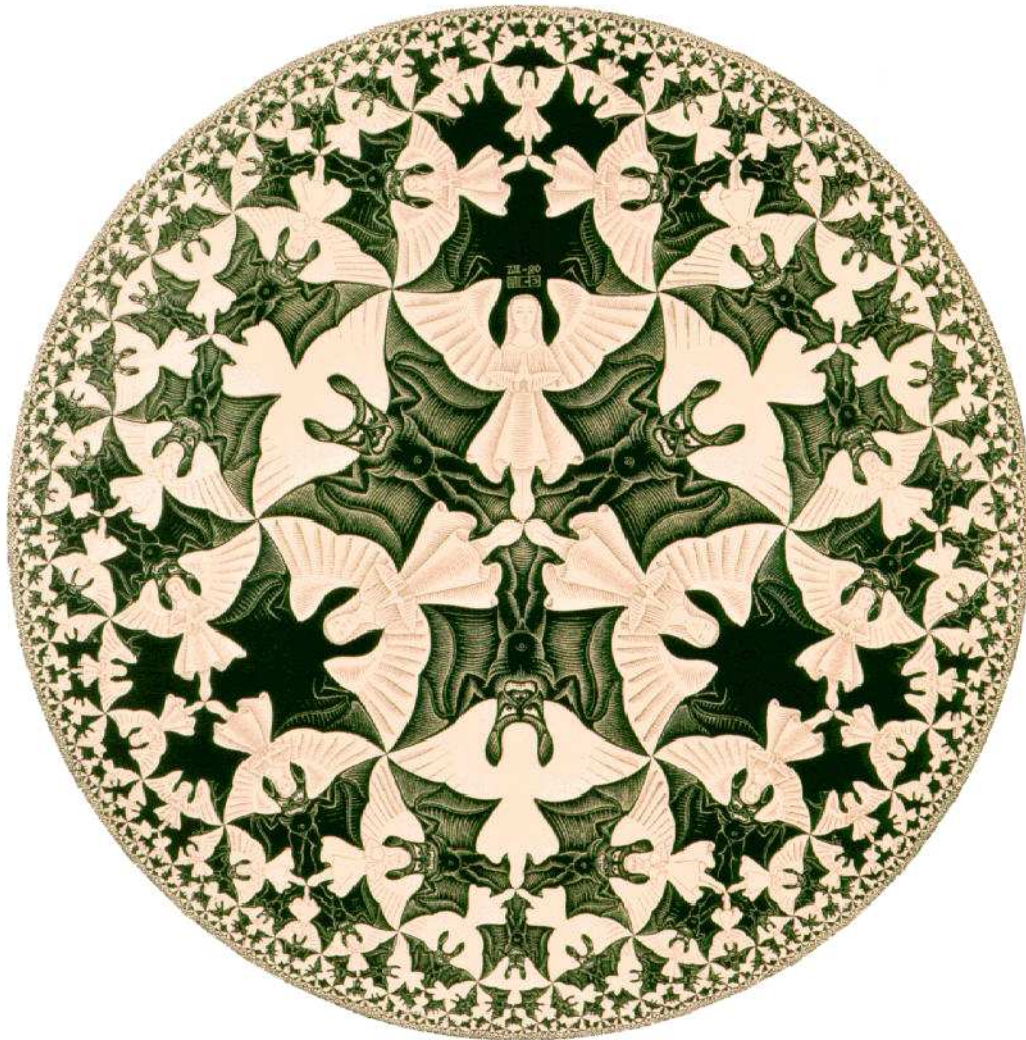


Ejercicios de Introducción al Álgebra

Ronnald Álvaro Silva Guzmán



*La matemática no es un deporte para contemplar.
Tu no podrás aprender matemática, sin hacer matemática,
así como no se puede aprender a nadar sin meterse al agua.*

T. H. Hungerford

Lógica proposicional

1. Escriba simbólicamente las siguientes proposiciones:

- (a) Si Enrique juega bien y Pedro viene a todos los encuentros, entonces ganaremos el campeonato y el presidente del club organizará una fiesta.
- (b) Si a es un número no positivo o si a^2 es un número negativo, entonces a no es un número real. Por otro lado, si a y b son números positivos, entonces $a^2 = b^2$ es equivalente a afirmar que a es igual a b . Pero en el caso de que uno de los dos números, a o b sea negativo, la equivalencia no es cierta.
- (c) Hoy no es feriado y mañana tampoco. Sin embargo, si el Sábado hay actividades o el Miércoles no se suspenden las actividades, entonces el Viernes será feriado.

2. Escriba las siguientes implicaciones en la forma "si ... entonces ...":

- (a) La práctica diaria de su servicio es una condición suficiente para que Daniela tenga una buena posibilidad de ganar el torneo de tenis.
- (b) Arreglé mi aire acondicionado o no pagaré la renta.
- (c) María puede subir a la motocicleta de Luis sólo si usa el casco.
- (d) Nieva siempre que el viento sople del noroeste.
- (e) Que Bolívar gane el clásico, implica que ha derrotado a The strongest.
- (f) Es necesario caminar ocho kilómetros para llegar a la meta.

- (g) Para que una película gane el premio Oscar, es suficiente con que le guste a los miembros de la Academia de Hollywood.
- (h) La garantía de tu equipo es válida sólo si los has comprado hace menos de noventa días.

3. Proporcionar las recíprocas de las siguientes proposiciones:

- (a) Si p es primo, entonces \sqrt{p} es irracional.
- (b) Si acepto el mundo que me ofrecen y soy feliz, entonces empiezo a cavar mi propia tumba.
- (c) Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.
- (d) Si $a < 0$, entonces $a^{-1} < 0$.

4. Proporcione las contrarecíprocas del ejercicio anterior.

5. Escribir las siguientes proposiciones en forma simbólica, negarlas, y luego escribir las negaciones en español:

- (a) Si acepto el mundo que me ofrecen y soy feliz, entonces empiezo a cavar mi propia tumba.
- (b) El sol está brillando si, y sólo si no está lloviendo.
- (c) Un triángulo isósceles o tiene dos lados iguales o tiene dos ángulos iguales.
- (d) Si $a > 0$ y $b < 0$, entonces $a \cdot b < 0$.
- (e) Si estudio bastante, entonces no me va bien en deportes.

6. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- (a) Si $2 + 3 = 4$, entonces $1 + 1 = 5$.
- (b) Si verde es rojo, entonces la luna está hecha de queso.

- (c) Si verde es rojo, entonces la luna no está hecha de queso.
- (d) $7 < 2$ si $2 < 1$.
- (e) Rojo es blanco si, y sólo si verde es azul.
- (f) $2 + 1 = 3$ y $3 + 1 = 5$ implica que 4 es impar.

7. Si p : “7 es un entero par”, q : “ $3 + 1 = 4$ ”, y r : “24 es divisible por 8”, traduzca las siguientes proposiciones y asigne valores de verdad.

- (a) $p \vee \neg q$.
- (b) $\neg(r \wedge q)$.
- (c) $\neg r \vee \neg q$.
- (d) $\neg q \wedge \neg p$.

8. Escriba en forma simbólica y asigne valores de verdad:

- (a) $3 + 1 \neq 4$ y 24 es divisible por 8.
- (b) No es cierto que 7 sea impar o $3 + 1 = 4$.
- (c) $3 + 1 = 4$ pero 24 no es divisible por 8.
- (d) 7 es par si, y sólo si $3 + 1 = 4$.

9. Utilizando solamente los conectivos “ \neg ” y “ \vee ”, encuentre proposiciones lógicamente equivalentes a las siguientes:

- (a) $p \leftrightarrow q$.
- (b) $(\neg p \wedge r) \rightarrow (p \wedge q)$.
- (c) $(p \leftrightarrow r) \rightarrow q$.
- (d) $p \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow r)$.
- (e) $(p \vee q) \rightarrow r$.
- (f) $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$.

10. Sabiendo que p es verdadera y que $q \rightarrow (p \wedge r)$ es falsa, indique el valor de verdad de:

- (a) $p \wedge q$.
- (b) $r \rightarrow p$.

- (c) $(p \wedge r) \rightarrow m$.
- (d) $(p \wedge r) \wedge t$.
- (e) $r \leftrightarrow [q \vee (p \wedge r)]$.
- (f) $p \vee (r \vee t)$.
- (g) $\neg r \wedge [m \vee (t \wedge r)]$.

11. Determine, si es posible, todos los valores de verdad para p , q , r , s y t de modo que las siguientes proposiciones sean falsas:

- (a) $\neg(t \wedge q) \vee r$.
- (b) $(t \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$.
- (c) $(p \vee q) \leftrightarrow (r \vee s)$.
- (d) $[(p \wedge q) \wedge r] \rightarrow (s \vee t)$.
- (e) $[(p \wedge q) \wedge r] \rightarrow (\neg r \vee \neg t)$.

12. Encontrar la respuesta a las siguientes cuestiones:

- (a) ¿Es la condicional asociativa? En otras palabras, ¿Es

$$[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$$

una tautología?

- (b) ¿Es la bicondicional asociativa? Es decir, ¿Será

$$[(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r] \leftrightarrow [p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)]$$

una tautología?

13. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son tautologías?

- (a) Si $2 + 2 = 4$, entonces 5 es impar.
- (b) $3 + 1 = 4$ y $5 + 3 = 8$ implica que $3 + 2 = 5$.
- (c) $3 + 1 = 4$ o $5 + 3 = 7$ implica que $3 + 2 = 5$.
- (d) Rojo es amarillo o rojo no es amarillo.
- (e) Rojo es amarillo o rojo es rojo.
- (f) 4 es impar o, 2 es par y 2 es impar implica que 4 es impar.
- (g) 4 es impar o, 2 es par y 2 es impar implica que 4 es par.

14. Simbolice: “Puedes engañar a algunos todo el tiempo, y puedes engañar a todos algún tiempo; pero no puedes engañar a todos todo el tiempo”.

15. Sin utilizar tablas de verdad, probar que las siguientes proposiciones son tautologías.

- (a) $p \rightarrow (p \vee q)$.
- (b) $\neg[(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)]$.
- (c) $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$.
- (d) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$.
- (e) $[(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)] \rightarrow q$.
- (f) $[(p \vee q) \wedge \neg p] \rightarrow q$.
- (g) $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$.
- (h) $[(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q)]$.

16. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son tautologías?

- (a) $[(p \wedge q) \vee r] \wedge \neg q$.
- (b) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge \neg q)$.
- (c) $(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$.
- (d) $[(\neg p \wedge q) \rightarrow (p \vee \neg q)] \leftrightarrow [p \rightarrow (\neg q \wedge p)]$.
- (e) $(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$.
- (f) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$.
- (g) $(p \wedge q) \rightarrow (q \vee r)$.
- (h) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$.
- (i) $(p \rightarrow q) \vee (p \vee q)$.
- (j) $[(\neg p \wedge q) \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow (p \wedge q)$.
- (k) $[(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)] \rightarrow q$.
- (l) $\neg[(\neg p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \vee \neg q)]$.
- (m) $p \vee q \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q)$.
- (n) $p \wedge [(\neg q \rightarrow r) \vee \neg\{q \vee ((r \wedge s) \vee (r \rightarrow s))\}]$.

17. Construya demostraciones formales de los siguientes teoremas:

- (a)
$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \quad \neg p \vee q \\ \textcircled{2} \quad p \\ \hline \therefore \quad q \end{array}$$
- (b)
$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \quad p \rightarrow q \\ \textcircled{2} \quad r \rightarrow \neg q \\ \hline \therefore \quad p \rightarrow \neg r \end{array}$$
- (c)
$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \quad \neg r \rightarrow \neg q \\ \textcircled{2} \quad \neg p \wedge q \\ \hline \therefore \quad p \rightarrow \neg r \end{array}$$
- (d)
$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \quad p \rightarrow (q \vee r) \\ \textcircled{2} \quad q \rightarrow s \\ \hline \therefore \quad p \rightarrow (r \vee s) \end{array}$$
- (e)
$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \quad p \vee q \\ \textcircled{2} \quad q \rightarrow \neg r \\ \textcircled{3} \quad \neg r \rightarrow \neg p \\ \hline \therefore \quad \neg(p \wedge q) \end{array}$$
- (f)
$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \quad p \rightarrow q \\ \textcircled{2} \quad \neg q \rightarrow \neg r \\ \textcircled{3} \quad r \rightarrow \neg p \\ \hline \therefore \quad \neg p \end{array}$$
- (g)
$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \quad p \rightarrow q \\ \textcircled{2} \quad \neg q \rightarrow \neg r \\ \textcircled{3} \quad s \rightarrow (p \vee r) \\ \textcircled{4} \quad s \\ \hline \therefore \quad q \end{array}$$
- (h)
$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \quad \neg(q \vee r) \rightarrow \neg p \\ \textcircled{2} \quad p \rightarrow \neg q \\ \textcircled{3} \quad s \rightarrow \neg r \\ \textcircled{4} \quad p \\ \hline \therefore \quad \neg s \vee \neg p \end{array}$$

18. Construya demostraciones formales de los siguientes teoremas:

- (a) Si $p \vee \neg q$, $t \wedge q$, $t \rightarrow \neg(\neg s \wedge p)$; entonces $r \vee s$.
- (b) Si $\neg(p \rightarrow \neg q)$, $q \rightarrow \neg(p \wedge \neg t)$, $r \vee s$; entonces $\neg t \vee s$.
- (c) Si $p \rightarrow q$, $r \rightarrow s$, $\neg(p \rightarrow s)$; entonces $q \wedge \neg r$.
- (d) Si $p \rightarrow q$, $\neg r \rightarrow s$, $\neg q \vee \neg s$; entonces $p \rightarrow r$.

- (e) Si $p \rightarrow (q \wedge r)$, $(q \vee s) \rightarrow t$, $p \vee s$;
entonces t .
- (f) Si $p \rightarrow (q \wedge r)$, $r \rightarrow s$, $\neg(q \wedge s)$;
entonces $\neg p$.

19. Escriba en lenguaje formal las siguientes inferencias demostrándolas si son válidas y especificando las reglas de inferencia utilizadas:

- (a) Si salgo a la calle me visto. He salido a la calle. Por tanto voy vestido.
- (b) La comida incluye el primer plato y el segundo. Por tanto, incluye el primer plato.
- (c) Si vale menos de Bs. 100, tengo dinero suficiente. Si tengo dinero suficiente lo compraré. Vale menos de Bs. 100. Por tanto, lo compro.
- (d) Si el mayordomo es el asesino, se pondrá nervioso cuando le interroguen. El mayordomo se puso muy nervioso cuando le interrogaron. Por lo tanto, el mayordomo es el asesino.
- (e) Si las manos del mayordomo están manchadas de sangre, entonces es culpable. El mayordomo está impecablemente limpio. Por lo tanto, el mayordomo es inocente.
- (f) Si a es un número perfecto, entonces a es par y n es un número impar. a es par y n es impar. Por consiguiente, a no es perfecto.
- (g) Si no hay huelga o el sindicato miente o el ministro tiene la razón. Hay huelga o en caso contrario el ministro se equivoca. Por lo tanto, el sindicato no miente.
- (h) Si José ganó la carrera, entonces Pedro fue el segundo o Ramón fue el segundo. Si Pedro fue el segundo, entonces José gana la carrera. Si Carlos fue el segundo, entonces Ramón no fue el segundo. José gana la carrera. Luego, Carlos no fue el segundo.
- (i) Mi padre me alaba si yo estoy orgulloso de mí mismo. O me va bien en deportes

o no puedo estar orgulloso de mí mismo. Si estudio bastante, entonces no me va bien en deportes. Por tanto, si mi padre me alaba, entonces no estudio bastante.

Lógica cuantificada

20. Negar la siguiente proposición:
Todos los estudiantes de esta clase han aprobado algún examen en marzo.

21. Escribir en forma simbólica las siguientes proposiciones de tal forma que, al final, ningún cuantificador esté precedido por una negación:

- (a) No todos los españoles son periodistas.
- (b) Si algún caminante bosteza, todos los caminantes bostezan.
- (c) Todo el mundo conoce a algún abogado.
- (d) Entre dos números reales distintos cualesquiera existe algún número racional.
- (e) No existe un primo mayor que el resto de los números primos.

22. Escriba formalmente las siguientes proposiciones, luego determine sus negaciones y traduzca estas al lenguaje natural.

- (a) Si vale menos de Bs. 15, comeré en la cafetería.
- (b) Todos los habitantes de Madrid viajan en metro.
- (c) Hay personas en todas las ciudades que usan el transporte público.

23. Proporcione un contraejemplo para las siguientes afirmaciones:

- (a) Todo entero mayor que 17 es el cuadrado de un número entero.
- (b) Todo entero mayor que 6 es múltiplo de 2 o de 3.
- (c) $100n + 1 > n^2$ para todo entero n .

24. Dado el conjunto $A = \{1, 3, 5, 7\}$, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- (a) $(\exists x \in A)(4x^2 - 19x - 5 = 0) \wedge (\exists x \in A)(x^2 = x)$.

$$(b) (\exists x \in A)(2x + 3 = 5x) \vee (\exists x \in A)(2x = x).$$

25. Considere el siguiente predicado

$$p(x) : x^2 + 1 \leq 0.$$

¿Hay algún número real x que lo haga cierto? ¿Algún número complejo?

26. Considerando los números enteros como universo de discurso, sean los siguientes predicados:

$$p(x) : x > 0.$$

$$q(x) : x \text{ es par}.$$

$$r(x) : x \text{ es un cuadrado perfecto}.$$

$$s(x) : x \text{ es divisible por 4}.$$

$$t(x) : x \text{ es divisible por 5}.$$

Escriba en forma simbólica.

- (a) Algún entero es par.
- (b) Existe al menos un entero positivo y par.
- (c) Si x es par, entonces x no es un divisor de 5.
- (d) Ningún entero par es divisible entre 5.
- (e) Existe al menos un entero par divisible entre 5.
- (f) Si x es par y un cuadrado perfecto, entonces x es divisible entre 4.

Traduzca al lenguaje natural.

$$(a) (\forall x)[r(x) \rightarrow p(x)].$$

$$(b) (\exists x)[s(x) \wedge \neg r(x)].$$

$$(c) (\forall x)[s(x) \rightarrow \neg t(x)].$$

27. Sea \mathbb{N} el conjunto de los números naturales y sea $P(r, s)$ el predicado “ r divide a s ”. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- (a) $P(2, 3)$.
- (b) $P(5, 10)$.
- (c) $P(2, 3) \wedge P(5, 10)$.
- (d) $P(2, 3) \vee P(5, 10)$.

$$(e) P(2, 3) \rightarrow P(5, 10).$$

$$(f) P(5, 10) \rightarrow P(2, 3).$$

$$(g) (\forall m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(P(m, n)).$$

$$(h) (\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(P(m, n)).$$

$$(i) (\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})(P(m, n)).$$

$$(j) (\forall m \in \mathbb{N})(P(m, 1)).$$

Demostraciones

28. Demostrar por contradicción: Si $m+n$ es impar, entonces m es impar o n es impar.

29. Demuestre o refute:

- (a) Si x es un entero impar, entonces x^3 es impar.
- (b) Si $x \in \mathbb{N}$, el resto de dividir x^2 entre 4 sólo puede tomar los valores 0 o 1.
- (c) Si n es un entero natural y $3n + 1$ es un cuadrado perfecto, $n + 1$ es suma de tres cuadrados perfectos.
- (d) Sea $x \in \mathbb{Z}$, x es par si, y sólo si x^2 es par.
- (e) Si $x \geq 0$ es un número real tal que para todo número real $\epsilon > 0$ se cumple que $0 \leq a < \epsilon$, entonces $a = 0$.
- (f) $\sqrt{2}$ no es racional.
- (g) La suma de tres enteros consecutivos es múltiplo de tres.
- (h) El producto de un entero par con un entero impar es par.
- (i) La suma de dos números primos nunca es primo.
- (j) Si un número real x es racional, entonces $\pi + x$ no es racional.

30. Demostrar que:

- (a) Si a es un entero impar, entonces $a^2 + 3a + 5$ es impar.
- (b) Sumando 1 al producto de cuatro enteros consecutivos da un cuadrado perfecto.
- (c) Si n es un número natural y $2n + 1$ es un cuadrado perfecto, entonces $n + 1$ es la suma de dos cuadrados perfectos.

31. Usando la contrarecíproca demostrar que: Para todo $m, n \in \mathbb{Z}$, si $m \cdot n$ es impar, entonces ambos m y n son impares.

32. Sea n un entero. Probar que n es par si, y sólo si $31n + 12$ es par.

33. Un número real r es racional si existen enteros p y $q \neq 0$ tales que $r = p/q$. Por el método directo, demostrar que:

- (a) si r y s son racionales, entonces $r + s$ es racional.
- (b) si r es un número racional, entonces rs es racional.
- (c) si r es un número racional no nulo, entonces r^{-1} es racional.

34. Sean m y n números enteros. Realizando una demostración directa demostrar que:

- (a) Si n es impar, entonces n^3 es impar.
- (b) Si n es impar, entonces $n^2 + 3n + 5$ también es impar.
- (c) Si n es par y m es impar, entonces $n + m$ es impar.
- (d) Si n y m son pares, entonces nm es par.
- (e) Si n y m son impares, entonces el producto nm también es impar.

35. Un entero a divide al entero b (denotado $a|b$) si $b = ka$ para algún entero k . Si a, b, c y n son números enteros, entonces demuestre:

- (a) Si $a|b$ y $a|c$, entonces $a|(b + c)$.
- (b) Si $a|b$, entonces $a|(3b^3 - b^2 + 5b)$.
- (c) Si n es impar, entonces $4|(n^2 - 1)$.
- (d) $n^2 + 3n + 4$ es par.
- (e) $4|n^2$ o $4|(n^2 - 1)$.

36. Aplicando la forma contrarrecíproca de una implicación, probar que:

- (a) Si n^2 es impar, entonces n es impar.

(b) Si $a \nmid bc$, entonces $a \nmid b$.

(c) Si $4 \nmid a^2$, entonces a es impar.

37. Demostrar que los siguientes predicados son falsos:

- (a) $\forall n \in \mathbb{N} : 2n^2 - 4n + 31$ es primo.
- (b) $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 + 17n + 17$ es primo.

Miscelanea

38. Determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

- (a) $\sin^{\theta} + \cos^{\theta} = 1$ y $\cos \pi = -1$.
- (b) $\sin(\pi/2) = 0$ ó $\cos \pi = 0$.
- (c) Si $\sin 45^{\circ} = 1$ y $\cos 45^{\circ} = 1$ entonces se tiene que $\tan 30^{\circ} = 1/2$.
- (d) $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ si, y sólo si $1/2 < 1/3$.

39. Demostrar que:

- (a) Si x es impar, entonces $x + 1$ es impar.
- (b) Si $x = 2$, entonces $x^2 > 3$.
- (c) Si $x = 2$, entonces $x^2 - 2x = -1$.
- (d) $\sqrt{x^2} = x$ si, y sólo si $x \geq 0$.

40. Sean p y q proposiciones. La disyunción exclusiva de p y q , denotada por $p \vee q$ es falso si p y q (ambos) tienen el mismo valor de verdad, en otros casos es verdadero. Construir la tabla de verdad de:

- (a) $p \vee q$.
- (b) $(p \vee q) \vee r$.
- (c) $p \vee (q \rightarrow r)$.
- (d) Demostrar que $p \vee q \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$.
- (e) Simplificar $p \vee p$.
- (f) Es $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$? Demostrar o dar un contraejemplo.
- (g) ¿Será $p \wedge (q \vee r)$ es equivalente a $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$? Justifique su respuesta.

41. Encuentre la negación de las siguientes proposiciones:

(a) $\{(p \wedge q) \rightarrow r\} \leftrightarrow s$.

(b) $\{(p \leftrightarrow r) \leftrightarrow s\} \leftrightarrow t$.

42. Sea $x \in \mathbb{R}$. Encuentre la negación de las siguientes proposiciones:

(a) $x \neq 2$.

(b) $|x| \leq 2$.

(c) $2 \leq |x| < 4$.

(d) $2 \leq x < 3$.

43. Demostrar que:

(a) $\neg(p \rightarrow q) \not\equiv \neg p \rightarrow \neg q$.

(b) $p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$.

44. Sea t una tautología y c una contradicción. Demostrar que las siguientes afirmaciones son tautologías:

(a) $p \rightarrow p \wedge t$.

(b) $c \rightarrow p$.

(c) $p \leftrightarrow (p \leftrightarrow p)$.

(d) $c \leftrightarrow (p \wedge \neg p)$.

45. Construir la tabla de verdad de la proposición $(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$. Determinar si esta proposición es una tautología, contradicción o contingencia.

46. Si p y q son proposiciones verdaderas y r es falsa, determine el valor de verdad de:

(a) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$.

(b) $[(\neg p \vee q) \wedge (r \vee \neg p)] \leftrightarrow q$.

(c) $[(\neg p \wedge q) \vee r] \rightarrow q$.

(d) $[(p \leftrightarrow \neg q) \rightarrow \neg r] \vee (\neg q \leftrightarrow r)$.

47. Que valores de verdad deben tener p , q y r para que sea

(a) $(p \rightarrow q) \vee (p \leftrightarrow r)$ falsa.

(b) $[(q \leftrightarrow p) \wedge \neg r] \leftrightarrow r$ verdadera.

(c) $p \wedge (p \vee q) \wedge (p \leftrightarrow q)$ verdadera.

(d) $[(\neg p \rightarrow q) \rightarrow \neg r] \vee (\neg q \rightarrow r)$ falsa.

(e) $(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \rightarrow r)$ falsa

48. Se sabe que la proposición

$$[(p \vee q) \wedge p] \rightarrow [(r \vee q) \leftrightarrow p]$$

es falsa. Determinar el valor de verdad de la proposición $[(p \vee \neg q) \rightarrow (r \wedge p)] \leftrightarrow [\neg q \wedge (r \vee p)]$.

49. Determinar cuales de los siguientes enunciados son una tautología, contradicción o contingencia.

(a) $p \wedge q \rightarrow q$.

(b) $q \rightarrow p \wedge q$.

(c) $p \wedge q \rightarrow \neg p$.

(d) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$.

(e) $(p \leftrightarrow \neg p) \wedge q$.

(f) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p]$.

50. Mediante el álgebra de proposiciones, demuestre que

(a) $(p \vee q) \wedge \neg p \equiv \neg p \wedge q$.

(b) $\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv \neg p$.

(c) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \equiv (p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q$.

(d) $p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$.

51. Demostrar las reglas de inferencia:

(a) Silogismo disyuntivo.

(b) Modus tollens (MT).

(c) Silogismo hipotético (SH).

52. Construya demostraciones formales de los siguientes teoremas:

(a)
$$\begin{array}{ll} \textcircled{1} & p \rightarrow q \\ \textcircled{2} & \neg p \rightarrow r \\ \hline \therefore & q \vee r \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{ll} \textcircled{1} & \neg(r \wedge s) \\ \textcircled{2} & \neg s \rightarrow \neg q \\ \hline \therefore & r \rightarrow \neg q \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{(c)} & \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad p \wedge t \\ \textcircled{2} \quad p \rightarrow q \\ \textcircled{3} \quad q \rightarrow (r \wedge s) \\ \textcircled{4} \quad \neg r \vee \neg t \vee w \\ \hline \therefore \quad w \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{(d)} & \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad p \vee q \\ \textcircled{2} \quad \neg p \vee r \\ \textcircled{3} \quad \neg r \vee s \\ \hline \therefore \quad q \vee s \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{(e)} & \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad p \rightarrow q \\ \textcircled{2} \quad \neg r \vee \neg q \\ \textcircled{3} \quad r \\ \hline \therefore \quad \neg p \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{(f)} & \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad p \rightarrow \neg q \\ \textcircled{2} \quad q \vee \neg r \\ \textcircled{3} \quad p \wedge s \\ \textcircled{4} \quad t \rightarrow (r \wedge s) \\ \hline \therefore \quad \neg t \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{(g)} & \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad p \rightarrow (p \rightarrow \neg q) \\ \textcircled{2} \quad q \vee \neg r \\ \textcircled{3} \quad p \\ \textcircled{4} \quad s \rightarrow r \\ \hline \therefore \quad s \rightarrow t \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{(h)} & \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad p \vee \neg q \\ \textcircled{2} \quad (t \vee s) \rightarrow (p \vee r) \\ \textcircled{3} \quad \neg r \vee t \vee s \\ \textcircled{4} \quad p \leftrightarrow (t \vee s) \\ \hline \therefore \quad (p \vee r) \rightarrow (q \vee r) \end{array}
\end{array}$$

53. Simbolizar los siguientes razonamientos y demostrar que la conclusión es una consecuencia lógica.

- (a) Si 2 es mayor que 1, entonces 3 es mayor que 1. Si 3 es mayor que 1, entonces 3 es mayor que 0. 2 es mayor que 1. Por tanto, 3 es mayor que 0.
- (b) Si se levanta aire húmedo, entonces refrescará. Si refresca, entonces se formarán nubes. Se levanta aire húmedo. Por tanto, se formarán nubes.

54. Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3/2\}$ y $B = \{3, 4, 3/2\}$, determinar el valor de verdad de:

(a) $\exists x \in \mathbb{N} : x \in A \wedge x \in B.$

(b) $\exists x \in \mathbb{Q} : x \in A \wedge x \in B.$

55. Determinar el valor de verdad de los siguientes predicados y escribir su negación:

(a) $\forall x \in \mathbb{R} : x > 1 \rightarrow x > 3.$

(b) $\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 - 6x + 8 < 0.$

(c) $\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 - 3x + 2 < 0.$

(d) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0.$

(e) $\forall n \in \mathbb{N} : 4n^2 + 4n + 3 \geq 0.$

(f) $\forall n \in \mathbb{N} : 9n^2 + 6n - 15 > 0.$

(g) En cualquier triángulo, la suma de sus ángulos internos es igual a 180° .

(h) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x + y + z = 0 \leftrightarrow (x = 0 \wedge y = 0 \wedge z = 0).$

(i) $\exists n \in \mathbb{N} : 4n^2 + 12n - 41 < 0.$

(j) $\forall x \in \mathbb{Z} : x^2 + 1 \geq 0.$

(k) $\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 - 1 \geq 0.$

(l) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{N} : x + y = 0.$

(m) $\exists x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{N} : x + y = 0.$

56. Determinar la negación de los siguientes predicados:

(a) $\exists x : P(x) \vee \neg Q(x).$

(b) $\forall x : P(x) \rightarrow Q(x).$

(c) $\forall x, \forall y : P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y.$

57. Sea $P(x, y) : x < 2 \rightarrow y > 3$, donde $x, y \in \mathbb{R}$. Determinar el valor de verdad de los siguientes predicados:

(a) $P(2, y) \rightarrow [P(1, 2) \rightarrow P(x, 4)].$

(b) $P(1/2, 1) \leftrightarrow [P(x, 4) \vee P(-1, 5)].$

Introducción

1. Describa cada conjunto listando sus elementos

- (a) Los enteros entre -3 y 9 .
- (b) Los enteros negativos mayores que -10 .
- (c) Los enteros positivos cuyo cuadrado es menor a 25 .
- (d) Los enteros positivos cuya raíz cuadrada es menor o igual a 4 .

2. Describa los siguientes conjuntos por comprensión:

- (a) Los números reales positivos.
- (b) Los números irracionales negativos.
- (c) Los enteros negativos pares mayores que -50 .
- (d) Todos los puntos en el plano coordenado cartesiano con primera coordenada racional.

3. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son vacíos?

- (a) $\{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 = 2\}$.
- (b) $\{s \in \mathbb{R} \mid s^2 + 5s - 7 = 0\}$.
- (c) $\{t \in \mathbb{Z} \mid 6t^2 - t - 1 = 0\}$.
- (d) $\{\text{Todos los perros que han escrito sobre álgebra abstracta}\}$.

4. Enlista los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:

- (a) $\{x \in \mathbb{Z} \mid xy = 15 \text{ para algún } y \in \mathbb{Z}\}$
- (b) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x(x^2 - 2)(2x + 3) = 0\}$
- (c) $\{x \in \mathbb{N} \mid a < -4 \text{ y } a > 4\}$

5. Enlista cinco elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:

- (a) $\{a + b\sqrt{2} \mid a \in \mathbb{N}, -b \in \{2, 5, 7\}\}$
- (b) $\{x/y \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 25\}$
- (c) $\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 + n \text{ es múltiplo de } 3\}$

6. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ enlistar todos los subconjuntos B de A tales que:

- (a) $\{1, 2\} \subseteq B$.
- (b) $B \subseteq \{1, 2\}$.
- (c) $\{1, 2\} \not\subseteq B$.
- (d) $B \not\subseteq \{1, 2\}$.
- (e) $\{1, 2\} \subsetneq B$.
- (f) $B \subsetneq \{1, 2\}$.

7. Si $A = \{\{a, b\}\}$, determinar cuales de las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas. Explicar su respuesta.

- (a) $a \in A$.
- (b) $A \in A$.
- (c) $\{a, b\} \in A$.
- (d) Hay dos elementos en A .

8. Determinar cuales de las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas. Justifique su respuesta.

- (a) $3 \in \{1, 3, 5\}$
- (b) $\{3, 5\} \not\subseteq \{1, 3, 5\}$
- (c) $0 \in \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}, b \neq 0\}$

9. Determine si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas. Justifique su respuesta.

- (a) $\emptyset \subseteq \emptyset$
- (b) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
- (c) $\emptyset \in \emptyset$
- (d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

- (e) $\emptyset \not\subseteq \emptyset$
- (f) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$
- (g) $A \subseteq \emptyset$
- (h) $\emptyset \subseteq A$
- (i) $A \in A$
- (j) $A = \{A\}$
- (k) $\{a, b\} = \{\{a\}, \{b\}\}$
- (l) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

(m) $\{1, 2\} \not\subseteq \{1, 2, 3\{1, 2, 3\}\}$

(n) $\{1, 2\} \in \{1, 2, 3\{1, 2, 3\}\}$

(ñ) $\{1, 2\} \subsetneq \{1, 2\{\{1, 2\}\}\}$

(o) $\{1, 2\} \in \{1, 2\{\{1, 2\}\}\}$

(p) $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2\{1, 2\}\}$

10. Sea A un subconjunto y supongamos que $x \in A$. ¿Es posible que $x \subseteq A$? Explicar.

11. Cuantos elementos se pueden encontrar en el conjunto de partes del conjunto de partes de A (es decir $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$) si:

- (a) A es el conjunto vacío.
- (b) A tiene un elemento.

12. Suponga que A, B y C son conjuntos. Para cada una de las siguientes afirmaciones, proporcione una demostración si es verdadera o un contraejemplo si es falsa.

- (a) $A \in B, B \in C \rightarrow A \in C$.
- (b) $A \subseteq B, B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$.
- (c) $A \subsetneq B, B \subsetneq C \rightarrow A \subsetneq C$.
- (d) $A \in B, B \subseteq C \rightarrow A \in C$.
- (e) $A \in B, B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$.
- (f) $A \subseteq B, B \in C \rightarrow A \in C$.
- (g) $A \subseteq B, B \in C \rightarrow A \subseteq C$.

13. Suponga que A y B son conjuntos.

- (a) ¿Será $A \not\subseteq B \rightarrow B \subsetneq A$ verdadera o falsa? Explicar.
- (b) ¿La inversa de la implicación en (a) será verdadera o falsa? Explicar.

14. Supongamos que A, B y C son conjuntos. Probar o dar un contraejemplo que refute cada una de las siguientes afirmaciones.

- (a) $C \in \mathcal{P}(A) \leftrightarrow C \subseteq A$.
- (b) $A \subseteq B \leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.
- (c) $A = \emptyset \leftrightarrow \mathcal{P}(A) = \emptyset$.

Operaciones con conjuntos

15. Sean $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$, $A = \{a, c, i, e\}$, $B = \{b, c, e, f\}$, $C = \{a, c, d, e\}$ hallar los conjuntos:

- (a) $A^c, B^c, C^c, A \setminus B, C \cap B$.
- (b) $A \cap B^c, B \cap A^c, (A \cap B \cap C)^c$.
- (c) $(A \setminus B) \setminus C, A \setminus (B \setminus C)$.

16. Sean $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - 2| < 4\}$ y $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 4x = 0\}$.

- (a) Enlista los elementos de cada uno de estos conjuntos.
- (b) Encontrar $A \cup C, B \cap C, B \setminus C, A \oplus B, C \times (B \cap C), (A \setminus B) \setminus C, A \setminus (B \setminus C), y (B \cup \emptyset) \cap \{\emptyset\}$.
- (c) Enlista los elementos en $S = \{(a, b) \in A \times B \mid a = b + 2\}$ y en $T = \{(a, c) \in A \times C \mid a \leq c\}$

17. Sean $S = \{2, 5, \sqrt{2}, 25, \pi, \frac{5}{2}\}$ y $T = \{4, 25, \sqrt{2}, 6, \frac{3}{2}\}$.

- (a) Encontrar $S \cap T, S \cup T, y T \times (S \cap T)$.
- (b) Encontrar $\mathbb{Z} \cup S, \mathbb{Z} \cap S, \mathbb{Z} \cup T, y \mathbb{Z} \cap T$.
- (c) Enlista los elementos de los conjuntos $\mathbb{Z} \cap (S \cup T)$ y $(\mathbb{Z} \cap S) \cup (\mathbb{Z} \cap T)$. ¿Que es lo que notas?
- (d) Enlista los elementos de los conjuntos $\mathbb{Z} \cup (S \cap T)$ y enlista los elementos de $(\mathbb{Z} \cup S) \cap (\mathbb{Z} \cup T)$. ¿Que es lo que observas?

18. Considerando $A = \{a, b, c, \{a, b\}\}$ y $B = \{a, b, c\}$, encontrar

- (a) $A \setminus \{a, b\}$ (d) $\emptyset \setminus A$
 (b) $\{\emptyset\} \setminus \mathcal{P}(A)$ (e) $\{a, b, c\} \setminus A$
 (c) $A \setminus \emptyset$ (f) $(B \cup \{A\}) \setminus A$

19. Encontrar A^c (con respecto a $U = \mathbb{R}$) en cada uno de los siguientes casos.

- (a) $A = (1, \infty) \cup (-\infty, -2]$
 (b) $A = (-3, \infty) \cap (-\infty, 4]$
 (c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq -1\}$

20. Sean $n > 3$ y $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. ¿Cuántos subconjuntos B de A

- (a) contienen $\{1, 2\}$?
 (b) tienen la propiedad $B \cap \{1, 2\} = \emptyset$?
 (c) tienen la propiedad $B \cup \{1, 2\} = A$?

21. Sean a y b números reales con $a < b$. Encontrar $(a, b)^c$, $[a, b)^c$, $(a, \infty)^c$, y $(-\infty, b]^c$.

22. Encontrar formulaciones equivalentes de cada una de las siguientes afirmaciones usando la notación conjuntista.

- (a) Existen números primo pares.
 (b) 0 es un número entero pero no un número natural.
 (c) Cada número primo es a la vez un número natural y un número entero.
 (d) Cada número primo es impar salvo 2.

23. Para $n \in \mathbb{Z}$, sea $A_n = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \leq n\}$. Encontrar los siguientes conjuntos.

- (a) $A_3 \cup A_{-3}$ (c) $A_3 \cap (A_{-3})^c$
 (b) $A_3 \cap A_{-3}$ (d) $\bigcap_{i=0}^4 A_i$

24. Sean A y B conjuntos tales que

- (a) $A \cap B = A$. (b) $A \cup B = A$.

¿Qué puedes concluir? ¿Por qué?

25. Sea $n \geq 1$ un número natural. ¿Cuántos elementos hay en el conjunto $\{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \leq b \leq n\}$? Explicar.

26. Suponga que A es un subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con las propiedades

- $(1, 1) \in A$ y
- $(a, b) \in A$ entonces $(a + 1, b + 1)$ y $(a + 1, b)$ están en A .

¿Piensas que $\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m \geq n\}$ es un subconjunto de A ? Explicar.

27. Sean A , B y C subconjuntos de algún conjunto universal U .

- (a) Probar que $A \cap B \subseteq C$.
 (b) Probar que $A^c \cap B \subseteq C$ implica $B \subseteq C$.
 (c) ¿Si se sabe que $A \cap B = A \cap C$ y $A^c \cap B = A^c \cap C$, se puede concluir que $B = C$? Justifica tu respuesta.

28. Si A , B y C son conjuntos.

- (a) Encontrar un contraejemplo a la afirmación $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.
 (b) Sin el empleo de diagramas de Venn, probar que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

29. Suponga que A , B y C son subconjuntos de algún conjunto universal U .

- (a) Generaliza las leyes de De Morgan para encontrar la forma equivalente de describir los conjuntos $(A \cup B \cup C)^c$ y $(A \cap B \cap C)^c$.
 (b) Encontrar la manera de describir el conjunto $[A \cap (B \setminus C)]^c \cap A$ sin usar el símbolo de complementación c .

30. Usar las leyes de De Morgan y cualquier otra identidad conjuntista para probar que $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$ para cualesquiera conjuntos A , B y C .

31. Sean A y B conjuntos, su diferencia simétrica se define como Sea $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$. Encontrar una condición necesaria y suficiente para que

- (a) $A \oplus B = A$. (b) $A \cap B = A \cup B$.

Explica tus respuestas.

32. Demostrar que: $A \oplus B = \emptyset$ si, y solo si $A = B$.

33. ¿Cuáles de las siguientes condiciones implica que $B = C$? En cada caso, proporciona una prueba o un contraejemplo.

- (a) $A \cup B = A \cup C$. (c) $A \oplus B = A \oplus C$.
 (b) $A \cap B = A \cap C$. (d) $A \times B = A \times C$.

34. ¿Verdadero o falso? En cada caso, proporciona una demostración o un contraejemplo.

- (a) $A \subseteq C, B \subseteq D$ implica que $A \times B \subseteq C \times D$.
 (b) $A \times B \subseteq C \times D$ implica que $A \subseteq C$ y $B \subseteq D$.
 (c) $A \subseteq C$ y $B \subseteq D$ si, y sólo si $A \times B \subseteq C \times D$.
 (d) $A \cup B \subseteq A \cap B$ implica que $A = B$.

35. Sean A, B, C y D subconjuntos de algún conjunto universal U . Use las identidades de la teoría de conjuntos para simplificar las expresiones

- (a) $[(A \cup B)^c \cap (A^c \cup C)^c]^c \setminus D^c$
 (b) $\{[C \cup (B \setminus A^c)] \cap [B \setminus (C \cup A)]^c\} \cup B$
 (c) $\{(A \cup B) \cap [(B \setminus A) \cup (A \cap B)]\} \cap [A \cup (A \cup B)^c]$
 (d) $[(A \cup B^c) \oplus (B \setminus A)]^c \cup [(A \cap B)^c - (B \setminus A)]$

36. Para conjuntos A, B y C , mostrar que

- (a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
 (b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.
 (c) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

37. Sean A, B y C conjuntos arbitrarios. Sobre las siguientes afirmaciones, dar una demostración de las que son verdaderas, o proporciona un contraejemplo de las falsas.

- (a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
 (b) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$
 (c) $(A \oplus B) \times C = (A \times C) \oplus (B \times C)$
 (d) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$

(e) $(A \setminus B) \times (C \setminus D) = (A \times C) \setminus (B \times D)$

38. Demuestre en detalle las siguientes proposiciones.

- (a) $A \subset C, B \subset D$ implica $A \times B \subset C \times D$.
 (b) $A \subseteq \{A\}$ si, y solo si $A = \emptyset$.
 (c) Si $A \subseteq B$ entonces $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. ¿Que sucederá con el recíproco?
 (d) Para cualquier conjunto X , $\mathcal{P}(X) \not\subseteq X$.

39. Pruébese que:

- $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$.
- $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
- $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.
- $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$.
- $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.
- $(A \setminus B) \setminus (A \setminus C) = A \cap (C \setminus B)$.
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = (A_1 \setminus A_2) \cup \dots \cup (A_{n-1} \setminus A_n) \cup (A_n \setminus A_1) \cup \left(\bigcap_{k=1}^n A_k \right)$.
- Si $A \subseteq X$ y $B \subseteq X$, entonces $(X \setminus A) \setminus (X \setminus B) = B \setminus A$.

40. Si $A \neq \emptyset$ entonces demuestre que $(A \cup A) \setminus A \neq A \cup (A \setminus A)$.

Cardinalidad

41. Si C es un conjunto finito, denótese por $|C|$ el número de elementos de C . Si A, B son conjuntos finitos pruébese que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

42. Si A, B, C son conjuntos finitos, determine una formula para $|A \cup B \cup C|$.

43. Trate de determinar $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$, para A_1, \dots, A_n conjuntos finitos.

44. Para conjuntos finitos A, B demuestre que $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

45. Si S es un conjunto con 5 elementos:

- (a) ¿Cuántos subconjuntos tiene S ?

- (b) ¿Cuántos subconjuntos de cuatro elementos tiene S ?
- (c) ¿Cuántos subconjuntos de dos elementos tiene S ?

46. Sean los conjuntos A y B , tales que

- (a) $|A \oplus B| = 10$ y $|A \cup B| = 25$. ¿Cuántos elementos tiene $A \cap B$?
- (b) $|A \cup B| = 18$ y $|A \cap B| = 7$. ¿Cuántos elementos tiene $A \oplus B$?

47. De un total de 120 personas encuestadas, 25 personas hablan inglés y francés, 40 solo hablan francés y 20 no hablan ninguno de estos idiomas. ¿Cuántas personas hablan solo uno de estos idiomas?

48. Laura tiene discos de diferentes géneros musicales: pop, rock, punk, gothic, clásica y jazz. Su amiga Diana tiene discos de salsa, gothic, hip-hop, pop y metal.

- (a) Luis, un amigo común, quiere escuchar la música que le gusta exclusivamente a cada una de ellas, así que le prestaron un disco de cada uno de esos géneros. ¿De qué géneros le han prestado los discos?
- (b) Si Luis opta por los discos que a ambas gustan, ¿qué discos ha de oír?

49. De un grupo de estudiantes bachilleres que piensan presentar el examen de admisión a una universidad se sabe que $1/3$ se presentará a medicina, $7/12$ se presentará a psicología y $1/8$ se presentará a ambas carreras. Si el resto, que son 15 estudiantes, aun no deciden a qué carrera presentarse. Deducir el número total de estudiantes.

50. Sobre una población de 113 personas se determinó que los que van solamente al cine son el doble de los que van únicamente al teatro y los que van a ambos lugares son la sexta parte de los que van a un solo lugar. Si ocho personas no van al cine ni al teatro, ¿cuántas personas van al teatro?

51. Supongamos que si el 80 % de los bolivianos han cursado el bachillerato y el 70 %

leen el periódico cada día, entonces por lo menos 50 % reúnen ambas condiciones. ¿Por qué?

52. Un sondeo de opinión publica muestra que un 93 % de la población está de acuerdo con el gobierno de Carlos de Mesa en una primera decisión, el 84 % en la segunda, y el 74 % en la tercera. Determinar por lo menos que porcentaje de la población está de acuerdo con las tres decisiones tomadas por el gobierno actual.

53. En su libro *A Tangled Tale*, Lewis Carroll propuso el siguiente acertijo acerca de un grupo de ex-combatientes inválidos: Supongamos que un 73 % han perdido un ojo, 75 % una oreja, 80 % un brazo y 85 % una pierna. ¿Que porcentaje, por lo menos habrá sufrido las cuatro pérdidas?

54. De un grupo de 4 personas que van a comer a un restaurante se sabe que 3 personas piden sopa, 3 piden carne, 3 piden jugo, y solo una persona pide sopa, carne y jugo. El número de personas que pidieron sopa y carne, y no pidieron jugo es:

55. De 76 estudiantes que pueden matricularse en los cursos de álgebra, geometría y cálculo. Se sabe que 42 se matricularon en álgebra, 30 en geometría y 28 en cálculo. Uno se matriculó en los tres cursos. Si todos tomaron al menos un curso, encontrar el número de estudiantes que se matriculó solo en 2 de los cursos.

56. La profesora Diana puso un examen con tres preguntas a su grupo de química. Hay 21 estudiantes en su clase y cada uno de ellos contestó al menos una pregunta. 5 estudiantes no contestaron la primera pregunta, 7 fallaron al contestar la segunda, y seis no contestaron la tercera pregunta. Si 9 estudiantes contestaron las tres preguntas, ¿cuántos contestaron exactamente una pregunta?

57. Una mesera tomo una orden de 57 hamburguesas: 22 con cebolla, 29 con mostaza y 25 con ketchup. De éstas, 10 tenían sólo cebolla y 15 sólo mostaza; 7 de las hamburguesas tenían sólo cebolla y mostaza, y 3 los tres ingredientes. Determine:

- (a) ¿Cuántas hamburguesas llevan sólo ketchup y mostaza?
- (b) ¿Cuántas sólo llevaban ketchup?
- (c) ¿Cuántas hamburguesas llevaban cebolla o mostaza, pero no ketchup?

58. Un ingeniero que dirige la construcción de un edificio de tres plantas, distribuye el personal de la siguiente manera: 43 trabajan en la primera planta, 58 en la tercera planta, 16 en la primera y segunda plantas, 22 en las plantas primera y tercera, 7 trabajan en las tres plantas. Si 52 trabajan en sólo una planta, y 37 en dos plantas a la vez pero no en las tres, ¿cuántos trabajan:

- (a) en la primera y segunda plantas, pero no en la tercera planta?
- (b) en la segunda o tercera plantas, pero no en la primera planta?
- (c) únicamente en la primera planta?
- (d) en total en toda la obra?

59. En una exposición científica de una escuela secundaria, 34 estudiantes recibieron premios por sus proyectos científicos. Se dieron 14 premios por proyectos de biología, 13 de química y 21 de física. Si 3 estudiantes recibieron premios en las tres áreas temáticas, ¿cuántos recibieron premios por exactamente?:

- (a) un área temática?
- (b) dos áreas temáticas?

60. En una encuesta a 120 electores sobre sus candidatos favoritos, se determinó que: 66 electores prefieren al candidato A , 50 prefieren al candidato B , 50 prefieren al candidato C , 27 prefieren a los candidatos A y C , 30 prefieren a los candidatos A y B , 21 prefieren a los candidatos B y C , y 20 no tiene preferencia por ninguno de los tres candidatos.

- (a) ¿Cuántos electores tienen preferencia por los tres candidatos?

- (b) ¿Cuántos prefieren a los candidatos A o B , pero no a C ?
- (c) ¿Cuántos prefieren a dos de los candidatos?

61. Un profesor tiene dos docenas de libros de introducción a las ciencias de la computación y está interesado en la forma en que tratan los temas (C) compiladores, (E) estructuras de datos e (I) intérpretes. Los siguientes datos representan la cantidad de libros que contienen material relativo a estos temas:

$$\begin{array}{ll} |C| = 8 & |C \cap E| = 5 \\ |E| = 13 & |E \cap I| = 6 \\ |I| = 13 & |I \cap C| = 3 \\ & |C \cap E \cap I| = 2 \end{array}$$

- (a) ¿Cuántos libros incluyen el material de exactamente uno de estos temas?
- (b) ¿Cuántos no tratan ninguno de estos temas?
- (c) ¿Cuántos no contienen material sobre compiladores?

Miscelánea

62. Pruébense las siguientes proposiciones:

- (a) $A \times B = \emptyset$ si, y solo si $A = \emptyset$ ó $B = \emptyset$.
- (b) Si $C \times D = \emptyset$, entonces; $C \times D \subseteq A \times B$ si y solo si $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$.
- (c) $A \times B = B \times A$ si y solo si $A = B$.
- (d) Si A y B son conjuntos no vacíos y $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times C$ entonces $A = B = C$.

63. Si $I = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_1 = \{2, 5, 7\}$, $A_2 = \{2, 3, 9\}$, $A_3 = \{1, 2, 4\}$ y $A_4 = \{2, 5, 9\}$, encuentre.

$$\bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{y} \quad \bigcap_{i \in I} A_i.$$

64. Dada una familia de conjuntos $\{A_i\}$ con $i \in I$, sea X un conjunto con las siguientes propiedades.

- (a) Para todo $i \in I$, se tiene que $A_i \subset X$,

(b) Si para todo $i \in I$, $A_i \subset Y$ entonces $X \subset Y$,

pruebe con estas condiciones que $X = \bigcup_{i \in I} A_i$.

65. Repita el ejercicio anterior con los conjuntos $I = N$, y $A_i = \left[1 - \frac{1}{n+1}\right]$.

66. Si $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n$, demuestre

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_n, \quad \text{y} \quad \bigcap_{i=1}^n A_i = A_1$$

67. Demuéstrese que: $(a, b) = (c, d)$ si, y solo si $a = c$ y $b = d$. [Recuerde: El par ordenado de los elementos a y b esta definido como el conjunto $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.]

68. Si X, A, B son conjuntos tales que $A \cup B \subseteq X$, demuestre que:

1. Si $A \cup B = X$ entonces $X \setminus A \subseteq B$.
2. Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $A \subseteq X \setminus B$.
3. $A = X \setminus B$ si, y sólo si $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$.

69. El sistema de ecuaciones $A \cup X = A \cup B$, $A \cap X = \emptyset$ tiene a lo más una solución para X .

70. Probar que $\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$ se distribuye sobre \bigcap y $\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}$ se distribuye sobre \bigcup .

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha}\right) \cap \left(\bigcup_{\beta \in J} B_{\beta}\right) = \bigcup_{\substack{\alpha \in I \\ \beta \in J}} (A_{\alpha} \cap B_{\beta}),$$

$$\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_{\alpha}\right) \cup \left(\bigcap_{\beta \in J} B_{\beta}\right) = \bigcap_{\substack{\alpha \in I \\ \beta \in J}} (A_{\alpha} \cup B_{\beta}).$$

71. Si los complementos se toman con respecto a X , entonces probar que:

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha} = \bigcap_{\alpha \in I} (X \setminus A_{\alpha}),$$

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_{\alpha} = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_{\alpha}).$$

72. Demostrar que \bigcup_{α} y \bigcap_{α} se distribuyen sobre el producto cartesiano:

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha}\right) \times \left(\bigcup_{\beta \in J} B_{\beta}\right) = \bigcup_{\substack{\alpha \in I \\ \beta \in J}} (A_{\alpha} \times B_{\beta}),$$

$$\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_{\alpha}\right) \times \left(\bigcap_{\beta \in J} B_{\beta}\right) = \bigcap_{\substack{\alpha \in I \\ \beta \in J}} (A_{\alpha} \times B_{\beta}).$$

Como un corolario del anterior problema tenemos las formas más concretas las cuales son de frecuente uso

$$A \cap \bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha} = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap A_{\alpha}),$$

$$A \cup \bigcap_{\alpha \in I} A_{\alpha} = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup A_{\alpha}),$$

$$A \times \bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha} = \bigcup_{\alpha \in I} (A \times A_{\alpha}),$$

$$A \times \bigcap_{\alpha \in I} A_{\alpha} = \bigcap_{\alpha \in I} (A \times A_{\alpha}),$$

73. Demostrar que \bigcup_{α} y \mathcal{P} conmutan, pero \bigcap_{α} y \mathcal{P} no del todo,

$$\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{P}(A_{\alpha}) = \mathcal{P}\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_{\alpha}\right),$$

$$\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{P}(A_{\alpha}) \subset \mathcal{P}\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha}\right).$$

74. Demuestre que un conjunto con n elementos tiene 2^n subconjuntos.

75. Si $0 < m < n$, determinese cuantos subconjuntos hay que consten de exactamente m elementos.

76. De un grupo de 50 estudiantes que aprobaron el curso de Aritmética o el curso de Álgebra, se sabe que el número de mujeres que aprobaron solo Álgebra es la quinta parte del número de mujeres que aprobaron solo Aritmética. El número de estudiantes que aprobaron Aritmética y Álgebra excede en 5 al número de estudiantes hombres que aprobaron solo Aritmética y este último es igual al número de estudiantes hombres que aprobaron solo Álgebra. ¿Cuál es la mínima cantidad de estudiantes que aprobaron solo Álgebra?

Relaciones binarias

3

Cuando nos referimos a relaciones en contextos ordinarios, insistimos en que debe haber una descripción intuitiva del tipo de; conexión existente entre las cosas que están relacionadas.

P. Suppes

Introducción

1. Si B denota el conjunto de los libros en una biblioteca colegial y S denota el conjunto de los estudiantes que asisten a ese colegio. Interpretar el producto Cartesiano $S \times B$. Dar un ejemplo consistente de una relación binaria de S a B .

2. Determinar cuales de las propiedades reflexiva, simétrica o transitiva se aplican a las siguientes relaciones sobre el conjunto de personas.

- (a) es padres de
- (b) es un amigo de
- (c) es un descendiente de
- (d) tienen los mismos padres
- (e) es un tío de

3. Sea $A = \{1, 2, 3\}$. Enlista los pares ordenados de una relación sobre A que sea

- (a) no reflexiva, no simétrica y no transitiva.
- (b) reflexiva, no simétrica y no transitiva.
- (c) no reflexiva, simétrica y no transitiva.
- (d) no reflexiva, no simétrica y transitiva.
- (e) reflexiva, simétrica y no transitiva.
- (f) reflexiva, no simétrica y transitiva.
- (g) no reflexiva, simétrica y transitiva.
- (h) reflexiva, simétrica y transitiva.
- (i) reflexiva, simétrica y transitiva.

4. ¿Es posible para una relación ser simétrica y antisimétrica a la vez? Si la respuesta es no, ¿por qué? Si la respuesta es si,

encontrar todas las relaciones binarias con esta propiedad.

5. ¿Cuál es el error con el siguiente argumento que se propone para probar que una relación binaria que es simétrica y transitiva debe ser también reflexiva?

Suponga que \mathcal{R} es una relación simétrica y transitiva sobre el conjunto A y sea $a \in A$. Entonces, para cualquier b con $(a, b) \in \mathcal{R}$, tendremos también que $(b, a) \in \mathcal{R}$ por la simetría. Como ahora tenemos que (a, b) y (b, a) están en \mathcal{R} , tenemos que $(a, a) \in \mathcal{R}$, por la transitividad. Por lo tanto \mathcal{R} es reflexiva.

6. Determinar si cada una de las relaciones binarias \mathcal{R} definidas sobre el conjuntos dados A son reflexivas, simétricas, antisimétricas o transitivas. Si una relación tiene una cierta propiedad, probarlo; por otro lado, proveer un contraejemplo para mostrar que no.

- (a) A es el conjunto de todas las palabras (del Castellano); $(a, b) \in \mathcal{R}$ si, y sólo si a y b tienen al menos una letra en común.
- (b) A es el conjunto de todas las personas, $(a, b) \in \mathcal{R}$ si, y sólo si ni a ni b están matriculados actualmente en la UMSA, o si ambos están matriculados en la UMSA y han tomado al menos una materia juntos.
- (c) $A = \{1, 2\}$; $\mathcal{R} = \{(1, 2)\}$.
- (d) $A = \{1, 2, 3, 4\}$;
 $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4)\}$.
- (e) $A = \mathbb{Z}$; $(a, b) \in \mathcal{R}$ si, y sólo si $ab \geq 0$.
- (f) $A = \mathbb{R}$; $(a, b) \in \mathcal{R}$ si, y sólo si $a^2 = b^2$.
- (g) $A = \mathbb{R}$; $(a, b) \in \mathcal{R}$ si, y sólo si $a - b \leq 3$.
- (h) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$; $((a, b), (c, d)) \in \mathcal{R}$ si, y sólo si $a - c = b - d$.

- (i) $A = \mathbb{N}$; \mathcal{R} es \neq .
- (j) $A = \mathbb{Z}$; $\mathcal{R} = \{(x, y) \mid x + y = 10\}$.
- (k) $A = \mathbb{R}^2$; $\mathcal{R} = \{((x, y), (u, v)) \mid x + y \leq u + v\}$.
- (l) $A = \mathbb{N}$; $(a, b) \in \mathcal{R}$ si, y sólo si $\frac{a}{b}$ es un entero.
- (m) $A = \mathbb{Z}$; $(a, b) \in \mathcal{R}$ si, y sólo si $\frac{a}{b}$ es un entero.

7. Sea S un conjunto que contiene al menos dos elementos a y b . Si A es el conjunto potencia de S , determinar que propiedades -reflexividad, simetría, antisimetría, transitividad- posee cada una de las relaciones \mathcal{R} sobre A . Dar una demostración o un contraejemplo según el caso.

- (a) $(X, Y) \in \mathcal{R}$ si, y sólo si $X \subseteq Y$.
- (b) $(X, Y) \in \mathcal{R}$ si, y sólo si $X \subsetneq Y$.
- (c) $(X, Y) \in \mathcal{R}$ si, y sólo si $X \cap Y = \emptyset$.

Relaciones de equivalencia

8. Explicar porque cada una de las siguientes relaciones binarias sobre $S = \{1, 2, 3\}$ no es una relación de equivalencia sobre S .

- (a) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (3, 2), (3, 3), (2, 3), (2, 1)\}$.
- (b) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 1), (1, 3)\}$.
- (c) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$.
- (d) $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (3, 3)\}$.

9. Los conjuntos $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ son las clases de equivalencia para una bien conocida relación de equivalencia sobre el conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. ¿Cuál es el nombre usual de esta relación de equivalencia?

10. Para $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se define

$$a \sim b \text{ si, y sólo si } \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}.$$

- (a) Probar que \sim es una relación de equivalencia.

- (b) Encontrar la clase de equivalencia de 1.
- (c) Mostrar que $\sqrt{3} = \sqrt{12}$.

11. Para $a, b \in \mathbb{N}$, se define

$$a \sim b \text{ si, y sólo si } a^2 + b \text{ es par.}$$

Probar que \sim define una relación de equivalencia sobre \mathbb{N} y encontrar el conjunto cociente determinado por \sim .

12. Para $a, b \in \mathbb{R}$, se define

$$a \sim b \text{ si, y sólo si } a - b \in \mathbb{Z}.$$

- (a) Probar que \sim define una relación de equivalencia sobre \mathbb{Z} .
- (b) ¿Cuál es la clase de equivalencia de 5? ¿Cuál es la clase de equivalencia de $5\frac{1}{2}$?
- (c) ¿Cuál es el conjunto cociente determinado por esta relación de equivalencia?

13. Para enteros a, b , se define $a \sim b$ si, y sólo si $2a + 3b = 5n$ para algún entero n . Mostrar que \sim define una relación de equivalencia sobre \mathbb{Z} .

14. Se define la relación \sim sobre \mathbb{Z} por $a \sim b$ si, y sólo si $3a + b$ es un múltiplo de 4.

- (a) Probar que \sim define una relación de equivalencia.
- (b) Encontrar la clase de equivalencia de 0.
- (c) Encontrar la clase de equivalencia de 2.
- (d) Hacer una conjetura sobre el conjunto cociente.

15. Para enteros a y b , se define

$$a \sim b \text{ si, y sólo si } 3a + 4b = 7n.$$

- (a) Probar que \sim define una relación de equivalencia.
- (b) Encontrar la clase de equivalencia de 0

16. Para $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, se define $a \sim b$ si, y sólo si $ab > 0$.

- (a) Probar que \sim define una relación de equivalencia sobre \mathbb{Z} .

- (b) ¿Cuál es la clase de equivalencia de 5?
¿Cuál es la clase de equivalencia de -5 ?

- (c) ¿Cuál es la partición de $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ determinada por esta relación de equivalencia?

17. Para $a, b \in \mathbb{Z}$, se define $a \sim b$ si, y sólo si $a^2 - b^2$ es divisible por 3.

- (a) Probar que \sim define una relación de equivalencia sobre \mathbb{Z} .
(b) ¿Qué es $\bar{0}$? ¿Qué es $\bar{1}$?
(c) ¿Cuál es la partición de \mathbb{Z} determinada por esta relación de equivalencia?

18. Determinar y justificar, sí las siguientes relaciones definidas sobre el conjunto A son relaciones de equivalencia.

- (a) A es el conjunto de todos los triángulos en el plano; $a \sim b$ si, y sólo si a y b son congruentes.
(b) A es el conjunto de todos los círculos en el plano; $a \sim b$ si, y sólo si a y b tienen el mismo centro.
(c) A es el conjunto de todas las líneas rectas en el plano; $a \sim b$ si, y sólo si a es paralelo a b .
(d) A es el conjunto de todas las líneas en el plano; $a \sim b$ si, y sólo si a es perpendicular a b .

19. Se define la relación \sim sobre \mathbb{R}^2 por

$(x, y) \sim (u, v)$ si, y sólo si $x - y = u - v$.

- (a) Critique y después corrija la siguiente demostración de que \sim es reflexiva.

Si $(x, y) \sim (x, y)$, entonces $x - y = x - y$.

- (b) ¿Cuál es el problema con la siguiente interpretación de la simetría en esta situación?

Si $(x, y) \in \mathcal{R}$, entonces $(y, x) \in \mathcal{R}$.

Escriba una correcta afirmación de la propiedad simétrica.

- (c) Critique y después corrija la siguiente demostración de la simetría de \sim .

Si $(x, y) \sim (u, v)$ si $x - y = u - v$.

Entonces $u - v = x - y$.

Por lo tanto, $(u, v) \sim (x, y)$

- (d) Critique y después corrija la siguiente demostración de transitividad para \sim .

Si $(x, y) \sim (u, v)$ y $(u, v) \sim (w, z)$

Entonces $u - v = w - z$.

Si $x - y = u - v$, entonces $x - y = w - z$.

Por lo tanto, $(x, y) \sim (w, z)$

- (e) ¿La relación \sim define una relación de equivalencia sobre \mathbb{R}^2 ?

- (f) Determinar las clases de equivalencia de $(0, 0)$ y $(2, 3)$ y describir estos geoméricamente.

20. Para $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ se define $(x, y) \sim (u, v)$ si, y sólo si $x^2 - y^2 = u^2 - v^2$. Probar que \sim define una relación de equivalencia sobre \mathbb{R}^2 . Describe geoméricamente la clase de equivalencia de $(0, 0)$. Describe geoméricamente la clase de equivalencia de $(1, 0)$.

21. Determinar cuales de las siguientes relaciones de equivalencia definidas sobre \mathbb{R}^2 . Para los que lo sean, dar una interpretación geométrica de los elementos del conjunto cociente.

- (a) $(a, b) \sim (c, d)$ si, y sólo si $a + 2b = c + 2d$.

- (b) $(a, b) \sim (c, d)$ si, y sólo si $ab = cd$.

- (c) $(a, b) \sim (c, d)$ si, y sólo si $a^2 + b = c + d^2$.

- (d) $(a, b) \sim (c, d)$ si, y sólo si $a = c$.

- (e) $(a, b) \sim (c, d)$ si, y sólo si $ab = c^2$.

22. Si \sim denota una relación de equivalencia sobre el conjunto A . Asumamos que $a, b, c, d \in A$ son tales que $a \in \bar{b}$, $c \in \bar{d}$ y $d \in \bar{b}$. Probar que $\bar{a} = \bar{c}$.

23. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Para $a, b \in A$, se define $a \sim b$ si, y sólo si ab es un cuadrado perfecto (es decir el cuadrado de un entero).

- (a) ¿Cuáles son los pares ordenados en esta relación?
- (b) Para cada $a \in A$, encontrar $\bar{a} = \{x \in A \mid x \sim a\}$.
- (c) Explicar porque \sim define una relación de equivalencia sobre A .

24. En el ejercicio anterior, sea A el conjunto de todos los números naturales y \sim como se dio. Mostrar que \sim define una relación de equivalencia sobre A .

25. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y la relación definida por $a \sim b$ si, y sólo si $\frac{a}{b}$ es una potencia de 2, es decir, $\frac{a}{b} = 2^m$ para algún entero m , positivo, negativo o cero.

- (a) ¿Cuáles son los pares ordenados en esta relación?
- (b) Para cada $a \in A$, encontrar la clase de equivalencia \bar{a} .
- (c) Explicar porque \sim define una relación de equivalencia sobre A .

26. En el ejercicio anterior, sea A el conjunto de todos los números naturales y \sim como se dio. Mostrar que \sim aun define una relación de equivalencia sobre A .

27. Sea \mathcal{R} una relación de equivalencia sobre un conjunto S y sea $\{S_1, S_2, \dots, S_t\}$ una colección de subconjuntos de S con la propiedad; $(a, b) \in \mathcal{R}$ si, y sólo si a y b son elementos del mismo conjunto S_i , para algún i . Suponga que para cada i , $S_i \not\subseteq_{j \neq i} S_j$. Probar que $\{S_1, S_2, \dots, S_t\}$ es una partición de S .

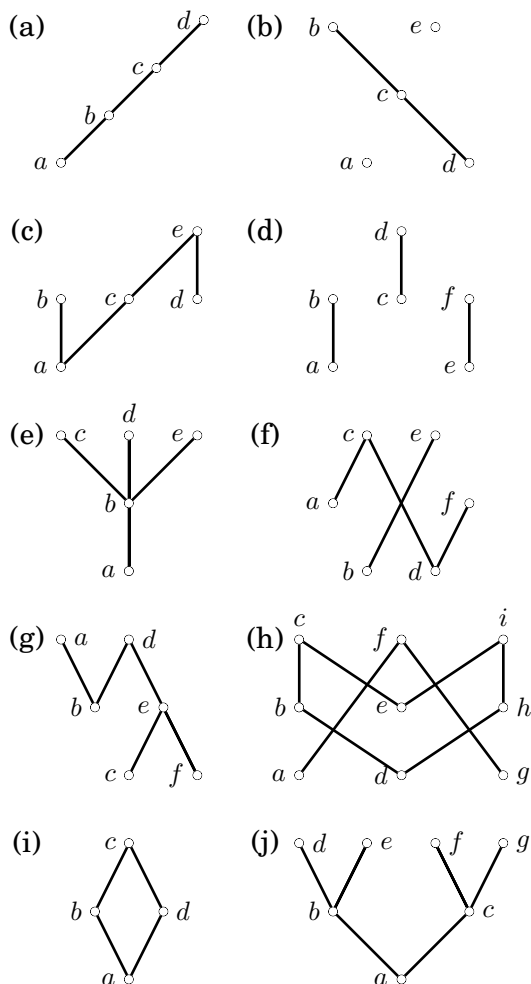
Relaciones de orden

28. Determinar si cada una de las siguientes relaciones son un orden parcial, y establecer cual de los ordenes parciales es un orden total.

- (a) Para $a, b \in \mathbb{R}$, $a \preceq b$ significa $a \geq b$.
- (b) Para $a, b \in \mathbb{R}$, $a \preceq b$ significa $a < b$.
- (c) (\mathbb{R}, \preceq) , donde $a \preceq b$ significa $a^2 < b^2$.
- (d) $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \preceq)$, donde $(a, b) \preceq (c, d)$ si, y sólo si $a \leq c$.

- (e) $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \preceq)$, donde $(a, b) \preceq (c, d)$ si, y sólo si $a \leq c$ y $b \geq d$.
- (f) (\mathcal{W}, \preceq) donde \mathcal{W} es el conjunto de todas las cadenas de letras del alfabeto (es decir “palabras” reales o imaginarias) y $w_1 \preceq w_2$ si, y sólo si w_1 tiene una longitud que no excede la longitud de w_2 (Aquí longitud quiere decir número de letras).

29. Enlista todos los pares (x, y) tales que $x \prec y$ en los ordenes parciales descritos por los siguientes diagramas de Hasse.



30. Enlista todos los elementos maximal, minimal, máximo y mínimo para cada uno de los ordenes parciales descritos en el anterior ejercicio.

31. ¿En el conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ de subconjuntos de un conjunto S , bajo que condiciones un conjunto B cubre a otro conjunto A ?

32. Trazar el diagrama de Hasse para cada uno de los ordenes parciales

- (a) $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \leq)$.
 (b) $(\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}, \{a, c\}, \{c, d\}\}, \subseteq)$.

33. Enlista todos los elementos maximal, minimal, máximo y mínimo para cada orden del anterior ejercicio.

34. Probar que cualquier conjunto parcialmente ordenado (no vacío) finito debe contener elementos maximal y minimal. ¿Esto será verdad para conjuntos parcialmente ordenados de tamaño arbitrario? Explicáte.

35. Sea $A = \mathbb{Z}^2$. Para $a = (a_1, a_2)$ y $b = (b_1, b_2)$ en A , se define $a \preceq b$ si, y sólo si $a_1 \leq b_1$ y $a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2$.

- (a) Probar que \preceq es un orden parcial sobre A . ¿Será éste orden parcial un orden total? Justifica tu respuesta con una demostración o un contraejemplo.
 (b) Generalizar el resultado de la parte (a) definiendo un orden parcial sobre el conjunto \mathbb{Z}^n de las n -tuplas de enteros.

36. Demostrar que un conjunto parcialmente ordenado tiene:

- (a) a lo más un elemento máximo.
 (b) a lo más un elemento mínimo.

37. Sea S un conjunto no-vacío, A y B elementos de conjunto potencia de S . En el conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$,

- (a) probar que $A \wedge B = A \cap B$.
 (b) probar que $A \vee B = A \cup B$.

38. Sea $U = \{1, 2, 3, 4\}$, con $A = \mathcal{P}$ y sea \sim la relación de inclusión sobre A . Hallar el ínfimo y el supremo de cada conjunto B

- (a) $\{\{1\}, \{2\}\}$
 (b) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}\}$
 (c) $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

- (d) $\{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
 (e) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$
 (f) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

39. En un conjunto parcialmente ordenado (A, \preceq) , probar que:

- (a) la máxima cota inferior de dos elementos es única, siempre que exista.
 (b) la mínima cota superior de dos elementos es única, siempre que exista.

40. Si a y b son dos elementos de un conjunto parcialmente ordenados (A, \preceq) , observa y convéncete de que los conceptos

$$\text{máx}(a, b) = \begin{cases} a & , \text{ si } b \preceq a \\ b & , \text{ si } a \preceq b \end{cases}$$

y

$$\text{mín}(a, b) = \begin{cases} a & , \text{ si } a \preceq b \\ b & , \text{ si } b \preceq a \end{cases}$$

no tienen sentido a menos que el orden sea total. Explicar.

41. Consideremos el conjunto $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ de todos los divisores positivos de 12, donde para $a, b \in D_{12}$ se define $a \preceq b$ si, y sólo si a divide a b .

- (a) Verificar que D_{12} es un conjunto parcialmente ordenado.
 (b) Trazar el diagrama de Hasse para D_{12} .
 (c) Determinar el supremo e ínfimo de los conjuntos $\{3, 4\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 6\}$, $\{4, 6\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 6, 12\}$.
 (d) ¿Será D_{12} un retículo? Explíque.

42. Mostrar que cualquier conjunto totalmente ordenado es un retículo.

43. Sea el conjunto $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ con la relación \leq (menor o igual que). Determinar si (E, \leq) es un orden total.

44. Si a y b dos elementos de un conjunto parcialmente ordenado (A, \preceq) con $a \preceq b$.

- (a) Mostrar que $a \vee b$ existe, encontrar este elemento, y explica tu respuesta.
- (b) Mostrar que $a \wedge b$ existe, encontrar este elemento, y explica tu respuesta.

45. Dar un ejemplo de conjunto

- (a) parcialmente ordenado que tenga un máximo y un mínimo pero que no sea totalmente ordenado.
- (b) totalmente ordenado que no tenga mínimo ni máximo.

46. Probar que en un conjunto totalmente ordenado, cualquier elemento maximal es un máximo,

47. Suponiendo que (A, \preceq) es un conjunto parcialmente ordenado conteniendo un elemento mínimo a . Probar que

- (a) a es minimal.
- (b) a es el único elemento minimal.

Miscelánea

48. Sean A, B y C conjuntos. Determinar cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En cada caso, proveer una demostración o exhibir un contraejemplo.

- (a) $A \cap B = A$ si, y sólo si $A \subseteq B$.
- (b) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.

49. Sean A, B, C y D conjuntos.

- (a) Dar un ejemplo mostrando que la afirmación " $A \oplus (B \setminus C) = (A \oplus B) \setminus C$ " es falsa en general.
- (b) Probar que la afirmación " $A \subseteq C, B \subseteq D$ implica $A \times B \subseteq C \times D$ " es verdadera.

50. Dar un ejemplo mostrando que la afirmación " $(A \times B) \subseteq (C \times D)$ implica que $A \subseteq C$ y $B \subseteq D$ " es falsa.

51. Sea A un conjunto.

- (a) ¿Que es lo que entiendes por el término *relación binaria sobre A* ?

- (b) ¿Suponga que A tiene diez elementos, entonces, cuántas relaciones binarias hay sobre A ?

52. Para $a, b \in \mathbb{N}$, se define $a \sim b$ si, sólo si $a \leq 2b$. Determinar si \sim es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, una relación de equivalencia o un orden parcial sobre \mathbb{N} .

53. Se define una relación \mathcal{R} sobre \mathbb{Z} por $a\mathcal{R}b$ si, y sólo si $4a + b$ es un múltiplo de 5. Mostrar que \mathcal{R} define una relación de equivalencia sobre \mathbb{Z} .

54. Se define una relación \mathcal{R} sobre \mathbb{Z} por $a\mathcal{R}b$ si $2a + 5b$ es un múltiplo de 7. Mostrar que \mathcal{R} define una relación de equivalencia sobre \mathbb{Z} .

- (a) Probar que \mathcal{R} define una relación de equivalencia.
- (b) ¿Es \mathcal{R} un orden parcial? Explicar tu respuesta brevemente.

55. Si \sim denota una relación de equivalencia sobre el conjunto A . Probar que $x \sim a \iff \bar{x} = \bar{a}$ para cualquier $x, a \in A$.

56. Si \sim denota una relación de equivalencia sobre el conjunto A . Asumiendo que $a, b, c, d \in A$ son tales que $a \in \bar{b}$, $d \notin \bar{c}$ y $d \in \bar{b}$. Probar que $\bar{a} \cap \bar{c} = \emptyset$.

57. Mostrar que (\mathbb{Z}, \subseteq) es un conjunto parcialmente ordenado.

58. Sea $A = \{1, 2, 4, 6, 8\}$, para $a, b \in A$, se define $a \preceq b$ si, y sólo si $\frac{b}{a}$ es un entero.

- (a) Probar que \preceq define un orden parcial sobre A .
- (b) Trazar el diagrama de Hasse para \preceq .
- (c) Enlista los elementos mínimo, minimal, máximo y maximal.
- (d) ¿Es (A, \preceq) totalmente ordenado? Explica tu respuesta.

59. Sea (A, \preceq) un conjunto parcialmente ordenado y $a, b \in A$. ¿Pueden tener a y b dos mínimas cotas superiores?

Introducción

1. Determina si cada una de las siguientes relaciones es una función con dominio $\{1, 2, 3, 4\}$. Explicar la respuesta.

(a) $f = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (3, 3)\}$

(b) $f = \{(1, 2), (2, 3), (4, 2)\}$

(c) $f = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$

(d) $f = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$

(e) $f = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$

2. Suponga que A y B son conjuntos no vacíos. ¿Puede $A \times B$, en algún momento, ser una función $A \rightarrow B$? Explica

3. Dar un ejemplo de función $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que

(a) sea uno-uno pero no sobre;

(b) sea sobre pero no uno-uno;

(c) no sea uno-uno ni sobre;

(d) sea ambos uno-uno y sobre .

4. Con el conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ se define $f : S \rightarrow \mathbb{Z}$ por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , \text{ si } x \text{ es par,} \\ 2x - 5 & , \text{ si } x \text{ es impar.} \end{cases}$$

Expresar f como un subconjunto de $S \times \mathbb{Z}$. ¿Será f uno-uno?

5. La adición y multiplicación de números reales son las funciones $\text{adi}, \text{mul} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde

$$\text{adi}(x, y) = x + y; \quad \text{mul}(x, y) = xy$$

(a) ¿Será adi uno-uno? ¿Será sobre?

(b) ¿Será mul uno-uno? ¿Será sobre?

Explica tu respuesta.

6. Se define $g : \mathbb{Z} \rightarrow B$ por $g(x) = |x| + 1$. Determinar si g es uno-uno o sobre en cada uno de los siguientes casos.

(a) B es el conjunto \mathbb{Z} .

(b) B es el conjunto \mathbb{N} .

7. Se define $f : A \rightarrow A$ por $f(x) = 3x + 5$. Determinar si f es uno-uno o sobre en cada uno de los siguientes casos.

(a) A es el conjunto \mathbb{Q} .

(b) A es el conjunto \mathbb{N} .

8. Se define $h : A \rightarrow A$ por $h(x) = x^2 + 2$ determinar si h es uno-uno o sobre en cada uno de los siguientes casos.

(a) A es el conjunto \mathbb{Z} .

(b) A es el conjunto \mathbb{N} .

9. Se define $g : A \rightarrow A$ por $g(x) = 3x^2 + 14x - 51$. Determinar si g es uno-uno o sobre en cada uno de los siguientes casos.

(a) A es el conjunto \mathbb{Z} .

(b) A es el conjunto \mathbb{R} .

10. Se define $f : A \rightarrow B$ por $f(x) = x^2 + 14x - 51$. Determinar si f es uno-uno o sobre en cada uno de los siguientes casos.

(a) $A = \mathbb{N}, B = \{b \in \mathbb{Z} \mid b \geq -100\}$.

(b) $A = \mathbb{Z}, B = \{b \in \mathbb{Z} \mid b \geq -100\}$.

(c) $A = \mathbb{R}, B = \{b \in \mathbb{R} \mid b \geq -100\}$.

11. Encontrar el dominio y rango de cada una de las funciones de variable real. En cada caso, determinar si la función es uno-uno o sobre

(a) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x|x|$.

(b) $\beta : (\frac{4}{3}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ con $\beta(x) = \log_2(3x - 49)$.

(c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2^{x-1} + 3$.

12. Se define la función:

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = 3x^3 + x$. Gráficar f para determinar si la función es uno-uno y/o sobre

(b) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ por $3x^3 + x$. Gráficar f para determinar si la función es uno-uno y/o sobre

13. Se define la función:

(a) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(x) = 3x^3 + x$. Gráficar g para determinar si la función es uno-uno y/o sobre.

(b) $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ por $g(x) = 3x^3 + x$. Gráficar g para determinar si la función es uno-uno y/o sobre.

(c) Repetir (b) para la función $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $g(x) = x^3 - x + 1$.

14. Determinar si cada una de las siguientes reglas de correspondencia define una función uno-uno y/o sobre. Dar una demostración o exhibir un contraejemplo para justificar su respuesta.

(a) $f(n, m) = 2n + 3m$; $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

(b) $f(n, m) = 2n + 3m$; $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.

(c) $f(n, m) = 14n + 22m$; $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

(d) $f(n, m) = 89n + 246m$; $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.

(e) $f(n, m) = n^2 + m^2 + 1$; $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$.

15. En cada uno de los siguientes casos, explicar por que la función dada no es uno-uno. Entonces restringir el dominio de la función, tanto como sea posible, hasta que la función sea uno-uno.

(a) $f = \{(a, \alpha), (b, \beta), (c, \gamma), (d, \alpha)\}$.

(b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -4x^2 + 12x - 9$.

(c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin x$.

16. Sea S un conjunto conteniendo el número 5. Sea $A = \{f : S \rightarrow S\}$ el conjunto de todas las funciones $S \rightarrow S$. Para $f, g \in A$, se define $f \sim g$ si $f(5) = g(5)$.

(a) Probar que \sim define una relación de equivalencia sobre A .

(b) Encontrar las clases de equivalencia de $f = \{(5, a), (a, b), (b, b)\}$ en el caso de que $S = \{5, a, b\}$.

17. Sean A un conjunto y $f : A \rightarrow A$ una función. Para $x, y \in A$, se define $x \sim y$ si $f(x) = f(y)$.

(a) Probar que \sim define una relación de equivalencia sobre A .

(b) Para $A = \mathbb{R}$ y $f(x) = \lfloor x \rfloor$, encontrar las clases de equivalencia de $0, \frac{7}{5}, -\frac{3}{4}$.

(c) Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1), (4, 5), (5, 6), (6, 1)\}$. Encontrar todas las clases de equivalencia.

18. Sean $X = \{a, b\}$ y $Y = \{1, 2, 3\}$

(a) Enlistar todas las funciones de X en Y , y de Y en X .

(b) Enlistar todas las funciones uno-uno de X en Y , y de Y en X .

(c) Enlistar todas las funciones sobre de X en Y , y de Y en X .

19. Sean $X = \{a, b, c\}$ y $Y = \{1, 2, 3, 4\}$

(a) ¿Cuántas funciones uno-uno de X en Y , y de Y en X habrá? En cada caso enlistar todas las funciones.

(b) ¿Cuántas funciones sobre de X en Y , y de Y en X habrá? En cada caso enlistar todas las funciones.

20. Dados los conjuntos X y Y , con $|X| = m$ y $|Y| = n$, conjetura una formula general para el número de funciones $f : X \rightarrow Y$.

21. Suponga que A y B son conjuntos, A contiene n elementos y B contiene m elementos.

(a) Si $n > m$, probar que no hay funciones $f : A \rightarrow B$ que puedan ser uno-uno.

- (b) Si $m > n$, probar que no hay funciones $f : A \rightarrow B$ que puedan ser sobre.

22. Suponga que A y B son conjuntos, que contienen el mismo número finito de elementos y que $f : A \rightarrow B$ es una función.

- (a) Probar que f es uno-uno si, y sólo si f es sobre.
- (b) Dar un ejemplo de una función uno-uno $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que no sea sobre. ¿Esto contradice el inciso (a)? Explica.
- (c) Dar un ejemplo de una función sobre $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que no sea uno-uno. ¿Esto contradice el inciso (a)? Explica.

Inversas y composición

23. Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, encontrar la inversa de cada una de las siguientes funciones $f : A \rightarrow A$.

- (a) $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 1)\}$
- (b) $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 1), (5, 5)\}$
- (c) $f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 5)\}$

24. Gráficar cada una de las siguientes funciones y encontrar sus inversas. Además, especificar el dominio y el rango de cada inversa.

- (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $f(x) = 3x + 5$.
- (b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $f(x) = x^3 - 2$.
- (c) $\beta : (\frac{4}{3}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ con $\beta(x) = \log_2(3x - 4)$.
- (d) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $g(x) = x|x|$.

25. Mostrar que cada una de las siguientes funciones $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es uno-uno. Encontrar el rango de cada función y una adecuada inversa.

- (a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4\}$, $f(x) = 1 + \frac{1}{x-4}$
- (b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$, $f(x) = 5 - \frac{1}{1+x}$
- (c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{1}{2}\}$, $f(x) = \frac{3x}{2x+1}$

- (d) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3\}$, $f(x) = \frac{x-3}{x+3}$

26. Se define $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ por

$$f(x) = \begin{cases} 2|x| & , \text{ si } x < 0 \\ 2x + 1 & , \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

- (a) Mostrar que f tiene una inversa.
- (b) Encontrar $f^{-1}(2586)$.

27. Si A es el conjunto de toda la gente casada, madre : $A \rightarrow A$ es la función que asigna a cada persona casada su madre, padre y cónyuge tienen similar explicación. Dar una coherente interpretación de cada una de las siguientes funciones:

- (a) madre \circ madre
- (b) madre \circ padre
- (c) padre \circ madre
- (d) madre \circ cónyuge
- (e) cónyuge \circ madre
- (f) padre \circ cónyuge
- (g) cónyuge \circ cónyuge
- (h) (cónyuge \circ padre) \circ madre
- (i) cónyuge \circ (padre \circ madre)

28. Sean los conjuntos $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $T = \{1, 2, 3, 8, 9\}$. Además se definen las funciones $f : S \rightarrow T$ y $g : S \rightarrow S$ por

$$f = \{(1, 8), (3, 9), (4, 3), (2, 1), (5, 2)\},$$

$$g = \{(1, 2), (3, 1), (2, 2), (4, 3), (5, 2)\}.$$

- (a) Encontrar $f \circ g$ o explicar por que $f \circ g$ no está definida. Hacer lo mismo para $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$.
- (b) ¿Cuál de las funciones f , g es uno-uno? ¿Cuál es sobre? Explicar.
- (c) Encontrar f^{-1} si existe. Si no es así explicar porque.
- (d) Encontrar g^{-1} si existe. Si no es así explicar porque.

29. Sean $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = x + 2, \quad g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad h(x) = 3$$

Calcular $(g \circ f)(x)$, $(f \circ g)(x)$, $(h \circ g \circ f)(x)$, $(g \circ h \circ f)(x)$, $(g \circ f^{-1} \circ f)(x)$, y $(f^{-1} \circ g \circ f)(x)$.

30. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función, c un número real, y se define $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(x) = x - c$. Explicar, como están relacionados

(a) los gráficos de f y $g \circ f$.

(b) los gráficos de f y $f \circ g$.

31. Sea la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = -|x|$. ¿Cómo están relacionados

(a) los gráficos de f y $g \circ f$?

(b) los gráficos de f y $f \circ g$?

32. Sean $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y las funciones $f, g, h : S \rightarrow S$ definidas por

$$\begin{aligned} f &= \{(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 5), (5, 3)\}, \\ g &= \{(1, 3), (2, 5), (3, 1), (4, 2), (5, 4)\}, \\ h &= \{(1, 2), (2, 2), (3, 4), (4, 3), (5, 1)\}. \end{aligned}$$

(a) Encontrar $f \circ g$ y $g \circ f$. ¿Estas funciones son iguales?

(b) Explicar porque f y g tienen inversa pero h no. Encontrar f^{-1} y g^{-1} .

(c) Demostrar que $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} \neq f^{-1} \circ g^{-1}$.

33. Sean los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 2\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 1\}$, se definen $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow A$ por

$$f(x) = \frac{x}{x-2}, \quad g(x) = \frac{2x}{x-1}$$

(a) Encontrar $(f \circ g)(x)$.

(b) ¿Son f y g inversas? Explicar.

34. Sean las dos funciones $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$.

(a) Si $g \circ f$ es uno-uno y f es sobre, mostrar que g es uno-uno.

(b) Si $g \circ f$ es sobre y g es uno-uno sobre, mostrar que f es sobre.

35. Demostrar que

(a) la composición de funciones uno-uno es otra función uno-uno.

(b) el recíproco de (a) no es verdad, por medio de un ejemplo.

(c) si $g \circ f$ es uno-uno, entonces f debe ser uno-uno.

(d) la composición de funciones sobre es otra función sobre.

(e) el recíproco de (d) no es verdad, por medio de un ejemplo.

(f) si $g \circ f$ es sobre, entonces f debe ser sobre.

36. ¿Será la composición de dos funciones biyectivas otra función biyectiva? Explique su respuesta.

37. Se define $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ por

$$f(n) = \begin{cases} n - 2 & , \text{ si } n \geq 1000, \\ f(f(n + 4)) & , \text{ si } n < 1000. \end{cases}$$

(a) Encontrar el valor de $f(1000)$, $f(999)$, $f(998)$, $f(997)$ y $f(996)$.

(b) Conjetura una formula para $f(n)$.

(c) Conjetura el rango de f .

Cardinalidad

38. Una gran multitud cubre el campo del estadio para un concierto de rock. Sugiere una sencilla manera para determinar si el tamaño de la multitud excede la cantidad de asientos en el estadio.

39. A primera vista, los cuadrados perfectos $-1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$ parece ser un subconjunto de \mathbb{N} muy disperso. Sin embargo, Galileo afirmó que hay tantos cuadrados perfectos como numeros naturales.

¿Cuál pudo ser el razonamiento que lo llevo a esta afirmación?

40. Encontrar la correspondencia uno-uno entre los siguientes pares de conjuntos:

(a) $\{x, y, \{a, b, c\}\}$ y $\{14, -3, t\}$.

(b) $2\mathbb{Z}$ y $17\mathbb{Z}$.

(c) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $\{a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{N}\}$.

(d) \mathbb{N} y $\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{N}, n = 1, 2\}$.

41. Suponga que $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ es una función sobre y uno-uno

(a) Probar que la función $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ definida por $g(m, n) = (m, f(n))$ es uno-uno y sobre.

(b) Encontrar una correspondencia uno-uno entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$.

42. Verdadero o falso. Si $A \subsetneq B$, entonces $|A|$ y $|B|$ no tienen la misma cardinalidad.

43. Suponga que S es un conjunto y que para todo $A, B \in \mathcal{P}(S)$, definimos $A \preceq B$ como $|A| \leq |B|$. ¿Es esta relación un orden parcial sobre $\mathcal{P}(S)$? Explica

44. Mostrar que para cualesquiera conjuntos A y B , $|A \times B| = |B \times A|$.

45. Sean los conjuntos X , Y y Z .

(a) Verdadero o falso: $(X \times Y) \times Z = X \times (Y \times Z)$. Prover una demostración o dar un contraejemplo.

(b) Encontrar una correspondencia uno-uno $(X \times Y) \times Z \rightarrow X \times (Y \times Z)$.

46. Probar que la función definida por $f(x) = 3^x$ establece una correspondencia uno-uno entre los números reales \mathbb{R} y los números reales positivos \mathbb{R}^+ . ¿Qué puedes concluir sobre la cardinalidad?

47. Probar que \mathbb{R} y el intervalo (a, b) (con $a < b$) tienen la misma cardinalidad.

48. Probar que cada uno de los siguientes conjuntos es numerable, enlistando sus elementos en una simétrica y definitiva manera. (Muestra al menos los primeros doce términos de tus listas.)

(a) Todas las potencias de 2 con exponente entero.

(b) Todos los números naturales que dejan un resto igual a 1 al ser divididos por 3.

(c) $\mathbb{N} \times \{1, 2, 3\}$.

(d) los números racionales $\frac{m}{n}$ positivos con n impar.

(e) $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$.

(f) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

49. Determinar, con justificación, cuales de los siguientes conjuntos son finitos, infinitos numerables, o no-numerables:

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$

(b) $\{x \in \mathbb{Q} \mid 1 < x < 2\}$

(c) $\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}, m < 100, 5 < n < 105\}$

(d) $\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, m < 100, 5 < n < 105\}$

(e) $\{a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{N}\}$

(f) $\{(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid a + b = 1\}$

(g) $\{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid b = \sqrt{1 - a^2}\}$

50. Si S_1 y S_2 son las esferas de radio 1 y 100 respectivamente. Probar que los puntos sobre la superficie de S_1 y los puntos de la superficie de S_2 constituyen conjuntos con la misma cardinalidad.

51. Sean S un conjunto infinito, y x un elemento que no esta en S . Probar que S y $S \cup \{x\}$ son conjuntos con la misma cardinalidad.

52. Suponga que A es un conjunto finito, B es un conjunto infinito-numerable y que $A \cap B = \emptyset$. Mostrar que $A \cup B$ es infinito-numerable.

53. Si S es el conjunto de todos los números reales en el intervalo $(0, 1)$ cuyas expansiones decimales muestren sólo ceros y unos. Probar que S es no-numerable.

Algoritmo de la división

1. Encontrar los enteros q y r , con $0 \leq r < |b|$, tal que $a = bq + r$ en cada uno de los siguientes casos

(a) $a = 12\,345$; $b = -39$.

(b) $a = -102\,497$; $b = -977$.

(c) $a = 98\,764$; $b = 4\,789$.

(d) $a = -81\,538\,416\,000$; $b = 38\,754$.

2. Escoge un número natural $n > 1$ y define $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tomando $f(a)$ igual al cociente resultante de dividir a por n ; es decir $f(a) = q$ donde $a = nq + r$ con $0 \leq r < n$.

(a) Encontrar el dominio y el rango de f .

(b) ¿ f será uno-uno?

(c) ¿ f será sobre?

Explica tus respuestas.

3. Supón que $n > 1$ es un número natural y $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ es la función que a cada $a \in \mathbb{Z}$ le asigna el residuo resultante de dividir a por n ; es decir, que si $a = nq + r$ con $0 \leq r < n$, entonces $f(a) = r$.

(a) Encontrar el dominio y el rango de f .

(b) ¿Será f uno-uno?

(c) ¿ f será sobre?

Explica tus respuestas.

4. Usar el algoritmo de la división para probar que cada entero impar es, o de la forma $4k + 1$ o bien es de la forma $4k + 3$ para algún entero k .

5. Probar que el cuadrado de cualquier entero a es, o de la forma $3k$ o bien de la forma $3k + 1$ para algún entero k .

6. Probar que para cada entero impar a , el número a^2 es de la forma $8k + 1$ para algún entero k .

7. Demostrar que el cubo de cualquier entero tiene que ser exactamente de una de las formas: $9k$ o $9k + 1$ o $9k + 8$ para algún entero k .

8. El resto de dividir $c^n - 1$ por $c^m - 1$ es $c^r - 1$, donde r es el resto de dividir n por m .

Máximo común divisor

9. Ya vimos que $(\mathbb{N}, |)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

(a) ¿Estará totalmente ordenado?

(b) ¿ $(\mathbb{N}, |)$ tendrá un máximo?

(c) ¿ $(\mathbb{N}, |)$ tendrá un mínimo?

10. Sea el orden parcial $(\{2, 4, 6, 8\}, |)$

(a) Explica porque en este orden cada par de elementos tiene una máxima cota inferior.

(b) ¿Cada par de elementos tendrá mínima cota superior?

(c) ¿Este orden parcial será un retículo?

11. Traza el diagrama de Hasse para cada uno de los siguientes ordenes parciales

(a) $(\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}, |)$

(b) $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, |)$

(c) Enlista todos los elementos minimal, mínimo, maximal y máximo para los ordenes parciales de los incisos (a) y (b).

12. Sea n un número natural. Dados los n enteros consecutivos,

$$a, a + 1, a + 2, \dots, a + n - 1,$$

mostrar que uno de ellos es divisible por n .

13. Probar que $n^2 - 2$ (n un entero) no es divisible por 4.

14. Dados los enteros a y x , con $a > 1$, $a|(11x + 3)$ y $a|(55x + 52)$, encontrar a .

15. Suponga que a y b son enteros con el mismo residuo por ser divididos por el mismo número natural n . Probar que $n|(a - b)$.

16. ¿Verdadero o falso? En cada caso, justifica tu respuesta con una demostración o un contraejemplo (todas las variables representan enteros).

(a) Si $a|b$ y $b|c$, entonces $a|c$.

(b) Si $a|b$ y $c|b$, entonces $ac|b$.

(c) Si $a|b$ y $a|c$, entonces $a|bc$.

(d) Si $a|b$ y $c|d$, entonces $ac|bd$.

(e) Si $a|b$ y $c|\frac{b}{a}$, entonces $c|b$ y $a|\frac{b}{c}$.

17. Suponga que los enteros a y b son primos relativos y que c es un entero tal que $a|c$ y $b|c$. Probar que $ab|c$.

18. En cada uno de los siguientes casos, encontrar el máximo común divisor de a y b , y expresarlo en la forma $ma + nb$ para apropiados enteros m y n .

(a) $a = 93$, $b = 119$.

(b) $a = -93$, $b = 119$.

(c) $a = -93$, $b = -119$.

(d) $a = 1575$, $b = 231$.

(e) $a = 1575$, $b = -231$.

(f) $a = -1575$, $b = -231$.

(g) $a = -3719$, $b = 8416$.

(h) $a = 12345$, $b = 54321$.

19. ¿Cuales de los enteros del ejercicio anterior son primos relativos?

20. Si los enteros a y b son primos relativos, probar que $\text{mcd}(a + b, a - b) = 1$ o 2 .

21. Probar que los enteros a y b pueden tener a lo mas un máximo común divisor.

22. Probar que para enteros a y b , se tiene $\text{mcd}(a, a + b) = \text{mcd}(a, b)$.

23. Encontrar un par de enteros x , y tales que

(a) $17369x + 5472y = 4$

(b) $154x + 260y = 4$

24. Mostrar que no existen enteros x , y tales que

(a) $154x + 260y = 3$

(b) $196x + 260y = 14$

25. Dados los enteros d , x y y

(a) Suponga que existen enteros m y n tales que $d = mx + ny$. Probar que $\text{mcd}(x, y)|d$.

(b) ¿Será verdad la implicación recíproca de (a)? ¿Si $\text{mcd}(x, y)|d$ es necesario que existan enteros m y n tales que $d = mx + ny$?

26. Si k es un número natural, probar que $\text{mcd}(3k + 2, 5k + 3) = 1$.

27. Para a, b, c son números naturales, probar que $\text{mcd}(ac, bc) = c\text{mcd}(a, b)$.

28. Si $a \in \mathbb{N}$, probar que

$$\text{mcd}(a, a + 2) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } a \text{ es impar} \\ 2 & , \text{ si } a \text{ es par} \end{cases}$$

29. Probar que $\text{mcd}(n, n + 1) = 1$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Encontrar enteros x y y tales que $nx + (n + 1)y = 1$.

Números primos

30. Determinar si los siguientes enteros son primos.

(a) 157

(d) 1001

(b) 9831

(e) 55551111

(c) 9833

(f) $2^{216090} - 1$

31. ¿Existirá un número $r < \sqrt{n}$ tal que, si n no es primo, entonces n tiene un factor primo $p \geq r$?

32. Suponga que p es el más pequeño factor primo de un entero n y $p > \sqrt{n/p}$. Probar que n/p es primo.

33. Expresar 16773121 como un producto de primos, sabiendo que 433 es el más pequeño factor primo.

34. Encontrar la descomposición prima de cada uno de los siguientes números naturales.

- | | |
|----------|----------------------|
| (a) 856 | (d) 9970 |
| (b) 2323 | (e) $(2^8 - 1)^{20}$ |
| (c) 6647 | (f) 55551111 |

35. Emplear el Teorema Fundamental de la Aritmética para probar que: para ningún número natural n el entero 14^n termina en 0.

36. Si $A = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid 3 \nmid n\}$

- (a) Enlistar cinco diferentes elementos de A con al menos un entero.
- (b) Probar que A es cerrado bajo la adición.
- (c) Probar que A es cerrado bajo la multiplicación.

37. Sea A cualquier subconjunto de $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y, para $a, b \in A$ se define $a \sim b$ si, y sólo si ab es un cuadrado perfecto. Mostrar que \sim define una relación de equivalencia sobre A .

38. ¿Verdadero o falso? Explica tus respuestas.

- (a) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ existe un primo p tal que $p|n$.
- (b) Existe un primo p tal que $p|n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

39. Define $f : \mathbb{N} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{N}$ colocando $f(n)$ igual al mayor divisor primo de n .

- (a) Encontrar el rango de f .
- (b) ¿Determinar si f es uno-uno?
- (c) ¿Será f una función sobre?

(d) ¿Porqué no podemos expresar f como una función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$?

40. Determinar cuales de las siguientes funciones $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es uno-uno. Explica tus respuestas.

- (a) $f(n, m) = 2^m 6^n$
- (b) $f(n, m) = 36^m 6^n$

41. Sean p y q primos diferentes y n un número natural. ¿Si $p|n$ y $q|n$, puede pq dividir a n ?

42. Dados a y b diferentes enteros positivos, mostrar que existe un entero $n \leq 0$ tal que $a + n$ y $b + n$ son primos relativos.

43. Para las siguientes cuestiones, explica tu respuesta.

- (a) ¿Es $2^{15} - 1$ primo?
- (b) ¿Es $2^{91} - 1$ primo?
- (c) Mostrar que si $2^{91} - 1$ es primo, entonces es necesario que n sea primo.
- (d) ¿El recíproco de (c) será verdad?

44. Mostrar que

- (a) $2^6 + 1$ no es primo.
- (b) $2^{20} + 1$ no es primo.
- (c) si $2^n + 1$ es primo, entonces necesariamente n deberá ser una potencia de 2.
- (d) la suma de dos números primos impares nunca es primo.
- (e) el inciso (d) es falso si se borra la palabra impar.

45. Probar que la suma de dos primos consecutivos nunca es el doble de un primo.

46. Si n es un entero impar, mostrar que $x^2 - y^2 = 2n$ no tiene soluciones enteras.

47. Verdadero o falso: $\{n \in \mathbb{N} : n > 2 \text{ y } a^n + b^n = c^n \text{ para algún } a, b, c \in \mathbb{N}\} = \emptyset$?

48. Suponga que a, b, c son enteros tales que, cada dos son primos relativos. Probar que $\text{mcd}(ab, bc, ac) = 1$.

49. Sean a, b, c números enteros, cada uno primo relativo a otro entero n . Probar que el producto abc es primo relativo a n .

50. Para el número primo p se sabe que, $\text{mcd}(a, p^2) = p$ y $\text{mcd}(b, p^3) = p^2$, encontrar

(a) $\text{mcd}(ab, p^4)$

(b) $\text{mcd}(a + b, p^4)$

51. Si p_1, p_2, \dots, p_{n+1} denotan los primeros $n + 1$ primos (en orden). Probar que cada número entre $p_1 p_2 \cdots p_n + 2$ y $p_1 p_2 \cdots p_n + p_{n+1} - 1$ (inclusive) es compuesto. ¿Cómo muestra esto, que existen lagunas de longitud arbitraria en la sucesión de primos?

52. Si el máximo común divisor de los enteros a y b es el primo p , ¿cuáles son los posibles valores de

(a) $\text{mcd}(a^2, b)?$

(c) $\text{mcd}(a^3, b)?$

(b) $\text{mcd}(a^2, b^2)?$

(d) $\text{mcd}(a^2, b^3)?$

53. Sean a y b números naturales con $\text{mcd}(a, b) = 1$ y ab cuadrado perfecto; Probar que a y b también son cuadrados perfectos.

54. Si a y b son números naturales

(a) Encontrar la descomposición prima de $\text{mcm}(a, b)$ en términos de la descomposición prima de a y b y probar tu respuesta.

(b) Usar el inciso (a) para demostrar que $\text{mcd}(a, b)\text{mcm}(a, b) = ab$.

55. Probar que un entero que es un cuadrado (a^2 para algún a) y un cubo (b^3 para algún b) es también una sexta potencia.

56. Sean a y b enteros y p un primo. Responder verdadero o falso y explicar la respuesta.

(a) Si $p|a$ entonces $p|a$.

(b) Si $p|a$ y $p|(a^2 + b^2)$ entonces $p|b$.

(c) Si $p|(a^9 + a^{17})$ entonces $p|a$.

57. Demostrar que existe una infinidad de tripletas de enteros a, b, c que satisfacen la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$.

58. Probar que

(a) Cada entero positivo impar de la forma $3n + 2$, $n \in \mathbb{N}$, tiene un factor primo de la misma forma. ¿Que pasaría si se omite la palabra impar?

(b) Repetir (a) para enteros positivos de la forma $4n + 3$.

(c) Repetir (a) para enteros positivos de la forma $6n + 5$.

(d) Existe una infinidad de primos de la forma $6n + 5$.

59. Suponga que p y $p + 2$ son primos gemelos y $p > 3$. Probar que $6|(p + 1)$.

Inducción matemática

60. Escribir cada una de las siguientes sumas sin el símbolo \sum , y calcular su valor.

(a) $\sum_{i=1}^5 i^2$

(e) $\sum_{j=0}^2 3^{j+2}$

(b) $\sum_{i=1}^4 2^i$

(f) $\sum_{k=-1}^4 (2k^2 - k)$

(c) $\sum_{i=1}^6 (2^{i-1} - 2^i)$

(g) $\sum_{k=-1}^4 (k^2 - 1)$

(d) $\sum_{t=1}^1 \sin \pi t$

(h) $\sum_{k=0}^n (-1)^k$

61. Enlista los elementos de conjuntos siguientes:

(a) $\{\sum_{i=0}^n (-1)^i \mid n = 0, 1, 2, 3\}$

(b) $\{\sum_{i=1}^n 2^i \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 5\}$

62. Usar la inducción matemática para probar la verdad de cada una de las siguientes afirmaciones, para todo $n \geq 1$.

(a) $n^2 + n$ es divisible por 2.

(b) $n^3 + 2n$ es divisible por 3.

(c) $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$ es divisible por 9.

(d) $5^n - 1$ es divisible por 4.

(e) $8^n - 3^n$ es divisible por 5.

(f) $n^2 + 2$ es divisible por 4.

(g) $5^{2n} - 2^{5n}$ es divisible por 7.

(h) $10^{n+1} + 10^n + 1$ es divisible por 3.

- (i) $a^n - b^n$ es divisible por $a - b$, para cualesquiera enteros a, b con $a - b \neq 0$.

63. Probar por inducción matemática, que para cualquier número natural n :

- (a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,
 (b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$,
 (c) $(1+2+3+\cdots+n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$.

64. Por medio de la inducción matemática establecer la veracidad de cada una de las siguientes afirmaciones, para $n \geq 1$.

- (a) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$
 (b) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$
 (c) $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.
 (d) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.
 (e) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

65. Reescribir cada una de las sumas del ejercicio anterior usando la notación \sum .

66. Demostrar las siguientes formulas por inducción matemática.

- (a) $\sum_{i=1}^n (i+1)2^i = n2^{n+1}$
 (b) $\sum_{i=1}^n \frac{i^2}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$
 (c) $\sum_{i=1}^n (2i-1)(2i) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{3}$

67. Establecer las siguientes inecuaciones por inducción matemática.

- (a) $2^n > n^2$, para $n \geq 5$.
 (b) $(1 + \frac{1}{2})^n \geq 1 + \frac{n}{2}$, para $n \in \mathbb{N}$.

- (c) Para cualquier $p \in \mathbb{R}$, $p > -1$, se tiene $(1+p)^n \geq 1 + np$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

- (d) Para cualquier entero $n \geq 2$ se tiene $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$.

- (e) $\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{n}$ para $n \geq 2$.

68. Encontrar el error en la siguiente “demostración” por inducción matemática de

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(2n+1)^2}{8}$$

para todo número natural n .

Si $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{(2k+1)^2}{8}$ entonces

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) &= \\ &= (1 + 2 + 3 + \cdots + k) + (k+1) \\ &= \frac{(2k+1)^2}{8} + (k+1) \\ &= \frac{4k^2 + 4k + 1 + 8k + 8}{8} \\ &= \frac{4k^2 + 12k + 9}{8} \\ &= \frac{(2k+3)^2}{8} \\ &= \frac{[2(k+1) + 1]^2}{8} \end{aligned}$$

y así, que sea verdad para k implica que sea verdad para $k+1$.

69. Es tentador el pensar que si una afirmación que involucra un número natural n es verdad para cualquier valor consecutivo de n , entonces debe ser verdad para todo n . En relación a esto, el siguiente ejemplo debido a Euler es ilustrativo.

Sea $f(n) = n^2 + n + 41$.

- (a) Verifique, que $f(n)$ es primo para $n = 1, 2, 3, \dots, 39$ y aun así $f(40)$ no es primo.
 (b) Mostrar que para cualquier n de la forma $n = k^2 + 40$, $f(n)$ no es primo.

70. Suponga que cualquier conjunto finito no vacío de números naturales tiene un elemento mínimo. Probar que cualquier conjunto no vacío de números naturales tiene un elemento mínimo.

71. Probar que un conjunto con n elementos, $n \geq 0$, contiene 2^n subconjuntos.

72. Demostrar que

- (a) para cualquier entero $n \geq 1$, cualquier conjunto de n números reales positivos tiene un elemento mínimo.
- (b) el resultado de (a) no es verdad para conjuntos infinitos de números reales positivos en general, pero es verdad para algunos conjuntos infinitos.
- (c) ¿Cuál es el nombre del principio que afirma, que cualquier conjunto no vacío de números naturales tiene un elemento mínimo?

73. Sean $n \geq 1$ y A, B_1, B_2, \dots, B_n conjuntos, probar que para cualquier $n \geq 1$

$$(a) \quad A \cup \left(\bigcap_{i=1}^n B_i \right) = \bigcap_{i=1}^n (A \cup B_i).$$

$$(b) \quad A \cap \left(\bigcup_{i=1}^n B_i \right) = \bigcup_{i=1}^n (A \cap B_i).$$

74. La diferencia simétrica de $n \geq 3$ conjuntos A_1, \dots, A_n puede ser definida inductivamente como sigue:

$$A_1 \oplus \dots \oplus A_n = (A_1 \oplus \dots \oplus A_{n-1}) \oplus A_n.$$

Probar que para cualquier $n \geq 2$, $A_1 \oplus \dots \oplus A_n$ consiste de los elementos que pertenecen a un número impar de los conjuntos A_1, \dots, A_n .

75. Para $n \geq 3$, el máximo común divisor de n enteros no nulos a_1, a_2, \dots, a_n puede ser definido inductivamente como

$$\text{mcd}(a_1, \dots, a_n) = \text{mcd}(a_1, \text{mcd}(a_2, \dots, a_n)).$$

Probar que $\text{mcd}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ es una combinación lineal entera de a_1, a_2, \dots, a_n para todo $n \geq 2$; es decir, que hay que probar que existen enteros s_1, s_2, \dots, s_n tales que $\text{mcd}(a_1, a_2, \dots, a_n) = s_1 a_1 + s_2 a_2 + \dots + s_n a_n$.

76. Suponga que n, m_1, m_2, \dots, m_t son números naturales, y que los m_i son primos

relativos por pares. Suponga además que cada m_i divide a n . Probar que el producto $m_1 m_2 \dots m_t$ divide a n .

Congruencias

77. Las siguientes cuestiones hacen referencia a congruencias (mód 7)

- (a) Enlista tres enteros positivos y cuatro enteros negativos de $\overline{5}$.
- (b) Enlista cuatro enteros positivos y tres enteros negativos de $\overline{-3}$.
- (c) Determinar la forma general de un entero en $\overline{5}$.
- (d) ¿Cuál es la forma general de un entero en $\overline{-3}$?

78. Estas cuestiones hacen referencia a congruencias (mód 13)

- (a) Enlista cinco enteros positivos y cuatro enteros negativos de $\overline{3}$.
- (b) Enlista cuatro enteros positivos y cinco enteros negativos de $\overline{-2}$.
- (c) Determinar la forma general de un entero en $\overline{3}$.
- (d) ¿Cuál es la forma general de un entero en $\overline{-2}$?

79. Encontrar a (mód n) en cada uno de los siguientes casos.

- (a) $a = 1\,286, n = 39$
- (b) $a = 43\,197, n = 333$
- (c) $a = -545\,608, n = 51$
- (d) $a = -125\,617, n = 315$
- (e) $a = 11\,111\,111\,111, n = 1\,111$

80. ¿Verdadero o falso? Dar una razón para cada respuesta.

- (a) $\overline{2} = \overline{18}$ (mód 10)
- (b) $7 \in \overline{-13}$ (mód 5)
- (c) $-8 = 44$ (mód 13)
- (d) $\overline{17} \cap \overline{423} = \emptyset$ (mód 29)
- (e) $-18 \notin \overline{400}$ (mód 19)

81. Realiza cada uno de los cálculos indicados, reduciendo la respuesta a (mód n)

(a) $21\,758\,623 + 17\,123\,055, n = 6$

(b) $21\,758\,623 \times 17\,123\,055, n = 6$

(c) $(17\,123)^{50}, n = 6$

(d) $10^4, 10^8, 10^{12}, 10^{20}, 10^{24}, n = 7$

(e) $2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{10}, n = 11$

(f) $4, 4^2, 4^3, \dots, 4^{10}, n = 11$

82. Encontrar $a + b$ (mód n), ab (mód n), $(a + b)^2$ (mód n), en cada uno de los siguientes casos:

(a) $a = 4003, b = -127, n = 85$

(b) $a = 17\,891, b = 14\,485, n = 143$

(c) $a = 22\,222, b = 33\,333, n = 55$

(d) $a = -389\,221, b = 123\,450, n = 10\,000$

83. Si $a \in \mathbb{Z}$ y $a \not\equiv 0$ (mód 7), mostrar que $a \equiv 5^k$ (mód 7) para algún entero k .

84. Dados los enteros a, b, c, d, x , y el primo p , suponga que $(ax + b)(cx + d) \equiv 0$ (mód p). Probar que $ax + b \equiv 0$ (mód p) o $cx + d \equiv 0$ (mód p).

85. Encontrar todos los enteros $x, 0 \leq x < n$, que satisfacen cada una de las siguientes congruencias. Sí tal x no existe explicar el porque.

(a) $x^2 \equiv 4$ (mód 13)

(b) $(2x + 1)(3x + 4) \equiv 0$ (mód 17)

(c) $3x^2 + 14x - 5 \equiv 0$ (mód 57)

(d) $x^2 \equiv 2$ (mód 6)

(e) $4x^2 + 3x + 7 \equiv 0$ (mód 5)

86. Encontrar todos los enteros $x, y, 0 \leq x < n$, que satisfacen cada una de los siguientes pares de congruencias. Sí tales x, y no existe explicar el porque no.

(a) $\begin{aligned} 2x + y &\equiv 1 \quad (\text{mód } 6) \\ x + 3y &\equiv 3 \quad (\text{mód } 6) \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} x + 5y &\equiv 3 \quad (\text{mód } 9) \\ 4x + 5y &\equiv 1 \quad (\text{mód } 9) \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} x + 5y &\equiv 3 \quad (\text{mód } 8) \\ 4x + 5y &\equiv 1 \quad (\text{mód } 8) \end{aligned}$

(d) $\begin{aligned} 7x + 2y &\equiv 3 \quad (\text{mód } 15) \\ 9x + 4y &\equiv 6 \quad (\text{mód } 15) \end{aligned}$

87. Si $a \equiv b$ (mód n), mostrar que $\text{mcd}(a, n) = \text{mcd}(b, n)$.

88. Sean a y $n > 1$ números naturales, r y s enteros. Suponga que $r \equiv s$ (mód n). ¿Verdadero o falso? Explicar.

(a) $a^r \equiv a^s$ (mód n)

(b) $r^a \equiv s^a$ (mód n)

89. Suponga que a y b son enteros, $n > 1$ número natural y $a \equiv b$ (mód n). ¿Verdadero o falso? En cada caso, probar o dar un contraejemplo.

(a) $a^3 \equiv b^2$ (mód n)

(b) $a^2 \equiv b^2$ (mód n)

(c) $a^2 \equiv b^3$ (mód n)

(d) $a^2 \equiv b^2$ (mód n^2)

90. Encontrar todos los enteros $x, 0 \leq x < n$, que satisfacen cada una de las siguientes congruencias

(a) $x^2 \equiv 1$ (mód n), $n = 5$

(b) $x^2 \equiv 1$ (mód n), $n = 7$

(c) $x^2 \equiv 1$ (mód n), $n = 13$

91. Suponga que $p \neq 2$ es un primo. Encontrar todos los enteros $x, 0 \leq x < p$ tales que $x^2 \equiv 1$ (mód p).

92. Encontrar todos los enteros $x, 0 \leq x < n$, que satisfacen cada una de las siguientes congruencias

(a) $x^2 \equiv 1$ (mód n), $n = 5^2$

(b) $x^2 \equiv 1$ (mód n), $n = 5^3$

(c) $x^2 \equiv 1$ (mód n), $n = 5^5$

(d) $x^2 \equiv 1$ (mód n), $n = 7^2$

93. En cada uno de los siguientes incisos, p es un primo.

- (a) Encontrar 18^{8970} , 18^{8971} y 18^{8972} en (mód 8971).
- (b) Encontrar 53^{20592} , 53^{20593} y 53^{20594} en (mód 20593).
- (c) Encontrar 3^{508} , 3^{509} y 3^{512} en (mód 509).
- (d) Encontrar 2^{3948} y 2^{3941} en (mód 3943).

94. Mostrar que $x^{97} - x + 1 \equiv 0 \pmod{97}$ no tiene soluciones.

Aritmética en \mathbb{Z}_n

95. Construir las tablas de adición y multiplicación para

- (a) \mathbb{Z}_2 (c) \mathbb{Z}_7
- (b) \mathbb{Z}_4 (d) \mathbb{Z}_{12}

96. El conjunto \mathbb{Z}_n contiene sólo n elementos. Para resolver una ecuación en \mathbb{Z}_n basta con reemplazar estos n elementos en la ecuación y ver cuales la resuelven. Resolver las ecuaciones:

- (a) $x^2 = 1$ en \mathbb{Z}_8
- (b) $x^4 = 1$ en \mathbb{Z}_5
- (c) $x^2 + 3x + 2 = 0$ en \mathbb{Z}_6
- (d) $x^2 + 1 = 0$ en \mathbb{Z}_{12}

97. Encontrar un elemento a en A tal que cada elemento no nulo de A es una potencia de a ; hacer esto para:

- (a) $A = \mathbb{Z}_7$ (c) $A = \mathbb{Z}_6$
- (b) $A = \mathbb{Z}_5$ (d) $A = \mathbb{Z}_8$

98. Resolver las siguientes ecuaciones

- (a) $x + x + x + x + x = 0$ en \mathbb{Z}_5
- (b) $x + x + x = 0$ en \mathbb{Z}_3
- (c) $x + x + x + x = 0$ en \mathbb{Z}_4

99. Probar o refutar las siguientes afirmaciones:

- (a) Si $ab = 0$ en \mathbb{Z}_n , entonces $a = 0$ o $b = 0$.
- (b) Si $ab = ac$ y $a \neq 0$ en \mathbb{Z}_n , entonces $b = c$.

100. Respecto a la ecuación $x^2 + x = 0$

- (a) Resolver $x^2 + x = 0$ en \mathbb{Z}_5 .
- (b) Resolver $x^2 + x = 0$ en \mathbb{Z}_6 .
- (c) Si p es primo, probar que las únicas soluciones de $x^2 + x = 0$ en \mathbb{Z}_p son 0 y $p - 1$.

101.

- (a) En \mathbb{Z}_5 calcular $(a + b)^5$.
- (b) En \mathbb{Z}_3 calcular $(a + b)^3$.
- (c) En \mathbb{Z}_2 calcular $(a + b)^2$.
- (d) En base a los resultados de (a), (b) y (c), a que piensas que es igual $(a + b)^7$ en \mathbb{Z}_7 .

102. Encontrar todos los a para los cuales la ecuación $ax = 1$ tiene una solución:

- (a) en \mathbb{Z}_3 (e) en \mathbb{Z}_7
- (b) en \mathbb{Z}_4 (f) en \mathbb{Z}_8
- (c) en \mathbb{Z}_5 (g) en \mathbb{Z}_9
- (d) en \mathbb{Z}_6 (h) en \mathbb{Z}_{10}

103. Si n es compuesto, probar que existen $a, b \in \mathbb{Z}_n$ tales que $a \neq 0$ y $b \neq 0$ pero $ab = 0$.

104. Probar que si p es primo y $ab = 0$ en \mathbb{Z}_p , entonces $a = 0$ o $b = 0$.

105. Resolver la ecuación $58x = 1$ en \mathbb{Z}_{127} .

106. Sea p un primo y asumamos que $a \neq 0$ en \mathbb{Z}_p . Probar que para cualquier b en \mathbb{Z}_p , la ecuación $ax = b$ tiene una solución.

107. Sea $a \neq 0$ en \mathbb{Z}_n . Probar que $ax = 0$ tiene una solución no nula en \mathbb{Z}_n si, y sólo si $ax = 1$ no tiene solución.

Grupos

1. Mostrar que $1, 2, 3$ bajo la multiplicación (mód 4) no es un grupo, pero que $1, 2, 3, 4$ bajo la multiplicación (mód 5) sí es un grupo.

2. Mostrar que el grupo $GL(2, \mathbb{R})$ no es Abelian, exhibiendo un par de matrices A y B en $GL(2, \mathbb{R})$ tales que $AB \neq BA$.

3. Encontrar la inversa del elemento $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ en $GL(2, \mathbb{Z}_{11})$.

4. Dar un ejemplo de elementos a y b de un grupo con la propiedad $a^{-1}ba \neq b$.

5. Traducir cada una de las expresiones multiplicativas siguientes a su contraparte aditiva.

(a) a^2b^3

(b) $a^{-2}(b^{-1}c)^2$

(c) $(ab^2)^{-3}c^2 = e$

6. Para cualesquiera elementos a y b de un grupo y cualquier entero n , probar que $(a^{-1}ba)^n = a^{-1}b^na$.

7. Probar que el conjunto de todas las matrices 2×2 con entradas en \mathbb{R} y determinante $+1$ es grupo bajo la multiplicación de matrices.

8. Para cualquier entero $n > 2$, mostrar que se pueden encontrar al menos dos elementos en $U(n)$ que satisfacen la ecuación $x^2 = 1$.

9. Si G es un grupo con la siguiente propiedad: Si $a, b, c \in G$ y $ab = ca$, entonces $b = c$. Probar que G es abeliano.

10. Si a y b son elementos de un grupo abeliano y n es un entero. Mostrar que $(ab)^n = a^n b^n$. ¿Esto también será verdad para grupos no abelianos?

11. En un grupo, probar que $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. Encontrar un ejemplo, mostrando que es posible tener $(ab)^{-2} \neq b^{-2}a^{-2}$. Encontrar un ejemplo no abeliano en el que se tenga $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ para algunos elementos a y b distintos de la identidad. Trazar una analogía entre la afirmación $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ y la acción de ponerte y quitarte tus calcetines y calzados.

12. Probar que un grupo G es abeliano si, y sólo si $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ para cualesquiera a y b en G .

13. En un grupo, probar que $(a^{-1})^{-1} = a$ para todo a .

14. Mostrar que el conjunto $\{5, 15, 25, 35\}$ es un grupo bajo la multiplicación módulo 40. ¿Cuál es el elemento identidad en este grupo? ¿Puedes ver alguna relación entre este grupo y $U(8)$?

15. ¿Si a_1, a_2, \dots, a_n pertenecen a un grupo, cuál es la inversa de $a_1a_2 \cdots a_n$?

16. Los enteros 5 y 15 son parte de una colección de 12 enteros que forman un grupo bajo la multiplicación módulo 56. Enlista los 12 elementos.

17. Mostrar un grupo con 105 elementos. Encontrar dos grupos, cada uno con 42 elementos.

18. Construir una tabla de Cayley para $U(12)$.

19. Probar que la Tabla de cualquier grupo es un *Cuadrado Latino*; es decir que cada elemento del grupo aparece exactamente una vez en cada fila y en cada columna.

20. Probar que si $(ab)^2 = a^2b^2$ en un grupo G , entonces $ab = ba$.

21. Sean a, b, c elementos de un grupo. Resolver la ecuación $axb = c$ para x . Resolver $a^{-1}xa = c$ para x .

22. A continuación se muestra la tabla de un grupo. Complete los espacios en blanco.

	e	a	b	c	d
e	e				
a		b			e
b		c	d	e	
c		d		a	b
d					

23. Probar que el conjunto de todos los números racionales de la forma $3^m 6^n$, donde m y n son enteros, es un grupo bajo la multiplicación.

24. Sea G un grupo finito. Mostrar que el número de elementos x de G tales que $x^3 = e$ es impar. Mostrar que el número de elementos x de G tales que $x^2 \neq e$ es par.

Subgrupos

25. Para cada uno de los siguientes grupos, encontrar el orden del grupo y el orden de cada elemento en el grupo. En cada caso, determinar como están relacionados el orden del grupo y el orden del elemento.

- (a) \mathbb{Z}_{12} (d) $U(20)$
 (b) $U(10)$ (e) D_4
 (c) $U(12)$ (f) $U(15)$

26. Sean \mathbb{Q} el grupo de los números racionales bajo la adición, \mathbb{Q}^* el grupo de los números racionales no nulos bajo la multiplicación. Enlista los elementos de $\langle \frac{1}{2} \rangle$ en \mathbb{Q} . Enlista los elementos de $\langle \frac{1}{2} \rangle$ en \mathbb{Q}^* .

27. En cualquier grupo probar: un elemento y su inversa tienen el mismo orden.

28. Sin calcular los ordenes, explicar porque los dos elementos en cada uno de los siguientes pares de elementos de \mathbb{Z}_{30} deben tener el mismo orden: $\{2, 28\}$, $\{8, 22\}$. Hacer lo mismo para los siguientes pares de elementos de $U(15)$: $\{2, 8\}$, $\{7, 13\}$.

29. Si x pertenece a un grupo. Si $x \neq e$ y $x^6 = e$, probar que $x^4 \neq e$ y $x^5 \neq e$. ¿Que podemos afirmar sobre el orden de x ?

30. Mostrar que $U(14) = \langle 3 \rangle = \langle 5 \rangle$. ¿Es decir que $U(14)$ es cíclico? ¿ $U(14) = \langle 11 \rangle$?

31. Mostrar que $\mathbb{Z}_{10} = \langle 3 \rangle = \langle 7 \rangle = \langle 9 \rangle$. ¿Será $\mathbb{Z}_{10} = \langle 2 \rangle$?

32. Mostrar que $U(20) \neq \langle k \rangle$ para cualquier k en $U(20)$. ¿Por lo tanto, $U(20)$ es no cíclico?

33. Probar que un grupo abeliano con dos elementos de orden 2 debe tener un subgrupo de orden 4.

34. Encontrar un grupo que contiene elementos a y b tales que $|a| = |b| = 2$ y

- (a) $ab = 3$,
 (b) $ab = 4$,
 (c) $ab = 5$.

¿Puedes ver alguna relación entre $|a|$, $|b|$ y $|ab|$?

35. Para cada divisor k de n , sea

$$U_k(n) = \{x \in U(n) | x = 1 \pmod{k}\}.$$

(Por ejemplo, $U_3(21) = \{1, 4, 10, 13, 16, 19\}$ y $U_7(21) = \{1, 8\}$) Enlistar los elementos de $U_4(20)$, $U_5(20)$, $U_5(30)$ y $U_{10}(30)$. Probar que $U_k(n)$ es un subgrupo de $U(n)$

36. Suponga que H es un subgrupo propio de \mathbb{Z} bajo la adición y que $18, 30, 40 \in H$. Determinar H .

37. Si H y K son subgrupos de G , mostrar que $H \cap K$ es un subgrupo de G . (¿Puedes ver que la misma demostración muestra que la intersección de cualquier número de subgrupos de G , finita o infinita, es también un subgrupo de G ?)

38. Sean G un grupo y $a \in Z(G)$. En la tabla de Caley de G , ¿cómo es que la fila encabezada por a se compara con la columna encabezada por a ?

39. Para G un grupo, mostrar que

$$Z(G) = \cap_{a \in G} C(a)$$

(Esto significa, la intersección de todos los subgrupos de la forma $C(a)$).

40. Sean G un grupo, $a \in G$. Probar que $C(a) = C(a^{-1})$.

41. Suponga que G es un grupo definido por la siguiente tabla de Caley.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	1	8	7	6	5	4	3
3	3	4	5	6	7	8	1	2
4	4	3	2	1	8	7	6	5
5	5	6	7	8	1	2	3	4
6	6	5	4	3	2	1	8	7
7	7	8	1	2	3	4	5	6
8	8	7	6	5	4	3	2	1

- (a) Hallar el centralizador de cada miembro de G .
- (b) Encontrar $Z(G)$.
- (c) Encontrar el orden de cada elemento de G . ¿Cómo es que están relacionados (aritméticamente hablando) estos ordenes con el orden del grupo?

42. Si H es un subgrupo de G , entonces el centralizador de H es el conjunto $C(H) = \{x \in G \mid xh = hx \text{ para todo } h \in H\}$. Probar que $C(H)$ es un subgrupo de G .

43. ¿El centralizador de un elemento debe ser un grupo abeliano?

44. ¿El centro de un grupo debe ser abeliano?

45. Sean G un grupo abeliano con identidad e y n algún entero. Probar que el conjunto de todos los elementos de G que satisfacen la ecuación $x^n = e$ es un subgrupo de G . Encontrar un grupo G en el que el conjunto de todos los elementos que satisfacen la ecuación $x^2 = e$ no sea un subgrupo de G .

46. Mostrar que un grupo de orden 6 no puede tener un subgrupo de orden 4. ¿La demostración que usaste será válida para un subgrupo H de orden 5? Generaliza estos resultados al caso en que G tiene orden n .

47. Suponga que n es un entero positivo par y H es un subgrupo de \mathbb{Z}_n . Probar que, o cada miembro de H es par o exactamente la mitad de los miembros de H son pares.

48. Suponga que un grupo tiene elementos a y b tales que $|a| = 4$, $|b| = 2$, y $a^3b = ba$. Encontrar $|ab|$.

49. Sean los elementos $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ de $SL(2, \mathbb{R})$. Encontrar $|A|$, $|B|$ y $|AB|$. ¿La respuesta te sorprenderá?

50. Considera el elemento $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ en $SL(2, \mathbb{R})$. ¿Cuál es el orden de M ? ¿Si vemos a M como un miembro de $SL(2, \mathbb{Z}_p)$ (p es primo), cuál será el orden de M ?

51. Para cualquier entero positivo n y cualquier ángulo θ , mostrar que en el grupo $SL(2, \mathbb{R})$,

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}.$$

Use esta formula para encontrar el orden de $\begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} \cos \sqrt{2}^\circ & -\sin \sqrt{2}^\circ \\ \sin \sqrt{2}^\circ & \cos \sqrt{2}^\circ \end{bmatrix}$. (Geométricamente, el elemento

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

es una rotación de θ grados del plano.)

52. Sea G el grupo simétrico de un círculo. Mostrar que G tiene elementos de cada orden finito así como elementos de orden infinito.

53. $U(15)$ tiene seis subgrupos cíclicos. Encuétralos.

54. Si $|a| = n$ y k divide a n , probar que $|a^{n/k}| = k$.

55. Suponga que G es un grupo que tiene exactamente ocho elementos de orden 3. ¿Cuántos subgrupos de orden 3 tiene G ?

56. Si $H = \{x \in U(20) \mid x = 1 \pmod{3}\}$ entonces, ¿ H es un subgrupo de $U(20)$?

57. Si $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$ es un grupo bajo la adición. Probar que el conjunto $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G \mid a + b + c + d = 0 \right\}$ es un subgrupo de G . ¿Que sucederá si se reemplaza 0 por 1?

58. Sea $G = GL(2, \mathbb{R})$. Mostrar que $H = \{A \in G \mid \det(A) \text{ es una potencia de } 2\}$ es un subgrupo de G .

59. Si H es un subgrupo de \mathbb{R} bajo la adición. Probar que $K = \{2^a \mid a \in H\}$ es un subgrupo de \mathbb{R}^* bajo la multiplicación.

60. Si G es el grupo de las funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R}^* bajo la multiplicación. Probar que $H = \{f \in G \mid f(1) = 1\}$ es un subgrupo de G .

61. Sean $G = \text{GL}(2, \mathbb{R})$ y $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \text{ son enteros no nulos} \right\}$. Probar o refutar que H es un subgrupo de G .

62. Si $H = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, ab \geq 0\}$, probar o refutar que H es un subgrupo de \mathbb{C} bajo la adición.

63. Si $H = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1\}$, probar o refutar que H es un subgrupo de \mathbb{C}^* bajo la multiplicación. Describir los elementos de H geoméricamente.

Grupos cíclicos

64. Encontrar todos los generadores de \mathbb{Z}_6 , \mathbb{Z}_8 y \mathbb{Z}_{20} .

65. Suponga que $\langle a \rangle$, $\langle b \rangle$ y $\langle c \rangle$ son grupos cíclicos de ordenes 6, 8 y 20, respectivamente. Encontrar todos los generadores de $\langle a \rangle$, $\langle b \rangle$ y $\langle c \rangle$.

66. Enlistar los elementos de los subgrupos $\langle 20 \rangle$ y $\langle 10 \rangle$ en \mathbb{Z}_{30} .

67. Encontrar todos los elementos de los subgrupos $\langle 3 \rangle$ y $\langle 15 \rangle$ en \mathbb{Z}_{18} .

68. Enlistar los elementos de los subgrupos $\langle 3 \rangle$ y $\langle 7 \rangle$ en $U(20)$.

69. ¿Qué es lo que tienen en común los anteriores tres ejercicios? Intente hacer una generalización que incluya estos tres casos.

70. Encontrar un grupo no cíclico, en el que todos los subgrupos propios si sean cíclicos.

71. Sea a el elemento de un grupo tal que $|a| = 15$. Calcular el orden de los siguientes elementos de G .

(a) a^3, a^6, a^9, a^{12}

(b) a^5, a^{10}

(c) a^2, a^4, a^8, a^{14}

72. ¿Cuántos grupos tiene \mathbb{Z}_{20} ? Encuentra todos los generadores para cada uno de estos subgrupos.

73. Suponga que $G = \langle a \rangle$ y $|a| = 20$. ¿Cuántos subgrupos tiene G ? Enlistar todos los generadores para cada uno de estos grupos.

74. Sean $G = \langle a \rangle$ y $|a| = 24$. Determinar todos los generadores para el subgrupo de orden 8.

75. Sean G un grupo y $a \in G$. Probar que $\langle a^{-1} \rangle = \langle a \rangle$.

76. Suponga que a tiene orden infinito. Encontrar todos los generadores del subgrupo $\langle a^3 \rangle$.

77. Suponga que $|a| = 24$. Encontrar un generador para $\langle a^{21} \rangle \cap \langle a^{10} \rangle$. ¿En general, cuál es el generador para el subgrupo $\langle a^m \rangle \cap \langle a^n \rangle$?

78. Suponga que un grupo cíclico G tiene exactamente tres subgrupos: G mismo, $\{e\}$ y un subgrupo de orden 7. Hallar $|G|$

79. Sean G un grupo abeliano y $H = \{g \in G \mid |g| \text{ divide a } 12\}$. Probar que H es un subgrupo de G . ¿Hay algo especial sobre 12? ¿Tu demostración será válida si reemplazas 12 por algún otro entero positivo? Establece un resultado general.

80. Si un grupo cíclico tiene un elemento de orden infinito, ¿cuántos elementos de orden finito tendrá?

81. Encuentra todos los subgrupos cíclicos de $U(30)$.

82. Sean G un grupo y a es un elemento de G .

(a) Si $a^{12} = e$, ¿que se puede decir sobre el orden de a ?

(b) Si $a^m = e$, ¿que se puede decir sobre el orden de a ?

(c) Suponga que $|G| = 24$ y que G es cíclico. Si $a^8 \neq e$ y $a^{12} \neq e$, mostrar que $\langle a \rangle = G$.

83. Probar que un grupo de orden 3 debe ser cíclico.

84. Para cualquier elemento a en un grupo G , probar que $\langle a \rangle$ es un subgrupo de $C(a)$.

85. Si se tiene $|a| = n$, mostrar que $\langle a^k \rangle = \langle a^{\text{mcd}(n,k)} \rangle$ y que $|a^k| = n/\text{mcd}(n, k)$.

86. Encontrar todos los generadores del grupo \mathbb{Z} .

87. Suponga que a y b pertenecen a un grupo, a tiene orden impar, y $aba^{-1} = b^{-1}$. Mostrar que $b^2 = e$.

88. Si G es un grupo finito, Mostrar que existe un entero positivo fijo n tal que $a^n = e$ para todo $a \in G$ (notar que n es independiente de a).

89. Determinar el retículo que forman los subgrupos de \mathbb{Z}_{12} .

90. Determinar el retículo que forman los subgrupos de \mathbb{Z}_{p^2q} , donde p y q son primos diferentes.

91. Trazar el retículo que forman los subgrupos de \mathbb{Z}_8 .

92. Determinar el retículo que forman los subgrupos de $U(12)$.

93. Mostrar que el grupo de los números racionales positivos bajo la multiplicación es no cíclico.

94. Construyendo la tabla de Cayley mostrar que el conjunto $\{4, 8, 12, 16\}$ es un grupo bajo la multiplicación módulo 20. ¿Quién es la identidad? ¿Es un grupo cíclico? Si es el caso encontrar todos los generadores.

95. Construye la tabla de Cayley del grupo $\{7, 35, 49, 77\}$ con la multiplicación módulo 84. ¿Quién es la identidad? ¿Es un grupo cíclico? Si es el caso encontrar todos los generadores.

96. Probar que un grupo infinito debe tener un número infinito de subgrupos.

97. Sea p un primo. Si un grupo tiene sólo $p-1$ elementos de orden p , ¿por qué no puede ser cíclico?

98. Suponga que G es un grupo cíclico y que 6 divide a $|G|$. ¿Cuántos elementos de orden 6 tiene G ? Si 8 divide a $|G|$, ¿cuántos elementos de orden 8 tiene G ? Si a es un ele-

mento de orden 8, encuentra los otros elementos de orden 8.

99. Encuentra todos los elementos de \mathbb{Z}_{40} que tengan orden 10.

100. Si $|x| = 40$, determina todos los elementos de $\langle x \rangle$ que tengan orden 10.

101. Probar que \mathbb{Z}_n tiene un número par de generadores si $n > 2$.

102. Probar que $H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ es un subgrupo cíclico de $\text{GL}(2, \mathbb{R})$.

Anillos y campos

103. Si $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Probar que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ es un anillo bajo la adición y multiplicación de números reales habituales.

104. Mostrar, por medio de ejemplos, que para elementos no-nulos fijos a y b en un anillo, la ecuación $ax + b$ puede tener (sólo) una solución. ¿Cómo se compara esto con lo que ocurre en grupos?

105. Probar que un anillo la unidad es única.

106. Encontrar un entero n que muestre que los anillos \mathbb{Z}_n no tienen necesariamente las siguientes propiedades propias del anillo \mathbb{Z}

(a) $a^2 = a$ implica que $a = 0$ o $a = 1$.

(b) $ab = 0$ implica que $a = 0$ o $b = 0$.

(c) $ab = ac$ y $a \neq 0$ implica que $b = c$.

¿Es primo el entero n que buscas?

107. Mostrar que las tres propiedades enunciadas en el anterior ejercicio son válidas en \mathbb{Z}_p , donde p es primo.

108. Mostrar que un anillo es conmutativo si tiene la propiedad: $ab = ac$ implica $b = c$ donde $a \neq 0$.

109. Mostrar que un anillo que es cíclico bajo la adición es conmutativo.

110. Encontrar un anillo no-conmutativo que tenga exactamente 16 elementos.

111. Describir todos los subanillos del anillo \mathbb{Z} de los enteros.

112. Mostrar que si m y n son enteros, a y b son elementos de un anillo, entonces $(ma)(nb) = (mn)(ab)$.

113. Mostrar que si n es un entero y a es un elemento del anillo, entonces $n(-a) = -na$.

114. Si a y b pertenecen a un anillo R , y m es un entero. Probar que $m(ab) = (ma)b = a(mb)$.

115. Probar que la intersección de cualquier colección de subanillos de un anillo R es un subanillo de R .

116. Si a pertenece a un anillo R , y $S = \{x \in R \mid ax = 0\}$. Mostrar que S es un subanillo de R .

117. Si R es un anillo, entonces el *centro* de R es el conjunto $\{x \in R \mid ax = xa \text{ para todo } a \in R\}$. Probar que el centro de un anillo es un subanillo.

118. Describir los elementos de $M_2(\mathbb{Z})$ que tienen inverso multiplicativo.

119. Suponga que R_1, R_2, \dots, R_n son anillos que contienen elementos no nulos. Mostrar que $R_1 \oplus R_2 \oplus \dots \oplus R_n$ tiene una unidad si, y sólo si cada R_i tiene una unidad.

120. Si R es un anillo conmutativo con unidad y $U(R)$ denota el conjunto de las unidades de R . Probar que $U(R)$ es un grupo bajo la multiplicación de R .

121. Determinar $U(\mathbb{Z}[i])$.

122. Determinar $U(\mathbb{Z}[x])$.

123. Determinar $U(\mathbb{R}[x])$.

124. Mostrar que en cualquier anillo una unidad divide cada elemento del anillo.

125. En \mathbb{Z}_6 , mostrar que $4 \mid 2$; En \mathbb{Z}_8 , mostrar que $3 \nmid 7$; En \mathbb{Z}_{15} , mostrar que $9 \mid 12$.

126. Suponga que a y b pertenecen a un anillo conmutativo R . Si a es una unidad de R y $b^2 = 0$, mostrar que $a + b$ es una unidad de R .

127. Encontrar un anillo en el que dos elementos a y b tengan la propiedad: $ab = 0$ pero $ba \neq 0$.

128. Si n es un entero mayor que 1. Sí en el anillo R se tiene $x^n = x$ para todo x , mostrar que: $ab = 0$ implica $ba = 0$.

129. Explicar por qué cada subgrupo de \mathbb{Z}_n bajo la adición es también un subanillo de \mathbb{Z}_n .

130. ¿Será \mathbb{Z}_6 un anillo de \mathbb{Z}_{12} ?

131. Suponga que R es un anillo con unidad 1 y a es un elemento de R tal que $a^2 = 1$. Sea $S = \{ara \mid r \in R\}$. Probar que S es un subanillo de R . ¿ S contendrá la unidad 1?

132. Sean, $M_2(\mathbb{Z})$ el anillo de las matrices de 2×2 sobre los enteros y $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$. Probar que R es un subanillo de $M_2(\mathbb{Z})$.

133. Sean, $M_2(\mathbb{Z})$ el anillo de las matrices de 2×2 sobre los enteros y $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & a-b \\ a-b & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$. Probar o refutar que R es un subanillo de $M_2(\mathbb{Z})$.

134. Sean $R = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ y $S = \{(a, b, c) \in R \mid a + b = c\}$. Probar o refutar que S es un subanillo de R .

135. ¿Tendrá la unidad de un subanillo que ser la misma que la unidad del anillo? Si es así, probarlo; y si no, dar un ejemplo. ¿Cuál es la análoga situación para grupos?

136. Mostrar que $2\text{ent} \cup 3\mathbb{Z}$ no es un subanillo de \mathbb{Z} .

137. Si R es un anillo, probar que $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ para todo $a, b \in R$ si, y sólo si R es conmutativo.

138. Dar un ejemplo de anillo booleano con cuatro elementos. Dar un ejemplo de anillo booleano infinito.

139. Encontrar el subconjunto de un anillo que es un subgrupo bajo la adición pero no es un subanillo.

140. Suponga que existe un entero positivo par n tal que $a^n = a$ para todos los elementos a de algún anillo. Mostrar que $-a = a$ para todo a en el anillo.

Retículos

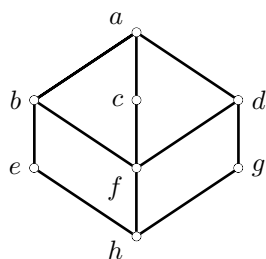
1. Demuestre que los siguientes conjuntos parcialmente ordenados son retículos. Además, trace el diagrama de Hasse para cada uno.

(a) (D_6, \preceq) donde D_6 son los divisores de 6, y $a \preceq b$ si, y sólo si a divide a b .

(b) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, donde $A = \{a, b, c\}$.

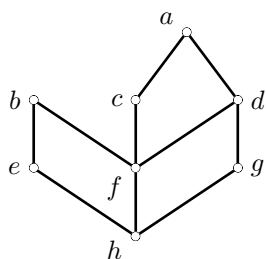
(c) (D_{12}, \preceq) , como en el inciso (a).

(d) La relación de orden definida a través del diagrama:



(e) (D_{10}, \preceq) , como en el inciso (a).

2. ¿Por que el conjunto parcialmente ordenado



no es un retículo?

3. Determine si el retículo del ejercicio 1 b), con $m = 20$ es distributivo y complementado. Además encuentre el complemento de 2, si existe.

4. Determine si el retículo (D_{10}, \preceq) es distributivo y complementado. Además trace el diagrama de Hasse y encuentre el complemento de 2.

5. Determine si el retículo (D_{18}, \preceq) es distributivo y complementado. Trace el diagrama de Hasse y encuentre el ó los complementos de cada elemento.

6. Demuestre que en cualquier retículo (A, \preceq) , se verifican

$$x \vee (y \wedge z) \preceq (x \vee y) \wedge (x \vee z),$$

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \preceq x \wedge (y \vee z).$$

7. ¿Existen elementos en (D_{36}, \preceq) que no tengan complemento? Si los hay, encuéntrelos todos.

8. De tres ejemplos de retículos que no sean distributivos.

9. De tres ejemplos de retículos que no sean complementados.

10. De tres ejemplos de retículos que sean distributivos pero no complementados.

11. De tres ejemplos de retículos que sean complementados pero no distributivos.

Álgebras de Boole

12. ¿Cuáles de los siguientes retículos son álgebras de Boole?

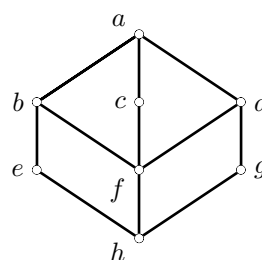
(a) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, donde $A = \{a, b\}$.

(b) (D_{30}, \preceq) divisores de 30.

(c) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, donde $A = \{a, b, c\}$.

(d) (D_{36}, \preceq) .

(e) La retículo definido por el diagrama:



13. Sea D_{210} y defina $+$, \cdot y $\bar{}$ como: $x + y = \text{mcm}(x, y)$, $x \cdot y = \text{mcd}(x, y)$ y $\bar{x} = 210/x$. Determine lo siguiente:

- | | |
|-------------------------------|-------------------------|
| (a) $30 + 5 \cdot 7$ | (d) $21 \cdot (2 + 10)$ |
| (b) $(30 + 5) \cdot (30 + 7)$ | (e) $(2 + 3) + 5$ |
| (c) $\overline{14 + 15}$ | (f) $(6 + 35)(7 + 10)$ |

14. Encuentre el valor de cada una de las siguientes expresiones booleanas si los valores de las variables booleanas x, y, z, w son 1, 1, 0, 0, respectivamente.

- | | |
|-------------------------------------|--|
| (a) $\overline{xy} + \overline{xy}$ | (d) $wx + xy + yz$ |
| (b) $w + \overline{xy}$ | (e) $\overline{(w + y)(\overline{x} + y)}$ |
| (c) $wx + \overline{y} + yz$ | (f) $(wx + y\overline{z}) + w\overline{y}$ |

15. Simplifique las siguientes expresiones booleanas.

- $x + y = y$
- $xy = x$
- $x' + y = 1$
- $xy' = 0$.

16. Demuestre que en un álgebra de Boole, las siguientes proposiciones son equivalentes:

- $xy + (x + y)\overline{z} + y$
- $x + y + \overline{(\overline{x} + y + z)}$
- $yz + wx + z + wz(xy + wz)$
- $x + \overline{xy} + \overline{xy}z + \overline{xyz}w$.

17. Encuentre todos los átomos de D_{36} y el isomorfismo entre el conjunto de partes de los átomos y D_{36} . Grafique ambas álgebras de Boole.

18. Encuentre todos los átomos de D_{210} y el isomorfismo entre el conjunto de partes de los átomos y D_{210} . Grafique ambas álgebras de Boole.

19. Expresar las siguientes expresiones booleanas $E(x, y, z)$ en su forma normal disyuntiva y su forma normal disyuntiva completa.

- $x(y + z)'$
- $x(yz')'$
- $(x + xy)' + z'$
- $(x + xy)'$
- $(xyz' + y)'x$
- $(xy + xz)' + (x'y' + x'z')'$
- $((x + y)' + (y + z'))'$
- $y(x + z') + x(x' + z)$

20. Construya una red de compuertas para cada uno de las siguientes funciones booleanas y encuentre también una tabla que determine todos sus valores.

- $f(x, y) = x' + y$
- $f(x, y, z) = x'y + z'$
- $f(x, y) = x'y + y$
- $f(x, y, z) = xyz' + xz + z'$
- $f(x, y) = (xy' + x)'$
- $f(x, y, z) = (x + y')(x + z')(y + z)'$

21. Encuentre las formas normales disyuntivas completas en su forma óptima.

- $E(x, y) = xy + y'$.
- $E(x, y, z) = xyz' + xy'z'$.
- $E(x, y, z) = x'yz + x'y'z$.
- $E(x, y, z, u) = xyzu + xy'zu + x'yzu$.
- $E(x, y, z, u) = xyzu + x'y'zu + xy'zu + x'yzu + xyz'u + x'y'z'u + xy'z'u + x'y'z'u$.
- $E(x, y, z, u) = xyzu + x'yzu + xyz'u + x'y'z'u + x'y'z'u$.
- $E(x, y, z, u) = xyzu + xyzu' + xy'zu' + xy'z'u$.

Relaciones de recurrencia

8

Fallar es instructivo.

La persona aprende más de sus errores que de sus éxitos.

J. Dewey

Introducción

1. Encuentre al menos 5 términos de la sucesión:

(a) $s_n = 3n + 2$

(b) $s_n = 2n^2 - 3$.

(c) $s_0 = 1, s_n = s_{n-1} + n + 1$.

(d) $s_0 = 0, s_n = 2s_{n-1} - n + 2$.

(e) $s_0 = 1, s_1 = 0, s_n = 2s_{n-1} + s_{n-2} + 1$.

(f) $s_0 = 0, s_1 = 0, s_n = s_{n-1} - s_{n-2} + n - 1$.

2. Verifique que $s_n = 3n, n \geq 0$, es solución de la relación de recurrencia $s_n = s_{n-1} + 3, s_0 = 0$.

3. Verifique que $s_n = 2^{n+1}, n \geq 0$, es solución de la relación de recurrencia $s_n = 2s_{n-1} + 1, s_0 = 1$.

Resolución de recurrencias

4. Resuelva las siguientes relaciones de recurrencia.

(a) $s_{n+1} - s_n = 2n + 3, s_0 = 1$

(b) $s_{n+1} - 2s_n = 5, s_0 = 1$

(c) $s_{n+1} - s_n = 3n^2 - n, s_0 = 3$

(d) $s_{n+1} - 2s_n = 2^n, s_0 = 1$

(e) $s_{n+1} - 3s_n = 5 \cdot 7^n, s_0 = 2$

(f) $s_{n+1} - 3s_n = 5 \cdot 3^n, s_0 = 2$

(g) $s_{n+1} + n \cdot s_n = n!, s_0 = 1$

5. Resuelva las siguientes relaciones de recurrencia.

(a) $s_n - 4s_{n-2} = 0, s_0 = 1, s_1 = 0$

(b) $s_n - 4s_{n-2} = 3n, s_0 = 1, s_1 = 0$

(c) $s_n + 2s_{n-1} - 3s_{n-2} = 0, s_0 = 0, s_1 = 0$

(d) $s_n + 2s_{n-1} + -3s_{n-2} = 2^n, s_0 = 0, s_1 = 1$

(e) $s_n + 2s_{n-1} - 3s_{n-2} = 3^n + 2n - 1, s_0 = 0, s_1 = 0$

(f) $s_n + 2s_{n-1} + s_{n-2} = 0, s_0 = 1, s_1 = -1$

6. Resuelva las siguientes relaciones de recurrencia.

(a) $s_{n+2} + 3s_{n+1} + 2s_n = 3^n, s_0 = 0, s_1 = 1$

(b) $s_{n+2} + 4s_{n+1} + 4s_n = 7, s_0 = 1, s_1 = 2$

(c) $s_{n+2} - s_n = \sin(n\pi/2), s_0 = 1, s_1 = 1$

(d) $s_{n+2} + 2s_{n+1} + s_n = (-1)^n, s_0 = 1, s_1 = 1$

(e) $s_{n+2} + 4s_{n+1} + 20s_n = 0, s_0 = 0, s_1 = 0$

(f) $s_n + 4s_{n-1} + 20s_{n-2} = 3^n \cos(3n\pi/4), s_0 = -1, s_1 = 1$

(g) $2s_n - 7s_{n-1} + 3s_{n-2} = n3^n + 2n - 1, s_0 = 0, s_1 = 1$

(h) $2s_n - 7s_{n-1} + 3s_{n-2} = n^2 3^n + (n+1)2^{-n} + 1, s_0 = 0, s_1 = 0$

(i) $s_n + 3s_{n-1} - 4s_{n-3} = 0, s_0 = -1, s_1 = 0, s_2 = 1$

(j) $s_n + 3s_{n-1} - 4s_{n-3} = n - 1, s_0 = 0, s_1 = 1, s_2 = 0$

(k) $s_n + 3s_{n-1} - 4s_{n-3} = n(-2)^n + 1, s_0 = 0, s_1 = 0, s_2 = 0$

(l) $s_n - 3s_{n-1} + 3s_{n-2} - s_{n-3} = 3 + 5n, s_0 = 0, s_1 = 0, s_2 = 0$