é uma matriz C 2x2:
    - $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ \boxed{4 \quad 7 \quad 6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{matrix}} & \begin{matrix} 8 \\ 1 \\ 9 \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 5 & 1 \cdot 8 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 9 \\ \boxed{c_{10}} & c_{11} \end{bmatrix}$

Operações com matrizes

- Produto de duas matrizes:
  - Ex: Multiplicação das seguintes matrizes:
    - $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$
    - Como A é 2x3 e B é 3x2, a multiplicação é possível, e o resultado é uma matriz C 2x2:
    - $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ \boxed{4 \quad 7 \quad 6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{matrix}} & \begin{matrix} 8 \\ 1 \\ 9 \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 5 & 1 \cdot 8 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 9 \\ \boxed{4 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 6 \cdot 5} & c_{11} \end{bmatrix}$

Operações com matrizes

- **Produto de duas matrizes:**
  - Ex: Multiplicação das seguintes matrizes:
    - $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$
    - Como A é 2x3 e B é 3x2, a multiplicação é possível, e o resultado é uma matriz C 2x2:
    - $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ \boxed{4 \quad 7 \quad 6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & \boxed{\begin{matrix} 8 \\ 1 \\ 9 \end{matrix}} \\ 3 & \\ 5 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 5 & 1 \cdot 8 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 9 \\ 4 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 6 \cdot 5 & \boxed{c_{11}} \end{bmatrix}$

Operações com matrizes

- **Produto de duas matrizes:**
  - Ex: Multiplicação das seguintes matrizes:
    - $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$
    - Como A é 2x3 e B é 3x2, a multiplicação é possível, e o resultado é uma matriz C 2x2:
    - $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ \boxed{4 \quad 7 \quad 6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & \boxed{\begin{matrix} 8 \\ 1 \\ 9 \end{matrix}} \\ 3 & \\ 5 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 5 & 1 \cdot 8 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 9 \\ 4 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 6 \cdot 5 & \boxed{4 \cdot 8 + 7 \cdot 1 + 6 \cdot 9} \end{bmatrix}$

Operações com matrizes

- **Produto de duas matrizes:**
  - Ex: Multiplicação das seguintes matrizes:
    - $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$
    - Como A é 2x3 e B é 3x2, a multiplicação é possível, e o resultado é uma matriz C 2x2:
    - $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+9+10 & 8+3+18 \\ 8+21+30 & 32+7+54 \end{bmatrix}$

Operações com matrizes

- **Produto de duas matrizes:**
  - Ex: Multiplicação das seguintes matrizes:
    - $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$
    - Como A é 2x3 e B é 3x2, a multiplicação é possível, e o resultado é uma matriz C 2x2:
    - $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 29 \\ 59 & 93 \end{bmatrix}$

Operações com matrizes

Operações com matrizes Exemplo01

Exercícios de aula:

Agora tente implementar um código em python para o exemplo do slide anterior e fazer a multiplicação das matrizes A e B.
As matrizes já podem iniciar preenchidas e é necessário fazer a verificação se o número de colunas da matriz A é Igual ao número de linhas da Matriz B. Imprimir as duas matrizes e depois imprimir o resultado final.
OBS: não usar funções prontas para fazer a multiplicação das matrizes e sim usar 'loops for'.

Esse e os demais códigos dos exercícios da aula de hoje devem ser enviados na atividade do final da aula, através de um link do github.

- **Produto de duas matrizes**:
  - Ex: Multiplicação das seguintes matrizes:
    - $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$
    - Como A é 2x3 e B é 3x2, a multiplicação é possível, e o resultado é uma matriz C 2x2:
    - $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 29 \\ 59 & 93 \end{bmatrix}$

Matriz Diagonal

- Uma **matriz é diagonal** quando é quadrada e quando todos os elementos fora da diagonal principal são zeros.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Matriz Diagonal

Operações com matrizes Exemplo02

Exercícios de aula:

Agora tente implementar um código em python para o exemplo do slide anterior e descobrir se a matriz é diagonal.
Regras: necessário verificar se a matriz é quadrada (número de linhas igual ao número de colunas lxc)
E todos elementos fora da diagonal são zeros.
ex:
```
if i != j and A[i][j] != 0:
      eh_diagonal = False
```

Esse e os demais códigos dos exercícios da aula de hoje devem ser enviados na atividade do final da aula, através de um link do github.

- Uma **matriz** é **diagonal** quando é quadrada e quando todos os elementos fora da diagonal principal são zeros.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Matriz Identidade

- Uma **matriz identidade**, denotada por I, é uma matriz diagonal, cujos elementos da diagonal principal são todos iguais a 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Identidade

Operações com matrizes Exemplo03
Exercícios de aula:

Agora tente implementar um código em python para o exemplo do slide anterior e descobrir se a matriz é Identidade.
Regras: necessário verificar se a matriz é quadrada (número de linhas igual ao número de colunas lxc)
E todos elementos da diagonal são igual a '1' e os elementos fora da diagonal são igual a '0'.
Ex:
```
if (i == j and A[i][j] != 1) or (i != j and A[i][j] != 0):
        eh_identidade = False
```

Esse e os demais códigos dos exercícios da aula de hoje devem ser enviados na atividade do final da aula, através de um link do github.

- Uma **matriz identidade**, denotada por I, é uma matriz diagonal, cujos elementos da diagonal principal são todos iguais a 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operações com matrizes

- **Matriz transposta**:
  - Dada uma matriz A, a transposta de A, denotada por A^T, é uma matriz que se obtém pela troca de linhas por colunas da matriz A:
    - Ex:
    - $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A^T} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 8 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

Operações com matrizes

Operações com matrizes Exemplo04

Exercícios de aula:

Agora tente implementar um código em python para o exemplo do slide anterior e transformar a matriz em 'transposta'.

Regras:

Ex:
```
for i in range(linhas):
    for j in range(colunas):
        transposta[j][i] = A[i][j]
# Troca linhas por colunas
```

Esse e os demais códigos dos exercícios da aula de hoje devem ser enviados na atividade do final da aula, através de um link do github.

- **Matriz transposta**:
  - Dada uma matriz A, a transposta de A, denotada por A^T, é uma matriz que se obtém pela troca de linhas por colunas da matriz A:
    - Ex:
    - $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$, $\qquad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 8 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

Operações com matrizes

- **Múltiplo escalar:**
  - Dada uma matriz A e um escalar α, o múltiplo escalar de α por A, denotado αA, é obtido pela multiplicação de cada elemento de A por α:
    - Ex:
      - $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ e α=3, $\alpha A = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 24 \\ 18 & 0 & 12 \\ 3 & 15 & 21 \end{bmatrix}$
  - Se α=−1, o múltiplo escalar é denominado **negativo de A**, denotado por −A;

Operações com matrizes

Operações com matrizes Exemplo05

Exercícios de aula:

Agora tente implementar um código em python para o exemplo do slide anterior e multiplicar a matriz por um escalar x=3.

Regras:

```
# Multiplica a matriz A pelo escalar x manualmente
for i in range(linhas):
# Percorre as linhas da matriz
    for j in range(colunas):
      # Percorre as colunas da matriz
        resultado[i][j] = A[i][j] * x  # Multiplica
cada elemento pelo escalar
```

Esse e os demais códigos dos exercícios da aula de hoje devem ser enviados na atividade do final da aula, através de um link do github.

- **Múltiplo escalar:**
  - Dada uma matriz A e um escalar α, o múltiplo escalar de α por A, denotado αA, é obtido pela multiplicação de cada elemento de A por α:
    - Ex:
    - $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ e $\alpha=3$, $\alpha A = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 24 \\ 18 & 0 & 12 \\ 3 & 15 & 21 \end{bmatrix}$
  - Se $\alpha=-1$, o múltiplo escalar é denominado **negativo** de A, denotado por -A;

Exercícios de aula

Enviar todos pelo link disponível na ferramenta ‘Minha UFN’. Somente o link do github.

Referências e material de apoio

Material do Professor Guilherme Chagas Kurtz, 2023.

GOMES, Jonas; VELHO, Luiz. Computação gráfica. Rio de Janeiro: Impa, 1998.
HEARN, Donald; Baker, M. Pauline. Computer grafhics: C version. London: Prentice Hall, 1997.
HETEM JUNIOR, Annibal. Computação gráfica. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2006. 161 p. (Coleção Fundamentos de Informática).
HILL Jr, Francis S. Computer graphics using open GL. New Jersey: Prentice Hall, 2001.
WATT, Alan. 3D computer graphics. Harlow: Addison-Wesley, 2000

Thank you for your attention!!

Email: andre.flores@ufn.edu.br

Santa Maria – RS 2025