

QUARTA EDIÇÃO



Sistemas de Comunicações Analógicos e Digitais Modernos

B.P. Lathi • Zhi Ding

gen | LTC

SISTEMAS DE COMUNICAÇÕES ANALÓGICOS E DIGITAIS MODERNOS

Quarta Edição



Respeite o direito autoral!



O GEN | Grupo Editorial Nacional – maior plataforma editorial brasileira no segmento científico, técnico e profissional – publica conteúdos nas áreas de ciências exatas, humanas, jurídicas, da saúde e sociais aplicadas, além de prover serviços direcionados à educação continuada e à preparação para concursos.

As editoras que integram o GEN, das mais respeitadas no mercado editorial, construíram catálogos inigualáveis, com obras decisivas para a formação acadêmica e o aperfeiçoamento de várias gerações de profissionais e estudantes, tendo se tornado sinônimo de qualidade e seriedade.

A missão do GEN e dos núcleos de conteúdo que o compõem é prover a melhor informação científica e distribuí-la de maneira flexível e conveniente, a preços justos, gerando benefícios e servindo a autores, docentes, livreiros, funcionários, colaboradores e acionistas.

Nosso comportamento ético incondicional e nossa responsabilidade social e ambiental são reforçados pela natureza educacional de nossa atividade e dão sustentabilidade ao crescimento contínuo e à rentabilidade do grupo.

SISTEMAS DE COMUNICAÇÕES ANALÓGICOS E DIGITAIS MODERNOS

Quarta Edição

B. P. Lathi

Professor Emérito da California State University – Sacramento

Zhi Ding

Professor da University of California – Davis

Tradução

J. R. Souza, Ph.D.

Professor Adjunto da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)

Revisão Técnica

José Alexandre Nalon

Mestre em Engenharia Elétrica pela UNICAMP

Professor do Centro Universitário Salesiano de São Paulo (UNISAL)



Os autores e a editora empenharam-se para citar adequadamente e dar o devido crédito a todos os detentores dos direitos autorais de qualquer material utilizado neste livro, dispondo-se a possíveis acertos caso, inadvertidamente, a identificação de algum deles tenha sido omitida.

Não é responsabilidade da editora nem dos autores a ocorrência de eventuais perdas ou danos a pessoas ou bens que tenham origem no uso desta publicação.

Apesar dos melhores esforços dos autores, do tradutor, da editora e dos revisores, é inevitável que surjam erros no texto. Assim, são bem-vindas as comunicações de usuários sobre correções ou sugestões referentes ao conteúdo ou ao nível pedagógico que auxiliem o aprimoramento de edições futuras. Os comentários dos leitores podem ser encaminhados à **LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora** pelo e-mail faleconosco@grupogen.com.br.

MODERN DIGITAL AND ANALOG COMMUNICATION SYSTEMS, INTERNATIONAL FOURTH EDITION

Copyright © 1983 by CBS College Publishing; © 1989 by B. P. Lathi & Saunders College Publishing, a division of Holt, Rinehart, and Winston, Inc.; © 1995, 1998, 2010 by B. P. Lathi.

All rights reserved.

MODERN DIGITAL AND ANALOG COMMUNICATION SYSTEMS, INTERNATIONAL FOURTH EDITION was originally published in English in 2009. This translation is published by arrangement with Oxford University Press.

MODERN DIGITAL AND ANALOG COMMUNICATION SYSTEMS, INTERNATIONAL FOURTH EDITION foi editada originalmente em inglês em 2009. Esta tradução é uma publicação por acordo com a Oxford University Press.

Direitos exclusivos para a língua portuguesa

Copyright © 2012 by

LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda.

Uma editora integrante do GEN | Grupo Editorial Nacional

Reservados todos os direitos. É proibida a duplicação ou reprodução deste volume, no todo ou em parte, sob quaisquer formas ou por quaisquer meios (eletrônico, mecânico, gravação, fotocópia, distribuição na internet ou outros), sem permissão expressa da editora.

Travessa do Ouvidor, 11

Rio de Janeiro, RJ __ CEP 20040-040

Tels.: 21-3543-0770 / 11-5080-0770

Fax: 21-3543-0896

faleconosco@grupogen.com.br

www.grupogen.com.br

Capa: Dan Niver Foto de Capa: © Robert Churchill / iStockphoto.com

Produção digital: Geethik

CIP-BRASIL. CATALOGAÇÃO-NA-FONTE

SINDICATO NACIONAL DOS EDITORES DE LIVROS, RJ.

L379s

Lathi, B. P. (Bhagwandas Pannalal), 1933-

Sistemas de comunicações analógicos e digitais modernos / B. P. Lathi, Zhi Ding ; tradução J. R. Souza ; revisão técnica José Alexandre Nalon. - [Reimpr.]. - Rio de Janeiro : LTC, 2019.

il. ; 28 cm

Tradução de: Modern digital and analog communication systems, 4th ed

Apêndice

Inclui bibliografia e índice

ISBN 978-85-216-3606-9

1. Sistemas de telecomunicação. 2. Comunicações digitais. I. Ding, Zhi, 1962-. II. Título.

12-0450.

CDD: 621.382

CDU: 621.39

SUMÁRIO GERAL

Prefácio

- 1** Introdução
- 2** Sinais e Espaço de Sinais
- 3** Análise e Transmissão de Sinais
- 4** Modulações e Demodulações em Amplitude
- 5** Modulações e Demodulações em Ângulo
- 6** Amostragem e Conversão Analógico-Digital
- 7** Princípios de Transmissão de Dados Digitais
- 8** Fundamentos da Teoria da Probabilidade
- 9** Processos Aleatórios e Análise Espectral
- 10** Análise de Desempenho de Sistemas de Comunicações Digitais
- 11** Comunicações por Espalhamento Espectral
- 12** Comunicações Digitais com Canais Sujeitos a Distorção Linear
- 13** Introdução à Teoria da Informação
- 14** Códigos Corretores de Erro
- A** Ortogonalidade de Alguns Conjuntos de Sinais
- B** Desigualdade de Cauchy-Schwarz
- C** Ortogonalização de Gram-Schmidt de um Conjunto de Vetores
- D** Propriedades Básicas Matrizes e Operações com Matrizes
- E** Miscelâneas

SUMÁRIO

PREFÁCIO

1 INTRODUÇÃO

- 1.1 SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO
- 1.2 MENSAGENS ANALÓGICAS E MENSAGENS DIGITAIS
 - 1.2.1 Imunidade de Sinais Digitais ao Ruído
 - 1.2.2 Viabilidade de Repetidores Regenerativos sem Distorção
 - 1.2.3 Conversão Analógico-Digital (A/D)
 - 1.2.4 Modulação por Codificação de Pulses — Uma Representação Digital
- 1.3 EFEITO, RELAÇÃO SINAL-RUÍDO E CAPACIDADE DO CANAL
 - 1.3.1 Largura de Banda e Potência de Sinal
 - 1.3.2 Capacidade do Canal e Taxa de Dados
- 1.4 MODULAÇÃO E DETECÇÃO
 - 1.4.1 Facilidade de Radiação/Transmissão
 - 1.4.2 Transmissão Simultânea de Múltiplos Sinais — Multiplexação
 - 1.4.3 Demodulação
- 1.5 CODIFICAÇÕES DIGITAIS DE FONTE E PARA CORREÇÃO DE ERROS
- 1.6 BREVE REVISÃO HISTÓRICA DE TELECOMUNICAÇÕES MODERNAS

2 SINAIS E ESPAÇO DE SINAIS

- 2.1 TAMANHO DE UM SINAL
- 2.2 CLASSIFICAÇÃO DE SINAIS
 - 2.2.1 Sinais em Tempo Contínuo e Sinais em Tempo Discreto
 - 2.2.2 Sinais Analógicos e Sinais Digitais
 - 2.2.3 Sinais Periódicos e Sinais Aperiódicos
 - 2.2.4 Sinais de Energia e Sinais de Potência
 - 2.2.5 Sinais Determinísticos e Sinais Aleatórios
- 2.3 SINAL IMPULSO UNITÁRIO
- 2.4 ANALOGIA ENTRE SINAIS E VETORES
 - 2.4.1 Componente de um Vetor na Direção de Outro Vetor
 - 2.4.2 Decomposição de um Sinal e Componentes de um Sinal
 - 2.4.3 Espaço Complexo de Sinais e Ortogonalidade
 - 2.4.4 Energia da Soma de Sinais Ortogonais

- 2.5 CORRELAÇÃO DE SINAIS
 - 2.5.1 Funções de Correlação
 - 2.5.2 Função de Autocorrelação
- 2.6 CONJUNTO ORTOGONAL DE SINAIS
 - 2.6.1 Espaço Vetorial Ortogonal
 - 2.6.2 Espaço Ortogonal de Sinais
 - 2.6.3 Teorema de Parseval
- 2.7 SÉRIE DE FOURIER EXPONENCIAL
- 2.8 EXERCÍCIOS COM O MATLAB

3 ANÁLISE E TRANSMISSÃO DE SINAIS

- 3.1 REPRESENTAÇÃO DE SINAIS APERIÓDICOS ATRAVÉS DA INTEGRAL DE FOURIER
- 3.2 TRANSFORMADAS DE ALGUMAS FUNÇÕES ÚTEIS
- 3.3 ALGUMAS PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE FOURIER
 - 3.3.1 Dualidade Tempo-Frequência
 - 3.3.2 Propriedade de Dualidade
 - 3.3.3 Propriedade de Dilatação no Tempo
 - 3.3.4 Propriedade de Translação no Tempo
 - 3.3.5 Propriedade de Translação na Frequência
 - 3.3.6 Teorema da Convolução
 - 3.3.7 Diferenciação e Integração no Domínio do Tempo
- 3.4 TRANSMISSÃO DE SINAL EM UM SISTEMA LINEAR
 - 3.4.1 Distorção do Sinal Durante a Transmissão
 - 3.4.2 Transmissão sem Distorção
- 3.5 FILTROS IDEAIS *VERSUS* FILTROS PRÁTICOS
- 3.6 DISTORÇÃO DE SINAL EM UM CANAL DE COMUNICAÇÃO
 - 3.6.1 Distorção Linear
 - 3.6.2 Distorção Causada por Não Linearidades do Canal
 - 3.6.3 Distorção Causada por Efeitos de Multipercorso
 - 3.6.4 Canais com Desvanecimento
- 3.7 ENERGIA E DENSIDADE ESPECTRAL DE ENERGIA DE SINAIS
 - 3.7.1 Teorema de Parseval
 - 3.7.2 Densidade Espectral de Energia (ESD)
 - 3.7.3 Largura de Banda Essencial de um Sinal
 - 3.7.4 Energia de Sinais Modulados
 - 3.7.5 Função de Autocorrelação Temporal e Densidade Espectral de Energia
- 3.8 POTÊNCIA E DENSIDADE ESPECTRAL DE POTÊNCIA DE SINAIS
 - 3.8.1 Densidade Espectral de Potência (PSD)
 - 3.8.2 Função de Autocorrelação Temporal de Sinais de Potência
 - 3.8.3 Densidades Espectrais de Potência de Entrada e de Saída
 - 3.8.4 PSD de Sinais Modulados

3.9 CÁLCULO NUMÉRICO DA TRANSFORMADA DE FOURIER: A DFT

3.10 EXERCÍCIOS COM O MATLAB

4 MODULAÇÕES E DEMODULAÇÕES EM AMPLITUDE

4.1 COMUNICAÇÃO EM BANDA BASE VERSUS COMUNICAÇÃO POR PORTADORA

4.2 MODULAÇÃO EM AMPLITUDE COM BANDA LATERAL DUPLA

4.3 MODULAÇÃO EM AMPLITUDE (AM)

4.4 MODULAÇÕES EM AMPLITUDE COM EFICIÊNCIA DE LARGURA DE BANDA

4.5 MODULAÇÕES EM AMPLITUDE: BANDA LATERAL VESTIGIAL (VSB)

4.6 SINCRONIZAÇÃO DA PORTADORA LOCAL

4.7 MULTIPLEXAÇÃO POR DIVISÃO EM FREQUÊNCIA (FDM)

4.8 MALHA DE CAPTURA DE FASE (*PHASE LOCKED LOOP — PLL*) E ALGUMAS APLICAÇÕES

4.9 EXERCÍCIOS COM O MATLAB

5 MODULAÇÕES E DEMODULAÇÕES EM ÂNGULO

5.1 MODULAÇÃO NÃO LINEAR

5.2 LARGURA DE BANDA DE ONDAS MODULADAS EM ÂNGULO

5.3 GERAÇÃO DE ONDAS FM

5.4 DEMODULAÇÃO DE SINAIS FM

5.5 EFEITOS DE DISTORÇÃO NÃO LINEAR E INTERFERÊNCIA

5.6 RECEPTORES ANALÓGICOS AM/FM SUPER-HETERÓDINOS

5.7 SISTEMAS DE DIFUSÃO FM

5.8 EXERCÍCIOS COM O MATLAB

6 AMOSTRAGEM E CONVERSÃO ANALÓGICO-DIGITAL

6.1 TEOREMA DA AMOSTRAGEM

6.1.1 Reconstrução de Sinais a partir de Amostras Uniformes

6.1.2 Questões Práticas Relativas à Amostragem e à Reconstrução de Sinais

6.1.3 Máxima Taxa de Informação: Duas Porções de Informação por Segundo por Hertz

6.1.4 Análise de Amostragem Prática Não Ideal

6.1.5 Algumas Aplicações do Teorema da Amostragem

6.2 MODULAÇÃO POR CODIFICAÇÃO DE PULSO (PCM)

6.2.1 Vantagens de Comunicação Digital

6.2.2 Quantização

6.2.3 Princípio da Taxação Progressiva: Quantização Não Uniforme

6.2.4 Largura de Banda de Transmissão e SNR de Saída

6.3 TELEFONIA DIGITAL: PCM EM SISTEMAS DE PORTADORAS

6.4 MULTIPLEXAÇÃO DIGITAL

6.4.1 Formato de Sinal

- 6.4.2 Canais Assíncronos e Preenchimento de Bits
- 6.4.3 Hierarquia Digital Plesiócrona (Quase Síncrona)
- 6.5 MODULAÇÃO POR CODIFICAÇÃO DE PULSO DIFERENCIAL (DPCM)
- 6.6 PCM DIFERENCIAL ADAPTATIVA (ADPCM)
- 6.7 MODULAÇÃO DELTA
- 6.8 VOCODERS E COMPRESSÃO DE VÍDEO
 - 6.8.1 Vocoders com Codificação de Predição Linear
- 6.9 EXERCÍCIOS COM O MATLAB

7 PRINCÍPIOS DE TRANSMISSÃO DE DADOS DIGITAIS

- 7.1 SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO DIGITAL
 - 7.1.1 Fonte
 - 7.1.2 Codificador de Linha
 - 7.1.3 Multiplexador
 - 7.1.4 Repetidor Regenerador
- 7.2 CODIFICAÇÃO DE LINHA
 - 7.2.1 PSD de Diversos Códigos de Linha
 - 7.2.2 Sinalização Polar
 - 7.2.3 Construção de um Nulo DC na PSD via Formatação de Pulso
 - 7.2.4 Sinalização On-Off
 - 7.2.5 Sinalização Bipolar
- 7.3 FORMATAÇÃO DE PULSO
 - 7.3.1 Interferências Intersimbólicas (ISI) e Efeitos
 - 7.3.2 Primeiro Critério de Nyquist para ISI Nula
 - 7.3.3 ISI Controlada ou Sinalização de Resposta Parcial
 - 7.3.4 Exemplo de Pulso Duobinário
 - 7.3.5 Relações de Pulses entre Sinalizações com ISI Zero, Duobinária e Duobinária Modificada
 - 7.3.6 Detecção de Sinalização Duobinária e Codificação Diferencial
 - 7.3.7 Geração de Pulses
- 7.4 EMBARALHAMENTO (SCRAMBLING) DE DADOS
- 7.5 RECEPTORES DIGITAIS E REPETIDORES REGENERATIVOS
 - 7.5.1 Equalizadores
 - 7.5.2 Extração de Temporização
 - 7.5.3 Detecção de Erro
- 7.6 DIAGRAMAS DE OLHO: UMA FERRAMENTA ÚTIL
- 7.7 PAM: SINALIZAÇÃO M-ÁRIA EM BANDA BASE PARA TAXA DE DADOS MAIS ELEVADA
- 7.8 SISTEMAS DIGITAIS COM PORTADORA
 - 7.8.1 Modulações Binárias Básicas com Portadora
 - 7.8.2 PSD de Modulação Digital com Portadora
 - 7.8.3 Relações entre Modulações Analógica e Digital com Portadora

- 7.8.4 Demodulação
 - 7.9 MODULAÇÃO DIGITAL M-ÁRIA COM PORTADORA
 - 7.10 EXERCÍCIOS COM O MATLAB
- 8 FUNDAMENTOS DA TEORIA DA PROBABILIDADE**
- 8.1 CONCEITO DE PROBABILIDADE
 - 8.2 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS
 - 8.3 MÉDIAS (VALORES MÉDIOS) ESTATÍSTICAS (OS)
 - 8.4 CORRELAÇÃO
 - 8.5 ESTIMAÇÃO QUADRÁTICA MÉDIA LINEAR
 - 8.6 SOMA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS
 - 8.7 TEOREMA DO LIMITE CENTRAL
- 9 PROCESSOS ALEATÓRIOS E ANÁLISE ESPECTRAL**
- 9.1 DE VARIÁVEL ALEATÓRIA A PROCESSO ALEATÓRIO
 - 9.2 CLASSIFICAÇÃO DE PROCESSOS ALEATÓRIOS
 - 9.3 DENSIDADE ESPECTRAL DE POTÊNCIA
 - 9.4 PROCESSOS ALEATÓRIOS MÚLTIPLOS
 - 9.5 TRANSMISSÃO DE PROCESSOS ALEATÓRIOS POR MEIO DE SISTEMAS LINEARES
 - 9.6 APLICAÇÃO: FILTRAGEM ÓTIMA (FILTRO DE WIENER-HOPF)
 - 9.7 APLICAÇÃO: ANÁLISE DE DESEMPENHO DE SISTEMAS ANALÓGICOS EM BANDA-BASE
 - 9.8 APLICAÇÃO: SISTEMAS ÓTIMOS DE PRÉ-ÊNFASE/DEÊNFASE
 - 9.9 PROCESSOS ALEATÓRIOS PASSA-FAIXA
- 10 ANÁLISE DE DESEMPENHO DE SISTEMAS DE COMUNICAÇÕES DIGITAIS**
- 10.1 DETECTOR LINEAR ÓTIMO PARA SINALIZAÇÃO POLAR BINÁRIA
 - 10.1.1 Limiar de Detecção Binária
 - 10.1.2 Filtro Receptor Ótimo – Filtro Casado
 - 10.2 SINALIZAÇÃO BINÁRIA GENÉRICA
 - 10.2.1 Análise de Receptor Linear Ótimo
 - 10.2.2 Análise de Desempenho de Sistemas Binários Genéricos
 - 10.3 RECEPTORES COERENTES PARA MODULAÇÕES DIGITAIS COM PORTADORA
 - 10.4 ANÁLISE DE DETECÇÃO ÓTIMA NO ESPAÇO DE SINAIS
 - 10.4.1 Espaço Geométrico de Sinais
 - 10.4.2 Espaço de Sinais e Base de Sinais
 - 10.5 DECOMPOSIÇÃO VETORIAL DE PROCESSOS ALEATÓRIOS DE RUÍDO BRANCO
 - 10.5.1 Determinação de Funções de Base para um Processo Aleatório
 - 10.5.2 Representação Geométrica de Processos de Ruído Branco
 - 10.5.3 Ruído Gaussiano Branco

- 10.5.4 Propriedades de Processos Aleatórios Gaussianos
- 10.6 RECEPTOR ÓTIMO PARA CANAIS COM RUÍDO GAUSSIANO BRANCO
 - 10.6.1 Representações Geométricas
 - 10.6.2 Dimensionalidade do Espaço de Sinais de Detecção
 - 10.6.3 Espaço de Sinais e Procedimento de Decisão (Simplificados)
 - 10.6.4 Regiões de Decisão e Probabilidade de Erro
 - 10.6.5 Sinalização Multiamplitude (PAM)
 - 10.6.6 Análise QAM M -ária
- 10.7 EXPRESSÃO GERAL PARA A PROBABILIDADE DE ERRO DE RECEPTORES ÓTIMOS
- 10.8 CONJUNTOS EQUIVALENTES DE SINAIS
 - 10.8.1 Conjunto de Sinais de Mínima Energia
 - 10.8.2 Conjunto de Sinais Simplex
- 10.9 RUÍDO DE CANAL NÃO BRANCO (COLORIDO)
- 10.10 OUTROS CRITÉRIOS ÚTEIS DE DESEMPENHO
- 10.11 DETECÇÃO NÃO COERENTE
- 10.12 EXERCÍCIOS DE MATLAB

11 COMUNICAÇÕES POR ESPALHAMENTO ESPECTRAL

- 11.1 SISTEMAS DE ESPALHAMENTO ESPECTRAL POR SALTOS EM FREQUÊNCIA (FHSS)
- 11.2 SISTEMAS FHSS MULTIUSUÁRIO E DESEMPENHO
- 11.3 APLICAÇÕES DE FHSS
- 11.4 ESPALHAMENTO ESPECTRAL POR SEQUÊNCIA DIRETA
- 11.5 CARACTERÍSTICAS DE RESILIÊNCIA DE DSSS
- 11.6 MÚLTIPLO ACESSO POR DIVISÃO DE CÓDIGO (CDMA) DE DSSS
- 11.7 DETECÇÃO MULTIUSUÁRIO (MUD)
- 11.8 SISTEMAS CDMA DSSS PRÁTICOS MODERNOS
 - 11.8.1 CDMA em Redes de Telefonia Celular
 - 11.8.2 CDMA no Sistema de Posicionamento Global (GPS)
 - 11.8.3 Padrão IEEE 802.11b para LAN Sem Fio
- 11.9 EXERCÍCIOS COM O MATLAB

12 COMUNICAÇÕES DIGITAIS COM CANAIS SUJEITOS A DISTORÇÃO LINEAR

- 12.1 DISTORÇÕES LINEARES EM CANAIS SEM FIO DE MULTIPERCURSO
- 12.2 EQUALIZAÇÃO DO CANAL NO RECEPTOR
 - 12.2.1 Filtro Antimascaramento *versus* Filtro Casado
 - 12.2.2 Estimação da Sequência de Máxima Verossimilhança (MLSE)
- 12.3 EQUALIZAÇÃO LINEAR COM ESPAÇAMENTO T (TSE)
 - 12.3.1 TSE com Forçamento a Zero
 - 12.3.2 Projeto de TSE com Base em MMSE

- 12.4 EQUALIZADORES LINEARES FRACIONALMENTE ESPAÇADOS (FSE)
 - 12.4.1 Modelo Uma Entrada, Múltiplas Saídas (SIMO)
 - 12.4.2 Configurações de FSE
- 12.5 ESTIMAÇÃO DE CANAL
- 12.6 EQUALIZADOR COM REALIMENTAÇÃO DE DECISÃO
- 12.7 COMUNICAÇÕES OFDM (MULTIPORTADORA)
 - 12.7.1 Princípios de OFDM
 - 12.7.2 Ruído em Canal OFDM
 - 12.7.3 OFDM com Preenchimento de Zeros
 - 12.7.4 Redundância de Prefixo Cíclico em OFDM
 - 12.7.5 Equalização OFDM
- 12.8 MODULAÇÕES MULTITONS DISCRETOS (DMT)
- 12.9 APLICAÇÕES PRÁTICAS DE OFDM E DMT
- 12.10 EQUALIZAÇÃO CEGA E IDENTIFICAÇÃO
- 12.11 DISTORÇÕES EM CANAL VARIANTE NO TEMPO DEVIDO À MOBILIDADE
- 12.12 EXERCÍCIOS COM O MATLAB

13 INTRODUÇÃO À TEORIA DA INFORMAÇÃO

- 13.1 MEDIDA DE INFORMAÇÃO
- 13.2 CODIFICAÇÃO DE FONTE
- 13.3 COMUNICAÇÃO SEM ERRO EM UM CANAL RUIDOSO
- 13.4 CAPACIDADE DE CANAL DE UM CANAL DISCRETO SEM MEMÓRIA
- 13.5 CAPACIDADE DE CANAL DE UM CANAL CONTÍNUO SEM MEMÓRIA
- 13.6 EQUAÇÃO DE SHANNON E SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO PRÁTICOS
- 13.7 CAPACIDADE DE CANAL SELETIVO EM FREQUÊNCIA
- 13.8 SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO COM MÚLTIPLAS ENTRADAS E MÚLTIPLAS SAÍDAS
 - 13.8.1 Capacidade de Canais MIMO
 - 13.8.2 Transmissor sem Conhecimento do Canal
 - 13.8.3 Transmissor com Conhecimento do Canal
- 13.9 EXERCÍCIOS COM O MATLAB

14 CÓDIGOS CORRETORES DE ERRO

- 14.1 VISÃO GERAL
- 14.2 REDUNDÂNCIA PARA CORREÇÃO DE ERRO
- 14.3 CÓDIGOS DE BLOCOS LINEARES
- 14.4 CÓDIGOS CÍCLICOS
- 14.5 EFEITOS DA CORREÇÃO DE ERRO
- 14.6 CÓDIGOS CONVOLUCIONAIS
 - 14.6.1 Codificador Convolucional

- 14.6.2 Decodificação de Códigos Convolucionais
- 14.7 DIAGRAMA EM TRELIÇAS DE CÓDIGOS DE BLOCOS
- 14.8 COMBINAÇÃO E ENTRELAÇAMENTO DE CÓDIGOS
- 14.9 DECODIFICAÇÃO SUAVE
- 14.10 ALGORITMO DE VITERBI COM SAÍDA SUAVE (SOVA)
- 14.11 CÓDIGOS-TURBO
- 14.12 CÓDIGOS VERIFICADORES DE PARIDADE DE BAIXA DENSIDADE (LDPC)
- 14.13 EXERCÍCIOS COM O MATLAB

A ORTOGONALIDADE DE ALGUNS CONJUNTOS DE SINAIS

- A.1 Ortogonalidade do Conjunto de Sinais Trigonométricos
- A.2 Ortogonalidade do Conjunto de Sinais Exponenciais

B DESIGUALDADE DE CAUCHY-SCHWARZ

C ORTOGONALIZAÇÃO DE GRAM-SCHMIDT DE UM CONJUNTO DE VETORES

D PROPRIEDADES BÁSICAS MATRIZES E OPERAÇÕES COM MATRIZES

- D.1 NOTAÇÃO
- D.2 PRODUTO DE MATRIZES E SUAS PROPRIEDADES
- D.3 MATRIZES IDENTIDADE E DIAGONAL
- D.4 DETERMINANTE DE MATRIZ QUADRADA
- D.5 TRAÇO
- D.6 AUTODECOMPOSIÇÃO
- D.7 MATRIZES QUADRADAS HERMITIANAS ESPECIAIS

E MISCELÂNEA

- E.1 REGRA DE L'HÔPITAL
- E.2 SÉRIES DE TAYLOR E DE MACLAURIN
- E.3 SÉRIES DE POTÊNCIAS
- E.4 SOMAS
- E.5 NÚMEROS COMPLEXOS
- E.6 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS
- E.7 INTEGRAIS INDEFINIDAS

PREFÁCIO

O principal objetivo desta quarta edição é atender ao enorme progresso tecnológico em sistemas de comunicação ocorrido ao longo da década desde o lançamento da terceira edição. Ao mesmo tempo, novos pacotes de *software* e ferramentas de ensino se tornaram disponíveis, facilitando a apresentação de exemplos ricos e ilustrativos, assim como mais oportunidades experimentais para os estudantes. Nesta nova edição, grandes mudanças foram implementadas para incorporar esses recentes avanços tecnológicos na área de telecomunicações. Para aguçar o interesse dos estudantes e permitir que relacionem os conteúdos de cursos a experiências com ferramentas de comunicação com maior facilidade, apresentaremos informações relevantes sobre a operação e as características de sistemas celulares, redes locais sem fio (LANs) e serviços de internet com fio (linha digital de assinantes – DSL), entre outros.

Revisão Importante

Diversas alterações importantes foram motivadas pela necessidade de enfatizar os fundamentos de sistemas de comunicação digital que permeiam nossa vida diária. Em especial, devido às disseminadas aplicações de novas tecnologias, como espalhamento espectral e multiplexação por divisão em frequências ortogonais (OFDM), acrescentamos dois novos capítulos: sobre espalhamento espectral (Capítulo 11) e sobre canais seletivos em frequência e sistemas OFDM (Capítulo 12). Como exemplos práticos desses sistemas, elaboramos um texto introdutório básico sobre os atuais padrões de comunicação sem fio, incluindo sistemas celulares e redes de área local (LANs) sem fio baseadas no padrão IEEE 802.11a/b/g/n. Adicionalmente, incluímos um resumo das mais modernas tecnologias de modems e serviços DSL. De certo modo, a teoria e a forma de codificar a informação também foram transformadas pelo progresso em diversas áreas importantes. Nesta obra, incluímos os princípios básicos da tecnologia de sistemas com múltiplas entradas e saídas (MIMO), que passou a ter amplo uso comercial. Cobrimos, ainda, diversas inovações excelentes na codificação para corrigir erros, incluindo decodificação suave, códigos-turbo e códigos de verificação de paridade de baixa densidade (LDPC).

Para tornar o aprendizado mais aprimorado e dar aos estudantes a oportunidade de treinamento experimental baseado em computador, apresentamos exemplos relevantes e exercícios em MATLAB nos capítulos, o que aumenta a qualidade do conteúdo abordado, mediante o uso de experiências práticas.

Organização

A obra inicia tradicionalmente com a revisão de fundamentos de sinais e sistemas e prossegue com os tópicos de comunicação essenciais: modulações analógica e digital por codificação de pulsos. A seguir, mencionamos as ferramentas básicas da teoria da probabilidade e de processos aleatórios, que são usados em todo o texto para análise e projeto de sistemas de comunicação digital. Após cobrir os fundamentos destes sistemas, os dois últimos capítulos apresentam uma abordagem superficial da teoria da informação e dos princípios de códigos corretores de erros.

O ideal seria que o conteúdo deste livro fosse dividido em dois cursos: um sobre a operação básica de sistemas de comunicação, e outro sobre a análise de sistemas modernos de comunicação sujeitos a ruído e a outras distorções. No primeiro, a base seria as ferramentas de análise determinística, como séries de Fourier, transformadas de Fourier e teorema da amostragem, enquanto no segundo seriam cobertas as ferramentas de probabilidade e de processos aleatórios para tratar a imprevisibilidade de sinais de mensagens e ruídos. Todavia, atualmente, dada a grande variedade de cursos, pode ser difícil incluir dois semestres básicos sobre comunicação no programa típico de engenharia. Algumas universidades exigem como pré-requisito um curso de probabilidade e processos aleatórios, o que permite que as duas áreas sejam cobertas razoavelmente bem em uma única disciplina de um semestre. Este livro foi projetado para ser adotado tanto em um curso de um semestre (no qual se enfatizam os aspectos determinísticos de sistemas de comunicação com uma abordagem superficial dada aos efeitos de ruído e interferência) da mesma forma que em um curso que estude os aspectos determinísticos e probabilísticos de sistemas de comunicação. O livro é autossuficiente e provê toda a teoria básica de probabilidade e processos aleatórios. Entretanto, como dissemos, se o objetivo for cobrir os aspectos determinísticos e probabilísticos referentes a esses sistemas em um semestre, é altamente desejável que os estudantes já tenham bom conhecimento de probabilidade.

O Capítulo 1 apresenta um panorama dos sistemas de comunicação. Explicamos de forma qualitativa e heurística todos os conceitos importantes relativos à teoria da comunicação. Isso atrai os estudantes de cursos que cobrem genericamente esse tópico. Com este estímulo, eles se entusiasmam a estudar, nos Capítulos 2 e 3, a ferramenta de análise de sinais; nesses

capítulos, os estudantes aprendem a ver um sinal como um vetor e a pensar no espectro de Fourier como uma forma de representar um sinal em termos de suas componentes vetoriais. Os Capítulos 4 e 5 discutem modulações em amplitude (linear) e em ângulo (não linear), respectivamente. Na era digital, muitos professores acham que a modulação deveria ter menos relevância. Consideramos que ela é mais uma ferramenta essencial de processamento de sinais do que um método de comunicação; ela será sempre necessária, tanto na área de comunicação (digital ou analógica), como em vários outros campos da engenharia elétrica. Por conseguinte, desprezá-la pode significar a ausência de uma perspectiva. O Capítulo 6, que serve como um elo entre comunicações analógicas e digitais, descreve o processo de conversão analógico-digital (ADC). Ele detalha amostragem, modulação por codificação de pulsos (incluindo DPCM), modulação delta, codificação de voz (vocoder), codificação e compressão de imagem/vídeo. O Capítulo 7 discute os princípios e técnicas empregados em modulação digital, introduzindo o conceito de distorção de canal e apresentando a equalização como uma forma eficaz de compensar a distorção.

Os Capítulos 8 e 9 apresentam aspectos básicos das teorias de probabilidade e de processos aleatórios, que representam a segunda ferramenta necessária ao estudo de sistemas de comunicação. Todo o esforço é feito para motivar os estudantes e assim conservá-los à medida que avançam na leitura dos capítulos; para isto, sempre que possível, apresentamos aplicações para problemas de comunicação. O Capítulo 10 trata da análise de sistemas de comunicação digital na presença de ruídos, incluindo a detecção ótima de sinais. O Capítulo 11 prioriza as comunicações por espalhamento espectral. O Capítulo 12 apresenta diversas técnicas práticas que podem ser empregadas no combate a distorções reais de canais, abordando tanto a equalização de canal como a tecnologia OFDM amplamente utilizada. O Capítulo 13 oferece um tutorial sobre teoria da informação. Por fim, o Capítulo 14 discute os princípios e importantes aspectos práticos da codificação para controle de erro.

Um de nossos objetivos ao escrever este livro foi tornar prazeroso o aprendizado ou, pelo menos, torná-lo uma experiência menos intimidadora para os estudantes; nesse sentido, cuidamos para apresentar o assunto de forma clara, comprehensível e logicamente organizada. Sempre que possível, esforçamo-nos para apresentar visões esclarecedoras – mais do que comprehensíveis – bem como explicações heurísticas de resultados teóricos. Incluímos, também, vários exemplos que auxiliam no entendimento de resultados abstratos. Mesmo que o sucesso em atingir esse objetivo seja parcial, nosso esforço terá valido a pena.

Um Mundo Completamente Novo

Assim que publicamos a terceira edição em 1998, surgiram importantes desenvolvimentos tecnológicos. Primeiro, a telefonia celular se tornou profundamente enraizada na vida das pessoas seja nos centros urbanos ou nos subúrbios, tanto na maioria dos países desenvolvidos quanto nos em desenvolvimento. Em 1998, pouquíssimos estudantes dispunham de pagers e de telefones celulares. Hoje, praticamente todos têm um celular. Segundo, em 1998, a maioria das conexões domésticas de internet era feita em baixa velocidade (28,8 kbit/s) via modems para linhas telefônicas discadas. Atualmente, a maioria dos estudantes se conecta ao ciberespaço por meio de serviços DSL ou a cabo. Além disso, as redes LAN sem fio fizeram com que termos esotéricos como IEEE 802.11 se tornassem corriqueiros. Grande parte dos estudantes já explorou essas tecnologias.

Devido aos enormes avanços tecnológicos, a nova geração de estudantes tem grande interesse em estudá-los e aprender como implementá-los. Eles anseiam por compreender como e onde podem contribuir para essa indústria. Tanto entusiasmo deve ser proveitosamente estimulado e explorado. Esta nova edição permitirá que o próprio professor recorde alguns tópicos ou que prepare material de leitura para que os estudantes possam assimilar informações relevantes. Esses objetivos podem ser alcançados com o destaque dos aspectos digitais do texto e a incorporação das mais conhecidas tecnologias digitais com e sem fio.

Uso do Livro em Cursos

Juntos, temos mais de 55 anos de experiência de ensino e lecionamos, em grandes universidades, em cursos com duração de um trimestre ou de um semestre. De forma complementar, as experiências pessoais dos estudantes relacionadas a sistemas de comunicação se multiplicaram continuamente desde a década de 1960 ao século XXI, saindo dos simples aparelhos de rádio até o acesso fácil a redes LAN sem fio, aos dispositivos celulares, às estações de rádio via satélite e aos serviços domésticos de internet. Em consequência, mais e mais estudantes têm interesse em aprender como esses aparelhos eletrônicos tão comuns funcionam. Considerando essa importante necessidade e nossa experiência de ensino, revimos essa edição visando adequá-la apropriadamente às diferentes configurações de programas de estudo. Em todos os casos, uma abordagem básica deve ensinar os fundamentos de comunicações analógicas e digitais (Capítulos 1 a 7).

Curso de Um Semestre (sem grande conhecimento de probabilidade)

Em muitos programas de estudo, os estudantes de graduação não utilizam ferramentas simples de probabilidade até chegarem aos cursos de comunicação. Em geral, isso ocorre porque as instituições os forçam a fazer um curso introdutório de estatística, desvinculado das necessidades da área de engenharia. Este texto é adequado aos estudantes com essa formação. Os primeiros sete capítulos constituem uma cobertura abrangente de modernos sistemas de comunicação analógica e digital, tendo em vista o típico estudante de engenharia. Um curso como este pode ser lecionado em um semestre (40 a 45 horas/aula). Com base na premissa de que os estudantes tenham adquirido conhecimento consistente de análise de Fourier em um curso anterior obrigatório sobre *sinais e sistemas*, a maior parte dos três capítulos iniciais pode ser tratada como revisão em uma semana. O resto do

semestre pode ser totalmente dedicado ao estudo dos Capítulos 4 a 7, com cobertura parcial dos sistemas práticos dos Capítulos 11 e 12, para aumentar o interesse dos estudantes.

Curso de Um Semestre (com grande conhecimento de probabilidade)

No caso de programas de estudo que reforçaram o estudo inicial de teoria da probabilidade, uma cobertura mais abrangente de comunicações digitais pode ser alcançada em um semestre. A teoria da probabilidade pode ser ensinada com maior rigor no contexto da análise de sinais e sistemas (cf. George R. Cooper e Clare D. McGillem, *Probabilistic Methods of Signal and System Analysis*, Oxford University Press, 1999). Nesse cenário, além dos Capítulos 1 a 7, o Capítulo 10 e a parte do Capítulo 12 sobre equalização também podem ser lecionados em um semestre, desde que os estudantes dominem o conteúdo de probabilidade, permitindo que se restrinja a cobertura dos Capítulos 8 a 9 a algumas poucas horas. Os estudantes que completarem este curso estarão bem preparados para ingressar no mercado de trabalho de telecomunicações ou em cursos de pós-graduação.

Série de Dois Semestres (sem um curso separado de probabilidade)

Todo o texto pode ser integral e detalhadamente coberto em dois semestres, no caso de programas de estudo sem um curso prévio de probabilidade. Em outras palavras, para uma série de dois cursos, o objetivo é ensinar sistemas de comunicações e os fundamentos de probabilidades. Em uma era em que numerosos cursos devem ser acomodados no programa de engenharia, é difícil alocar cursos de dois semestres direcionados apenas para comunicações. Contudo, a maioria das universidades oferece um curso autônomo de probabilidade oferecido por professores sem formação em engenharia. Nesse cenário, seria preferível incluir toda a teoria da probabilidade nos dois cursos de comunicações. Assim, para cursos de dois semestres, a cobertura pode ser dividida da seguinte forma:

- Primeiro semestre: Capítulos 1 a 7 (Sinais e Sistemas de Comunicação)
- Segundo semestre: Capítulos 8 a12 (Modernos Sistemas de Comunicação Digital)

Curso de Um Trimestre (com grande conhecimento de probabilidade)

Em um sistema trimestral, os estudantes devem fazer um curso anterior de probabilidade e estatística, em um nível avançado (cf. Cooper e McGillem, *Probabilistic Methods of Signal and System Analysis*). Também devem dominar a análise de Fourier. Em um trimestre, as aulas podem tratar dos fundamentos de sistemas de comunicações analógico e digital (Capítulos 3 a 7) e, com os Capítulos 10 e 11, de análise de sistemas de comunicação digital e comunicações por espalhamento espectral, respectivamente.

Curso de Um Trimestre (sem grande conhecimento de probabilidade)

No caso raro de estudantes com pouco conhecimento de probabilidade, é importante que eles aprendam os fundamentos de sistemas de comunicação. Sugerimos que o curso não se proponha a analisar os sistemas de comunicação digital. Em vez disso, a cobertura básica sem conhecimento de probabilidade pode ser feita com o ensino da operação de sistemas analógicos e digitais (Capítulos 1 a 7) e a discussão em alto nível de sistemas sem fio por espalhamento espectral (Capítulo 11).

Série de Dois Trimestres (com conhecimento básico de probabilidade)

Ao contrário do curso de um trimestre, uma série de dois trimestres pode ser bem projetada para ensinar a maior parte do conteúdo importante sobre sistemas de comunicação e sua análise. Todo o texto pode ser ensinado em dois trimestres, caso o programa de estudo inclua alguma cobertura preliminar de análise de Fourier e probabilidades. Em essência, se os Capítulos 1 a 3 e o Capítulo 8 forem vistos como parcialmente novos e parcialmente de revisão, a cobertura pode ser feita da seguinte forma:

- Primeiro trimestre: Capítulos 1 a 9 (Sistemas de Comunicação e Análise)
- Segundo trimestre: Capítulos 10 a 14 (Sistemas de Comunicação Digital)

MATLAB e Experimentos de Laboratório

Como muitas universidades não mais dispõem de laboratórios físicos para comunicações para auxiliar o aprendizado, o livro inclui exercícios sobre sistemas de comunicação baseados em MATLAB. Utilizando a tela do computador e medidas de taxa de erro de bits, os estudantes podem projetar sistemas, modificar seus parâmetros e avaliar os efeitos sobre o desempenho dos sistemas de comunicação. Desta forma, os estudantes podem aprender de forma autônoma como projetar e realizar simulações com sistemas de comunicação.

Agradecimentos

Primeiro, os autores agradecem a todos os estudantes que tiveram em todos esses anos. Esta edição não seria possível sem os comentários e sugestões fornecidos pelos nossos estudantes e sem as discussões que tivemos com eles. Os autores agradecem a

todos os revisores por fornecerem valorosa ajuda no aprimoramento do texto. Por fim, os autores também agradecem ao professor Norman Morrison da University of Cape Town por sugerir um novo exercício (E8-2.3) nesta edição.

B.P. Lathi

Zhi Ding

Material Suplementar

Este livro conta com o seguinte material suplementar:

- Ilustrações da obra em formato de apresentação (restrito a docentes).

O acesso ao material suplementar é gratuito. Basta que o leitor se cadastre em nosso *site* (www.grupogen.com.br), faça seu *login* e clique em GEN-IO, no menu superior do lado direito. É rápido e fácil.

Caso haja alguma mudança no sistema ou dificuldade de acesso, entre em contato conosco (gendifigital@grupogen.com.br).

1 INTRODUÇÃO

Ao longo da última década, a rápida expansão das tecnologias de comunicação digital foi simplesmente impressionante. A internet, uma palavra e conceito inicialmente familiares apenas a técnicos e à comunidade científica, permeou todos os aspectos da vida das pessoas. Na sociedade moderna, é difícil encontrar qualquer indivíduo que não tenha sido influenciado pelas novas tecnologias de comunicação, dos telefones celulares ao Bluetooth. Este livro examina os princípios básicos de comunicação por sinais elétricos. Antes dos tempos modernos, mensagens eram transportadas por corredores, pombos-correio, luzes e fogo. Estes esquemas eram adequados às distâncias e “taxas de dados” da época. Na maior parte do mundo, esses modos de comunicação foram substituídos por sistemas elétricos de comunicação,* capazes de transmitir sinais por distâncias muito maiores (até a planetas e galáxias distantes) e à velocidade da luz.

A comunicação elétrica é confiável e econômica, e as tecnologias nela empregadas aumentam a produtividade e a conservação de energia. Com crescente frequência, as reuniões de trabalho são conduzidas via teleconferência, economizando tempo e energia que seriam gastos com viagens. A comunicação ubíqua permite que o gerenciamento e a coordenação de participantes de um projeto sejam feitos em tempo real de qualquer ponto do globo. O correio eletrônico está substituindo rapidamente os mais custosos e lentos “correios-lesma”. O comércio eletrônico também reduziu alguns custos e atrasos associados à venda, e os consumidores passaram a ter mais informação sobre novos produtos e suas características. As formas tradicionais de mídia, como televisão, rádio e jornais, evoluíram rapidamente nos últimos anos para se adequar às novas tecnologias de comunicação e de redes e delas tirar maior proveito. O objetivo deste livro é prover o conhecimento técnico fundamental de que necessitarão os engenheiros e técnicos de comunicações da próxima geração para que sejam capazes de projetar sistemas de comunicação ainda melhores no futuro.

1.1 SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO

A Figura 1.1 ilustra três sistemas de comunicação típicos: uma conexão entre telefones de linha discada e celular, um sistema de difusão de TV e uma rede sem fio de computadores. Devido aos numerosos exemplos sistemas de comunicação, seria uma tarefa tentar estudar, neste livro, os detalhes de todos os tipos de sistemas de comunicação. A forma mais eficiente e eficaz de aprender comunicações é estudar os principais blocos fundamentais que são comuns a praticamente todos os sistemas de comunicação. Assim, os alunos não apenas aprendem o funcionamento dos sistemas existentes que estudaram, mas, o que é mais importante, podem adquirir o conhecimento básico necessário para projetar e analisar sistemas novos e não mencionados neste livro. Para iniciar, é essencial definir um modelo para um típico sistema de comunicação, como mostrado na Figura 1.2. Os principais componentes de um sistema de comunicação são os seguintes:

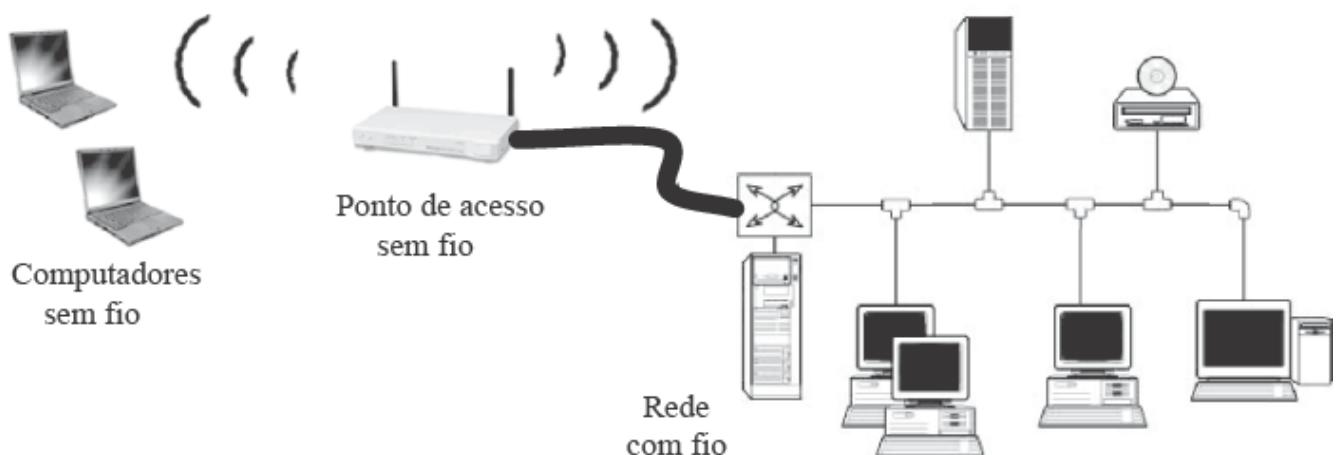
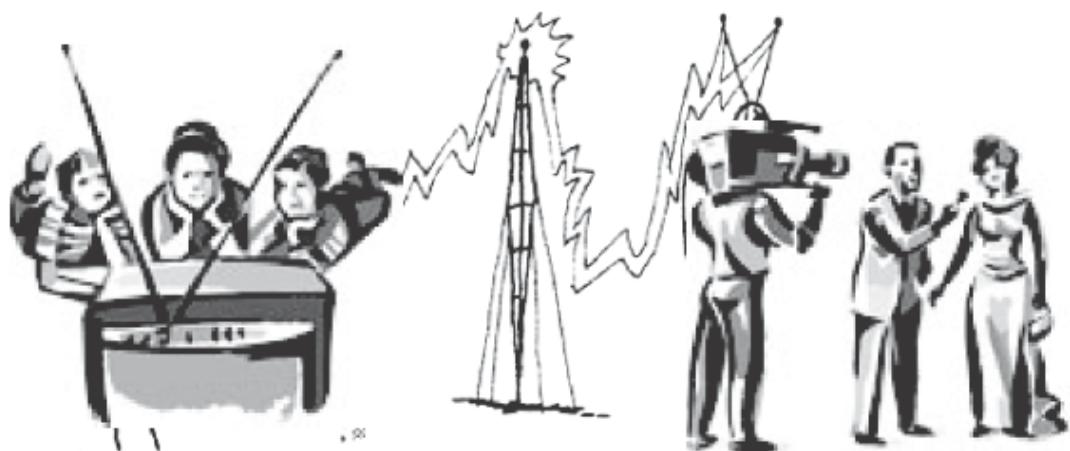


Figura 1.1
Alguns exemplos de sistemas de comunicação.

A **fonte** origina uma mensagem, como uma fala humana, uma imagem de televisão, uma mensagem de correio eletrônico ou algum dado. Se o dado for não elétrico (por exemplo, fala humana, texto de correio eletrônico, vídeo de televisão), deve ser convertido por um **transdutor de entrada** em uma forma de onda elétrica, referida como **sinal em banda base** ou **sinal de mensagem**; dispositivos físicos que realizam essa conversão são, por exemplo, microfone, teclado de computador, câmera fotográfica/filmadora digital.

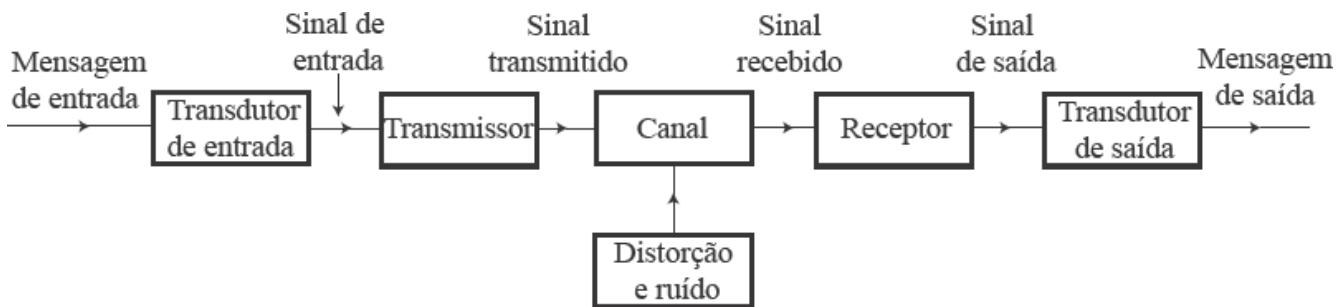


Figura 1.2
Sistema de comunicação.

O **transmissor** modifica o sinal em banda base para transmissão eficiente. O transmissor pode consistir em um ou mais subsistemas: conversor A/D, codificador e modulador. De forma semelhante, o receptor pode ser um demodulador, um decodificador e um conversor D/A.

O **canal** é um meio de escolha no qual os sinais elétricos na saída do transmissor são transportados ao longo de uma dada distância. Um canal típico pode ser um par de fios de cobre trançados (telefone e DSL), cabo coaxial (televisão e internet), fibra óptica ou enlace de rádio. Além disso, um canal também pode ser uma conexão ponto a ponto em uma malha de canais interconectados que formam uma rede de comunicação.

O **receptor** processa o sinal recebido do canal, revertendo as modificações feitas pelo transmissor no sinal e removendo as distorções feitas pelo canal. A saída do receptor é alimentada ao **transdutor de saída**, que converte o sinal elétrico à sua forma original — a mensagem.

O **destino** é a unidade à qual a mensagem é endereçada.

Um canal é um meio físico que se comporta parcialmente como um filtro que, em geral, atenua o sinal e distorce as formas de onda transmitidas. A atenuação do sinal aumenta com o comprimento do canal, variando de uma pequena porcentagem, no caso de curtas distâncias, a ordens de magnitude, no caso de comunicação interplanetária. A distorção das formas de onda dos sinais tem origem em fenômenos físicos como ganhos dependentes da frequência, efeitos de multipercuso e deslocamento Doppler. Por exemplo, um canal *seletivo em frequência* causa diferentes valores de atenuação e de deslocamento de fase a diferentes componentes de frequência do sinal. Um pulso quadrado é arredondado ou “espalhado” durante a transmissão por um canal passabaias. Distorções desse tipo, denominadas **distorções lineares**, podem ser parcialmente corrigidas no receptor por um equalizador com características de ganho e fase complementares às do canal. Os canais também podem causar **distorção não linear** através de atenuação que varia com a amplitude do sinal. Tais distorções também podem ser parcialmente corrigidas no receptor, por um equalizador de características complementares. Caso as distorções do canal sejam conhecidas, também podem ser pré-compensadas por transmissores com a aplicação de pré-distorções dependentes do canal.

Em um ambiente prático, sinais que passam por canais de comunicação não apenas sofrem distorções do canal, mas também são corrompidos ao longo do percurso por interferências e perturbações indesejáveis, agrupadas no abrangente termo **ruído**. Esses sinais interferentes são aleatórios e imprevisíveis, e suas fontes são externas e internas. O ruído externo inclui sinais interferentes transmitidos em canais vizinhos, ruído gerado pelo homem por meio de comutadores defeituosos em equipamentos elétricos, radiação proveniente da ignição de automóveis, lâmpadas fluorescentes ou ruído natural advindo de raios, fornos de micro-ondas e emissões de telefones celulares, assim como tempestades elétricas e radiação intergaláctica. Um cuidado adequado no projeto do sistema pode reduzir ou, em alguns casos, até mesmo eliminar o ruído externo. Já o ruído interno resulta da agitação térmica de partículas carregadas em condutores, emissão espontânea, difusão ou recombinação de portadores de carga em dispositivos eletrônicos. Seus efeitos podem ser reduzidos com cuidado adequado, mas jamais eliminados. O ruído é um dos fatores fundamentais que limitam a taxa de comunicação.

Em sistemas de comunicação práticos, portanto, o canal distorce o sinal, e o ruído se acumula ao longo do percurso. Pior ainda, a intensidade do sinal diminui com a distância, enquanto o nível de ruído se mantém estacionário, independentemente do afastamento desde o transmissor. Em consequência, a qualidade do sinal se deteriora continuamente enquanto transpõe o comprimento do canal. A amplificação do sinal recebido para compensar a atenuação não é útil, pois o ruído será amplificado na mesma proporção, de modo que, na melhor das hipóteses, a qualidade do sinal fica inalterada.* Esses são os desafios importantes que devemos enfrentar no projeto de modernos sistemas de comunicação.

1.2 MENSAGENS ANALÓGICAS E MENSAGENS DIGITAIS

As mensagens são digitais ou analógicas. Mensagens digitais são combinações ordenadas de uma quantidade finita de símbolos ou de palavras de código. Por exemplo, o inglês (imprensa) consiste em 26 letras, 10 números, um espaço e diversos caracteres de pontuação e de acentuação. Com isso, um documento de texto escrito em inglês é uma mensagem digital construída a partir de um teclado ASCII de 128 símbolos. A fala humana também é uma mensagem digital, pois é constituída de um vocabulário finito em alguma linguagem.* As notas musicais também são digitais, embora o som da música seja analógico. Da mesma forma, uma

mensagem telegráfica em código Morse é uma mensagem digital construída a partir de um conjunto de apenas **dois** símbolos — traço e ponto. Consequentemente, é uma mensagem **binária**, ou seja, de apenas dois símbolos. Uma mensagem digital construída com M símbolos é denominada mensagem M -ária.

Mensagens analógicas são caracterizadas por dados cujos valores variam em um intervalo contínuo e são definidas em um período contínuo de tempo. Por exemplo, a temperatura ou a pressão atmosférica de um certo local, ao longo do tempo, pode variar em um intervalo contínuo e pode assumir um número infinito (incontável) de valores possíveis. Uma peça musical gravada por um pianista também é um sinal analógico. De modo semelhante, a amplitude de uma particular forma de onda de voz varia em um intervalo contínuo. Em um dado intervalo de tempo, existe um número infinito de diferentes possíveis formas de onda de voz, em contraste com apenas um número finito de possíveis mensagens digitais.

1.2.1 Imunidade de Sinais Digitais ao Ruído

Não é segredo, mesmo para um observador casual, que, toda vez que alguém examina os mais recentes produtos de comunicação eletrônica, uma “tecnologia digital” mais nova e melhor substitui a velha tecnologia analógica. Na última década, os telefones celulares completaram a transformação da primeira geração analógica AMPS na atual segunda geração (por exemplo, GSM, CDMA) e sua descendente digital, a terceira geração (por exemplo, WCDMA). Mais visível nas residências, a tecnologia de vídeo digital (DVD) tornou o sistema analógico de VHS praticamente obsoleto. A televisão digital dá prosseguimento ao ataque digital à tecnologia de vídeo analógico, removendo o último remanescente da televisão em cores. É razoável perguntar: por que as tecnologias digitais são melhores? A resposta está associada a aspectos econômicos e à qualidade. A motivação econômica é a facilidade de adoção dos versáteis, poderosos e baratos microprocessadores digitais de alta velocidade. Ainda mais importante, no que diz respeito ao nível de qualidade, uma característica proeminente das comunicações digitais é a maior imunidade de sinais digitais ao ruído e a interferências.

As mensagens digitais são transmitidas como um conjunto finito de formas de ondas elétricas. Em outras palavras, uma mensagem digital é gerada a partir de um alfabeto finito, e cada caractere no alfabeto pode ser representado por uma forma de onda ou por uma combinação sequencial de formas de onda. Por exemplo, no envio de uma mensagem em código Morse, um traço pode ser transmitido por um pulso elétrico de amplitude $A/2$ e o ponto, por um pulso de amplitude negativa $-A/2$ (Fig. 1.3a). Em um caso M -ário, M pulsos (ou formas de onda) elétricos são usados; cada um dos M pulsos representa um dos M símbolos possíveis. Após a transmissão, o receptor deve extrair a mensagem do sinal distorcido e ruidoso na saída do canal. É mais fácil, em geral, extrair mensagens de sinais digitais que de sinais analógicos, pois a decisão digital deve pertencer a um alfabeto de tamanho finito. Consideremos um caso binário: dois símbolos são codificados como pulsos retangulares de amplitudes $A/2$ e $-A/2$. A única decisão no receptor consiste em escolher entre dois possíveis pulsos recebidos; detalhes da forma do pulso não são relevantes. Um alfabeto finito resulta em imunidade ao ruído e a interferências. A decisão de um receptor pode ser feita com razoável certeza mesmo se os pulsos forem afetados por distorção modesta e ruído (Fig. 1.3). A mensagem digital na Fig. 1.3a é distorcida pelo canal, como ilustrado na Fig. 1.3b. Contudo, caso a distorção não seja muito grande, os dados podem ser recuperados sem erro, pois basta uma simples decisão binária: o pulso recebido é positivo ou negativo? A Fig. 1.3c mostra os mesmos dados com distorção do canal e ruído. Os dados podem ser recuperados corretamente desde que a distorção e o ruído estejam dentro de certos limites. Em contraste, em uma mensagem analógica, a própria forma de onda transporta a informação desejada, e mesmo uma pequena distorção ou interferência será percebida no sinal recebido. Fica claro que um sistema de comunicação digital é mais robusto que um sistema de comunicação analógico, pois suporta melhor ruído e distorção (desde que estes se mantenham dentro de um limite).

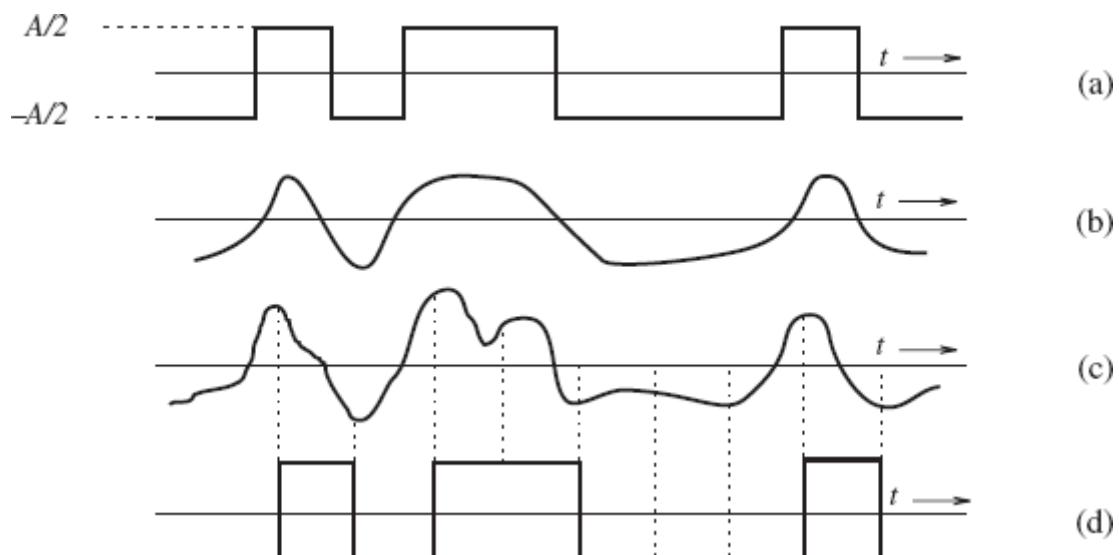


Figura 1.3

(a) Sinal transmitido. (b) Sinal distorcido recebido (sem ruído). (c) Sinal distorcido recebido (com ruído).(d) Sinal regenerado (com atraso).

1.2.2 Viabilidade de Repetidores Regenerativos sem Distorção

Uma das principais razões para a qualidade superior de sistemas digitais em relação a sistemas analógicos é a viabilidade de implementação, nos primeiros, de repetidores e nós de rede **regenerativos**. Em um sistema digital, estações repetidoras são posicionadas ao longo do percurso de comunicação a distâncias curtas o bastante para assegurar que ruído e distorção permaneçam dentro de um limite. Isso permite a detecção de pulsos com grande precisão. Em cada estação repetidora ou nó da rede, os pulsos que chegam são detectados, de modo que pulsos novos e “limpos” são retransmitidos à próxima estação repetidora ou nó. Esse processo evita o acúmulo de ruído e distorção ao longo do percurso, pois limpa os pulsos a intervalos regulares entre repetidores. Desta forma, mensagens podem ser transmitidas por distâncias mais longas com maior precisão. A aplicação de regeneração sem distorção, por meio de repetidores, é bastante disseminada em sistemas de comunicação de longas distâncias e em nós de redes grandes (e, possivelmente, heterogêneas).

Em sistemas analógicos, sinais e ruído em uma mesma largura de banda não podem ser separados. Nesses casos, regeneradores consistem basicamente em filtros e amplificadores e não são “regenerativos”. Portanto, é impossível evitar acúmulo de ruído e distorção na banda passante ao longo do percurso. Em consequência, a distorção e a interferência de ruído podem se acumular por todo o percurso de transmissão à medida que o sinal transpõe a rede. Para piorar o problema, o sinal é continuamente atenuado no percurso da transmissão. Assim, com o aumento da distância, o sinal se torna mais fraco, enquanto a distorção e o ruído se acumulam mais. Por fim, o sinal, destruído por distorção e ruído, torna-se irreconhecível. A amplificação é de pouca valia, pois amplifica igualmente o sinal e o ruído. Em consequência, a distância que uma mensagem analógica pode percorrer para ainda ser recebida com sucesso é limitada pela potência do primeiro transmissor. Apesar dessas limitações, a comunicação analógica foi, no passado, amplamente utilizada com sucesso para comunicações de curtas e médias distâncias. Hoje, com o advento da comunicação por fibras ópticas e a dramática redução de custos alcançada na fabricação de circuitos digitais de alta velocidade e de dispositivos digitais de armazenamento de dados, praticamente todos os novos sistemas de comunicação instalados são digitais. Contudo, alguns antigos sistemas de comunicação analógicos ainda estão em uso, incluindo os empregados na difusão de rádio AM e FM.

1.2.3 Conversão Analógico-Digital (A/D)

Apesar da diferença entre sinais analógicos e digitais, há uma base comum entre os dois: a conversão de mensagens analógicas em sinais digitais (conversão A/D). O conversor analógico-digital (A/D), um dispositivo essencial em eletrônica, permite que sistemas de comunicação digital transportem sinais analógicos, como áudio e vídeo. Em geral, sinais analógicos são contínuos no tempo e em um intervalo de valores; ou seja, têm valores em cada instante de tempo e seus valores podem ter qualquer amplitude no dado intervalo. Sinais digitais, por sua vez, existem apenas em momentos discretos no tempo e podem assumir somente um número finito de valores. A conversão A/D jamais é 100% precisa. Contudo, como a percepção humana não exige precisão infinita, a conversão A/D pode, de modo efetivo, capturar a informação necessária de uma fonte analógica para a transmissão do sinal digital.

A conversão A/D se dá em dois passos: um sinal em tempo contínuo é *amostrado* para produzir um sinal em tempo discreto, cujas amplitudes contínuas são, então, *quantizadas* em níveis discretos de sinal. Primeiro, o espectro de um sinal indica as magnitudes relativas das diversas componentes de frequência. O **teorema da amostragem** (Capítulo 6) afirma que, se a mais alta frequência no espectro do sinal for B (em hertz), o sinal pode ser reconstruído a partir das amostras discretas, tomadas a uma taxa uniforme não menor que $2B$ amostras por segundo. Isso significa que, para preservar a informação de um sinal em tempo contínuo, basta transmitir apenas suas amostras (Fig. 1.4). Entretanto, os valores das amostras ainda não estão na forma digital, pois assumem valores em um intervalo contínuo. Então, o segundo passo da **quantização** é efetuado. Por meio da quantização, cada amostra é aproximada, ou “arredondada”, ao nível de quantização mais próximo, como ilustrado na Fig. 1.4. Como a precisão da percepção humana é limitada, a quantização feita com granularidade suficiente não compromete a qualidade do sinal. Se as amplitudes do sinal de mensagem $m(t)$ tiverem valores no intervalo $(-m_p, m_p)$, o quantificador parte esse intervalo em L subintervalos. Cada amostra de amplitude é aproximada ao valor médio do subintervalo que a contém e passa a ser representada por um dos L números. A informação é, então, digitalizada dessa forma. Após os dois passos de amostragem e quantização, a conversão analógico-digital (A/D) se completa.

O sinal quantizado é uma aproximação do sinal original. A precisão do sinal quantizado pode ser aumentada a qualquer grau desejado por meio do aumento do número de níveis L . Para a inteligibilidade de sinais de voz, por exemplo, é suficiente tomar $L = 8$ ou 16 . Para uso comercial, $L = 32$ é um valor mínimo; para comunicação telefônica, $L = 128$ e 256 são valores típicos.

Um típico sinal binário distorcido com ruído adquirido ao longo do canal é ilustrado na Fig. 1.3. Se A for suficientemente grande em comparação às amplitudes de ruído, o receptor ainda pode distinguir corretamente entre os dois pulsos. A amplitude dos pulsos é, em geral, 5 a 10 vezes a amplitude rms do ruído. Com um valor tão alto para a relação sinal-ruído (SNR — *signal-to-noise ratio*), a probabilidade de erro no receptor é menor que 10^{-6} ; ou seja, em média, o receptor cometerá menos que um erro a cada milhão de pulsos. Portanto, o efeito aleatório de ruído e distorção do canal é praticamente eliminado. Quando sinais analógicos são transmitidos na forma digital, algum erro ou incerteza no sinal recebido pode ser causado pela quantização, além do ruído e das interferências do canal.

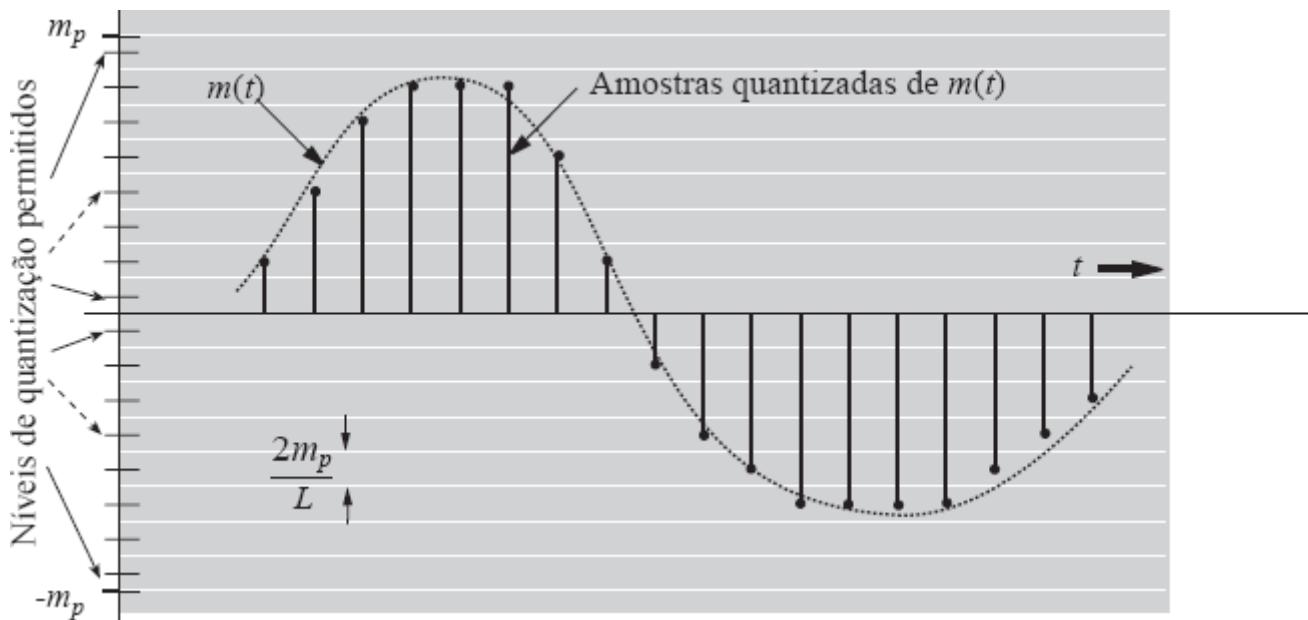


Figura 1.4
Conversão analógica-digital de um sinal.

A incerteza ou o erro causado pela quantização pode ser reduzido a qualquer valor desejado através do aumento de L . Além disso, o uso de repetidores regenerativos permite a transmissão de sinais ao longo de distâncias muito maiores do que seria possível com sinais analógicos. Como veremos mais adiante no texto, o preço de todos esses benefícios da comunicação digital é pago em termos de maiores complexidade de processamento e largura de banda de transmissão.

1.2.4 Modulação por Codificação de Pulsos – Uma Representação Digital

Uma vez completada a conversão A/D, a mensagem analógica original é representada por uma sequência de amostras, cada uma assumindo um dos L níveis de quantização preestabelecidos. A transmissão dessa sequência quantizada é tarefa de sistemas de comunicação digital. Formas de onda de sinal devem, então, ser usadas para representar a sequência de amostras quantizadas no processo de transmissão. Do mesmo modo, um dispositivo digital de armazenamento também precisa representar as amostras como formas de onda de sinal. A *modulação por codificação de pulsos* (PCM — pulse-coded modulation)^{*} é um mecanismo muito simples e comumente empregado para este propósito.

Primeiro, um *bit* de informação se refere a um *dígito binário*^{**}, **1** ou **0**. A ideia por trás de PCM é representar cada amostra quantizada por uma combinação ordenada de dois pulsos básicos: $p_1(t)$ para representar o bit **1** e $p_0(t)$ para representar o bit **0**. Como cada um dos possíveis L valores de amostra pode ser escrito como uma sequência de bits de comprimento $\log_2 L$, cada amostra pode, assim, ser mapeada em uma sequência curta de pulsos que representa a sequência binária de bits. Por exemplo, se $L = 16$, cada nível de quantização pode ser descrito de forma única por 4 bits. Se empregarmos dois pulsos básicos, $p_1(t) = A/2$ e $p_0(t) = -A/2$. Uma sequência de quatro desses pulsos resulta em $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ padrões distintos, como ilustrado na Fig. 1.5. Podemos alocar um padrão a cada um dos 16 valores quantizados a serem transmitidos. Cada amostra quantizada é, então, codificada em uma sequência de quatro pulsos binários. Esse é o princípio da transmissão PCM, em que a sinalização é efetuada por meio de apenas dois pulsos (ou símbolos) básicos. O caso binário é de grande importância prática, devido à sua simplicidade e facilidade de detecção. A maior parte da comunicação digital da atualidade é binária.^{***}

Embora PCM tenha sido inventada por P. M. Rainey em 1926 e redescoberta por A. H. Reeves em 1939, apenas na década de 1960 o grupo Bell System^{****} instalou o primeiro enlace de comunicação a utilizar PCM para transmissão de voz. O custo e o tamanho de circuitos a válvulas foram o principal impedimento para o emprego de PCM, até a descoberta de dispositivos semicondutores. PCM se tornou prática com o advento do transistor.

Dessa discussão sobre PCM, chegamos a uma conclusão interessante (e, até certo ponto, nada óvia): qualquer comunicação possível pode ser transmitida por meio de um mínimo de dois símbolos. Assim, com apenas uma sequência adequada de piscadas de olho, podemos transmitir qualquer mensagem, seja uma conversa, um livro, um filme ou uma ópera. Todos os possíveis detalhes (como os variados tons de cores de objetos, timbres de voz etc.) reproduzíveis em uma tela de cinema ou na televisão colorida de alta definição podem ser transmitidos, sem perda de precisão, por meras piscadas de um olho.^{*****}

Dígito	Equivalente binário	Forma de onda da codificação por pulsos
0	0000	
1	0001	
2	0010	
3	0011	
4	0100	
5	0101	
6	0110	
7	0111	
8	1000	
9	1001	
10	1010	
11	1011	
12	1100	
13	1101	
14	1110	
15	1111	

Figura 1.5

Exemplo de codificação PCM.

1.3 EFEITO, RELAÇÃO SINAL-RUÍDO E CAPACIDADE DO CANAL

No projeto de sistemas de comunicação, são essenciais o entendimento e a análise de fatores importantes como características do sinal e do canal, amplitude relativa de ruído, número máximo de bits por segundo que pode ser transmitido por um canal e, principalmente, a qualidade do sinal.

1.3.1 Largura de Banda e Potência de Sinal

Em um dado sistema de comunicação (digital), os parâmetros e as limitações físicas fundamentais que controlam a taxa de transmissão e qualidade do canal são a largura de banda B e a potência de sinal P_S . Em capítulos posteriores, esses parâmetros serão discutidos em detalhes tanto qualitativa como quantitativamente. Por ora, nosso objetivo é discuti-los apenas de modo qualitativo.

A **largura de banda** de um canal é o intervalo de frequências que ele é capaz de transmitir com razoável fidelidade. Por exemplo, se um canal transmite com razoável fidelidade um sinal cujas componentes de frequência variam de 0 Hz (dc) a um máximo de 5.000 Hz (5 kHz), a largura de banda B do canal é 5 kHz. Da mesma forma, cada sinal tem uma largura de banda que mede a separação máxima entre suas componentes de frequência.

Quanto mais rápidas as variações de um sinal, maior sua frequência máxima e maior sua largura de banda. Sinais ricos em conteúdo que variam rapidamente (como os associados a cenas de batalhas em um vídeo) têm maior largura de banda do que sinais maçantes que variam lentamente (como os de uma novela diurna ou de um vídeo de um animal dormindo). Um sinal pode ser transmitido com sucesso através de um canal se a largura de banda do canal for maior que a do sinal.

Para entendermos o papel de B , consideremos a possibilidade de um aumento na velocidade de transmissão por meio da compressão do sinal no tempo. A compressão do sinal no tempo por um fator de 2 permite que ele seja transmitido na metade do tempo, de modo que a velocidade (taxa) de transmissão dobra. Contudo, a compressão do sinal no tempo por um fator de 2 faz com que o sinal “se agite” duas vezes mais rápido, o que também dobra as frequências de seus componentes. Muitas pessoas já experimentaram esse efeito tocando fitas de áudio no dobro da velocidade normal, fazendo com que as vozes das pessoas soassem como a fala esgançada de personagens de desenho animado. Para transmitir o sinal comprimido sem distorção, a largura de banda do canal também deve ser dobrada. Portanto, a taxa de transmissão de informação que um canal pode acomodar com sucesso é diretamente proporcional a B . De modo mais genérico, se um canal de largura de banda B pode transmitir N pulsos por segundo, para transmitir KN pulsos por segundo com a mesma tecnologia é necessário um canal com largura de banda KB . Em outras palavras, o número de pulsos por segundo que pode ser transmitido através de um canal é diretamente proporcional à sua largura de banda B .

A **potência de sinal** P_S desempenha duplo papel na transmissão. Primeiro, P_S está relacionada à qualidade de transmissão. O aumento de P_S reforça o pulso de sinal e diminui os efeitos do ruído e interferência do canal. Na verdade, a qualidade de sistemas de comunicação analógicos e digitais varia com a relação sinal-ruído (SNR). Em qualquer situação, um valor mínimo da SNR no receptor é necessário para comunicação com qualidade. Portanto, um grande valor da potência de sinal P_S permite que o sistema mantenha uma SNR mínima ao longo de uma distância maior, garantindo comunicação com qualidade com um alcance maior.

O segundo papel da potência de sinal é menos óbvio, embora igualmente importante. Do ponto de vista da teoria da informação, a largura de banda B e a potência de sinal P_S são, até certo ponto, intercambiáveis; ou seja, para manter determinada taxa e precisão de transmissão de informação, podemos negociar entre os valores de P_S e B . Assim, podemos reduzir B se estivermos dispostos a aumentar P_S ou podemos diminuir P_S se uma maior largura de banda B estiver disponível. A prova rigorosa dessa afirmação será apresentada no Capítulo 13.

Em resumo, os dois principais recursos para comunicação são a largura de banda e a potência transmitida. Em um dado canal de comunicação, um recurso pode ser mais valioso que o outro e o esquema de comunicação deve ser projetado levando isso em consideração. Um típico canal telefônico, por exemplo, tem largura de banda limitada (3 kHz), mas maior liberdade em relação à potência. Em naves espaciais, por sua vez, a largura de banda disponível é enorme, mas a potência é severamente limitada. Portanto, as soluções de comunicação para esses dois casos são radicalmente distintas.

1.3.2 Capacidade do Canal e Taxa de Dados

A largura de banda do canal limita as larguras de banda de sinais que podem ser transmitidos com sucesso, enquanto a relação sinal-ruído (SNR) no receptor determina a qualidade da recuperação dos sinais transmitidos. Uma maior SNR significa que o pulso de sinal transmitido pode usar mais níveis de sinais, o que permite o transporte de um número maior de bits em cada transmissão de pulso. Uma maior largura de banda B também significa que podemos transmitir mais pulsos (variação mais rápida) ao longo do canal. Em consequência, SNR e largura de banda B afetam a “vazão” do canal. A máxima vazão que pode ser transportada de modo confiável por um canal é denominada capacidade do canal.

Um dos tipos de canais mais comumente encontrados é conhecido como canal com ruído gaussiano branco aditivo (AWGN — *Additive White Gaussian Noise*). O modelo de canal AWGN assume que a única distorção presente é ruído gaussiano branco aditivo com largura de banda finita B . Esse modelo ideal acomoda aplicações com canal sem distorção e provê um limite superior de desempenho para canais genéricos sujeitos a distorções. A capacidade do canal AWGN com largura de banda limitada foi estabelecida, de forma brilhante, na equação de Shannon,

$$C = B \log_2(1 + \text{SNR}) \quad \text{bit/s} \quad (1.1)$$

Nessa equação, a capacidade do canal (C) representa o limite superior da taxa de transmissão de informação por segundo. Em outras palavras, C é o máximo número de bits que podem ser transmitidos por segundo com uma probabilidade de erro arbitrariamente próxima de zero; ou seja, a transmissão é tão confiável quanto desejarmos. Contudo, a capacidade apenas ressalta essa *possibilidade*, pois não especifica como pode ser implementada. É importante ressaltar que é impossível transmitir a uma taxa superior a essa sem incorrer em erros. A equação de Shannon deixa bem clara a limitação imposta à taxa de comunicação por B e pela SNR. Se não houvesse ruído no canal (o que corresponderia a $\text{SNR} = \infty$), a capacidade C seria ∞ e a taxa de comunicação poderia ser arbitrariamente alta. Poderíamos, então, transmitir qualquer quantidade de informação em um canal sem ruído. Essa afirmação pode ser comprovada com facilidade. Se o ruído fosse zero, não haveria incerteza na amplitude do pulso recebido e o receptor seria capaz de detectar qualquer amplitude de pulso sem erro. A menor separação entre amplitudes de pulsos pode ser tão pequena quanto desejarmos e, para um dado pulso qualquer, teríamos disponível um número infinito de níveis próximos. Poderíamos alocar um nível a cada mensagem possível. Como um número infinito de níveis estaria disponível, seria possível alocar um nível a cada mensagem concebível. A implementação de um código desse tipo pode não ser prática, mas isso não é relevante nesta argumentação. O importante, aqui, é que, se o ruído fosse zero, a comunicação deixaria de ser um problema, ao menos em teoria. A implementação de um esquema como esse seria difícil, pois requereria a geração e detecção de pulsos com amplitudes precisas. As dificuldades práticas decorrentes imporiam um limite sobre a taxa de comunicação. Vale a pena ressaltar que o resultado de Shannon, que representa um limite superior para a taxa de comunicação em um canal, seria

alcançável somente com um sistema de complexidade monstruosa e impraticável, e o atraso temporal na recepção tenderia ao infinito. Sistemas práticos operam a taxas inferiores à de Shannon.

Em resumo, a equação de capacidade de Shannon demonstra, de modo qualitativo, os papéis básicos desempenhados por B e SNR na limitação do desempenho de um sistema de comunicações. Esses dois parâmetros representam, então, a principal limitação sobre a taxa de comunicação. A possibilidade da troca de valores entre esses dois parâmetros básicos também é demonstrada pela equação de Shannon.

Como exemplo prático da troca de valores entre SNR e a largura de banda B , consideremos o cenário em que um homem de voz suave fala um pouco rápido demais e não conseguimos entender completamente o que diz. Isso significa que, como ouvintes, nossa largura de banda B é muito pequena e, em consequência, a capacidade C não é alta o bastante para acomodar as frases faladas rapidamente. Contudo, se o homem puder falar mais alto (aumentando a potência e, portanto, a SNR), é provável que o entendamos melhor sem nenhuma outra alteração. Tal exemplo ilustra o conceito de permuta de recursos entre SNR e B . Vale notar que, no entanto, essa relação não é linear. Dobrar o volume do orador permite que ele fale um pouco mais rápido, mas não duas vezes mais rápido. Esse efeito de permuta desigual é totalmente capturado na equação de Shannon [Eq. (1.1)], na qual a duplicação da SNR não pode sempre compensar a perda de 50% em B .

1.4 MODULAÇÃO E DETECÇÃO

Sinais analógicos gerados por fontes de mensagens ou sinais digitais gerados por meio da conversão A/D de sinais analógicos são, em geral, referidos como sinais em banda base, pois têm natureza passa-baixos. Sinais em banda base podem ser transmitidos diretamente por meio de um canal apropriado (por exemplo, telefone, fax). Contudo, dependendo das características do canal e do sinal no domínio da frequência, sinais em banda base produzidos por diversas fontes de informação nem sempre são adequados à transmissão direta através de um dado canal. Quando as bandas de frequências do sinal e do canal não coincidem exatamente, os canais não podem ser deslocados (em frequência). Portanto, as mensagens devem ser deslocadas para as bandas de frequências adequadas aos canais. Sinais de mensagem devem, em consequência, ser modificados para que a transmissão se torne possível. Nesse processo de conversão, conhecido como **modulação**, o sinal em banda base é usado para modificar (isto é, modular) algum parâmetro de uma *portadora* de sinal de radiofrequência (RF).

Uma **portadora** é uma senoide de alta frequência. Através da modulação, um dos parâmetros da portadora senoidal — como amplitude, frequência ou fase — é variado proporcionalmente ao sinal em banda base $m(t)$. Dessa forma, temos modulação em amplitude (AM — *amplitude modulation*), modulação em frequência (FM — *frequency modulation*) e modulação em fase (PM — *phase modulation*). A Fig. 1.6 ilustra um sinal em banda base $m(t)$ e as correspondentes formas de onda AM e FM. Na modulação AM, a amplitude da portadora varia em proporção a $m(t)$; na modulação FM, a frequência da portadora varia em proporção a $m(t)$. Para reconstruir o sinal em banda base no receptor, o sinal modulado deve passar por um processo reverso denominado **demodulação**.

Como mencionado, a modulação é utilizada para permitir a transmissão. Algumas das principais razões para a modulação são discutidas a seguir.

1.4.1 Facilidade de Radiação/Transmissão

Para radiação eficiente de energia eletromagnética, a antena radiante deve ter dimensões que sejam da ordem de uma fração ou mais do comprimento de onda do sinal de excitação. Para muitos sinais em banda base, os comprimentos de onda são demasiadamente grandes para dimensões razoáveis de antenas. Por exemplo, a potência em um sinal de voz é concentrada em frequências no intervalo de 100 a 3000 MHz. Os correspondentes comprimentos de onda variam de 100 a 3000 km. Esses longos comprimentos de onda requerem antenas cujas dimensões são demasiadamente grandes para ser construídas. Com a modulação de uma portadora, transladamos o espectro do sinal para as vizinhanças da frequência da portadora, que corresponde a um comprimento de onda muito menor. Por exemplo, uma portadora de 10 MHz tem um comprimento de onda de apenas 30 m e sua transmissão pode ser feita com uma antena com dimensões da ordem de 3 m. Nesse sentido, a modulação corresponde a fazer o sinal em banda base pegar uma carona com uma senoide de alta frequência (portadora). A portadora e o sinal em banda base também podem ser comparados a uma pedra e a um pedaço de papel. Se jogarmos o papel no ar, ele não irá muito longe. Contudo, se embrulharmos uma pedra (portadora) com ele, poderá ser lançado a uma distância muito maior.

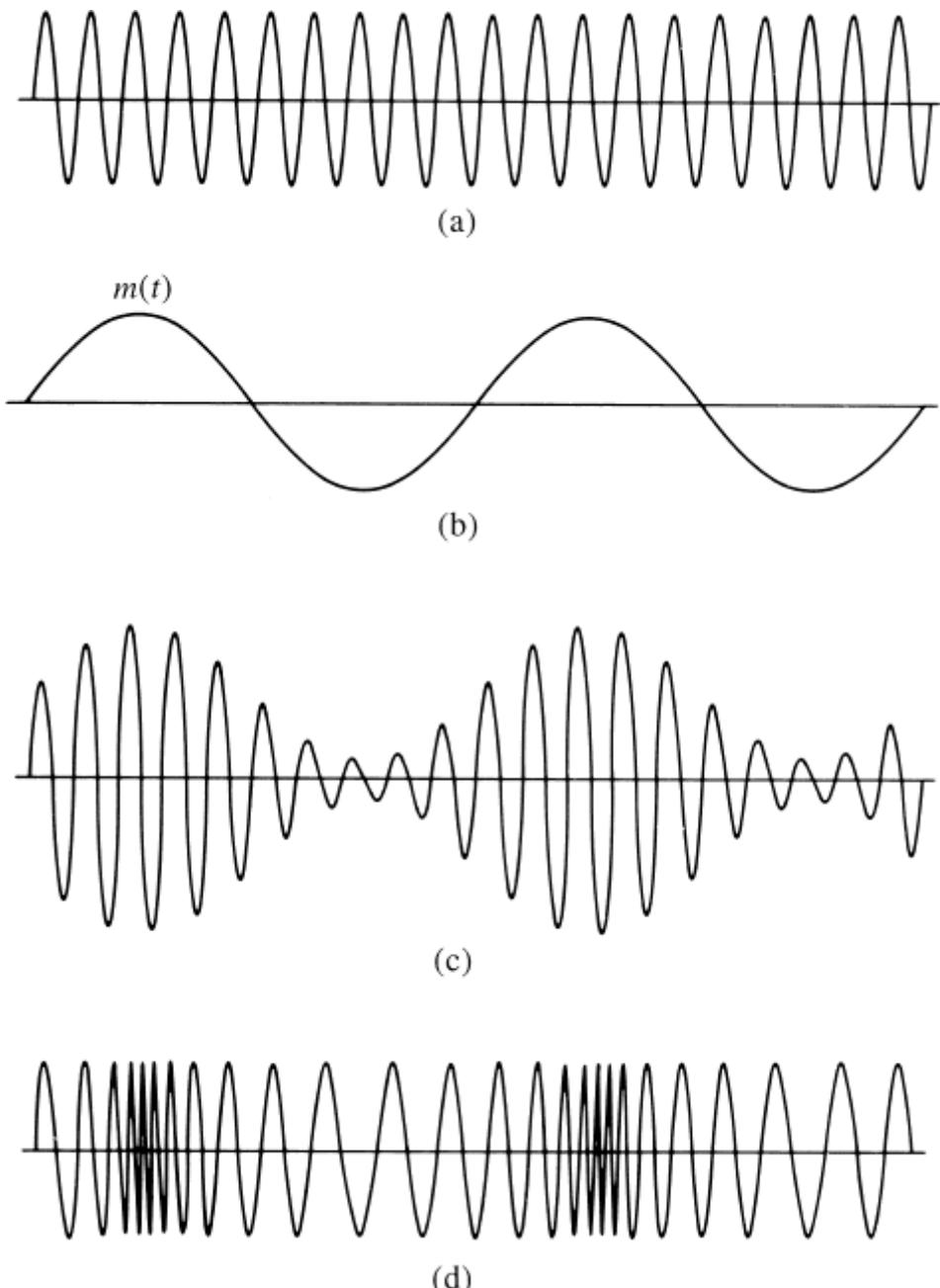


Figura 1.6

Modulação: (a) portadora; (b) sinal modulante (em banda base); (c) onda modulada em amplitude; (d) onda modulada em frequência.

1.4.2 Transmissão Simultânea de Múltiplos Sinais — Multiplexação

A modulação também permite que múltiplos sinais sejam transmitidos ao mesmo tempo em uma mesma área geográfica sem interferência mútua direta. Um exemplo simples disso são as diversas estações de televisão transportadas por um mesmo cabo (ou pelo ar) até os receptores de TV nas casas das pessoas. Sem modulação, múltiplos sinais de vídeo interfeririam uns com os outros, pois todos os sinais de vídeo em banda base têm a mesma largura de banda. Portanto, sem modulação, a TV a cabo ou pelo ar seria limitada a uma estação em uma dada região — o que seria um protocolo com grandes perdas, pois a largura de banda do canal é muitas vezes maior que a do sinal.

Uma forma de resolver esse problema é o uso de modulação. Podemos usar as várias estações de TV para modular portadoras de distintas frequências; dessa forma, cada sinal é transladado a uma faixa de frequências diferentes. Se as diversas portadoras forem suficientemente espaçadas em frequência, os espectros dos sinais modulados (conhecidos como canais de TV) não se sobreporão e, portanto, não haverá interferência entre os mesmos. No receptor (aparelho de TV), um filtro passa-faixa sintonizável poderá selecionar a desejada estação ou canal de TV. Esse método de transmissão de vários sinais simultaneamente, em faixas de frequências que não se sobreponham, é conhecido como **multiplexação por divisão em frequência (FDM —frequency division multiplexing)**. Um esquema semelhante também é empregado na difusão de rádio AM e FM. A largura de banda do canal é compartilhada por diversos sinais sem nenhuma sobreposição.

Outro método de multiplexar vários sinais é conhecido como **multiplexação por divisão no tempo (TDM —time division multiplexing)**. Esse método é adequado quando um sinal tem a forma de um trem de pulsos (como em PCM). Quando os pulsos

têm as larguras reduzidas, os espaços vazios entre pulsos de um sinal são preenchidos por pulsos de outros sinais. Assim, entrelaçando os trens de pulsos dos vários sinais em uma ordem específica, o tempo de transmissão é compartilhado por um certo número de sinais. No receptor, os trens de pulsos correspondentes aos diversos sinais são separados.

1.4.3 Demodulação

Uma vez que múltiplos sinais tenham chegado ao receptor, o sinal desejado deve ser detectado e sua forma original em banda base, recuperada. Notemos que, por conta da FDM, o primeiro estágio de um demodulador, em geral, requer um filtro passa-faixa, de modo que o receptor possa selecionar o sinal modulado em uma banda de frequências predeterminada especificada pela estação transmissora ou canal. Depois que um dado sinal modulado tenha sido isolado, o demodulador deve converter a variação de amplitude, frequência ou fase da portadora de volta ao sinal de tensão em banda base.

Para os três esquemas básicos de modulação, AM, FM e PM, os correspondentes demoduladores devem ser projetados de modo que a tensão de saída do detector varie proporcionalmente à amplitude, frequência ou fase, respectivamente, do sinal modulado de entrada. Após a implementação de circuitos com tais características de resposta, o demodulador pode converter os sinais modulados (de RF) de volta aos sinais em banda base que representam a mensagem original, seja ela de áudio, vídeo ou dados.

1.5 CODIFICAÇÕES DIGITAIS DE FONTE E PARA CORREÇÃO DE ERROS

Como mencionado, a relação sinal-ruído (SNR) e a largura da banda são dois fatores que determinam o desempenho de uma dada comunicação. Diferentemente do que se passa em sistemas de comunicação analógica, sistemas digitais, em geral, adotam medidas agressivas para reduzir a taxa de dados da fonte e combater o ruído do canal. Em particular, a *codificação da fonte* é aplicada para gerar o menor número possível de bits para uma mensagem sem sacrificar a precisão da detecção. O combate aos erros advindos de ruído e interferências, por sua vez, requer a introdução sistemática de *redundância* no transmissor, da qual o receptor pode se valer para corrigir erros causados por distorção do canal e ruído. Esse processo é conhecido como codificação para correção de erros no transmissor e decodificação para correção de erros no receptor.

Codificação de fonte e codificação para correção de erros são dois estágios sucessivos em um sistema de comunicação digital e atuam em uma batalha sem fim. Por um lado, o trabalho da codificação de fonte consiste em remover o máximo possível de redundância de uma mensagem, de modo a encurtar a sequência de mensagens digitais a ser transmitida. O objetivo da codificação de fonte é utilizar a menor largura de banda possível sem considerar ruído e interferência do canal. Por outro lado, a codificação para correção de erros introduz redundância de forma intencional e inteligente, para que, se erros ocorrerem na detecção, a redundância possa ajudar a corrigir os mais frequentes.

Aleatoriedade, Redundância e Codificação de Fonte

Para entender a codificação de fonte, é importante que, primeiro, discutamos o papel da *aleatoriedade* em comunicações. Como observado, o ruído do canal é um importante fator que limita o desempenho da comunicação, pois é aleatório e não pode ser removido por predição. A aleatoriedade também está intimamente associada aos sinais desejados em comunicações. Na verdade, ela é a essência das comunicações; significa imprevisibilidade ou incerteza de uma mensagem de fonte. Se uma fonte não tivesse imprevisibilidade, como aquele amigo que sempre quer repetir a mesma história de “como fui abduzido por um alienígena”, a mensagem seria previamente conhecida e não conteria nenhuma informação. Do mesmo modo, se uma pessoa pisca, transmite alguma informação em um dado contexto. Contudo, se a pessoa piscar continuamente com a regularidade de um relógio, as piscadas não transmitirão nenhuma informação. Em resumo, um sinal previsível não é aleatório e é completamente redundante. Portanto, uma mensagem conterá informação somente se for imprevisível. Maior previsibilidade significa maior redundância e, em consequência, menos informação. Em contraste, sinais aleatórios têm mais imprevisibilidade, ou menos previsibilidade, e contêm mais informação.

A codificação de fonte reduz a redundância com base na previsibilidade da fonte da mensagem. O objetivo da codificação de fonte é representar o sinal da fonte por meio de códigos que sejam tão curtos quanto possível. Códigos mais curtos são mais eficientes, pois exigem menor tempo de transmissão a uma dada taxa de dados. Portanto, no processo de codificação e transmissão da parte imprevisível e aleatória do sinal, a codificação de fonte deve remover a redundância do sinal. As mensagens mais previsíveis contêm mais redundância e requerem códigos mais curtos; mensagens menos previsíveis contêm mais informação e devem ser codificadas com códigos mais longos. Com a representação de mensagens mais previsíveis por meio de códigos mais curtos e de mensagens menos previsíveis com códigos mais longos, obtemos uma codificação de fonte mais eficiente. Consideremos o código Morse, por exemplo; nesse código, diferentes combinações de traços e pontos (palavras de código) são associadas às letras do alfabeto. Para minimizar o tempo de transmissão, palavras de código mais curtas são usadas para representar as letras que ocorrem com mais frequência (mais previsíveis, como *e*, *t* e *a*); palavras de código mais longas são usadas para representar as letras que ocorrem raramente (menos previsíveis, como *x*, *q* e *z*). Dessa forma, em média, uma mensagem em português tende a seguir uma distribuição conhecida de letras, resultando em sequências de código mais curtas, que podem ser transmitidas rapidamente. Isso explica por que o código Morse é uma boa codificação de fonte.

Mostraremos no Capítulo 13 que, para sinais digitais, o tempo total de transmissão é minimizado se uma mensagem (ou símbolo) de probabilidade P for representada por uma palavra de código cujo comprimento é proporcional a $\log(1/P)$. Isso é

conhecido como codificação (de fonte) pela entropia.

Codificação para Correção de Erros

A codificação para correção de erros desempenha um papel importante nas comunicações. Enquanto a codificação de fonte remove redundâncias, os códigos corretores de erros adicionam redundância. A introdução sistemática de redundância viabiliza a comunicação confiável.⁴ Devido à redundância, se alguns bits forem corrompidos por ruído ou interferências, outros bits a eles relacionados podem ajudar a recuperá-los, permitindo que a mensagem seja decodificada com precisão, apesar dos erros no sinal recebido. Todas as linguagens são redundantes. Por exemplo, o inglês tem uma redundância de cerca de 50%; isto é, em média, podemos descartar metade das letras ou palavras do inglês sem que o significado de uma dada mensagem seja perdido. Isso também significa que, em qualquer mensagem em inglês, o orador ou escritor tem livre escolha de metade das letras ou palavras, em média. A outra metade é determinada pela estrutura estatística do idioma. Se todas as redundâncias do inglês forem removidas, a transmissão de um telegrama ou uma conversa telefônica poderia ser feita em cerca da metade do tempo. Contudo, caso ocorresse um erro no receptor, seria muito difícil entender o significado da mensagem recebida. A redundância em uma mensagem desempenha, portanto, um papel útil no combate aos ruídos e interferências do canal.

Pode parecer paradoxal que, na codificação de fonte, removamos redundância e, na subsequente codificação para correção de erros, adicionemos mais redundância. Para explicar por que isso faz sentido, consideremos a remoção total das redundâncias do inglês através da codificação de fonte. Isso encurtaria a mensagem em 50% (para economizar largura de banda). Entretanto, para correção de erros, podemos recuperar alguma redundância sistemática; porém, essa redundância bem projetada tem apenas a metade do comprimento da que foi removida pela codificação de fonte, mas provê a mesma proteção contra erros. Portanto, fica claro que uma boa combinação de codificação de fonte e codificação para correção de erros pode remover redundância ineficiente sem sacrificar a correção de erros. Na verdade, um problema muito comum nesse campo é a eterna busca da *codificação conjunta fonte-canal* que permita máxima remoção de redundância sem afetar a correção de erros.

Para comprovarmos como redundância viabiliza a correção de erros, consideremos um exemplo: para a transmissão de amostras com $L = 16$ níveis de quantização, podemos utilizar um grupo de quatro pulsos binários, como mostrado na Fig. 1.5. Nesse esquema de codificação, não há redundância. Caso ocorra um erro na recepção de até mesmo apenas um pulso, o receptor produzirá um valor errado. Aqui, podemos usar redundância para eliminar o efeito de possíveis erros causados por ruído ou imperfeições do canal. Por exemplo, se adicionarmos a cada palavra de código um pulso com polaridade tal que o número de pulsos positivos seja par, teremos um código capaz de detectar um erro em qualquer posição. Assim, à palavra de código **0001**, adicionamos um quinto pulso, de polaridade positiva, e obtemos a nova palavra de código **00011**. Assim, o número de pulsos positivos é 2 (par). Se ocorrer um erro em alguma posição, essa paridade será violada. O receptor saberá que ocorreu um erro e poderá solicitar retransmissão da mensagem. Esse é um esquema de codificação muito simples e pode detectar apenas a ocorrência de um erro; não é capaz de localizar ou corrigir o erro. Além disso, esse esquema também não é capaz de detectar um número par de erros. A introdução de mais redundância permite não apenas detectar erros, mas também corrigi-los. Por exemplo, para $L = 16$ pode ser mostrado que a adição adequada de três pulsos permite a detecção e a correção de um erro que ocorra em qualquer localização. Códigos corretores de erros serão discutidos em detalhes no Capítulo 14.

1.6 BREVE REVISÃO HISTÓRICA DE TELECOMUNICAÇÕES MODERNAS

As telecomunicações (literalmente: comunicações a distância) sempre foram fundamentais para a sociedade humana. Mesmo na antiguidade, governos e unidades militares dependiam fortemente das telecomunicações para reunir informação e emitir ordens. O primeiro tipo de telecomunicação se valeu de mensageiros a pé ou a cavalo; mas a necessidade de transportar uma mensagem curta por uma longa distância (como avisar uma cidade da aproximação de invasores) levou ao emprego de sinais de fogo ou fumaça. O uso de espelhos para refletir a luz do sol (heliógrafos) foi outra forma eficaz de telecomunicação. O primeiro uso registrado dessa técnica se deu na Grécia antiga. Espelhos de sinalização também são mencionados no relato feito por Marco Polo de sua viagem ao Extremo Oriente.¹ Essas antigas tecnologias de comunicação *visual* são digitais, o que não deixa de ser surpreendente. Fogo e fumaça, em diferentes configurações, formariam distintas palavras de código. Para esse tipo de comunicação, pessoal especializado era posicionado em colinas ou montanhas nas proximidades de cidades gregas, formando uma cadeia de repetidores regenerativos. Na verdade, plataformas de sinalização com fogo ou fumaça ainda encontram-se espalhadas pela Grande Muralha da China. O mais interessante é que refletores ou lentes, equivalentes aos amplificadores e antenas que utilizamos hoje, também eram empregados para guiar a luz a distâncias maiores.

É natural que a montagem desses primitivos sistemas de comunicação *visual* fosse tediosa e que eles pudessem transmitir apenas alguns bits de informação por hora. Um sistema de comunicação visual muito mais eficiente foi desenvolvido há pouco mais de dois séculos. Em 1793, o francês Claude Chappe inventou o conceito de “telegrafia semafórica” e o explorou em uma série de experimentos. Esse sistema consistia em uma sequência de dispositivos sinalizadores, denominados semáforos, montados em torres e, geralmente, espaçados por uma distância de 10 km. (Um semáforo tinha a aparência de uma grande figura humana com bandeiras de sinalização nas duas mãos.) O operador de um semáforo de recepção transcreveria a mensagem visualmente, em geral com o auxílio de um telescópio, e a retransmitiria de sua torre para a próxima, e assim por diante. Esse telégrafo visual se tornou o principal sistema de comunicação na França e se espalhou por outros países, incluindo os Estados Unidos. O telégrafo semafórico acabou sendo substituído pelo telégrafo elétrico. Hoje em dia, apenas algumas ruas e pontos de

referência remanescentes, identificados com a denominação “Colina do Telégrafo”, nos lembram do papel desse sistema na história. Ainda no século XX, a comunicação visual (via lâmpadas de Aldis, bandeiras de sinalização ou heliógrafos) permaneceu uma importante parte da comunicação marítima.

Esses antigos sistemas de telecomunicações eram sistemas ópticos baseados em receptores visuais. Em consequência, podiam cobrir apenas distâncias em visada direta e dependiam de operadores humanos para decodificação dos sinais. Um evento importante que mudou a história das telecomunicações ocorreu em 1820, quando o dinamarquês Hans Christian Oersted descobriu a interação entre eletricidade e magnetismo.² **Michael Faraday** fez a descoberta crucial seguinte, que **mudou a história da eletricidade e das telecomunicações**, ao concluir que a corrente elétrica pode ser induzida em um condutor por um campo magnético variante no tempo, o que tornou possível a geração de eletricidade pelo movimento de campo magnético. Além disso, a transmissão de sinais elétricos também se tornou possível, pois a variação de um campo eletromagnético induz a alteração de corrente em um circuito distante. O aspecto notável da descoberta da indução de corrente por Faraday é ter estabelecido as bases para telecomunicação sem fio por distâncias sem visada direta e, o que é mais importante, ter mostrado como gerar eletricidade como uma fonte de energia para alimentar tais sistemas. O telégrafo elétrico foi inventado logo depois, dando origem à era dos sistemas de telecomunicação modernos.

Os sistemas de telecomunicações modernos percorreram um longo caminho desde seu surgimento. Como seria difícil detalhar todos os eventos históricos que marcaram o desenvolvimento recente das telecomunicações, usaremos a Tabela 1.1 para resumir alguns dos mais notáveis eventos na evolução dos sistemas de telecomunicações. Como nosso foco é a telecomunicação elétrica, não comentaremos a igualmente longa história das comunicações (por fibras ópticas).

É digno de nota o fato de que todos os sistemas de telecomunicações primitivos eram sistemas digitais baseados em símbolos. Apenas após a invenção do sistema telefônico por Alexander Graham Bell é que **sinais vivos** analógicos foram transmitidos. Sinais vivos podem ser instantaneamente ouvidos ou vistos pelos usuários receptores. A invenção de Bell, que inicia uma nova era (comunicação analógica), é um importante marco na história das telecomunicações. A Fig. 1.7 mostra uma cópia de uma ilustração da patente revolucionária do telefone de Bell (de 1876). Historiadores da ciência, com frequência, aclamam tal invenção como a *mais valiosa* patente já concedida na história.

A invenção de sistemas telefônicos também marca o início da era da comunicação analógica e da transmissão de sinal vivo. Em uma linha separada e igualmente excitante, a comunicação sem fio teve início em 1887, quando Heinrich Hertz demonstrou, pela primeira vez, um modo para detectar a presença de ondas eletromagnéticas. O cientista francês Edouard Branly, o físico inglês Oliver Lodge e o inventor russo Alexander Popov deram importantes contribuições ao desenvolvimento do receptor de rádio. O gênio croata Nikola Tesla também fez grandes contribuições a essa área. Valendo-se de experimentos e invenções anteriores, o cientista e inventor italiano Guglielmo Marconi desenvolveu, em 1895, um sistema de telégrafo sem fio pelo qual foi um dos agraciados com o Prêmio Nobel de Física de 1909. A telegrafia sem fio de Marconi foi um evento histórico das comunicações comerciais sem fio. Em pouco tempo, o casamento das invenções de Bell e Marconi permitiu que sinais analógicos de áudio fossem transmitidos sem fio, graças à tecnologia de modulação em amplitude (AM). A transmissão de música com qualidade via rádio FM foi demonstrada pela primeira vez pelo major Edwin H. Armstrong, inventor americano, em 1935, em uma reunião do IEEE (Institute of Electrical and Electronic Engineers) na cidade de Nova York, no Edifício Empire State.

Tabela 1.1
Importantes Eventos dos Dois Últimos Séculos das Telecomunicações *

Ano	Principais Eventos
1820	Primeiro experimento de magnetismo causado por corrente elétrica (por Hans C. Oersted)
1831	Descoberta da indução de corrente por radiação eletromagnética (por Michael Faraday)
1830-32	Nascimento do telégrafo (creditado a Joseph Henry e Pavel Schilling)
1837	Invenção do código Morse por Samuel F. B. Morse
1864	Teoria de ondas eletromagnéticas desenvolvida por James C. Maxwell
1866	Operação do primeiro cabo telegráfico transatlântico
1876	Invenção do telefone por Alexander G. Bell
1878	Primeira central telefônica em New Haven, Connecticut, EUA
1887	Detectação de ondas eletromagnéticas por Heinrich Hertz

1896	Telegrafia sem fio (radiotelegrafia) patenteada por Guglielmo Marconi
1901	Primeira transmissão radiotelegráfica transatlântica por Marconi
1906	Primeira difusão de rádio com modulação em amplitude (por Reginald A. Fessenden)
1907	Serviço regular de radiotelegrafia transatlântica
1915	Primeiro serviço telefônico transcontinental
1920	Primeiras estações comerciais de rádio AM
1921	Rádio móvel adotado pelo Departamento de Polícia de Detroit
1925	Demonstração do primeiro sistema de televisão (por Charles F. Jenkins)
1928	Primeira estação de televisão, W3XK, nos Estados Unidos
1935	Primeira demonstração de rádio FM (por Edwin H. Armstrong)
1941	Padrão NTSC de televisão em preto e branco
	Primeiro serviço comercial de rádio FM
1947	Conceito celular proposto, pela primeira vez, por Bell Labs
1948	Primeiro artigo importante sobre teoria da informação publicado por Claude E. Shannon
	Invenção do transistor, por William Shockley, Walter Brattain e John Bardeen
1949	Construção do código de Golay para correção de 3 (ou menos) erros de bits
1950	Construção dos códigos de Hamming para simples correções de erros
1953	Padrão NTSC para televisão em cores
1958	Conceito de circuito integrado proposto por Jack Kilby (Texas Instruments)
1960	Construção dos poderosos códigos de Reed-Solomon para correção de erros
1962	Desenvolvimento dos primeiros modems telefônicos para computadores: Bell Dataphone 103A (300 bits/s)
1962	Códigos corretores de erros por verificação de paridade de baixa densidade propostos por Robert G. Gallager
1968-9	Primeiros codificadores com correção de erros a bordo de sondas espaciais da NASA (Pioneer IX e Mariner VI)
1971	Primeira rede de computadores sem fio: AlohaNet
1973	Primeira demonstração de telefone celular portátil feita pela Motorola à Comissão Federal de Comunicação dos Estados Unidos
1978	Primeiro teste de telefonia celular móvel, pela AT&T
1984	Primeiro serviço AMPS (análogo) de telefone celular portátil, pela Motorola
1989	Desenvolvimento de modems DSL para conexões de alta velocidade com computadores
1991	Lançamento do primeiro serviço celular (digital) GSM (Finlândia)

Desenvolvimento da primeira rede de área local (LAN) sem fio (AT&T-NCR)

1993	Estabelecimento do padrão digital ATSC
1993	Códigos-turbo propostos por Berrou, Glavieux e Thitimajshima
1996	Lançamento do primeiro serviço celular CDMA (IS-95)
	Primeira difusão de HDTV
1997	Padrão IEEE 80 2.11(b) para rede LAN sem fio
1998	Exploração comercial de ADSL em larga escala
1999	Padrão IEEE 80 2.11a para rede LAN sem fio
2000	Lançamento do primeiro serviço celular 3D
2003	Padrão IEEE 80 2.11g para rede LAN sem fio

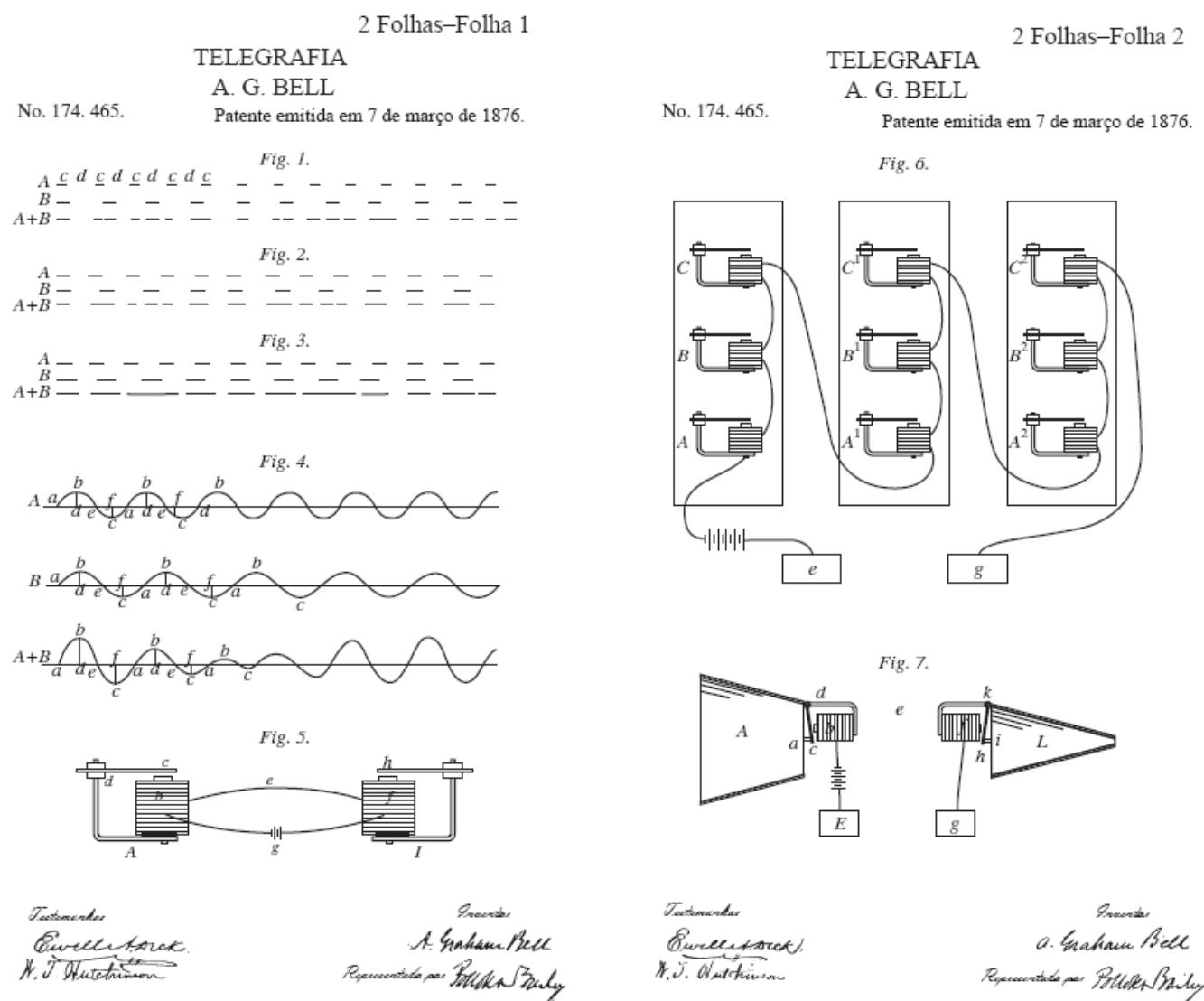


Figura 1.7

Ilustração da patente nº 174.465 obtida por Bell em 07 de março de 1876. (Dos arquivos do U.S. Patent and Trademark Office.)

Um ano histórico para as comunicações e para a eletrônica foi o de 1948: o ano que testemunhou o renascimento das comunicações digitais e a invenção do transistor semicondutor. O renascimento das comunicações digitais decorreu da

criatividade e genialidade de Claude E. Shannon, conhecido como o pai da moderna teoria da comunicação e informação. Em dois artigos seminais publicados em 1948, ele estabeleceu, pela primeira vez, o fundamental conceito de capacidade do canal e sua relação com a taxa de transmissão de informação. Ao determinar a capacidade do canal de diversos modelos importantes, Shannon³ provou que, desde que a informação fosse transmitida a uma taxa inferior à capacidade do canal, a comunicação sem erro era possível. No caso de canais ruidosos, Shannon mostrou a existência de bons códigos que tornariam a probabilidade de erros de transmissão arbitrariamente pequenos. Esse teorema relativo a canais ruidosos deu origem ao moderno campo de códigos corretores de erros. Por coincidência, a invenção do transistor (por Bill Shockley, Walter Brattain e John Bardeen) no mesmo ano preparou o caminho para o projeto e implementação de circuitos mais compactos, de maior potência e menos ruidosos que permitissem a exploração prática dos teoremas de Shannon. A sonda espacial Mariner IX, lançada em março de 1971 para exploração de Marte, foi a primeira missão da NASA oficialmente equipada com códigos corretores de erros, que permitiram a transmissão confiável de fotografias de Marte.

Hoje, vivemos uma era de comunicação multimídia e digital, marcada pela ampla utilização de redes de computadores e telefones celulares. O primeiro modem telefônico para conexão de um computador doméstico a um *mainframe* foi desenvolvido pela AT&T Bell Labs em 1962. O dispositivo fazia uso de um acoplador acústico como interface a um aparelho telefônico comum. O acoplador acústico convertia os dados do computador local em tons audíveis e se valia do microfone do telefone para transmiti-los pelas linhas telefônicas. O acoplador recebia os dados do computador *mainframe* via receptor auricular do telefone e os convertia em bits para o computador local, a uma taxa típica abaixo de 300 bits/s. Na década de 1990, a taxa de transmissão atingiu 56 kbit/s, devido aos rápidos avanços das tecnologias de circuitos integrados (propostos por Jack Kilby em 1958) e de comunicações digitais. Nos anos 2000, foram desenvolvidos modems para redes de área local sem fio (WLAN — *wireless local area network*), permitindo a conexão de computadores a 11 Mbit/s. A versão comercial desses modems para WLAN, do tamanho de um cartão de crédito, foi padronizada sob a denominação IEEE 802.11b.

Os avanços tecnológicos também permitiram a reformatação de sistemas celulares. Embora o conceito celular tivesse sido desenvolvido pela Bell Labs em 1947, sistemas comerciais surgiram apenas em 1983. Os telefones “móveis” da década de 1980 eram grandes e caros, usados principalmente por empresas. O primeiro telefone celular, desenvolvido pela Motorola em 1983 e denominado DynaTAC 8000X, pesava cerca de 800 g, ganhou o apelido de “tijolo” e custava quase quatro mil dólares. Esses telefones analógicos eram, basicamente, rádios duplex FM para transmissão de voz apenas. Hoje em dia, um telefone celular é, de fato, um dispositivo digital multimídia e multitarefa, não apenas útil para comunicação de voz, mas também para enviar e receber mensagens de correio eletrônico, acessar páginas da internet e exibir vídeos. Os dispositivos celulares atuais são muito pequenos e pesam poucos gramas. Agora, ao contrário do passado, telefones celulares são para as massas. Na verdade, na Europa há mais telefones celulares que pessoas. Na África, 13% da população adulta possui telefones celulares.*

Ao longo da história, o progresso da civilização humana tem sido inseparável dos avanços tecnológicos em telecomunicações, que tiveram um papel fundamental em praticamente todos os eventos importantes. Não é exagero afirmar que as telecomunicações ajudaram a moldar o mundo em que vivemos hoje e continuarão a definir nosso futuro. Os autores esperam, portanto, que este texto estimule o interesse de numerosos estudantes das tecnologias de telecomunicações. Com a discussão dos princípios essenciais dos modernos sistemas analógicos e digitais de comunicação, os autores esperam prover uma base sólida para o treinamento de futuras gerações de cientistas e engenheiros de comunicações.

REFERÊNCIAS

1. M. G. Murray, “Aimable Air/Sea Rescue Signal Mirrors,” *The Bent of Tau Beta Pi*, pp. 29–32, Fall 2004.
2. B. Bunch and A. Hellemans, Eds., *The History of Science and Technology: A Brower’s Guide to the Great Discoveries, Inventions, and the People Who Made Them from the Dawn of Time to Today*, Houghton Mifflin, Boston, 2004.
3. C. E. Shannon, “A Mathematical Theory of Communications,” *Bell Syst. Tech. J.* part I: pp. 379–423; part II: 623–656, July 1948.
4. S. Lin and D. J. Costello Jr., *Error Control Coding*, 2nd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2004.

-
- * Exetuando o serviço postal.
 - * Na verdade, a amplificação deteriorará ainda mais o sinal, devido ao ruído introduzido pelo amplificador.
 - * Aqui nos referimos à informação contida na fala e não a detalhes da mesma, como pronúncia das palavras, variações de inflexão, tom e ênfase. O sinal de voz de um microfone contém todos esses detalhes e é, portanto, um sinal analógico; seu conteúdo de informação é mais de mil vezes maior que a informação acessível de uma versão escrita da mesma mensagem.
 - * É comum, também, o termo *modulação por código de pulsos*. (N.T.)
 - ** Na língua inglesa, a palavra “bit” significa uma pequena parte ou pedaço de algo; no caso, um pedaço de informação. Bit também é interpretado como uma contração do termo em inglês para dígito binário, *binary digit*. (N.T.)
 - *** Existe um caso intermediário em que usamos quatro pulsos básicos (pulsos quaternários) de amplitudes $\pm A/2$ e $\pm 3A/2$. Uma sequência de dois pulsos quaternários podem formar $4 \times 4 = 16$ níveis distintos de valores.
 - **** Grupo de companhias que explorou o serviço telefônico nos Estados Unidos de 1877 a 1984, quando foi desmembrado por lei federal. (N.T.)
 - ***** É óbvio que, para transmitir a informação contida em um filme ou programa de televisão em tempo real, as piscadas de olho deveriam ser efetuadas em alta velocidade, inatingível para humanos. Por exemplo, um sinal de TV digital de alta definição (HDTV — *High-Definition TeleVision*) é representado por 19 milhões de bits (piscadas) por segundo.
 - * A menos que especificado de modo diferente, os eventos listados nesta tabela ocorreram nos Estados Unidos. (N.T.)
 - * Em outubro de 2010, segundo a Agência Nacional de Telecomunicações — ANATEL, o número de telefones celulares no Brasil era 194.439.250. Em novembro de 2010, a população do país, segundo o Censo de 2010, realizado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística — IBGE, era de 190.732.694 pessoas. (N.T.)

2 SINAIS E ESPAÇO DE SINAIS

Neste capítulo, discutiremos certos conceitos básicos relativos a sinais, que são processados por sistemas. Iniciaremos com uma explicação dos termos *sinal* e *sistema*.

Sinais

Um sinal, como implica o termo, é um conjunto de informação ou dados. Como exemplo, podemos citar o sinal de telefone ou o de televisão, os dados de vendas mensais de uma empresa, os preços de ações no fechamento do pregão da bolsa de valores (no caso do Brasil, a média do índice Bovespa). Em todos esses casos, os sinais são funções da variável independente *tempo*. No entanto, nem sempre é assim. Quando uma carga elétrica é distribuída em uma superfície, por exemplo, o sinal é a densidade de carga, uma função do *espaço*, e não do tempo. Neste livro, trataremos quase exclusivamente de sinais que são funções do tempo. A discussão, entretanto, se aplica também a outras variáveis independentes.

Sistemas

Sinais podem ser processados por **sistemas**, que podem modificá-los ou deles extrair informação adicional. Por exemplo, um lançador de míssil antiaéreo pode necessitar conhecer a localização futura de um alvo móvel hostil, que é rastreado pelo radar. Como o sinal de radar fornece a localização passada e a velocidade do alvo, com o processamento adequado do sinal do radar (a entrada) é possível estimar a posição futura do alvo. Assim, um sistema é uma entidade que *processa* um conjunto de sinais (**entradas**) para produzir outro conjunto de sinais (**saídas**). Um sistema pode ser constituído de componentes físicos, como em sistemas elétricos, mecânicos ou hidráulicos (implementação em hardware), ou pode ser um algoritmo que calcula uma saída a partir de um sinal de entrada (implementação em software).

2.1 TAMANHO DE UM SINAL

Energia de um Sinal

O tamanho de qualquer entidade é uma grandeza que indica sua intensidade. De maneira geral, um sinal varia com o tempo. Para estabelecer uma grandeza padrão que meça a intensidade de um sinal, normalmente vemos um sinal $g(t)$ como uma tensão através de um resistor de um ohm. Definimos a **energia do sinal** E_g do sinal $g(t)$ como a energia que a tensão $g(t)$ dissiparia no resistor. De modo mais formal, definimos E_g (para um sinal de valores reais) como

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt \quad (2.1)$$

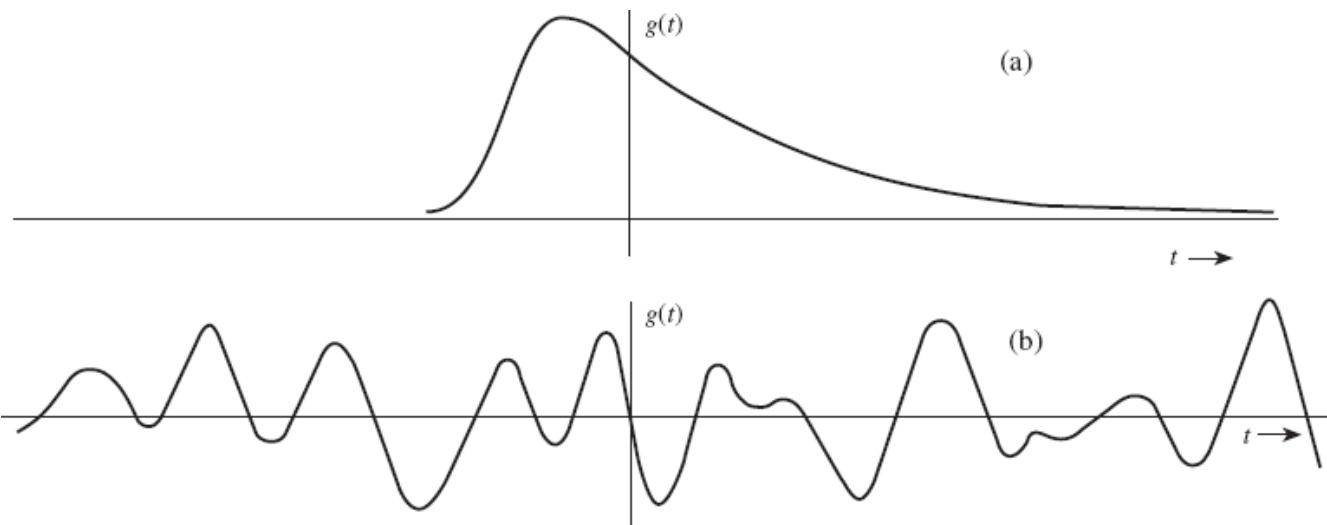


Figura 2.1

Exemplos de sinais. (a) Sinal com energia finita. (b) Sinal com potência finita.

Essa definição pode ser generalizada para um sinal $g(t)$ de valores complexos como

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt \quad (2.2)$$

Potência de um Sinal

Para ser uma medida do tamanho do sinal que faça sentido, a energia do sinal deve ser finita. Uma condição necessária para que a energia seja finita é que a amplitude do sinal tenda a zero à medida que $|t|$ tenda ao infinito (Fig. 2.1a). Caso contrário, a integral na Eq. (2.1) não convergirá.

Se a amplitude de $g(t)$ não tender a zero à medida que $|t|$ tender ao infinito (Fig. 2.1b), a energia do sinal será infinita. Em casos como esse, uma medida mais razoável do tamanho do sinal é a média temporal da energia (caso exista), que é a potência média P_g , definida (para um sinal de valores reais) por

$$P_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g^2(t) dt \quad (2.3)$$

Podemos generalizar esta definição para um sinal $g(t)$ de valores complexos como

$$P_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |g(t)|^2 dt \quad (2.4)$$

Observemos que a potência do sinal P_g é a média temporal (valor médio) da amplitude quadrática do sinal, ou seja, o valor **quadrático médio** de $g(t)$. Na verdade, a raiz quadrada de P_g é o valor **rms** (Root Mean Square), ou valor eficaz, de $g(t)$.

O valor médio de uma grandeza, calculado em um longo intervalo de tempo que tende ao infinito, existe se a grandeza for periódica ou tiver regularidade estatística. Caso essa condição não seja satisfeita, pode não existir um valor médio. Por exemplo, um sinal rampa $g(t) = t$ aumenta indefinidamente quando $|t| \rightarrow \infty$, de modo que nem energia e nem potência existirão para esse sinal.

Unidades de Energia e de Potência de um Sinal

As unidades padrão de energia e de potência de um sinal são, respectivamente, joule e watt. Contudo, na prática, é comum o uso de escalas logarítmicas para descrever a potência de um sinal. Esta notação evita a dificuldade de trabalhar com casas decimais quando a potência do sinal é muito alta ou muito baixa. Por convenção, dizemos que um sinal com potência média de P watts tem potência de

$$[10 \cdot \log_{10} P] \text{ dBw} \text{ ou } [30 + 10 \cdot \log_{10} P] \text{ dBm}$$

Por exemplo, -30 dBm representa uma potência de sinal de 10^{-6} W na escala decimal padrão.

Exemplo 2.1 Determinemos medidas razoáveis dos sinais na Fig. 2.2.

O sinal na Fig. 2.2a tende a 0 à medida que $|t| \rightarrow \infty$. Portanto, uma medida razoável para este sinal é a energia E_g , dada por

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt = \int_{-1}^0 (2)^2 dt + \int_0^{\infty} 4e^{-t} dt = 4 + 4 = 8$$

O sinal na Fig. 2.2b não tende a 0 à medida que $|t| \rightarrow \infty$. Entretanto, este sinal é periódico; logo, sua potência existe e podemos calculá-la usando a Eq. (2.3). Para sinais periódicos, este processo pode ser simplificado se observarmos que um sinal periódico se repete regularmente a cada período (2 segundos, neste caso). Assim, calcular a média de $g^2(t)$ em um intervalo de tempo infinitamente longo é equivalente a calculá-la em um período (2 segundos, neste caso), ou seja

$$P_g = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 g^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

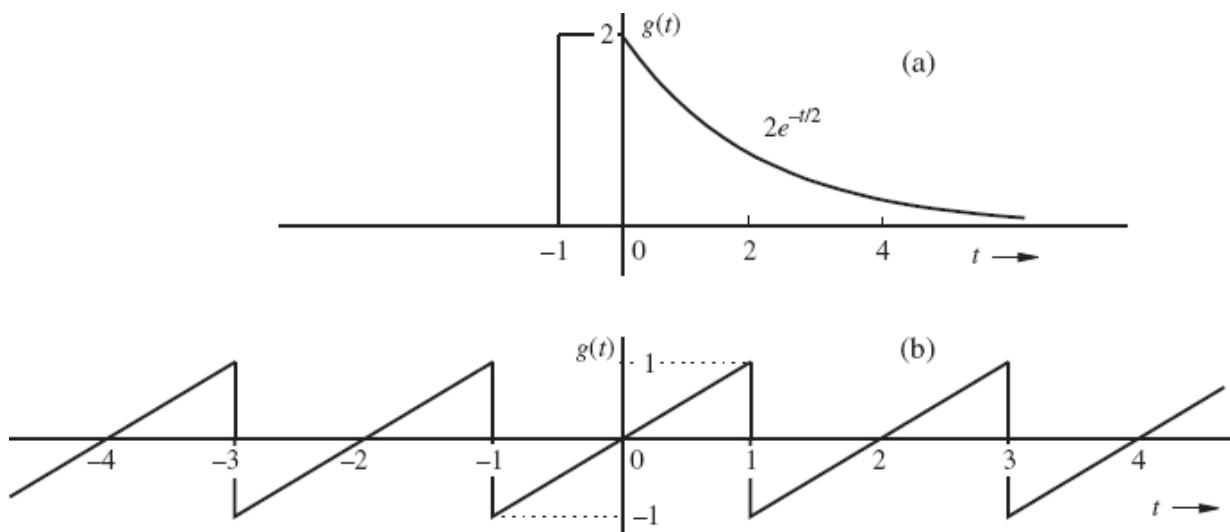


Figura 2.2

Sinais para o Exemplo 2.1.

Recordemos que a potência de um sinal é o quadrado de seu valor rms. Portanto, o valor rms deste sinal é $1/\sqrt{3}$.

2.2 CLASSIFICAÇÃO DE SINAIS

Existem várias classes de sinais. Aqui, consideraremos apenas os seguintes pares de classes, adequadas ao escopo deste livro:

1. Sinais em tempo contínuo e sinais em tempo discreto
2. Sinais analógicos e sinais digitais
3. Sinais periódicos e sinais aperiódicos
4. Sinais de energia e sinais de potência
5. Sinais determinísticos e sinais probabilísticos

2.2.1 Sinais em Tempo Contínuo e Sinais em Tempo Discreto

Um sinal que é especificado em todos os valores do tempo t (Fig. 2.3a) é um **sinal em tempo contínuo**; um sinal que é especificado apenas em pontos discretos $t = nT$ (Fig. 2.3b) é um **sinal em tempo discreto**. Gravações de áudio ou de vídeo são

sinais em tempo contínuo, o produto interno bruto (PIB) trimestral, venda mensal de uma empresa e índice médio diário da bolsa de valores são sinais em tempo discreto.

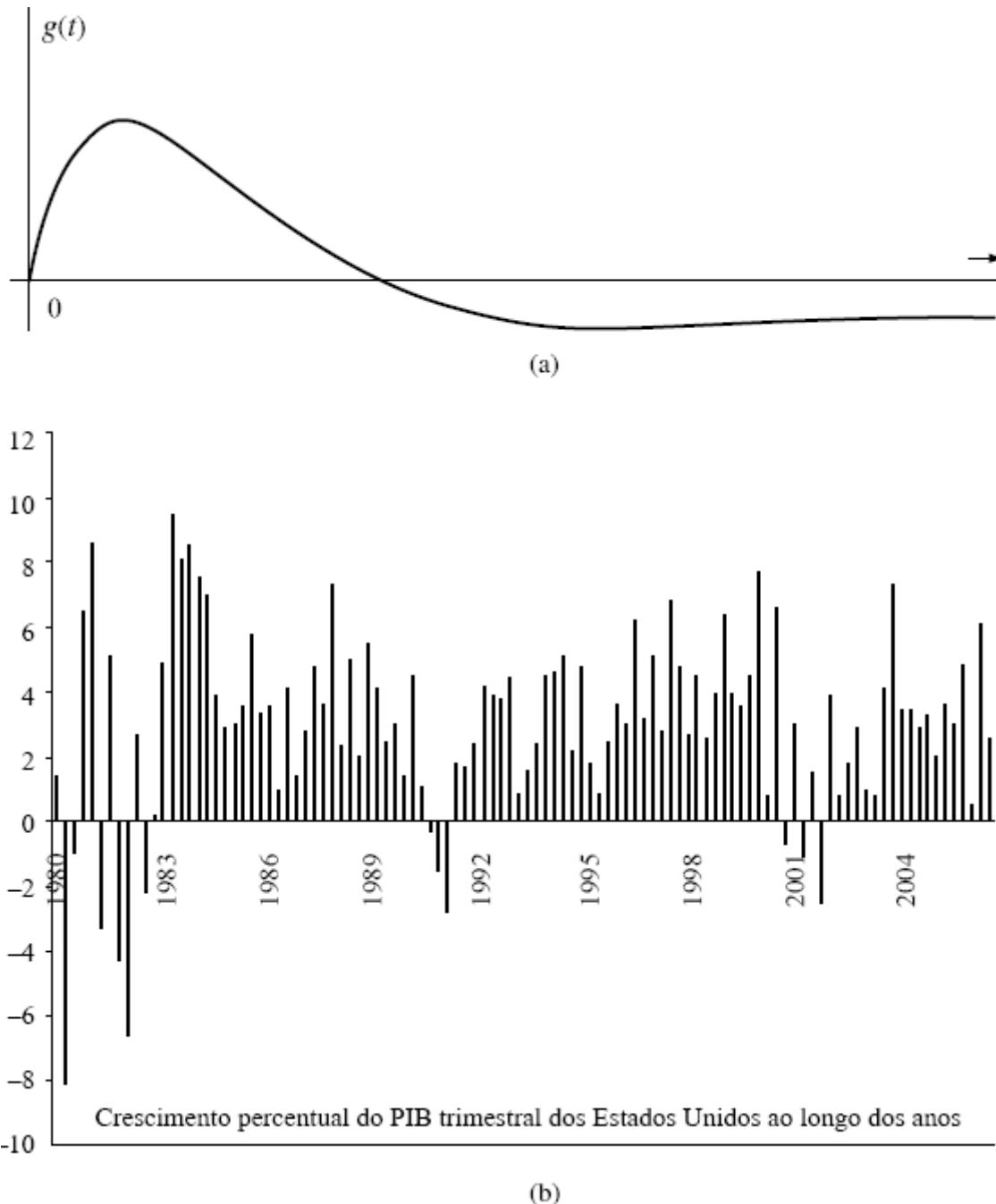


Figura 2.3
(a) Sinal em tempo contínuo. (b) Sinal em tempo discreto

2.2.2 Sinais Analógicos e Sinais Digitais

Não devemos confundir sinais analógicos com sinais em tempo contínuo. Os dois conceitos não são iguais. Isso também se aplica aos conceitos de sinais digitais e sinais em tempo discreto. Um sinal cuja amplitude pode assumir apenas valores em um intervalo contínuo de tempo é um **sinal analógico**, o que significa que a amplitude de um sinal analógico pode assumir um número infinito (incontável) de valores. Um **sinal digital**, por sua vez, é aquele cuja amplitude pode assumir somente um número finito de valores. Sinais associados com um computador digital são digitais porque assumem apenas dois valores (sinais binários). Para que um sinal se qualifique como digital, o número de valores não precisa ser limitado a dois: pode ser um número finito qualquer. Um sinal digital cuja amplitude pode assumir M valores é um sinal **M -ário**, do qual o binário ($M = 2$) é um caso especial. Os termos “tempo contínuo” e “tempo discreto” descrevem a natureza do sinal ao longo do eixo do tempo (eixo horizontal). Os termos “analógico” e “digital” descrevem a natureza do eixo de amplitude do sinal (eixo vertical). A Fig. 2.4 mostra exemplos de sinais de vários tipos. Fica claro que analógico não é necessariamente em tempo contínuo, assim como digital não tem que ser em tempo discreto. A Fig. 2.4c mostra um exemplo de um sinal analógico em tempo discreto. Um sinal analógico pode ser convertido em um sinal digital (via conversão analógico-digital, A/D) por meio de quantização (arredondamento), como explicado no Capítulo 6.

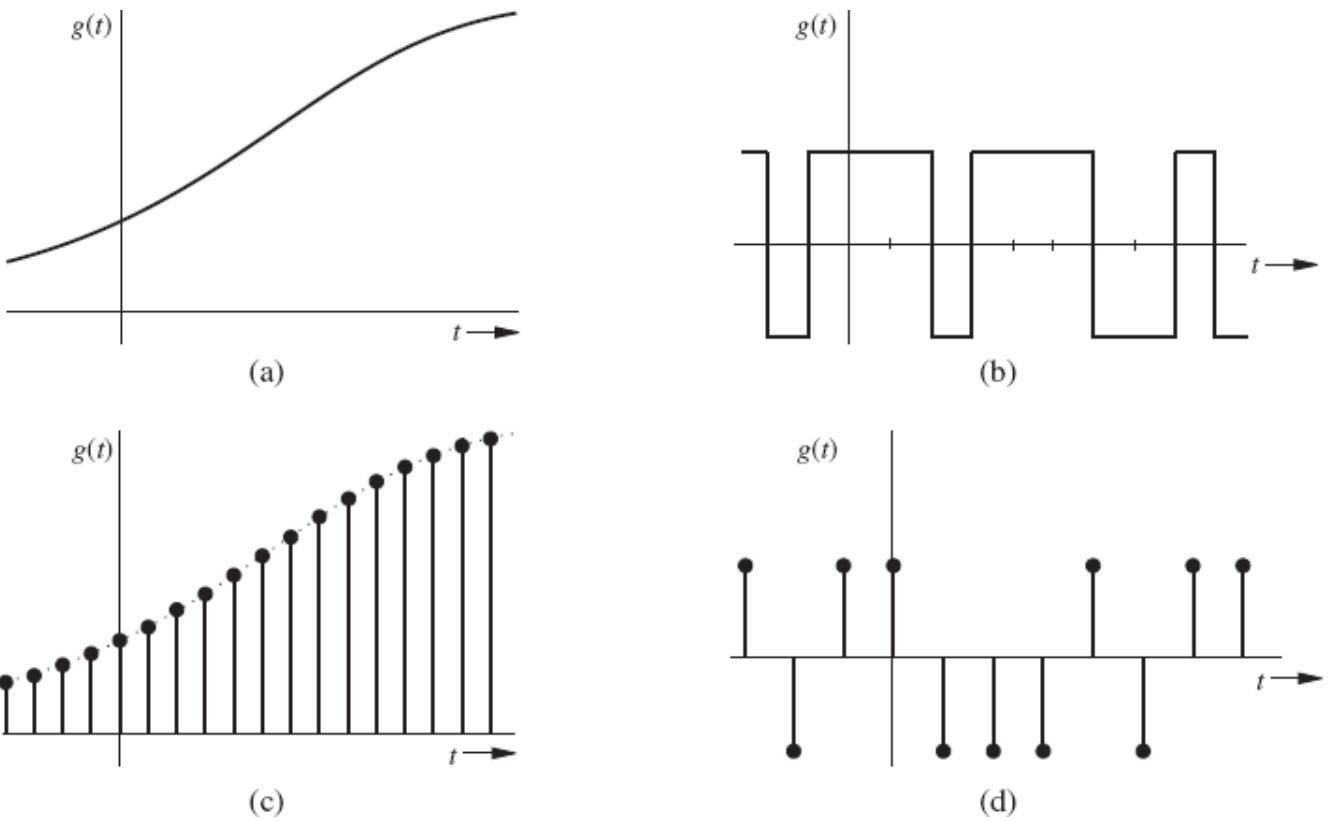


Figura 2.4

Exemplos de sinais: (a) Sinal analógico em tempo contínuo, (b) Sinal digital em tempo contínuo, (c) Sinal analógico em tempo discreto, (d) Sinal digital em tempo discreto.

2.2.3 Sinais Periódicos e Sinais Aperiódicos

Um sinal $g(t)$ é dito **periódico** se existir uma constante positiva T_0 tal que

$$g(t) = g(t + T_0) \text{ para todo } t \quad (2.5)$$

O **menor** valor de T_0 que satisfaz a condição de periodicidade da Eq. (2.5) é o **período** de $g(t)$. O sinal na Fig. 2.2b é um sinal periódico com período 2. Naturalmente, um sinal é **aperiódico** se não for periódico. O sinal na Fig. 2.2a é aperiódico.

Por definição, um sinal periódico $g(t)$ não se altera quando sofre deslocamento ou translação temporal igual a um período. Isso significa que um sinal periódico deve ter início em $t = -\infty$, pois, se tivesse início em algum instante de tempo finito, digamos, $t = 0$, o sinal deslocado $g(t + T_0)$ teria início em $t = -T_0$ e, portanto, $g(t + T_0)$ não seria o mesmo que $g(t)$. Em consequência, um **sinal periódico, por definição, deve ter início em $t = -\infty$ e continuar indefinidamente**, como ilustrado na Fig. 2.5. Vale observar que um sinal periódico não se altera quando é deslocado no tempo por um múltiplo de T_0 . Dessa forma, $g(t)$ pode ser considerado um sinal periódico com período mT_0 , sendo m um inteiro qualquer. No entanto, pela definição, o período é o menor intervalo que satisfaz a condição de periodicidade da Eq. (2.5). Ou seja, o período é T_0 .

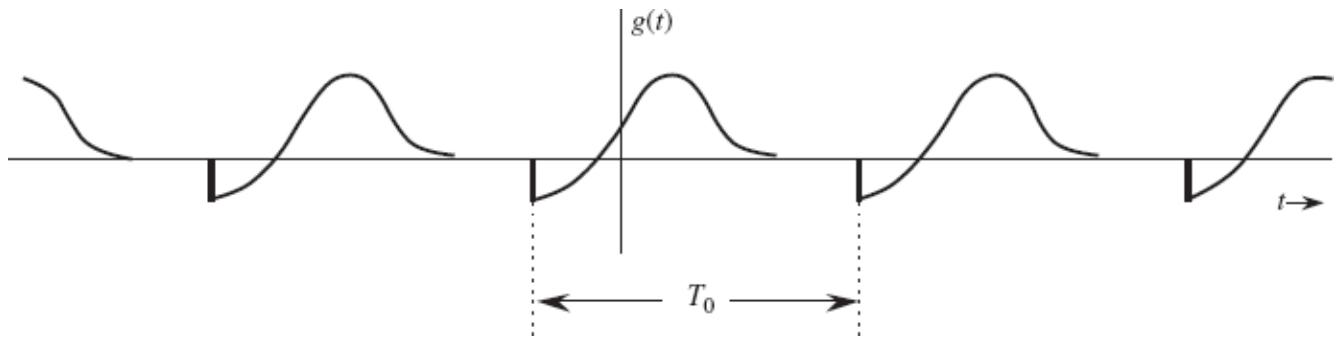


Figura 2.5

Sinal periódico de período T_0 .

2.2.4 Sinais de Energia e Sinais de Potência

Um sinal com energia finita é um **sinal de energia**; um sinal com potência finita é um **sinal de potência**. Em outras palavras, um sinal $g(t)$ é um sinal de energia se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt < \infty \quad (2.6)$$

De modo similar, um sinal com potência (valor quadrático médio) finita(o) e não nula(o) é um sinal de potência. Em outras palavras, um sinal é de potência se

$$0 < \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |g(t)|^2 dt < \infty \quad (2.7)$$

Os sinais nas Figs. 2.2a e 2.2b são exemplos de sinais de energia e de potência, respectivamente. Observemos que potência é o valor temporal de energia. Como o valor é tomado em um intervalo de tempo infinitamente longo, um sinal com energia finita tem potência nula, e um sinal com potência finita tem energia infinita. Portanto, um sinal não pode, ao mesmo tempo, ser de energia e de potência. Se for um, não poderá ser o outro. Contudo, alguns sinais com potência infinita não são nem de energia nem de potência. O sinal rampa é um exemplo.

Comentários

Todo sinal observado na vida real é um sinal de energia. Um sinal de potência, por sua vez, deve ter uma duração infinita. Caso contrário, sua potência, que é o valor temporal de energia (calculado em um intervalo de tempo infinitamente longo) não tenderá a um limite (não nulo). É óbvio que, na prática, é impossível gerar um verdadeiro sinal de potência, pois este sinal deveria ter duração e energia infinitas.

Por fim, devido à repetição periódica, sinais periódicos para os quais a área sob a curva de $|g(t)|^2$ ao longo de um período é finita são sinais de potência; no entanto, nem todos os sinais de potência são periódicos.

2.2.5 Sinais Determinísticos e Sinais Aleatórios

Um sinal cuja descrição física seja completamente conhecida, de forma matemática ou gráfica, é um **sinal determinístico**. Um sinal que seja conhecido apenas em termos de uma descrição probabilística, como valor médio, valor quadrático médio ou distribuições, e não de sua completa descrição matemática ou gráfica, é um **sinal aleatório**. A maioria dos sinais de ruído encontrados na prática é de sinais aleatórios. Todos os sinais de mensagens são sinais aleatórios, pois, como mostraremos posteriormente, para que um sinal transporte informação, deve haver alguma incerteza (aleatoriedade) em relação ao mesmo. O tratamento de sinais aleatórios será discutido em capítulos ulteriores.

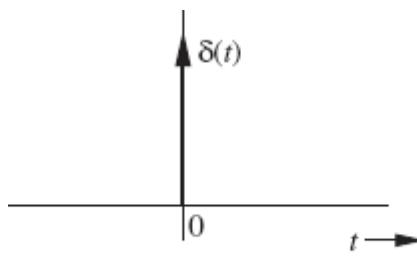
2.3 SINAL IMPULSO UNITÁRIO

A função impulso unitário $\delta(t)$ é uma das mais importantes funções no estudo de sinais e sistemas. Suas definição e aplicação resultam em conveniências não permitidas em matemática pura.

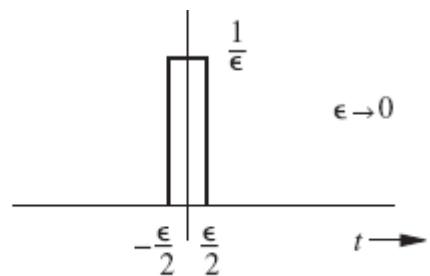
A função impulso unitário $\delta(t)$ foi definida por P. A. M. Dirac (e, por isso, também é conhecida como função “delta de Dirac”) como

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0 \quad (2.8)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2.9)$$



(a)



(b)

Figura 2.6

Um impulso unitário e sua aproximação.

Podemos visualizar um impulso como um pulso retangular alto e estreito de área unitária, como mostrado na Fig. 2.6. A largura desse pulso retangular é um valor muito pequeno ϵ ; no limite $\epsilon \rightarrow 0$, sua altura tem um valor muito grande $1/\epsilon$. O impulso unitário pode, portanto, ser considerado um pulso retangular cuja largura se torna infinitamente pequena, cuja altura se torna infinitamente grande e uma área total que permanece constante e igual à unidade.* Assim, $\delta(t) = 0$ para todos os valores de t , exceto $t = 0$, onde, formalmente, a função não é definida. Por essa razão, um impulso unitário é representado de forma gráfica por uma seta, como na Fig. 2.6a.

Multiplicação de uma Função por um Impulso

Consideremos, agora, o que ocorre quando multiplicamos o impulso unitário $\delta(t)$ por uma função $\phi(t)$, contínua em $t = 0$. Como o impulso existe apenas em $t = 0$ e o valor de $\phi(t)$ em $t = 0$ é $\phi(0)$, obtemos

$$\phi(t)\delta(t) = \phi(0)\delta(t) \quad (2.10a)$$

De modo similar, se $\phi(t)$ for multiplicada por um impulso $\delta(t - T)$ (um impulso localizado em $t = T$), obtemos

$$\phi(t)\delta(t - T) = \phi(T)\delta(t - T) \quad (2.10b)$$

desde que $\phi(t)$ seja definida em $t = T$.

Propriedade de Amostragem da Função Impulso Unitário

Da Eq. (2.10), temos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t - T) dt = \phi(T) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - T) dt = \phi(T) \quad (2.11a)$$

desde que $\phi(t)$ seja contínua em $t = T$. Esse resultado significa que *a área sob a curva do produto de uma função por um impulso δ(t) é igual ao valor da função no instante de tempo em que o impulso está localizado*. Essa importante e útil propriedade é conhecida como **propriedade de amostragem** (ou peneiramento) do impulso unitário.

Dependendo do valor de T e dos limites de integração, a função impulso pode ou não estar no intervalo de integração. Assim, temos

$$\int_a^b \phi(t)\delta(t - T) dt = \phi(T) \int_a^b \delta(t - T) dt = \begin{cases} \phi(T) & a \leq T < b \\ 0 & T < a \leq b, \text{ ou } T \geq b > a \end{cases} \quad (2.11b)$$

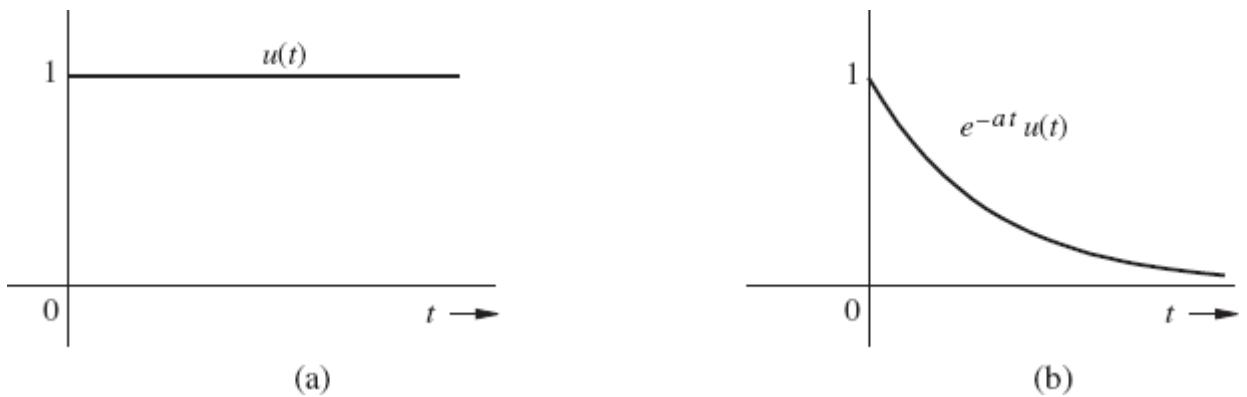


Figura 2.7

(a) Função degrau unitário $u(t)$. (b) Exponencial causal $e^{-at} u(t)$.

Função Degrau Unitário $u(t)$

Outra função útil e familiar é a função **degrau unitário** $u(t)$, encontrada com frequência na análise de circuitos e definida na Fig. 2.7a como:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Se desejarmos que um sinal tenha início em $t = 0$ (de modo que tenha valor nulo para $t < 0$), basta que o multipliquemos por $u(t)$. Um sinal que começa após $t = 0$ é denominado **sinal causal**. Em outras palavras, $g(t)$ é um sinal causal se

$$g(t) = 0 \quad t < 0$$

O sinal e^{-at} representa uma exponencial que tem início em $t = -\infty$. Se desejarmos que este sinal comece em $t = 0$ (forma causal), podemos descrevê-lo como $e^{-at} u(t)$ (Fig. 2.7b). Da Fig. 2.6b, observamos que, de $-\infty$ a t , a área sob a curva da forma aproximada de $\delta(t)$ é zero se $t < 0$ e igual à unidade se $t \geq 0$. Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau &= \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \\ &= u(t) \end{aligned} \quad (2.13a)$$

Deste resultado, obtemos

$$\frac{du}{dt} = \delta(t) \quad (2.13b)$$

2.4 ANALOGIA ENTRE SINAIS E VETORES

Existe uma forte conexão entre sinais e vetores. Sinais definidos em apenas um número finito (digamos, N) de instantes de tempo podem ser escritos como vetores (de dimensão N). Assim, consideremos um sinal $g(t)$ definido em um intervalo fechado $[a, b]$. Tomemos N pontos uniformemente espaçados no intervalo $[a, b]$, tais que

$$t_1 = a, \quad t_2 = a + \epsilon, \quad t_3 = a + 2\epsilon, \quad t_N = a + (N - 1)\epsilon = b, \quad \epsilon = \frac{b - a}{N - 1}$$

Podemos, então, escrever um sinal vetorial \mathbf{g} como um vetor de dimensão N

$$\mathbf{g} = [g(t_1) \quad g(t_2) \quad \cdots \quad g(t_N)]$$

À medida que o número N de instantes de tempo aumenta, a dimensão do sinal vetorial amostrado \mathbf{g} aumentará. Se $N \rightarrow \infty$, os valores do sinal formarão um vetor \mathbf{g} de dimensão infinita. Como, neste caso, $\epsilon \rightarrow 0$, o sinal vetorial \mathbf{g} se transformará no sinal em tempo contínuo $g(t)$, definido no intervalo $[a, b]$. Em outras palavras,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{g} = g(t) \quad t \in [a, b]$$

Essa relação mostra claramente que sinais em tempo contínuo são generalizações diretas de vetores de dimensão finita. Em consequência, definições e operações básicas em um espaço vetorial também podem ser aplicadas a sinais em tempo contínuo. A seguir, exploraremos esta conexão entre o espaço de vetores de dimensão finita e o espaço de sinais em tempo contínuo.

Denotaremos todos os vetores por letras em negrito. Por exemplo, \mathbf{x} é um certo vetor com magnitude ou comprimento $\|\mathbf{x}\|$. Um vetor tem magnitude e direção. Em um espaço vetorial, podemos definir o produto interno (ou escalar) de dois vetores de valores reais \mathbf{g} e \mathbf{x} como

$$\langle \mathbf{g}, \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{g}\| \cdot \|\mathbf{x}\| \cos \theta \quad (2.14)$$

em que θ é o ângulo entre os vetores \mathbf{g} e \mathbf{x} . Com essa definição, podemos expressar $\|\mathbf{x}\|$, o comprimento (ou norma) do vetor \mathbf{x} como

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \quad (2.15)$$

Isso define um espaço vetorial normado.

2.4.1 Componente de um Vetor na Direção de Outro Vetor

Consideremos dois vetores \mathbf{g} e \mathbf{x} , como mostrado na Fig. 2.8. Seja $c\mathbf{x}$ a componente de \mathbf{g} na direção de \mathbf{x} (ou ao longo de \mathbf{x}). Do ponto de vista geométrico, a componente de \mathbf{g} ao longo de \mathbf{x} é a projeção de \mathbf{g} sobre \mathbf{x} , obtida traçando, a partir da extremidade de \mathbf{g} , uma linha reta perpendicular ao vetor \mathbf{x} , como ilustrado na Fig. 2.8. Qual é o significado matemático da componente de um vetor na direção de outro vetor? Como visto na Fig. 2.8, o vetor \mathbf{g} pode ser expresso em termos do vetor \mathbf{x} como

$$\mathbf{g} = c\mathbf{x} + \mathbf{e} \quad (2.16)$$

Contudo, isso não descreve uma única forma de decompor \mathbf{g} em termos de \mathbf{x} e de \mathbf{e} . A Fig. 2.9 mostra duas das outras infinitas possibilidades. Das Fig. 2.9a e b, temos

$$\mathbf{g} = c_1\mathbf{x} + \mathbf{e}_1 = c_2\mathbf{x} + \mathbf{e}_2 \quad (2.17)$$

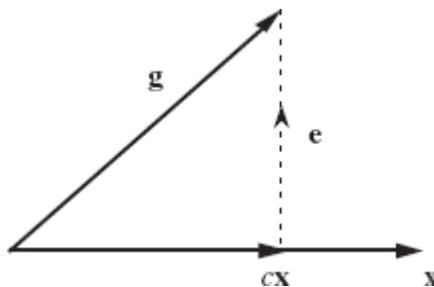


Figura 2.8

Componente (projeção) de um vetor ao longo de outro vetor.

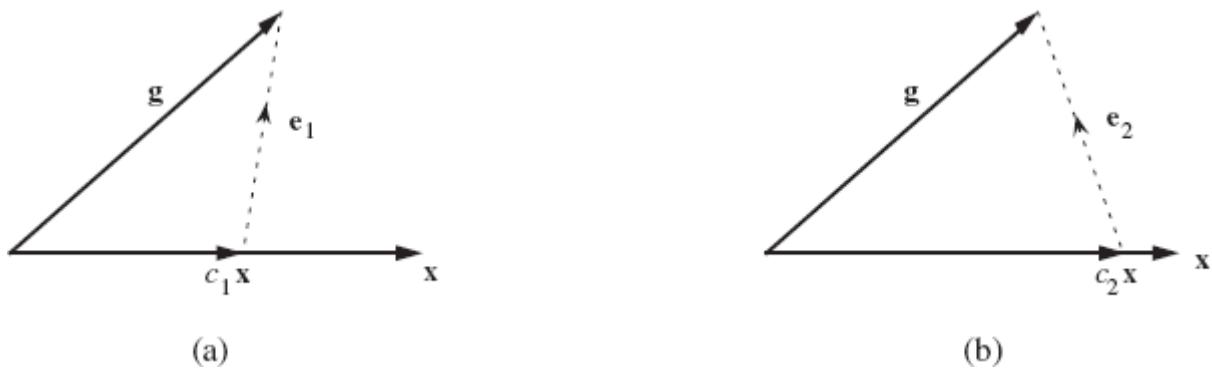


Figura 2.9

Aproximações de um vetor em termos de outro vetor.

Cabe a seguinte pergunta: qual é a “melhor” decomposição? O conceito de ótimo depende de nosso objetivo ao decompor \mathbf{g} em duas componentes.

Em cada uma das três representações anteriores, \mathbf{g} é dado em termos de \mathbf{x} e de outro vetor, denominado **vetor de erro**. Se nosso objetivo for aproximar \mathbf{g} por $c\mathbf{x}$ (Fig. 2.8),

$$\mathbf{g} \simeq \hat{\mathbf{g}} = c\mathbf{x} \quad (2.18)$$

o erro nessa aproximação é o vetor (diferença) $\mathbf{e} = \mathbf{g} - c\mathbf{x}$. De modo similar, os erros nas aproximações nas Figs. 2.9a e b são \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 , respectivamente. A aproximação na Fig. 2.8 é única, pois seu vetor de erro é o menor (menor magnitude ou norma). Podemos, agora, definir matematicamente a componente (ou projeção) de um vetor \mathbf{g} na direção de um vetor \mathbf{x} como $c\mathbf{x}$, onde c é escolhido para minimizar a magnitude do vetor de erro $\mathbf{e} = \mathbf{g} - c\mathbf{x}$.

Do ponto de vista geométrico, a magnitude da componente de \mathbf{g} ao longo de \mathbf{x} é $\|\mathbf{g}\| \cos \theta$, que também é igual a $c\|\mathbf{x}\|$. Portanto,

$$c\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{g}\| \cos \theta$$

Com base na definição do produto interno de dois vetores, multiplicando os dois lados por $\|\mathbf{x}\|$, obtemos

$$c\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{g}\| \|\mathbf{x}\| \cos \theta = \langle \mathbf{g}, \mathbf{x} \rangle$$

$$c = \frac{\langle \mathbf{g}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} \langle \mathbf{g}, \mathbf{x} \rangle \quad (2.19)$$

Da Fig. 2.8, fica aparente que, quando \mathbf{g} e \mathbf{x} são perpendiculares ou ortogonais, \mathbf{g} tem componente nula na direção de \mathbf{x} ; neste caso, $c = 0$. Tendo em vista a Eq. (2.19), podemos definir \mathbf{g} e \mathbf{x} como **ortogonais** se o produto interno dos dois vetores for zero, ou seja, se

$$\langle \mathbf{g}, \mathbf{x} \rangle = 0 \quad (2.20)$$

2.4.2 Decomposição de um Sinal e Componentes de um Sinal

Os conceitos de componentes e ortogonalidade de vetores podem ser diretamente estendidos a sinais em tempo contínuo. Consideremos o problema de aproximar um sinal de valores reais $g(t)$ em termos de outro sinal de valores reais $x(t)$, em um intervalo $[t_1, t_2]$:

$$g(t) \simeq cx(t) \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (2.21)$$

O erro $e(t)$ nesta aproximação é

$$e(t) = \begin{cases} g(t) - cx(t) & t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0 & \text{para qualquer} \\ & \text{outro valor de } t \end{cases} \quad (2.22)$$

Para a “melhor aproximação”, precisamos minimizar o sinal de erro, ou seja, minimizar a norma do mesmo. A mínima norma de um sinal corresponde à mínima energia E_e no intervalo $[t_1, t_2]$, dada por

$$\begin{aligned} E_e &= \int_{t_1}^{t_2} e^2(t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [g(t) - cx(t)]^2 dt \end{aligned}$$

Observemos que o lado direito é uma integral definida cuja variável de integração é t . Portanto, E_e é uma função do parâmetro c (não de t), e E_e será mínima para alguma escolha do valor de c . Uma condição necessária para a minimização de E_e é

$$\frac{dE_e}{dc} = 0 \quad (2.23)$$

ou

$$\frac{d}{dc} \left[\int_{t_1}^{t_2} [g(t) - cx(t)]^2 dt \right] = 0$$

Expandindo o termo quadrático no integrando, obtemos

$$\frac{d}{dc} \left[\int_{t_1}^{t_2} g^2(t) dt \right] - \frac{d}{dc} \left[2c \int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t) dt \right] + \frac{d}{dc} \left[c^2 \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt \right] = 0$$

portanto,

$$-2 \int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t) dt + 2c \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt = 0$$

e

$$c = \frac{\int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt} = \frac{1}{E_x} \int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t) dt \quad (2.24)$$

Em resumo, se um sinal $g(t)$ for aproximado por outro sinal $x(t)$ na forma

$$g(t) \simeq cx(t)$$

o valor ótimo de c que minimiza a energia do sinal de erro nesta aproximação é dado pela Eq. (2.24).

Seguindo o que é feito com vetores, dizemos que o sinal $g(t)$ tem uma componente $cx(t)$, com c dado pela Eq. (2.24). Como no caso de um espaço vetorial, $cx(t)$ é a projeção de $g(t)$ sobre $x(t)$. Mantendo a terminologia de espaço vetorial, se a componente de um sinal $g(t)$ da forma $cx(t)$ for zero (ou seja, se $c = 0$), dizemos que os sinais $g(t)$ e $x(t)$ são ortogonais no intervalo $[t_1, t_2]$. Em outras palavras, para sinais de valores reais, dois sinais $g(t)$ e $x(t)$ são ortogonais quando a contribuição de um sinal ao outro for zero ($c = 0$). Assim, $x(t)$ e $g(t)$ são ortogonais se e somente se

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t) dt = 0 \quad (2.25)$$

Com base nas ilustrações de vetores na Fig. 2.9, podemos dizer que dois sinais são ortogonais se e somente se o produto interno dos dois for zero. Isto indica que a integral da Eq. (2.25) guarda uma relação muito próxima com o conceito de produto interno de

vetores.

A definição padrão de produto interno de dois vetores \mathbf{g} e \mathbf{x} de dimensão N

$$\langle \mathbf{g}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^N g_i x_i$$

tem forma quase idêntica à integral na Eq. (2.25). Portanto, definimos o produto interno de dois sinais (de valores reais) $g(t)$ e $x(t)$, ambos especificados no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$, como

$$\langle g(t), x(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t) dt \quad (2.26)$$

Recordemos da álgebra linear que o quadrado do comprimento de um vetor, $\|\mathbf{x}\|^2$, é igual a $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$. Com esse conceito em mente e prosseguindo com a analogia com análise vetorial, definimos a norma de um sinal $g(t)$ como

$$\|g(t)\| = \sqrt{\langle g(t), g(t) \rangle} \quad (2.27)$$

que é a raiz quadrada da energia do sinal no dado intervalo de tempo. Fica claro que a norma de um sinal é análoga ao comprimento de um vetor de dimensão finita. De modo mais geral, sinais podem não ser meramente definidos em um segmento contínuo de tempo $[t_1, t_2]$.*

Exemplo 2.2 Para o sinal quadrado $g(t)$ mostrado na Fig. 2.10, determinemos a componente em $g(t)$ da forma de $\sin t$. Em outras palavras, aproximemos $g(t)$ em termos de $\sin t$.

$$g(t) \simeq c \sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

de modo que a energia do sinal seja mínima.

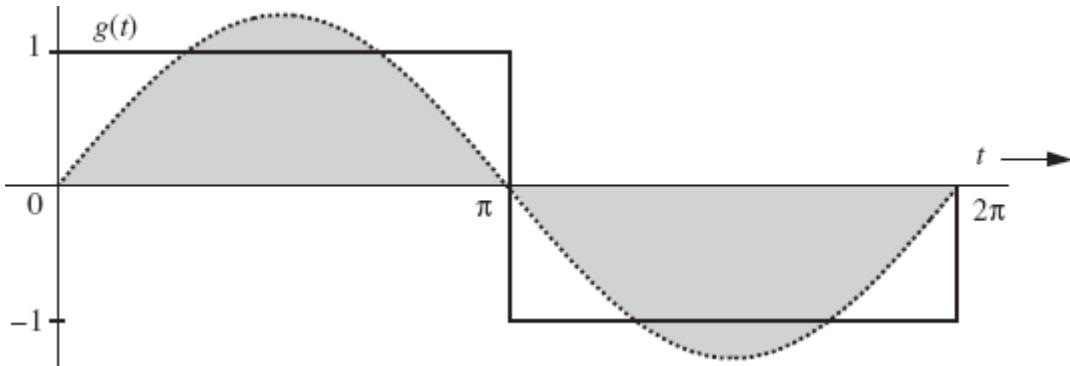


Figura 2.10

Aproximação do sinal quadrado em termos de uma única senoide.

Neste caso,

$$x(t) = \sin t \quad \text{e} \quad E_x = \int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt = \pi$$

Da Eq. (2.24), obtemos

$$c = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \sin t dt = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\pi \sin t dt + \int_\pi^{2\pi} (-\sin t) dt \right] = \frac{4}{\pi} \quad (2.29)$$

Portanto,

$$g(t) \simeq \frac{4}{\pi} \operatorname{sen} t \quad (2.30)$$

representa a melhor aproximação de $g(t)$ pela função $\operatorname{sen} t$, que minimiza a energia do sinal de erro. Essa componente senoidal de $g(t)$ é mostrada hachurada na Fig. 2.10. Como em um espaço vetorial, dizemos que a função quadrada $g(t)$ ilustrada na Fig. 2.10 tem uma componente de sinal $\operatorname{sen} t$ com magnitude $4/\pi$.

2.4.3 Espaço Complexo de Sinais e Ortogonalidade

Até aqui, restringimos a atenção a funções de valores reais de t . Para estender os resultados a funções de valores complexos de t , consideremos, mais uma vez, o problema de aproximar a função $g(t)$ por uma função $x(t)$, em um intervalo ($t_1 \leq t \leq t_2$)

$$g(t) \simeq cx(t) \quad (2.31)$$

em que $g(t)$ e $x(t)$ são funções de valores complexos de t . Em geral, tanto o coeficiente c como o sinal de erro

$$e(t) = g(t) - cx(t) \quad (2.32)$$

são complexos. Recordemos que a energia E_x do sinal complexo $x(t)$ no intervalo $[t_1, t_2]$ é

$$E_x = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

Para a melhor aproximação, devemos escolher o valor de c que minimiza E_e , a energia do sinal de erro $e(t)$, dada por

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} |g(t) - cx(t)|^2 dt \quad (2.33)$$

Recordemos, também, que

$$|u + v|^2 = (u + v)(u^* + v^*) = |u|^2 + |v|^2 + u^*v + uv^* \quad (2.34)$$

Usando esse resultado, podemos, após alguns cálculos, expressar a integral E_e na Eq. (2.33) como

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} |g(t)|^2 dt - \left| \frac{1}{\sqrt{E_x}} \int_{t_1}^{t_2} g(t)x^*(t) dt \right|^2 + \left| c\sqrt{E_x} - \frac{1}{\sqrt{E_x}} \int_{t_1}^{t_2} g(t)x^*(t) dt \right|^2$$

Já que os primeiros dois termos no lado direito independem de c , fica claro que E_e é minimizada com a escolha do valor de c que anula o terceiro termo. Isso leva ao coeficiente ótimo

$$c = \frac{1}{E_x} \int_{t_1}^{t_2} g(t)x^*(t) dt \quad (2.35)$$

Com esse resultado, devemos redefinir ortogonalidade para o caso complexo, o que é feito da seguinte forma: funções (sinais) de valores complexos $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são ortogonais em um intervalo ($t_1 \leq t \leq t_2$) se

$$\int_{t_1}^{t_2} x_1(t)x_2^*(t) dt = 0 \quad \text{ou} \quad \int_{t_1}^{t_2} x_1^*(t)x_2(t) dt = 0 \quad (2.36)$$

Na verdade, basta qualquer uma das igualdades. Essa é uma definição geral de ortogonalidade, que se reduz à Eq. (2.25) quando as funções têm valores reais.

Do mesmo modo, a definição de produto interno para sinais de valores complexos em um domínio temporal Θ pode ser modificada como:

$$\langle g(t), x(t) \rangle = \int_{\{t:t \in \Theta\}} g(t)x^*(t) dt \quad (2.37)$$

Em consequência, a norma de um sinal $g(t)$ fica dada por

$$\|g(t)\| = \left[\int_{\{t:t \in \Theta\}} |g(t)|^2 dt \right]^{1/2} \quad (2.38)$$

2.4.4 Energia da Soma de Sinais Ortogonais

Sabemos que o quadrado do comprimento geométrico (ou magnitude) da soma de dois vetores ortogonais é igual à soma dos quadrados das magnitudes dos vetores. Portanto, se os vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} forem ortogonais e se $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, então,

$$\|\mathbf{z}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$

Um resultado semelhante se aplica a sinais. A energia da soma de dois sinais ortogonais é igual à soma das energias dos dois sinais. Assim, se os sinais $x(t)$ e $y(t)$ forem ortogonais em um intervalo $[t_1, t_2]$ e se $z(t) = x(t) + y(t)$, então

$$E_z = E_x + E_y \quad (2.39)$$

A seguir, provaremos esse resultado para sinais de valores complexos, dos quais aqueles com valores reais são um caso especial. Da Eq. (2.34), temos

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} |x(t) + y(t)|^2 dt &= \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} |y(t)|^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} x(t)y^*(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} x^*(t)y(t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} |y(t)|^2 dt \end{aligned} \quad (2.40)$$

A última igualdade resulta da ortogonalidade dos dois sinais, que anula as duas integrais dos produtos cruzados $x(t)y^*(t)$ e $x^*(t)y(t)$. Tal resultado pode ser estendido à soma de um número qualquer de sinais mutuamente ortogonais.

2.5 CORRELAÇÃO DE SINAIS

Com as definições do produto interno e da norma de sinais, preparamos o caminho para a comparação de sinais. Mais uma vez, podemos tirar proveito da analogia com os familiares espaços vetoriais. Dois vetores \mathbf{g} e \mathbf{x} são similares se \mathbf{g} tiver uma grande componente ao longo de \mathbf{x} . Em outras palavras, se c na Eq. (2.19) for grande, os vetores \mathbf{g} e \mathbf{x} serão similares. Podemos considerar c como uma medida quantitativa da similaridade entre \mathbf{g} e \mathbf{x} . Contudo, essa medida seria defeituosa, pois varia com as normas (ou comprimentos) de \mathbf{g} e \mathbf{x} . Para ser adequada, a medida da similaridade entre \mathbf{g} e \mathbf{x} deveria independe dos comprimentos de \mathbf{g} e \mathbf{x} . Se, por exemplo, dobrarmos o comprimento de \mathbf{g} , a medida da similaridade entre \mathbf{g} e \mathbf{x} não deveria se alterar. A Eq. (2.19) nos mostra que, se dobrarmos \mathbf{g} , o valor de c também dobra (se dobrarmos \mathbf{x} , o valor de c será dividido por dois). Fica claro que a medida de similaridade com base na correlação de sinais é falha. A similaridade entre dois vetores é indicada pelo ângulo θ entre eles. Quanto menor o valor de θ , maior a similaridade e vice-versa. A similaridade pode, então, ser adequadamente medida por $\cos \theta$. Maior o valor de $\cos \theta$, maior a similaridade entre os dois vetores. Assim, uma medida apropriada seria $\rho = \cos \theta$, dada por

$$\rho = \cos \theta = \frac{\langle \mathbf{g}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{g}\| \|\mathbf{x}\|} \quad (2.41)$$

Podemos verificar prontamente que esta medida independe dos comprimentos de \mathbf{g} e \mathbf{x} . Essa medida de similaridade, ρ , é conhecida como **coeficiente de correlação**. Vale observar que

$$-1 \leq \rho \leq 1 \quad (2.42)$$

A magnitude de ρ , portanto, jamais é maior que a unidade. Se os dois vetores estiverem alinhados, a similaridade é máxima ($\rho = 1$). Dois vetores alinhados em direções opostas têm máxima dissimilaridade ($\rho = -1$). Se os dois vetores forem ortogonais, a similaridade será zero.

Usamos os mesmos argumentos na definição de um índice de similaridade (coeficiente de correlação) para sinais. Por conveniência, consideraremos sinais em todo o eixo do tempo, de $-\infty$ a ∞ . Para definirmos um índice de similaridade que independa das energias (tamanhos) de $g(t)$ e $x(t)$, devemos normalizar c ; para isso, normalizamos os dois sinais, de modo que tenham energias unitárias. Assim, um adequado índice de similaridade ρ , análogo à Eq. (2.41), é dada por

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{E_g E_x}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)x(t) dt \quad (2.43)$$

Vale ressaltar que a multiplicação de $g(t)$ ou de $x(t)$ por qualquer constante não altera o valor desse índice. Por conseguinte, o mesmo independe dos tamanhos (energias) de $g(t)$ e $x(t)$. Fazendo uso da desigualdade de Cauchy-Schwarz (provada no Apêndice B), * podemos mostrar que a magnitude ρ jamais é maior que a unidade:

$$-1 \leq \rho \leq 1 \quad (2.44)$$

2.5.1 Funções de Correlação

É conveniente que examinemos a aplicação de correlação à detecção de sinais em um equipamento de radar, onde um pulso é transmitido para detectar um alvo suspeito. A detecção da presença ou ausência do pulso refletido confirma a presença ou ausência do alvo. A medida do atraso temporal entre os pulsos transmitido e recebido (refletido) nos permite determinar a distância ao alvo. Sejam os pulsos transmitido e recebido denotados por $g(t)$ e $z(t)$, respectivamente. Se usássemos a Eq. (2.43) diretamente para medir o coeficiente de correlação ρ , obteríamos

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{E_g E_z}} \int_{-\infty}^{\infty} z(t)g^*(t) dt = 0 \quad (2.45)$$

A correlação é zero porque os pulsos são separados (não se sobrepõem no tempo). A integral na Eq. (2.45) será igual a zero mesmo que os pulsos sejam idênticos, mas guardem um deslocamento temporal. Para evitar essa dificuldade, compararmos o pulso recebido $z(t)$ com o pulso transmitido $g(t)$ deslocado de τ . Se, para algum valor de τ , houver uma forte correlação, não apenas detectaremos a presença do pulso, mas também determinaremos o deslocamento temporal de $z(t)$ em relação a $g(t)$. Por isso, em vez da integral no lado direito, usamos a integral modificada $\Psi_{gz}(\tau)$, denominada função de **correlação cruzada** dos dois sinais de valores complexos $g(t)$ e $z(t)$ e definida como

$$\Psi_{gz}(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} z(t)g^*(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} z(t + \tau)g^*(t) dt \quad (2.46)$$

$\Psi_{gz}(\tau)$ é, portanto, uma indicação da similaridade (correlação) entre $g(t)$ e $z(t)$ adiantado (deslocado para a esquerda) de τ segundos.

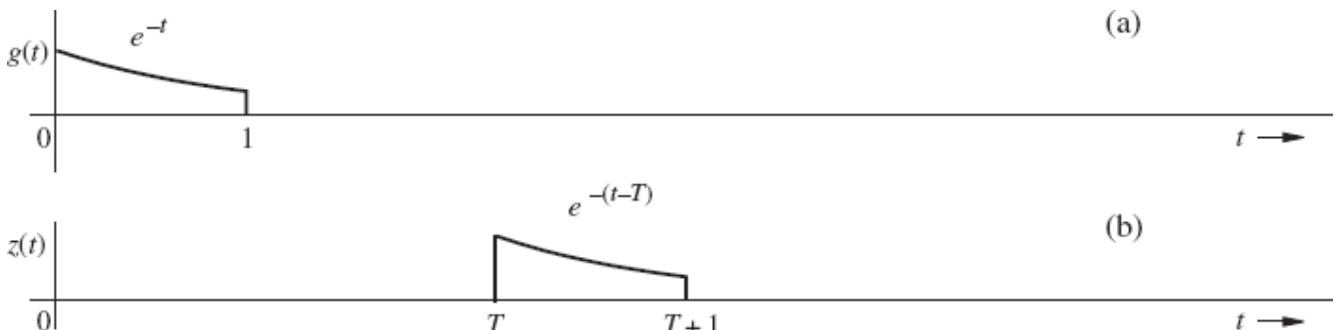
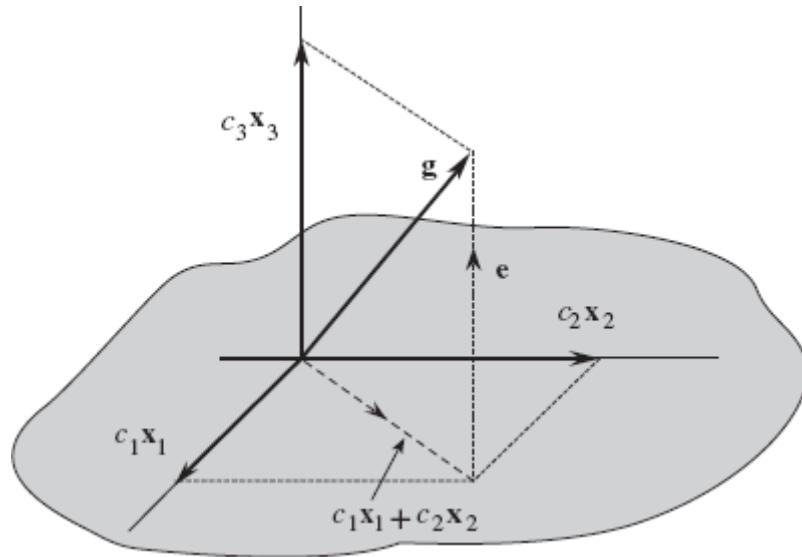


Figura 2.11

Explicação gráfica da função de autocorrelação.

**Figura 2.12**

Representação de um vetor no espaço tridimensional.

2.5.2 Função de Autocorrelação

A correlação de um sinal como ele próprio, como ilustrado na Fig. 2.11, é denominada **autocorrelação**. A função de autocorrelação $\Psi_g(\tau)$ de um sinal de valores reais $g(t)$ é definida como

$$\Psi_g(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t + \tau) dt \quad (2.47)$$

A função de autocorrelação mede a similaridade do sinal $g(t)$ com sua versão deslocada no tempo. No Capítulo 3, mostraremos que a função de autocorrelação fornece valiosas informações espectrais a respeito do sinal.

2.6 CONJUNTO ORTOGONAL DE SINAIS

Nesta seção, mostraremos uma forma de representar um sinal como a soma de um conjunto ortogonal de sinais. Na verdade, os sinais nesse conjunto ortogonal formam uma base para o espaço de sinais em questão. Aqui, mais uma vez, podemos nos beneficiar do entendimento de um problema similar envolvendo vetores. Sabemos que um vetor pode ser representado como a soma de vetores ortogonais, que formam o sistema de coordenadas de um espaço vetorial. Com sinais, o problema é análogo e os resultados são similares aos do problema com vetores. Por isso, façamos uma revisão da representação de vetores.

2.6.1 Espaço Vetorial Ortogonal

Consideremos um espaço vetorial cartesiano multidimensional, representado na Fig. 2.12 por três vetores ortogonais \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 e \mathbf{x}_3 , para o caso especial de um espaço tridimensional. Primeiro, procuramos aproximar um vetor tridimensional \mathbf{g} em termos de dois vetores ortogonais \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 :

O erro \mathbf{e} nesta aproximação é

$$\mathbf{g} \simeq c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{g} - (c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2)$$

ou, o que é equivalente,

$$\mathbf{g} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{e}$$

De acordo com a argumentação geométrica anterior, a Fig. 2.12 deixa claro que o comprimento do vetor de erro \mathbf{e} é mínimo quando o mesmo for perpendicular ao plano $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ e quando $c_1 \mathbf{x}_1$ e $c_2 \mathbf{x}_2$ forem as projeções (componentes) de \mathbf{g} sobre \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 , respectivamente. Portanto, as constantes c_1 e c_2 são dadas pela fórmula na Eq. (2.19).

Agora, determinemos a melhor aproximação de \mathbf{g} em termos dos três vetores mutuamente ortogonais $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ e \mathbf{x}_3 :

$$\mathbf{g} \simeq c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + c_3 \mathbf{x}_3 \quad (2.48)$$

A Fig. 2.12 mostra que existe uma única escolha para os valores de c_1, c_2 e c_3 para a qual a Eq. (2.48) deixa de ser uma aproximação e se torna uma igualdade:

$$\mathbf{g} = c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + c_3 \mathbf{x}_3$$

Neste caso, $c_1 \mathbf{x}_1, c_2 \mathbf{x}_2$ e $c_3 \mathbf{x}_3$ são as projeções (componentes) de \mathbf{g} sobre $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ e \mathbf{x}_3 , respectivamente. Vale notar que, agora, o erro da aproximação é zero quando \mathbf{g} é aproximado em termos de três vetores mutuamente ortogonais $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ e \mathbf{x}_3 . Isso ocorre porque \mathbf{g} é um vetor tridimensional e os vetores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ e \mathbf{x}_3 representam um *conjunto completo* de vetores ortogonais no espaço tridimensional. Completeza, aqui, significa que é impossível, nesse espaço, encontrar qualquer outro vetor \mathbf{x}_4 que seja ortogonal a todos os três vetores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ e \mathbf{x}_3 . Nesse espaço, qualquer vetor pode, portanto, ser representado (com erro zero) em termos desses três vetores. Vetores como esses são conhecidos como vetores de **base** e o conjunto dos vetores, como uma **base ortogonal completa** desse espaço vetorial. Se um conjunto de vetores $\{\mathbf{x}_i\}$ não for completo, o erro da aproximação, na maioria dos casos, não será zero. Por exemplo, no espaço tridimensional que acabamos de considerar, em geral, não é possível representar um vetor \mathbf{g} em termos de apenas dois vetores da base sem erro.

A escolha dos vetores de base não é única. Na verdade, cada conjunto de vetores de base corresponde a uma escolha particular de sistema de coordenadas. Assim, um vetor tridimensional \mathbf{g} pode ser representado de diferentes formas, dependendo do sistema de coordenadas utilizado.

Em resumo, se um conjunto de vetores mutuamente ortogonais $\{\mathbf{x}_i\}$, ou seja, vetores tais que

$$\langle \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_n \rangle = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ |\mathbf{x}_m|^2 & m = n \end{cases}$$

e se esse conjunto for completo, um vetor \mathbf{g} nesse espaço pode ser expresso como

$$\mathbf{g} = c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + c_3 \mathbf{x}_3 \quad (2.49)$$

onde as constantes c_i são dadas por

$$c_i = \frac{\langle \mathbf{g}, \mathbf{x}_i \rangle}{\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle} \quad (2.50a)$$

$$= \frac{1}{|\mathbf{x}_i|^2} \langle \mathbf{g}, \mathbf{x}_i \rangle \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.50b)$$

2.6.2 Espaço Ortogonal de Sinais

Dando prosseguimento ao problema de aproximação de sinais, usaremos conceitos e resultados da aproximação de vetores. Como antes, definimos ortogonalidade de um conjunto de sinais $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$ em um domínio temporal Θ (pode ser um intervalo $[t_1, t_2]$) como

$$\int_{t \in \Theta} x_m(t) x_n^*(t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ E_n & m = n \end{cases} \quad (2.51)$$

Se todos os sinais tiverem energia unitária $E_n = 1$, dizemos que o conjunto é *normalizado* e o denominamos **conjunto ortonormal**. Um conjunto ortogonal sempre pode ser normalizado, bastando dividir $x_n(t)$ por $\sqrt{E_n}$, para todo n . Consideremos, agora, o problema de aproximar um sinal $g(t)$ em Θ por N sinais mutuamente ortogonais $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$:

$$g(t) \simeq c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_N x_N(t) \quad (2.52a)$$

$$= \sum_{n=1}^N c_n x_n(t) \quad t \in \Theta \quad (2.52b)$$

Pode ser mostrado que E_e , a energia do sinal de erro $e(t)$ nessa aproximação, é minimizada quando escolhemos

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{\int_{t \in \Theta} g(t) x_n^*(t) dt}{\int_{t \in \Theta} |x_n(t)|^2 dt} \\ &= \frac{1}{E_n} \int_{\Theta} g(t) x_n^*(t) dt \quad n = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (2.53)$$

Além disso, se o conjunto ortogonal for **completo**, a energia do erro $E_e \rightarrow 0$ e a aproximação em (2.52) deixa de ser uma aproximação, tornando-se uma igualdade. Mais precisamente, definamos o erro da aproximação de N termos por

$$e_N(t) = g(t) - c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_N x_N(t) = g(t) - \sum_{n=1}^N c_n x_n(t) \quad t \in \Theta \quad (2.54)$$

Se a base ortogonal for **completa**, a energia do sinal de erro converge a zero, ou seja

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{t \in \Theta} |e_N(t)|^2 dt = 0 \quad (2.55)$$

Em termos estritamente matemáticos, no entanto, um sinal pode não convergir a zero mesmo que sua energia converja a zero. Isso ocorre porque um sinal pode ser não nulo em alguns pontos isolados.^{*} Entretanto, na prática, sinais são contínuos para todo t e a igualdade (2.55) afirma que o sinal de erro tem energia zero quando $N \rightarrow \infty$. Assim, para $N \rightarrow \infty$, a igualdade (2.55) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} g(t) &= c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t) + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n(t) \quad t \in \Theta \end{aligned} \quad (2.56)$$

em que os coeficientes c_n são dados pela Eq. (2.53). Como a energia do sinal de erro se aproxima de zero, a energia de $g(t)$ fica igual à soma das energias de suas componentes ortogonais.

A série no lado direito da Eq. (2.53) é denominada **série de Fourier generalizada** de $g(t)$ em termos do conjunto $\{x_n(t)\}$. Quando o conjunto $\{x_n(t)\}$ é tal que a energia do erro $E_N \rightarrow 0$ à medida que $N \rightarrow \infty$, para qualquer membro de alguma classe particular de sinais, dizemos que o conjunto $\{x_n(t)\}$ é completo em $\{t: \Theta\}$ para aquela classe de $g(t)$, e o conjunto $\{x_n(t)\}$ é denominado um conjunto de **funções de base** ou **sinais de base**. Em particular, a classe de sinais de energia (finita) em Θ é denotado por $L^2(\Theta)$. De aqui em diante, consideraremos apenas a classe de sinais de energia, a menos que especifiquemos de modo diferente.

2.6.3 Teorema de Parseval

Recordemos que a energia da soma de sinais ortogonais é igual à soma das energias dos mesmos. Portanto, a energia do lado direito da Eq. (2.56) é a soma das energias das componentes ortogonais. A energia de uma componente $c_n x_n(t)$ é $c_n^2 E_n$. Igualando as energias nos dois lados da Eq. (2.56), obtemos

$$\begin{aligned}
E_g &= c_1^2 E_1 + c_2^2 E_2 + c_3^2 E_3 + \dots \\
&= \sum_n c_n^2 E_n
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Esse importante resultado é conhecido como **teorema de Parseval**. Recordemos que a energia de um sinal (área sob a curva do quadrado do valor do sinal) é análoga ao quadrado do comprimento de um vetor, segundo a analogia vetor-sinal. Em um espaço vetorial, sabemos que o quadrado do comprimento de um vetor é igual à soma dos quadrados dos comprimentos de suas componentes ortogonais. O teorema de Parseval [Eq. (2.57)] é a afirmação desse fato para o caso de sinais.

2.7 SÉRIE DE FOURIER EXPONENCIAL

Observamos anteriormente que a representação ortogonal de sinais NÃO é única. Embora a tradicional série de Fourier trigonométrica permita uma boa representação de todos os sinais periódicos, nesta seção apresentamos uma representação ortogonal de sinais periódicos **equivalente**, mas que tem forma mais simples.

Primeiro, observemos que o conjunto de exponenciais $e^{jn\omega_0 t}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) é ortogonal em um intervalo de duração $T_0 = 2\pi/\omega_0$, ou seja,

$$\int_{T_0} e^{jm\omega_0 t} (e^{jn\omega_0 t})^* dt = \int_{T_0} e^{j(m-n)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T_0 & m = n \end{cases} \tag{2.58}$$

Além disso, esse conjunto é completo.^{1, 2} Das Eqs. (2.53) e (2.56), um sinal $g(t)$ pode ser expresso em um intervalo de duração T_0 segundos por uma série de Fourier exponencial

$$\begin{aligned}
g(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn2\pi f_0 t}
\end{aligned} \tag{2.59}$$

em que [ver Eq. (2.53)]

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} g(t) e^{-jn2\pi f_0 t} dt \tag{2.60}$$

A série de Fourier exponencial na Eq. (2.59) consiste em componentes da forma $e^{jn2\pi f_0 t}$, com n variando de $-\infty$ a ∞ , e é periódica, com período T_0 .

Exemplo 2.3 Determinemos a série de Fourier exponencial para o sinal na Fig. 2.13b.

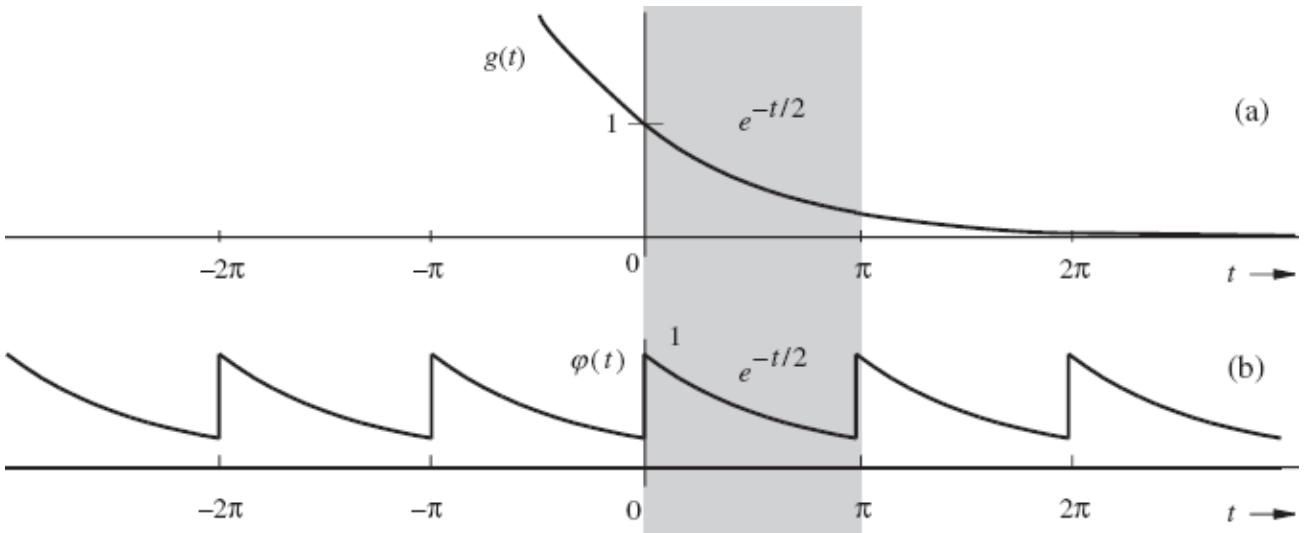


Figura 2.13
Um sinal periódico.

Neste caso, $T_0 = \pi$, $2\pi f_0 = 2\pi/T_0 = 2$

$$\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j2nt}$$

em que

$$\begin{aligned}
 D_n &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \varphi(t) e^{-j2nt} dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{-t/2} e^{-j2nt} dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{-(\frac{1}{2}+j2n)t} dt \\
 &= \frac{-1}{\pi (\frac{1}{2} + j2n)} e^{-(\frac{1}{2}+j2n)t} \Big|_0^\pi \\
 &= \frac{0,504}{1 + j4n}
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

e

$$\varphi(t) = 0,504 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + j4n} e^{j2nt} \tag{2.62a}$$

$$\begin{aligned}
 &= 0,504 \left[1 + \frac{1}{1+j4} e^{j2t} + \frac{1}{1+j8} e^{j4t} + \frac{1}{1+j12} e^{j6t} + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{1-j4} e^{-j2t} + \frac{1}{1-j8} e^{-j4t} + \frac{1}{1-j12} e^{-j6t} + \dots \right]
 \end{aligned} \tag{2.62b}$$

Vale observar que os coeficientes D_n são complexos. Além disso, D_n e D_{-n} são complexos conjugados, como esperado.

Espectro de Fourier Exponencial

No espectro exponencial, representamos graficamente os valores dos coeficientes D_n em função de ω . Contudo, como em geral D_n é complexo, necessitamos de dois gráficos: um para a parte real e outro para a parte imaginária de D_n , ou um para a amplitude (magnitude) e outro para a fase de D_n . Preferimos a última opção, devido à conexão com amplitudes e fases das componentes correspondentes da série de Fourier trigonométrica. Portanto, desenhamos gráficos de $|D_n|$ em função de ω e de $\angle D_n$ em função de ω . Isso requer que os coeficientes D_n sejam expressos na forma polar $|D_n|e^{\angle D_n}$.

Para um sinal periódico, os coeficientes D_n e D_{-n} são complexos conjugados,

$$|D_n| = |D_{-n}| \quad (2.63a)$$

$$\angle D_n = \theta_n \quad \text{e} \quad \angle D_{-n} = -\theta_n \quad (2.63b)$$

Logo,

$$D_n = |D_n|e^{j\theta_n} \quad \text{e} \quad D_{-n} = |D_n|e^{-j\theta_n} \quad (2.64)$$

Notemos que $|D_n|$ representa a amplitude (magnitude) e $\angle D_n$, a fase de cada componente. Pela Eq. (2.63), quando o sinal $g(t)$ tiver valores reais, o espectro de amplitude ($|D_n|$ versus f) será uma função par da frequência e o espectro de fase (ou angular, $\angle D_n$ versus f), uma função *ímpar* de f .

Para a série no Exemplo 2.3,

$$D_0 = 0,504$$

$$D_1 = \frac{0,504}{1+j4} = 0,122e^{-j75,96^\circ} \implies |D_1| = 0,122, \angle D_1 = -75,96^\circ$$

$$D_{-1} = \frac{0,504}{1-j4} = 0,122e^{j75,96^\circ} \implies |D_{-1}| = 0,122, \angle D_{-1} = 75,96^\circ$$

e

$$D_2 = \frac{0,504}{1+j8} = 0,0625e^{-j82,87^\circ} \implies |D_2| = 0,0625, \angle D_2 = -82,87^\circ$$

$$D_{-2} = \frac{0,504}{1-j8} = 0,0625e^{j82,87^\circ} \implies |D_{-2}| = 0,0625, \angle D_{-2} = 82,87^\circ$$

e assim por diante. Vale notar que D_n e D_{-n} são complexos conjugados, como esperado [ver Eq. (2.63b)].

A Fig. 2.14 mostra os espectros de frequência (amplitude e fase) da série de Fourier exponencial para o sinal periódico $\phi(t)$ na Fig. 2.13b.

Podemos observar algumas características interessantes nesses espectros. Primeira, o espectro existe para valores positivos e negativos de f (frequência). Segunda, o espectro de amplitude é uma função par de f e o espectro de fase, uma função *ímpar* de f . As Eqs. (2.63) mostram as características de simetria da amplitude e da fase de D_n .

O que Significa Frequência Negativa?

A existência do espectro em frequências negativas é, de alguma forma, algo intrigante para algumas pessoas, pois a frequência (número de repetições por segundo) é, por definição, uma grandeza positiva. Como devemos interpretar uma frequência negativa f_0 ? Para expressar uma senoide de uma frequência negativa $-f_0$, podemos subtrair $\omega_0 = 2\pi f_0$ e usar uma identidade trigonométrica, como

$$\cos(-\omega_0 t + \theta) = \cos(\omega_0 t - \theta)$$

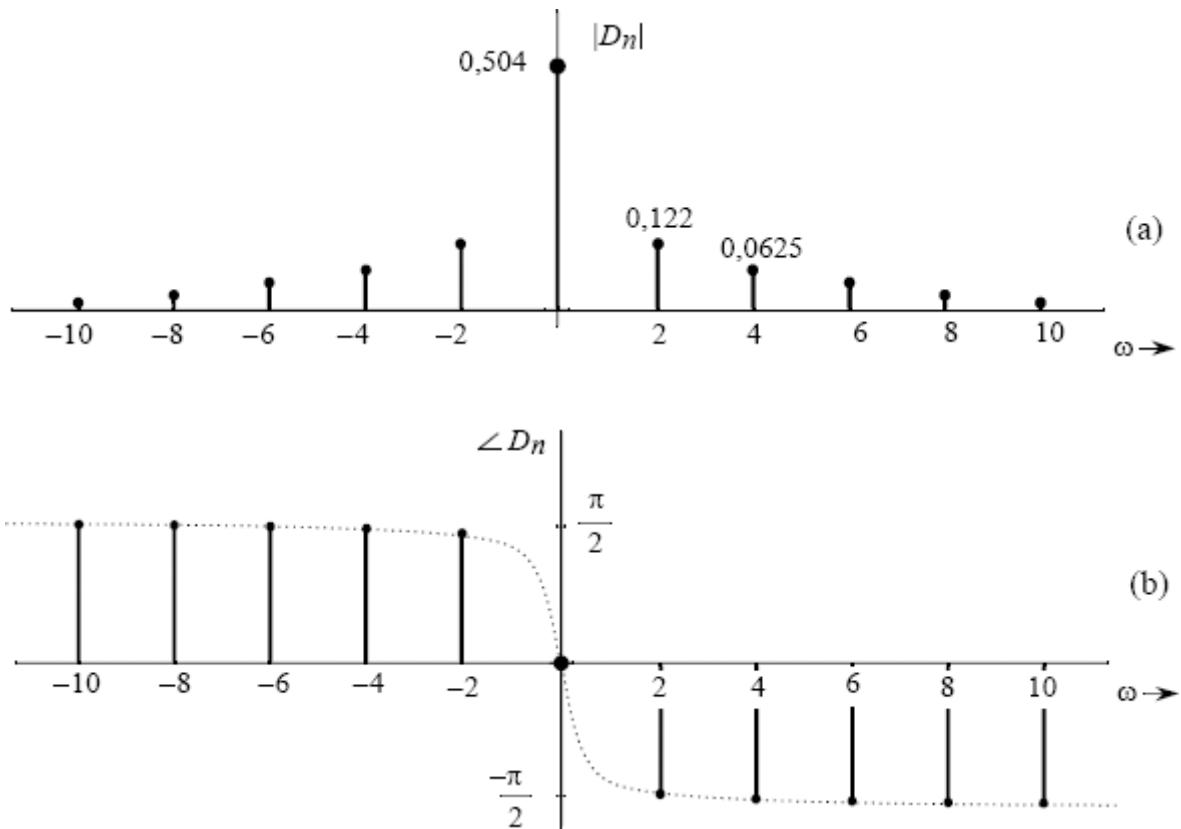


Figura 2.14

Espectro de Fourier exponencial para o sinal na Fig. 2.13a.

Isso mostra claramente que a frequência angular de uma senoide $\cos(-\omega_0 t + \theta)$ é $|\omega_0|$, que é uma grandeza positiva. A afirmação, baseada no bom senso, de que uma frequência deve ser positiva advém da tradicional noção de que frequência está associada a uma senoide de valores reais (como seno ou cosseno). Na verdade, o conceito de frequência associado a senoides de valores reais descreve somente a taxa de variação senoidal, sem ater-se ao sentido da variação. Isso ocorre porque sinais senoidais de valores reais NÃO contêm informação a respeito do sentido de sua variação.

O conceito de frequência negativa faz sentido **apenas** quando consideramos senoides de valores complexos, para as quais a taxa e o *sentido* da variação têm significado. Devemos observar que

$$e^{\pm j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t \pm j \sin \omega_0 t$$

Essa relação deixa claro que uma frequência ω positiva ou negativa leva a variações periódicas com a mesma taxa. Contudo, os resultantes sinais de valores complexos NÃO são iguais. Dado que $=|e^{\pm j\omega_0 t}| = 1$, tanto $e^{+j\omega_0 t}$ como $e^{-j\omega_0 t}$ são variáveis complexas de comprimento unitário, que podem ser representadas no plano complexo. Na Fig. 2.15, mostramos as duas senoides exponenciais como grandes complexas de comprimento unitário que variam no tempo t . A taxa de rotação para as duas exponenciais $e^{\pm j\omega_0 t}$ é $|\omega_0|$. Fica claro que, para frequências positivas, a senoide exponencial gira no sentido anti-horário ou trigonométrico; para frequências negativas, a senoide exponencial gira no sentido horário. Isso ilustra o real significado de frequências negativas.

Existe uma boa analogia entre frequência positiva/negativa e velocidade positiva/negativa. Assim como pessoas relutam em usar velocidade *negativa* para descrever o movimento de um objeto, também relutam em aceitar o conceito de frequência “negativa”. Contudo, uma vez que entendemos que velocidade negativa simplesmente se refere tanto ao sentido negativo do deslocamento como à real velocidade de um objeto em movimento, velocidade negativa passa a fazer sentido. De modo similar, frequência negativa NÃO descreve a taxa de variação periódica de um seno ou cosseno, mas, sim, o sentido e a taxa de rotação de uma exponencial senoidal de comprimento unitário.

Outra maneira de ver essa situação é dizer que os *espectros exponenciais* são uma representação gráfica dos coeficientes D_n como uma função de f . A existência do espectro em $f = -nf_0$ simplesmente indica que uma componente exponencial $e^{-jn2\pi f_0 t}$ existe na série. Sabemos, pela identidade de Euler

$$\cos(\omega t + \theta) = \frac{e^{j\theta}}{2} \exp(j\omega t) + \frac{e^{-j\theta}}{2} \exp(-j\omega t)$$

que uma senoide de frequência $n\omega_0$ pode ser expressa em termos de um par de exponenciais $e^{jn\omega_0 t}$ e $e^{-jn\omega_0 t}$. O fato de seno e cosseno consistirem em componentes senoidais exponenciais de frequências positiva e negativa indica que NÃO é possível descrever o *sentido* de suas variações periódicas. Na verdade, as funções seno e cosseno da frequência ω_0 consistem em duas senoides exponenciais de mesma amplitude e frequências $\pm\omega_0$. Em consequência, a frequência de um seno ou cosseno é o valor absoluto das duas componentes de frequência e denota apenas a taxa das variações senoidais.

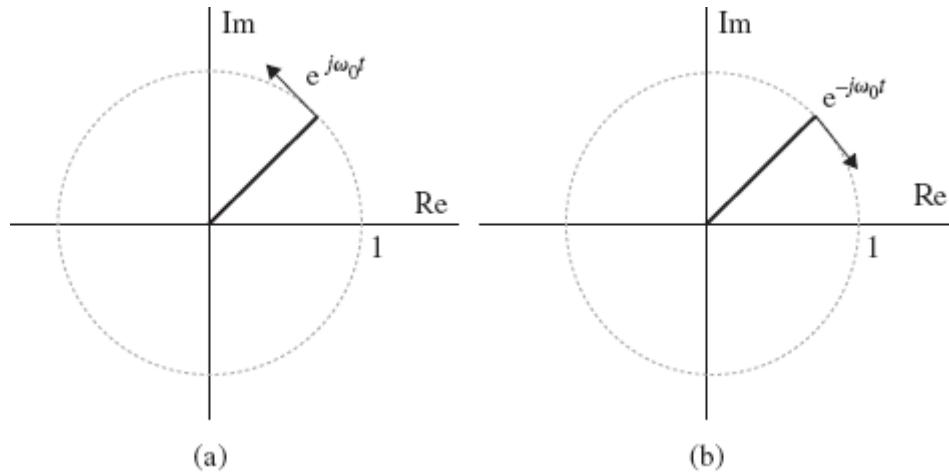


Figura 2.15

Variável complexa de comprimento unitário e frequência positiva (rotação no sentido anti-horário) comparada com variável complexa de comprimento unitário e frequência negativa (rotação no sentido horário).

Exemplo 2.4 Determinemos a série de Fourier exponencial da onda quadrada periódica mostrada na Fig. 2.16.

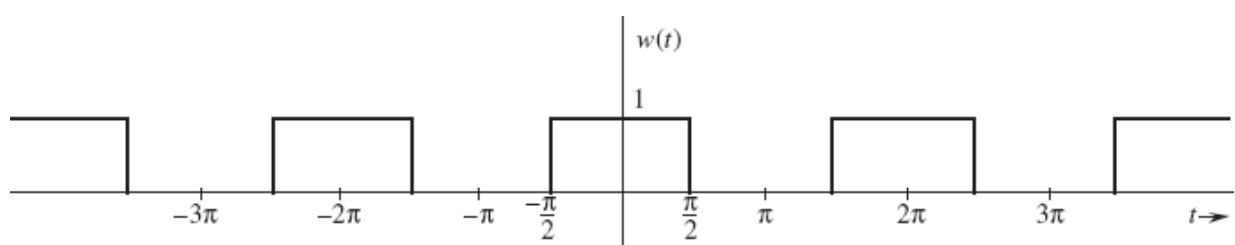


Figura 2.16

Sinal de pulso quadrado periódico.

$$w(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn2\pi f_0 t}$$

onde

$$D_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} w(t) dt = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} w(t) e^{-jn2\pi f_0 t} dt, & n \neq 0 \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/4}^{T_0/4} e^{-jn2\pi f_0 t} dt \\ &= \frac{1}{-jn2\pi f_0 T_0} \left[e^{-jn2\pi f_0 T_0/4} - e^{jn2\pi f_0 T_0/4} \right] \\ &= \frac{2}{n2\pi f_0 T_0} \sin\left(\frac{n2\pi f_0 T_0}{4}\right) = \frac{1}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Neste caso, D_n é real. Consequentemente, não precisamos do gráfico de fase ou ângulo e, em vez de representarmos o espectro de amplitude ($|D_n|$ versus f), podemos traçar apenas o gráfico de D_n versus f , como na Fig. 2.17.

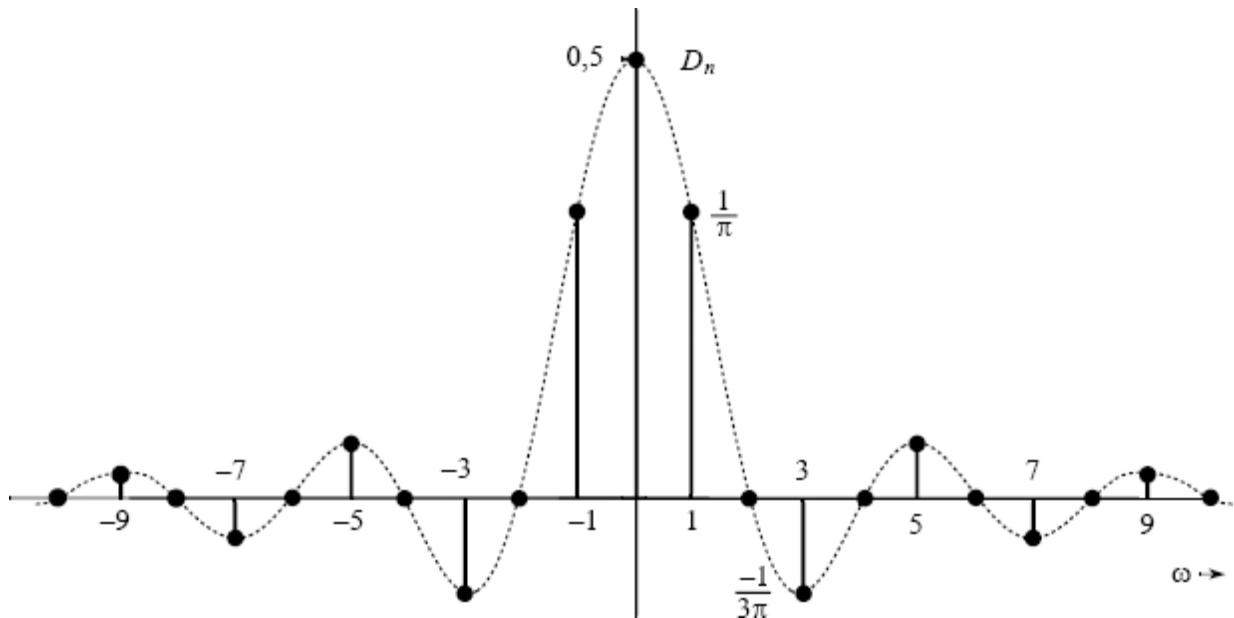


Figura 2.17
Espectro de Fourier exponencial do sinal de pulso quadrado periódico.

Exemplo 2.5 Determinemos a série de Fourier exponencial para o trem de pulsos $\delta_{T_0}(t)$ mostrado na Fig. 2.18a, e tracemos o gráfico dos correspondentes espectros.

A série de Fourier exponencial é dada por

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn2\pi f_0 t} \quad f_0 = \frac{1}{T_0} \quad (2.65)$$

com

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \delta_{T_0}(t) e^{-jn2\pi f_0 t} dt$$

Escolhendo o intervalo de integração e observando que, neste intervalo, $\delta_{T_0}(t) = \delta(t)$, obtemos

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{-jn2\pi f_0 t} dt$$

Nessa integral, o impulso está localizado em $t = 0$. Da propriedade de amostragem da função impulso, a integral no lado direito é o valor de em $t = 0$ (localização do impulso). Logo,

$$D_n = \frac{1}{T_0} \quad (2.66)$$

e

$$\delta_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn2\pi f_0 t} \quad f_0 = \frac{1}{T_0} \quad (2.67)$$

As Eqs. (2.67) mostram que o espectro exponencial é uniforme ($D_n = 1/T_0$) para todas as frequências, como ilustrado na Fig. 2.18b. Como o espectro é real, basta que tracemos o gráfico da amplitude. Todas as fases são iguais a zero.

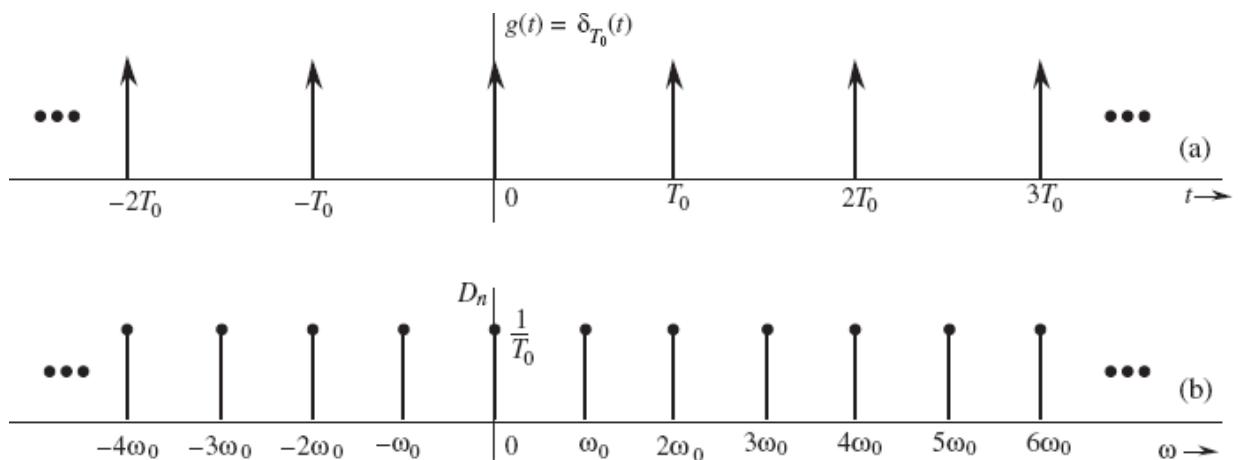


Figura 2.18
Trem de impulsos e correspondente espectro de Fourier exponencial.

Teorema de Parseval na Série de Fourier

Um sinal periódico $g(t)$ é um sinal de potência, e cada termo em sua série de Fourier também é um sinal de potência. A potência P_g de $g(t)$ é igual à potência de sua série de Fourier. Como a série de Fourier consiste em termos que são mutuamente ortogonais em um período, a potência da série de Fourier é igual à soma das potências das componentes de Fourier. Esse resultado advém do teorema de Parseval.

Portanto, para a série de Fourier exponencial

$$g(t) = D_0 + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

a potência é dada por (veja o Exercício 2.1-7)

$$P_g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n|^2 \quad (2.68a)$$

Para um sinal $g(t)$ de valores reais, $|D_{-n}| = |D_n|$. Logo,

$$P_g = D_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |D_n|^2 \quad (2.68b)$$

Comentário: O teorema de Parseval admite diferentes formas, como as das Eq. (2.57) e Eq. (2.68a). No próximo capítulo, apresentaremos mais uma forma para o caso de sinais periódicos. Embora essas várias representações do teorema pareçam distintas, todas afirmam o mesmo princípio: o quadrado do comprimento de um vetor é igual à soma dos quadrados dos comprimentos de suas componentes ortogonais. A primeira forma [Eq. (2.57)] se aplica a sinais de energia; a segunda [Eq. (2.68a)], a sinais periódicos representados pela série de Fourier exponencial.

Alguns Exemplos Adicionais de Conjuntos Ortogonais de Sinais

A representação de um sinal pela série de Fourier mostra que sinais são, em todos os sentidos, vetores. Assim como há diversas maneiras de representar um vetor como a soma de componentes, dependendo da escolha do sistema de coordenadas, também existem numerosas formas de representar um sinal como a soma de componentes. Assim como um sistema de coordenadas vetoriais é formado por um conjunto de vetores mutuamente ortogonais (retangulares, cilíndricos, esféricos etc.), um sistema de coordenadas de sinais também é formado por um conjunto de sinais mutuamente ortogonais, os sinais de base. Existe um grande número de conjuntos ortogonais de sinais que podem ser usados como sinais de base para séries de Fourier generalizadas. Alguns conjuntos de sinais bem conhecidos são os das funções trigonométricas (senoidais), funções exponenciais, funções de Walsh, funções de Bessel, polinômios de Legendre, funções de Laguerre, polinômios de Jacobi, polinômios de Hermite e polinômios de Chebyshev. Neste livro, as funções de maior interesse são as exponenciais, discutidas no próximo capítulo.

2.8 EXERCÍCIOS COM O MATLAB

Nesta seção, apresentamos alguns exercícios básicos com o MATLAB para ilustrar o processo de geração de sinais, operações com sinais e análise de sinais por série de Fourier.

Sinais Básicos e Representação Gráfica de Sinais

Funções básicas podem ser definidas por meio de arquivos m de MATLAB. A seguir, apresentamos três programas MATLAB para implementar três funções básicas, a partir de um vetor t variante no tempo:

- `ustep.m` implementa a função degrau unitário $u(t)$
 - `rect.m` implementa a função retangular padrão $rect(t)$
 - `triang1.m` implementa a função triangular padrão $\Delta(t)$
-

```
% (nome do arquivo: ustep.m)
% A função degrau unitário é uma função do tempo 't'.
% Uso y = ustep(t)
%
% ustep(t) = 0     se t < 0
% ustep(t) = 1,   se t >= 1
%
% t - deve ser uma variável real, podendo ser um vetor ou uma matriz
%
function y=ustep(t)
    y = (t>=0) ;
end
```

```

% (nome do arquivo: rect.m)
% A função rectangular é uma função do tempo 't'.
%
% Uso    y = rect(t)
% t - deve ser uma variável real, podendo ser um vetor ou uma matriz
%
% rect(t) = 1,      se |t| < 0.5
% rect(t) = 0,      se |t| > 0.5
%
function y=rect(t)
y =(sign(t+0.5)-sign(t-0.5) >0);
end

```

```

% (nome do arquivo: triangl.m)
% A função triangular é uma função do tempo 't'.
%
% triangl(t) = 1-|t|, se |t| < 1
% triangl(t) = 0, se |t| > 1
%
% Uso    y = triangl(t)
% t - deve ser uma variável real, podendo ser um vetor ou uma matriz
%
function y=triangl(t)
y = (1-abs(t)).*(t>=-1).* (t<1);
end

```

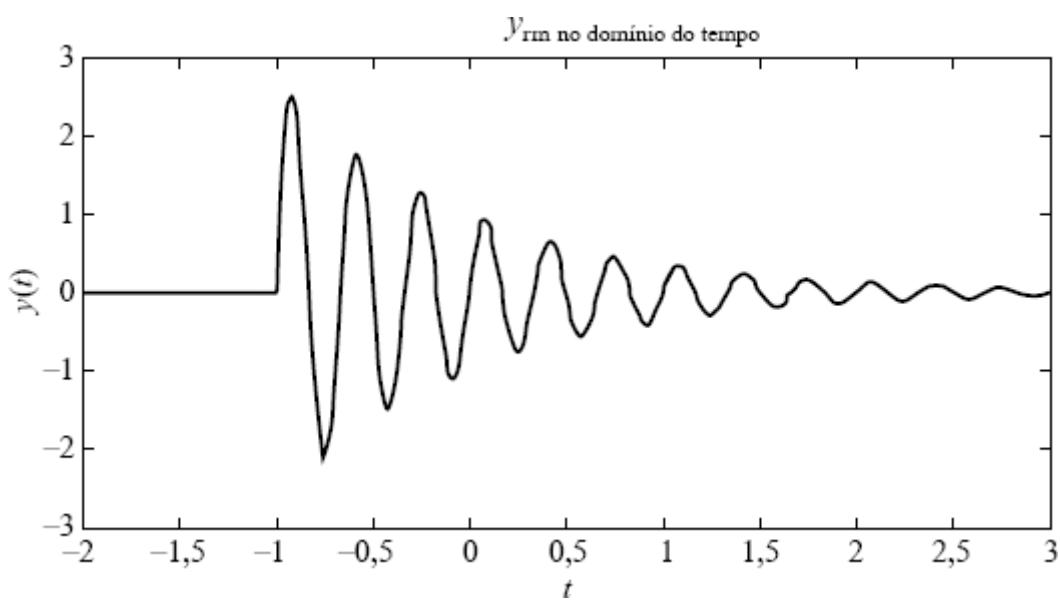


Figura 2.19
Gráfico de um sinal.

A seguir, mostramos um exemplo de como usar o MATLAB para gerar o gráfico de um sinal. Para isso, fornecemos o arquivo siggraf.m. Neste exemplo, construímos o sinal

$$y(t) = \exp(-t) \sin(6\pi t) u(t + 1)$$

e traçamos o gráfico de sua variação com o tempo. A Fig. 2.19 mostra a curva resultante.

```
% (nome do arquivo: siggraf.m)
% Para traçar o gráfico de um sinal, o primeiro passo é especificar
% os eixos x e y
% Podemos, primeiro, especificar o comprimento do eixo x
t=[-2:0.01:3]; % "t" varia de -2 a 3, em incrementos de 0,01
% A seguir, calculamos valores do sinal no intervalo de "t"
especificado para o gráfico
y=exp(-t).*sin(10*pi*t).*ustep(t+1);
figure(1); fig1=plot(t,y); % gráfico de t versus y na figura 1
set(fig1,'LineWidth',2); % escolhemos uma linha mais larga
xlabel('\it t'); % usamos 't' itálico para o título do eixo x
ylabel('\bf y\rm no domínio do tempo'); % usamos 'y' em negrito para o título
do eixo y
title('\bf y\rm no domínio do tempo'); % podemos usar
subscritos
```

Sinais Periódicos e Sinais de Potência

Para gerar sinais periódicos, primeiro calculamos valores do sinal em um período e, depois, repetimos esses valores múltiplas vezes.

Com o programa de MATLAB PfuncEx.m, fornecido a seguir, geramos um sinal periódico e observamos seu comportamento ao longo de $2M$ períodos. Neste exemplo, o período é $T = 6$. O programa também calcula a potência média do sinal, armazenada na variável `y_power`, e a energia do sinal em um período, armazenada na variável `y_energyT`.

```
% (nome do arquivo: PfuncEx.m)
% Este exemplo gera um sinal periódico, traça o gráfico de sua variação
com o tempo
```

```

% e calcula a potência média do sinal, na variável y_power, e a energia
% do sinal em um período T, na variável: y_energyT
echo off;clear;clf;
% Para gerar um sinal periódico g_T(t),
% podemos, primeiro, calcular valores do sinal em um período 'T'
Dt=0.002; % Intervalo de tempo (para amostra do sinal)
T=6; % período=T
M=3; % Para gerar 2M períodos do sinal
t=[0:Dt:T-Dt]; %"t" varia em um período, [0, T], em incrementos de Dt
% A seguir, o sinal é calculado em um período "T"
y=exp(-abs(t)/2).*sin(2*pi*t).*(ustep(t)-ustep(t-4));
% Agora, múltiplos períodos podem ser gerados.
time=[];
y_periodic=[];
for i=-M:M-1,
    time=[time i*T+t];
    y_periodic=[y_periodic y];
end
figure(1); fy=plot(time,y_periodic);
set(fy,'LineWidth',2); xlabel('{\it t}');
echo on
% Cálculo da potência média
y_power=sum(y_periodic.*y_periodic')*Dt/(max(time)-min(time))
% Cálculo da energia em um período T
y_energyT=sum(y.*conj(y))*Dt

```

O programa gera um sinal periódico, como mostrado na Fig. 2.20, e produz as respostas numéricas:

```

y_power =
0.0813

y_energyT =
0.4878

```

Correlação de Sinais

Um programa de MATLAB pode implementar diretamente o conceito de correlação de sinais introduzido na Seção 2.5. No próximo exemplo, fornecemos um programa, sign_cor.m, que calcula os coeficientes de correlação entre o sinal $x(t)$ e sinais $g_1(t), g_2(t), \dots, g_5(t)$. O programa, primeiro, gera a Fig. 2.21, que ilustra os seis sinais no domínio do tempo.

```

% (nome do arquivo: sign_cor.m)
clear
% Para gerar os seis sinais x(t), g_1(t), ... g_5(t);
% deste exemplo
% podemos primeiro, gerar o sinal g(t) em um período 'T'

```

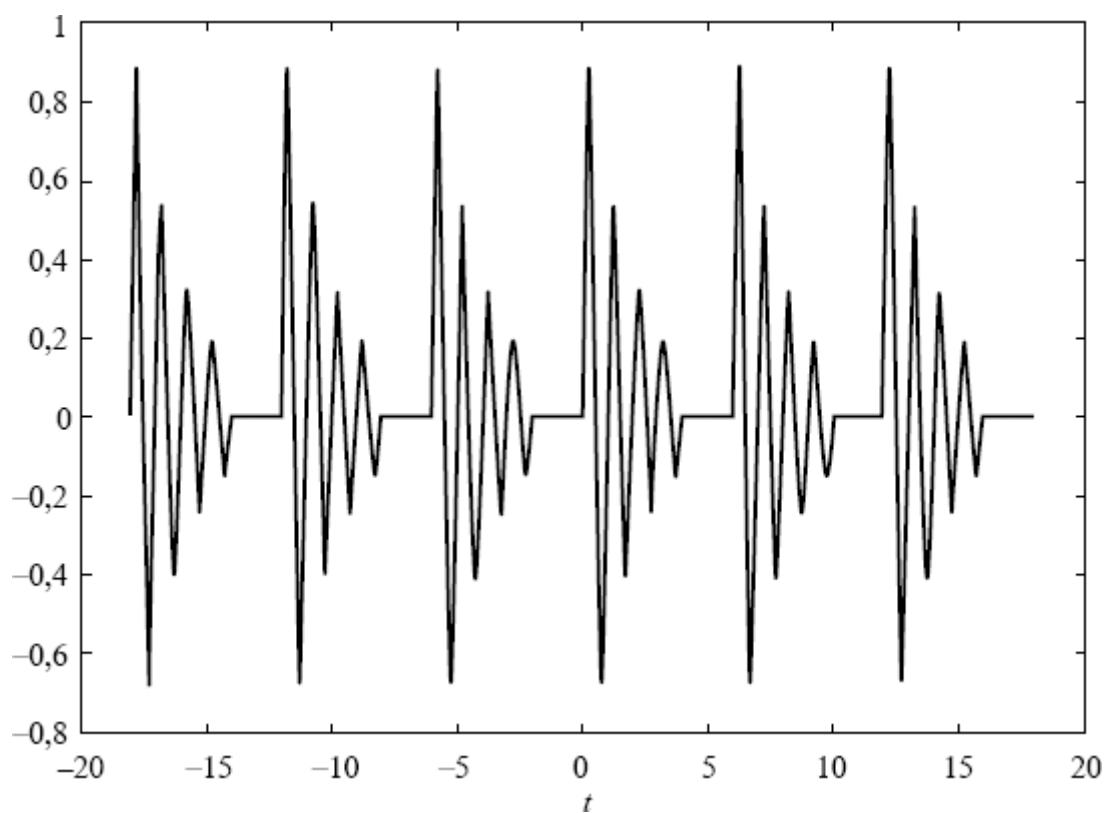


Figura 2.20

Geração de um sinal periódico.

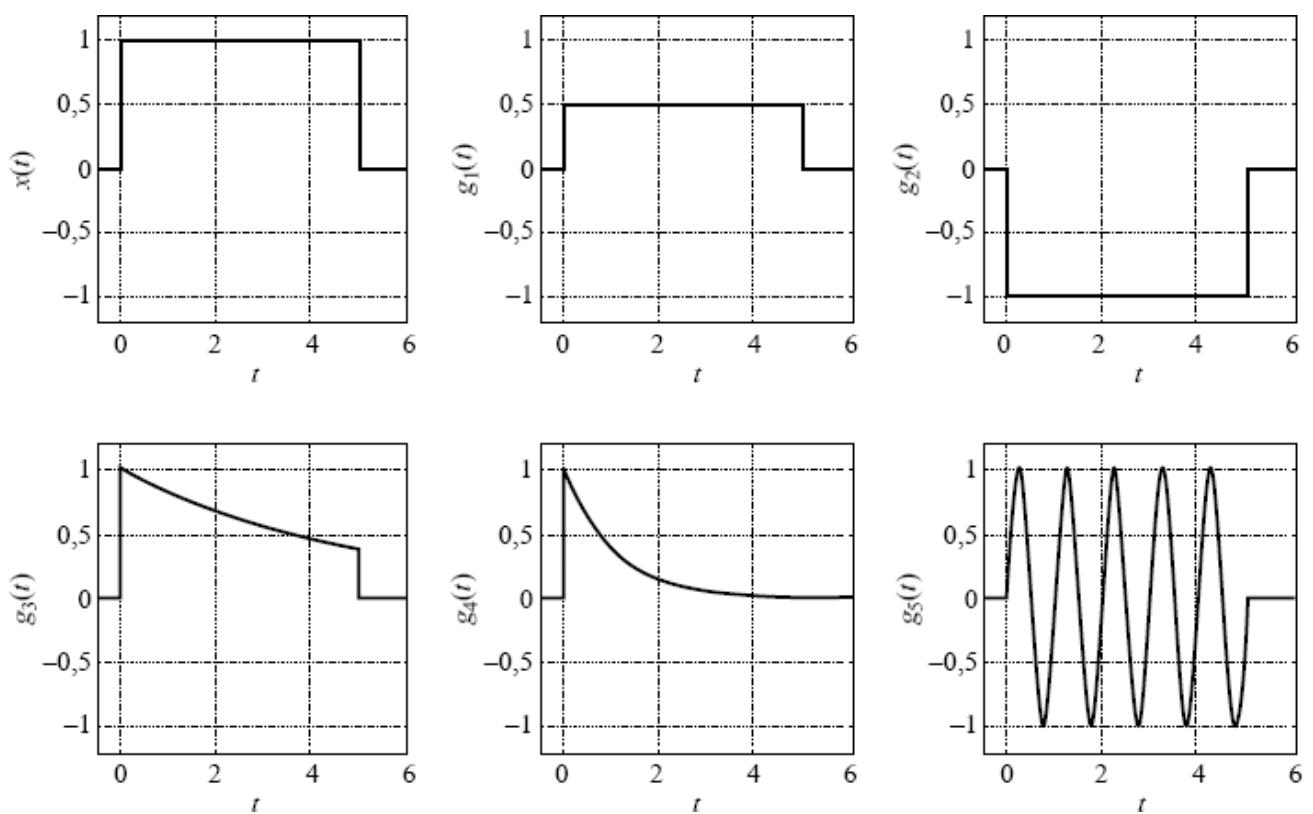


Figura 2.21

Seis sinais simples.

```
Dt=0.01; % incremento temporal Dt
T=6.0; % duração temporal = T
t=[-1:Dt:T]; %"t" varia em [-1, T] em incrementos Dt
% A seguir, o sinal é calculado no interval de variação de "t" para
gerar o gráfico
x=ustep(t)-ustep(t-5);
g1=0.5*(ustep(t)-ustep(t-5));
g2=- (ustep(t)-ustep(t-5));
g3=exp(-t/5).* (ustep(t)-ustep(t-5));
g4=exp(-t).* (ustep(t)-ustep(t-5));
g5=sin(2*pi*t).* (ustep(t)-ustep(t-5));
subplot(231); sig1=plot(t,x,'k');
```

```

xlabel('\it t'); ylabel('(\it x)(\it t)'); % Título do eixo x
set(sig1,'Linewidth',2); % especificação da largura da linha
axis([-5 6 -1.2 1.2]); grid % especificação dos intervalos nos eixos
x (de -0,5 a 6) e y (de -1,2 a 1,2)
subplot(232); sig2=plot(t,g1,'k');
xlabel('\it t'); ylabel('(\it g}_1(\it t)');
set(sig2,'Linewidth',2);
axis([-5 6 -1.2 1.2]); grid
subplot(233); sig3=plot(t,g2,'k');
xlabel('\it t'); ylabel('(\it g}_2(\it t)');
set(sig3,'Linewidth',2);
axis([-5 6 -1.2 1.2]); grid
subplot(234); sig4=plot(t,g3,'k');
xlabel('\it t'); ylabel('(\it g}_3(\it t)');
set(sig4,'Linewidth',2);
axis([-5 6 -1.2 1.2]); grid
subplot(235); sig5=plot(t,g4,'k');
xlabel('\it t'); ylabel('(\it g}_4(\it t)');
set(sig5,'Linewidth',2);grid
axis([-5 6 -1.2 1.2]);
subplot(236); sig6=plot(t,g5,'k');
xlabel('\it t'); ylabel('(\it g}_5(\it t)');
set(sig6,'Linewidth',2);grid
axis([-5 6 -1.2 1.2]);

% Cálculo da energia de cada sinal
E0=sum(x.*conj(x))*Dt;
E1=sum(g1.*conj(g1))*Dt;
E2=sum(g2.*conj(g2))*Dt;
E3=sum(g3.*conj(g3))*Dt;
E4=sum(g4.*conj(g4))*Dt;
E5=sum(g5.*conj(g5))*Dt;

c0=sum(x.*conj(x))*Dt/(sqrt(E0*E0))
c1=sum(x.*conj(g1))*Dt/(sqrt(E0*E1))
c2=sum(x.*conj(g2))*Dt/(sqrt(E0*E2))
c3=sum(x.*conj(g3))*Dt/(sqrt(E0*E3))
c4=sum(x.*conj(g4))*Dt/(sqrt(E0*E4))
c5=sum(x.*conj(g5))*Dt/(sqrt(E0*E5))

```

Os seis coeficientes de correlação obtidos com o programa são:

```

c0 =
    1
c1 =
    1
c2 =
   -1
c3 =
  0.9614
c4 =
  0.6282
c5 =
  8.6748e-17

```

Cálculo Numérico de Coeficientes D_n

Existem numerosas maneiras de calcular valores dos coeficientes D_n de uma série de Fourier. A seguir, usaremos o MATLAB para mostrar como usar integração numérica no cálculo de séries de Fourier.

Para efetuar a integração numérica direta da Eq. (2.60), o primeiro passo consiste em definir a expressão simbólica do sinal $g(t)$ em análise. Neste exemplo, usamos a função triangular $\Delta(t)$.

```

% (funct_tri.m)
% Função triangular padrão, com base de -1 a 1
function y = funct_tri(t)
% Uso y = func_tri(t)
%     t = variável de entrada i
y=((t>-1)-(t>1)).*(1-abs(t));

```

Uma vez que o arquivo funct_tri.m define a função $y = g(t)$, podemos efetuar diretamente a integração numérica da Eq. (2.60), considerando um número finito de coeficientes da série de Fourier $\{D_n, n = -N, \dots, -1, 0, 1, \dots, N\}$. A seguir, fornecemos um programa em MATLAB denominado FSexample.m, que permite o cálculo da série de Fourier de $\Delta(t/2)$, com período $[a, b]$ ($a = \Delta 2, b = 2$). Neste exemplo, $N = 11$. A execução desse pequeno programa em MATLAB gerará a Fig. 2.22, que mostra a variação da amplitude e da fase de D_n .

```
% (nome do arquivo: FSexp_a.m)
% Este exemplo mostra como calcular, numericamente
% Coeficientes Dn da série de Fourier exponencial
% diretamente.
% O usuário deve definir uma função simbólica
% g(t). Neste exemplo, g(t)=funct_tri(t).
echo off; clear; clf;
j=sqrt(-1); % Define j para álgebra complexa*
b=2; a=-2; % Definição de um período do sinal
tol=1.e-5; % Especificação da tolerância para erro de integração
T=b-a; % comprimento de um período
N=11; % Número de componentes da série de Fourier
        % em cada lado da frequência zero
Fi=[-N:N]*2*pi/T; % Especificação do intervalo de frequência
% D_0 é calculado e armazenado em D(N+1);
Func= @(t) funct_tri(t/2);
D(N+1)=1/T*quad(Func,a,b,tol); % a função quad,m de MATLAB usada
                                % para cálculo da integral
for i=1:N
    *
```

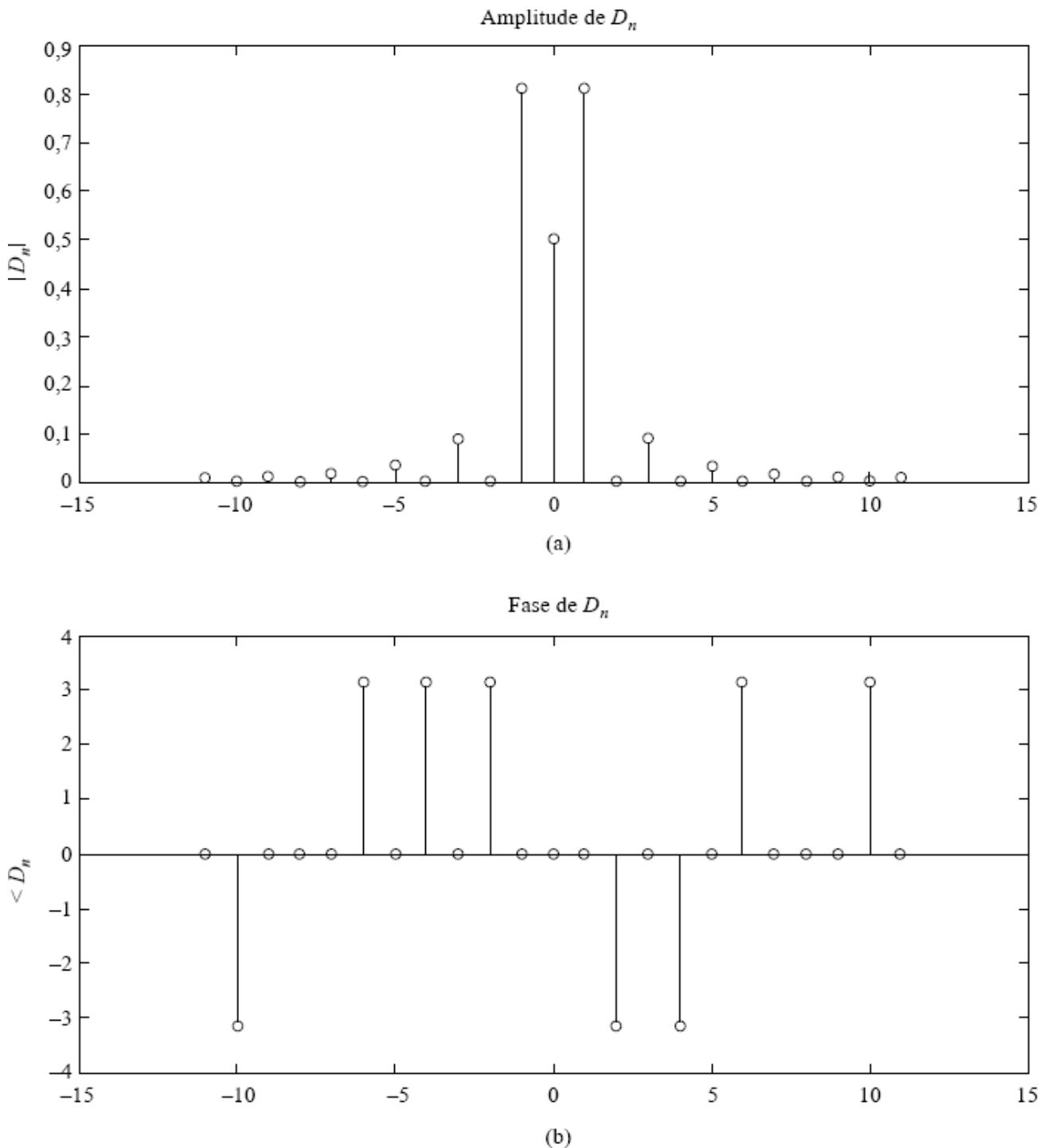


Figura 2.22

Coeficientes da série de Fourier exponencial da repetição de $\Delta(t/2)$ com período $T = 4$.

```

% Dn é calculado, para n=1,...,N, e armazenado em D(N+2), ... D(2N+1)
Func= @(t) exp(-j*2*pi*t*i/T).*funct_tri(t/2);
D(i+N+1)=quad(Func,a,b,tol);
% Dn é calculado, para n=-N,...,-1 e armazenado em D(1), ... D(N)
Func= @(t) exp(j*2*pi*t*(N+1-i)/T).*funct_tri(t/2);
D(i)= quad(Func,a,b,tol);
end
figure(1);
subplot(211);s1=stem([-N:N],abs(D));
set(s1,'LineWidth',2); ylabel('|\{D\}_{\it n}|');
title('Amplitude de \{D\}_{\it n}')
subplot(212);s2=stem([-N:N],angle(D));
set(s2,'LineWidth',2); ylabel('<\{D\}_{\it n}>');
title('Fase de \{D\}_{\it n}');

```

REFERÊNCIAS

1. P. L. Walker, *The Theory of Fourier Series and Integrals*, Wiley-Interscience, New York, 1986.
2. R. V. Churchill, and J. W. Brown, *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1978.

EXERCÍCIOS

- 2.1-1** Determine a energia de cada um dos sinais representados na Fig. E.2.1-1. Comente os efeitos de mudança de sinal, translação temporal e multiplicação do sinal por dois sobre a energia. Qual é o efeito sobre a energia se o sinal for multiplicado por k ?

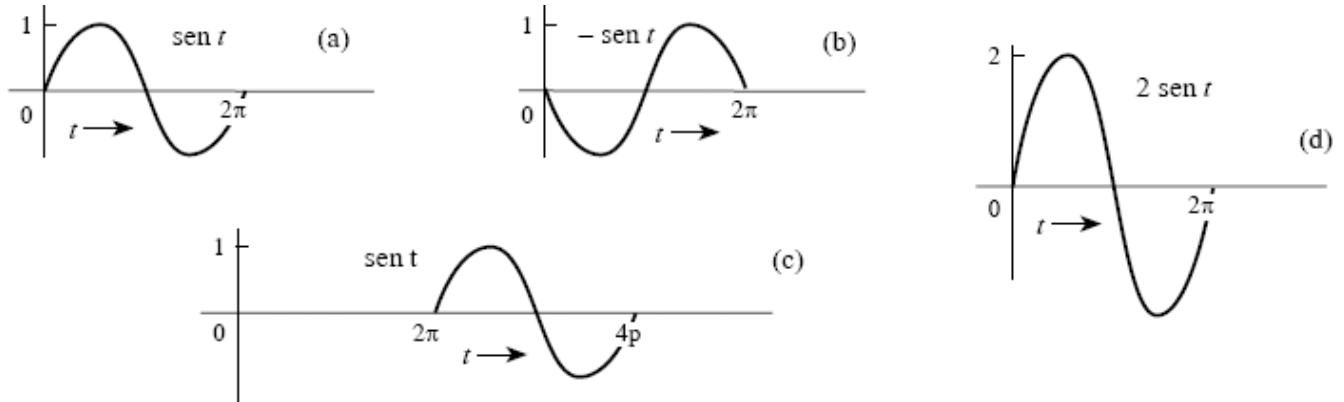


Figura E.2.1-1

- (a)** Determine E_x e E_y , energias dos sinais $x(t)$ e $y(t)$ mostrados na Fig. E.2.1-2a. Esboce os gráficos dos sinais $x(t) + y(t)$ e $x(t) - y(t)$, e mostre que a energia de qualquer um desses sinais é igual a $E_x + E_y$. Repita o procedimento para o par de sinais na Fig. E.2.1-2b.

- (b)** Agora, repita o procedimento para o par de sinais na Fig. E.2.1-2c. Nesse caso, as energias dos sinais $x(t) + y(t)$ e $x(t) - y(t)$ são iguais?

- 2.1-3** Determine a energia de uma senoide $C \cos(\omega_0 t + \theta)$.

- 2.1-4** Mostre que, se $\omega_1 = \omega_2$, a potência de $g(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2)$ é $[+ 2C_1 C_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]/2$, que não é igual a

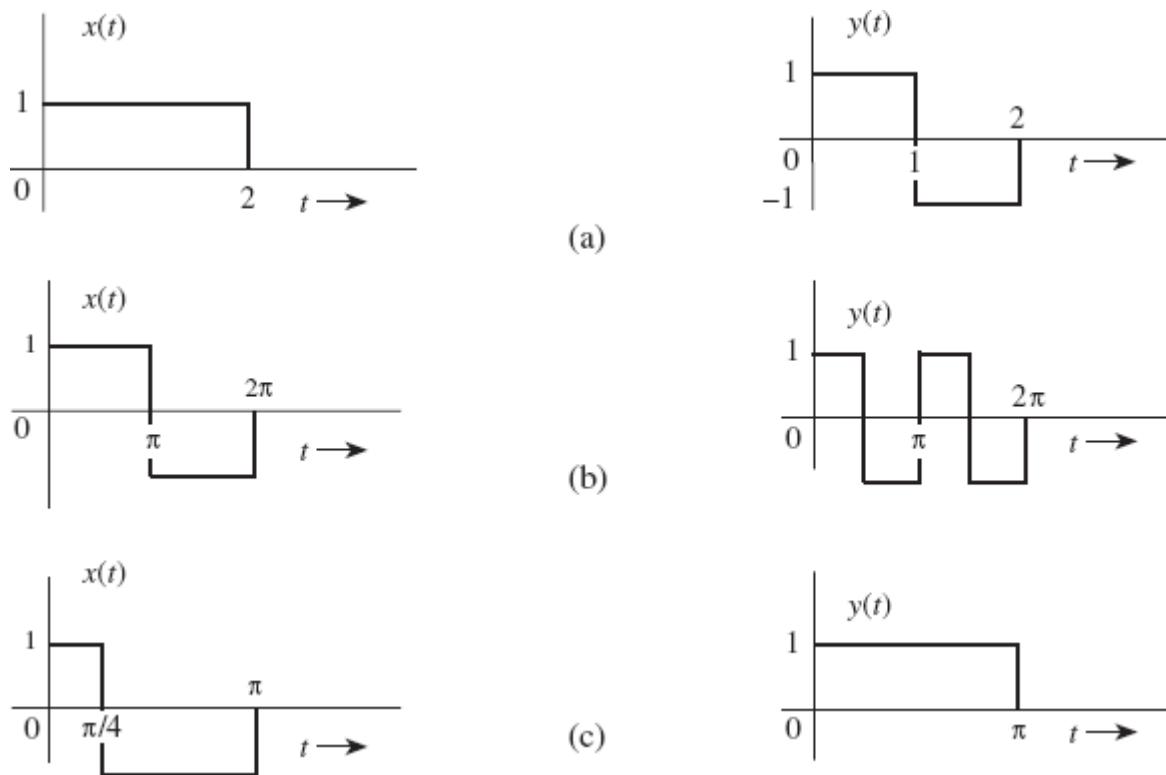


Figura E.2.1-2

- 2.1-5** Determine a potência do sinal periódico $g(t)$ mostrado na Fig. E.2.1-5. Determine, também, a potência e valor rms de (a) $-g(t)$, (b) $2g(t)$ e (c) $cg(t)$. Comente os resultados.

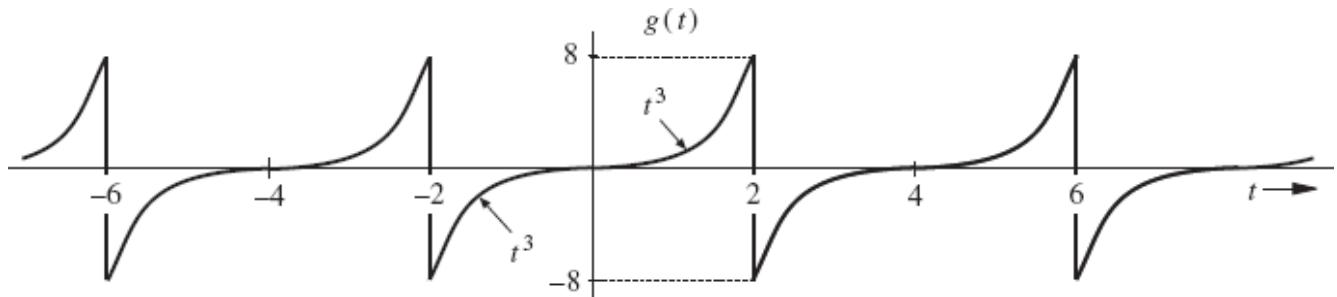


Figura E.2.1-5

- 2.1-6** Determine a potência e valor rms dos sinais na (a) Fig. E.2.1-6a, (b) Fig. 2.16, (c) Fig. E.2.1-6b, (d) Fig. E.2.7-4a, (e) Fig. E.2.7-4c.

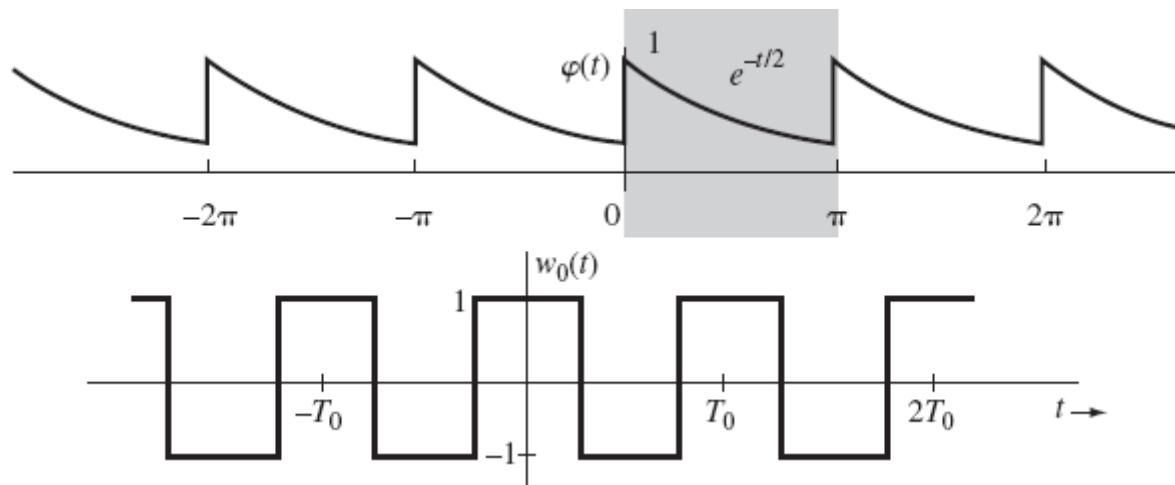


Figura E.2.1-6

2.1-7 Mostre que a potência de um sinal $g(t)$ dado por

$$g(t) = \sum_{k=m}^n D_k e^{j\omega_k t} \quad \omega_i \neq \omega_k \text{ para todo } i \neq k$$

é (teorema de Parseval)

$$P_g = \sum_{k=m}^n |D_k|^2$$

2.1-8 Determine a potência e o valor rms dos seguintes sinais:

(a) $10 \cos\left(100t + \frac{\pi}{3}\right)$

(d) $10 \cos 5t \cos 10t$

(b) $10 \cos\left(100t + \frac{\pi}{3}\right) + 16 \sin\left(150t + \frac{\pi}{5}\right)$

(e) $10 \sin 5t \cos 10t$

(c) $(10 + 2 \sin 3t) \cos 10t$

(f) $e^{j\alpha t} \cos \omega_0 t$

2.2-1 Mostre que uma exponencial e^{-at} com início em $-\infty$ não é um sinal de energia e nem um sinal de potência, para qualquer valor real de a . A seguir, para a imaginário, mostre que é um sinal de potência, com potência $P_g = 1$, independentemente do valor de a .

2.3-1 Na Fig. E.2.3-1, o sinal $g_1(t) = g(-t)$. Expressse os sinais $g_2(t)$, $g_3(t)$, $g_4(t)$ e $g_5(t)$ em termos dos sinais $g(t)$, $g_1(t)$ e de suas versões nas quais o eixo do tempo é deslocado, dilatado e invertido. Por exemplo, $g_2(t) = g(t - T) + g_1(t - T)$, para algum valor adequado de T . Do mesmo modo, $g_3(t)$ e $g_4(t)$ podem ser expressos como $g(t - T) + g(t - T)$, para algum valor adequado de T . Por sua vez, $g_5(t)$ pode ser expresso em termos de $g(t)$ com o eixo do tempo deslocado, dilatado e, por fim, $g(t)$ multiplicado por uma constante.

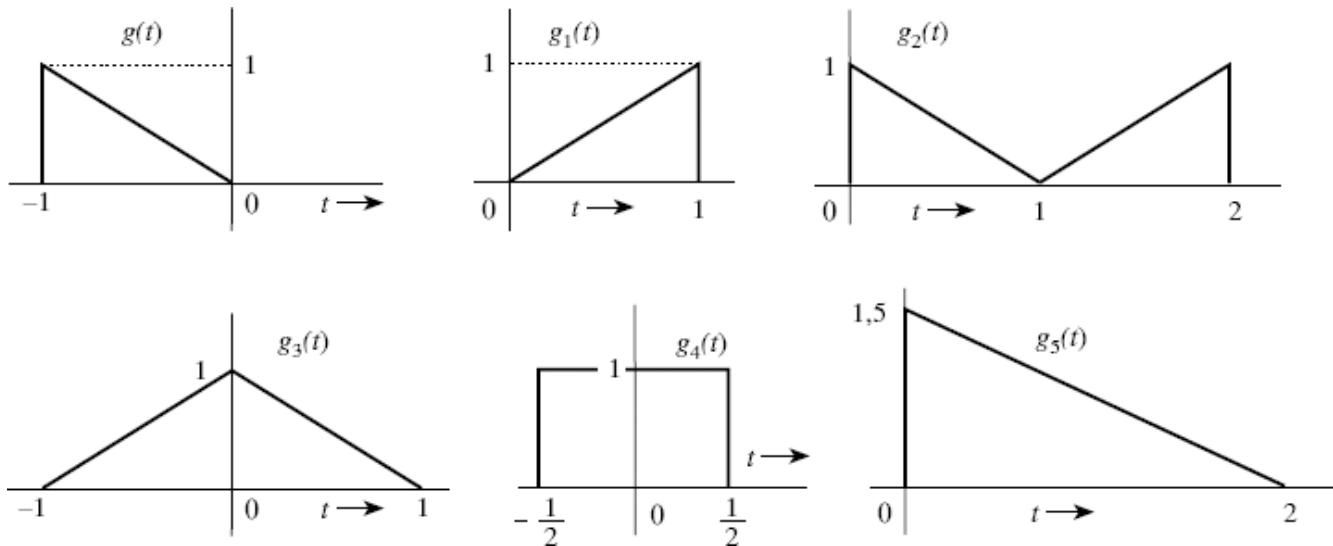


Figura E.2.3-1

2.3-2 Para o sinal $g(t)$ mostrado na Fig. E.2.3-2, esboce gráficos dos seguintes sinais: (a) $g(-t)$, (b) $g(t + 6)$, (c) $g(3t)$, (d) $g(6 - t)$.

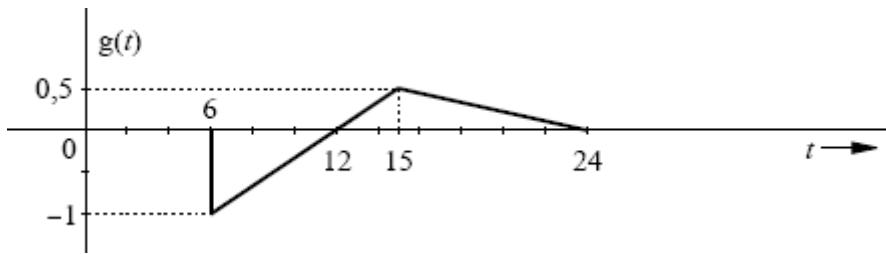


Figura E.2.3-2

- 2.3-3** Para o sinal $g(t)$ mostrado na Fig. E.2.3-3, esboce gráficos dos seguintes sinais: **(a)** $g(t - 4)$, **(b)** $g(t/1,5)$, **(c)** $g(2t - 4)$, **(d)** $g(2 - t)$.

Sugestão: Lembre-se de que a substituição de t por $t - T$ atrasa o sinal em T . Portanto, $g(2t - 4)$ é $g(2t)$ com t substituído por $t - 2$. Da mesma forma, $g(2 - t)$ é $g(-t)$ com t substituído por $t - 2$.

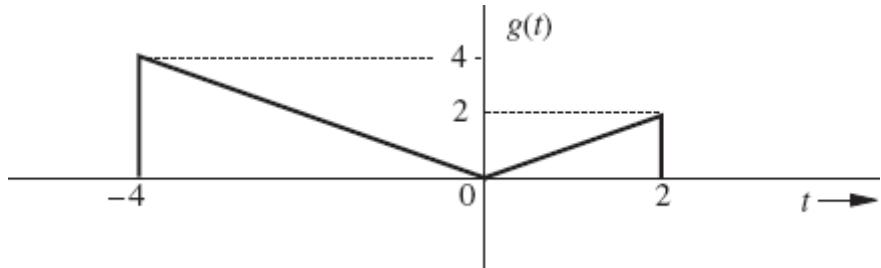


Figura E.2.3-3

- 2.3-4** Para um sinal de energia $g(t)$ com energia E_g , mostre que a energia de qualquer um dos sinais $-g(t)$, $g(-t)$ e $g(t - T)$ é E_g . Mostre, também, que a energia de $g(at)$ e a de $g(at - b)$ são iguais a E_g/a . Isso demonstra que a inversão e a translação temporais não afetam a energia de sinais. Contudo, a compressão temporal de um sinal por um fator a (t substituído por at) divide a energia pelo mesmo fator. Qual é o efeito sobre a energia quando o sinal é **(a)** dilatado temporalmente por um fator a (t substituído por at , $a > 1$) e **(b)** multiplicado por uma constante a ?

- 2.3-5** Simplifique as seguintes expressões:

(a) $\left(\frac{\tan t}{2t^2 + 1}\right)\delta(t)$	(d) $\left(\frac{\sin \pi(t+2)}{t^2 - 4}\right)\delta(t-1)$
(b) $\left(\frac{j\omega - 3}{\omega^2 + 9}\right)\delta(\omega)$	(e) $\left(\frac{\cos(\pi t)}{t+2}\right)\delta(2t+3)$
(c) $[e^{-t} \cos(3t - \pi/3)]\delta(t + \pi)$	(f) $\left(\frac{\sin k\omega}{\omega}\right)\delta(\omega)$

Sugestão: Use a Eq. (2.10b). Para a parte **(f)**, use a regra de L'Hôpital.

- 2.3-6** Calcule as seguintes integrais:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$	(e) $\int_{-2}^{\infty} \delta(3+t)e^{-t}dt$
(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)g(t - \tau)d\tau$	(f) $\int_{-2}^2 (t^3 + 4)\delta(1-t)dt$
(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}dt$	(g) $\int_{-\infty}^{\infty} g(2-t)\delta(3-t)dt$
(d) $\int_{-\infty}^1 \delta(t-2)\sin \pi t dt$	(h) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{(x-1)} \cos \frac{\pi}{2}(x-5)\delta(2x-3)dx$

Sugestão: $\delta(x)$ está localizado em $x = 0$. Por exemplo, $\delta(1 - t)$ está localizado em $1 - t = 0$, ou seja, em $t = 1$, e assim por diante.

2.3-7 Prove que

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

Depois, mostre que

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \delta(f) \quad \text{onde} \quad \omega = 2\pi f$$

Sugestão: mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(at) dt = \frac{1}{|a|} \phi(0)$$

2.4-1 Deduza a Eq. (2.19) de modo alternativo; para isto, observe que $\mathbf{e} = (\mathbf{g} - c\mathbf{x})$ e

$$|\mathbf{e}|^2 = (\mathbf{g} - c\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{g} - c\mathbf{x}) = |\mathbf{g}|^2 + c^2|\mathbf{x}|^2 - 2c\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}$$

Para minimizar $|\mathbf{e}|^2$, iguale a zero sua derivada em relação a c .

2.4-2 Para os sinais $g(t)$ e $x(t)$ mostrados na Fig. E.2.4-2, determine a componente da forma de $x(t)$ contida em $g(t)$. Em outras palavras, determine o valor ótimo de c na aproximação $g(t) \approx cx(t)$, de modo que a energia do sinal de erro seja mínima. Qual é o valor da energia do resultante sinal de erro?



Figura E.2.4-2

2.4-3 Para os sinais $g(t)$ e $x(t)$ mostrados na Fig. E.2.4-2, determine a componente da forma de $g(t)$ contida em $x(t)$. Em outras palavras, determine o valor ótimo de c na aproximação $x(t) \approx cg(t)$, de modo que a energia do sinal de erro seja mínima. Qual é o valor da energia do resultante sinal de erro?

2.4-4 Refaça o Exercício 2.4-2 para o caso em que $x(t)$ é o pulso senoidal na Fig. E.2.2-4

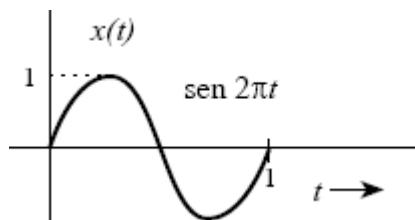


Figura E.2.4-4

2.4-5 As energias de dois sinais $x(t)$ e $y(t)$ são E_x e E_y , respectivamente.

- (a) Se $x(t)$ e $y(t)$ forem ortogonais, mostre que a energia do sinal $x(t) + y(t)$ é igual à energia do sinal $x(t) - y(t)$ e dada por $E_x + E_y$.
- (b) Se $x(t)$ e $y(t)$ forem ortogonais, determine as energias dos sinais $c_1x(t) + c_2y(t)$ e $c_1x(t) - c_2y(t)$.
- (c) A energia cruzada de dois sinais de energia $x(t)$ e $y(t)$, E_{xy} , é definida como

$$E_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt$$

Se $z(t) = x(t) \pm y(t)$, mostra que

$$E_z = E_x + E_y \pm (E_{xy} + E_{yx})$$

- 2.4-6** Sejam $x_1(t)$ e $x_2(t)$ dois sinais de energia unitária e ortogonais no intervalo de $t = t_1$ a t_2 . Como os sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$ têm energia unitária e são ortogonais, podem ser representados como dois vetores ortogonais e de comprimentos unitários (\mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2). Considere um sinal $g(t)$, dado por

$$g(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

Este sinal pode ser representado como um vetor \mathbf{g} por meio de um ponto (c_1, c_2) no plano $x_1 - x_2$.

(a) Determine, neste espaço bidimensional, a representação vetorial dos seguintes seis sinais:

(i) $g_1(t) = 2x_1(t) - x_2(t)$ (ii) $g_2(t) = -x_1(t) + 2x_2(t)$ (iii) $g_3(t) = -x_2(t)$	(iv) $g_4(t) = x_1(t) + 2x_2(t)$ (v) $g_5(t) = 2x_1(t) + x_2(t)$ (vi) $g_6(t) = 3x_1(t)$
---	---

(b) Entre os seis vetores do item (a), identifique pares de vetores mutuamente ortogonais. Verifique que os pares de sinais correspondentes a estes vetores também são ortogonais.

- 2.5-1** Determine os coeficientes de correlação c_n do sinal $x(t)$ e de cada um dos quatro pulsos $g_1(t)$, $g_2(t)$, $g_3(t)$ e $g_4(t)$ mostrados na Fig. E.2.5-1. Para garantir máxima margem contra ruído ao longo da rota de transmissão, que par de pulsos você selecionaria para uma comunicação binária?

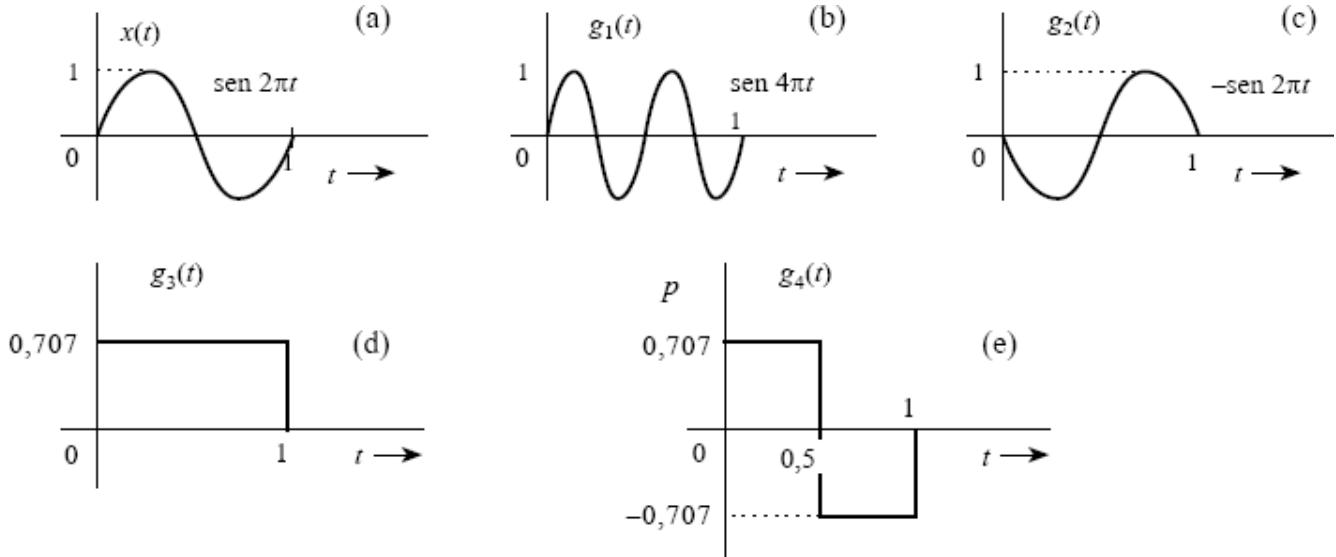


Figura E.2.5-1

- (a) Esboce o gráfico do sinal $g(t) = t^2$ e determine a série de Fourier exponencial para representar $g(t)$ no intervalo $(-1, 1)$. Esboce o gráfico da série de Fourier $\phi(t)$ para todos os valores de t .
(b) Comprove o teorema de Parseval [Eq. (2.68a)] para este caso, dado que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

- (a) Esboce o gráfico do sinal $g(t) = t$ e determine a série de Fourier exponencial para representar $g(t)$ no intervalo $(-\pi, \pi)$. Esboce o gráfico da série de Fourier $\phi(t)$ para todos os valores de t .

(b) Comprove o teorema de Parseval [Eq. (2.68a)] para este caso, dado que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

- 2.7-3** Se um sinal periódico satisfizer certas condições de simetria, a evolução dos coeficientes da série de Fourier pode ser um pouco simplificada.

- (a) Mostre que, se $g(t) = g(-t)$ (simetria par), os coeficientes da série de Fourier exponencial são reais.
- (b) Mostre que, se $g(t) = -g(-t)$ (simetria ímpar), os coeficientes da série de Fourier exponencial são imaginários.
- (c) Mostre que, em cada caso, os coeficientes de Fourier podem ser calculados por meio da integração de sinais periódicos ao longo de apenas meio período. Isso ocorre porque toda a informação de um período está implícita em um meio período, devido à simetria.

Sugestão: Se $g_e(t)$ e $g_o(t)$ forem funções par e ímpar, respectivamente, de t , então (assumindo que não há impulso ou suas derivadas na origem),

$$\int_{-a}^a g_e(t) dt = \int_0^{2a} g_e(t) dt \quad \text{e} \quad \int_{-a}^a g_o(t) dt = 0$$

Além disso, o produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar; o produto de duas funções pares é uma função par; o produto de duas funções ímpares é uma função ímpar.

- 2.7-4** Para cada sinal periódico mostrado na Fig. E.2.7-4, determine a série de Fourier exponencial e esboce os gráficos dos espectros de amplitude e de fase. Relate qualquer propriedade de simetria.

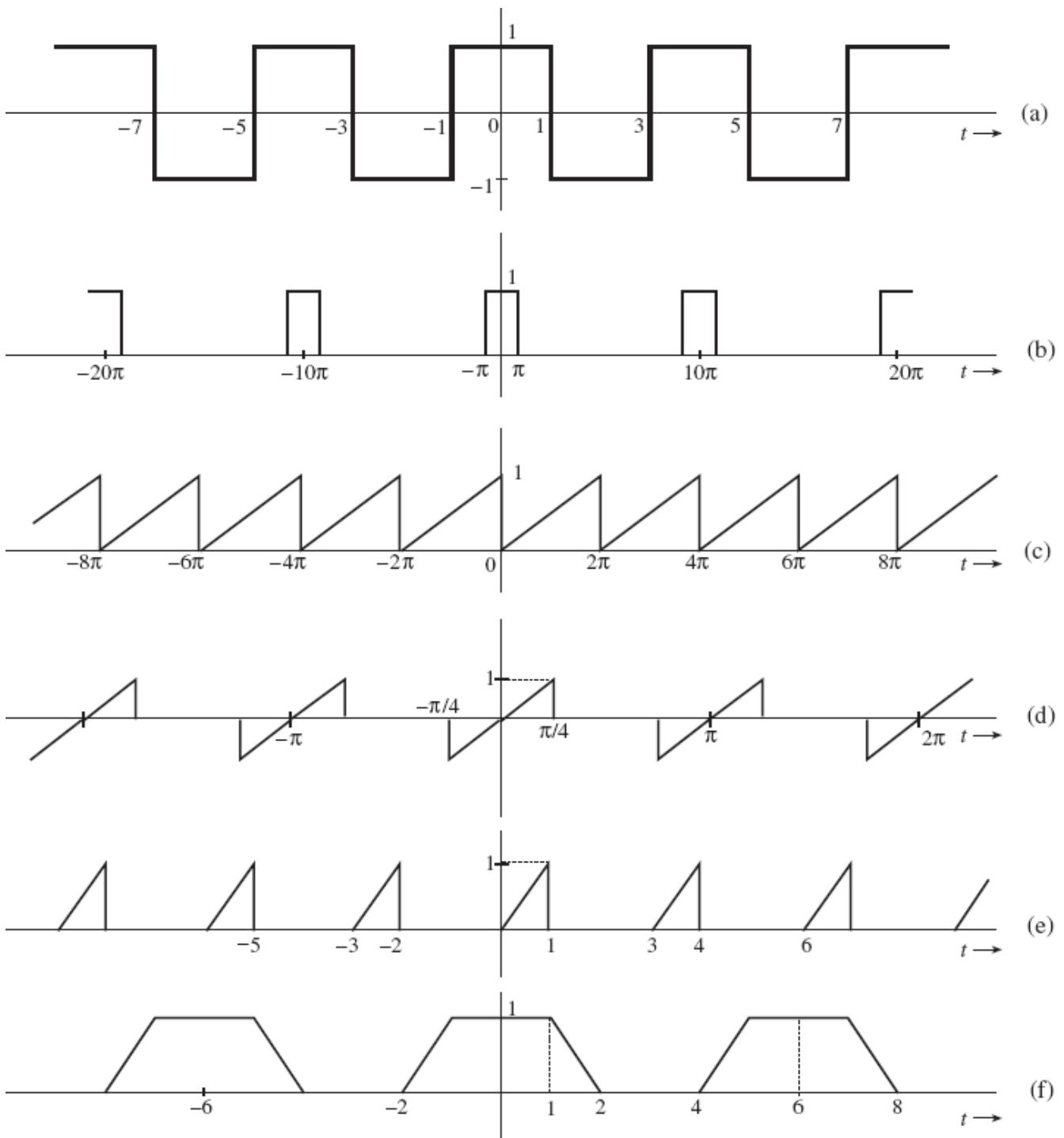


Figura E.2.7-4

- (a) Mostre que uma função arbitrária $g(t)$ pode ser expressa como uma soma de uma função par $g_e(t)$ e de uma função ímpar $g_o(t)$:

$$g(t) = g_e(t) + g_o(t)$$

Sugestão:
$$g(t) = \underbrace{\frac{1}{2}[g(t) + g(-t)]}_{g_e(t)} + \underbrace{\frac{1}{2}[g(t) - g(-t)]}_{g_o(t)}$$

- (b) Determine as componentes pares e ímpares das seguintes funções: (i) $u(t)$; (ii) $e^{-u(t)}u(t)$; (iii) e^{jt} .

- (a) Se, em um período, as duas metades de sinal periódico tiverem a mesma forma e fases opostas, o sinal periódico tem **simetria de meia onda**. Se um sinal periódico $g(t)$, de período T_0 , satisfizer a condição de simetria de meia

onda, então,

$$g\left(t - \frac{T_0}{2}\right) = -g(t)$$

Neste caso, mostre que todos os harmônicos (coeficientes) de ordem par são nulos.

- (b)** Use este resultado para determinar a série de Fourier para os sinais periódicos na Fig. E.2.7-6.

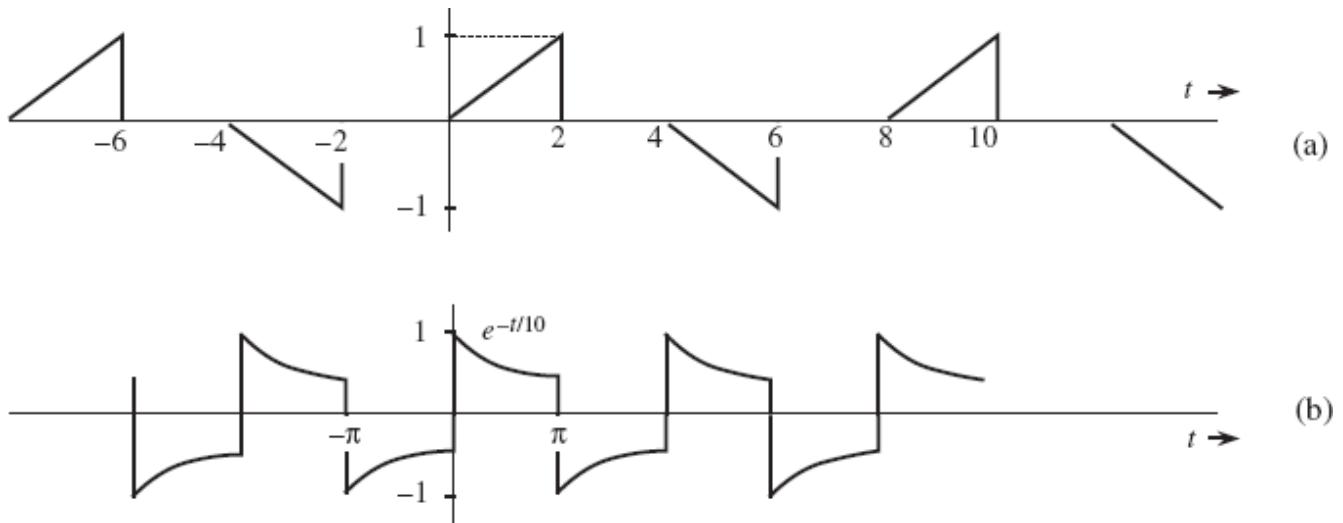


Figura E.2.7-6

- 2.8-1** Um sinal periódico $g(t)$ é expresso pela seguinte série de Fourier:

$$g(t) = 3\sin t + \cos\left(3t - \frac{2\pi}{3}\right) + 2\cos\left(8t + \frac{\pi}{3}\right)$$

- (a)** Aplique as identidades de Euler diretamente ao sinal $g(t)$ e escreva sua série de Fourier exponencial.
(b) Aplique as identidades de Euler diretamente ao sinal $g(t)$ e esboce gráficos dos espectros da correspondente série de Fourier exponencial.

* A função impulso também pode ser aproximada por outros pulsos, como um triângulo positivo, pulso exponencial ou pulso gaussiano.

* De fato, o espaço de sinais em consideração pode consistir em um conjunto de intervalos de tempo representado simplesmente por Θ . No caso desses espaços de sinais mais genéricos, o produto interno é definido como uma integral em todo o domínio temporal Θ . Para sinais de valores complexos, o produto interno é modificado para (2.28)

$$\langle g(t), x(t) \rangle = \int_{\Theta} g(t)x^*(t) dt \quad (2.28)$$

Dada a definição de produto interno, a norma do sinal $\|g(t)\| = \sqrt{\langle g(t), g(t) \rangle}$ e o espaço de sinais podem ser definidos para qualquer sinal no domínio do tempo.

* Segundo a desigualdade de Cauchy-Schwarz, para dois sinais de energias reais $g(t)$ e $x(t)$, $\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t)x(t) dt\right)^2 \leq E_g E_x$, sendo que a igualdade ocorre se e somente se $x(t) = K g(t)$, em que K é uma constante arbitrária. Existe uma desigualdade equivalente para sinais de valores complexos.

* Conhecidos como conjunto de medida zero.

* Na verdade, isso não é necessário. Em MATLAB, as letras i e j são definidas internamente como representações da unidade imaginária, embora possam também ser usadas para representar entidades genéricas. (N.T.)

3 ANÁLISE E TRANSMISSÃO DE SINAIS

Engeiros eletricistas, de modo intuitivo, quando pensam sobre sinais e sistemas o fazem em termos de espectros de frequência e de respostas em frequência, respectivamente. Até mesmo adolescentes sabem que sinais de áudio têm largura de banda de 20 kHz e que alto-falantes de boa qualidade devem responder até 20 kHz. Isso significa pensar no domínio da frequência. No capítulo anterior, discutimos representações espetrais de sinais periódicos (série de Fourier). No presente capítulo, estenderemos esta representação espectral a sinais aperiódicos.

3.1 REPRESENTAÇÃO DE SINAIS APERIÓDICOS ATRAVÉS DA INTEGRAL DE FOURIER

Aplicaremos um processo de limite para mostrar que um sinal aperiódico pode ser expresso como uma soma contínua (integral) de exponenciais eternas. Para representar um sinal aperiódico $g(t)$, como o mostrado na Fig. 3.1a, em termos de exponenciais infinitas no tempo, construiremos um sinal periódico $g_{T_0}(t)$ com a repetição do sinal $g(t)$ a cada T_0 segundos, como indicado na Fig. 3.1b. O período T_0 deve ser suficientemente longo para evitar sobreposição de pulsos repetidos. O sinal periódico $g_{T_0}(t)$ pode ser representado por uma série de Fourier exponencial. Se fizermos $T_0 \rightarrow \infty$, os pulsos no sinal periódico se repetirão após um intervalo infinito, de modo que

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} g_{T_0}(t) = g(t)$$

Portanto, no limite $T_0 \rightarrow \infty$, a série de Fourier que representa $g_{T_0}(t)$ também representa $g(t)$. A série de Fourier exponencial para $g_{T_0}(t)$ é dada por

$$g_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \quad (3.1)$$

com

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g_{T_0}(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3.2a)$$

e

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0 \quad (3.2b)$$



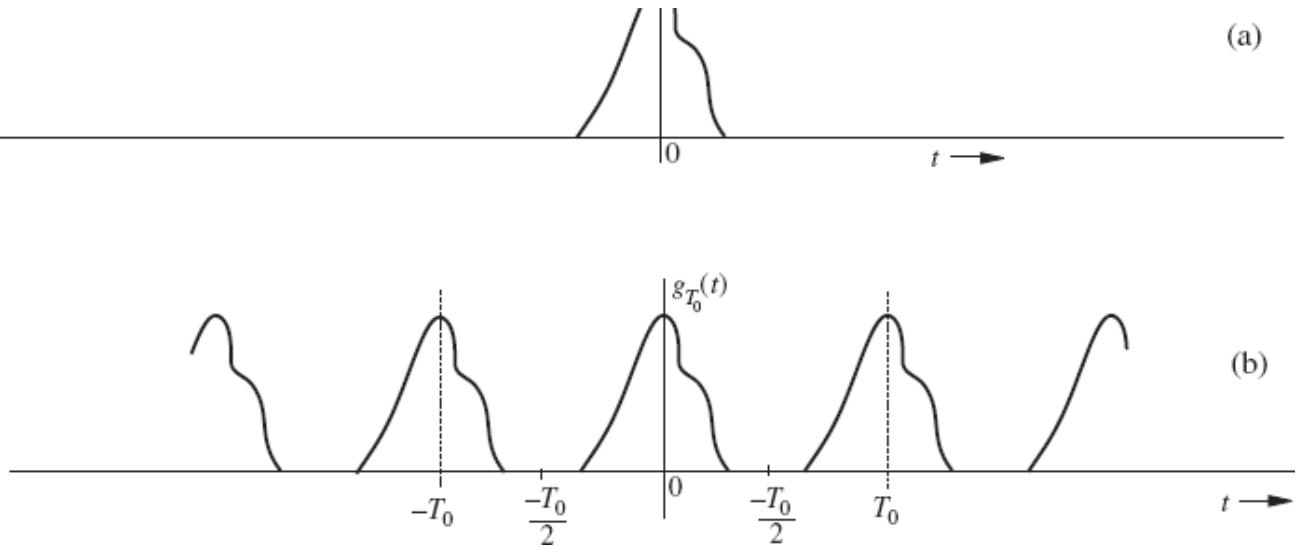


Figura 3.1 Construção de um sinal periódico através da repetição periódica de $g(t)$.

Vale observar que integrar $g_{T_0}(t)$ no intervalo $(-T_0/2, T_0/2)$ é o mesmo que integrar $g(t)$ em $(-\infty, \infty)$. Portanto, a Eq. (3.2a) pode ser expressa como

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \end{aligned} \quad (3.2c)$$

É interessante notar como a natureza do espectro é alterada à medida que T_0 aumenta. Para entender esse fascinante comportamento, definamos $G(f)$, uma função contínua de ω , como

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.3)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (3.4)$$

em que $\omega = 2\pi f$. Um exame das Eqs. (3.2c) e (3.3) revela que

$$D_n = \frac{1}{T_0} G(n f_0) \quad (3.5)$$

E também que os coeficientes de Fourier D_n são iguais a $(1/T_0)$ vezes as amostras de $G(f)$ uniformemente espaçadas a intervalos de f_0 Hertz, como mostrado na Fig. 3.2a.*

Portanto, $(1/T_0)G(f)$ é o envelope dos coeficientes D_n . Agora, para tomar o limite $T_0 \rightarrow \infty$, dobraremos o valor de T_0 sucessivamente. Dobrar T_0 significa dividir por dois o valor da frequência fundamental f_0 , ou seja, dobrar o número de componentes (amostras) no espectro. No entanto, dobrar o valor de T_0 implica dividir a amplitude do envelope $(1/T_0)G(f)$ por dois, como ilustrado na Fig. 3.2b. Se continuarmos com esse processo de dobrar o valor de T_0 sucessivamente, o espectro se torna cada vez mais denso e sua magnitude, menor. Vale observar que, no entanto, a forma do espectro permanece a mesma [proporcional a $G(f)$ da Eq. (3.3)]. No limite, à medida que $T_0 \rightarrow \infty$, $f_0 \rightarrow 0$ e $D_n \rightarrow 0$. Isso significa que o espectro se torna tão denso que as componentes espectrais são espaçadas por um intervalo nulo (infinitesimal). Ao mesmo tempo, a amplitude de cada componente é zero (infinitesimal). Temos *nada de tudo, embora tenhamos algo!* Isto soa como *Alice no País das Maravilhas* e, como veremos, é característico de um fenômeno muito familiar.**



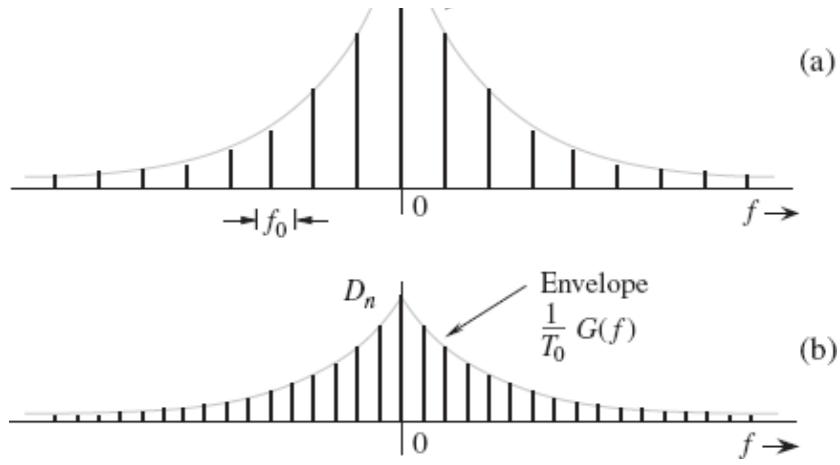


Figura 3.2 Mudança no espectro de Fourier à medida que o período T_0 na Fig. 3.1 é dobrado.

A substituição da Eq. (3.5) na Eq. (3.1) leva a

$$g_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{G(nf_0)}{T_0} e^{jn2\pi f_0 t} \quad (3.6)$$

À medida que $T_0 \rightarrow \infty$, $f_0 = 1/T_0$ se torna infinitesimal ($f_0 \rightarrow 0$). Em consequência, podemos substituir f_0 por uma notação mais apropriada, Δf . Em termos desta nova notação, a Eq. (3.2b) passa a

$$\Delta f = \frac{1}{T_0}$$

e a Eq. (3.6),

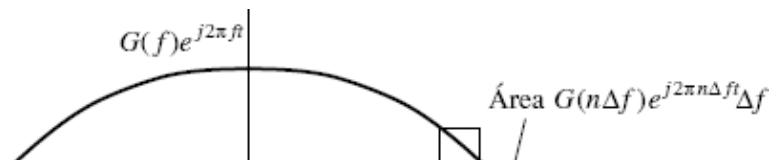
$$g_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [G(n\Delta f)\Delta f] e^{(j2\pi n\Delta f)t} \quad (3.7a)$$

A Eq. (3.7a) mostra que $g_{T_0}(t)$ pode ser expressa como uma soma de exponenciais infinitas no tempo de frequências $0, \pm \Delta f, \pm 2\Delta f, \pm 3\Delta f, \dots$ (a série de Fourier). A amplitude da componente de frequência $n\Delta f$ é $[G(n\Delta f)\Delta f]$. No limite, quando $T_0 \rightarrow \infty$, $\Delta f \rightarrow 0$ e $g_{T_0}(t) \rightarrow g(t)$. Portanto,

$$g(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} g_{T_0}(t) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(n\Delta f) e^{(j2\pi n\Delta f)t} \Delta f \quad (3.7b)$$

A soma no lado direito da Eq. (3.7b) pode ser vista como a área sob a curva da função $G(f)e^{j2\pi ft}$, como mostrado na Fig. 3.3. Logo,

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi ft} df \quad (3.8)$$



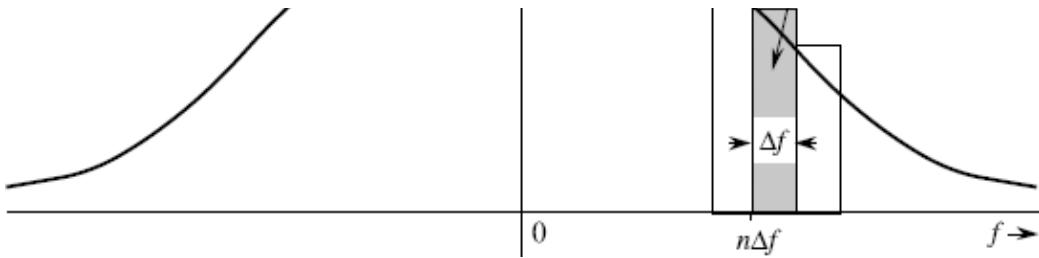


Figura 3.3 No limite $T_0 \rightarrow \infty$, a série de Fourier se torna a integral de Fourier.

A integral no lado direito da Eq. (3.8) é denominada **integral de Fourier**. Conseguimos, então, representar um sinal aperiódico $g(t)$ por uma integral de Fourier* (em vez de uma série de Fourier). Essa integral é basicamente (no limite) uma série de Fourier com frequência fundamental $\Delta f \rightarrow 0$, como visto na Eq. (3.7b). A amplitude da exponencial $e^{j 2\pi n \Delta f t}$ é $G(n\Delta f)\Delta f$. Assim, a função $G(f)$ dada pela Eq. (3.3) atua como uma função espectral.

Denominamos $G(f)$ a transformada de Fourier **direta** de $g(t)$, e $g(t)$ a transformada de Fourier **inversa** de $G(f)$. A mesma informação é transmitida quando dizemos que $g(t)$ e $G(f)$ formam um par de transformadas de Fourier. Simbolicamente, isso é representado como

$$G(f) = \mathcal{F}[g(t)] \quad \text{e} \quad g(t) = \mathcal{F}^{-1}[G(f)]$$

ou

$$g(t) \iff G(f)$$

Recapitulando,

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.9a)$$

e

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j\omega t} df \quad (3.9b)$$

em que $\omega = 2\pi f$.

É interessante termos em mente que a integral de Fourier na Eq. (3.9b) tem a natureza de uma série de Fourier com frequência fundamental Δf que tende a zero [Eq. (3.7b)]. Portanto, a maioria das considerações sobre a série de Fourier, assim como suas propriedades, se aplica também à transformada de Fourier. Podemos desenhar o gráfico do espectro $G(f)$ em função de f . Como $G(f)$ tem valores complexos, temos espectros de amplitude e de ângulo (fase):

$$G(f) = |G(f)| e^{j\theta_g(f)}$$

em que $|G(f)|$ é a amplitude e $\theta_g(f)$, o ângulo (ou fase) de $G(f)$. Da Eq. (3.9a),

$$G(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{j2\pi ft} dt$$

f versus ω

Na representação de sinais no domínio da frequência, usamos as notações equivalentes de frequência angular ω e frequência f indiscriminadamente. Não existe qualquer diferença conceitual entre o emprego de frequência angular ω (cuja unidade é radiano por

segundo) e frequência (cuja unidade é hertz, Hz). Dada a relação direta entre as duas frequências, podemos substituir $\omega = 2\pi f$ em $G(f)$ e obter a expressão da transformada de Fourier no domínio ω :

$$\mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.10)$$

Devido ao fator adicional 2π na variável ω usada na Eq. (3.10), a expressão da transformada inversa em função de ω requer uma divisão por 2π . Portanto, a notação em termos de f é, em geral, preferida na prática para a expressão de transformadas de Fourier. Por isto, neste livro, denotaremos, na maioria dos casos, a transformada de Fourier de sinais como funções $G(f)$. A notação de frequência angular ω , por sua vez, também pode oferecer alguma conveniência na representação de senoides. Assim, em capítulos posteriores, sempre que for *conveniente e não gerar confusão* usaremos as duas notações equivalentes de modo indiscriminado.

Propriedade de Simetria Conjugada

A partir da Eq. (3.9a), concluímos que, se $g(t)$ for uma função de t de valores reais, $G(f)$ e $G(-f)$ são complexos conjugados, ou seja,*

$$G(-f) = G^*(f) \quad (3.11)$$

Logo,

$$|G(-f)| = |G(f)| \quad (3.12a)$$

$$\theta_g(-f) = -\theta_g(f) \quad (3.12b)$$

Assim, para $g(t)$ de valores reais, o espectro de amplitude $|G(f)|$ é uma função par e o espectro de fase $\theta_g(f)$, uma função ímpar de f . Esta propriedade (**propriedade de simetria conjugada**) é válida apenas para funções $g(t)$ de valores reais. Esse resultado não deve causar surpresa, pois foi obtido no Capítulo 2 para o espectro de Fourier de um sinal periódico. *A transformada $G(f)$ é a especificação de $g(t)$ no domínio da frequência.*

Exemplo 3.1 Determinemos a transformada de Fourier de $e^{-at} u(t)$.

Por definição [Eq. (3.9a)],

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} u(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} dt = \frac{-1}{a+j2\pi f} e^{-(a+j2\pi f)t} \Big|_0^{\infty}$$

Mas $|e^{-j2\pi ft}| = 1$. Logo, quando $t \rightarrow \infty$, $e^{-(a+j2\pi f)t} = e^{-at} e^{-j2\pi ft} = 0$ se $a > 0$.

$$G(f) = \frac{1}{a+j\omega} \quad a > 0 \quad (3.13a)$$

em que $\omega = 2\pi f$. Expressando $a + j\omega$ na forma polar como $\sqrt{a^2 + \omega^2} e^{j \tan^{-1}(\frac{\omega}{a})}$, obtemos

$$G(f) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (2\pi f)^2}} e^{-j \tan^{-1}(\frac{2\pi f}{a})} \quad (3.13b)$$

Logo,

$$|G(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (2\pi f)^2}} \quad \text{e} \quad \theta_g(f) = -\tan^{-1}\left(\frac{2\pi f}{a}\right)$$

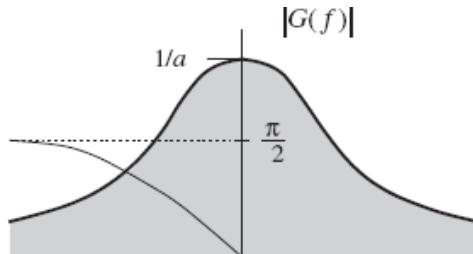
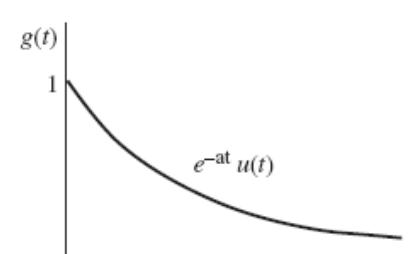




Figura 3.4 $e^{-at} u(t)$ e correspondente espectro de Fourier.

Os espectros de amplitude, $|G(f)|$, e de fase, $\theta_g(f)$, de $e^{-at} u(t)$ são mostrados na Fig. 3.4b. Observemos que $|G(f)|$ é uma função par de f e $\theta_g(f)$, uma função ímpar de f , como esperado.

Existência da Transformada de Fourier

No Exemplo 3.1, observamos que, quando $a < 0$, a integral de Fourier para $e^{-at} u(t)$ não converge. Em consequência, a transformada de Fourier de $e^{-at} u(t)$ não existe para $a < 0$ (exponencial crescente). Fica claro que nem todos os sinais podem ser transformados pela integral de Fourier. A existência da transformada de Fourier é assegurada para qualquer $g(t)$ que satisfaça as condições de Dirichlet, sendo a primeira delas*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty \quad (3.14)$$

Para mostrar isso, recordemos que $|e^{-j2\pi ft}| = 1$. Assim, a partir da Eq. (3.9a), obtemos

$$|G(f)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt$$

Isto mostra que a existência da transformada de Fourier fica assegurada se a condição (3.14) for satisfeita. Caso contrário, não há garantia. Vimos no Exemplo 3.1 que a transformada de Fourier de um sinal exponencial crescente (que viola essa condição) não existe. Embora tal condição seja suficiente, não é necessária para a existência da transformada de Fourier de um sinal. Por exemplo, o sinal $(\sin at)/t$ viola a condição (3.14), mas tem uma transformada de Fourier. Qualquer sinal que possa ser gerado na prática satisfaz as condições de Dirichlet e, portanto, tem uma transformada de Fourier. Dessa forma, a existência física de um sinal é uma condição suficiente para a existência de sua transformada de Fourier.

Linearidade da Transformada de Fourier (Teorema da Superposição)

A transformada de Fourier é linear, ou seja, se

$$g_1(t) \iff G_1(f) \quad \text{e} \quad g_2(t) \iff G_2(f)$$

então, para quaisquer constantes a_1 e a_2 , temos

$$a_1 g_1(t) + a_2 g_2(t) \iff a_1 G_1(f) + a_2 G_2(f) \quad (3.15)$$

A prova é simples e resulta diretamente da Eq. (3.9a). Esse teorema simplesmente afirma que combinações lineares de sinais no domínio do tempo correspondem, no domínio da frequência, a combinações lineares de suas transformadas de Fourier. Esse resultado pode ser estendido a um número finito arbitrário de termos:

$$\sum_k a_k g_k(t) \iff \sum_k a_k G_k(f)$$

para quaisquer constantes $\{a_k\}$ e sinais $\{g_k(t)\}$.

Interpretação Física da Transformada de Fourier

Para o entendimento de aspectos da transformada de Fourier, devemos lembrar que a representação de Fourier é uma forma de expressar um sinal em termos de senoides infinitas no tempo ou exponenciais. O espectro de Fourier de um sinal indica as amplitudes e fases relativas das senoides necessárias à síntese do sinal. O espectro de Fourier de um sinal periódico tem amplitudes finitas e existe em frequências discretas (f e seus múltiplos). É fácil visualizar um espectro desse tipo; mas, no caso de sinais aperiódicos, a visualização do espectro não é simples, pois o mesmo é contínuo e existe em todas as frequências. O conceito de espectro contínuo pode ser interpretado por meio da consideração de um fenômeno análogo e mais tangível. Um exemplo familiar de

uma distribuição contínua é o carregamento de uma viga. Consideremos uma viga submetida à carga de pesos $D_1, D_2, D_3, \dots, D_n$ localizados em pontos uniformemente espaçados x_1, x_2, \dots, x_n , como mostrado na Fig. 3.5a. A carga total W_T sobre a viga é dada pela soma das cargas localizadas nestes n pontos:

$$W_T = \sum_{i=1}^n D_i$$

Consideremos o caso de uma viga submetida a uma carga contínua, como ilustrado na Fig. 3.5b. Nesse caso, embora pareça existir uma carga em cada ponto, a carga em cada ponto é zero. Isso não significa que não exista carga sobre a viga. Nesse caso, uma medida adequada do carregamento não é a carga em cada ponto, mas a densidade de carga por unidade de comprimento no ponto. Seja $G(x)$ a densidade de carga por unidade de comprimento da viga. Isso significa que a carga sobre um comprimento de viga Δx ($\Delta x \rightarrow 0$), em algum ponto x , é $G(x)\Delta x$. Para determinar a carga total sobre a viga, dividimos a viga em segmentos de comprimento Δx ($\Delta x \rightarrow 0$). A carga sobre o n -ésimo segmento de comprimento Δx é $[G(n\Delta x)]\Delta x$. A carga total W_T é, então, dada por

$$\begin{aligned} W_T &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_1}^{x_n} G(n\Delta x) \Delta x \\ &= \int_{x_1}^{x_n} G(x) dx \end{aligned}$$

No caso de carregamento discreto (Fig. 3.5a), a carga total existe apenas nos n pontos discretos. Nos outros pontos, não há carga. No caso de carregamento contínuo, no entanto, a carga existe em cada ponto, mas, em qualquer ponto específico x , a carga é zero. Contudo, a carga em um pequeno comprimento de viga Δx é $[G(n\Delta x)]\Delta x$ (Fig. 3.5b). Dessa forma, embora a carga em um ponto x seja zero, a carga relativa neste ponto é $G(x)$.

O espectro de um sinal é completamente análogo ao carregamento de uma viga. Quando o sinal $g(t)$ é periódico, o espectro é discreto e $g(t)$ pode ser expresso como a soma de exponenciais discretas e de amplitudes finitas:

$$g(t) = \sum_n D_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

No caso de um sinal aperiódico, o espectro se torna contínuo; ou seja, o espectro existe para todos os valores de f , mas a amplitude de cada componente espectral é zero. Aqui, a medida adequada não é a amplitude de uma componente em uma dada frequência, mas a densidade espectral por unidade de largura de banda. Da Eq. (3.7b), fica claro que $g(t)$ é sintetizada por meio da soma de exponenciais da forma $e^{j2\pi n f_0 t}$, onde a contribuição de qualquer uma das componentes exponenciais é zero. Contudo, a contribuição de exponenciais em uma largura de banda infinitesimal Δf localizada em $f = n\Delta f$ é $G(n\Delta f)\Delta f$, e a adição de todas estas componentes produz a forma integral de $g(t)$:

$$g(t) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(n\Delta f) e^{(jn2\pi f)t} \Delta f = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi ft} df$$

A contribuição das componentes na largura de banda Δf é $G(f)\Delta f$, em que Δf é a largura de banda em hertz. Fica claro que $G(f)$ é a **densidade espectral** por unidade de largura de banda (em hertz).

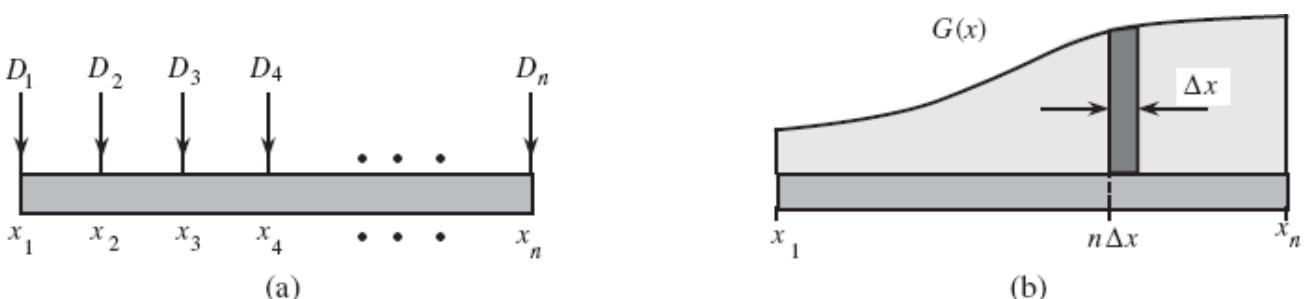


Figura 3.5 Analogia com a transformada de Fourier.

Isso também significa que, mesmo que a amplitude de uma componente qualquer seja zero, a amplitude relativa de uma componente de frequência f é $G(f)$. Embora $G(f)$ seja uma densidade espectral, na prática é costume denominá-la **espectro** de $g(t)$, em vez de densidade espectral de $g(t)$. Segundo essa convenção, chamaremos $G(f)$ de espectro de Fourier (ou transformada de Fourier) de $g(t)$.

3.2 TRANSFORMADAS DE ALGUMAS FUNÇÕES ÚTEIS

Por conveniência, a seguir, introduziremos uma notação compacta para algumas funções úteis, como as funções retangular, triangular e de interpolação.

Função Retangular Unitária

Usamos a notação $\Pi(x)$ para representar um pulso retangular de altura e largura unitárias, centrado na origem, como ilustrado na Fig. 3.6a:

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0,5 & |x| = \frac{1}{2} \\ 0 & |x| > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.16)$$

Vale notar que o pulso retangular na Fig. 3.6b é o pulso retangular unitário $\Pi(x)$ expandido por um fator τ e, portanto, pode ser expresso como $\Pi(x/\tau)$. Observemos, ainda, que o denominador τ em $\Pi(x/\tau)$ indica a largura do pulso.

Função Triangular Unitária

Usamos a notação $\Delta(x)$ para representar um pulso triangular de altura e largura unitárias, centrado na origem, como ilustrado na Fig. 3.7a:

$$\Delta(x) = \begin{cases} 1 - 2|x| & |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & |x| > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.17)$$

Vale notar que o pulso na Fig. 3.7b é o pulso $\Delta(x/\tau)$. Observemos que, como no caso do pulso retangular, o denominador τ em $\Delta(x/\tau)$ indica a largura do pulso.

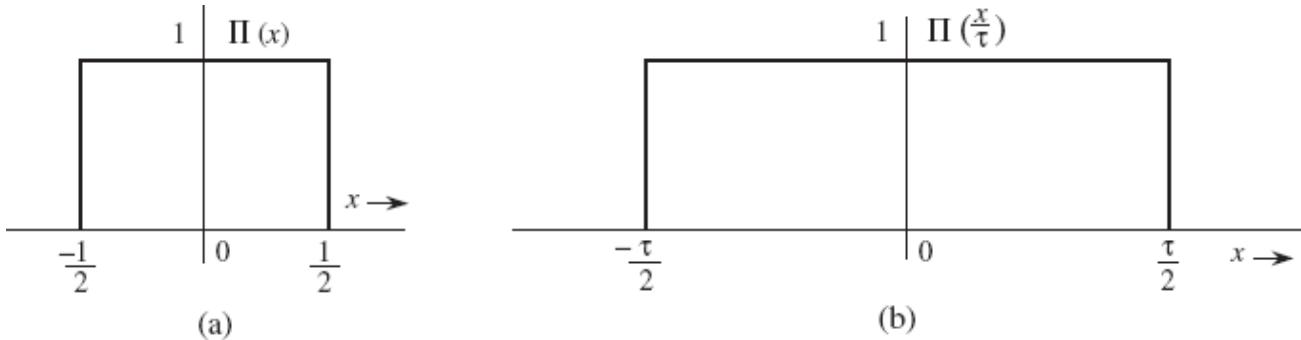


Figura 3.6 Pulso retangular.

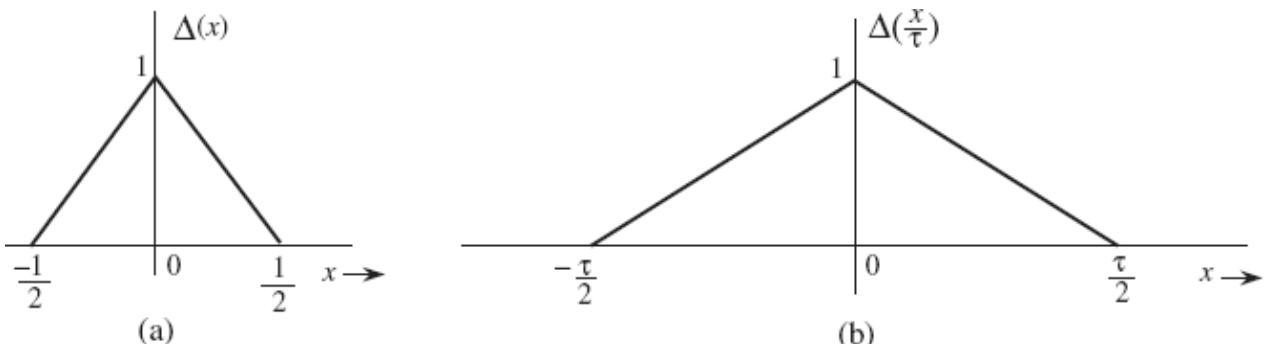


Figura 3.7 Pulso triangular.

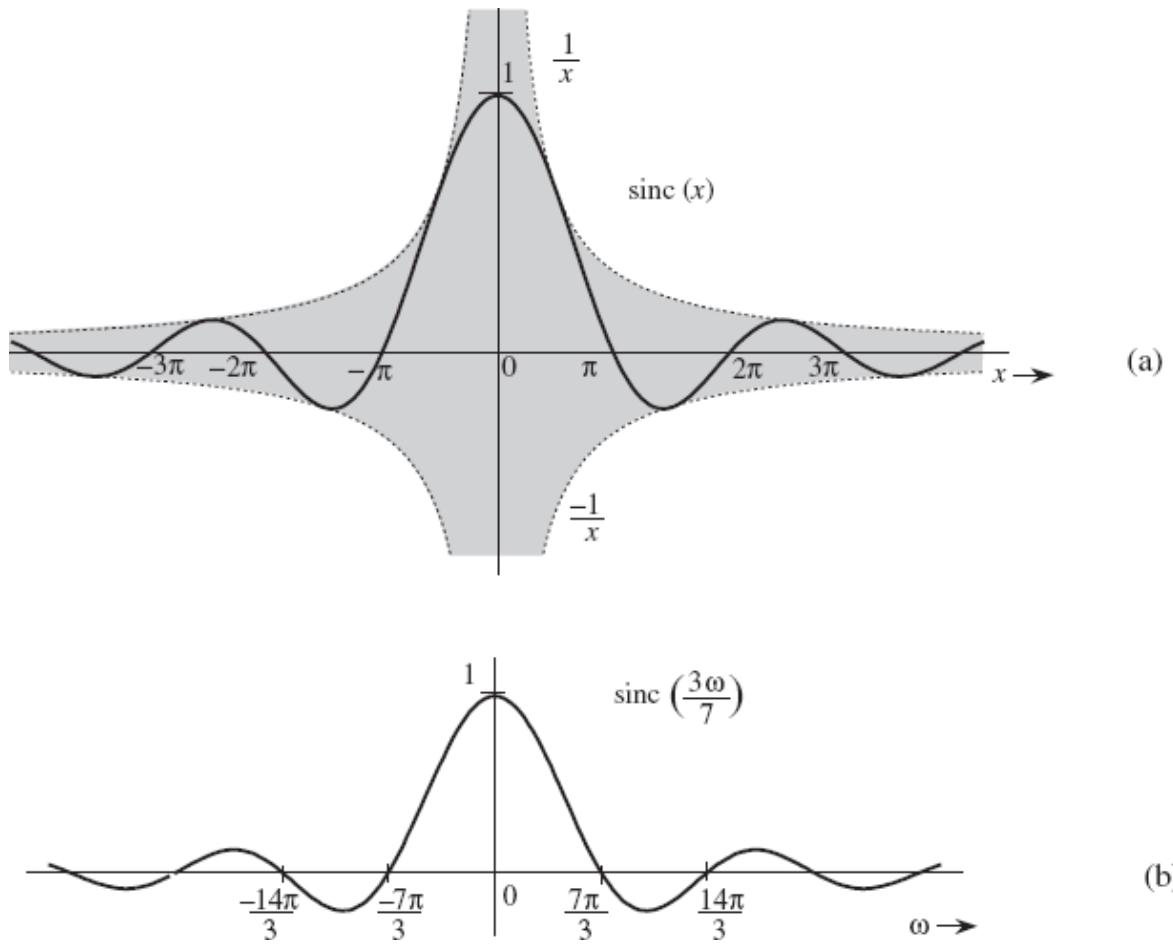


Figura 3.8 Pulso sinc.

Função Sinc $\text{sinc}(x)$

A função $\sin x/x$ é a função “seno dividido pelo argumento”, denotada por $\text{sinc}(x)$.*

Essa função tem um papel importante no processamento de sinais. Definimos

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (3.18)$$

Uma inspeção da Eq. (3.18) mostra que

1. $\text{sinc}(x)$ é uma função par de x .
2. $\text{sinc}(x) = 0$ quando $\sin x = 0$, exceto em $x = 0$, em que a função é indeterminada. Isso significa que $\text{sinc}(x) = 0$ para $t = \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$
3. Usando a regra de L'Hôpital, determinamos $\text{sinc}(0) = 1$.
4. $\text{sinc}(x)$ é o produto de um sinal oscilatório $\sin x$ (de período 2π) por uma função monótona decrescente $1/x$. Portanto, $\text{sinc}(x)$ exibe oscilações senoidais de período 2π , cuja amplitude decresce continuamente na forma $1/x$.
5. Resumindo, $\text{sinc}(x)$ é uma função oscilatória par, de amplitude decrescente. A função tem um pico unitário em $x = 0$ e cruza o eixo x em múltiplos inteiros de π .

A Fig. 3.8a mostra um gráfico de $\text{sinc}(x)$. Observemos que $\text{sinc}(x) = 0$ para valores de x múltiplos inteiros positivos e negativos de π . A Fig. 3.8b mostra o gráfico de $\text{sinc}(3\omega/7)$. O argumento $3\omega/7 = \pi$ quando $\omega = 7\pi/3$ ou $f = 7/6$. Portanto, o primeiro zero dessa função ocorre em $\omega = 7\pi/3$ ($f = 7/6$).

Exemplo 3.2 Determinemos a transformada de Fourier de $g(t) = \Pi(t/\tau)$ (Fig. 3.9a).

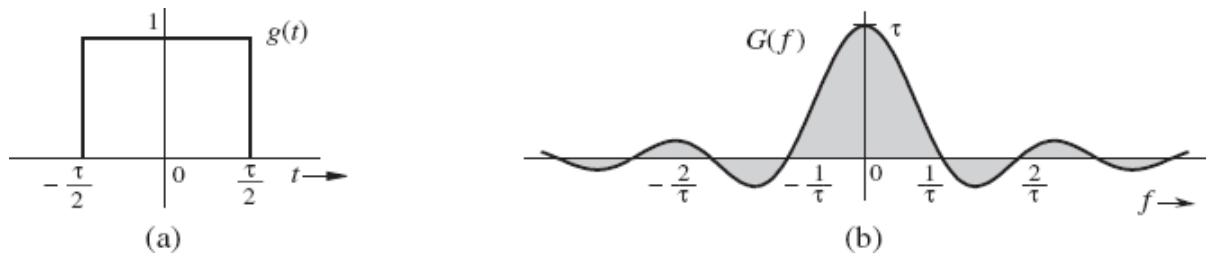


Figura 3.9 Pulso retangular e correspondente espectro de Fourier.

Temos

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) e^{-j2\pi ft} dt$$

Como $\Pi(t/\tau) = 1$ para $|t| < \tau/2$ e é zero para $|t| > \tau/2$,

$$\begin{aligned} G(f) &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= -\frac{1}{j2\pi f} (e^{-j\pi f\tau} - e^{j\pi f\tau}) = \frac{2\sin(\pi f\tau)}{2\pi f} \\ &= \tau \frac{\sin(\pi f\tau)}{(\pi f\tau)} = \tau \text{ sinc } (\pi f\tau) \end{aligned}$$

Logo,

$$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \iff \tau \text{ sinc } \left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = \tau \text{ sinc } (\pi f\tau) \quad (3.19)$$

Recordemos que $\text{sinc}(x) = 0$ quando $x = \pm n\pi$. Logo, $\text{sinc}(\omega\tau/2) = 0$ quando $\omega\tau/2 = \pm n\pi$; ou seja, quando $f = \pm n/\tau$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), como ilustrado na Fig. 3.9b. Observemos que, neste caso, $G(f)$ é real; portanto, a informação espectral está contida em apenas um gráfico de $G(f)$, mostrado na Fig. 3.9b.

Exemplo 3.3 Determinemos a transformada do sinal impulso unitário $\delta(t)$.

Usando a propriedade de amostragem da função impulso, obtemos

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi f \cdot 0} = 1 \quad (3.20a)$$

ou

$$\delta(t) \iff 1 \quad (3.20b)$$

A Fig. 3.10 mostra $\delta(t)$ e seu espectro.



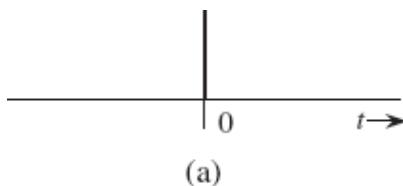
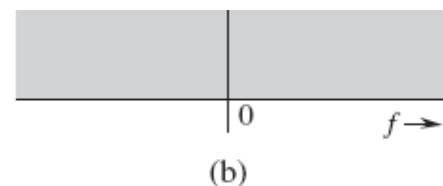


Figura 3.10 Impulso unitário e correspondente espectro de Fourier.



Exemplo 3.4 Determinemos a transformada de Fourier inversa de $\delta(2\pi f) = \frac{1}{2\pi} \cdot \delta(f)$.

A partir da Eq. (3.9b) e da propriedade de amostragem da função impulso,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[\delta(2\pi f)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(2\pi f) e^{j2\pi ft} df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(2\pi f) e^{j2\pi ft} d(2\pi f) \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-j2\pi f \cdot 0} = \frac{1}{2\pi}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{2\pi} \iff \delta(2\pi f) \quad (3.21a)$$

ou

$$1 \iff \delta(f) \quad (3.21b)$$

Isso mostra que o espectro de um sinal constante $g(t) = 1$ é um impulso $\delta(f) = 2\pi\delta(2\pi f)$, como ilustrado na Fig. 3.11.

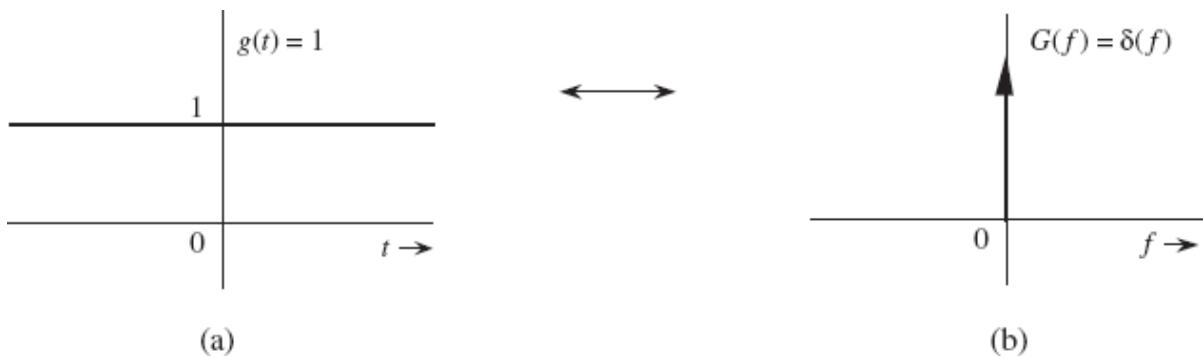


Figura 3.11 Sinal constante (dc) e correspondente espectro de Fourier.

Esse resultado [Eq. (3.21b)] também poderia ter sido obtido por uma análise qualitativa. Recordemos que a transformada de Fourier de $g(t)$ é uma representação espectral de $g(t)$ em termos de componentes exponenciais infinitas da forma $e^{j2\pi ft}$. Para representar um sinal constante $g(t) = 1$, precisamos apenas de uma exponencial infinita $e^{j2\pi f t}$ com $f = 0$. Isso resulta em um espectro em uma única frequência $f = 0$. Também poderíamos dizer que $g(t) = 1$ é um sinal dc que tem uma única

Em um espectro em uma única frequência $f = 0$, também poderíamos dizer que $g(t) = 1$ é um sinal de que tem uma única componente de frequência em $f = 0$ (dc).

Se um impulso em $f = 0$ é o espectro de um sinal dc, o que representará um impulso em $f = f_0$? Responderemos a esta pergunta no próximo exemplo.

Exemplo 3.5 Determinemos a transformada de Fourier inversa de $\delta(f - f_0)$.

Usando a propriedade de amostragem da função impulso, obtemos

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(f - f_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f_0) e^{j2\pi ft} df = e^{j2\pi f_0 t}$$

Portanto,

$$e^{j2\pi f_0 t} \iff \delta(f - f_0) \quad (3.22a)$$

Esse resultado mostra que o espectro de uma exponencial eterna $e^{j2\pi f_0 t}$ é um único impulso em $f = f_0$. Também chegariam a essa conclusão por uma análise qualitativa. Para representar a exponencial infinita $e^{j2\pi f_0 t}$, precisamos de uma única exponencial infinita $e^{j2\pi f t}$ com $\omega = 2\pi f_0$. Portanto, o espectro consiste em uma única componente na frequência $f = f_0$.

Da Eq. (3.22a), temos

$$e^{-j2\pi f_0 t} \iff \delta(f + f_0) \quad (3.22b)$$

Exemplo 3.6 Determinemos a transformada de Fourier da senoide eterna $\cos 2\pi f_0 t$.

Recordemos a fórmula de Euler

$$\cos 2\pi f_0 t = \frac{1}{2}(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t})$$

Somando as Eqs. (3.22a) e (3.22b) e usando a fórmula anterior, obtemos

$$\cos 2\pi f_0 t \iff \frac{1}{2}[\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)] \quad (3.23)$$

O espectro de $\cos 2\pi f_0 t$ consiste em dois impulsos, em f_0 e $-f_0$, no domínio da frequência, ou dois impulsos em $\pm \omega_0 = \pm 2\pi f_0$, no domínio ω , como ilustrado na Fig. 3.12. Esse resultado também poderia ter sido obtido por análise qualitativa. Uma senoide infinita $\cos \omega_0 t$ pode ser sintetizada por duas exponenciais infinitas, $e^{j\omega_0 t}$ e $e^{-j\omega_0 t}$. Portanto, o espectro consiste em apenas duas componentes de frequência, em ω_0 e $-\omega_0$.

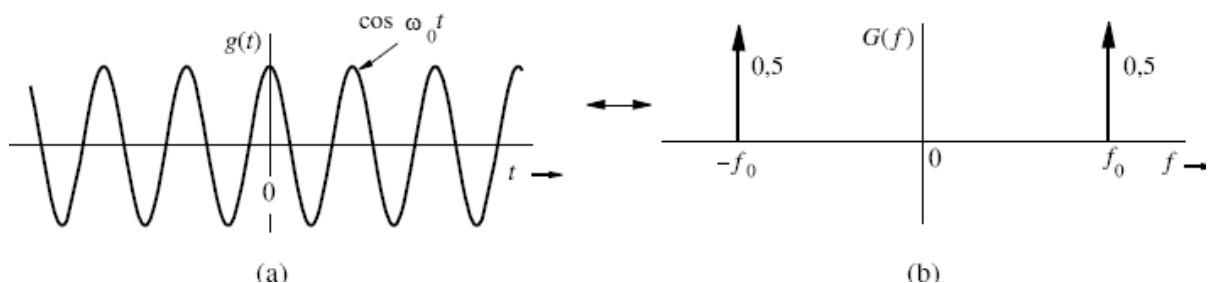


Figura 3.12 Sinal cosseno e correspondentes espectro de Fourier.

Exemplo 3.7 Determinemos a transformada de Fourier da função $\text{sgn}(t)$ (pronunciada signum de t), mostrada na Fig. 3.13. O valor da função é $+1$ ou -1 , dependendo se t é positivo ou negativo:

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

Não podemos usar integração para determinar a transformada de $\text{sgn}(t)$ diretamente, pois $\text{sgn}(t)$ viola a condição de Dirichlet [ver Eq. (3.14) e a nota de rodapé associada]. Para sermos específicos, $\text{sgn}(t)$ não é absolutamente integrável. Contudo, a transformada pode ser obtida considerando $\text{sgn}(t)$ como a soma de duas exponenciais, como mostrado na Fig. 3.13, no limite quando $a \rightarrow 0$:

$$\text{sgn } t = \lim_{a \rightarrow 0} [e^{-at} u(t) - e^{at} u(-t)]$$

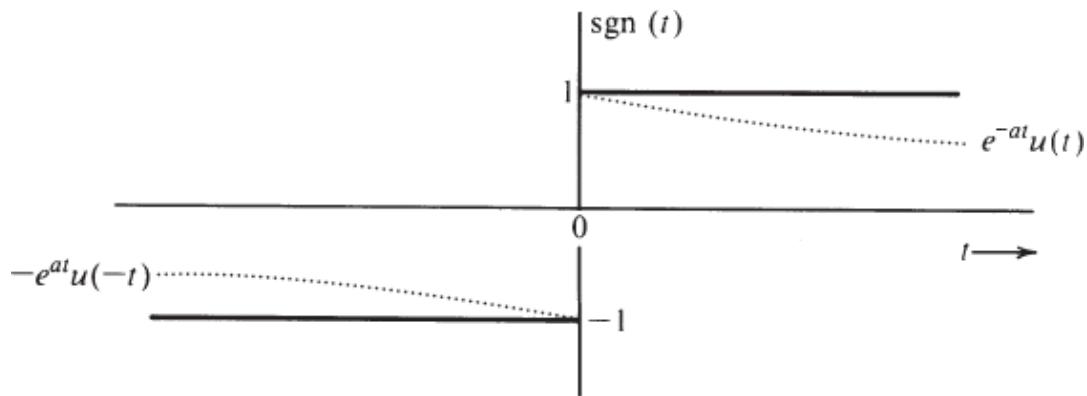


Figura 3.13 Função signum.

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\text{sgn}(t)] &= \lim_{a \rightarrow 0} \{\mathcal{F}[e^{-at}u(t)] - \mathcal{F}[e^{at}u(-t)]\} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{1}{a + j2\pi f} - \frac{1}{a - j2\pi f} \right) \quad (\text{ver pares 1 e 2 na Tabela 3.1}) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{-j4\pi f}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \right) = \frac{1}{j\pi f} \end{aligned} \quad (3.25)$$

3.3 ALGUMAS PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE FOURIER

Agora, estudaremos algumas propriedades importantes da transformada de Fourier, suas implicações e aplicações. Antes de embarcarmos neste estudo, devemos ressaltar um aspecto essencial da transformada de Fourier: a **dualidade tempo-frequência**.

3.3.1 Dualidade Tempo-Frequência

As Eqs. (3.9) mostram um fato interessante: a notável similaridade entre as operações de transformação direta e inversa. Essas operações, necessárias para passar de $g(t)$ a $G(f)$ e de $G(f)$ a $g(t)$, são ilustradas graficamente na Fig. 3.14. A única pequena diferença

entre essas duas operações reside nos sinais opostos usados nos argumentos das exponenciais.

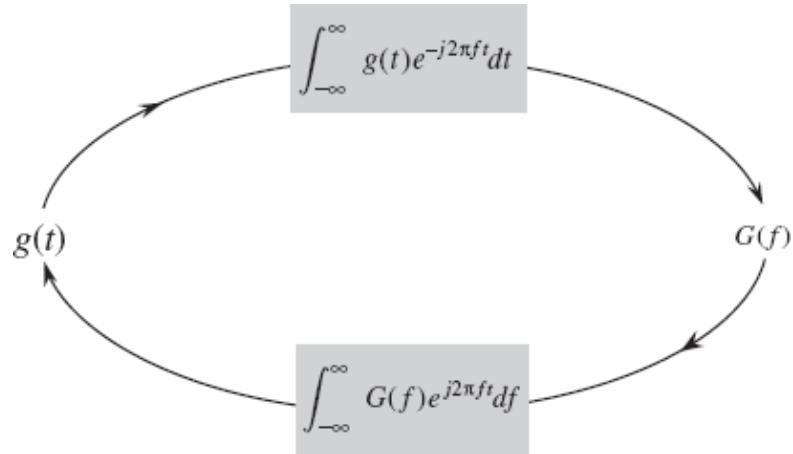


Figura 3.14 Quase simetria entre transformadas de Fourier direta e inversa.

Tabela 3.1
Pequena Tabela de Transformadas de Fourier

	$g(t)$	$G(f)$	
1	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$	$a > 0$
2	$e^{at}u(-t)$	$\frac{1}{a - j2\pi f}$	$a > 0$
3	$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$	$a > 0$
4	$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)^2}$	$a > 0$
5	$t^n e^{-at}u(t)$	$\frac{n!}{(a + j2\pi f)^{n+1}}$	$a > 0$
6	$\delta(t)$	1	
7	1	$\delta(f)$	
8	$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f - f_0)$	
9	$\cos 2\pi f_0 t$	$0,5 [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]$	

10	$\sin 2\pi f_0 t$	$j0,5 [\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)]$
11	$u(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$
12	$\operatorname{sgn} t$	$\frac{2}{j2\pi f}$
13	$\cos 2\pi f_0 t u(t)$	$\frac{1}{4}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] + \frac{j2\pi f}{(2\pi f_0)^2 - (2\pi f)^2}$
14	$\sin 2\pi f_0 t u(t)$	$\frac{1}{4j}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)] + \frac{2\pi f_0}{(2\pi f_0)^2 - (2\pi f)^2}$
15	$e^{-at} \sin 2\pi f_0 t u(t)$	$\frac{2\pi f_0}{(a + j2\pi f)^2 + 4\pi^2 f_0^2} \quad a > 0$
16	$e^{-at} \cos 2\pi f_0 t u(t)$	$\frac{a + j2\pi f}{(a + j2\pi f)^2 + 4\pi^2 f_0^2} \quad a > 0$
17	$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\tau \operatorname{sinc}(\pi f \tau)$
18	$2B \operatorname{sinc}(2\pi Bt)$	$\Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$
19	$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\frac{\tau}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi f \tau}{2}\right)$
20	$B \operatorname{sinc}^2(\pi Bt)$	$\Delta\left(\frac{f}{2B}\right)$
21	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_0) \quad f_0 = \frac{1}{T}$
22	$e^{-t^2/2\sigma^2}$	$\sigma \sqrt{2\pi} e^{-2(\sigma \pi f)^2}$

Essa similaridade tem amplas consequências no estudo de transformadas de Fourier e é a base da chamada dualidade entre tempo e frequência. O princípio da dualidade pode ser comparado a uma fotografia e seu negativo. Uma fotografia pode ser obtida de seu negativo e, por meio de procedimento semelhante, o negativo pode ser obtido da fotografia. Para qualquer resultado ou relação envolvendo $g(t)$ e $G(f)$, existe um resultado ou relação dual, obtido(a) por meio de troca dos papéis de $g(t)$ e $G(f)$ no resultado/relação original (juntamente com algumas pequenas modificações, devido ao fator 2π e a uma mudança de sinal). Por exemplo, a propriedade de translação temporal, que será provada posteriormente, afirma que, se $g(t) \Leftrightarrow G(f)$, então

$$g(t - t_0) \Leftrightarrow G(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

O dual dessa propriedade (propriedade de translação em frequência) afirma que

$$g(t)e^{j2\pi f_0 t} \Leftrightarrow G(f - f_0)$$

Observemos a troca de papéis entre tempo e frequência nestas duas equações (com a pequena diferença devido à mudança de sinal no argumento da exponencial). A utilidade desse princípio reside no fato de que, *sempre que deduzimos algum resultado, podemos ter certeza de que existe um dual do mesmo*. Essa informação propicia um maior entendimento de muitas propriedades ou resultados inesperados em processamento de sinais.

As propriedades da transformada de Fourier são úteis não apenas no cálculo de transformadas direta e inversa de diversas funções, mas também na obtenção de resultados valiosos em processamento de sinais. Nesta discussão, o leitor não deve deixar de observar a sempre presente dualidade entre tempo e frequência. Iniciamos com a propriedade de dualidade, que é uma das consequências do princípio de dualidade.

3.3.2 Propriedade de Dualidade

A propriedade de dualidade afirma que

$$g(t) \Leftrightarrow G(f)$$

$$G(t) \Leftrightarrow g(-f) \tag{3.26}$$

Pela propriedade de dualidade, se a transformada de Fourier de $g(t)$ for $G(f)$, a transformada de Fourier de $G(t)$, com f substituído por t , é $g(-f)$, que é o sinal original no domínio do tempo, com t substituído por $-f$.

Prova: A partir da Eq. (3.9b),

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x) e^{j2\pi xt} dx$$

Logo,

$$g(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x) e^{-j2\pi xt} dx$$

A substituição de t por f resulta na Eq. (3.26). ■

Exemplo 3.8 Neste exemplo, aplicaremos a propriedade de dualidade [Eq. (3.26)] ao par de funções na Fig. 3.15a.

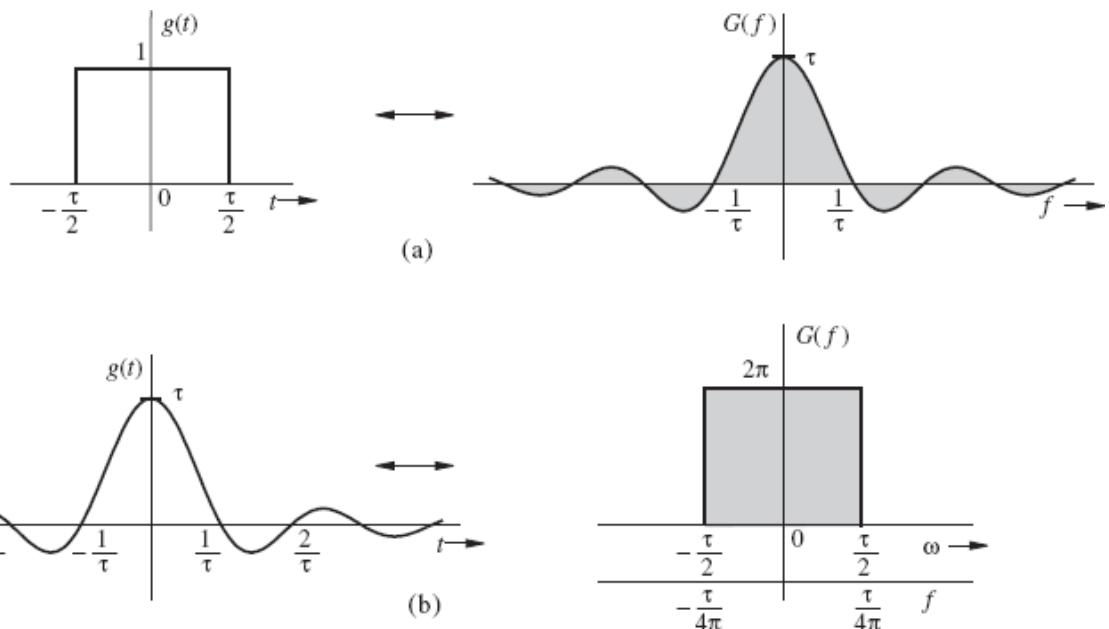


Figura 3.15 Propriedade de dualidade da transformada de Fourier.

Da Eq. (3.19), temos

$$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \iff \tau \operatorname{sinc}(\pi f \tau) \quad (3.27a)$$

$$\underbrace{\Pi\left(\frac{t}{\alpha}\right)}_{g(t)} \iff \underbrace{\alpha \operatorname{sinc}(\pi f \alpha)}_{G(f)} \quad (3.27b)$$

$G(t)$ tem a mesma forma de $G(f)$, apenas com f substituído por t ; $g(-f)$ é $g(t)$ com t substituído por $-f$. Portanto, a propriedade de dualidade (3.26) fornece

$$\underbrace{\alpha \operatorname{sinc}(\pi \alpha t)}_{G(t)} \iff \underbrace{\Pi\left(-\frac{f}{\alpha}\right)}_{g(-f)} = \Pi\left(\frac{f}{\alpha}\right) \quad (3.28a)$$

Substituindo $\tau = 2\pi\alpha$, obtemos

$$\tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\alpha t}{2}\right) \iff 2\pi \Pi\left(\frac{2\pi f}{\tau}\right) \quad (3.28b)$$

Na Eq. (3.8), usamos o fato de que $\Pi(-t) = \Pi(t)$, pois $\Pi(t)$ é uma função par de t . A Fig. 3.15b mostra gráficos deste par de funções. Observemos a troca de papéis entre t e $2\pi f$ (com o pequeno ajuste do fator 2π). Esse resultado aparece como o par 18 na Tabela 3.1 (com $\tau/2 = W$).

Como um exercício interessante, propomos a aplicação da propriedade de dualidade para gerar o dual de cada par na Tabela 3.1.

3.3.3 Propriedade de Dilatação no Tempo

Se

$$g(t) \iff G(f)$$

então, para uma constante real positiva a ,

$$g(at) \iff \frac{1}{|a|} G\left(\frac{f}{a}\right) \quad (3.29)$$

Prova: Para uma constante real positiva a ,

$$\mathcal{F}[g(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(at)e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{(-j2\pi f/a)x} dx = \frac{1}{a} G\left(\frac{f}{a}\right)$$

Do mesmo modo, pode ser mostrado que, se $a < 0$,

$$g(at) \iff \frac{-1}{a} G\left(\frac{f}{a}\right)$$

Disto resulta a Eq. (3.29). ■

Importância da Propriedade de Dilatação no Tempo

A função $g(at)$ representa a função $g(t)$ comprimida no tempo por um fator a ($|a| > 1$). Da mesma forma, uma função $G(f/a)$ representa a função $G(f)$ expandida em frequência pelo mesmo fator a . A propriedade de dilatação temporal afirma que a compressão temporal de um sinal resulta em sua expansão espectral, e que a expansão temporal de um sinal resulta em sua compressão espectral. De modo intuitivo, podemos perceber que a compressão temporal de um sinal por um fator a significa que o sinal varia **mais**

rapidamente, sendo a taxa de variação aumentada pelo mesmo fator. Para sintetizar esse sinal, as frequências de suas componentes senoidais devem ser aumentadas pelo fator a , implicando que o espectro de frequências do sinal é expandido pelo fator a . Outrossim, a expansão temporal de um sinal o faz variar mais lentamente; ou seja, as frequências de suas componentes são reduzidas, implicando a compressão do espectro de frequências. Por exemplo, o sinal $\cos 4\pi f_0 t$ é o sinal $\cos 2\pi f_0 t$ comprimido no tempo por um fator 2. Fica claro que o espectro do primeiro (impulsos em $\pm 2f_0$) é uma versão expandida do espectro do último (impulsos em $\pm f_0$). O efeito da dilatação temporal é ilustrado na Fig. 3.16.

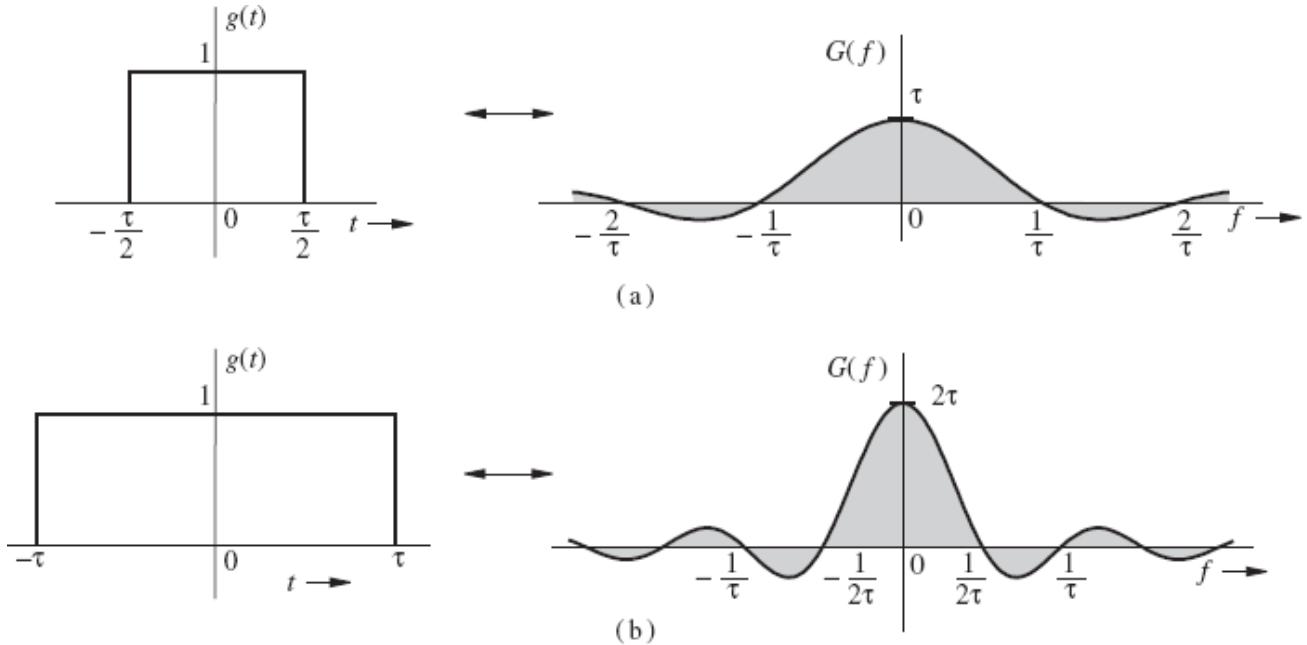


Figura 3.16 Propriedade de dilatação da transformada de Fourier.

Reciprocidade entre Duração de um Sinal e Sua Largura de Banda

A propriedade de dilatação temporal implica que, se a largura de $g(t)$ aumentar, seu espectro se torna mais estreito, e vice-versa. Dobrar a duração de um sinal significa dividir sua largura espectral por dois, e vice-versa. Isso sugere que a largura de banda de um sinal é inversamente proporcional à duração ou largura temporal (em segundos). Já comprovamos tal fato para o pulso retangular,

quando determinamos que a largura de banda de um pulso de duração τ segundos era $1/\tau$ Hz. Uma discussão mais aprofundada sobre este interessante tema pode ser encontrada na literatura.²

Exemplo 3.9 Mostremos que

$$g(-t) \iff G(-f) \quad (3.30)$$

A seguir, usemos esse resultado e o fato de que $e^{-at} u(t) \iff 1/(a + j2\pi f)$ para calcular as transformadas de Fourier de $e^{-at} u(-t)$ e $e^{-a|t|}$.

A Eq. (3.30) resulta da Eq. (3.29) com $a = -1$. Aplicação da Eq. (3.30) ao par 1 da Tabela 3.1 fornece

$$e^{at} u(-t) \iff \frac{1}{a - j2\pi f}$$

e

$$e^{-a|t|} = e^{-at} u(t) + e^{at} u(-t)$$

Logo,

$$e^{-a|t|} \iff \frac{1}{a + j2\pi f} + \frac{1}{a - j2\pi f} = \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2} \quad (3.31)$$

Gráficos do sinal $e^{-a|t|}$ e de seu espectro são mostrados na Fig. 3.17.

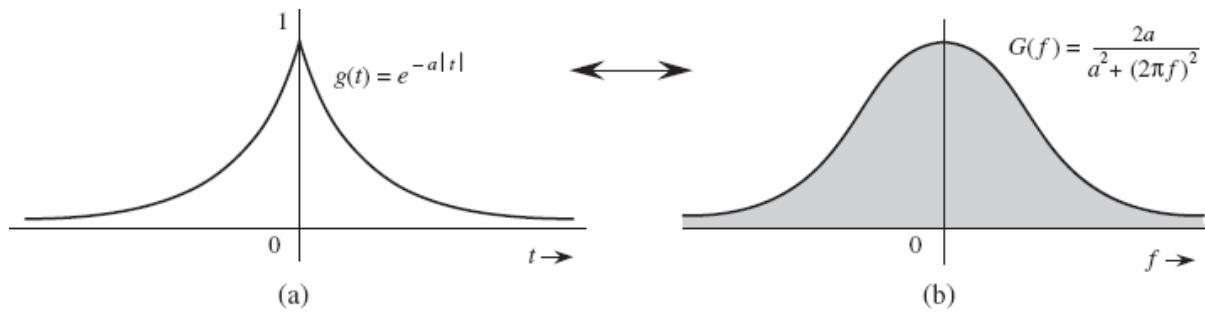


Figura 3.17 $e^{-a|t|}$ e correspondente espectro de Fourier.

3.3.4 Propriedade de Translação no Tempo

Se

$$g(t) \iff G(f)$$

então

$$g(t - t_0) \iff G(f)e^{-j2\pi ft_0} \quad (3.32a)$$

Prova: Por definição,

$$\mathcal{F}[g(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - t_0) e^{-j2\pi ft} dt$$

Fazendo $t - t_0 = x$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[g(t - t_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-j2\pi f(x+t_0)} dx \\ &= e^{-j2\pi ft_0} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-j2\pi fx} dx = G(f)e^{-j2\pi ft_0} \end{aligned} \quad (3.32b)$$

Esse resultado mostra que *atrasar um sinal em t_0 segundos não altera seu espectro de amplitude. O espectro de fase, contudo, sofre uma alteração de $-2\pi ft_0$.*

Interpretação Física da Fase Linear

O atraso temporal de um sinal provoca um deslocamento de fase linear no espectro do mesmo. Esse resultado também pode ser obtido por meio de uma análise heurística. Imaginemos que $g(t)$ seja sintetizada por suas componentes de Fourier, que são senoides de certas amplitudes e fases. O sinal atrasado $g(t - t_0)$ pode ser sintetizado pelas mesmas componentes senoidais, cada uma atrasada em t_0 segundos. As amplitudes das componentes não são alteradas; portanto, o espectro de amplitude de $g(t - t_0)$ é idêntico ao de $g(t)$. Contudo, o atraso temporal t_0 aplicado a cada senoide altera a fase de cada componente. Uma senoide $\cos 2\pi ft$ atrasada de t_0 é dada por

$$\cos 2\pi f(t - t_0) = \cos(2\pi ft - 2\pi ft_0)$$



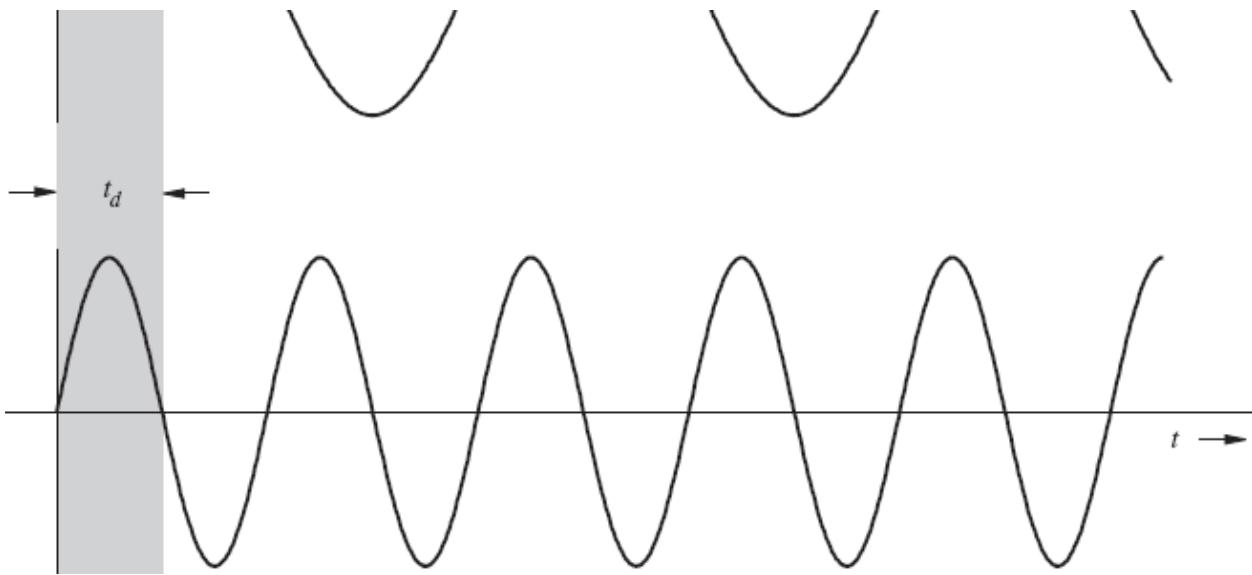


Figura 3.18 Interpretação física da propriedade de translação no tempo.

Isso significa que um atraso temporal t_0 em uma senoide de frequência f se manifesta como um atraso de fase $2\pi f t_0$, que é uma função linear de f . Isso implica que, para um dado atraso temporal, as componentes de frequências mais elevadas sofrerão deslocamentos de fase proporcionalmente mais altos. Esse efeito é ilustrado na Fig. 3.18 com duas senoides, sendo a frequência da senoide na parte inferior da figura o dobro da frequência da senoide na parte superior. O mesmo atraso temporal t_0 resulta em um deslocamento de fase de $\pi/2$ na senoide de cima e um deslocamento de fase de π na outra senoide. Isso comprova que, *para obter o mesmo atraso temporal, senoides de frequências mais elevadas devem sofrer deslocamentos de fase proporcionalmente mais altos*.

Exemplo 3.10 Determinemos a transformada de Fourier de $e^{-a|t-t_0|}$.

Essa função, cujo gráfico é mostrado na Fig. 3.19a, é uma versão de $e^{-a|t|}$ (cujo gráfico é mostrado na Fig. 3.17a) deslocada no tempo. Das Eqs. (3.31) e (3.32), temos

$$e^{-a|t-t_0|} \iff \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2} e^{-j2\pi f t_0} \quad (3.33)$$

O espectro de $e^{-a|t-t_0|}$ (Fig. 3.19b) é igual ao de $e^{-a|t|}$ (Fig. 3.17b), a menos do deslocamento de fase de $-2\pi f t_0$.

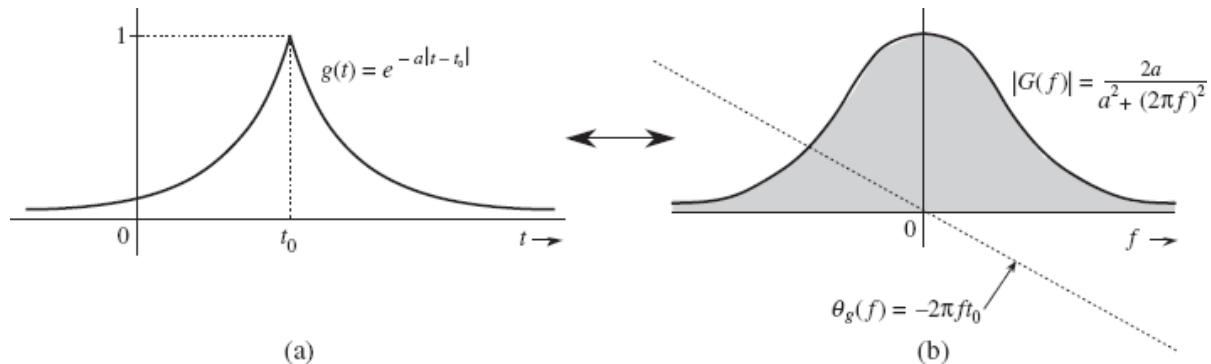


Figura 3.19 Efeito do deslocamento temporal no espectro de Fourier de um sinal.

Vale observar que o atraso temporal t_0 provoca um deslocamento de fase **linear** $-2\pi f t_0$ no espectro. Esse exemplo demonstra, de maneira clara, o efeito de um deslocamento temporal.

3.3.5 Propriedade de Translação na Frequência

Se

$$g(t) \iff G(f)$$

então,

$$g(t)e^{j2\pi f_0 t} \iff G(f - f_0) \quad (3.34)$$

Essa propriedade também é conhecida como propriedade de modulação.

Prova: Por definição,

$$\mathcal{F}[g(t)e^{j2\pi f_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j(2\pi f - 2\pi f_0)t} dt = G(f - f_0)$$

■

Essa propriedade afirma que a multiplicação de um sinal por um fator $e^{j2\pi f_0 t}$ desloca o espectro do sinal por $f = f_0$. Vale notar a dualidade entre as propriedades de translação no tempo e na frequência.

Substituindo f_0 por $-f_0$ na Eq. (3.34), obtemos

$$g(t)e^{-j2\pi f_0 t} \iff G(f + f_0) \quad (3.35)$$

Como $e^{j2\pi f_0 t}$ não é uma função real que possa ser gerada, o deslocamento em frequência é obtido, na prática, pela multiplicação de $g(t)$ por uma senoide. Isso pode ser visto de

$$g(t) \cos 2\pi f_0 t = \frac{1}{2} [g(t)e^{j2\pi f_0 t} + g(t)e^{-j2\pi f_0 t}]$$

Das Eqs. (3.34) e (3.35), temos

$$g(t) \cos 2\pi f_0 t \iff \frac{1}{2} [G(f - f_0) + G(f + f_0)] \quad (3.36)$$

Esse resultado mostra que a multiplicação de um sinal $g(t)$ por uma senoide de frequência f_0 desloca o espectro $G(f)$ por $\pm f_0$. Multiplicar $g(t)$ por uma senoide $\cos 2\pi f_0 t$ corresponde a modular a amplitude da senoide. Esse tipo de modulação é conhecido como **modulação em amplitude**. A senoide $\cos 2\pi f_0 t$ é denominada **portadora**; o sinal $g(t)$ é o **sinal modulante** e o sinal $g(t) \cos 2\pi f_0 t$, o **sinal modulado**. Modulação e demodulação serão discutidas nos Capítulos 4 e 5.

Para esboçar o gráfico do sinal $g(t) \cos 2\pi f_0 t$, observemos que

$$g(t) \cos 2\pi f_0 t = \begin{cases} g(t) & \text{quando } \cos 2\pi f_0 t = 1 \\ -g(t) & \text{quando } \cos 2\pi f_0 t = -1 \end{cases}$$

Portanto, $g(t) \cos 2\pi f_0 t$ toca $g(t)$ quando a senoide $\cos 2\pi f_0 t$ passa por seus picos positivos, e toca $-g(t)$ quando $\cos 2\pi f_0 t$ passa por seus picos negativos. Isso significa que $g(t)$ e $-g(t)$ atuam como envelopes para o sinal $g(t) \cos 2\pi f_0 t$ (ver Fig. 3.20c). O sinal $-g(t)$ é o reflexo de $g(t)$ em relação ao eixo horizontal. A Fig. 3.20 mostra gráficos dos sinais $g(t)$, $g(t)\cos 2\pi f_0 t$ e dos respectivos espectros.

Translação do Espectro de Fase de um Sinal Modulado

Podemos transladar a fase de cada componente espectral de um sinal modulado por um valor constante θ_0 simplesmente usando uma portadora $\cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$ no lugar de $\cos(2\pi f_0 t)$. Se um sinal $g(t)$ for multiplicado por $\cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$, podemos fazer uso de um argumento similar ao empregado na dedução da Eq. (3.36) e mostrar que

$$g(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) \iff \frac{1}{2} [G(f - f_0) e^{j\theta_0} + G(f + f_0) e^{-j\theta_0}] \quad (3.37)$$



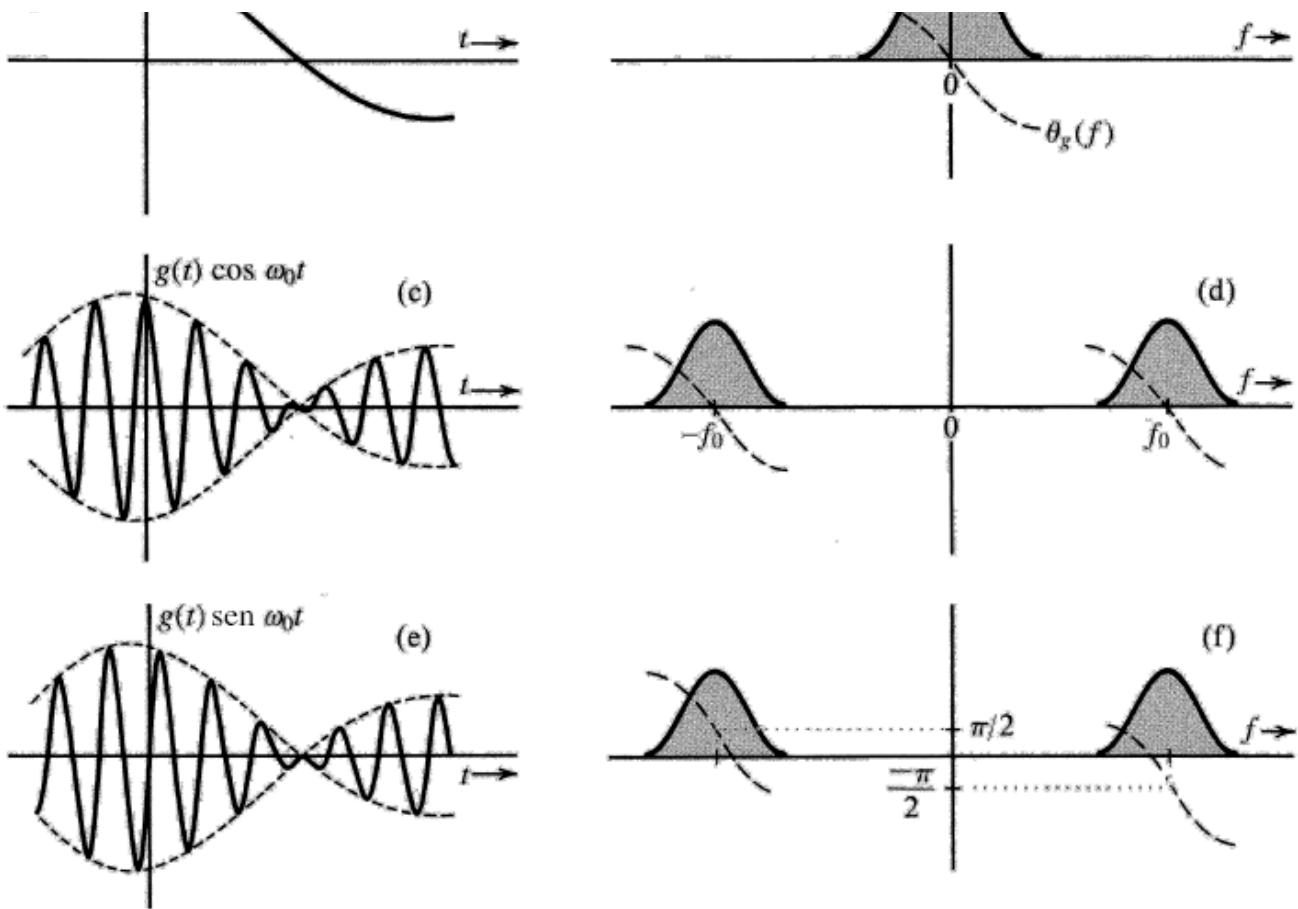


Figura 3.20 Modulação em amplitude de um sinal causa deslocamento espectral.

Para um caso especial em que $\theta_0 = -\pi/2$, a Eq. (3.37) se torna

$$g(t) \sin 2\pi f_0 t \iff \frac{1}{2} [G(f - f_0) e^{-j\pi/2} + G(f + f_0) e^{j\pi/2}] \quad (3.38)$$

Vale notar que $\sin 2\pi f_0 t$ é $\cos 2\pi f_0 t$ com um atraso de fase de $\pi/2$. Portanto, deslocar a fase da portadora por $\pi/2$ implica deslocar a fase de cada componente espectral por $\pi/2$. As Fig. 3.20e e 3.20f mostram gráficos do sinal $g(t) \sin 2\pi f_0 t$ e de seu espectro.

Modulação é uma aplicação comum que desloca o espectro de sinais. Em particular, se diversos sinais de mensagem, todos ocupando a mesma faixa de frequências, forem transmitidos simultaneamente ao longo de um meio de transmissão comum, interferirão mutuamente; será impossível separá-los ou recuperá-los no receptor. Por exemplo, se todas as estações de rádio decidissem transmitir sinais de áudio simultaneamente, os receptores não seriam capazes de separá-los. Esse problema é resolvido com o uso da modulação, e a cada estação de rádio é alocada uma frequência portadora distinta. Cada estação transmite um sinal modulado e, dessa forma, desloca o espectro do sinal à faixa de frequências a ela alocada, que não é ocupada por qualquer outra estação. Um receptor de rádio pode sintonizar uma estação selecionando a faixa de frequências da estação desejada. O receptor deve, então, demodular o sinal recebido (desfazer o efeito da modulação). Demodulação, portanto, consiste em outro deslocamento espectral, necessário para transladar o sinal à sua faixa original de frequências.

Sinais Passa-Faixa

A Fig. 3.20(d)(f) mostra que, se $g_c(t)$ e $g_s(t)$ forem sinais passa-baixos, cada um com largura de banda B Hz ou $2\pi B$ rad/s, os sinais $g_c(t) \cos 2\pi f_0 t$ e $g_s(t) \sin 2\pi f_0 t$ serão sinais passa-faixa que ocupam a mesma faixa de frequências, cada um com largura de banda $2B$ Hz. Portanto, uma combinação linear desses dois sinais também será um sinal passa-faixa que ocupará a mesma faixa de frequências de cada um deles e terá a mesma largura de banda ($2B$ Hz). Assim, em geral, um sinal passa-faixa $g_{bp}(t)$ pode ser expresso como*



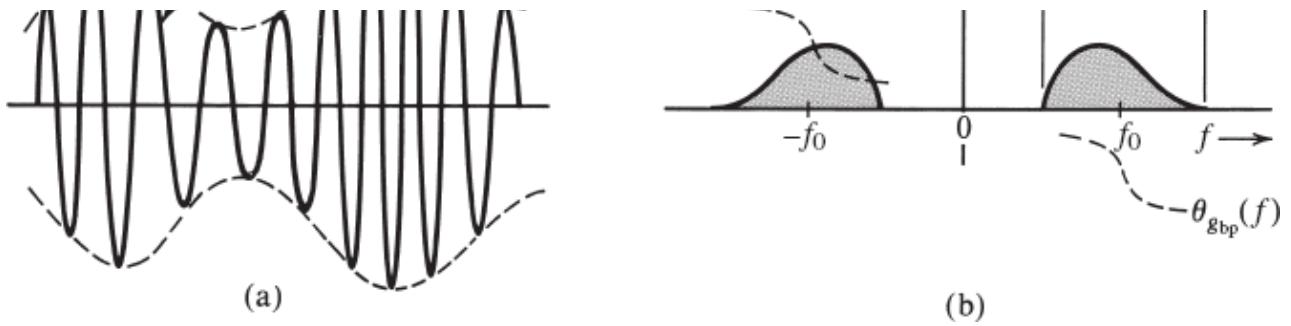


Figura 3.21 Sinal passa-faixa e correspondente espectro.

$$g_{bp}(t) = g_c(t) \cos 2\pi f_0 t + g_s(t) \sin 2\pi f_0 t \quad (3.39)$$

O espectro de $g_{bp}(t)$ é centrado em $\pm f_0$ e tem largura de banda $2B$, como ilustrado na Fig. 3.21. Embora os espectros de magnitude de $g_c(t) \cos 2\pi f_0 t$ e de $g_s(t) \sin 2\pi f_0 t$ sejam simétricos em relação a $\pm f_0$, o espectro de magnitude da soma desses sinais, $g_{bp}(t)$, não é necessariamente simétrico em relação a $\pm f_0$. Isto se deve ao fato de que as fases distintas dos dois sinais não permitem que suas amplitudes se somem diretamente, pois

$$a_1 e^{j\varphi_1} + a_2 e^{j\varphi_2} \neq (a_1 + a_2) e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$$

Um sinal passa-faixa típico $g_{bp}(t)$ e seu espectro são ilustrados na Fig. 3.21. Podemos usar uma identidade trigonométrica bem conhecida para expressar a Eq. (3.39) como

$$g_{bp}(t) = E(t) \cos [2\pi f_0 t + \psi(t)] \quad (3.40)$$

em que

$$E(t) = +\sqrt{g_c^2(t) + g_s^2(t)} \quad (3.41a)$$

$$\psi(t) = -\tan^{-1} \left[\frac{g_s(t)}{g_c(t)} \right] \quad (3.41b)$$

Como $g_c(t)$ e $g_s(t)$ são sinais passa-baixos, $E(t)$ e $\psi(t)$ também são sinais passa-baixos. Como $E(t)$ é não negativo [Eq. (3.41a)], a Eq. (3.40) indica que $E(t)$ é um envelope de variação lenta e que $\psi(t)$ é uma fase de variação lenta do sinal passa-faixa $g_{bp}(t)$, como ilustrado na Fig. 3.21. Assim, o sinal passa-faixa $g_{bp}(t)$ será uma senoide cuja amplitude varia lentamente. Devido à fase variante no tempo $\psi(t)$, a frequência da senoide também variará lentamente** com o tempo, em torno da frequência central f_0 .

Exemplo 3.11 Determinemos a transformada de Fourier de um sinal periódico $g(t)$ de período T_0 e, a seguir, determinemos a transformada de Fourier do trem periódico de impulsos $\delta_{T_0}(t)$ mostrado na Fig. 3.22a.

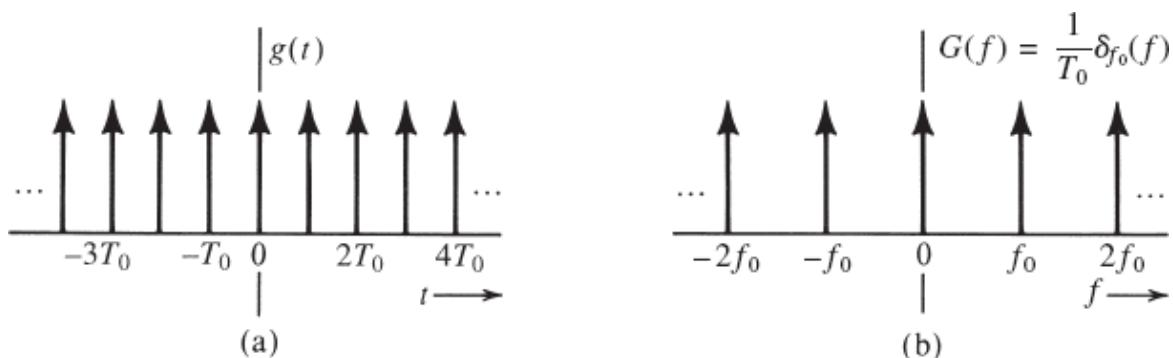


Figura 3.22 Trem de impulsos e correspondente espectro.

Um sinal periódico $g(t)$ pode ser expresso por uma série de Fourier exponencial, da seguinte forma

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn2\pi f_0 t} \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

Logo,

$$g(t) \iff \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[D_n e^{jn2\pi f_0 t}]$$

Da Eq. (3.22a), temos

$$g(t) \iff \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \delta(f - nf_0) \quad (3.42)$$

A Eq. (2.67) mostra que o trem de impulso $\delta_{T_0}(t)$ pode ser expresso por uma série de Fourier como

$$\delta_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn2\pi f_0 t} \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

Aqui, $D_n = 1/T_0$. Portanto, da Eq. (3.42), temos

$$\begin{aligned} \delta_{T_0}(t) &\iff \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_0) \\ &= \frac{1}{T_0} \delta_{f_0}(f) \quad f_0 = \frac{1}{T_0} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Logo, o espectro de um trem de impulsos também é um trem de impulsos (no domínio da frequência), como ilustrado na Fig. 3.23b.

3.3.6 Teorema da Convolução

A convolução de duas funções $g(t)$ e $w(t)$, denotada por $g(t) * w(t)$, é definida pela integral

$$g(t) * w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)w(t - \tau) d\tau$$

A propriedade de convolução no domínio do tempo e sua dual, a propriedade de convolução no domínio da frequência, afirmam que, se

$$g_1(t) \iff G_1(f) \quad \text{e} \quad g_2(t) \iff G_2(f)$$

então (**convolução no domínio do tempo**)

$$g_1(t) * g_2(t) \iff G_1(f)G_2(f) \quad (3.44)$$

e (**convolução no domínio da frequência**)

$$g_1(t)g_2(t) \iff G_1(f) * G_2(f) \quad (3.45)$$

Essas duas relações do teorema da convolução afirmam que a convolução de dois sinais no domínio do tempo se torna uma multiplicação no domínio da frequência, enquanto a multiplicação de dois sinais no domínio do tempo se torna a convolução no domínio da frequência.

Prova: Por definição

$$\begin{aligned}\mathcal{F}|g_1(t) * g_2(t)| &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi ft} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau)g_2(t-\tau)d\tau \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi ft} g_2(t-\tau)dt \right] d\tau\end{aligned}$$

A integral interna é a transformada de Fourier de $g_2(t-\tau)$, dada por $G_2(f)e^{-j2\pi f\tau}$ [propriedade de translação no tempo, Eq. (3.32a)]. Logo,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[g_1(t) * g_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau) e^{-j2\pi f\tau} G_2(f) d\tau \\ &= G_2(f) \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = G_1(f)G_2(f)\end{aligned}$$

■

A propriedade de convolução no domínio da frequência [Eq. (3.45)] pode ser provada exatamente da mesma forma, simplesmente trocando os papéis de $g(t)$ e $G(f)$.

Largura de Banda do Produto de Dois Sinais

Se $g_1(t)$ e $g_2(t)$ tiverem larguras de banda B_1 e B_2 Hz, respectivamente, a largura de banda de $g_1(t)g_2(t)$ é $B_1 + B_2$ Hz. Esse resultado advém da aplicação da propriedade de largura de banda da convolução³ à Eq. (3.45). Essa propriedade afirma que a largura de banda de $x * y$ é a soma das larguras de banda de x e de y . Logo, se a largura de banda de $g(t)$ for B Hz, a largura de banda de $g^2(t)$ será $2B$ Hz, e a largura de banda de $g^n(t)$, nB Hz.*

Exemplo 3.12 Usando a propriedade de convolução no domínio do tempo, mostremos que, se

$$g(t) \iff G(f)$$

então

$$\int_{-\infty}^t g(\tau)d\tau \iff \frac{G(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}G(0)\delta(f) \quad (3.46)$$

Como

$$u(t-\tau) = \begin{cases} 1 & \tau \leq t \\ 0 & \tau > t \end{cases}$$

temos

$$g(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau$$

Agora, da propriedade de convolução no domínio do tempo [Eq. (3.44)], obtemos

$$g(t) * u(t) \iff G(f)U(f)$$

$$= G(f) \left[\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2} \delta(f) \right]$$

$$= \frac{1}{j2\pi f} \left[\overline{g(t)} + \frac{1}{2} \overline{g''(t)} \right]$$

$$= \frac{G(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2} G(0)\delta(f)$$

Na dedução desse último resultado, usamos o par 11 da Tabela 3.1 e a Eq. (2.10a).

3.3.7 Diferenciação e Integração no Domínio do Tempo

Se

$$g(t) \iff G(f),$$

então (**diferenciação no domínio do tempo**)*

$$\frac{dg(t)}{dt} \iff j2\pi f G(f) \quad (3.47)$$

e (**integração no domínio do tempo**)

$$\int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \iff \frac{G(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2} G(0)\delta(f) \quad (3.48)$$

Prova: Diferenciando os dois lados da Eq. (3.9b), obtemos

$$\frac{dg(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} j2\pi f G(f) e^{j2\pi ft} df$$

Isso mostra que

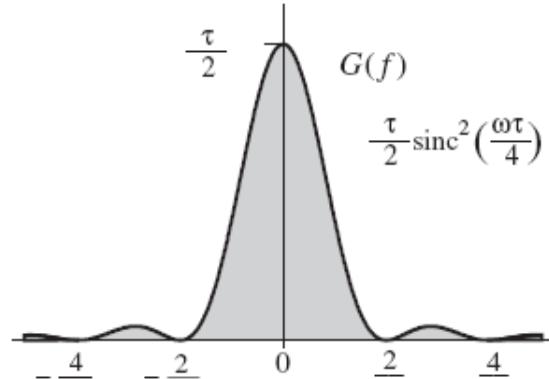
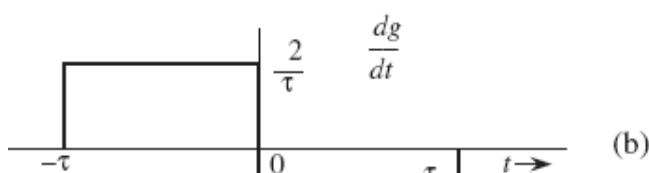
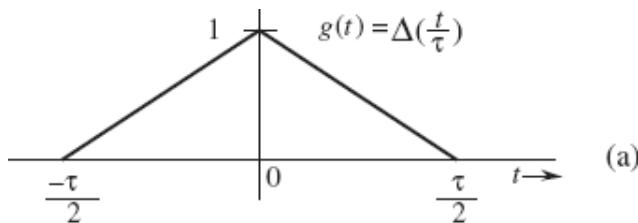
$$\frac{dg(t)}{dt} \iff j2\pi f G(f)$$

Sucessivas aplicações desta propriedade levam a

$$\frac{d^n g(t)}{dt^n} \iff (j2\pi f)^n G(f) \quad (3.49)$$

A propriedade de integração no domínio do tempo [Eq. (3.48)] já foi provada no Exemplo 3.12.

Exemplo 3.13 Usemos a propriedade de diferenciação no domínio do tempo para calcular a transformada de Fourier do pulso triangular $\Delta(t/\tau)$ mostrado na Fig. 3.23a.



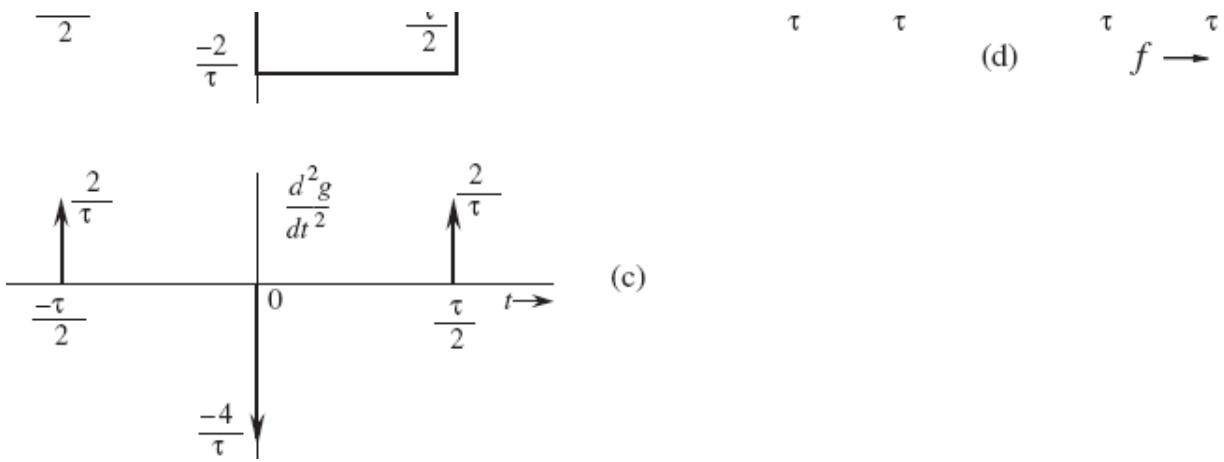


Figura 3.23 Uso da propriedade de diferenciação no domínio do tempo para calcular a transformada de Fourier de um sinal linear por partes.

Para calcular a transformada de Fourier deste pulso, o diferenciamos em relação ao tempo sucessivas vezes, como indicado na Fig. 3.23b e c. A derivada de segunda ordem consiste em uma sequência de impulsos (Fig. 3.23c). Recordemos que a derivada de um sinal em uma descontinuidade do tipo degrau é um impulso de amplitude igual à altura do degrau. A função $dg(t)/dt$ tem um degrau ou salto positivo $2/\tau$ em $t = \pm \tau/2$, e um degrau negativo $-4/\tau$ em $t = 0$. Portanto,

$$\frac{d^2g(t)}{dt^2} = \frac{2}{\tau} \left[\delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - 2\delta(t) + \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] \quad (3.50)$$

Da propriedade de diferenciação no domínio do tempo [Eq. (3.49)], temos

$$\frac{d^2g}{dt^2} \iff (j2\pi f)^2 G(f) = -(2\pi f)^2 G(f) \quad (3.51a)$$

Adicionalmente, a propriedade de translação no tempo [Eqs. (3.32)] fornece

$$\delta(t - t_0) \iff e^{-j2\pi f t_0} \quad (3.51b)$$

Tomando a transformada de Fourier da Eq. (3.50) e usando os resultados da Eq. (3.51), obtemos

$$(j2\pi f)^2 G(f) = \frac{2}{\tau} \left(e^{j\pi f \tau} - 2 + e^{-j\pi f \tau} \right) = \frac{4}{\tau} (\cos \pi f \tau - 1) = -\frac{8}{\tau} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi f \tau}{2}\right)$$

e

$$G(f) = \frac{8}{(2\pi f)^2 \tau} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi f \tau}{2}\right) = \frac{\tau}{2} \left[\frac{\operatorname{sen}(\pi f \tau/2)}{\pi f \tau/2} \right]^2 = \frac{\tau}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi f \tau}{2}\right) \quad (3.52)$$

O espectro $G(f)$ é ilustrado na Fig. 3.23d. Esse procedimento de cálculo da transformada de Fourier pode ser aplicado a qualquer função $g(t)$ que consista em segmentos de reta, com $g(t) \rightarrow 0$ quando $|t| \rightarrow \infty$. A derivada de segunda ordem de um sinal desse tipo é uma sequência de impulsos, cujas transformadas de Fourier podem ser determinadas por inspeção. Este exemplo sugere um método numérico para o cálculo da transformada de Fourier de um sinal arbitrário $g(t)$, em que o sinal é aproximado por segmentos de reta.

Para facilitar a consulta, diversas propriedades importantes da transformada de Fourier são resumidas na Tabela 3.2.

Tabela 3.2
Propriedades de Operações com Transformada de Fourier

Operação	$g(t)$	$G(f)$
Superposição	$g_1(t) + g_2(t)$	$G_1(f) + G_2(f)$
Multiplicação por escalar	$kg(t)$	$kG(f)$
Dualidade	$G(t)$	$g(-f)$
Dilatação no tempo	$g(at)$	$\frac{1}{ a }G\left(\frac{f}{a}\right)$
Translação no tempo	$g(t - t_0)$	$G(f)e^{-j2\pi f t_0}$
Translação na frequência	$g(t)e^{j2\pi f_0 t}$	$G(f - f_0)$
Convolução no domínio do tempo	$g_1(t) * g_2(t)$	$G_1(f)G_2(f)$
Convolução no domínio da frequência	$g_1(t)g_2(t)$	$G_1(f) * G_2(f)$
Diferenciação no domínio do tempo	$\frac{d^n g(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n G(f)$
Integração no domínio do tempo	$\int_{-\infty}^t g(x) dx$	$\frac{G(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}G(0)\delta(f)$

3.4 TRANSMISSÃO DE SINAL EM UM SISTEMA LINEAR

Um sistema linear invariante no tempo (LIT) em tempo contínuo pode ser igualmente bem caracterizado no domínio do tempo ou no domínio da frequência. O modelo de sistema LIT ilustrado na Fig. 3.24 pode, muitas vezes, ser usado para caracterizar canais de comunicação. Em sistemas de comunicação e no processamento de sinal, o interesse reside apenas em sistemas lineares estáveis com entrada limitada e saída limitada (sistemas BIBO — *bounded-input-bounded-output systems*). Uma discussão detalhada sobre estabilidade de sistemas pode ser encontrada em um livro de Lathi.³

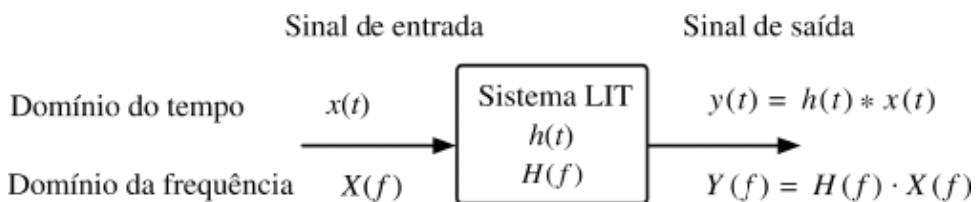


Figura 3.24 Transmissão de um sinal através de um sistema linear invariante no tempo.

Um sistema LIT estável pode ser caracterizado no domínio do tempo por sua resposta ao impulso $h(t)$, que é a resposta do sistema a um impulso unitário de entrada:

$$y(t) = h(t) \quad \text{quando} \quad x(t) = \delta(t)$$

A resposta do sistema a um sinal de entrada limitado $x(t)$ é obtida da relação de convolução

$$y(t) = h(t) * x(t) \quad (3.53)$$

No domínio da frequência, a relação entre os sinais de entrada e de saída é obtida da transformada de Fourier dos dois lados da Eq. (3.53). Sejam,

$$\begin{aligned} x(t) &\iff X(f) \\ y(t) &\iff Y(f) \\ h(t) &\iff H(f) \end{aligned}$$

Aplicando o teorema da convolução, a Eq. (3.53) passa a

$$Y(f) = H(f) \cdot X(f) \quad (3.54)$$

Em geral, $H(f)$, a transformada de Fourier da resposta ao impulso $h(t)$, recebe a denominação **função de transferência ou resposta em frequência** do sistema LIT. É comum que $H(f)$ seja uma função de valores complexos, podendo ser escrita como

$$H(f) = |H(f)|e^{j\theta_h(f)}$$

em que $|H(f)|$ é a resposta de amplitude e $\theta_h(f)$, a resposta de fase do sistema LIT.

3.4.1 Distorção do Sinal Durante a Transmissão

A transmissão de um sinal de entrada $x(t)$ através de um sistema o transforma no sinal de saída $y(t)$. A Eq. (3.54) ilustra a natureza dessa transformação ou modificação. Aqui, $X(f)$ e $Y(f)$ são os espectros de entrada e de saída, respectivamente. Portanto, $H(f)$ é a resposta espectral do sistema. O espectro de saída é obtido multiplicando o espectro de entrada pela resposta espectral do sistema. A Eq. (3.54) ressalta a formatação espectral (ou modificação) do sinal de entrada pelo sistema. A Eq. (3.54) pode ser expressa na forma polar como

$$|Y(f)|e^{j\theta_y(f)} = |X(f)||H(f)|e^{j[\theta_x(f)+\theta_h(f)]}$$

Assim, obtemos as relações de amplitude e de fase

$$|Y(f)| = |X(f)| |H(f)| \quad (3.55a)$$

$$\theta_y(f) = \theta_x(f) + \theta_h(f) \quad (3.55b)$$

Durante a transmissão, o espectro de amplitude do sinal de entrada, $|X(f)|$, é alterado para $|X(f)| \times |H(f)|$. Do mesmo modo, o espectro de fase do sinal de entrada, $\theta_x(f)$ é alterado para $\theta_x(f) + \theta_h(f)$.

Uma componente espectral do sinal de entrada de frequência f é modificada em amplitude por um fator $|H(f)|$ e deslocada em fase por um ângulo $\theta_h(f)$. $|H(f)|$ é a resposta de amplitude e $\theta_h(f)$, a resposta de fase do sistema. Os gráficos de $|H(f)|$ e $\theta_h(f)$ em função de f mostram como o sistema modifica as amplitudes e fases das diversas entradas senoidais. Por isso, $H(f)$ é denominada **resposta em frequência** do sistema. Durante a transmissão através do sistema, algumas componentes de frequência podem ter a amplitude amplificada, enquanto outras podem ter a amplitude atenuada. As fases relativas das diversas componentes também são alteradas. Em geral, a forma de onda de saída será diferente da de entrada.

3.4.2 Transmissão sem Distorção

Em diversas aplicações, como amplificação de sinal ou transmissão de sinal de mensagem através de um canal de comunicação, é necessário que a forma de onda de saída seja uma réplica da forma de onda de entrada. Nesses casos, é necessário minimizar a distorção causada pelo amplificador ou canal de comunicação. Portanto, a determinação das características de um sistema que permita a passagem de um sinal sem distorção (**transmissão sem distorção**) é de interesse prático.

A transmissão é sem distorção se a entrada e a saída tiverem formas de onda idênticas, a menos de uma constante multiplicativa. Uma saída atrasada que mantenha a forma de onda de entrada também é considerada sem distorção. Assim, na transmissão sem distorção, a entrada $x(t)$ e a saída $y(t)$ satisfazem a condição

$$y(t) = k \cdot x(t - t_d) \quad (3.56)$$

A transformada de Fourier desta equação fornece

$$Y(f) = kX(f)e^{-j2\pi ft_d}$$

Contudo, como

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

temos,

$$H(f) = k e^{-j2\pi ft_d}$$

Esta é a função de transferência necessária para transmissão sem distorção. Desta equação, obtemos

$$|H(f)| = k \quad (3.57a)$$

$$\theta_h(f) = -2\pi ft_d \quad (3.57b)$$

Isto mostra que, para transmissão sem distorção, a resposta de amplitude $|H(f)|$ deve ser constante e a resposta de fase $\theta_h(f)$, uma função linear de f que passa pela origem em $f=0$, como ilustrado na Fig. 3.25. A inclinação de $\theta_h(f)$ em relação à frequência angular $\omega = 2\pi f$ é $-t_d$, onde t_d é o atraso da saída em relação à entrada.*

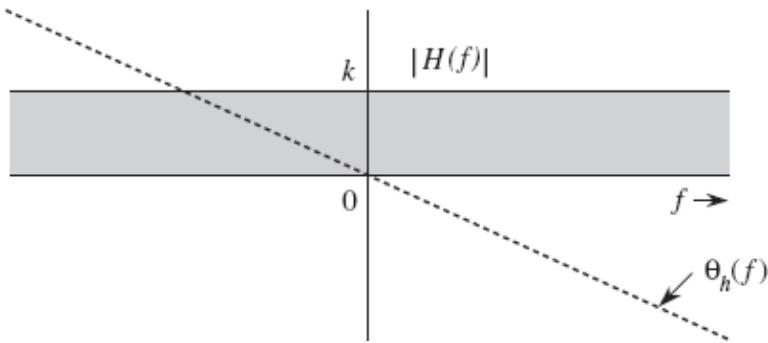


Figura 3.25 Resposta em frequência de um sistema linear invariante no tempo para transmissão sem distorção.

Sistemas Passa-Tudo versus Sistemas sem Distorção

Na análise de circuitos e no projeto de filtros, algumas vezes o maior interesse reside no ganho de um sistema. Um sistema passa-tudo tem ganho constante para todas as frequências [ou seja, $|H(f)| = k$], sem a exigência de fase linear. Notemos que, pela Eq. (3.57), um sistema sem distorção é um sistema passa-todo, embora a recíproca não seja verdadeira. Como é muito comum que os principiantes se confundam com a diferença entre sistemas sem distorção e sistemas passa-todo, este é o melhor momento para esclarecer os conceitos.

Para comprovar como um sistema passa-todo pode introduzir distorção, consideremos um exemplo ilustrativo. Imaginemos que queremos transmitir um sinal musical gravado de um dueto violino-violoncelo. O violino contribui com a parte de frequências altas desse sinal musical, enquanto o violoncelo contribui com a parte de frequências baixas. Quando esse sinal musical é transmitido através de um dado sistema *passa-todo*, as duas partes recebem o mesmo ganho. Contudo, suponhamos que esse sistema passa-todo cause um atraso *extra* de um segundo no conteúdo de alta frequência da música (a parte do violino). Em consequência, na recepção, a audiência ouvirá um sinal “musical” que está totalmente fora de sincronismo, embora *todas as componentes do sinal tenham recebido o mesmo ganho e todas estejam presentes*. A diferença no atraso de transmissão das distintas componentes de frequência advém da fase não linear de $H(f)$ no filtro passa-todo.

Para sermos mais precisos, o ganho da função de transferência $|H(f)|$ determina o ganho de cada componente de frequência de entrada, e $\angle H(f)$ determina o atraso de cada componente. Imaginemos que a entrada do sistema $x(t)$ consista em múltiplas senoides (suas componentes espectrais). Para que o sinal de saída $y(t)$ seja sem distorção, o mesmo deve ser igual ao sinal de entrada multiplicado pelo ganho k e atrasado por t_d . Para sintetizar um sinal desse tipo, $y(t)$ precisa ter exatamente as mesmas componentes de $x(t)$, sendo cada uma multiplicada por k e atrasada por t_d . Isso significa que a função de transferência do sistema, $H(f)$, deve ser tal que cada componente senoidal receba o mesmo ganho (ou perda) k e sofra o mesmo atraso temporal t_d segundos. A primeira condição requer que

$$|H(f)| = k$$

Vimos anteriormente (Seção 3.3) que, para que todas as componentes de frequências sofram o mesmo atraso temporal t_d , é necessário um atraso de fase linear $2\pi f t_d$ (Fig. 3.18) que passe pela origem

$$\theta_h(f) = -2\pi f t_d$$

Na prática, muitos sistemas têm característica de fase que pode apenas ser aproximada como linear. Um método conveniente para verificar a linearidade de fase consiste em traçar o gráfico da inclinação de $\angle H(f)$ em função da frequência. A inclinação pode ser uma função de f , no caso geral, dada por

$$t_d(f) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\theta_h(f)}{df} \quad (3.58)$$

Se a inclinação de θ_h for constante (ou seja, se θ_h for linear em relação a f), todas as componentes de frequência sofrerão o mesmo atraso temporal t_d . Se a inclinação não for constante, o atraso temporal t_d variará com a frequência. Isso significa que diferentes componentes de frequência sofrerão diferentes atrasos temporais e, em consequência, a forma de onda de saída não será uma réplica da forma de onda de entrada (como no exemplo do dueto de violino-violoncelo). Para que a transmissão de um sinal seja sem distorção, $t_d(f)$ deve ser uma constante t_d em toda a faixa de frequências de interesse.*

Existe, então, uma clara distinção entre sistemas passa-tudo e sistemas sem distorção. Um erro comum consiste em pensar que a planura da resposta de amplitude $|H(f)|$ baste para garantir a qualidade do sinal. Um sistema que tenha uma resposta de amplitude plana pode distorcer um sinal a ponto de torná-lo irreconhecível, caso a resposta de fase não seja linear (t_d não constante).

Natureza da Distorção em Sinais de Áudio e de Vídeo

De modo geral, um ouvido humano é capaz de perceber prontamente uma distorção de amplitude, embora seja insensível à distorção de fase. Para que a distorção de fase se torne perceptível, a variação no atraso temporal (variação da inclinação de θ_h) deve ser comparável à duração do sinal (ou a duração fisicamente perceptível, se o sinal, propriamente dito, seja longo). No caso de sinais de áudio, cada sílaba falada pode ser considerada um sinal individual. A duração média de uma sílaba falada é da ordem de 0,01 a 0,1 segundo. Embora sistemas de áudio possam ter resposta de fase não linear, é possível que nenhuma distorção perceptível resulte, pois, em sistemas de áudio usados na prática, a variação máxima na inclinação de θ_h é apenas uma pequena fração de um milissegundo. Essa é a justificativa da afirmação “o ouvido humano é relativamente insensível à distorção de fase”.⁴ Um resultado disso é o fato de os fabricantes de equipamentos de áudio disponibilizarem apenas $|H(f)|$, a característica de resposta de amplitude de seus sistemas.

No caso de sinais de vídeo, a situação é exatamente oposta. O olho humano é sensível à distorção de fase e relativamente insensível à distorção de amplitude. Em sinais de televisão, a distorção de amplitude se manifesta como uma destruição parcial dos valores relativos de meios-tonos da imagem resultante, o que não é prontamente percebido pelo olho humano. A distorção de fase (resposta de fase não linear), por sua vez, causa atrasos temporais diferentes aos distintos elementos da imagem. Isso resulta em uma imagem embaralhada, o que é imediatamente percebido pelo olho humano. A distorção de fase também é importante em sistemas de comunicação digital, pois a característica de fase não linear de um canal causa dispersão (alargamento temporal) dos pulsos, o que resulta em interferência entre pulsos vizinhos. Essa interferência pode provocar erros na amplitude dos pulsos no receptor: um **1** binário pode ser interpretado como **0** e vice-versa.

3.5 FILTROS IDEIAIS VERSUS FILTROS PRÁTICOS

Filtros ideais permitem a transmissão sem distorção de uma determinada faixa de frequências e suprimem todas as outras frequências. O filtro passa-baixos ideal (Fig. 3.26), por exemplo, permite que todas as componentes de frequência abaixo de $f = B$ Hz passem sem distorção e suprime todas as componentes acima de $f = B$. A Fig. 3.27 mostra características de filtros passa-altos e passa-faixa ideais.

O filtro passa-baixos ideal na Fig. 3.26a tem inclinação de fase linear $-t_d$, que resulta em um atraso temporal de t_d segundos para todas as componentes de frequências abaixo de B Hz. Portanto, se o sinal de entrada $g(t)$ for limitado em banda a B Hz, a saída $y(t)$ será igual a $g(t)$ atrasado por t_d , ou seja,

$$y(t) = g(t - t_d)$$

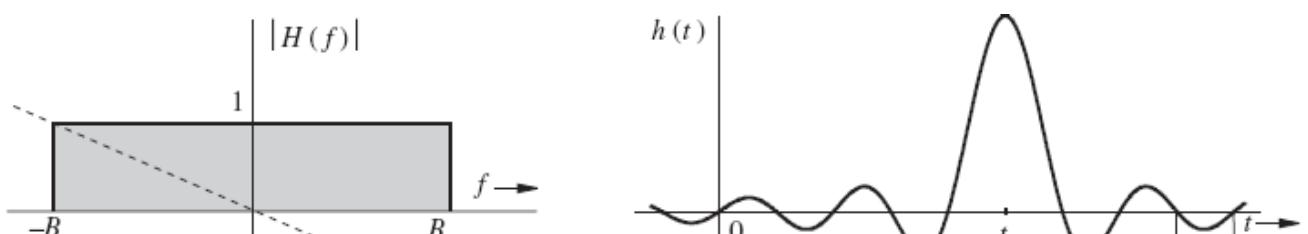




Figura 3.26 Resposta em frequência de um filtro passabaixos ideal e correspondente resposta ao impulso.

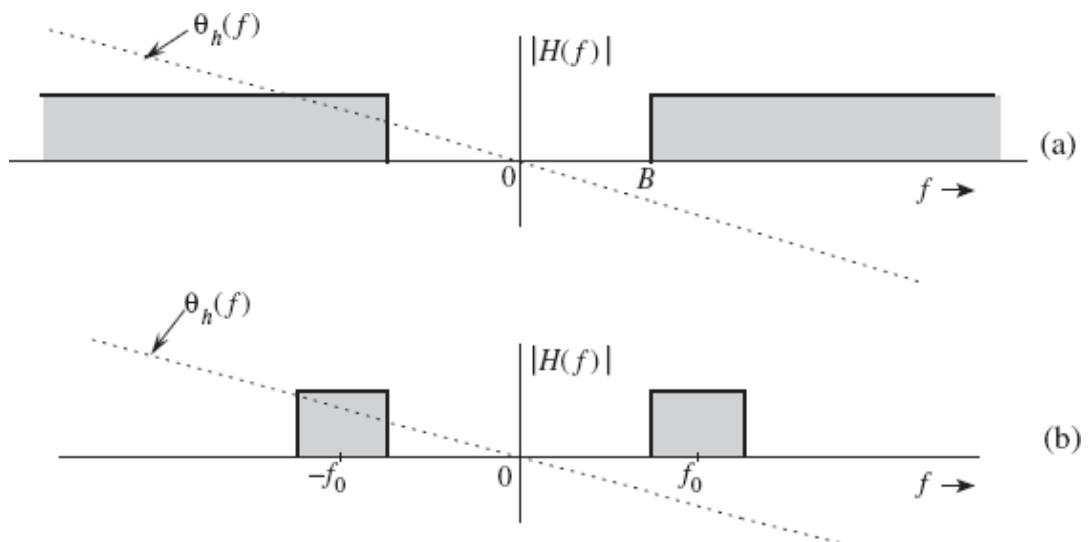


Figura 3.27 Respostas em frequência de filtros passa-altos e passa-faixa ideais.

O sinal $g(t)$ é transmitido por esse sistema sem distorção, mas com atraso temporal t_d . Para este filtro, $|H(f)| = \Pi(f/2B)$ e $\theta_h(f) = -2\pi ft_d$, de modo que

$$H(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) e^{-j2\pi ft_d} \quad (3.59a)$$

A resposta ao impulso unitário $h(t)$ deste filtro pode ser obtida do par 18 na Tabela 3.1 e da propriedade de translação no tempo:

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{F}^{-1}\left[\Pi\left(\frac{f}{2B}\right) e^{-j2\pi ft_d}\right] \\ &= 2B \operatorname{sinc}[2\pi B(t - t_d)] \end{aligned} \quad (3.59b)$$

Recordemos que $h(t)$ é a resposta do sistema ao impulso unitário $\delta(t)$ aplicado em $t = 0$. A Fig. 3.26b ilustra um fato curioso: a resposta $h(t)$ tem início antes mesmo da aplicação da entrada (em $t = 0$). É óbvio que o filtro é não causal e, portanto, não realizável; ou seja, um sistema como este é fisicamente impossível, pois nenhum sistema razoável é capaz de responder a uma entrada **antes** que a mesma seja aplicada ao sistema. De modo similar, podemos mostrar que outros filtros ideais (como os filtros passa-altos e passa-faixa mostrados na Fig. 3.27) também não são fisicamente realizáveis.

Para um sistema fisicamente realizável, $h(t)$ deve ser causal, ou seja,

$$h(t) = 0 \quad \text{para } t < 0$$

No domínio da frequência, esta condição é equivalente ao **critério de Paley-Winer**, segundo o qual a condição necessária e suficiente para que $|H(f)|$ seja a resposta de amplitude de um sistema realizable (ou causal) é*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |H(f)||}{1 + (2\pi f)^2} df < \infty \quad (3.60)$$

Se $H(f)$ não satisfizer esta condição, não será realizável. Vale notar que, se $|H(f)| = 0$ em uma banda finita qualquer, $|\ln|H(f)|| = \infty$ nesta banda, violando a condição (3.60). Se, no entanto, $H(f) = 0$ em uma única frequência (ou em um conjunto de frequências discretas), a integral na Eq. (3.60) ainda pode ser finita, embora o integrando seja infinito. Portanto, para um sistema fisicamente realizable, $H(f)$ pode ser zero em algumas frequências, mas não pode ser zero em uma faixa finita de frequências. Segundo esse critério, as características de filtros ideais (Figs. 3.26 e 3.27) são claramente não realizáveis.

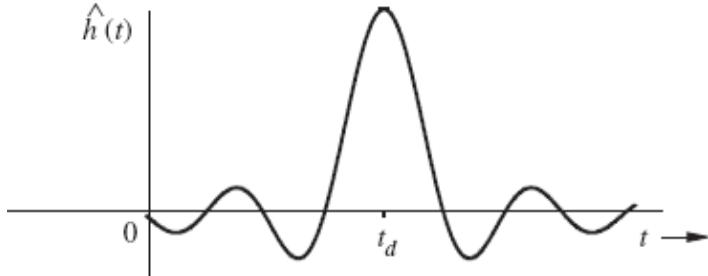


Figura 3.28 Realização aproximada de uma característica de filtro passa-baixos ideal com truncamento da resposta ao impulso.

A resposta ao impulso $h(t)$ na Fig. 3.26 não é realizable. Uma abordagem prática ao projeto de filtros consiste em cortar a cauda de $h(t)$ para $t < 0$. A resultante resposta ao impulso, $\hat{h}(t)$ é causal e dada por

$$\hat{h}(t) = h(t)u(t)$$

por ser causal (Fig. 3.28), $\hat{h}(t)$ é fisicamente realizable. Se t_d for suficientemente grande, $\hat{h}(t)$ será uma boa aproximação de $h(t)$ e o filtro correspondente, $\hat{H}(f)$ será uma boa aproximação de um filtro ideal. Esta realização de um filtro ideal é possível devido ao maior valor do atraso temporal t_d . Isso significa que o preço de uma boa aproximação física é um maior atraso na saída, o que, com frequência, é verdade para sistemas não causais. Teoricamente, a realização da característica ideal requer um atraso $t_d = \infty$. Contudo, um exame da Fig. 3.27b mostra que um atraso t_d de três ou quatro vezes π/W fará com que $\hat{h}(t)$ seja uma boa versão aproximada de $h(t - t_d)$. Por exemplo, filtros de áudio devem passar frequências de até 20 kHz (a maior frequência que o ouvido humano pode distinguir). Neste caso, um atraso t_d da ordem de 10^{-4} segundo (0,1 ms) seria uma escolha razoável. No entanto, a operação de truncamento [corte da cauda de $h(t)$ para torná-la causal] cria alguns problemas inesperados de espalhamento e vazamento espectrais, que podem ser parcialmente corrigidos com o emprego de uma função de truncamento gradual para que a cauda de $h(t)$ seja cortada de forma gradual (e não de forma abrupta).⁵

Na prática, podemos realizar uma variedade de características de filtros para aproximar características ideais. Filtros práticos (ou realizáveis) têm resposta de amplitude $|H(f)|$ com características graduais, sem descontinuidades do tipo degrau. Por exemplo, filtros de Butterworth ou de Chebychev são largamente utilizados em várias aplicações, incluindo circuitos práticos de comunicação.

Sinais analógicos também podem ser processados de forma digital (conversão A/D). Isto envolve amostragem, quantização e codificação. O resultante sinal digital pode ser processado por um pequeno computador digital especialmente projetado para converter a sequência de entrada na sequência de saída desejada. A sequência de saída é convertida de volta ao desejado sinal analógico. Um algoritmo especial para o computador digital de processamento pode ser usado para implementar uma dada operação com sinais (por exemplo, filtragem passa-baixos, passa-faixa ou passa-altos). O tema de filtragem digital foge um pouco do escopo deste livro. Existem livros excelentes sobre esse assunto.³

3.6 DISTORÇÃO DE SINAL EM UM CANAL DE COMUNICAÇÃO

Um sinal transmitido ao longo de um canal é distorcido por várias imperfeições do canal. A seguir, estudaremos a natureza da distorção de um sinal.

3.6.1 Distorção Linear

Primeiro, consideremos canais lineares invariantes no tempo. Em um canal desse tipo, a distorção do sinal pode ser causada por distorção de magnitude ou de fase, ou ambas, devido a características não ideais do canal. Podemos determinar os efeitos que tais **não idealidades** terão sobre um pulso $g(t)$ transmitido ao longo do canal. Admitamos que o pulso exista em um intervalo (a, b) e seja zero fora dele. As componentes do espectro de Fourier do pulso terão um equilíbrio perfeito e delicado de magnitudes e fases, de

zero fora dele. As componentes do espectro de Fourier do pulso terão um equilíbrio perfeito e dividido de magnitudes e fases, de modo que a soma das mesmas forma precisamente o pulso $g(t)$ no intervalo (a, b) e é zero fora dele. A transmissão de $g(t)$ através de um canal ideal que satisfaz as condições de transmissão sem distorção não perturba esse equilíbrio, pois um canal sem distorção multiplica todas as componentes pelo mesmo fator e as atrasa pelo mesmo intervalo de tempo. Contudo, se a resposta de amplitude do canal for não ideal [ou seja, se $|H(f)|$ não for constante], esse delicado equilíbrio será quebrado e a soma de todas as componentes deixará de ser zero fora do intervalo (a, b) . Em resumo, o pulso se espalhará (ver Exemplo 3.14). O mesmo ocorre se a característica de fase do canal não for ideal, ou seja, se $\theta_h(f) \neq -2\pi f t_d$. Assim, alargamento, ou **dispersão**, do pulso ocorrerá se a resposta de amplitude ou a resposta de fase não for ideal, ou se ambas não forem ideais.

Distorção de canal linear (alargamento temporal) é particularmente danosa a sistemas de comunicação digital, pois introduz o que é conhecido como interferência intersimbólica (ISI — *InterSymbol Interference*). Em outras palavras, ao ser transmitido através de um canal dispersivo, um símbolo digital tende a se alargar além do intervalo de tempo a ele reservado. Portanto, símbolos adjacentes interferirão uns com os outros, aumentando a probabilidade de erro de detecção no receptor.

Exemplo 3.14 A função de transferência de um filtro passa-baixos $H(f)$ (Fig. 3.19a) é dada por

$$H(f) = \begin{cases} (1 + k \cos 2\pi f T) e^{-j2\pi f t_d} & |f| < B \\ 0 & |f| > B \end{cases} \quad (3.61)$$

Um pulso $g(t)$ limitado em banda a B Hz (Fig. 3.29b) é aplicado à entrada desse filtro. Determinemos a saída $y(t)$.

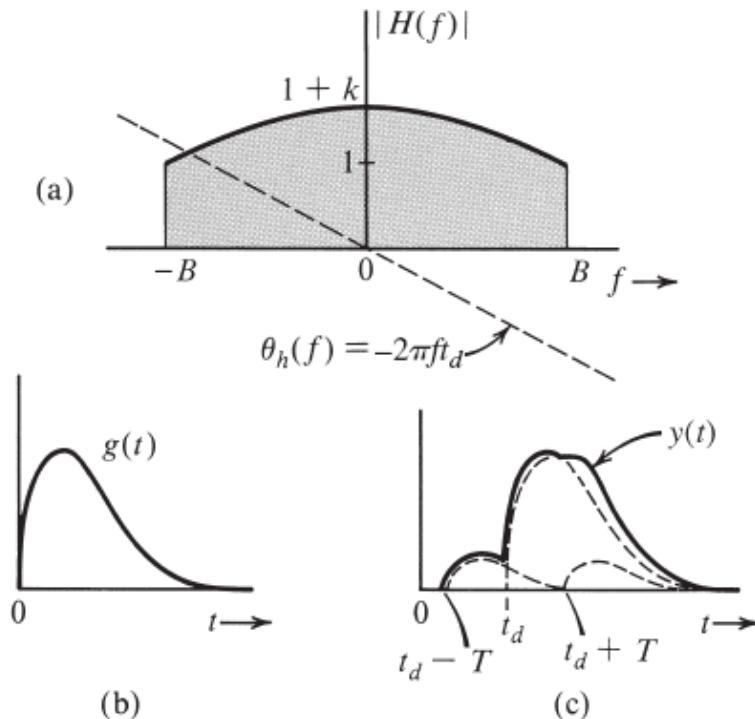


Figura 3.29 Pulso dispersado ao passar por um sistema que não é sem distorção.

A característica de fase desse filtro é ideal, mas a de amplitude é não ideal. Como $g(t) \Leftrightarrow G(f)$, $y(t) \Leftrightarrow Y(f)$, e

$$\begin{aligned} Y(f) &= G(f)H(f) \\ &= G(f) \cdot \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) (1 + k \cos 2\pi f T) e^{-j2\pi f t_d} \\ &= G(f)e^{-j2\pi f t_d} + k [G(f) \cos 2\pi f T] e^{-j2\pi f t_d} \end{aligned} \quad (3.62)$$

Vale notar que, na dedução da Eq. (3.62), como $g(t)$ é limitado em banda a B Hz, temos $G(f) \times \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) = G(f)$.

Fazendo uso da propriedade de translação no tempo e da Eq. (3.32a), obtemos

$$y(t) = g(t - t_d) + \frac{k}{2}[g(t - t_d - T) + g(t - t_d + T)] \quad (3.63)$$

A saída é, na verdade, $g(t) + (k/2)[g(t - T) + g(t + T)]$ atrasado de t_d . Ou seja, a saída consiste em $g(t)$ e seus ecos deslocados por $\pm t_d$. A dispersão do pulso causada pelos ecos fica evidente na Fig. 3.29c. Se $H(f)$ representar resposta ideal de amplitude e resposta não ideal de fase, o efeito será similar (ver Exercício 3.6-1).

3.6.2 Distorção Causada por Não Linearidades do Canal

Até aqui, consideremos o canal como linear. Essa aproximação é válida apenas para pequenos sinais. Para sinais de grande amplitude, não linearidades não podem ser desprezadas. Uma discussão detalhada de sistemas não lineares está além do escopo deste livro. Consideraremos um caso simples de um canal não ideal sem memória, onde a entrada g e a saída y se relacionam por alguma equação não linear (sem memória),

$$y = f(g)$$

O lado direito dessa equação pode ser expandido em uma série de Maclaurin, como

$$y(t) = a_0 + a_1 g(t) + a_2 g^2(t) + a_3 g^3(t) + \cdots + a_k g^k(t) + \cdots$$

Recordemos o resultado na Seção 3.3.6 (convolução), segundo o qual, se a largura de banda de $g(t)$ for B Hz, então a largura de banda de $g^k(t)$ será kB Hz. Portanto, a largura de banda de $y(t)$ é **maior que** kB Hz. Em consequência, o espectro de saída será mais largo que o de entrada, e o sinal de saída conterá componentes de frequências não contidas no sinal de entrada. Em comunicação por difusão, é necessário amplificar sinais a níveis de potência muito elevados, o que requer amplificadores de alta eficiência (de classe C). Infelizmente, esses amplificadores são não lineares e, ao serem usados na amplificação de sinais, causam distorção. Esse é um dos sérios problemas de sinais AM. No entanto, sinais FM não são afetados por distorção não linear, como mostrado no Capítulo 5. Se um sinal for transmitido através de um canal não linear, a não linearidade não apenas distorce o sinal, mas também causa interferência em outros sinais no canal, devido a sua dispersão (alargamento) espectral.

No caso de sistemas de comunicação digital, o efeito da distorção não linear difere do efeito de alargamento temporal causado por distorção linear. A distorção linear provoca interferência entre sinais em um mesmo canal, enquanto a dispersão espectral, devido à distorção não linear, causa interferência entre sinais que usam diferentes canais de frequência.

Exemplo 3.15 A relação entre a entrada $x(t)$ e a saída $y(t)$ de um certo canal não linear é dada por

$$y(t) = x(t) + 0,000158x^2(t)$$

Determinemos o sinal de saída $y(t)$ e seu espectro $Y(f)$, considerando um sinal de entrada $x(t) = 2000 \operatorname{sinc}(2000\pi t)$. Comprovemos que a largura de banda do sinal de saída é o dobro da largura de banda do sinal de entrada. Esse é o resultado de usar o quadrado de um sinal. Será possível recuperar o sinal $x(t)$ (sem distorção) da saída $y(t)$?

Como

$$x(t) = 2000 \operatorname{sinc}(2000\pi t) \iff X(f) = \Pi\left(\frac{f}{2000}\right)$$

Temos,

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) + 0,000158x^2(t) = 2000 \operatorname{sinc}(2000\pi t) + 0,316 \cdot 2000 \operatorname{sinc}^2(2000\pi t) \\ &\iff Y(f) = \Pi\left(\frac{f}{2000}\right) + 0,316 \Delta\left(\frac{f}{4000}\right) \end{aligned}$$

Vale notar que $0,316 \times 2000 \operatorname{sinc}^2(2000\pi t)$ é o termo indesejado (distorção) no sinal recebido. A Fig. 3.30a mostra o espectro do sinal de entrada (desejado) $X(f)$; a Fig. 3.30b mostra o espectro do termo indesejado (distorção); a Fig. 3.30c mostra o espectro recebido $Y(f)$. Façamos as seguintes observações:

1. A largura de banda do sinal recebido $y(t)$ é o dobro da largura de banda do sinal de entrada $x(t)$ (pois o

sinal foi elevado ao quadrado).

2. O sinal recebido contém o sinal de entrada $x(t)$ e o sinal indesejado $632 \operatorname{sinc}^2(2000\pi t)$. Os espectros desses dois sinais são ilustrados na Fig. 3.30a e b. A Fig. 3.30c mostra $Y(f)$, o espectro do sinal recebido. Os espectros do sinal desejado e do sinal de distorção se sobrepõem, o que impede que o sinal $x(t)$ seja recuperado do sinal $y(t)$ sem alguma distorção.
3. Podemos reduzir a distorção aplicando o sinal recebido a um filtro passa-baixos com largura de banda de 1000 Hz. O espectro da saída desse filtro é ilustrado na Fig. 3.30d. A saída do filtro é o sinal de entrada desejado $x(t)$ com alguma distorção residual.

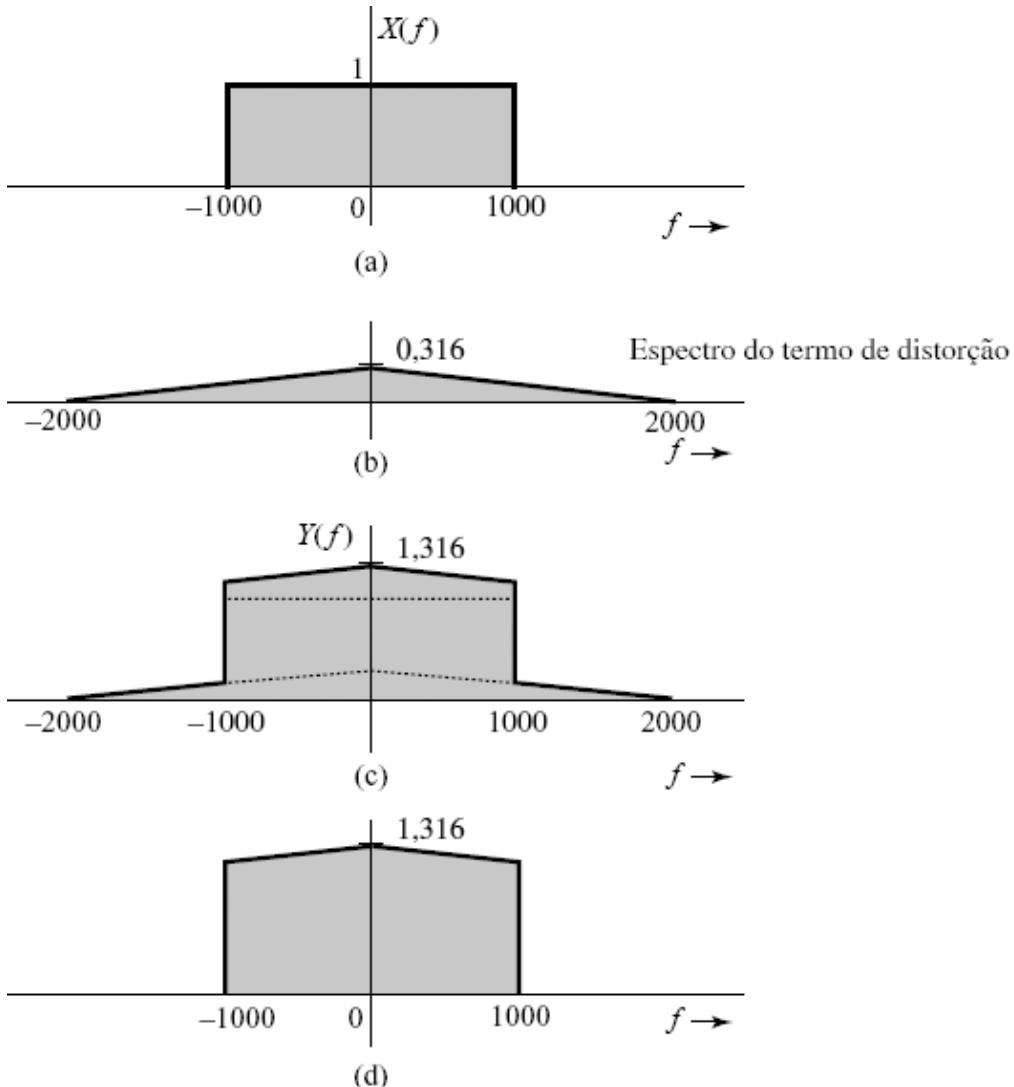


Figura 3.30 Distorção de sinal causada por operação não linear. (a) Espectro do sinal desejado (de entrada). (b) Espectro do sinal indesejado (distorção) no sinal recebido. (c) Espectro do sinal recebido. (d) Espectro do sinal recebido após filtragem passa-baixos.

4. Haverá um problema adicional de interferência com outros sinais caso o sinal de entrada $x(t)$ seja multiplexado por divisão em frequência juntamente com outros sinais nesse mesmo canal. Isso significa que vários sinais que ocupam faixas de frequências que não se sobrepõem são transmitidos simultaneamente no mesmo canal. Se o espectro $X(f)$ se alargar além de sua banda original de 1000 Hz, interferirá com o sinal que ocupa a faixa de frequências entre 1000 e 2000 Hz. Assim, em adição à distorção de $x(t)$, haverá interferência com a banda adjacente.
5. Se $x(t)$ fosse um sinal digital consistindo em um trem de pulsos, cada pulso seria distorcido, mas não haveria interferência entre pulsos adjacentes. Mesmo com pulsos distorcidos, os dados podem ser recebidos sem perda, pois comunicação digital é capaz de suportar considerável distorção de pulsos sem perda de informação. Portanto, se esse canal fosse usado para transmitir um sinal multiplexado por divisão no tempo e consistindo em dois trens de pulsos entrelaçados, os dados nos dois trens seriam recuperados no receptor.

3.6.3 Distorção Causada por Efeitos de Multipercurso

Uma transmissão em multipercurso ocorre quando um sinal transmitido chega ao receptor por dois ou mais percursos, com atrasos distintos. Por exemplo, se um sinal for transmitido através de um cabo que apresenta irregularidades (descasamento) de impedâncias ao longo do percurso, o sinal chegará ao receptor na forma de uma onda direta mais diversas reflexões com atrasos variáveis. No caso de enlaces de rádio, o sinal pode ser recebido de um percurso direto entre as antenas transmissora e receptora e, também, de reflexões por outros objetos, como montanhas e edifícios. Em enlaces de rádio de longa distância que utilizam a ionosfera, efeitos similares ocorrem por conta de percursos de um e de múltiplos saltos. Em cada caso, o canal de transmissão pode ser representado como vários canais em paralelo, cada um com diferentes valores de atenuação relativa e de atraso temporal. Consideremos o caso de apenas dois percursos: um com ganho unitário e atraso t_d , e outro com ganho α e atraso $t_d + \Delta t$, como ilustrado na Fig. 3.31a. As funções de transferências dos dois percursos são dadas $e^{-j2\pi f t_d}$ e $\alpha e^{-j2\pi f(t_d + \Delta t)}$, respectivamente. A função de transferência global de um canal como esse é $H(f)$, dada por

$$\begin{aligned} H(f) &= e^{-j2\pi f t_d} + \alpha e^{-j2\pi f(t_d + \Delta t)} \\ &= e^{-j2\pi f t_d}(1 + \alpha e^{-j2\pi f \Delta t}) \\ &= e^{-j2\pi f t_d}(1 + \alpha \cos 2\pi f \Delta t - j\alpha \sin 2\pi f \Delta t) \end{aligned} \quad (3.64a)$$

$$= \underbrace{\sqrt{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos 2\pi f \Delta t}}_{|H(f)|} \exp \left[-j \underbrace{\left(2\pi f t_d + \tan^{-1} \frac{\alpha \sin 2\pi f \Delta t}{1 + \alpha \cos 2\pi f \Delta t} \right)}_{\theta_h(f)} \right] \quad (3.64b)$$

As características de amplitude e de fase de $H(f)$ são periódicas em f , com período $1/\Delta t$ (Fig. 3.31b). O canal de multipercurso pode, portanto, exibir não idealidades nas características de amplitude e de fase e pode causar distorção linear (dispersão de pulsos), como discutido anteriormente.

Se, por exemplo, os ganhos dos dois percursos forem muito próximos, ou seja, se $\alpha \approx 1$, os sinais recebidos nos dois percursos podem ter fases opostas (defasadas por π radianos) em certas frequências. Isso significa que, em frequências nas quais os dois percursos resultam em fases opostas, os sinais dos dois percursos quase se cancelarão mutuamente. A Eq. (3.64b) mostra que, em frequências tais que $f = n/(2\Delta t)$ (n ímpar), $\cos 2\pi f \Delta t = -1$, e $|H(f)| \approx 0$ quando $\alpha \approx 1$. Essas são as frequências denulo devido a multipercurso. Nas frequências $f = n/(2\Delta t)$ (n par), os dois sinais interferirão de forma construtiva, reforçando o ganho. Tais canais são responsáveis pelo **desvanecimento seletivo em frequência** de sinais transmitidos. Esse tipo de distorção pode ser parcialmente corrigido com o emprego de um equalizador com linha de retardo gradual, como mostrado no Exercício 3.6-2. Tais equalizadores são úteis em várias aplicações em comunicação; o projeto dos mesmos é abordado nos Capítulos 7 e 12.

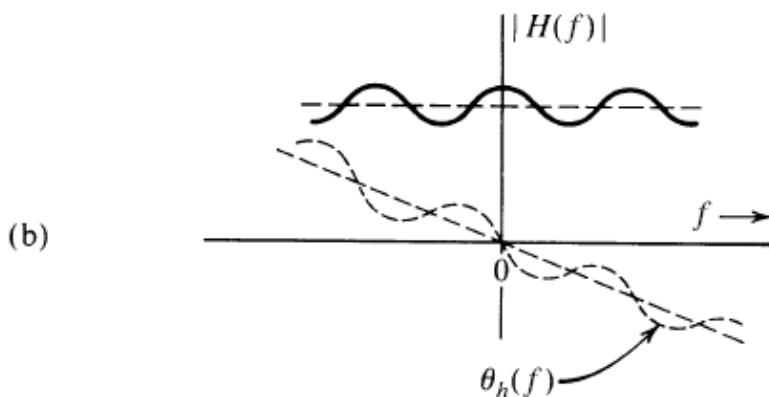
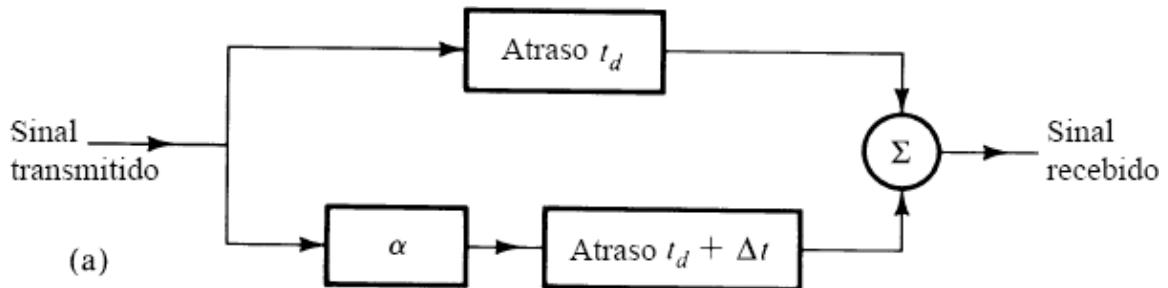


Figura 3.31 Transmissão em multipercorso.

3.6.4 Canais com Desvanecimento

Até aqui, presumimos que as características do canal eram constantes no tempo. Na prática, encontramos canais cujas características de transmissão variam com o tempo. Por exemplo, canais baseados no espalhamento troposférico e canais que, para alcançar comunicação de longa distância, utilizam a ionosfera para a reflexão de rádio. As variações temporais das propriedades do canal têm origem em alterações semiperiódicas e aleatórias das características de propagação do meio. As propriedades de reflexão da ionosfera, por exemplo, estão relacionadas às condições meteorológicas, que sofrem mudanças sazonais, diárias ou, até mesmo, horárias, assim como acontece com o clima. Períodos de tempestades repentinas também ocorrem. Portanto, a função de transferência efetiva do canal varia de modo semiperiódico e aleatório, causando atenuação randômica do sinal. Esse fenômeno é conhecido como **desvanecimento**. Efeitos de desvanecimento lento podem ser reduzidos com o emprego de **controle automático de ganho** (AGC – Automatic Gain Control).*

O desvanecimento pode exibir grande dependência da frequência, de modo que diferentes componentes de frequência são afetadas de modo não uniforme. Este tipo de desvanecimento, conhecido como desvanecimento seletivo em frequência, pode causar sérios problemas às comunicações. Propagação em multipercorso pode originar desvanecimento seletivo em frequência.

3.7 ENERGIA E DENSIDADE ESPECTRAL DE ENERGIA DE SINAIS

A energia E_g de um sinal $g(t)$ é definida como a área sob a curva de $|g(t)|^2$. A energia também pode ser calculada da transformada de Fourier $G(f)$, através do teorema de Parseval.

3.7.1 Teorema de Parseval

A energia de um sinal pode ser relacionada ao espectro do sinal $G(f)$, por substituição da Eq. (3.9b) na Eq. (2.2):

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} G^*(f)e^{-j2\pi ft} df \right] dt$$

Nesta equação, usamos o fato de que $g^*(t)$, por ser o complexo conjugado de $g(t)$, pode ser expresso como o conjugado do lado direito da Eq. (3.9b). Agora, trocando a ordem de integração, obtemos,

$$\begin{aligned}
E_g &= \int_{-\infty}^{\infty} G^*(f) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt \right] df \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} G(f) G^*(f) df \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Este último resultado é o conhecido teorema de Parseval. Um resultado similar foi obtido, na Eq. (2.68), para um sinal periódico e sua série de Fourier. O teorema de Parseval permite que determinemos a energia de um sinal tanto de sua especificação no domínio do tempo, $g(t)$, como de sua especificação no domínio da frequência, $G(f)$.

Exemplo 3.16 Comprovemos o teorema de Parseval para o sinal $g(t) = e^{-at} u(t)$ ($a > 0$).

Temos

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{2a} \tag{3.66}$$

Agora, determinemos E_g do espectro do sinal $G(f)$, dado por

$$G(f) = \frac{1}{j2\pi f + a}$$

e, da Eq. (3.65)

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi f)^2 + a^2} df = \frac{1}{2\pi a} \tan^{-1} \frac{2\pi f}{a} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2a}$$

o que comprova o teorema de Parseval.

3.7.2 Densidade Espectral de Energia (ESD)

Uma interpretação da Eq. (3.65) nos diz que a energia de um sinal $g(t)$ é o resultado das energias contribuídas por todas as componentes espetrais do sinal $g(t)$. A contribuição de uma componente espectral de frequência f é proporcional a $|G(f)|^2$. Para detalhar um pouco mais, consideremos um sinal $g(t)$ aplicado à entrada de um filtro passa-faixa ideal, cuja função de transferência $H(f)$ é mostrada na Fig. 3.32a. Esse filtro suprime todas as frequências, exceto aquelas em uma estreita faixa Δf ($\Delta f \rightarrow 0$) centrada na frequência f_0 (Fig. 3.32b). Seja $y(t)$ a saída do filtro; então sua transformada de Fourier $Y(f)$ é $G(f)H(f)$, e a energia E_y de $y(t)$ é dada por

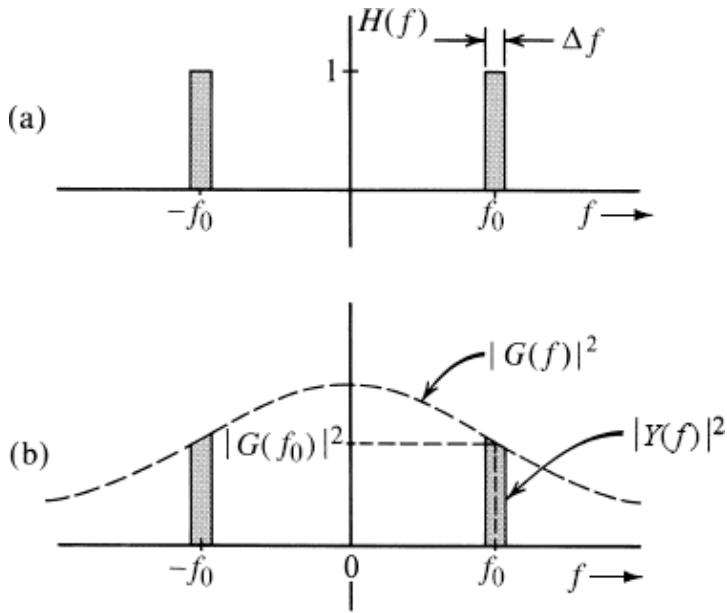


Figura 3.32 Interpretação da densidade espectral de energia de um sinal.

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)H(f)|^2 df \quad (3.67)$$

Como $H(f) = 1$ na banda passante Δf e é zero em todas as outras frequências, a integral no lado direito é a soma das duas áreas hachuradas na Fig. 3.32b; logo (para $\Delta f \rightarrow 0$)

$$E_y = 2 |G(f_0)|^2 df$$

Portanto, $2|G(f)|^2 df$ é a energia contribuída pelas componentes espetrais contidas nas duas bandas estreitas, cada uma com largura Δf Hz, centradas em $\pm f_0$. Podemos, então, interpretar $|G(f)|^2$ como a energia por unidade de largura de banda (em hertz) das componentes espetrais de $g(t)$ centradas na frequência f . Em outras palavras, $|G(f)|^2$ é a densidade espectral de energia (por unidade de largura de banda em hertz) de $g(t)$. Na verdade, como as componentes de frequências positivas e negativas se combinam para formar as componentes na banda Δf , a energia contribuída por unidade de largura de banda é $2|G(f)|^2$. Contudo, por conveniência, consideraremos frequências positivas e negativas como independentes. Assim a **densidade espectral de energia (ESD — Energy Spectral Density)** $\Psi_g(f)$ é definida como

$$\Psi_g(f) = |G(f)|^2 \quad (3.68)$$

e a Eq. (3.65) pode ser expressa como

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_g(f) df \quad (3.69a)$$

Dos resultados do Exemplo 3.16, a ESD do sinal $g(t) = e^{-at} u(t)$ é

$$\Psi_g(f) = |G(f)|^2 = \frac{1}{(2\pi f)^2 + a^2} \quad (3.69b)$$

3.7.3 Largura de Banda Essencial de um Sinal

O espectro da maioria dos sinais se estende ao infinito. Contudo, como a energia de um sinal prático é finita, o espectro do sinal deve tender a 0 quando $f \rightarrow \infty$. A maior parte da energia do sinal está contida em uma certa banda de B Hz, e a energia contribuída pelas componentes de frequência maiores que B Hz é desprezível. Podemos, então, suprimir o espectro do sinal que se estende além de B Hz, com pequeno efeito na forma e na energia do sinal. A largura de banda B é denominada **largura de banda essencial** do sinal. O critério para a determinação de B depende da tolerância ao erro em uma particular aplicação. Podemos, por exemplo, selecionar B de modo que a largura de banda contenha 95% da energia do sinal.* O nível de energia pode ser maior ou menor que

*95%, dependendo da precisão necessária. Podemos fazer uso de um critério como este para determinar a largura de banda essencial.

de um sinal, dependendo da precisão necessária. Podemos fazer uso de um critério como este para determinar a largura de banda essencial de um sinal. A supressão de todas as componentes espectrais de $g(t)$ fora da largura de banda essencial resulta em um sinal $\hat{g}(t)$, que é uma boa aproximação de $g(t)$.** Caso usemos o critério de 95% para a largura de banda essencial, a energia do erro (diferença) $g(t) - \hat{g}(t)$ será 5% de E_g . O exemplo a seguir ilustra o procedimento para estimar a largura de banda.

Exemplo 3.17 Estimemos a largura de banda essencial W (em rad/s) do sinal $e^{-at}u(t)$ para que a banda essencial contenha 95% da energia do sinal.

Neste caso,

$$G(f) = \frac{1}{j2\pi f + a}$$

e a ESD é

$$|G(f)|^2 = \frac{1}{(2\pi f)^2 + a^2}$$

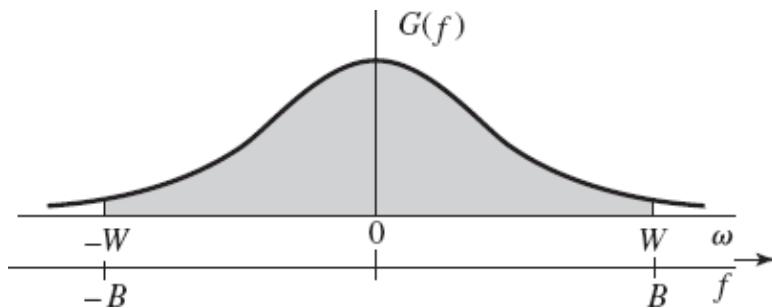


Figura 3.33 Estimativa da largura de banda essencial de um sinal.

A ESD é ilustrada na Fig. 3.33. A energia do sinal E_g é a área sob a curva da ESD, e já foi calculada como $1/2a$. Seja W rad/s a largura de banda essencial, que contém 95% da energia total do sinal E_g . Isso significa que $1/2\pi$ vezes a área hachurada na Fig. 3.33 é $0,95/2a$, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{0,95}{2a} &= \int_{-W/2\pi}^{W/2\pi} \frac{df}{(2\pi f)^2 + a^2} \\ &= \frac{1}{2\pi a} \tan^{-1} \frac{2\pi f}{a} \Big|_{-W/2\pi}^{W/2\pi} = \frac{1}{\pi a} \tan^{-1} \frac{W}{a} \end{aligned}$$

ou

$$\frac{0,95\pi}{2} = \tan^{-1} \frac{W}{a} \implies W = 12,7a \text{ rad/s}$$

O valor da largura de banda essencial em hertz é

$$B = \frac{W}{2\pi} = 2,02a \text{ Hz}$$

Isso significa que, na banda de 0 (dc) a $12,7 \times a$ rad/s ($2,02 \times a$ Hz), as componentes espectrais de $g(t)$ contribuem com 95% da energia total do sinal; todas as componentes espectrais restantes (na banda de $2,02 \times a$ Hz a ∞) contribuem com apenas 5% da energia do sinal.*

Exemplo 3.18 Estimemos a largura de banda essencial de um pulso retangular $g(t) = \Pi(t/T)$ (Fig. 3.34a), para que a largura de banda essencial contenha pelo menos 99% da energia do pulso.

banda essencial contenha pelo menos 90% da energia do pulso.

Para este pulso, a energia E_g é

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} dt = T$$

E, como

$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \iff T \operatorname{sinc}(\pi f T)$$

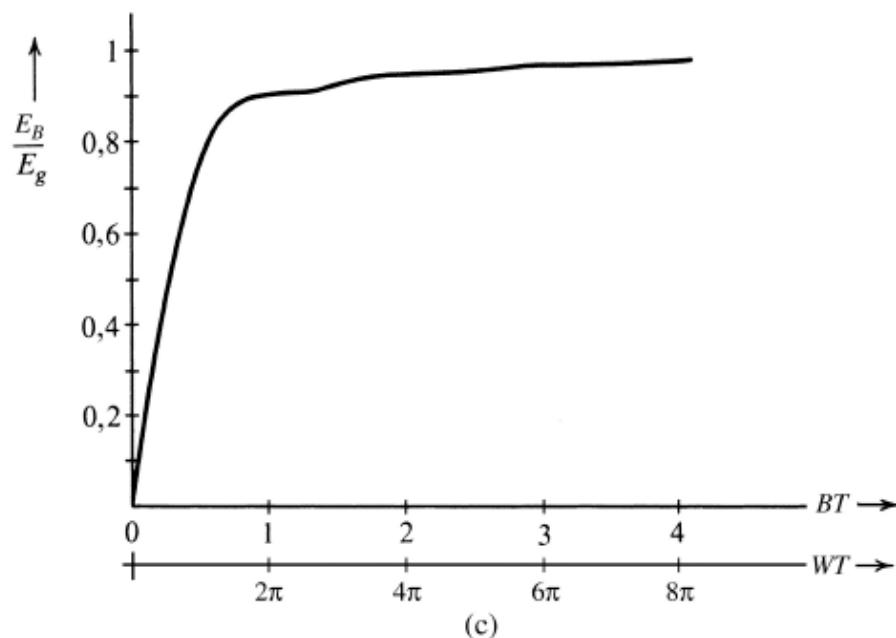
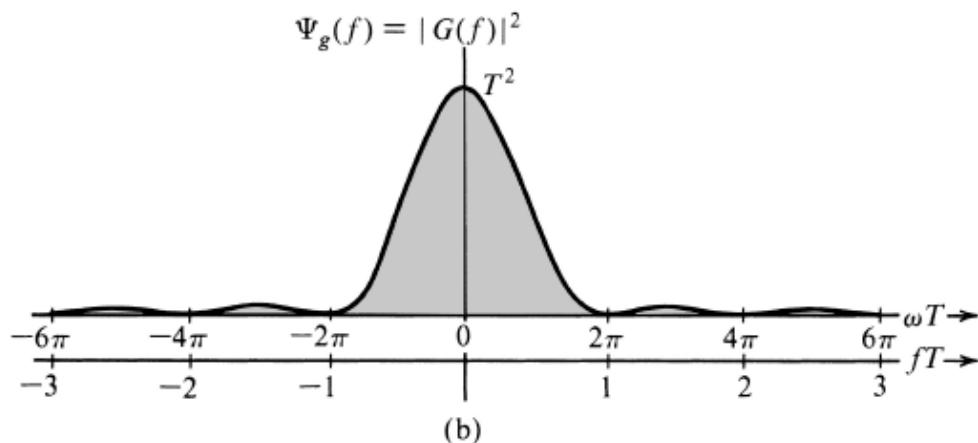
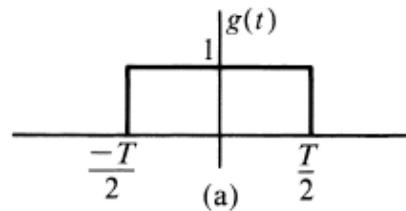


Figura 3.34 (a) Função retangular EXFGN/FGC, (b) correspondente densidade espectral de energia e (c) fração da energia na banda B (H_2).

a ESD desse pulso é dada por

$$\Psi_g(f) = |G(f)|^2 = T^2 \operatorname{sinc}^2(\pi f T)$$

A ESD é ilustrada na Fig. 3.34b como função de ωT e de fT , sendo f a frequência em hertz. A energia E_B na banda de 0 a B Hz é dada por

$$E_B = \int_{-B}^B T^2 \operatorname{sinc}^2(\pi fT) df$$

Fazendo $2\pi fT = x$ na integral, de modo que $df = dx/(2\pi T)$, obtemos

$$E_B = \frac{T}{\pi} \int_0^{2\pi BT} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

E, como $E_g = T$, temos

$$\frac{E_B}{E_g} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi BT} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

A integral no lado direito é calculada numericamente; um gráfico de E_B/E_g em função de BT é mostrado na Fig. 3.34c. Notemos que 90,28% da energia total do pulso $g(t)$ estão contidos na banda $B = 1/T$ Hz. Portanto, segundo o critério de 90%, a largura de banda de um pulso retangular de largura T segundos é $1/T$ Hz.

3.7.4 Energia de Sinais Modulados

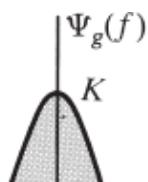
Vimos que a modulação desloca o espectro de sinal $G(f)$ para a esquerda e a direita de f_0 . A seguir, mostraremos que algo semelhante ocorre com a ESD do sinal modulado.

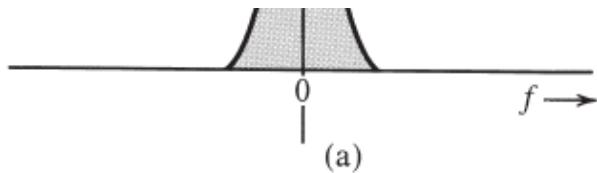
Seja $g(t)$ um sinal em banda base, limitado a B Hz. O sinal modulado em amplitude $\varphi(t)$ é dado por

$$\varphi(t) = g(t) \cos 2\pi f_0 t$$

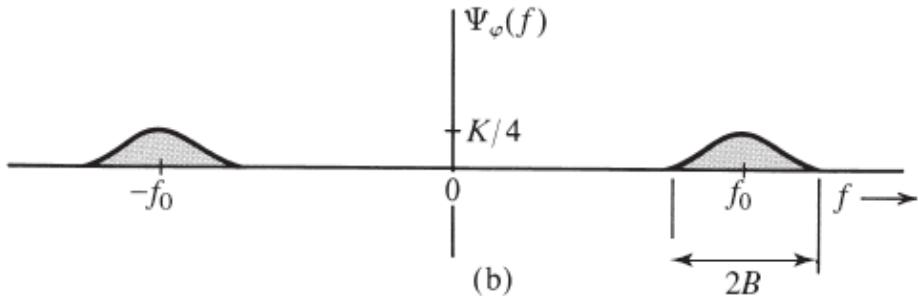
O espectro (transformada de Fourier) de $\varphi(t)$ é calculado como

$$\Phi(f) = \frac{1}{2}[G(f + f_0) + G(f - f_0)]$$





(a)



(b)

Figura 3.35 Densidades espetrais de energia de sinais modulante e modulado.

A ESD do sinal modulado $\varphi(t)$ é $|\Phi(f)|^2$, ou seja,

$$\Psi_\varphi(f) = \frac{1}{4} |G(f + f_0) + G(f - f_0)|^2$$

Se $f_0 \geq B$, $G(f + f_0)$ e $G(f - f_0)$ não se sobrepõem (ver Fig. 3.35), e

$$\begin{aligned} \Psi_\varphi(f) &= \frac{1}{4} \left[|G(f + f_0)|^2 + |G(f - f_0)|^2 \right] \\ &= \frac{1}{4} \Psi_g(f + f_0) + \frac{1}{4} \Psi_g(f - f_0) \end{aligned} \quad (3.70)$$

As ESDs de $g(t)$ e do sinal modulado $\varphi(t)$ são mostradas na Fig. 3.35. Fica claro que a modulação desloca a ESD de $g(t)$ de $\pm f_0$. Observemos que a área sob $\Psi_\varphi(f)$ é a metade da área sob $\Psi_g(f)$. Como a energia de um sinal é proporcional à área sob a curva da ESD, concluímos que a energia de $\varphi(t)$ é a metade da energia de $g(t)$, ou seja,

$$E_\varphi = \frac{1}{2} E_g \quad f_0 \geq B \quad (3.71)$$

Pode parecer surpreendente que um sinal $\varphi(t)$, que aparenta ser tão energético em comparação com $g(t)$, tenha apenas a metade da energia de $g(t)$. As aparências enganam, como sempre. A energia de um sinal é proporcional ao quadrado de sua amplitude; amplitudes mais altas contribuem mais para a energia. O sinal $g(t)$ mantém altos níveis de amplitude na maior parte do tempo. O sinal modulado $\varphi(t)$, por sua vez, devido ao fator $\cos 2\pi f_0 t$, cai ao nível de amplitude zero muitas vezes, o que reduz sua energia.

3.7.5 Função de Autocorrelação Temporal e Densidade Espectral de Energia

No Capítulo 2, mostramos que uma boa medida de comparação de dois sinais $g(t)$ e $z(t)$ é a função de correlação cruzada $\psi_{gz}(\tau)$, definida na Eq. (2.46). Também definimos a correlação de um sinal $g(t)$ com ele próprio [função de autocorrelação $\psi_g(\tau)$] na Eq. (2.47). Para um sinal $g(t)$ de valores reais, a função de autocorrelação $\psi_g(\tau)$ é dada por*

$$\psi_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t + \tau) dt \quad (3.72a)$$

Fazendo $x = t + \tau$ na Eq. (3.72a), obtemos

$$\psi_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)g(x - \tau) dx$$

Nesta equação, x é uma simples variável de integração e pode ser substituída por t . Assim,

$$\psi_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t \pm \tau) dt \quad (3.72b)$$

Isso mostra que, para um sinal $g(t)$ de valores reais, a função de autocorrelação é uma função par de τ , ou seja,

$$\psi_g(\tau) = \psi_g(-\tau) \quad (3.72c)$$

Existe, na verdade, uma relação muito importante entre a função de autocorrelação de um sinal e sua ESD. Especificamente, a função de autocorrelação de um sinal $g(t)$ e sua ESD $\Psi_g(f)$ formam um par de transformadas de Fourier:

$$\psi_g(\tau) \iff \Psi_g(f) \quad (3.73a)$$

Logo,

$$\Psi_g(f) = \mathcal{F}\{\psi_g(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_g(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \quad (3.73b)$$

$$\psi_g(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{\Psi_g(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_g(f) e^{-j2\pi f \tau} df \quad (3.73c)$$

Notemos que a transformada de Fourier da Eq. (3.73a) é calculada em relação a τ , e não em relação a t .

A seguir, mostraremos que a ESD $\Psi_g(f) = |G(f)|^2$ é a transformada de Fourier da função de autocorrelação $\psi_g(\tau)$. Embora esse resultado seja mostrado aqui para sinais de valores reais, também é válido para sinais de valores complexos. Devemos notar que a função de autocorrelação é uma função de τ e não de t . Portanto, sua transformada de Fourier é $\int \psi_g(\tau) e^{-j2\pi ft} d\tau$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\psi_g(\tau)] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f \tau} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t + \tau) dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau + t) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \right] dt \end{aligned}$$

A integral interna é a transformada de Fourier de $g(\tau + t)$, que é $g(\tau)$ deslocado para a esquerda por t . Portanto, a transformada é dada por $G(f)e^{j2\pi ft}$, segundo a propriedade de translação no tempo, Eq. (3.32a). Portanto,

$$\mathcal{F}[\psi_g(\tau)] = G(f) \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{j2\pi ft} dt = G(f)G(-f) = |G(f)|^2$$

Isto completa a prova de que

$$\psi_g(\tau) \iff \Psi_g(f) = |G(f)|^2 \quad (3.74)$$

Uma análise cuidadosa da operação de correlação revela uma relação próxima com convolução. De fato, a função de autocorrelação $\psi_g(\tau)$ é a convolução de $g(\tau)$ com $g(-\tau)$, pois

$$g(\tau) * g(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)g[-(\tau - x)] dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)g(x - \tau) dx = \psi_g(\tau)$$

Aplicação da propriedade de convolução no domínio do tempo [Eq. (3.44)] a esse resultado produz a Eq. (3.74).

ESD da Entrada e da Saída

Sejam $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente, o sinal de entrada e o correspondente sinal de saída de um sistema linear invariante no tempo (LIT); logo,

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

Portanto,

$$|Y(f)|^2 = |H(f)|^2 |X(f)|^2$$

Isso mostra que

$$\Psi_y(f) = |H(f)|^2 \Psi_x(f) \quad (3.75)$$

Assim, a ESD do sinal de saída é $|H(f)|^2$ vezes a ESD do sinal de entrada.

3.8 POTÊNCIA E DENSIDADE ESPECTRAL DE POTÊNCIA DE SINAIS

Para um sinal de potência, uma medida razoável de seu tamanho é a potência [definida na Eq. (2.4)], tomada como o valor médio da energia do sinal em um intervalo de tempo infinito. A potência P_g de um sinal de valores reais $g(t)$ é dada por

$$P_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g^2(t) dt \quad (3.76)$$

A potência do sinal e os conceitos a ela associados podem ser entendidos com facilidade se definirmos um sinal truncado $g_T(t)$ como

$$g_T(t) = \begin{cases} g(t) & |t| \leq T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases}$$

O sinal truncado é ilustrado na Fig. 3.36. A integral no lado direito da Eq. (3.76) corresponde a E_{g_T} , energia do sinal truncado $g_T(t)$. Assim,

$$P_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{g_T}}{T} \quad (3.77)$$

Esta equação descreve a relação entre potência e energia de sinais não periódicos. O entendimento desta relação auxiliará a compreensão de todos os conceitos associados a potência e energia, assim como o relacionamento entre eles. Como a potência de um sinal é o valor médio de sua energia, todos os conceitos e resultados relativos à energia de um sinal também se aplicam à potência do sinal, bastando que modifiquemos os conceitos de forma adequada, tomando seus valores médios.

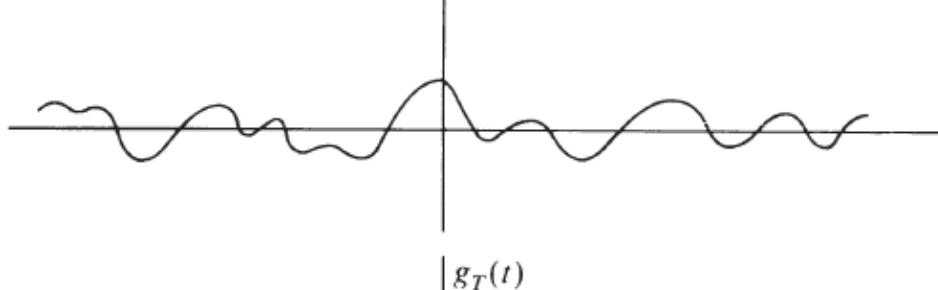
3.8.1 Densidade Espectral de Potência (PSD)

Caso um sinal $g(t)$ seja um sinal de potência, sua potência é finita, e o sinal truncado $g_T(t)$ é um sinal de energia desde que T permaneça finito. Se $g_T(t) \Leftrightarrow G_T(f)$, do teorema de Parseval, temos

$$E_{g_T} = \int_{-\infty}^{\infty} g_T^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G_T(f)|^2 df$$

Portanto, P_g , a potência de $g(t)$, fica dada por

$$P_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{g_T}}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |G_T(f)|^2 df \right] \quad (3.78)$$



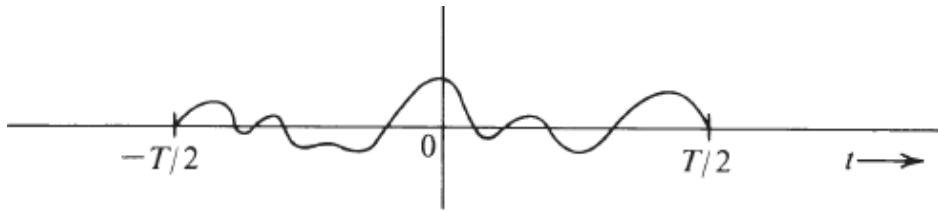


Figura 3.36 Processo de limite para o cálculo da PSD.

À medida que T aumenta, a duração de $g_T(t)$ aumenta e sua energia E_{gT} aumenta proporcionalmente. Isso significa que $|G_T(f)|^2$ também aumenta com T e, quando $T \rightarrow \infty$, $|G_T(f)|^2$ tende a ∞ . Contudo, $|G_T(f)|^2$ deve tender a ∞ com a mesma taxa que T , pois, para um sinal de potência, o lado direito da Eq. (3.78) deve convergir. Essa convergência permite que troquemos a ordem do processo de limite e da integração na Eq. (3.78) e obtenhamos

$$P_g = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|G_T(f)|^2}{T} df \quad (3.79)$$

Definimos a **densidade espectral de potência (PSD — power spectral density)** $S_g(\omega)$ como

$$S_g(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|G_T(f)|^2}{T} \quad (3.80)$$

Logo,*

$$P_g = \int_{-\infty}^{\infty} S_g(f) df \quad (3.81a)$$

$$= 2 \int_0^{\infty} S_g(f) df \quad (3.81b)$$

Esse resultado reproduz o obtido [Eq. (3.69a)] para sinais de energia. A potência é a área sob a curva da PSD. Vale notar que a PSD é o valor médio temporal da ESD de $g_T(t)$ [Eq. (3.80)].

A PSD, assim como a ESD, é uma função par de f , com valores reais e positivos. Se $g(t)$ for um sinal de tensão, a unidade da PSD será volt quadrado por hertz.

3.8.2 Função de Autocorrelação Temporal de Sinais de Potência

A função de autocorrelação (temporal) $R_g(\tau)$ de um sinal de potência de valores reais $g(t)$ é definida como**

$$R_g(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t)g(t - \tau) dt \quad (3.82a)$$

Podemos lançar mão do mesmo argumento que usamos no caso de sinais de energia [Eqs. (3.72b) e (3.72c)] para mostrar que $R_g(\tau)$ é uma função par de τ . Isso significa que, para $g(t)$ de valores reais,

$$R_g(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t)g(t + \tau) dt \quad (3.82b)$$

e

$$R_g(\tau) = R_g(-\tau) \quad (3.83)$$

Para sinais de energia, a ESD $\Psi_g(f)$ é a transformada de Fourier da função de autocorrelação $\psi_g(\tau)$. Um resultado similar se aplica a sinais de potência. Agora, mostraremos que, para um sinal de potência, a PSD $S_g(f)$ é a transformada de Fourier da função de autocorrelação $R_g(\tau)$. A partir da Eq. (3.82b) e da Fig. 3.36,

$$\mathcal{R}_g(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} g_T(t)g_T(t + \tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\psi_{g_T}(\tau)}{T} \quad (3.84)$$

Recordemos, do teorema de Wiener-Khintchine, que $\psi_{gt}(\tau) \Leftrightarrow |G_T(f)|^2$. Logo, a transformada de Fourier da equação anterior nos fornece

$$\mathcal{R}_g(\tau) \iff \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|G_T(f)|^2}{T} = S_g(f) \quad (3.85)$$

Embora tenhamos provado esses resultados para um sinal $g(t)$ de valores reais, as Eqs. (3.80), (3.81a), (3.81b) e (3.85) são igualmente válidas para sinais $g(t)$ de valores complexos.

O conceito e relações associados à potência de sinal reproduzem os associados à energia de sinal. Isso fica claro na Tabela 3.3.

Tabela 3.3

$$\begin{aligned} E_g &= \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt & P_g &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{gT}}{T} \\ \psi_g(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t+\tau) dt & \mathcal{R}_g(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t)g(t+\tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\psi_{gT}(\tau)}{T} \\ \Psi_g(f) &= |G(f)|^2 & S_g(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|G_T(f)|^2}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Psi_{gT}(f)}{T} \\ \psi_g(\tau) \iff \Psi_g(f) & & \mathcal{R}_g(\tau) \iff S_g(f) & \\ E_g &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_g(f) df & P_g &= \int_{-\infty}^{\infty} S_g(f) df \end{aligned}$$

A Potência de um Sinal É Seu Valor Quadrático Médio

Um exame da Eq. (3.76) revela que a potência do sinal é o valor médio temporal de seu valor quadrático. Em outras palavras, P_g é o valor quadrático médio de $g(t)$. Contudo, devemos recordar que este é um valor médio temporal, e não estatístico (a ser discutido em capítulos posteriores). Valores médios estatísticos são denotados por uma barra. Assim, o valor quadrático médio (estatístico) de uma variável x é denotado por \bar{x}^2 . Usaremos uma barra ondulada para denotar o valor médio temporal e distingui-lo do valor médio estatístico. Assim, o valor quadrático médio temporal de $g(t)$ será denotado por $\overline{\overline{g^2(t)}}$. Valores médios temporais são, em geral, representados como $(\bar{g^2}(t))$. No entanto, usaremos a notação da barra ondulada, pois é a associação de valor médio com barra ondulada é mais simples que com colchetes. Com essa notação, vemos que

$$P_g = \overbrace{g^2(t)}^{\sim\sim\sim} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g^2(t) dt \quad (3.86a)$$

O valor rms de um sinal é a raiz quadrada de seu valor quadrático médio; logo

$$[g(t)]_{\text{rms}} = \sqrt{P_g} \quad (3.86b)$$

Da Eq. (3.82), fica claro que, para um sinal $g(t)$ de valores reais, a função de autocorrelação temporal $R_g(\tau)$ é o valor médio temporal de $g(t)g(t \pm \tau)$. Assim,

$$\mathcal{R}_g(\tau) = \overbrace{g(t)g(t \pm \tau)}^{\sim} \quad (3.87)$$

Esta discussão também explica por que dizemos “autocorrelação temporal” em vez de “autocorrelação”. O objetivo é distinguir, de forma clara, essa função de autocorrelação (um valor médio temporal) da função de autocorrelação estatística (um valor médio estatístico) a ser introduzida no Capítulo 9, no contexto de teoria da probabilidade e processos aleatórios.

Interpretação da Densidade Espectral de Potência

Como a PSD é o valor médio temporal da ESD de $g(t)$, podemos seguir a mesma argumentação usada na interpretação da ESD. Podemos mostrar prontamente que a PSD $S_g(f)$ representa a potência por unidade de largura de banda (em hertz) das componentes espetrais na frequência f . A contribuição das componentes de frequência na banda de f_1 a f_2 à potência é dada por

$$\Delta P_g = 2 \int_{f_1}^{f_2} S_g(f) df \quad (3.88)$$

Método de Autocorrelação: Uma Ferramenta Poderosa

Para um sinal $g(t)$, a ESD, que é igual a $|G(f)|^2$, também pode ser obtida da transformada de Fourier da correspondente função de autocorrelação. Se a transformada de Fourier de um sinal basta para o cálculo da ESD, por que complicar desnecessariamente nossa vida com a função de autocorrelação? A razão para seguir esse caminho alternativo é estabelecer a base para tratar de sinais de potência e sinais aleatórios. A transformada de Fourier de um sinal de potência, em geral, não existe. Além disso, o luxo de poder calcular a transformada de Fourier só é possível para sinais determinísticos, que podem ser descritos como funções do tempo. Sinais de mensagem aleatórios que ocorrem em problemas de comunicação (por exemplo, uma sequência aleatória de pulsos binários) não podem ser descritos como funções do tempo, o que torna impossível o cálculo de suas transformadas de Fourier. Contudo, a função de autocorrelação de sinais deste tipo pode ser calculada a partir da correspondente informação estatística. Isso permite que determinemos a PSD (informação espectral) desses sinais. De fato, podemos considerar a abordagem da autocorrelação como a generalização de técnicas de Fourier a sinais de potência e sinais aleatórios. O exemplo a seguir, de um trem aleatório de pulsos binários, ilustra, de forma dramática, o poder dessa técnica.

Exemplo 3.19 A Fig. 3.37a mostra um trem aleatório de pulsos binários $g(t)$. A largura do pulso é $T_b/2$ e um dígito binário é transmitido a cada T_b segundos. Um **1** binário é transmitido por um pulso positivo, e um **0** binário, por um pulso negativo. Os dois símbolos têm a mesma probabilidade de ocorrência, que é aleatória. Determinemos a função de autocorrelação, a PSD e a largura de banda essencial desse sinal.

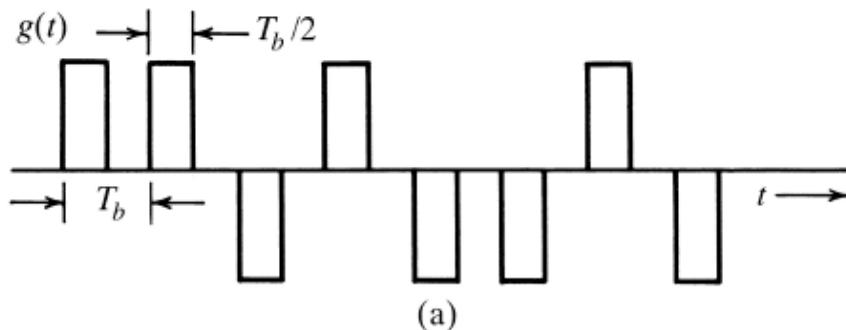
Não podemos descrever esse sinal como uma função do tempo, pois sua forma de onda, por ser aleatória, não é conhecida. Podemos, no entanto, conhecer seu comportamento por meio de valores médios (informação estatística). A função de autocorrelação, por ser um parâmetro de valor médio (temporal) do sinal, é determinada da informação estatística (média) fornecida. Temos [Eq. (3.82a)]

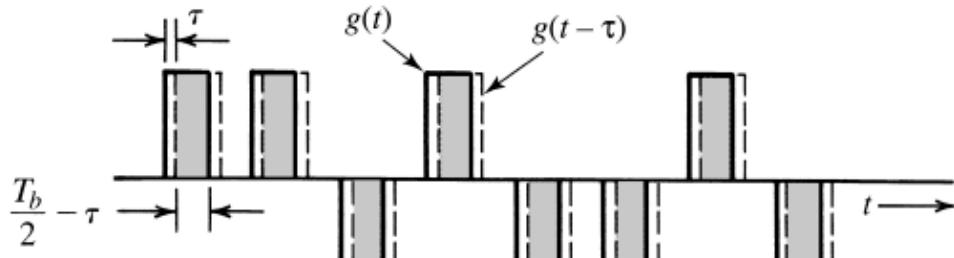
$$\mathcal{R}_g(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t)g(t - \tau) dt$$

Na Fig. 3.37b, as linhas sólidas representam $g(t)$ e as tracejadas, $g(t - \tau)$, que é $g(t)$ atrasado por τ . Para obter o valor integral no lado direito da equação anterior, multiplicamos $g(t)$ por $g(t - \tau)$, calculamos a área sob a curva do produto $g(t)g(t - \tau)$ e dividimos o resultado pela largura T do intervalo. Admitamos que há N bits (pulsos) neste intervalo T , de modo que $T = NT_b$ e $N \rightarrow \infty$ quando $T \rightarrow \infty$. Assim,

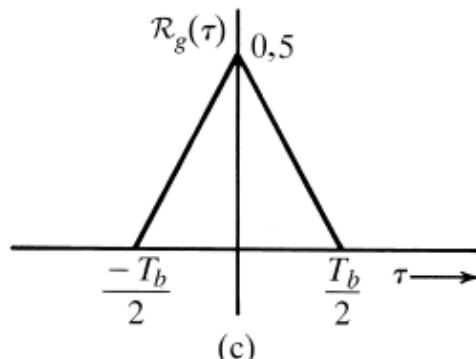
$$\mathcal{R}_g(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT_b} \int_{-NT_b/2}^{NT_b/2} g(t)g(t - \tau) dt$$

Consideremos, primeiro, o caso $\tau < T_b/2$, em que todos os pulsos de $g(t)$ e de $g(t - \tau)$ se sobrepõem (região hachurada). A área sob a curva do produto $g(t)g(t - \tau)$ é, para cada pulso, $T_b/2 - \tau$. Como há N pulsos no intervalo em que o valor médio é calculado, a área total sob $g(t)g(t - \tau)$ é $N(T_b/2 - \tau)$, e

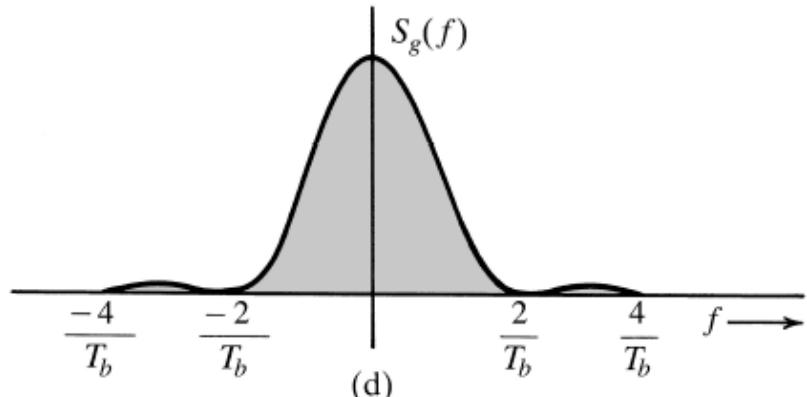




(b)



(c)



(d)

Figura 3.37 Função de autocorrelação e função de densidade espectral de potência de um trem aleatório de pulsos binários.

$$\begin{aligned} R_g(\tau) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT_b} \left[N \left(\frac{T_b}{2} - \tau \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2\tau}{T_b} \right) \quad \tau < \frac{T_b}{2} \end{aligned}$$

Como $R_g(\tau)$ é uma função par de τ ,

$$R_g(\tau) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2|\tau|}{T_b} \right) \quad |\tau| < \frac{T_b}{2} \quad (3.89a)$$

como mostrado na Fig. 3.37c.

À medida que aumentamos o valor de τ além de $T_b/2$, pulsos adjacentes passarão a se sobrepor. Dois pulsos que se

sobrepõem têm igual probabilidade de serem de mesma polaridade ou de polaridades opostas. Portanto, no intervalo de sobreposição, seu produto tem igual probabilidade de ser 1 ou -1. Na média, metade dos produtos de pulsos será 1 (combinações positivopositivo ou negativo-negativo de pulsos), e metade será -1 (combinações positivo-negativo ou negativo-positivo de pulsos). Em consequência, a área sob a curva de $g(t)g(t-\tau)$ será zero, se a média for calculada em um intervalo de tempo de duração infinita ($T \rightarrow \infty$), e

$$\mathcal{R}_g(\tau) = 0 \quad |\tau| > \frac{T_b}{2} \quad (3.89b)$$

As duas partes da Eq. (3.89) mostram que, neste caso, a função de autocorrelação é a função triangular $\frac{1}{2} \Delta(t/T_b)$, obtida no Exemplo 3.13 (ou na Tabela 3.1, par 19), pois

$$S_g(f) = \frac{T_b}{4} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi f T_b}{2}\right) \quad (3.90)$$

A PSD é o quadrado da função sinc, como mostrado na Fig. 3.37d. Do resultado no Exemplo 3.18, concluímos que 90,28% da área deste espectro estão contidos na banda de 0 a $4\pi/T_b$ rad/s ou de 0 a $2/T_b$ Hz. Assim, a largura de banda essencial pode ser tomada como $2/T_b$ Hz (presumindo um critério de 90%). Este exemplo ilustra, de forma dramática, como a função de autocorrelação pode ser usada para obter informação espectral de um sinal (aleatório) quando métodos convencionais de obtenção da transformada de Fourier não forem aplicáveis.

3.8.3 Densidades Espectrais de Potência de Entrada e de Saída

Como a PSD é o valor médio temporal da ESD, a relação entre as PSDs dos sinais de entrada e de saída de um sistema linear invariante no tempo (LIT) é similar à existente entre as correspondentes ESDs. Segundo os argumentos usados no caso da ESD [Eq. (3.75)], podemos mostrar que, se $g(t)$ e $y(t)$ forem os sinais de entrada e de saída, respectivamente, de um sistema LIT com função de transferência $H(f)$, então,

$$S_y(f) = |H(f)|^2 S_g(f) \quad (3.91)$$

Exemplo 3.20 Um sinal de ruído $n_i(t)$, com PSD $S_{n_i}(f) = K$ é aplicado à entrada de um diferenciador ideal (Fig. 3.38a). Determinemos a PSD e a potência do sinal de ruído de saída, $n_o(t)$.

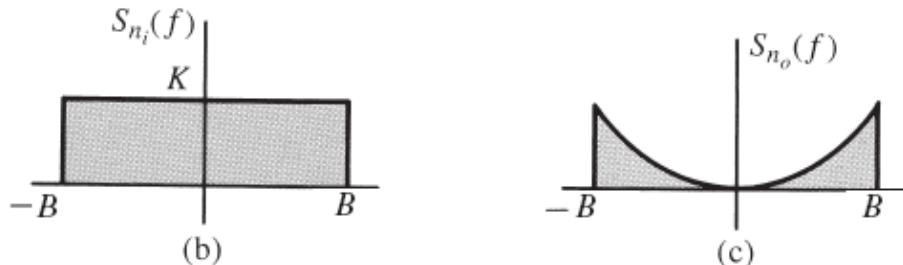
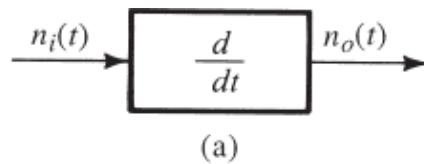


Figura 3.38 Densidades especiais dos sinais de entrada e de saída de um diferenciador ideal.

A função de transferência de um diferenciador ideal é $H(f) = j2\pi f$. Se o ruído na saída do diferenciador for $n_o(t)$, da Eq. (3.91), temos

$$S_{n_o}(f) = |H(f)|^2 S_{n_i}(f) = |j2\pi f|^2 K$$

A PSD do sinal de saída $S_{n_o}(f)$ é parabólica, como indicado na Fig. 3.38c. A potência de ruído de saída N_o é a área sob a curva da PSD de saída. Logo,

$$N_o = \int_{-B}^B K(2\pi f)^2 df = 2K \int_0^B (2\pi f)^2 df = \frac{8\pi^2 B^3 K}{3}$$

3.8.4 PSD de Sinais Modulados

Seguindo o mesmo argumento empregado na dedução das Eqs. (3.70) e (3.71) para sinais de energia, podemos, no caso de sinais de potência, obter resultados similares se calcularmos valores médios. Podemos mostrar que, para um sinal de potência $g(t)$, se

$$\varphi(t) = g(t) \cos 2\pi f_0 t$$

a PSD $S_\varphi(f)$ de um sinal modulado $\varphi(t)$ é dada por

$$S_\varphi(f) = \frac{1}{4} [S_g(f + f_0) + S_g(f - f_0)] \quad (3.92)$$

Detalhes da dedução desse resultado são dados na Seção 7.8. Assim, a modulação desloca a PSD de $g(t)$ por $\pm f_0$. A potência de $\varphi(t)$ é a metade da potência de $g(t)$, ou seja,

$$P_\varphi = \frac{1}{2} P_g \quad f_0 \geq B \quad (3.93)$$

3.9 CÁLCULO NUMÉRICO DA TRANSFORMADA DE FOURIER: A DFT

Para efetuar o cálculo numérico de $G(f)$, a transformada de Fourier de $g(t)$, devemos utilizar amostras de $g(t)$. Além disso, conseguimos calcular $G(f)$ apenas em número discreto de freqüências. Assim, podemos calcular somente amostras de $G(f)$. Por isso, a seguir, estabeleceremos algumas relações entre amostras de $g(t)$ e de $G(f)$.

Em cálculos numéricos, os dados devem ser finitos. Isso significa que o número de amostras de $g(t)$ e de $G(f)$ deve ser finito. Em outras palavras, devemos lidar com sinais limitados no tempo. Se um sinal não for limitado no tempo, é necessário truncá-lo para

que tenha duração finita. O mesmo se aplica a $G(f)$. Consideremos, inicialmente, um sinal $g(t)$ de duração τ segundo e início em $t = 0$, como mostrado na Fig. 3.39a. Contudo, por motivos que se tornarão claros mais adiante, consideremos que a duração de $g(t)$ seja T_0 , com $T_0 \geq \tau$, de modo que $g(t) = 0$ no intervalo $\tau < t \leq T_0$, como mostrado na Fig. 3.39a. Obviamente, isso em nada afeta o cálculo de $G(f)$. Tomemos amostras de $g(t)$ a intervalos uniformes de T_s segundos, o que produz um total de N_0 amostras, com

$$N_0 = \frac{T_0}{T_s} \quad (3.94)$$

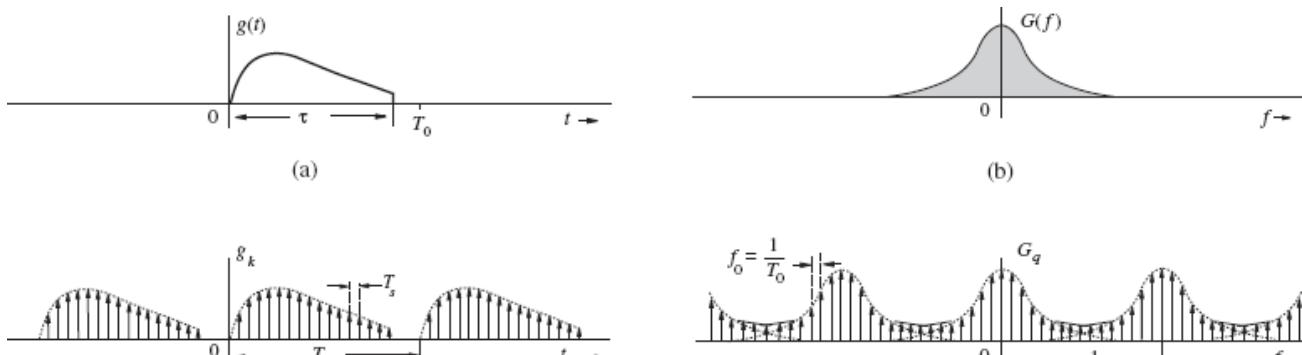




Figura 3.39 Relação entre amostras de $g(t)$ e de $G(f)$.

Mas,*

$$\begin{aligned} G(f) &= \int_0^{T_0} g(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \lim_{T_s \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{N_0-1} g(kT_s) e^{-j2\pi fkT_s} T_s \end{aligned} \quad (3.95)$$

Tomemos amostras de $G(f)$ a intervalos uniformes de largura f_0 . Seja G_q a q -ésima amostra, ou seja, $G_q = G(qf_0)$; com isso, a partir da Eq. (3.95), temos

$$\begin{aligned} G_q &= \sum_{k=0}^{N_0-1} T_s g(kT_s) e^{-jq2\pi f_0 T_s k} \\ &= \sum_{k=0}^{N_0-1} g_k e^{-jq\Omega_0 k} \end{aligned} \quad (3.96)$$

em que

$$g_k = T_s g(kT_s), \quad G_q = G(qf_0), \quad \Omega_0 = 2\pi f_0 T_s \quad (3.97)$$

Portanto, a Eq. (3.96) relaciona as mostras de $g(t)$ às amostras de $G(f)$. Nesta dedução, supomos que $T_s \rightarrow 0$. Na prática, não é possível fazer $T_s \rightarrow 0$, o que aumentaria a quantidade de dados demasiadamente. Devemos nos esforçar para fazer T_s tão pequeno quanto possível, do ponto de vista prático. Isso resultará em algum erro computacional.

Cabe uma interessante observação à Eq. (3.96). As amostras de G_q são periódicas, com período $2\pi/\Omega_0$. Isto resulta da Eq. (3.96), que mostra que $G_{(q+2\pi\Omega_0)} = G_q$. Assim, apenas $2\pi/\Omega_0$ amostras G_q podem ser independentes. A Eq. (3.96) mostra que G_q é determinada por N_0 valores independentes de g_k . Portanto, para que exista uma única inversa para a Eq. (3.96), deve haver somente N_0 amostras independentes de G_q . Isso significa que

$$N_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{2\pi}{2\pi f_0 T_s} = \frac{2\pi N_0}{2\pi f_0 T_0} \quad (3.98)$$

Em outras palavras, temos

$$2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad \text{e} \quad f_0 = \frac{1}{T_0} \quad (3.99)$$

Portanto, o intervalo de amostragem espectral f_0 Hz pode ser ajustado por meio de uma escolha adequada de T_0 : maior T_0 , menor f_0 . Com isto, fica clara a motivação para escolher $T_0 \geq \tau$. Quando T_0 é maior que τ , temos várias amostras g_k com valor zero no intervalo entre τ e T_0 . Assim, ao aumentar o número de amostras g_k com valor zero, reduzimos f_0 [amostras de $G(f)$ mais próximasumas das outras], produzindo mais detalhes de $G(f)$. Esse processo de redução de f_0 com a inclusão de amostras g_k com valor zero é conhecido como **preenchimento com zero**. Adicionalmente, para um dado intervalo de amostragem T_0 , um maior valor de T_0 implica maior N_0 . Ou seja, com a escolha de um valor suficientemente grande para N_0 , podemos obter amostras de $G(f)$ tão próximas quanto possível.

Para determinar a relação inversa, multiplicamos os dois lados da Eq. (3.96) por $e^{jm\Omega_0 k}$ e efetuamos a soma em q :

$$\sum_{q=0}^{N_0-1} G_q e^{-jq\Omega_0 k} = \sum_{q=0}^{N_0-1} \left[\sum_{m=0}^{N_0-1} g_m e^{-jm\Omega_0 k} \right] e^{-jq\Omega_0 k}$$

$$\sum_{q=0}^{N_0-1} G_q e^{j m \Omega_0 q} = \sum_{q=0}^{N_0-1} \left[\sum_{k=0}^{N_0-1} g_k e^{-j k \Omega_0 q} \right] e^{j m \Omega_0 q}$$

Trocando a ordem das somas no lado direito, obtemos

$$\sum_{q=0}^{N_0-1} G_q e^{j m \Omega_0 q} = \sum_{k=0}^{N_0-1} g_k \left[\sum_{q=0}^{N_0-1} e^{j(m-k)\Omega_0 q} \right] \quad (3.100)$$

Para calcular o valor da soma interna no lado direito, mostraremos que

$$\sum_{k=0}^{N_0-1} e^{j n \Omega_0 k} = \begin{cases} N_0 & n = 0, \pm N_0, \pm 2N_0, \dots \\ 0 & \text{para todos os outros} \\ & \text{valores de } n \end{cases} \quad (3.101)$$

Para mostrar isto, recordemos que $\Omega_0 N_0 = 2\pi$ e $e^{jn\Omega_0 k} = 1$ para $n = 0, \pm N_0, \pm 2N_0, \dots$, de modo que

$$\sum_{k=0}^{N_0-1} e^{j n \Omega_0 k} = \sum_{k=0}^{N_0-1} 1 = N_0 \quad n = 0, \pm N_0, \pm 2N_0, \dots$$

Para calcular a soma para outros valores de n , notemos que a soma no lado esquerdo da Eq. (3.101) é uma série geométrica de razão $\alpha = e^{jn\Omega_0}$. Portanto, a soma parcial dos primeiros N_0 termos é

$$\sum_{k=0}^{N_0-1} e^{j n \Omega_0 k} = \frac{e^{j n \Omega_0 N_0} - 1}{e^{j n \Omega_0} - 1} = 0,$$

com

$$e^{j n \Omega_0 N_0} = e^{j 2\pi n} = 1$$

Isso prova a Eq. (3.101).

Assim, a soma interna no lado direito da Eq. (3.100) é igual a zero para $k \neq m$, e igual a N_0 para $k = m$. Portanto, a soma externa terá somente um termo não zero quando $k = m$, e este termo será $N_0 g_m = N_0 g_m$. Logo,

$$g_m = \frac{1}{N_0} \sum_{q=0}^{N_0-1} G_q e^{j m \Omega_0 q} \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \quad (3.102)$$

A Eq. (3.102) revela um fato interessante: que $g_{(m+N_0)} = g_m$. Isso significa que a sequência g_k também é periódica, com período N_0 (correspondendo à duração temporal $N_0 T_s = T_0$ segundos). Adicionalmente, G_q também é periódica, com período N_0 , o que corresponde ao intervalo de frequência $N_0 f_0 = (T_0/T_s)(T_0) = 1/T_s = f_s$ hertz. Notemos que $1/T_s$ é o número de amostras de $g(t)$ por segundo. Assim, $1/T_s = f_s$ é a frequência de amostragem (em hertz) de $g(t)$. Em outras palavras, G_q é periódica, com período N_0 e se repete a cada f_s Hz. Resumamos os resultados obtidos até aqui. Provamos o par de transformadas de Fourier discretas (DFT – discrete Fourier transform).

$$G_q = \sum_{k=0}^{N_0-1} g_k e^{-j q \Omega_0 k} \quad (3.103a)$$

$$g_k = \frac{1}{N_0} \sum_{q=0}^{N_0-1} G_q e^{j k \Omega_0 q} \quad (3.103b)$$

com

$$\begin{aligned}
g_k &= T_s g(kT_s) & G_q &= G(qf_0) \\
2\pi f_0 &= \frac{2\pi}{T_0} & 2\pi f_s &= \frac{2\pi}{T_s} \\
N_0 &= \frac{T_0}{T_s} = \frac{f_s}{f_0} & \Omega_0 &= 2\pi f_0 T_s = \frac{2\pi}{N_0}
\end{aligned} \tag{3.104}$$

As duas sequências g_k e G_q são periódicas, com período N_0 . Isso implica que g_k se repete com um período de T_0 segundos e G_q , com um período de $f_s = 1/T_s$ Hz (a frequência de amostragem). O intervalo de amostragem de g_k é de T_s segundos e o intervalo de amostragem de G_q é de $f_0 = 1/T_0$ Hz, como indicado na Fig. 3.39c e d. Por conveniência, usamos a variável de frequência f (em hertz) em vez de ω (em radianos por segundo).

Presumimos que $g(t)$ é limitado a τ segundos. Isso torna $G(f)$ não limitado em frequência.* Em consequência, a repetição do espectro G_q , como mostrado na Fig. 3.39d, causará sobreposição de componentes espetrais, resultando em erro. A natureza deste erro, conhecido como **erro de mascaramento (aliasing error)**, é explicado em detalhes no Capítulo 6. O espectro de G_q se repete a cada f_s Hz. O erro de mascaramento é reduzido com o aumento de f_s , a frequência de repetição (ver Fig. 3.39d). Em resumo, o cálculo de G_q por DFT tem erro de mascaramento quando $g(t)$ é limitado no tempo. Este erro pode ser feito tão pequeno quanto desejado, com o aumento da frequência de amostragem $f_s = 1/T_s$ (ou com a redução do intervalo de amostragem T_s). O erro de mascaramento é um resultado direto da não satisfação, na Eq. (3.95), da exigência $T_s \rightarrow 0$.

Quando $g(t)$ não é limitado no tempo, precisamos truncá-lo para torná-lo limitado no tempo. Isso provocará erros adicionais em G_q . Esse erro pode ser reduzido tanto quanto desejado, por meio do aumento adequado do intervalo de truncamento T_0 .**

No cálculo da transformada de Fourier inversa [por meio da DFT inversa na Eq. (3.103b)], encontramos problemas semelhantes. Se $G(f)$ for limitado em frequência, $g(t)$ não será limitado no tempo e haverá sobreposição das repetições periódicas das amostras g_k (mascaramento no domínio do tempo). Podemos reduzir o erro de mascaramento se aumentarmos T_0 , o período de g_k (em segundos). Isso equivale a reduzir o intervalo $f_0 = 1/T_0$ entre as frequências em que amostras de $G(f)$ são colhidas. Caso $G(f)$ não seja limitado em frequência, será necessário truncá-lo. Isto causará erro adicional no cálculo de g_k . Com o aumento da largura de banda de truncamento, podemos reduzir esse erro. Na prática, funções (janelas) graduais são usadas para o truncamento⁵, para reduzir a severidade de alguns problemas provocados por funções de truncamento abrupto (também conhecidas como janela retangular).

Como G_q é periódica, com período N_0 , precisamos determinar os valores de G_q em qualquer período. É comum, para a determinação de G_q , considerar o período no intervalo $(0, N_0 - 1)$, em vez de no intervalo $(-N_0/2, N_0/2 - 1)$. Observação idêntica se aplica a g_k .

Escolha dos Valores de T_s , T_0 e N_0

No cálculo de DFT, primeiro, precisamos selecionar valores adequados para N_0 , T_s e T_0 . Para isso, devemos antes especificar o valor de B , a largura de banda essencial de $g(t)$. Da Fig. 3.39d, fica claro que a sobreposição espectral (mascaramento) ocorre na frequência $f_s/2$ Hz. Essa sobreposição espectral também pode ser interpretada como se o espectro além de $f_s/2$ sofresse uma dobragem em $f_s/2$. Por conseguinte, essa frequência também recebe a denominação **frequência de dobramento**. Se a frequência de dobramento for escolhida de modo que o espectro $G(f)$ além da mesma seja desprezível, o mascaramento (ou sobreposição espectral) não será relevante. Portanto, a frequência de dobramento deve ser pelo menos igual à maior frequência significativa, ou seja, a frequência além da qual $G(f)$ é desprezível. Chamaremos essa frequência **largura de banda essencial B** (em hertz). Caso $g(t)$ seja limitado em frequência, sua largura de banda será igual à largura de banda essencial. Assim,

$$\frac{f_s}{2} \geq B \quad \text{Hz} \tag{3.105a}$$

Dado que o intervalo de amostragem $T_s = 1/f_s$ [Eq. (3.104)], temos

$$T_s \leq \frac{1}{2B} \tag{3.105b}$$

Uma vez determinado o valor de B , podemos escolher o valor de T_s segundo a Eq. (3.105b). Como

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \tag{3.106}$$

em que f_0 é a **resolução de frequência** [separação entre amostras de $G(f)$], caso f_0 seja dado, podemos selecionar o valor de T_0 segundo a Eq. (3.106). Conhecidos os valores de T_0 e T_s , determinamos o de N_0 de

$$N_0 = \frac{T_0}{T_s} \quad (3.107)$$

Em geral, se o sinal for limitado no tempo, $G(f)$ não será limitado em frequência e haverá mascaramento no cálculo de G_q . Para reduzir o efeito de mascaramento, precisamos aumentar a frequência de dobramento, ou seja, devemos reduzir o valor de T_s (intervalo de amostragem) tanto quanto praticamente possível. Se o sinal for limitado em frequência, $g(t)$ não será limitado no tempo, de modo que haverá mascaramento (sobreposição) no cálculo de g_k . Para reduzir este mascaramento, precisamos aumentar o valor de T_0 , o período de g_k . Isso implica a redução do intervalo f_0 (em hertz) de amostragem em frequência. Em qualquer dos casos (redução de T_s , no caso de sinal limitado no tempo, ou aumento de T_0 , no caso de sinal limitado em frequência), para maior precisão, precisamos aumentar o número de amostras N_0 , pois $N_0 = T_0/T_s$. Existem, ainda, sinais que não são limitados nem no tempo nem em frequência. Para estes sinais, devemos reduzir T_s e aumentar T_0 .

Pontos de Descontinuidade

Caso $g(t)$ tenha, em um ponto de amostragem, uma descontinuidade do tipo degrau, o valor da amostra deve ser tomado como a média dos valores nos dois lados da descontinuidade, pois a representação de Fourier em um ponto de descontinuidade converge para o valor médio.

Uso de Algoritmo de FFT no Cálculo de DFT

O número de contas necessário para o cálculo de uma DFT foi drasticamente reduzido em um algoritmo desenvolvido por Tukey e Cooley, em 1965.⁶ Esse algoritmo, conhecido como **transformada de Fourier rápida*** (FFT — *fast Fourier transform*), reduz o número de contas de algo da ordem de N^2 para $N_0 \log N_0$. Para calcular o valor de uma amostra G_r pela Eq. (3.103a), precisamos de N_0 multiplicações complexas e $N_0 - 1$ adições complexas. Para calcular N_0 valores de G_r ($r = 0, 1, \dots, N_0 - 1$), precisamos de um total de N^2 multiplicações complexas e $N_0(N_0 - 1)$ adições complexas. Para grandes valores de N_0 , isto pode exigir um tempo proibitivamente grande, mesmo com o uso de computador de alta velocidade. O algoritmo de FFT é um salva-vidas em aplicações de processamento de sinais. O algoritmo de FFT fica simplificado se escolhermos N_0 como uma potência de 2, embora isto não seja, em geral, necessário. Detalhes da FFT podem ser encontrados em qualquer livro sobre processamento de sinais (por exemplo, Ref. 3).

3.10 EXERCÍCIOS COM O MATLAB

Cálculo de Transformadas de Fourier

Nesta seção de exercícios baseados em computador, consideremos dois exemplos para ilustrar o uso de DFT no cálculo da transformada de Fourier. Usaremos MATLAB para calcular a DFT com o algoritmo de FFT. No primeiro exemplo, o sinal é $g(t) = e^{-2t}u(t)$, com início em $t = 0$, e no segundo, $g(t) = \Pi(t)$, com início em $t = -\frac{1}{2}$.

EXEMPLO COMPUTACIONAL C3.1

Empreguemos a DFT (implementada pelo algoritmo de FFT) para calcular a transformada de Fourier de $e^{-2t}u(t)$ e, a seguir, tracemos o gráfico do resultante espectro de Fourier.

Primeiro, devemos determinar T_s e T_0 . A transformada de Fourier de $e^{-2t}u(t)$ é $1/(2\pi f + 2)$. Esse sinal passa-faixa não é limitado em frequência. Tomemos sua largura de banda essencial como a frequência em que $|G(f)|$ se torna igual a 1% do valor de pico, que ocorre em $f = 0$. Observemos que

$$|G(f)| = \frac{1}{\sqrt{(2\pi f)^2 + 4}} \approx \frac{1}{2\pi f} \quad 2\pi f \gg 2$$

O pico de $|G(f)|$ ocorre em $f = 0$, em que $|G(0)| = 0,5$. Portanto, a largura de banda essencial B corresponde a $f = B$, com

$$|G(f)| \approx \frac{1}{2\pi B} = 0,5 \times 0,01 \Rightarrow B = \frac{100}{\pi} \text{ Hz}$$

e, da Eq. (3.105b),

$$T_s \leq \frac{1}{2B} = 0,005\pi = 0,0157$$

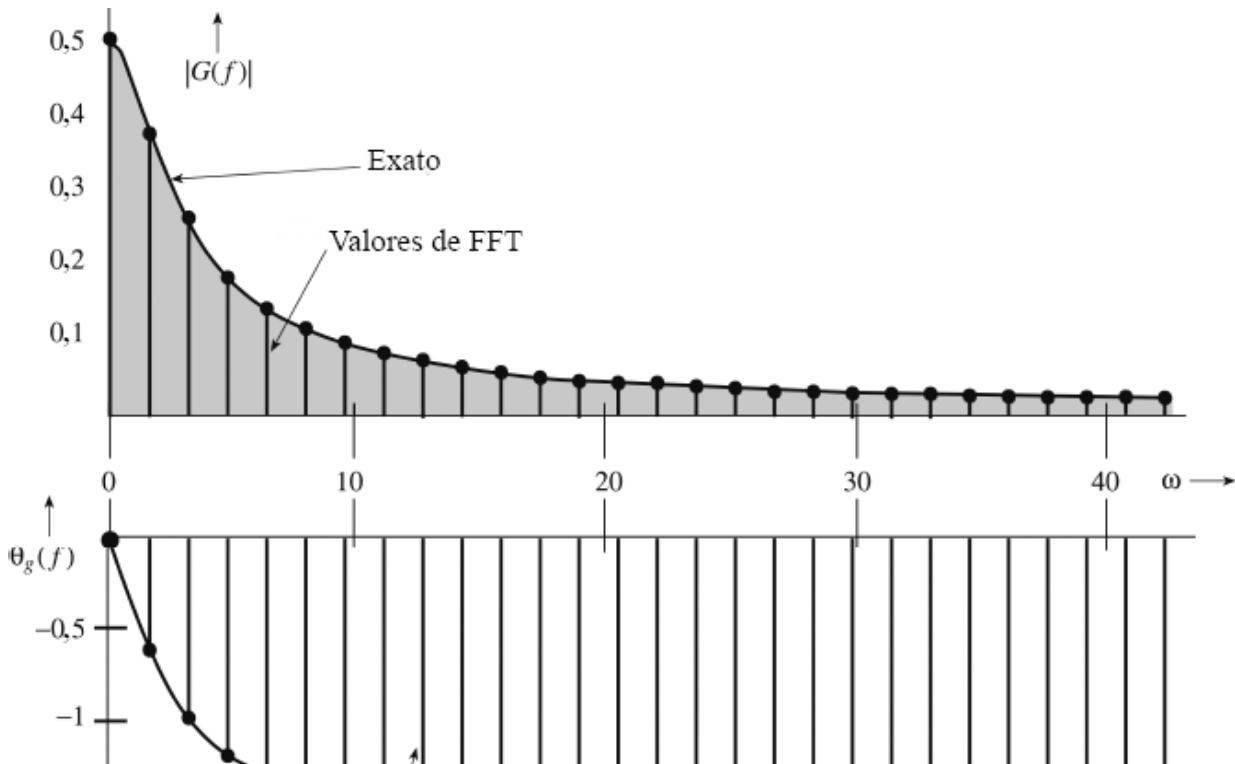
Arredondemos esse valor para $T_s = 0,015625$ segundo, de modo que tenhamos 64 amostras por segundo. Agora, devemos determinar T_0 . O sinal não é limitado no tempo. Precisamos truncá-lo em T_0 , tal que $g(T_0) \ll 1$. Escolhamos $T_0 = 4$ (oito constantes de tempo do sinal), o que resulta em $N_0 = T_0/T_s = 256$, que é uma potência de 2. Vale ressaltar que há muita flexibilidade na determinação de T_s e T_0 , dependendo da precisão desejada e da capacidade computacional disponível. Poderíamos ter escolhido $T_0 = 8$ e $T_s = 1/32$, o que também resultaria em $N_0 = 256$, mas implicaria um erro de mascaramento ligeiramente maior.

Como o sinal tem uma descontinuidade do tipo degrau em $t = 0$, o valor da primeira amostra (em $t = 0$) é 0,5, média dos valores nos dois lados da descontinuidade. O programa de MATLAB que implementa a DFT com o algoritmo de FFT é o seguinte:

```
Ts=1/64; T0=4; N0=T0/Ts;
t=0:Ts:T0*(N0-1); t=t';
g=Ts*exp(-2*t);
g(1)=Ts*0.5;
G=fft(g);
[Gp,Gm]=cart2pol(real(G), imag(G));
k=0:N0-1; k=k';
w=2*pi*k/T0;
subplot(211), stem(w(1:32), Gm(1:32));
subplot(212), stem(w(1:32), Gp(1:32))
```

Como G_q tem período N_0 , $G_q = G_{(q+256)}$, de modo que $G_{256} = G_0$. Portanto, basta traçar o gráfico de G_q no intervalo $q = 0$ a $q = 255$ (e não 256). Além disso, devido à periodicidade, $G_{-q} = G_{(-q+256)}$, ou seja, os valores de G_q no intervalo $q = -127$ a $q = -1$ são idênticos aos valores de G_q no intervalo $q = 129$ a $q = 255$. Logo, $G_{-127} = G_{129}$, $G_{-126} = G_{130}$, ..., $G_{-1} = G_{255}$. Adicionalmente, devido à propriedade de simetria conjugada da transformada de Fourier, $G_{-q} = G^*_{q}$; assim, $G_{129} = G^*_{127}$, $G_{130} = G^*_{126}$, ..., $G_{255} = G^*_{1}$. Consequentemente, para sinais de valores reais, não é necessário marcar no gráfico os valores de G_q com q maior que $N_0/2$ (128, neste caso), pois são os complexos conjugados dos valores de G_q com $q = 0$ a 128.

O gráfico do espectro de Fourier na Fig. 3.40 mostra amplitude e fase das amostras de $G(f)$ tomadas em intervalos de $1/T_0 = 1/4$ Hz, ou $\omega_0 = 1,5708$ rad/s. Na Fig. 3.40, mostramos apenas os primeiros 28 pontos (em vez dos 128 pontos), para evitar o acúmulo excessivo de dados no gráfico.



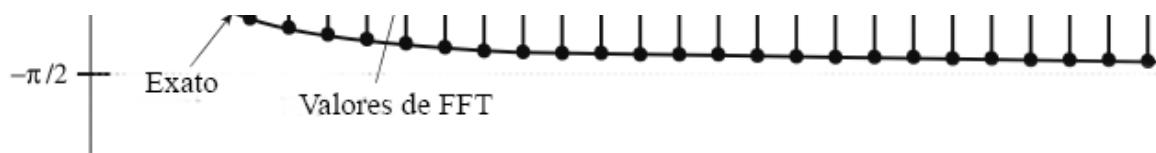


Figura 3.40 Transformada de Fourier discreta de um sinal exponencial $e^{-2t}u(t)$. O eixo horizontal é ω (em radianos por segundo).

Neste exemplo, dispúnhamos da expressão analítica de $G(f)$, o que nos permitiu fazer escolhas INTELIGENTES para B (ou frequência de amostragem f_s). Na prática, em geral, não conhecemos $G(f)$. Na verdade, isso é exatamente o que desejamos calcular. Nesses casos, para determinar B ou f_s , devemos lançar mão de evidências circunstanciais. Devemos, sucessivamente, reduzir o valor de T_s e calcular a transformada até que o resultado satisfaça o desejado número de algarismos significativos.

A seguir, calcularemos a transformada de Fourier de $g(t) = 8 \Pi(t)$.

EXEMPLO COMPUTACIONAL C3.2

Empreguemos a DFT (implementada pelo algoritmo de FFT) para calcular a transformada de Fourier de $8 \Pi(t)$ e tracemos o gráfico do resultante espectro de Fourier.

Essa função retangular e sua transformada de Fourier são mostradas na Fig. 3.41a e b. Para determinar o valor do intervalo de amostragem T_s , devemos, primeiro, definir a largura de banda essencial B . Da Fig. 3.41b, vemos que $G(f)$ decai lentamente com f . Consequentemente, a largura de banda essencial B é bastante grande. Por exemplo, em $B = 15,5$ Hz (97,39 rad/s), $G(f) = -0,1643$, o que corresponde a cerca de 2% do valor de pico, $G(0)$. Poderíamos, então, tomar a largura de banda essencial como 16 Hz. No entanto, deliberadamente, tomaremos $B = 4$ Hz, por dois motivos: (1) mostrar o efeito de mascaramento e (2) o uso de $B > 4$ implicaria enorme número de amostras, que não poderiam ser mostradas de forma adequada em uma página de livro sem perda de detalhes fundamentais. Portanto, aceitaremos a aproximação para que possamos esclarecer conceitos de DFT por meio de gráficos.

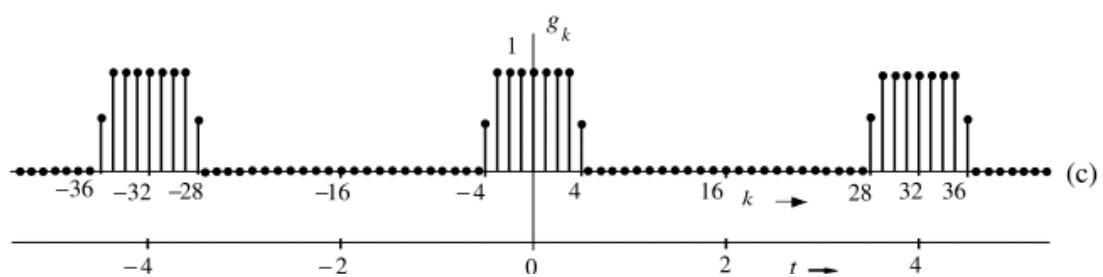
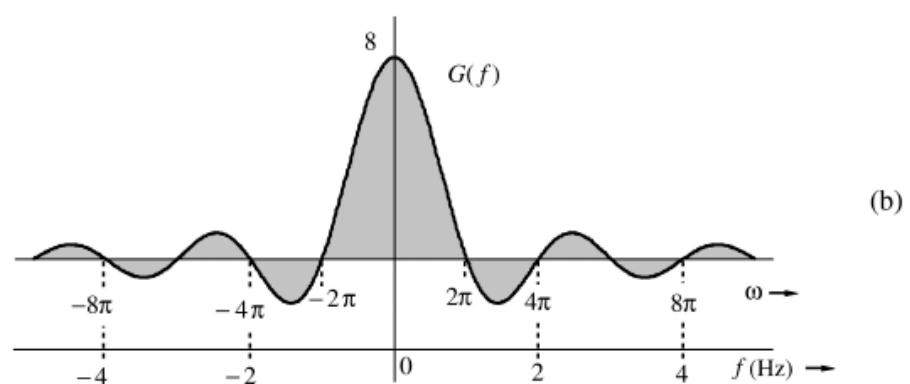
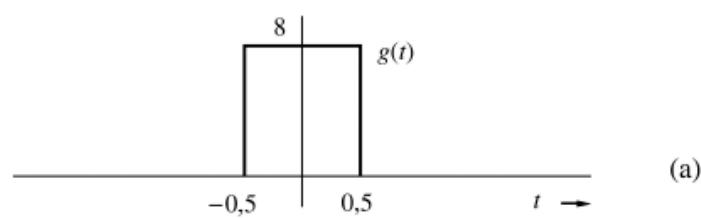
A escolha $B = 4$ resulta em um intervalo de amostragem $T_s = 1/2B = 1/8$ segundos. Examinando novamente o espectro na Fig. 3.41b, vemos que a escolha da resolução de frequência $f_0 = 1/4$ Hz é razoável, e corresponde a quatro amostras em cada lóbulo de $G(f)$. Neste caso, $T_0 = 1/f_0 = 4$ segundos, e $N_0 = T_0/T_s = 32$. A duração de $g(t)$ é de apenas 1 segundo. Devemos repetir $g(t)$ a cada 4 segundos, como indicado na Fig. 3.41c, e tomar amostras a cada 0,125 segundo. Isso nos dará 32 amostras ($N_0 = 32$). Também temos

$$g_k = T_s g(kT) \\ = \frac{1}{8} g(kT)$$

Como $g(t) = 8 \Pi(t)$, os valores de g_k são 1, 0 ou 0,5 (nos pontos de descontinuidade), como mostrado na Fig. 3.41c; nessa figura, por conveniência, g_k é mostrado como função de t e de k .

Na dedução da DFT, supomos que $g(t)$ tem início em $t = 0$ (Fig. 3.39a) e tomamos N_0 amostras no intervalo $(0, T_0)$. No caso em consideração, contudo, $g(t)$ tem início em $t = -\frac{1}{2}$. Essa dificuldade é facilmente resolvida quando observamos que a DFT obtida por este procedimento é, na verdade, a DFT de g_k repetido a cada T_0 segundos. Da Fig. 3.41c, fica claro que a repetição periódica do segmento de g_k no intervalo de -2 a 2 segundos é equivalente à repetição do segmento de g_k no intervalo de 0 a 4 segundos. Portanto, a DFT das amostras colhidas entre -2 e 2 segundos é igual à DFT das amostras colhidas entre 0 e 4 segundos. Assim, independentemente do instante em que $g(t)$ tem início, sempre podemos tomar as amostras de $g(t)$ e repeti-las periodicamente no intervalo de 0 a T_0 . No presente exemplo, os valores das 32 amostras são

$$g_k = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq 3 \quad \text{e} \quad 29 \leq k \leq 31 \\ 0 & 5 \leq k \leq 27 \\ 0,5 & k = 4,28 \end{cases}$$



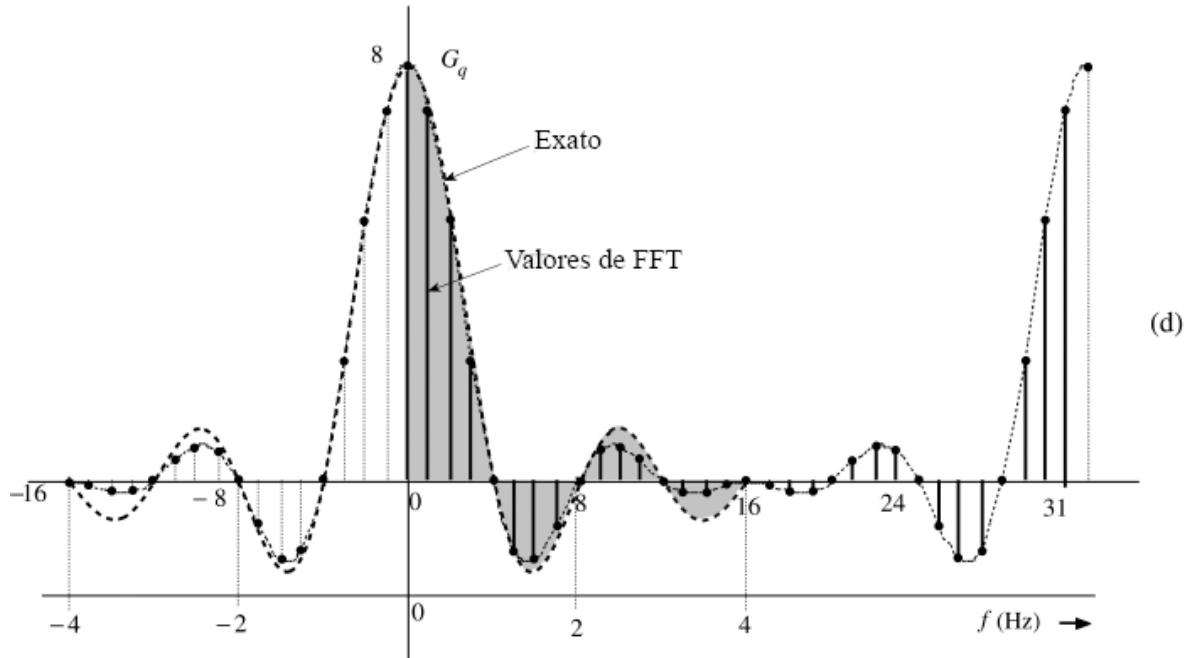


Figura 3.41 Transformada de Fourier discreta de um pulso retangular.

Vale ressaltar que a última amostra é tomada em $t = 31/8$ e não em $t = 4$, pois a repetição do sinal reinicia em $t = 4$, de modo que a amostra em $t = 4$ é igual à amostra em $t = 0$. Com $N_0 = 32$, $\Omega_0 = 2\pi/32 = \pi/16$. Logo, [ver a Eq. (3.103a)],

$$G_q = \sum_{k=0}^{31} g_k e^{-jq\frac{\pi}{16}k}$$

O programa MATLAB que usa o algoritmo de FFT para calcular a DFT é dado a seguir. Primeiro, escrevemos um programa MATLAB para gerar 32 amostras de g_k e, então, calculamos a DFT.

```
% (c32.m)
B=4;      f0=1/4;
Ts=1/(2*B); T0=1/f0;
N0=T0/Ts;
k=0:N0; k=k';
for m=1:length(k)
$ $ if k(m)>=$0 & k(m)<=$3, gk(m)=1; end
$ $ if k(m)==4 & k(m)==28 gk(m)=0.5; end
$ $ if k(m)>=$5 & k(m)<=$27, gk(m)=0; end
$ $ if k(m)>=$29 & k(m)<=$31, gk(m)=1; end
end
gk=gk';
Gr=fft(gk);
subplot(211), stem(k,gk)
subplot(212), stem(k,Gr)
```

A Fig. 3.41d mostra o gráfico de G_q .

As amostras G_q são espaçadas de $f_0 = 1/T_0$ Hz. Neste exemplo, $T_0 = 4$ segundos, de modo que a resolução de frequência f_0 é $1/4$ Hz, como desejado. A frequência de dobramento $f_s/2 = B = 4$ Hz corresponde a $q = N_0/2 = 16$. Como G_a tem período N_0 ($N_0 = 32$), os valores de G_q para q entre -16 e -1 são iguais àqueles para q entre 16 e 31 . A DFT nos fornece amostras do espectro $G(f)$.

Para facilitar a comparação, a Fig. 3.41d também mostra a curva hachurada $8 \text{ sinc}(\pi f)$, que é a transformada de Fourier de $8 \Pi(t)$. Os valores de G_q calculados pela DFT exibem erro de mascaramento, o que fica claro quando comparamos os

dois gráficos. O erro em G_2 é da ordem de apenas 1,5%. No entanto, o erro de mascaramento aumenta rapidamente com r . Por exemplo, o erro em G_6 é de cerca de 12%, e o erro em G_{10} , 33%. O erro em G_{14} é de assustadores 72%. O erro percentual aumenta de forma muito rápida nas proximidades da frequência de dobramento ($r = 16$), pois $g(t)$ tem uma descontinuidade degrau, o que faz com que $G(f)$ decaia muito lentamente, como $1/f$. Assim, nas proximidades da frequência de dobramento, a cauda invertida (devido ao mascaramento) é quase igual a $G(f)$. Além disso, os valores extremos são a diferença entre os valores exato e da parte que sofreu dobraria (quase iguais aos exatos). Consequentemente, o erro percentual nas proximidades da frequência de dobramento ($r = 16$, neste exemplo) é muito alto, embora o erro absoluto seja muito pequeno. Fica claro que, para sinais com descontinuidades do tipo degrau, o erro de mascaramento nas proximidades da frequência de dobramento sempre será grande (em termos percentuais), qualquer que seja o valor escolhido para N_0 . Para garantir erro de mascaramento desprezível para qualquer valor de q , devemos assegurar que $N_0 \gg q$. Essa observação se aplica a todos os sinais com descontinuidade do tipo degrau.

Filtragem

Quando pensamos em filtragem, em geral, o fazemos em termos de uma solução orientada a hardware (ou seja, montagem de um circuito com componentes RLC e amplificadores operacionais). Contudo, a filtragem também admite uma solução orientada a software [algoritmo computacional que fornece a saída filtrada $y(t)$, para uma dada entrada $g(t)$]. Isso pode ser implementado de modo conveniente via DFT. Seja $g(t)$ o sinal a ser filtrado; então, os valores G_q , DFT de g_k , são calculados. O espectro G_q é formatado (filtrado) como desejado através da multiplicação de G_q por H_q , em que H_q são as amostras da função de transferência do filtro, $H(f)$ [$H_q = H(qf_0)$]. Por fim, calculamos a DFT inversa (ou IDFT) de $G_q H_q$ e obtemos a saída filtrada y_k [$y_k = T_s y(kT)$]. O próximo exemplo ilustra este procedimento.

EXEMPLO COMPUTACIONAL C3.3

O sinal $g(t)$ na Fig. 3.42a é aplicado a um filtro passa-baixos ideal, cuja função de transferência $H(f)$ é mostrada na Fig. 3.42b. Usemos a DFT para calcular a saída do filtro.

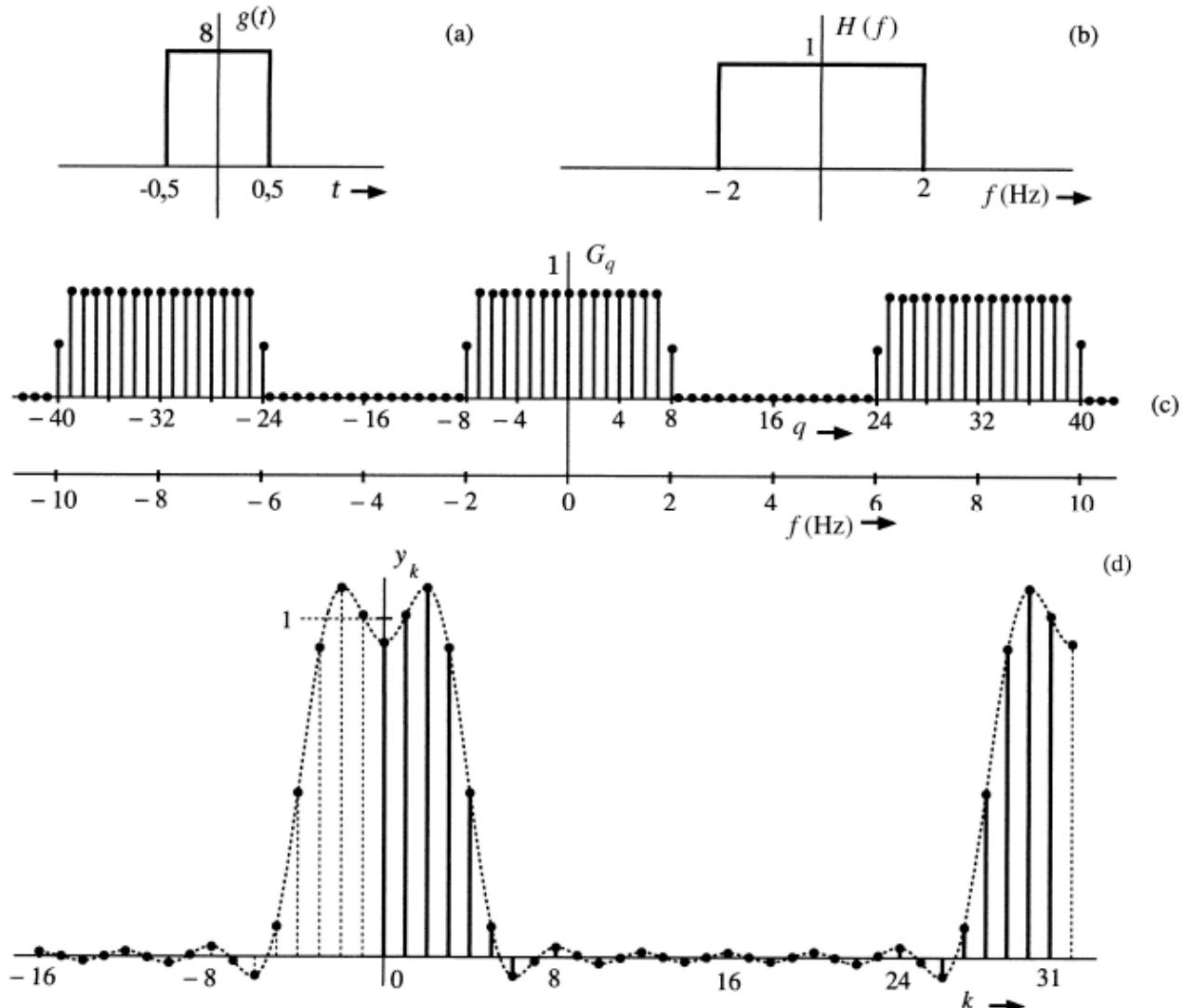


Figura 3.42 Filtragem de $g(t)$ por $H(f)$.

Já calculamos a DFT de $g(t)$ com 32 amostras (Fig. 3.41d). Agora, devemos multiplicar G_q por H_q . Para calcular H_q , recordemos que, na determinação da DFT de $g(t)$ com 32 amostras, usamos $f_0 = 0,25$ Hz. Como G_q tem período $N_0 = 32$, H_q deve ter o mesmo período e, portanto, amostras espaçadas de 0,25 Hz. Isso significa que H_q deve se repetir a cada 8 Hz ou 16π rad/s (ver Fig. 3.42c). Assim, as 32 amostras de H_q são produzidas, no intervalo $0 \leq f \leq 8$, como

$$H_q = \begin{cases} 1 & 0 \leq q \leq 7 \quad \text{e} \quad 25 \leq q \leq 31 \\ 0 & 9 \leq q \leq 23 \\ 0,5 & q = 8.24 \end{cases}$$

Multiplicamos G_q por H_q e calculamos a DFT inversa. O resultante sinal de saída é mostrado na Fig. 3.42d. A Tabela 3.4 lista valores de g_k , G_q , H_q , Y_q e y_k .

No Exemplo C.32, já calculamos a DFT de $g(t)$ com 32 amostras (G_q). O programa MATLAB do Exemplo C3.2 pode ser armazenado como um arquivo.m (por exemplo, “c32.m”). Podemos importar G_q no ambiente MATLAB via comando “c32”. A seguir, geramos 32 amostras de H_q , multiplicamos G_q por H_q e, para obter y_k , calculamos a DFT inversa. Também podemos obter y_k calculando a convolução de g_k e h_k .

```
c32;
q=0:32; q=q';
for m=1:length(q)
    if q(m) >=0 & q(m) <=7, Hq(m)=1; end
    if q(m) >=25 & q(m) <=31, Hq(m)=1; end
    if q(m) >=9 & q(m) <=23, Hq(m)=0; end
    if q(m) ==8 & q(m) ==24, Hq(m)=0.5; end
end
Hq=Hq';
Yq=Gq.*Hq;
yk=ifft(Yq);
clf,stem(k,yk)
```

Tabela 3.4

No.	g_k	G_q	H_q	$G_q H_q$	y_k
0	1	8,000	1	8,000	0,9285
1	1	7,179	1	7,179	1,009
2	1	5,027	1	5,027	1,090
3	1	2,331	1	2,331	0,9123
4	1	0,000	1	0,000	0,4847
5	0,5	-1,323	1	-1,323	0,08884
6	0	-1,497	1	-1,497	-0,05698
7	0	-0,8616	1	-0,8616	-0,01383
8	0	0,000	0,5	0,000	0,02933
9	0	0,5803	0	0,000	0,004837
10	0	0,6682	0	0,000	-0,01966
11	0	0,3778	0	0,000	-0,002156

12	0	0,000	0	0,000	0,01534
13	0	-0,2145	0	0,000	0,0009828
14	0	-0,1989	0	0,000	-0,01338
15	0	-0,06964	0	0,000	-0,0002876
16	0	0,000	0	0,000	0,01280
17	0	-0,06964	0	0,000	-0,0002876
18	0	-0,1989	0	0,000	-0,01338
19	0	-0,2145	0	0,000	0,0009828
20	0	0,000	0	0,000	0,01534
21	0	0,3778	0	0,000	-0,002156
22	0	0,6682	0	0,000	-0,01966
23	0	0,5803	0	0,000	0,004837
24	0	0,000	0,5	0,000	0,03933
25	0	-0,8616	1	-0,8616	-0,01383
26	0	-1,497	1	-1,497	-0,05698
27	0	-1,323	1	-1,323	0,08884
28	0,5	0,000	1	0,000	0,4847
29	1	2,331	1	2,331	0,9123
30	1	5,027	1	5,027	1,090
31	1	7,179	1	7,179	1,009

REFERÊNCIAS

1. R. V. Churchill and J. W. Brown, *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1978.
2. R. N. Bracewell, *Fourier Transform and Its Applications*, rev. 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1986.
3. B. P. Lathi, *Signal Processing and Linear Systems*, Oxford University Press, 2000.
4. E. A. Guillemin, *Theory of Linear Physical Systems*, Wiley, New York, 1963.
5. F. J. Harris, “On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform,” *Proc. IEEE*, vol. 66, pp. 51–83, Jan. 1978.
6. J. W. Tukey and J. Cooley, “An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series,” *Mathematics of Computation*, Vol. 19, pp. 297–301, April 1965.

EXERCÍCIOS

3.1-1 Mostre que a transformada de Fourier de $g(t)$ pode ser expressa como

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cos 2\pi ft dt - j \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \sin 2\pi ft dt$$

A seguir, mostre que, caso $g(t)$ seja uma função par de t ,

$$G(f) = 2 \int_0^{\infty} g(t) \cos 2\pi ft dt$$

e, caso $g(t)$ seja uma função ímpar de t ,

$$G(f) = -2j \int_0^{\infty} g(t) \sin 2\pi ft dt$$

Agora, mostre que:

Se $g(t)$ for:

Então $G(f)$ é:

- uma função real e par de t
- uma função real e ímpar de t
- uma função imaginária e par de t
- uma função complexa e par de t
- uma função real e ímpar de t

- uma função real e par de f
- uma função imaginária e ímpar de f
- uma função imaginária e par de f
- uma função complexa e par de f
- uma função real e ímpar de f

- 3.1-2 (a)** Mostre que, para uma função $g(t)$ de valores reais, a transformada inversa, Eq. (3.9b), pode ser expressa como

$$g(t) = 2 \int_0^{\infty} |G(f)| \cos[2\pi ft + \theta_g(2\pi f)] df$$

Essa é a forma trigonométrica da transformada de Fourier (inversa).

- (b)** Expresse a integral de Fourier (transformada de Fourier inversa) para $g(t) = e^{-at} u(t)$ na forma trigonométrica dada na parte (a).

- 3.1-3** Se $g(t) \Leftrightarrow G(f)$, mostre que $g^*(t) \Leftrightarrow G^*(-f)$.

- 3.1-4** A partir da definição (3.9a), determine a transformada de Fourier de cada sinal mostrado na Fig. E.3.1-4.

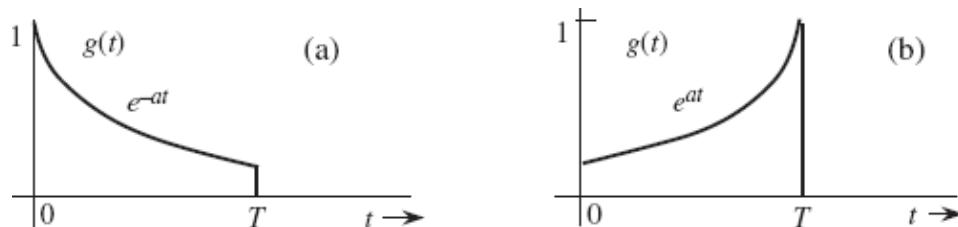


Figura E.3.1-4

- 3.1-5** A partir da definição (3.9a), determine a transformada de Fourier de cada sinal mostrado na Fig. E.3.1-5.

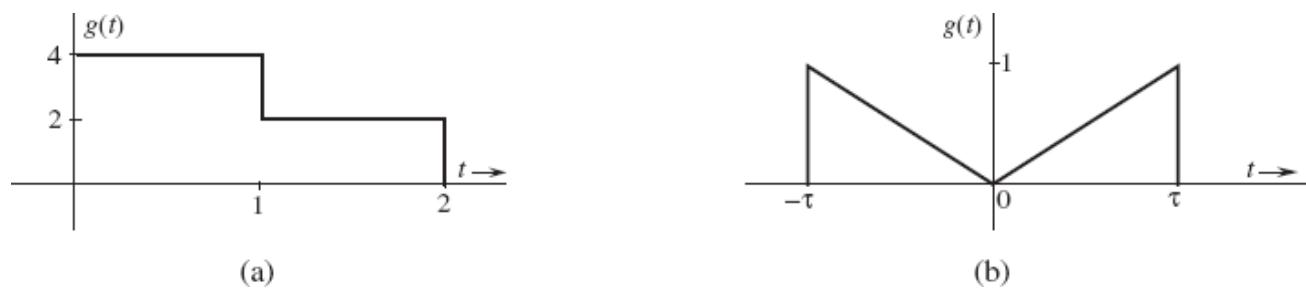


Figura E.3.1-5

- 3.1-6** A partir da definição (3.9b), determine a transformada de Fourier inversa de cada espectro mostrado na Fig. E.3.1-6.

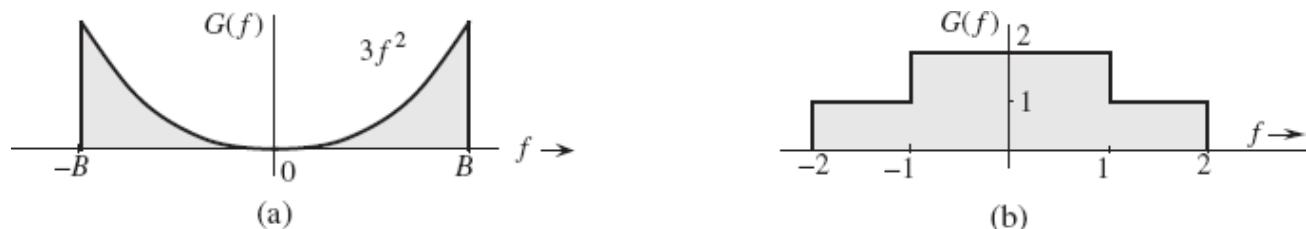


Figura E.3.1-6

- 3.1-7** A partir da definição (3.9b), determine a transformada de Fourier inversa de cada espectro mostrado na Fig.

E.3.1-7.

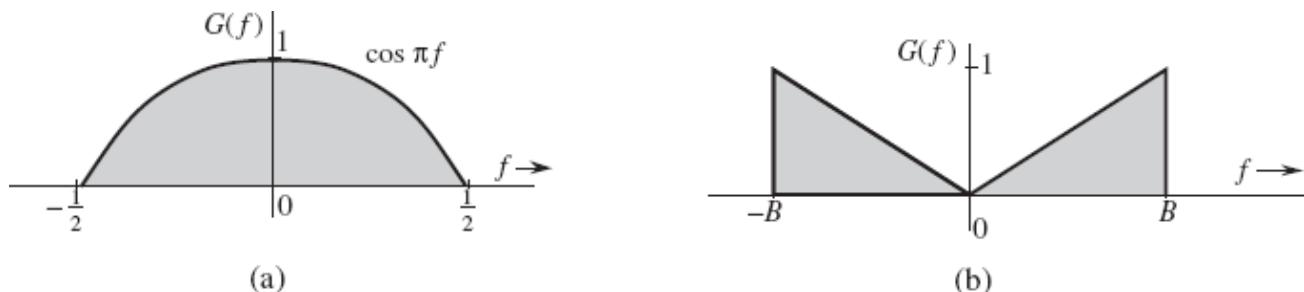


Figura E.3.1-7

- 3.1-8** Mostre que, apesar da semelhança, os dois sinais nas partes **(a)** e **(b)** da Fig. E.3.1-8 são totalmente distintos no domínio do tempo.

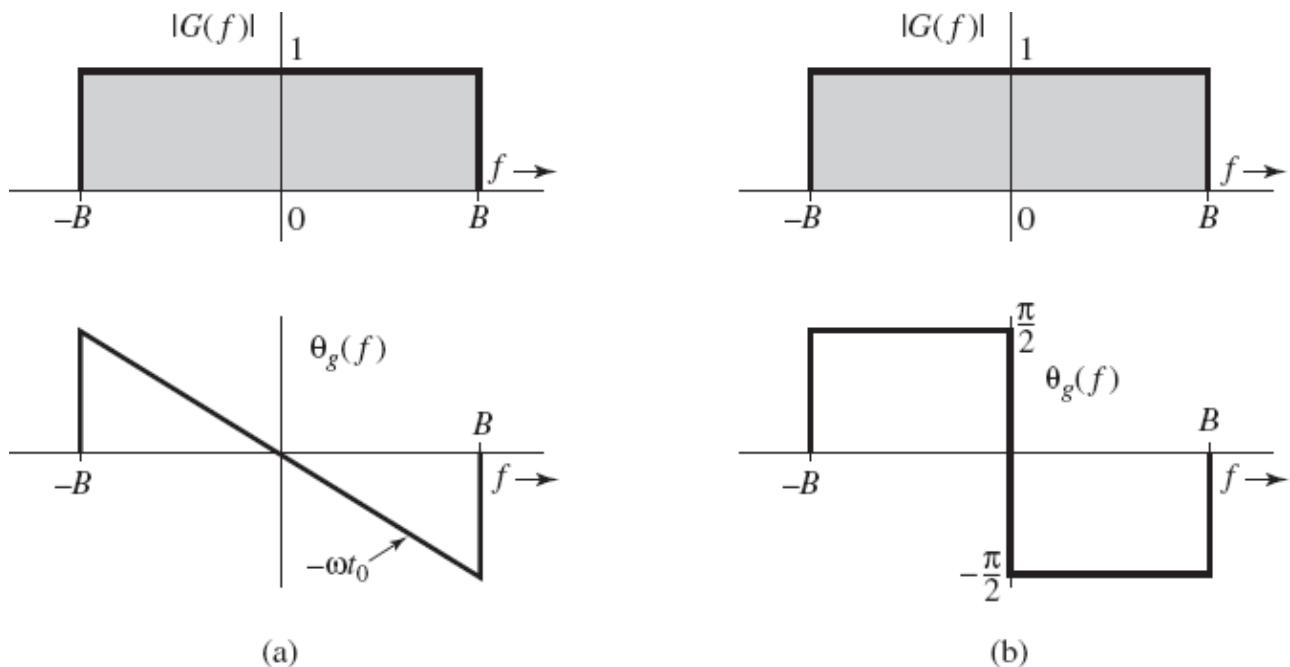


Figura E.3.1-8

Sugestão: $G(f) = |G(f)| e^{j\theta g(f)}$. Na parte (a), $G(f) = 1 \times e^{-j2\pi f t_0}$, $|f| \leq B$, enquanto na parte (b),

$$G(f) = \begin{cases} 1e^{-j\pi/2} = -j & 0 < f \leq B \\ 1e^{j\pi/2} = j & 0 > f \geq -B \end{cases}$$

- 3.2-1** Esboce gráficos das seguintes funções: **(a)** $\Pi(t/2)$; **(b)** $\Delta(3\omega/100)$; **(c)** $\Pi(t - 10/8)$; **(d)** $\text{sinc } (\pi\omega/5)$; **(e)** $\text{sinc } [(\omega - 10\pi)/5]$; **(f)** $\text{sinc } (t/5) \Pi(t/10\pi)$.

Sugestão: $g\left(\frac{x-a}{b}\right)$ é $g\left(\frac{x}{b}\right)$ deslocada para a direita por a .

- 3.2-2** Da definição (3.9a), mostre que a transformada de Fourier de $\Pi(t - 5)$ é $\text{sinc}(\pi f)e^{-j10\pi f}$.

- 3.2-3** Da definição (3.9b), mostre que a transformada de Fourier inversa de $\Pi[(2\pi f - 10)/2\pi]$ é $\text{sinc}(\pi t)e^{-10t}$.

- 3.2-4** Use os pares 7 e 12 na Tabela 3.1 e mostre que $u(t) \Leftrightarrow 0,5 \delta(f) + 1/j2\pi f$.

Sugestão: Some 1 a $\text{sgn}(t)$ e verifique o sinal resultante.

- 3.2-5** Mostre que $\cos(2\pi f_0 t + \theta) \Leftrightarrow \frac{1}{2}[\delta(f + f_0)e^{-j\theta} + \delta(f - f_0)e^{j\theta}]$.

Sugestão: Use a fórmula de Euler para expressar $\cos(2\pi f_0 t + \theta)$ em termos de exponenciais.

- 3.3-1** Aplique a propriedade de dualidade a pares adequados na Tabela 3.1 e mostre que:

- (a) $0,5[\delta(t) + (j/\pi t)] \Leftrightarrow u(f)$
- (b) $\delta(t + T) + \delta(t - T) \Leftrightarrow 2 \cos 2\pi f T$
- (c) $\delta(t + T) - \delta(t - T) \Leftrightarrow 2j \sin 2\pi f T$

Sugestão: $g(-t) \Leftrightarrow G(-f)$ e $\delta(t) = \delta(-t)$.

- 3.3-2** A transformada de Fourier do pulso triangular $g(t)$ na Fig. E.3.3-2a é dada por

$$G(f) = \frac{1}{(2\pi f)^2} (e^{j2\pi f} - j2\pi f e^{j2\pi f} - 1)$$

Use essa informação e as propriedades de translação e dilatação no domínio do tempo para determinar a transformada de Fourier de cada sinal mostrado na Fig. E.3.3-2b-f.

Sugestão: O reflexo de $g(t)$ em relação ao eixo vertical resulta no pulso $g_1(t)$ na Fig. E.3.3-2b; em consequência, $g_1(t) = g(-t)$. O pulso na Fig. E.3.3-2c pode ser expresso como $g(t - T) + g_1(t - T)$ [soma de $g(t)$ e $g_1(t)$ atrasados de T]. Os dois pulsos na Fig. 3.3-2d-e podem ser expressos como $g(t - T) + g_1(t + T)$ [soma de $g(t)$ atrasado de T e $g_1(t)$ adiantado de T], para alguma escolha adequada de T . O pulso na Fig. 3.3-2f pode ser obtido pela dilatação temporal de $g(t)$ por um fator 2, seguida de um atraso de 2 segundos [ou atraso de 1 segundo e dilatação temporal por um fator 2].

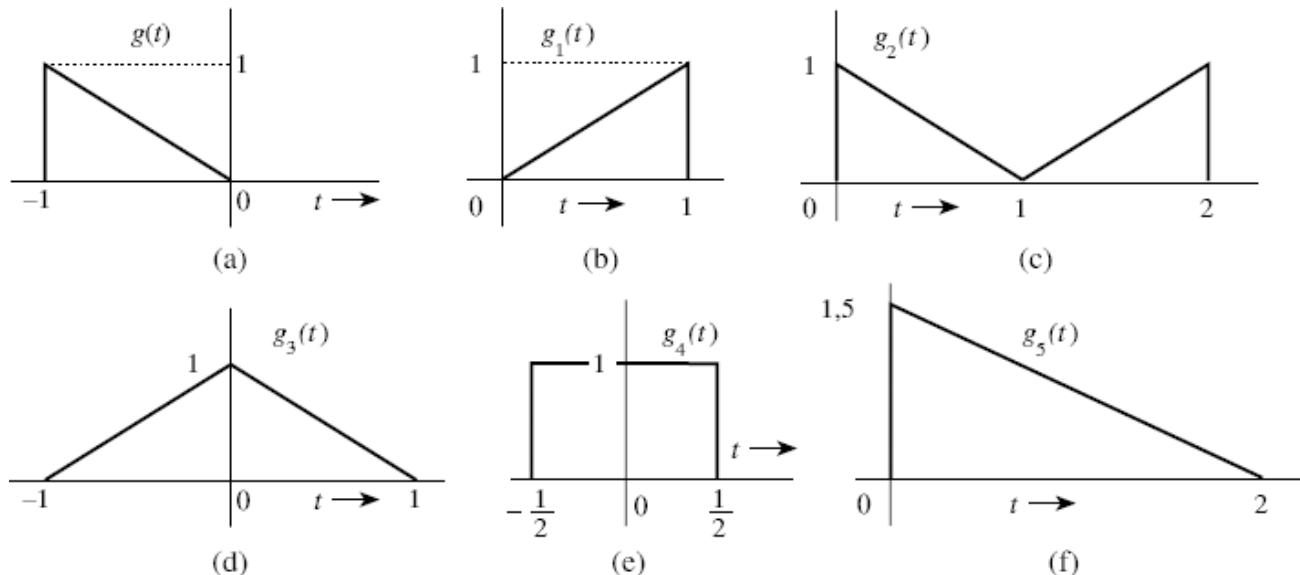
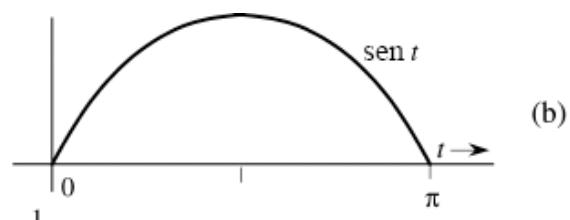
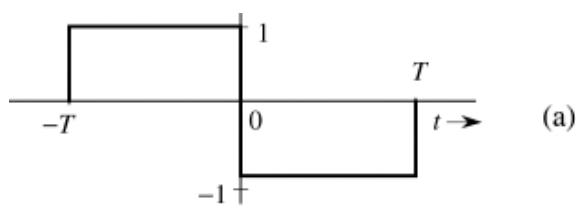
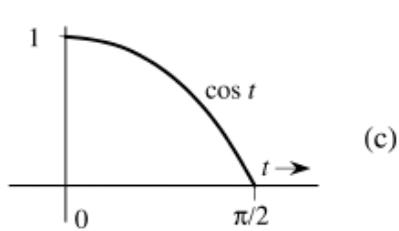


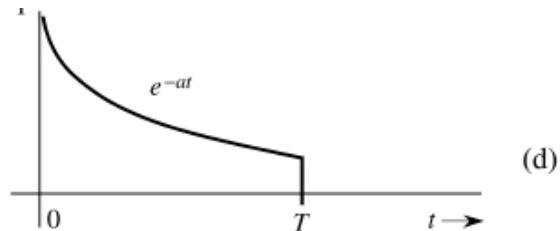
Figura E.3.3-2

- 3.3-3** Usando apenas a propriedade de translação no domínio do tempo e a Tabela 3.1, determine a transformada de Fourier de cada um dos sinais mostrados na Fig. E.3.3-3.





(c)



(d)

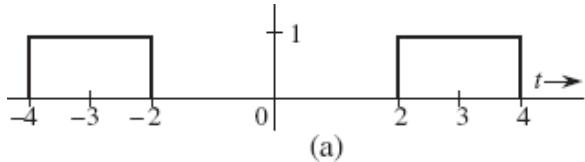
Figura E.3.3-3

Sugestão: O sinal na Fig. E.3.3-3a é a soma de dois pulsos retangulares deslocados. O sinal na Fig. E.3.3-3b é $\sin t [u(t) - u(t - \pi)] = \sin t u(t) - \sin t u(t - \pi) = \sin t u(t) + \sin(t - \pi) u(t - \pi)$. Comprove que a soma dessas duas senoides, de fato, resulta no pulso na Fig. E.3.3-3b. De modo similar, o sinal na Fig. E.3.3-3c pode ser expresso como $\cos t u(t) + \sin(t - \pi/2) u(t - \pi/2)$ (comprove isso traçando os gráficos dos sinais). O sinal na Fig. 3.3-3d é $e^{-at} [u(t) - u(t - T)] = e^{-at} u(t) - e^{-aT} e^{-a(t-T)} u(t - T)$.

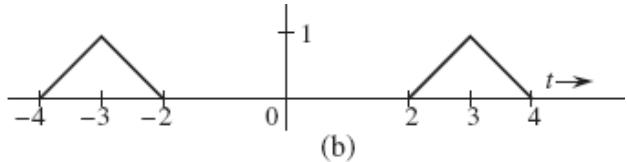
- 3.3-4** Use a propriedade de translação no domínio do tempo e mostre que, se $g(t) \Leftrightarrow G(f)$, então

$$g(t + T) + g(t - T) \Leftrightarrow 2G(f) \cos 2\pi f T$$

Isso é o dual da Eq. (3.36). Com base neste resultado e nos pares 17 e 19 na Tabela 3.1, determine a transformada de Fourier de cada um dos sinais mostrados na Fig. E.3.3-4.



(a)



(b)

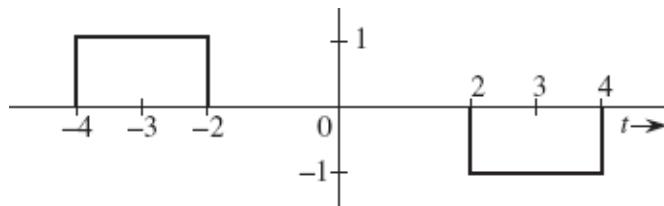
Figura 3.3-4

- 3.3-5** Comprove os seguintes resultados:

$$g(t) \sin 2\pi f_0 t \Leftrightarrow \frac{1}{2j} [G(f - f_0) - G(f + f_0)]$$

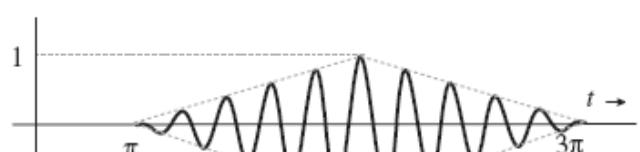
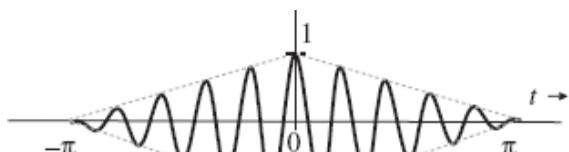
$$\frac{1}{2j} [g(t + T) - g(t - T)] \Leftrightarrow G(f) \sin 2\pi f T$$

Com base nesse resultado e na Tabela 3.1, determine a transformada de Fourier do sinal na Fig. E.3.3-5.

**Figura 3.3-5**

- 3.3-6** Os sinais na Fig. E.3.3-6 são modulados com uma portadora $\cos 10t$. Utilizando propriedades adequadas da transformada de Fourier e a Tabela 3.1, determine as transformadas de Fourier desses sinais. Esboce os gráficos dos espectros de amplitude e de fase para os sinais nas Fig. E.3.3-6a e b.

Sugestão: Essas funções podem ser expressas na forma $g(t) \cos 2\pi f_0 t$.



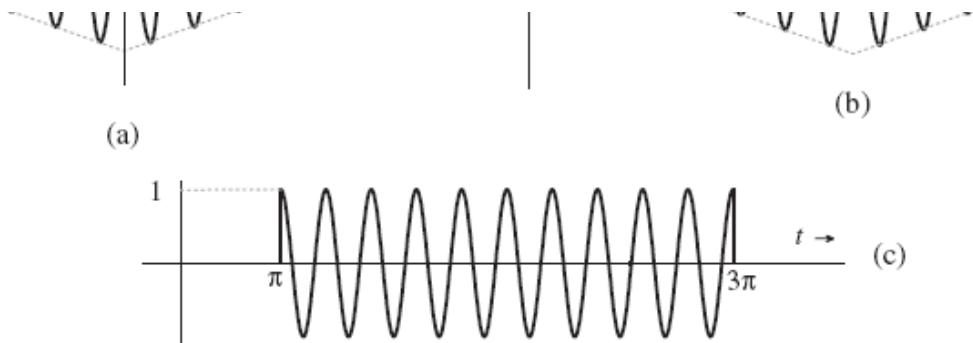


Figura 3.3-6

- 3.3-7** Utilizando a propriedade de translação no domínio da frequência e a Tabela 3.1, determine a transformada de Fourier inversa do espectro mostrado na Fig. E.3.3-7. Observe que, nesse exercício, a transformada de Fourier é dada no domínio ω .

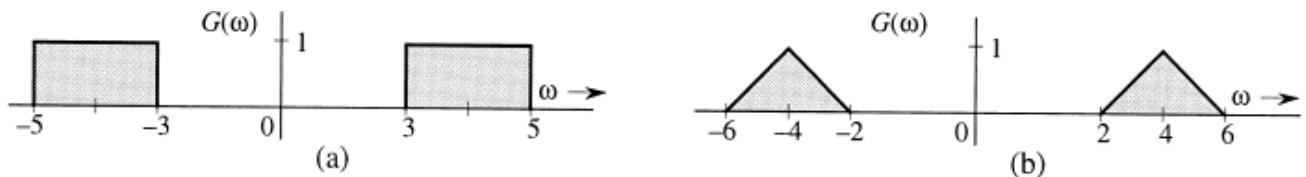


Figura 3.3-7

- 3.3-8** Um sinal $g(t)$ é limitado em frequência a B Hz. Mostre que o sinal $g^n(t)$ é limitado em frequência a nB Hz.

Sugestão: $g^2(t) \Leftrightarrow [G(f) * G(f)]$, e assim por diante. Use a propriedade de largura de banda da convolução.

- 3.3-9** Determine a transformada de Fourier do sinal na Fig. E.3.3-3a empregando três métodos diferentes:

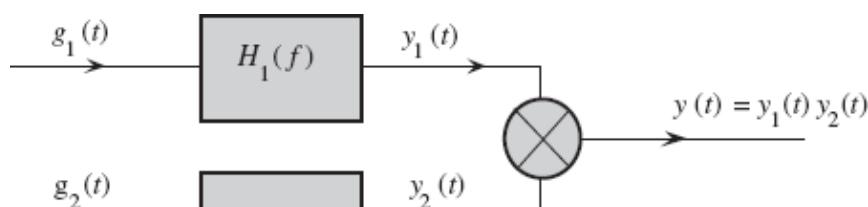
- Por integração direta, utilizando a definição (3.9a).
- Empregando apenas o par 17 na Tabela 3.1 e a propriedade de translação no domínio do tempo.
- Usando as propriedades de diferenciação e translação no domínio do tempo, assim como o par $\delta(t) \Leftrightarrow 1$.

Sugestão: $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$.

- 3.3-10** O processo de recuperação de um sinal $g(t)$ de um sinal modulado $g(t) \cos 2\pi f_0 t$ é denominado **demodulação**. Mostre que o sinal $g(t) \cos 2\pi f_0 t$ pode ser demodulado multiplicando-o por $2 \cos 2\pi f_0 t$ e aplicando o produto a um filtro passa-baixos de largura de banda B Hz [a largura de banda de $g(t)$]. Considere $B < f_0$. *Sugestão:* $2 \cos^2 2\pi f_0 t = 1 + \cos 4\pi f_0 t$. Observe que o espectro de $g(t) \cos 4\pi f_0 t$ é centrado em $2f_0$ e será suprimido pelo filtro passa-baixos de largura de banda B Hz.

- 3.4-1** Os sinais $g_1(t) = 10^4 \Pi(10^4 t)$ e $g_2(t) = \delta(t)$ são aplicados às entradas de filtros passa-baixos ideais $H_1(f) = \Pi(f/20.000)$ e $H_2(f) = \Pi(f/10.000)$ (Fig. E.3.4-1). As saídas $y_1(t)$ e $y_2(t)$ desses filtros são multiplicadas para produzir o sinal $y(t) = y_1(t) y_2(t)$.

- Trace os gráficos de $G_1(f)$ e $G_2(f)$.
- Trace os gráficos de $H_1(f)$ e $H_2(f)$.
- Trace os gráficos de $Y_1(f)$ e $Y_2(f)$.
- Determine as larguras de banda de $y_1(t)$, $y_2(t)$ e de $y(t)$.



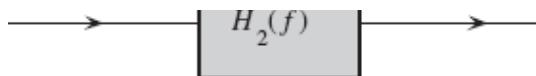


Figura E.3.4-1

3.5-1 Dentre os sistemas com as respostas ao impulso listadas a seguir, qual é causal?

- (a) $h(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$
- (b) $h(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0$
- (c) $h(t) = e^{-a(t-t_0)}u(t - t_0), \quad a > 0$
- (d) $h(t) = \text{sinc}(at), \quad a > 0$
- (e) $h(t) = \text{sinc}[a(t - t_0)], \quad a > 0.$

3.5-2 Considere um filtro com a seguinte função de transferência:

$$H(f) = e^{-k(2\pi kf)^2 - j2\pi ft_0}$$

Usando os critérios dos domínios do tempo [$h(t)$ não causal] e da frequência (critério de Paley-Wiener), mostre que este filtro é fisicamente irrealizável. É possível, com a escolha de um valor suficientemente grande para t_0 , tornar este filtro aproximadamente realizável? Usando um critério próprio (razoável) de realização aproximada, determine t_0 .

Sugestão: Use o par 22 na Tabela 3.1.

3.5-3 Mostre que um filtro com a função de transferência

$$H(f) = \frac{2(10^5)}{(2\pi f)^2 + 10^{10}} e^{-j2\pi ft_0}$$

é irrealizável. É possível, com a escolha de um valor suficientemente grande para t_0 , tornar esse filtro aproximadamente realizável? Usando um critério próprio (razoável) de realização aproximada, determine t_0 .

Sugestão: Mostre que a resposta ao impulso é não causal.

3.5-4 Determine a máxima largura de banda de um sinal que pode ser transmitida através do filtro passa-baixos RC na Fig. E.3.5-4, com $R = 1000$ e $C = 10^{-9}$; presuma que, na largura de banda, as variações da resposta de amplitude (ganho) e do atraso temporal são, respectivamente, de 5% e 2%.

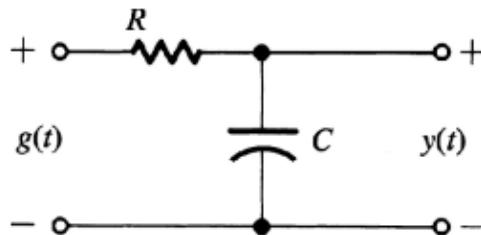


Figura E.3.5-4

3.5-5 Um sinal passa-faixa $g(t)$ de largura $B = 2000$ Hz, centrada em $f = 10^5$ Hz, é aplicado ao filtro RC mostrado na Fig. E.3.5-4, com $RC = 10^{-3}$. Considerando que, na largura de banda, a variação da resposta de amplitude menor que 2% e variação do atraso temporal menor que 1% caracterizam transmissão sem distorção, determine se $g(t)$ pode ser transmitido sem distorção. Obtenha uma expressão aproximada para o sinal de saída.

3.6-1 Um certo canal tem resposta de amplitude ideal e resposta de fase não ideal (Fig. E.3.6-1) dadas por

$$|H(f)| = 1$$

$$\theta_h(f) = -2\pi f t_0 - k \operatorname{sen} 2\pi f T \quad k \ll 1$$

- (a) Mostre que $y(t)$, a resposta do canal a um pulso de entrada $g(t)$ limitado em frequência a B Hz, é

$$y(t) = g(t - t_0) + \frac{k}{2}[g(t - t_0 - T) - g(t - t_0 + T)]$$

Sugestão: Use $e^{-jk \operatorname{sen} 2\pi f T} \approx 1 - jk \operatorname{sen} 2\pi f T$.

- (b) Como este canal afetará sistemas TDM e FDM, do ponto de vista de interferência entre sinais multiplexados?

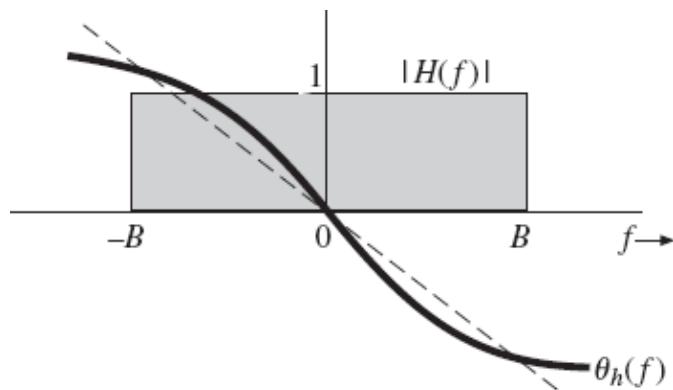


Figura E.3.6-1

- 3.6-2** A distorção causada por transmissão em multipercorso pode ser parcialmente corrigida por um equalizador com linha de retardo gradual. Mostre que, se $\alpha \ll 1$, a distorção no sistema multipercorso na Fig. 3.31a pode ser aproximadamente corrigida se o sinal recebido, representado na Fig. 3.31a, for aplicado ao equalizador com linha de retardo gradual mostrado na Fig. E.3.6-2.

Sugestão: A partir da Eq. (3.64a), fica claro que a função de transferência do filtro equalizador deve ser $H_{eq}(f) = 1/(1 + \alpha e^{-j 2\pi f \Delta t})$. Sabendo que, se $x \ll 1$, $1/(1-x) = 1+x+x^2+x^3+\dots$, determine os fatores de amostragem a_i para que a resultante função de transferência seja

$$H(f)H_{eq}(f) \approx e^{-j 2\pi f t_d}$$

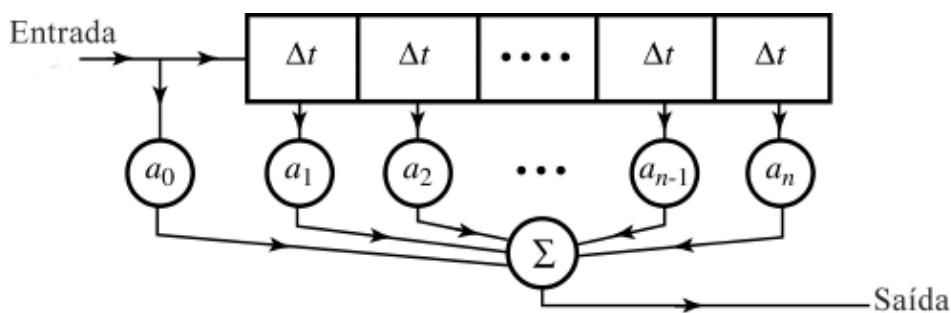


Figura E.3.6-2

- 3.7-1** Por integração direta, mostre que a energia do pulso gaussiano

$$g(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

é $1/2\sigma\sqrt{\pi}$. Para comprovar esse resultado, use o teorema de Parseval para determinar a energia E_g de $G(f)$.

Sugestão: veja o par 22 na Tabela 3.1. Use

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

3.7-2 Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(kt) dt = \frac{\pi}{4}$$

Sugestão: Observe que a integral é a energia de $g(t) = \text{sinc}(kt)$. Use o teorema de Parseval para calcular essa energia.

3.7-3 Generalize o teorema de Parseval e mostre que, para sinais $g_1(t)$ e $g_2(t)$ de valores reais e cujas transformadas de Fourier existam,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(-f)G_2(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(f)G_2(-f) df$$

3.7-4 Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(2\pi Bt - m\pi) \text{sinc}(2\pi Bt - n\pi) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{1}{2B} & m = n \end{cases}$$

Sugestão: Observe que

$$\text{sinc}(2\pi Bt - k\pi) = \text{sinc}\left[2\pi B\left(t - \frac{k}{2B}\right)\right] \iff \frac{1}{2B} \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) e^{-j\pi fk/B}$$

Use esta informação e o resultado do Exercício 3.7-2 para mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(2\pi Bt - m\pi) \text{sinc}(2\pi Bt - n\pi) dt = \frac{1}{4B^2} \int_{-B}^B e^{j[(n-m)/2B]2\pi f} df$$

Esta integral fornecerá o resultado desejado.

3.7-5 Para o sinal

$$g(t) = \frac{2a}{t^2 + a^2}$$

determine a largura de banda essencial B Hz, de modo que a energia contida nas componentes espetrais de $g(t)$ de frequências abaixo de B Hz corresponda a 99% da energia E_g do sinal.

Sugestão: Aplique a propriedade de dualidade [Eq. (3.26)] ao par 3 na Tabela 3.1 e determine $G(f)$.

3.7-6 Um sinal passa-baixos $g(t)$ é aplicado a um dispositivo de resposta quadrática, cuja saída $g^2(t)$ é aplicada a um filtro passa-baixos ideal de ganho unitário e largura de banda Δf Hz (Fig. E.3.7-6). Mostre que, se Δf for muito pequeno ($\Delta f \rightarrow 0$), a saída do filtro é um sinal dc de amplitude $2E_g \Delta f$, em que E_g é a energia de $g(t)$.

Sugestão: Quando $\Delta f \rightarrow 0$, a saída $y(t)$ é um sinal dc porque o espectro $Y(f)$ está concentrado em $f = 0$, de $-\Delta f$ a Δf (impulso na origem). Se $g^2(t) \Leftrightarrow A(f)$ e $y(t) \Leftrightarrow Y(f)$, então $Y(f) \approx [2A(0) \Delta f] \delta(f)$. Agora, mostre que $E_g = A(0)$.

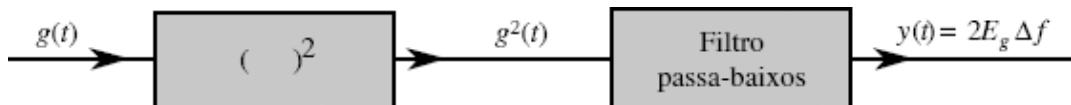


Figura E.3.7-6

- 3.8-1** Mostre que a função de autocorrelação de $g(t) = C \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$ é dada por $R_g(\tau) = (C^2/2) \cos 2\pi f_0 \tau$ e que a correspondente PSD é $S_g(f) = (C^2/4)[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$. A seguir, mostre que, para um sinal $y(t)$ dado por

$$y(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n2\pi f_0 t + \theta_n)$$

a função de autocorrelação e a PSD são dadas por

$$R_y(\tau) = C_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \cos n2\pi f_0 \tau$$

$$S_y(f) = C_0^2 \delta(f) + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 [\delta(f - nf_0) + \delta(f + nf_0)]$$

Sugestão: Mostre que, se $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$, então $R_g(\tau) = R_{g_1}(\tau) + R_{g_2}(\tau) + R_{g_1g_2}(\tau) + R_{g_2g_1}(\tau)$, em que $R_{g_1g_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} g_1(t)g_2(t + \tau) dt$. Caso $g_1(t)$ e $g_2(t)$ representem quaisquer dois dos infinitos termos em $y(t)$, mostre que $R_{g_1g_2}(\tau) = R_{g_2g_1}(\tau) = 0$. Para isso, use o fato de que, considerando um intervalo de tempo muito grande, a área sob qualquer senoide é, no máximo, igual à área correspondente a um meio ciclo da senoide.

- 3.8-2** O sinal binário aleatório $x(t)$ mostrado na Fig. E.3.8-2 transmite um dígito a cada T_b segundos. Um **1** binário é transmitido por um pulso $p(t)$ de largura $T_b/2$ e amplitude A ; um **0** binário é transmitido pela ausência de pulso. Os dígitos **1** e **0** têm igual probabilidade de ocorrência, que é aleatória. Determine a função de autocorrelação $R_x(\tau)$ e a PSD $S_x(f)$.

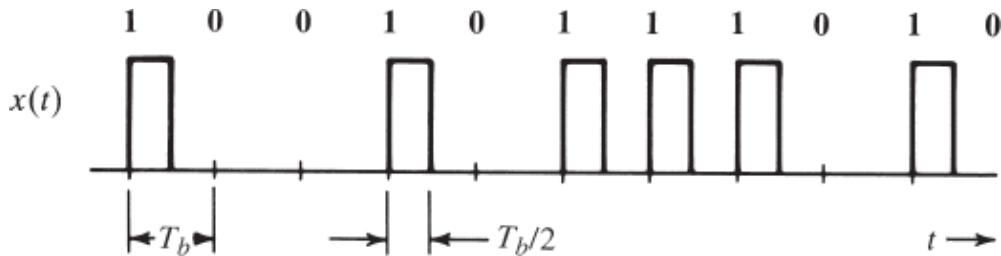


Figura E.3.8-2

- 3.8-3** Determine o valor quadrático médio (ou potência) da tensão de saída $y(t)$ do circuito RC mostrado na Fig. E.3.5-4, com $RC = 2\pi$, considerando que a PSD da tensão de entrada $S_x(f)$ seja dada por **(a)** K ; **(b)** $\Pi(\pi f)$; **(c)** $[\delta(f+1) + \delta(f-1)]$. Em cada caso, calcule a potência (valor quadrático médio) do sinal de entrada $x(t)$.
- 3.8-4** Determine o valor quadrático médio (ou potência) da tensão de saída $y(t)$ do sistema mostrado na Fig. E.3.8-4, considerando que a PSD da tensão de entrada $S_x(f)$ seja dada por $\Pi(\pi f)$. Calcule a potência (valor quadrático médio) do sinal de entrada $x(t)$.

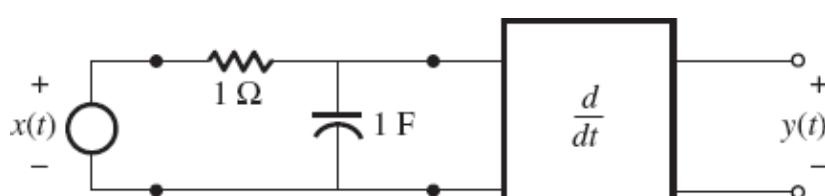


Figura 3.8-4

*Para simplificar, consideramos, na Fig. 3.2, que D_n e, portanto, $G(f)$ são reais. Contudo, o argumento também se aplica a D_n [ou $G(f)$] complexo.

**Considere isso uma prova irrefutável da máxima que diz que ter 0% de tudo é melhor do que ter 100% de nada!

*Isso não deve ser considerado uma prova rigorosa da Eq. (3.8). A situação não é tão simples como fizemos parecer.¹

**Simetria hermitiana* é o termo usado para descrever funções complexas que satisfazem a Eq. (3.11).

*As condições de Dirichlet restantes são: em qualquer intervalo finito, $g(t)$ pode ter apenas um número finito de máximos e mínimos e um número finito de descontinuidades finitas. Quando essas condições são satisfeitas, a integral de Fourier no lado direito da Eq. (3.9b) converge para $g(t)$ em todos os pontos em que $g(t)$ é contínua; em pontos em que $g(t)$ é descontínua, a integral converge para o valor médio dos limites de $g(t)$ à direita e à esquerda do ponto de descontinuidade.

*Na literatura, $\text{sinc}(x)$ também é denotada por $\text{Sa}(x)$. Alguns autores definem $\text{sinc}(x)$ como

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

*Ver a Seção 9.9 para uma prova rigorosa dessa afirmação.

**Para um envelope bem definido, é necessário $B \ll f_0$; caso contrário, as variações de $E(t)$ serão da mesma ordem que as da portadora e será difícil separar o envelope da portadora.

*A propriedade de largura de banda da convolução não se aplica a alguns casos patológicos. A propriedade falha quando a convolução de duas funções é zero em um intervalo, mesmo que as duas funções sejam não nulas [por exemplo, $\text{sen } 2\pi f_0 t u(t) * u(t)$]. Tecnicamente, a propriedade é válida até mesmo nesse caso desde que, no cálculo da largura de banda da função que resulta da convolução, levemos em consideração o intervalo em que a convolução é zero.

*Válida apenas se a transformada de $dg(t)/dt$ existir.

*Adicionalmente, é necessário que $\theta_h(0)$ seja 0 (como na Fig. 3.25) ou um valor constante $n\pi$ (n inteiro), ou seja, $\theta_h(f) = n\pi - 2\pi f t_d$. O efeito da adição da fase $n\pi$ é, no máximo, uma mudança de sinal da função.

*A Fig. 3.25 mostra que, para transmissão sem distorção, a resposta de fase deve não apenas ser linear, como também deve passar pela origem. Essa última exigência pode ser um pouco relaxada no caso de sinais passa-faixa. A fase na origem pode ser uma constante qualquer [$\theta_h(f) = \theta_0 - 2\pi f t_d$ ou $\theta_h(0) = \theta_0$]. A razão para isso reside na Eq. (3.37), que mostra que a adição de uma fase constante θ_0 ao espectro de um sinal passa-faixa equivale a deslocar a fase da portadora por θ_0 . O sinal modulante (envelope) não é afetado. O envelope de saída é igual ao de entrada, atrasado por

$$t_g = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\theta_h(f)}{df}$$

Esse atraso t_d é chamado de **atraso de grupo** ou **atraso de envelope**; a portadora de saída é igual à de entrada, atrasada por

$$t_p = -\frac{\theta_h(f)}{2\pi f}$$

Esse atraso é denominado **atraso de fase**, sendo f_0 a frequência central da banda passante.

*Assumimos que $|H(f)|$ seja quadrático-integrável, ou seja, assumimos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

seja finita

*O AGC também elimina variações lentas do sinal original.

*No caso de um sinal passa-baixos, a largura de banda essencial também pode ser definida como a frequência na qual o valor da amplitude do espectro é uma pequena fração (digamos, 5–10%) do valor de pico. No Exemplo 3.16, o pico de $|G(f)|$ é $1/a$ e ocorre em $f=0$.

**Na prática, o truncamento é efetuado de forma gradual, com o uso de janelas graduais, de modo a evitar vazamento espectral excessivo devido a um truncamento abrupto.⁵

*Vale notar que, embora a ESD exista em toda a banda de $-\infty$ a ∞ , o espectro trigonométrico existe apenas na banda de 0 a ∞ . O intervalo espectral $-\infty$ a ∞ se aplica ao espectro exponencial. Contudo, na prática, sempre que nos referimos a uma largura de banda, o fazemos no sentido trigonométrico. Portanto, a banda essencial é de 0 a B Hz (ou W rad/s) e não de $-B$ a B .

*Para um sinal de valores complexos, definimos

$$\psi_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g^*(t-\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(t)g(t+\tau) dt$$

*Devemos ser cautelosos no uso de uma expressão unilateral, como $P_g = 2\int_0^{\infty} S_g(f) df$, quando $S_g(f)$ contém um impulso na origem (uma componente dc). O impulso não deve ser multiplicado pelo fator 2.

**Para um sinal de valores complexos, definimos

$$\mathcal{R}_g(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t)g^*(t-\tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g^*(t)g(t+\tau) dt$$

*O limite superior do somatório na Eq. (3.95) é $N_0 - 1$ (não N_0), pois o último termo do mesmo tem início em $(N_0 - 1) T_s$ e cobre a área sob a curva até $N_0 T_s = T_0$.

*Podemos mostrar que um sinal não pode ser simultaneamente limitado no tempo e na frequência. Se for um, não pode ser o outro, e vice-versa.³

** As relações de DFT também representam um par de transformadas e são exatas. Se, no entanto, associarmos g_k e G_q às amostras de um sinal $g(t)$ e de sua transformada de Fourier $G(f)$, respectivamente, as relações de DFT se tornam aproximações, devido aos efeitos de mascaramento e truncamento.

*No Brasil, é igualmente empregada a denominação “transformada rápida de Fourier”. (N.T.)

4 MODULAÇÕES E DEMODULAÇÕES EM AMPLITUDE

Modulação, em geral, se refere a um processo que desloca o sinal de mensagem a uma banda específica de frequências, ditada pelo canal físico (por exemplo, um modem telefônico para a banda de sinal de voz). A modulação provê diversas vantagens, como mencionado no Capítulo 1, entre as quais se incluem a facilidade de transmissão de RF e a multiplexação por divisão em frequência. As modulações podem ser analógicas ou digitais. Embora sistemas de comunicação tradicionais, como rádios AM/FM e sinais de televisão NTSC, sejam baseados em modulações analógicas, sistemas mais recentes, como os de telefonia celular 2G e 3G, HDTV e DSL, são todos digitais.

Neste capítulo e no próximo, focaremos as clássicas modulações analógicas: modulação em amplitude e modulação em ângulo. Antes de iniciarmos a discussão de modulações analógicas, é importante que façamos a distinção entre sistemas de comunicação que não usam modulação (**sistemas de comunicação em banda base**) e sistemas que utilizam modulação (**sistemas de comunicação por portadora**).

4.1 COMUNICAÇÃO EM BANDA BASE *VERSUS* COMUNICAÇÃO POR PORTADORA

O termo **banda base** designa a banda de frequências do sinal de mensagem original proveniente da fonte ou transdutor de entrada (Fig. 1.2). Em telefonia, a banda base é a faixa de frequências de áudio (banda de sinais de voz), de 0 a 3,5 kHz. No caso de sinal de televisão NTSC, a banda base de vídeo é a faixa de frequências de 0 a 4,3 MHz. Para dados digitais ou modulação por codificação de pulsos (PCM) que usam sinalização bipolar à taxa de R_b pulsos por segundo, a banda base é, aproximadamente, a faixa de frequências de 0 a R_b Hz.

Comunicação em Banda Base

Na comunicação em banda base, sinais de mensagem são transmitidos diretamente sem qualquer modificação. Dado que, em sua maioria, sinais em banda base, como sinais de áudio e de vídeo, têm um conteúdo significativo em frequências baixas, não podem ser transmitidos de modo eficiente através de enlaces de rádio (enlaces sem fio). Consequentemente, canais de usuário dedicados, como pares trançados e cabos coaxiais, são alocados a cada usuário para comunicações de longas distâncias. Uma vez que sinais em banda base têm bandas que se sobrepõem, haveria forte interferência entre sinais que compartilhassem um mesmo canal. Por esse motivo, na comunicação em banda base, uma boa parte do espectro não é utilizada. Com a modulação de vários sinais em banda base e o resultante deslocamento de seus espectros a bandas de frequências que não se sobrepõem, o que constitui a multiplexação por divisão em frequência (FDM – *frequency division multiplexing*), muitos usuários podem compartilhar um canal, utilizando a maior parte da largura de banda disponível. Comunicação de longa distância através de um enlace de rádio também requer modulação para deslocar o espectro do sinal a frequências mais altas, para permitir radiação mais eficiente de potência, com a utilização de antenas de dimensões razoáveis. Outro uso da modulação é a troca da largura de banda de transmissão por melhor desempenho diante de interferências.

Modulações com Portadora

A comunicação que faz uso de modulação para deslocar o espectro de frequência de um sinal é conhecida como **comunicação por portadora**. Em termos de modulação analógica, um dos parâmetros básicos (amplitude, frequência ou fase) de uma **portadora senoidal** de alta frequência f_c Hz (ou $\omega_c = 2\pi f_c$ rad/s) é variado linearmente com o sinal em banda base $m(t)$. Isso resulta em modulação em amplitude (AM – *amplitude modulation*), modulação em frequência (FM – *frequency modulation*) ou modulação em fase (PM – *phase modulation*), respectivamente. A modulação em amplitude é uma operação linear, enquanto os outros dois tipos de modulação com portadora são similares e não lineares, geralmente designadas pelo termo comum **modulação em ângulo**.

Aqui, cabe um comentário a respeito de sinais modulados por pulsos [modulação em amplitude de pulso (PAM – *pulse amplitude modulation*), modulação em largura de pulso (PWM – *pulse width modulation*), modulação em posição de pulso (PPM – *pulse position modulation*), modulação por codificação de pulsos (PCM – *pulse code modulation*) e modulação delta (DM – *delta modulation*)]. Apesar do termo *modulação*, são sinais digitais em banda base. Nesses casos, “modulação” é usada não para designar deslocamento de frequência ou de banda, mas, sim, os esquemas de codificação de pulsos digitais usados na representação dos sinais analógicos originais. Em outras palavras, o sinal de mensagem analógico modula parâmetros de um trem de pulsos digitais. Esses sinais ainda podem modular uma portadora de modo que seus espectros sejam deslocados.

...sinais ainda podem modular uma portadora, de modo que seus espectros sejam deslocados.

Modulações em Amplitude e Modulações em Ângulo

Denotemos por $m(t)$ o sinal de mensagem de fonte a ser transmitido pelo emissor aos receptores; a transformada de Fourier do sinal é denotada por $M(f)$. Para deslocar a resposta de frequência de $m(t)$ a uma nova faixa de frequências centrada em f_c Hz, notamos, primeiro, que a transformada de Fourier já revelou uma propriedade muito forte, conhecida como propriedade de *translação na frequência*, que permite alcançar este objetivo. Em outras palavras, tudo o que precisamos fazer é multiplicar $m(t)$ por uma frequência senoidal f_c , de modo que

$$s_1(t) = m(t) \cos 2\pi f_c t$$

Com isso, alcançamos imediatamente o objetivo básico da modulação e movemos o conteúdo de frequências do sinal para que fique centrado em $\pm f_c$:

$$S_1(f) = \frac{1}{2}M(f - f_c) + \frac{1}{2}M(f + f_c)$$

Esta simples multiplicação, na verdade, permite que variações na amplitude da senoide $s_1(t)$ sejam proporcionais ao sinal de mensagem. O método é, de fato, uma forma valiosa de modulação, conhecida como modulação em amplitude.

De modo mais geral, consideremos um sinal senoidal

$$s(t) = A(t) \cos [\omega_c t + \phi(t)]$$

Há três variáveis em uma senoide: amplitude, frequência (instantânea) e fase. O sinal de mensagem pode ser usado para modular qualquer um desses três parâmetros e permitir que $s(t)$ transporte a informação do transmissor ao receptor:

Amplitude $A(t)$ varia linearmente com $m(t)$	\Leftrightarrow	modulação em amplitude
Frequência varia linearmente com $m(t)$	\Leftrightarrow	modulação em frequência
Fase $\phi(t)$ varia linearmente com $m(t)$	\Leftrightarrow	modulação em fase

Essas operações são conhecidas, respectivamente, como modulação em amplitude, modulação em frequência e modulação em fase. Neste capítulo, descreveremos várias formas de modulação em amplitude em sistemas de comunicação usados na prática. Modulações em amplitude são lineares e sua análise nos domínios do tempo e da frequência, mais simples. No Capítulo 5, discutiremos as modulações em ângulo não lineares separadamente.

Uso de f ou ω

No Capítulo 3, observamos a equivalência das respostas de frequência denotadas pela frequência f e pela frequência angular ω . Cada uma dessas duas notações tem suas próprias vantagens e desvantagens. Após o estudo dos exemplos e exercícios do Capítulo 3, o leitor deve se sentir familiarizado e confortável com o uso das duas notações. Assim, de aqui em diante, usaremos ambas, selecionando uma ou outra com base na simplicidade de notação ou representação ou gráfica.

4.2 MODULAÇÃO EM AMPLITUDE COM BANDA LATERAL DUPLA

Modulação em amplitude é caracterizada por uma amplitude $A(t)$ **portadora** de informação, que é uma função linear do sinal de banda base (mensagem) $m(t)$. Ao mesmo tempo, a frequência ω_c e fase θ_c da portadora permanecem constantes. Podemos considerar $\theta_c = 0$ sem perda de generalidade. Se a amplitude A da portadora for diretamente proporcional ao sinal modulante $m(t)$, o sinal modulado será $m(t) \cos \omega_c t$ (Fig. 4.1). Como vimos anteriormente, [Eq. (3.36)], esse tipo de modulação simplesmente desloca o espectro de $m(t)$ para a frequência da portadora (Fig. 4.1a). Portanto, se

$$m(t) \Leftrightarrow M(f)$$

então

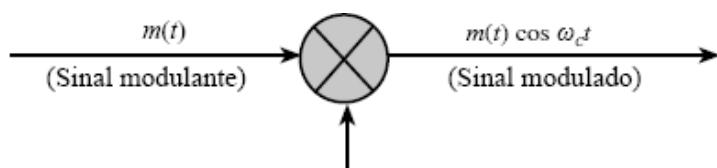
$$m(t) \cos 2\pi f_c t \Leftrightarrow \frac{1}{2}[M(f + f_c) + M(f - f_c)] \quad (4.1)$$

Recordemos que $M(f - f_c)$ é $M(f)$ deslocada para a direita por f_c , e $M(f + f_c)$ é $M(f)$ deslocada para a esquerda por f_c . Dessa forma, o processo de modulação desloca o espectro do sinal modulante para a esquerda e para a direita por f_c . Devemos notar também que, se a largura de banda de $m(t)$ for B Hz, o sinal modulado terá largura de banda $2B$ Hz, como indicado na Fig. 4.1.c. Observemos ainda

que o espectro do sinal modulado centrado em $\pm f_c$ (ou $\pm \omega_c$ rad/s) consiste em duas partes: uma no lado externo de $\pm f_c$, conhecida como *banda lateral superior (USB – upper sideband)* e uma no lado interno de $\pm f_c$, conhecida como *banda lateral inferior (LSB – lower sideband)*. Na Fig. 4.1c, vemos ainda que, a menos que o sinal de mensagem $M(f)$ tenha um impulso na frequência zero, nesse esquema o sinal modulado não contém uma componente discreta da frequência da portadora f_c . Em outras palavras, o processo de modulação não introduz uma senoide em f_c . Por esse motivo, é referido como **modulação em banda lateral dupla com portadora suprimida (DSB-SC – double-sideband suppressed carrier)**.*

A relação entre B e f_c é relevante. A Fig. 4.1c mostra que $f_c \geq B$, o que evita a sobreposição dos espectros modulados centrados em f_c e em $-f_c$. Se $f_c < B$, as duas cópias do espectro da mensagem se sobreporiam e a informação de $m(t)$ seria perdida durante a modulação, o que impossibilitaria a recuperação de $m(t)$ do sinal modulado $m(t) \cos \omega_c t$.

Fatores práticos podem impor restrições adicionais a f_c . Por exemplo, em aplicações de difusão (*broadcasting*), a antena transmissora pode irradiar sem distorção apenas uma estreita largura de banda. Isso significa que, para evitar distorção causada pela antena transmissora, devemos ter $f_c/B \gg 1$. Na radiodifusão AM, por exemplo, com $B = 5$ kHz e frequências portadoras entre 550 e 1600 kHz, a razão f_c/B tem valor entre 100 e 300.



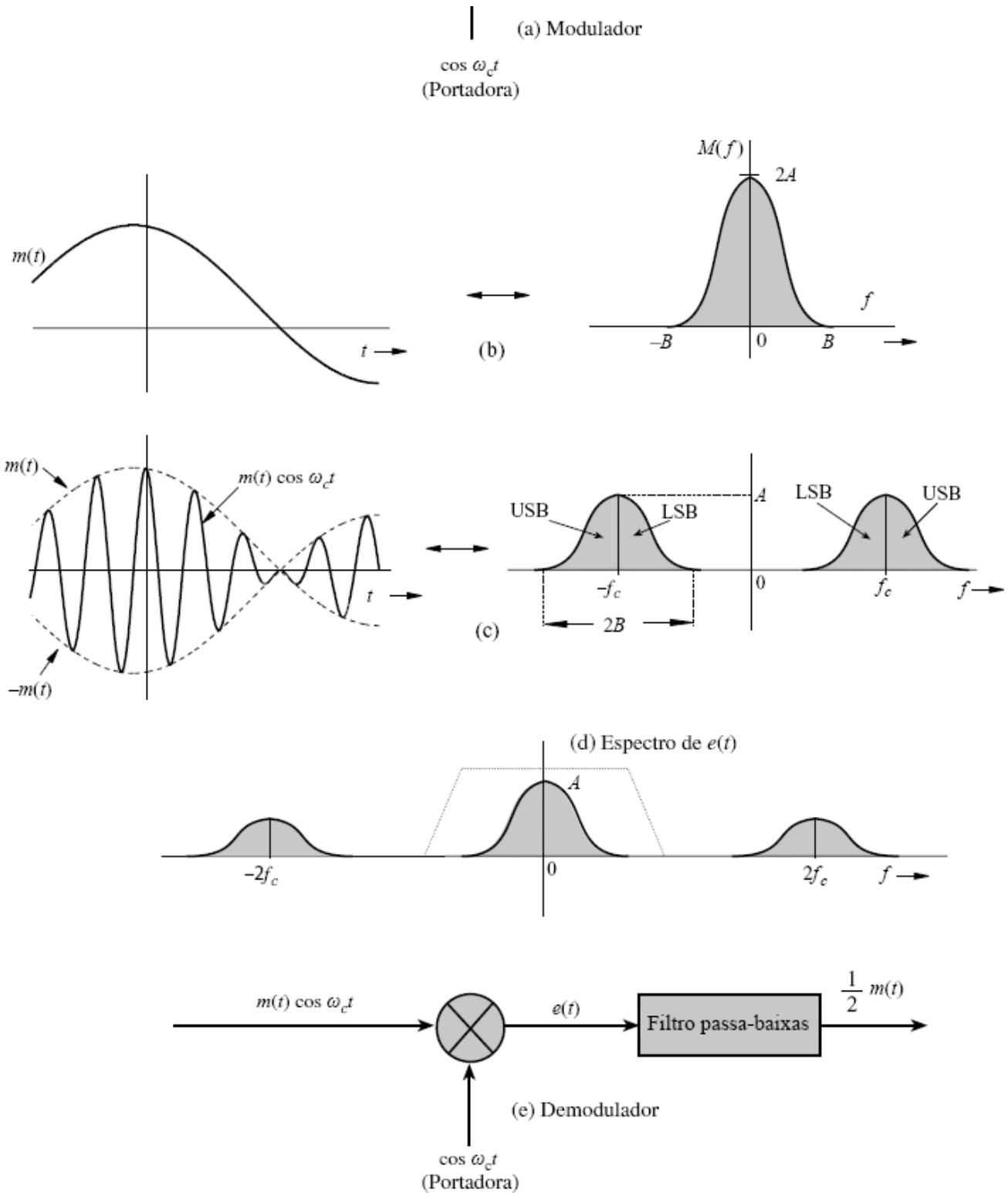


Figura 4.1 Modulação DSB-SC e demodulação.

Demodulação

A modulação DSB-SC translada ou desloca o espectro de frequência para a esquerda e para a direita por f_c (ou seja, para $+f_c$ e $-f_c$), como mostra a Eq. (4.1). Para recuperar o sinal original $m(t)$ do sinal modulado, é necessário devolver o espectro à posição original. O processo de recuperação do sinal original do sinal modulado (translação do espectro de volta à sua posição original) é referido como **demodulação**. Observemos que, na Fig. 4.1c, se o espectro do sinal modulado for deslocado para a esquerda e para a direita por f_c (e multiplicado por meio), obteremos o espectro mostrado na Fig. 4.1d, que contém o espectro de banda base desejado mais espectros indesejáveis em $\pm 2f_c$. Esses últimos podem ser suprimidos com o uso de um filtro passa-baixas. Assim, a demodulação, quase idêntica à modulação, consiste em multiplicar o sinal modulado recebido $m(t) \cos \omega_c t$ por uma portadora $\cos \omega_c t$ e aplicar o resultado a um filtro passa-baixas, como indicado na Fig. 4.1e. Podemos chegar à mesma conclusão diretamente no domínio do tempo; para isso, observemos que o sinal $e(t)$ na Fig. 4.1e é

$$e(t) = m(t) \cos^2 \omega_c t$$

$$= \frac{1}{2}[m(t) + m(t) \cos 2\omega_c t]$$

Portanto, a transformada de Fourier do sinal $e(t)$ é

$$E(f) = \frac{1}{2}M(f) + \frac{1}{4}[M(f + 2f_c) + M(f - 2f_c)] \quad (4.2b)$$

Esta análise mostra que o sinal $e(t)$ consiste em duas componentes $(1/2)m(t)$ e $(1/2)m(t) \cos 2\omega_c t$, juntamente com seus espectros que não se sobrepõem, como ilustrado na Fig. 4.1d. O espectro da segunda componente, que é um sinal modulado com portadora $2f_c$, é centrado em $\pm 2f_c$. Logo, essa componente é suprimida pelo filtro passa-baixas na Fig. 4.1e. A componente desejada $(1/2)M(f)$, por ser um espectro de frequências baixas (centrado em $f = 0$), passa pelo filtro e resulta na saída $(1/2)m(t)$. Uma forma possível de característica de filtro passa-baixas é mostrada (em linha tracejada) na Fig. 4.1d. O filtro permite a demodulação sem distorção do sinal de mensagem $m(t)$ do sinal DSB-SC. Para nos livrarmos da inconveniente fração $1/2$ na saída, podemos usar uma portadora $2\cos \omega_c t$ em vez de $\cos \omega_c t$. Na verdade, mais adiante, usaremos muito essa estratégia, que não afeta as conclusões gerais.

Esse método de recuperação do sinal em banda base é denominado *detecção síncrona* ou *detecção coerente*, em que usamos uma portadora com exatamente a mesma frequência (e fase) da portadora usada na modulação. Assim, para demodulação, torna-se necessário gerar uma portadora local no receptor, com coerência (sincronismo) de frequência e fase com a portadora usada na modulação.

Exemplo 4.1 Para o sinal em banda base

$$m(t) = \cos \omega_m t = \cos 2\pi f_m t,$$

determinemos o sinal DSB-SC e esboçemos seu espectro. Identifiquemos a USB e a LSB. Verifiquemos que o sinal modulado DSB-SC pode ser demodulado pelo demodulador ilustrado na Fig. 4.1e.

O caso neste exemplo é referido como *modulação por tom*, pois o sinal modulante é uma senoide pura, ou tom puro, $\cos \omega_m t$. Para deixar claros os conceitos básicos da modulação DSB-SC, resolveremos esse problema nos domínios da frequência e do tempo. Na abordagem do domínio da frequência, trabalhamos com espectros dos sinais. O espectro do sinal em banda base $m(t) = \cos \omega_m t$ é dado por

$$\begin{aligned} M(f) &= \frac{1}{2}[\delta(f - f_m) + \delta(f + f_m)] \\ &= \pi[\delta(\omega - \omega_m) + \delta(\omega + \omega_m)] \end{aligned}$$

O espectro da mensagem consiste em dois impulsos localizados em $\pm f_m$, como ilustrado na Fig. 4.2a. O espectro (modulado) DSB-SC, como visto na Eq. (4.1), é o espectro da banda base na Fig. 4.2a deslocado para a direita e para a esquerda por f_c (e multiplicado por meio), como indicado na Fig. 4.2b. Este espectro consiste em impulsos nas frequências $\pm(f_c - f_m)$ e $\pm(f_c + f_m)$. O espectro no lado externo de f_c é a USB, e o espectro no lado interno de f_c , a LSB. Observemos que o espectro DSB-SC não tem uma componente na frequência da portadora f_c . Por isso é denominado *portadora suprimida*.

Na abordagem do domínio do tempo, trabalhamos diretamente com sinais no domínio do tempo. Para o sinal em banda base $m(t) = \cos \omega_m t$, o sinal DSB-SC $\varphi_{\text{DSB-SC}}(t)$ é

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{DSB-SC}}(t) &= m(t) \cos \omega_c t \\ &= \cos \omega_m t \cos \omega_c t \\ &= \frac{1}{2}[\cos(\omega_c + \omega_m)t + \cos(\omega_c - \omega_m)t] \end{aligned}$$

Isso mostra que, quando o sinal em banda base (mensagem) é uma pura senoide de frequência f_m , o sinal modulado

consiste em duas senoides: uma componente de frequência $f_c + f_m$ (a USB) e uma componente de frequência $f_c - f_m$ (a LSB). A Fig. 4.2b mostra o espectro de $\varphi_{\text{DSB-SC}}(t)$. Portanto, cada componente de frequência f_m no sinal modulante origina duas componentes de frequências $f_c + f_m$ e $f_c - f_m$ no sinal modulado. Notemos o fato curioso de que não há componente da frequência portadora f_c no lado direito da equação anterior. Como mencionado, é por isso que a modulação é denominada modulação em banda lateral dupla com portadora suprimida (DSB-SC).

Agora, comprovemos que o sinal modulado $\varphi_{\text{DSB-SC}}(t) = \cos \omega_m t \cos \omega_c t$, quando aplicado à entrada do demodulador na Fig. 4.1e, leva a uma saída proporcional ao desejado sinal em banda base $\cos \omega_m t$. O sinal $e(t)$ na Fig. 4.1e é dado por

$$e(t) = \cos \omega_m t \cos^2 \omega_c t$$

$$= \frac{1}{2} \cos \omega_m t (1 + \cos 2\omega_c t)$$

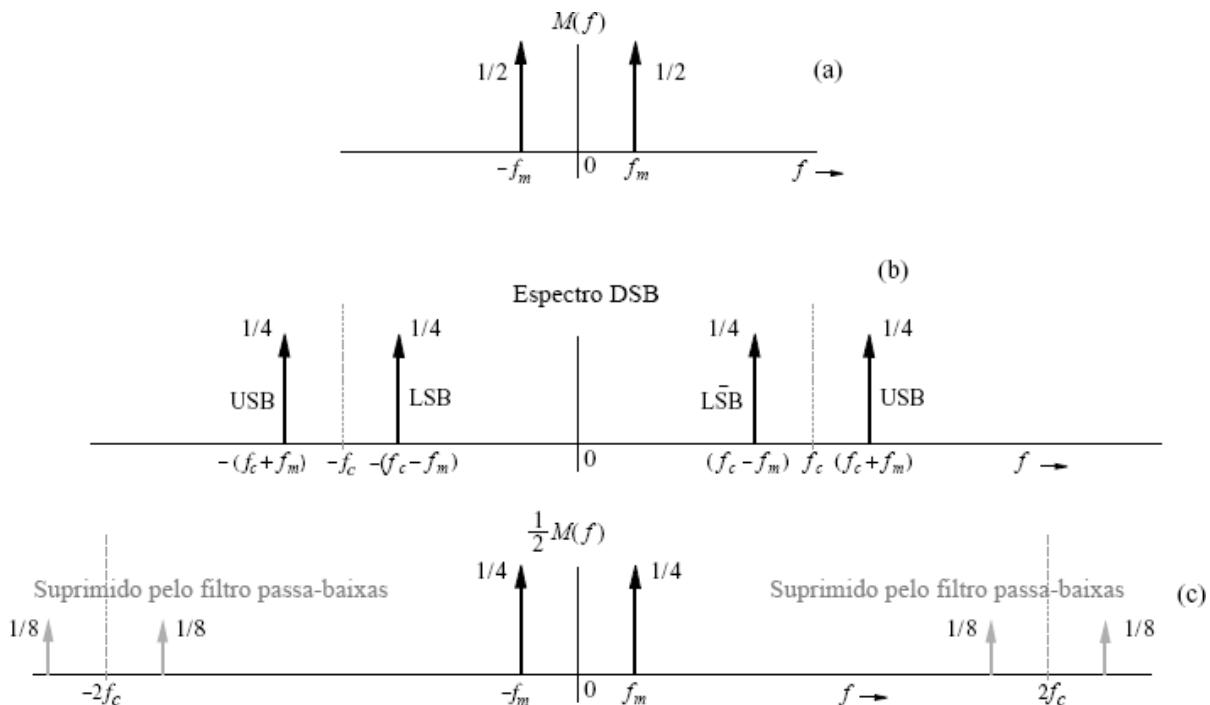


Figura 4.2 Exemplo de modulação DSB-SC.

O espectro do termo $\cos \omega_m t \cos 2\omega_c t$ é centrado em $2\omega_c$ e será suprimido pelo filtro passa-baixas, produzindo a saída $\frac{1}{2} \cos \omega_m t$. Esse resultado também pode ser obtido no domínio da frequência. A demodulação faz com que o espectro na Fig. 4.2b seja deslocado para a esquerda e para a direita por ω_c (e multiplicado por meio). Isso resulta no espectro mostrado na Fig. 4.2c. O filtro passa-baixas suprime os espectros centrados em $\pm 2\omega_c$, produzindo o espectro $\frac{1}{2}M(f)$.

Moduladores

Moduladores podem ser construídos de diferentes maneiras. A seguir, discutiremos algumas importantes categorias de moduladores.

Moduladores Multiplicadores: Neste caso, a modulação é feita diretamente com a multiplicação de $m(t)$ por $\cos \omega_c t$, com o uso de um multiplicador analógico, cuja saída é proporcional ao produto dos dois sinais de entrada. Um modulador desse tipo pode, tipicamente, ser obtido a partir de um amplificador de ganho variável, em que o parâmetro de ganho (como o β de um transistor) é controlado por um dos sinais – digamos, $m(t)$. Quando o sinal $\cos \omega_c t$ é aplicado à entrada desse multiplicador, a saída é proporcional a $m(t) \cos \omega_c t$.

No passado, a multiplicação de dois sinais em uma faixa dinâmica razoável era um desafio para projetistas de circuitos. No entanto, com o avanço contínuo da tecnologia de semicondutores, a multiplicação de sinais deixou de ser um grande problema. Contudo, apresentaremos várias configurações clássicas de moduladores que evitam o uso de multiplicadores. O estudo desses moduladores provê um inestimável entendimento do conceito e uma excelente oportunidade para aprender algumas novas técnicas de análise de sinais.

Moduladores Não Lineares: A modulação também pode ser obtida com o uso de dispositivos não lineares, como diodo ou transistor semicondutor. A Fig. 4.3 mostra um esquema possível, que faz uso de dois elementos não lineares idênticos (as caixas rotuladas NL).

Admitamos que a característica entrada-saída de qualquer dos elementos não lineares seja aproximada por uma série de

potências

$$y(t) = ax(t) + bx^2(t) \quad (4.3)$$

em que $x(t)$ e $y(t)$ são a entrada e a saída, respectivamente, do elemento não linear. A saída $z(t)$ do somador na Fig. 4.3 é dada por

$$z(t) = y_1(t) - y_2(t) = [ax_1(t) + bx_1^2(t)] - [ax_2(t) + bx_2^2(t)]$$

A substituição das duas entradas $x_1(t) = \cos \omega_c t + m(t)$ e $x_2(t) = \cos \omega_c t - m(t)$ nessa equação resulta em

$$z(t) = 2a \cdot m(t) + 4b \cdot m(t) \cos \omega_c t$$

O espectro de $m(t)$ é centrado na origem, enquanto o espectro de $m(t) \cos \omega_c t$ é centrado em $\pm \omega_c$. Em consequência, quando $z(t)$ é aplicado a um filtro passa-faixa centrado em ω_c , o sinal $am(t)$ é suprimido e o desejado sinal modulado $4bm(t) \cos \omega_c t$ pode passar pelo sistema sem distorção.

Há duas entradas nesse circuito: $m(t)$ e $\cos \omega_c t$. A saída do último somador, $z(t)$, não contém uma das entradas, o sinal da portadora $\cos \omega_c t$. Em consequência, o sinal da portadora não aparece na entrada do filtro passa-faixa final. O circuito atua como uma ponte balanceada para uma das entradas (a portadora). Circuitos que têm essa característica são denominados *circuitos平衡ados*. O modulador não linear na Fig. 4.3 é um exemplo da classe de moduladores conhecida como *moduladores平衡ados*. Esse circuito é balanceado em relação a apenas uma das entradas (a portadora); a outra entrada, $m(t)$, ainda aparece no filtro passa-faixa final, que deve rejeitá-la. Por tal razão, o circuito é referido como *modulador simplesmente balanceado*. Um circuito balanceado em relação às duas entradas é denominado *modulado duplamente balanceado*, do qual o modulador em anel (Fig. 4.6) é um exemplo.

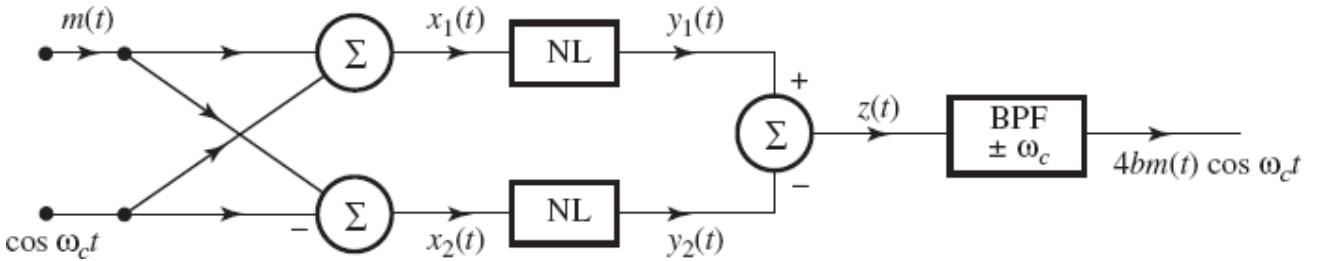


Figura 4.3 Modulador DSB-SC não linear.

Moduladores Chaveados: A operação de multiplicação requerida para modulação pode ser substituída por uma operação de chaveamento mais simples, se nos darmos conta de que um sinal modulado pode ser obtido multiplicando $m(t)$ não apenas por uma senoide pura, mas também por qualquer sinal periódico $\phi(t)$ da frequência angular fundamental ω_c . Um sinal periódico desse tipo pode ser expresso por uma série de Fourier trigonométrica como

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(n\omega_c t + \theta_n) \quad (4.4a)$$

Logo,

$$m(t)\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n m(t) \cos(n\omega_c t + \theta_n) \quad (4.4b)$$

Isso mostra que o espectro do produto $m(t)\phi(t)$ é o espectro $M(\omega)$ deslocado para $\pm \omega_c, \pm 2\omega_c, \dots, \pm n\omega_c, \dots$. Caso esse sinal seja aplicado a um filtro passa-faixa de largura de banda $2B$ Hz e centrado em ω_c , obteremos o desejado sinal modulado $c_1 m(t) \cos(\omega_c t + \theta_1)$.*

O trem de pulsos quadrados $w(t)$ na Fig. 4.4b é um sinal periódico, cuja série de Fourier foi calculada anteriormente como (reescrevendo os resultados do Exemplo 2.4):

$$w(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos \omega_c t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_c t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_c t - \dots \right) \quad (4.5)$$

O sinal $m(t)w(t)$ é dado por

$$m(t)w(t) = \frac{1}{2}m(t) + \frac{2}{\pi} \left[m(t) \cos \omega_c t - \frac{1}{3}m(t) \cos 3\omega_c t + \frac{1}{5}m(t) \cos 5\omega_c t - \dots \right] \quad (4.6)$$

O sinal $m(t)w(t)$ consiste não apenas na componente $m(t)$, mas também em um número infinito de sinais modulados com frequências portadoras $\omega_c, 3\omega_c, 5\omega_c, \dots$. Portanto, o espectro de $m(t)w(t)$ consiste em múltiplas cópias do espectro $M(f)$ da mensagem, deslocadas a $0, \pm f_c, \pm 3f_c, \pm 5f_c, \dots$ (com pesos relativos decrescentes), como mostrado na Fig. 4.4c.

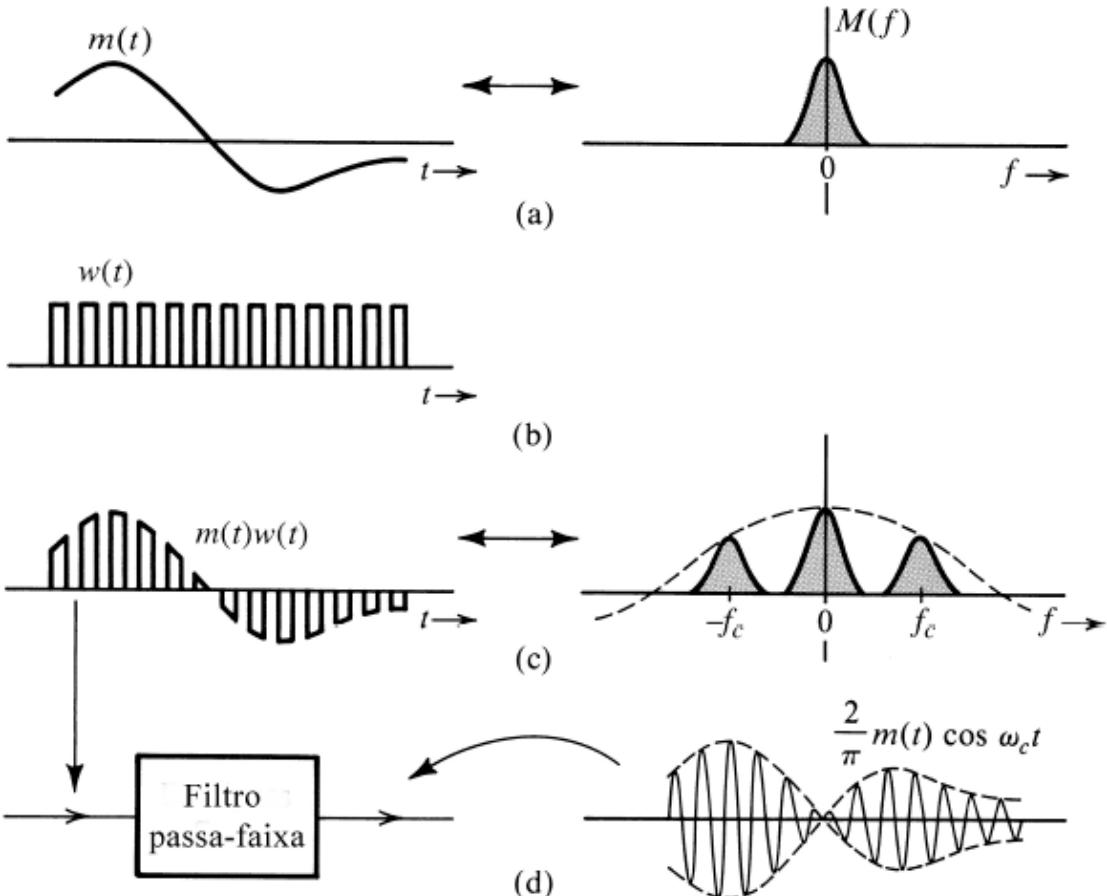


Figura 4.4 Modulador chaveado para DSB-SC.

Para modulação, nosso interesse reside na extração apenas da componente modulada $m(t) \cos \omega_c t$. Para separar essa componente da multidão, aplicamos o sinal $m(t)w(t)$ a um filtro passa-faixa de largura de banda $2B$ Hz (ou $4\pi B$ rad/s), centrado em $\pm f_c$. Desde que a frequência da portadora $f_c \geq 2B$ (ou $\omega_c \geq 4\pi B$), esse procedimento suprimirá as componentes espectrais não centradas em $\pm f_c$, produzindo o desejado sinal modulado $(2/\pi)m(t) \cos \omega_c t$ (Fig. 4.4d).

Vemos, agora, o resultado deste método. A multiplicação de um sinal por um trem de pulsos quadrados é, *na verdade*, uma operação de chaveamento, na qual o sinal $m(t)$ é ligado e desligado periodicamente; isso pode ser feito por meio de simples elementos comutadores controlados por $w(t)$. A Fig. 4.5a ilustra um desses elementos comutadores, o **modulador em ponte de diodos**, alimentado por uma senoide $A \cos \omega_c t$ para produzir a ação de chaveamento. Os diodos D_1, D_2 e D_3, D_4 são pares casados. Quando o sinal $\cos \omega_c t$ tem uma polaridade que torne o terminal c positivo em relação a d , todos os diodos conduzem. Como os diodos D_1 e D_2 são casados, os terminais a e b têm o mesmo potencial e são, efetivamente, curto-circuitados. Durante o próximo meio ciclo, o terminal d é positivo em relação a c e os quatro diodos não conduzem, fazendo com que os terminais a e b fiquem em circuito aberto. A ponte de diodos na Fig. 4.5a, portanto, funciona como uma chave eletrônica, cujos terminais a e b abrem e fecham periodicamente, com a frequência da portadora f_c , quando uma senoide $A \cos \omega_c t$ é aplicada aos terminais c e d . Para obter o sinal $m(t)w(t)$, podemos posicionar essa chave eletrônica (terminais a e b) em série (Fig. 4.5b) ou em paralelo com o sinal $m(t)$, como na Fig. 4.5c. Esses moduladores são conhecidos, respectivamente, como **modulador em ponte de diodos série** e **modulador em ponte de diodos paralela**. O chaveamento de $m(t)$ se repete a cada meio ciclo da portadora, resultando no sinal chaveado $m(t)w(t)$ que, quando aplicado a um filtro passa-faixa, produz o desejado sinal modulado $(2/\pi)m(t) \cos \omega_c t$.

Outro modulador chaveado, conhecido como **modulador em anel**, é mostrado na Fig. 4.6a. Durante o meio ciclo positivo da portadora, os diodos D_1 e D_3 conduzem, enquanto os diodos D_2 e D_4 estão abertos. Assim, o terminal a é conectado a c e o terminal b , a d . Durante o meio ciclo negativo da portadora, os diodos D_1 e D_3 estão abertos, enquanto os diodos D_2 e D_4 conduzem, de modo que o terminal a é conectado a d e o terminal b , a c . Em consequência, a saída é proporcional a $m(t)$ durante o meio ciclo positivo e a $-m(t)$ durante o meio ciclo negativo. Efetivamente, $m(t)$ é multiplicado por um trem de pulsos quadrados $w_0(t)$, como mostrado na Fig. 4.6b. A série de Fourier para $w_0(t)$ pode ser obtida com o uso do sinal $w(t)$ da Eq. (4.5), resultando em $w_0(t) = 2w(t) - 1$. Portanto, podemos usar a série de Fourier de $w(t)$ [Eq. (4.5)] para determinar a série de Fourier de $w_0(t)$ como

$w_0(t) = \omega w(t) - 1$. Portanto, podemos usar a série de Fourier de $w(t)$ [Eq. (4.5)] para determinar a série de Fourier de $w_0(t)$ como

$$w_0(t) = \frac{4}{\pi} \left(\cos \omega_c t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_c t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_c t - \dots \right) \quad (4.7a)$$

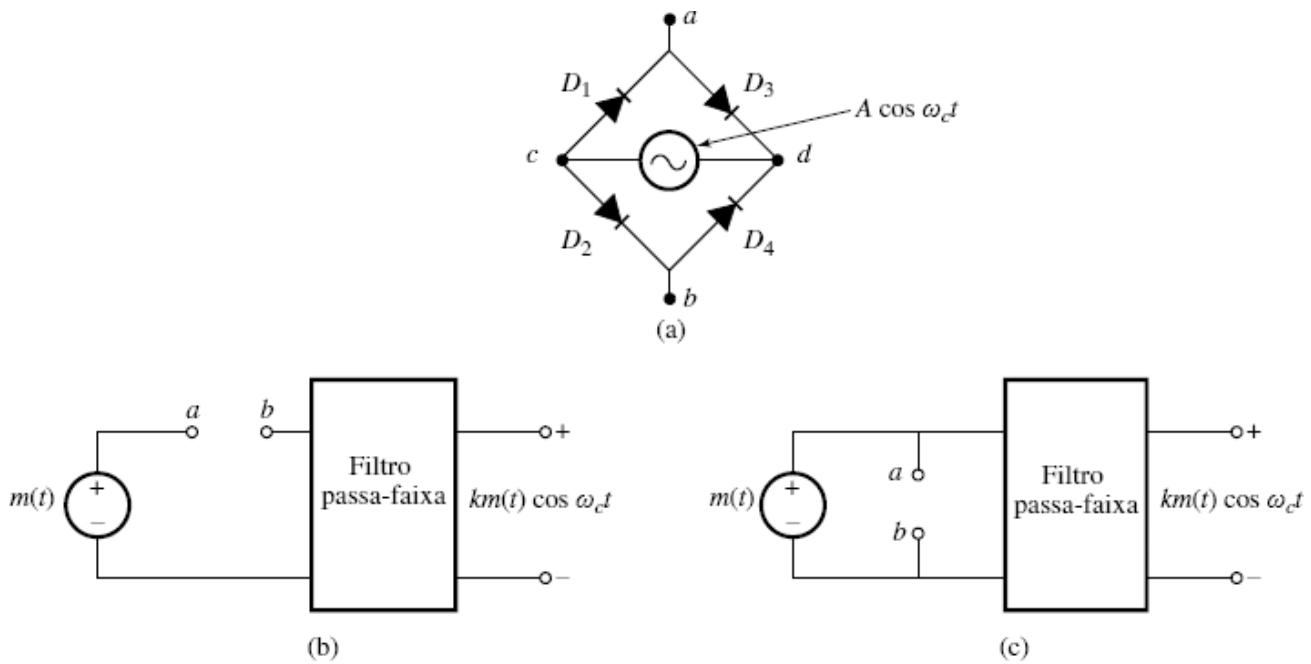
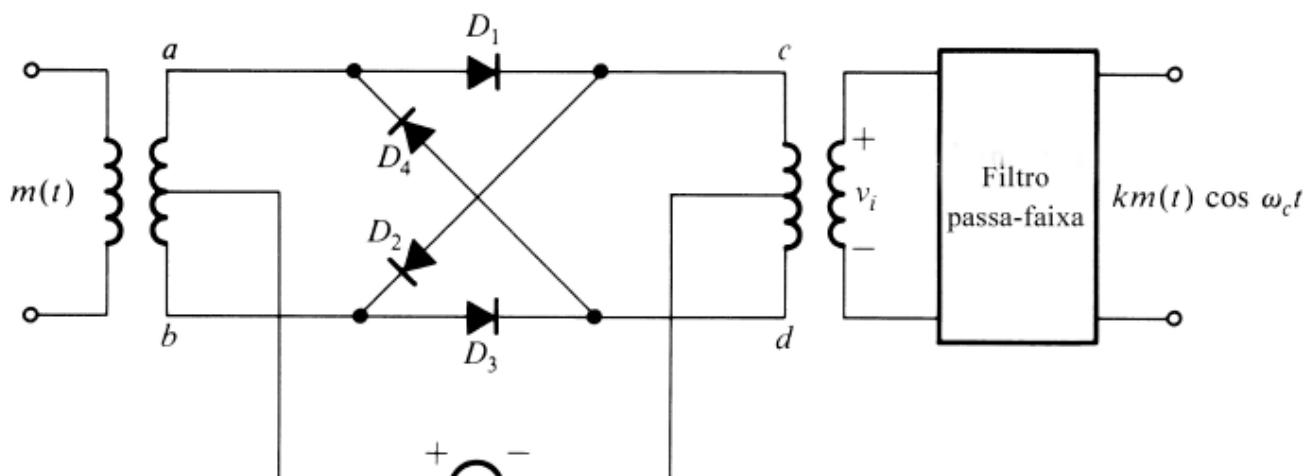


Figura 4.5

(a) Chave eletrônica em ponte de diodos, (b) Modulador em ponte de diodos série, (c) Modulador em ponte de diodos paralela.



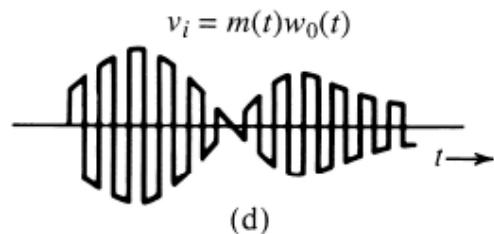
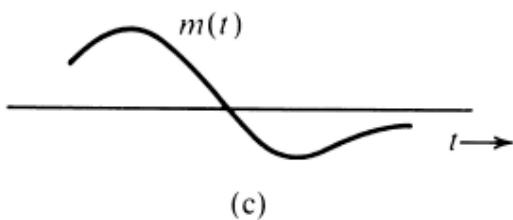
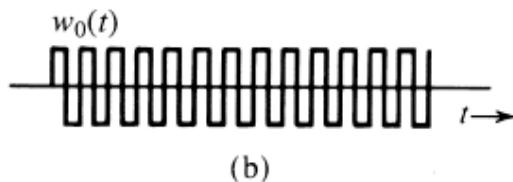
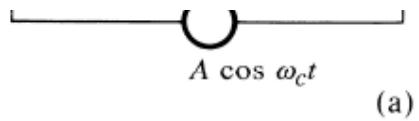


Figura 4.6
Modulador em anel.

Assim, temos

$$v_i(t) = m(t)w_0(t) = \frac{4}{\pi} \left[m(t) \cos \omega_c t - \frac{1}{3}m(t) \cos 3\omega_c t + \frac{1}{5}m(t) \cos 5\omega_c t - \dots \right] \quad (4.7b)$$

O sinal $m(t)w_0(t)$ é representado na Fig. 4.6d. Quando essa forma de onda é aplicada a um filtro passa-faixa centrado em ω_c (Fig. 4.6a), a saída do filtro será o desejado sinal $(4/\pi)m(t) \cos \omega_c t$.

Esse circuito tem duas entradas: $m(t)$ e $\cos \omega_c t$. Nenhum desses sinais aparece na entrada do filtro passa-faixa final. Assim, esse circuito é um exemplo de um **modulador duplamente balanceado**.

Exemplo 4.2 Misturador ou Conversor de Frequências

Analisemos um misturador de frequências, ou conversor de frequências, usado para alterar a frequência portadora de um sinal modulado $m(t) \cos \omega_c t$ de ω_c para outra frequência ω_I .

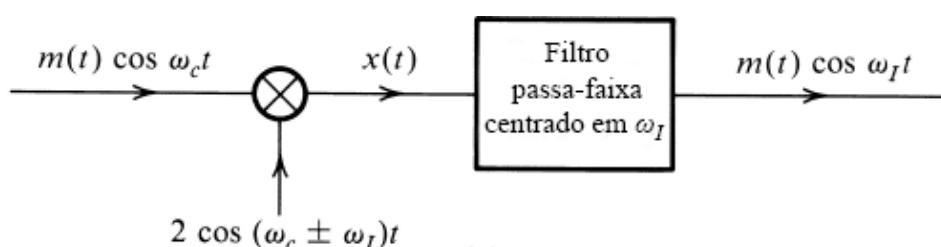
Isso pode ser feito com a multiplicação de $m(t) \cos \omega_c t$ por $2 \cos \omega_{\text{mix}} t$, em que $\omega_{\text{mix}} = \omega_c + \omega_I$ ou $\omega_c - \omega_I$ e a aplicação do produto a um filtro passa-faixa, como indicado na Fig. 4.7a.

O produto $x(t)$ é

$$\begin{aligned} x(t) &= 2m(t) \cos \omega_c t \cos \omega_{\text{mix}} t \\ &= m(t)[\cos (\omega_c - \omega_{\text{mix}})t + \cos (\omega_c + \omega_{\text{mix}})t] \end{aligned}$$

Se escolhermos $\omega_{\text{mix}} = \omega_c - \omega_I$, temos

$$x(t) = m(t)[\cos \omega_I t + \cos (2\omega_c + \omega_I)t]$$



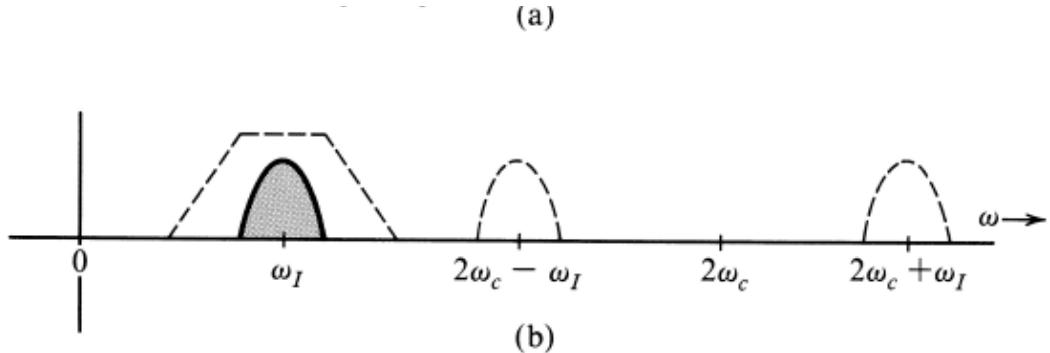


Figura 4.7

Misturador ou conversor de frequências.

Se escolhermos $\omega_{mix} = \omega_c + \omega_I$, obtemos

$$x(t) = m(t)[\cos \omega_I t + \cos (2\omega_c + \omega_I)t]$$

Em qualquer dos casos, desde que $\omega_c - \omega_I \geq 2\pi B$ e $\omega_I \geq 2\pi B$, os vários espectros na Fig. 4.7b não se sobreporão. Em consequência, um filtro passa-faixa na saída, centrado em ω_I , deixará passar o termo $m(t) \cos \omega_I t$ e suprimirá o outro termo, produzindo a saída $m(t) \cos \omega_I t$. Dessa forma, a frequência portadora foi transladada de ω_c para ω_I .

A operação de mistura/conversão de frequências (também conhecida como heterodinagem) consiste, basicamente, na translação do espectro por ω_{mix} . Isso é equivalente à operação de modulação, com uma frequência portadora de modulação (a frequência ω_{mix} do oscilador local) que difere da frequência de entrada por ω_I . Qualquer um dos moduladores discutidos anteriormente pode ser usado para a mistura de frequências. Quando selecionamos a frequência portadora local como $\omega_{mix} = \omega_c + \omega_I$, a operação é denominada **conversão ascendente** (*upconversion*); quando selecionamos a frequência portadora local como $\omega_{mix} = \omega_c - \omega_I$, a operação é denominada **conversão descendente** (*downconversion*).

Demodulação de Sinais DSB-SC

Como discutido anteriormente, a demodulação de um sinal DSB-SC envolve, essencialmente, a multiplicação pelo sinal da portadora e é idêntica à modulação (Fig. 4.1). No receptor, multiplicamos o sinal de entrada por uma portadora local de frequência e fase em sincronismo com a portadora recebida. O produto é, então, aplicado a um filtro passa-baixas. A **única diferença** entre modulador e demodulador se refere ao sinal de entrada e ao filtro de saída. No modulador, a mensagem $m(t)$ é a entrada e a saída do multiplicador é aplicada a um filtro passa-faixa centrado em ω_c ; no demodulador, a entrada é o sinal DSB-SC e a saída do multiplicador é aplicada a um filtro passa-baixas. Portanto, todos os moduladores discutidos anteriormente, sem multiplicadores, podem ser usados como demoduladores, desde que os filtros passa-faixa de saída sejam substituídos por filtros passa-baixas de largura de banda B .

Para demodulação, o receptor deve gerar uma portadora em sincronismo de fase e de frequência com a portadora de entrada. Esses demoduladores são também denominados demoduladores **síncronos** ou **coerentes** (ou, ainda, **homódinos**).

Exemplo 4.3 Analisemos o demodulador chaveado que utiliza a chave eletrônica (ponte de diodos) na Fig. 4.5a como comutador (em série ou em paralelo).

O sinal de entrada é $m(t) \cos \omega_c t$. A portadora provoca o chaveamento periódico do sinal de entrada. Portanto, a saída é $m(t) \cos \omega_c t \times w(t)$. Fazendo uso da identidade trigonométrica $\cos x \cos y = 0,5[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$, obtemos

$$\begin{aligned} m(t) \cos \omega_c t \times w(t) &= m(t) \cos \omega_c t \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos \omega_c t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_c t + \dots \right) \right] \\ &= \frac{2}{\pi} m(t) \cos^2 \omega_c t + \text{termos da forma } m(t) \cos n\omega_c t \\ &= \frac{1}{\pi} m(t) + \frac{1}{\pi} m(t) \cos 2\omega_c t + \text{termos da forma } m(t) \cos n\omega_c t \end{aligned}$$

Os termos da forma $m(t) \cos n\omega_c t$ têm espectros centrados em $\pm n\omega_c$ e são suprimidos pelo filtro passa-baixas, que produz a saída $(1/\pi) m(t)$. Deixamos como exercício para o leitor a comprovação de que, ao funcionar como demodulador, a saída do circuito em anel na Fig. 4.6a (com um filtro passa-baixas na saída) é $(2/\pi) m(t)$ (duas vezes a saída do demodulador

chaveado desse exemplo).

4.3 MODULAÇÃO EM AMPLITUDE (AM)

Na seção anterior, iniciamos a discussão da modulação em amplitude com a modulação em amplitude DSB-SC, pois essa pode ser facilmente entendida e analisada tanto no domínio do tempo como no domínio da frequência. Contudo, nem sempre a simplicidade analítica equivale à simplicidade de implementação prática. A demodulação (coerente) de um sinal DSB-SC requer que o receptor possua um sinal de portadora em sincronismo com a portadora recebida. Na prática, essa exigência não é atendida com facilidade. Como o sinal modulado pode ter viajado centenas de quilômetros e pode ter sofrido algum deslocamento de frequência desconhecido, o sinal recebido tem, na verdade, a forma

$$r(t) = A_c m(t - t_0) \cos [(\omega_c + \Delta\omega)(t - t_0)] = A_c m(t - t_0) \cos [(\omega_c + \Delta\omega)t - \theta_d]$$

em que $\Delta\omega$ representa o efeito de deslocamento Doppler e

$$\theta_d = (\omega_c + \Delta\omega)t_d$$

resulta de um atraso temporal t_0 desconhecido. Para demodulação coerente, o receptor deve ser suficientemente sofisticado para gerar um oscilador local $\cos [(\omega_c + \Delta\omega)t - \theta_d]$ a partir apenas do sinal recebido $r(t)$. Um receptor desse tipo pode ser de difícil implementação e ter custo elevado. Em sistemas de difusão, o alto custo deve ser evitado, pois podem existir numerosos receptores para cada transmissor.

Como alternativa ao demodulador coerente, o transmissor deve enviar uma portadora $A \cos \omega_c t$ juntamente com o sinal modulado $m(t) \cos \omega_c t$, de modo que não seja necessária a geração de uma portadora no receptor. Nesse caso, o transmissor deve transmitir a uma potência de saída muito mais alta, o que aumenta os custos da alternativa. Em comunicação ponto a ponto, em que há um transmissor para cada receptor, uma maior complexidade no receptor pode ser justificável, desde que seu custo seja compensado por um transmissor mais barato. Em sistemas de difusão, em que há um grande número de receptores para cada transmissor, é mais econômico ter um transmissor caro de alta potência e receptores simples e baratos, pois qualquer redução de custo de receptores é multiplicada pelo número de unidades receptoras. Por isso, sistemas de difusão tendem a privilegiar a transferência de custos dos (numerosos) receptores para os (poucos) transmissores.

A segunda opção – transmissão de uma portadora juntamente com o sinal modulado – é a escolha óbvia no caso de sistemas de difusão, tendo em vista os benefícios de custos. Isso nos leva aos chamados sistemas AM (de modulação em amplitude), em que o sinal transmitido $\varphi_{AM}(t)$ é dado por

$$\varphi_{AM}(t) = A \cos \omega_c t + m(t) \cos \omega_c t \quad (4.8a)$$

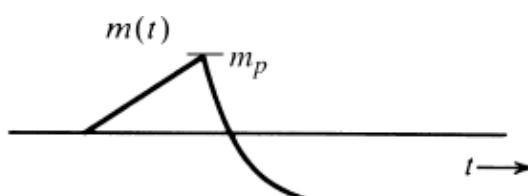
$$= [A + m(t)] \cos \omega_c t \quad (4.8b)$$

O espectro de $\varphi_{AM}(t)$ é basicamente o mesmo que o de $\varphi_{DSB-SC}(t) = m(t) \cos \omega_c t$, exceto pelos dois impulsos adicionais em $\pm f_c$,

$$\varphi_{AM}(t) \iff \frac{1}{2}[M(f + f_c) + M(f - f_c)] + \frac{A}{2}[\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)] \quad (4.8c)$$

Uma comparação entre $\varphi_{AM}(t)$ e $\varphi_{DSB-SC}(t) = m(t) \cos \omega_c t$ deixa claro que o sinal AM é idêntico ao sinal DSB-SC, com $A + m(t)$ como o sinal modulante [no lugar de $m(t)$]. O valor de A é sempre tomado como positivo. Portanto, para esboçar a forma de onda de $\varphi_{AM}(t)$, desenhamos o envelope ou envoltória $|A + m(t)|$ e sua imagem $-|A + m(t)|$, e preenchemos o espaço entre as duas curvas com a senoide na frequência da portadora f_c . O valor de A afeta o envelope temporal do sinal modulado.

Os dois casos são considerados na Fig. 4.8. No primeiro caso, A tem valor suficientemente grande para que $A + m(t) \geq 0$ seja sempre não negativo. No segundo, o valor de A não é bastante para satisfazer esta condição. No primeiro caso, o envelope tem a mesma forma que $m(t)$ (deslocada de um valor de constante A). No segundo, a formas do envelope e de $m(t)$ são diferentes, pois a parte negativa de $A + m(t)$ é retificada. Isso significa que podemos detectar o desejado sinal $m(t)$ se detectarmos o envelope no primeiro caso, em que $A + m(t) > 0$. Essa detecção não é possível no segundo caso. Veremos que a detecção de envelope é uma operação extremamente simples e barata, que não requer a geração de uma portadora local para demodulação. No entanto, como visto anteriormente, o envelope AM contém informação sobre $m(t)$ apenas se o sinal AM $[A + m(t)] \cos \omega_c t$ satisfizer a condição $A + m(t) > 0$ para todo t .



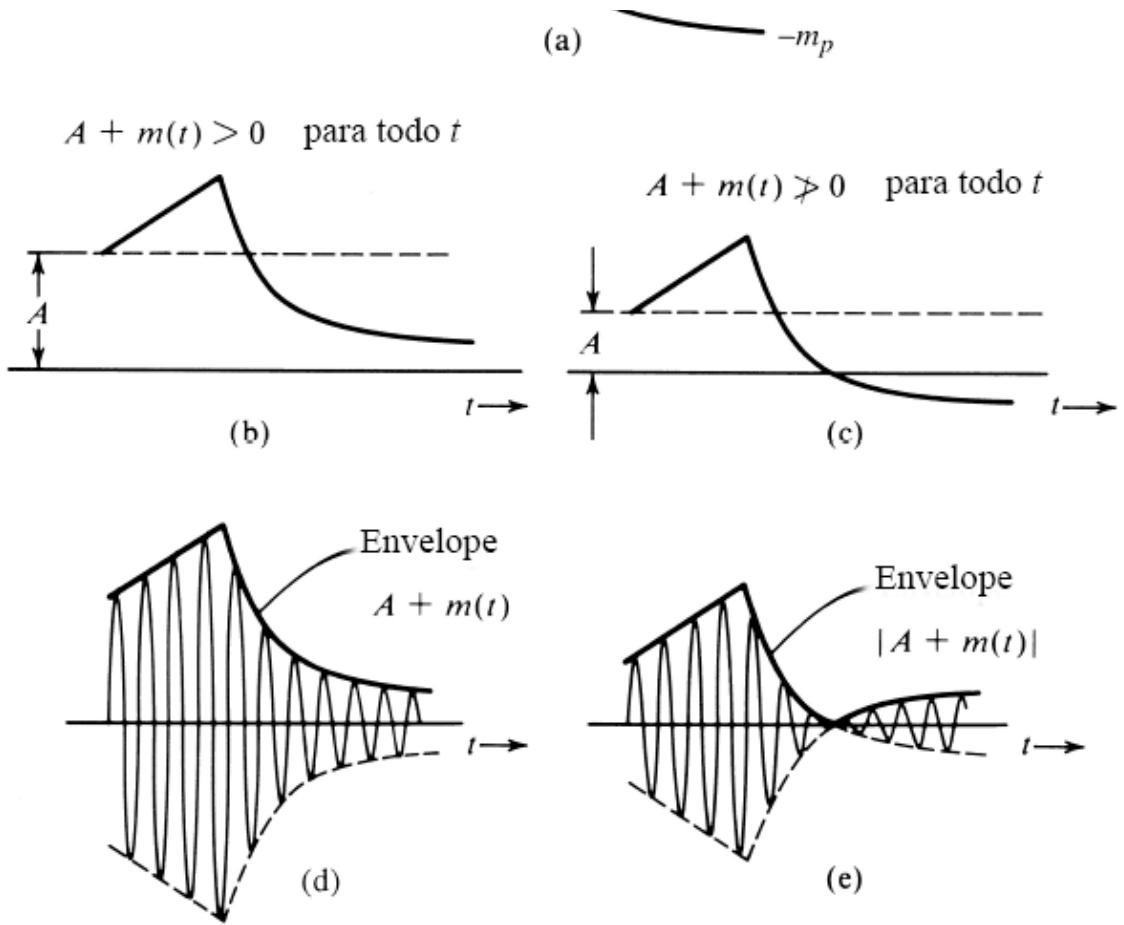


Figura 4.8
Sinal AM e seu envelope.

Agora, vejamos mais específicos a respeito da definição de “envelope”. Consideremos um sinal $E(t) \cos \omega_c t$. Caso $E(t)$ varie lentamente em comparação à portadora senoidal $\cos \omega_c t$, o **envelope** de $E(t) \cos \omega_c t$ é $|E(t)|$. Isso significa [ver Eq. (4.8b)] que, se e somente se $A + m(t) \geq 0$ para todo t , o envelope de $\varphi_{AM}(t)$ é

$$|A + m(t)| = A + m(t)$$

Em outras palavras, para que a detecção de envelope detecte $m(t)$ corretamente, duas condições devem ser satisfeitas:

- (a) $f_c \gg$ largura de banda de $m(t)$
- (b) $A + m(t) \geq 0$

Essa conclusão pode ser prontamente comprovada a partir da Fig. 4.8d e e. Na Fig. 4.8d, em que $A + m(t) \geq 0$, $A + m(t)$ é, de fato, o envelope e $m(t)$ pode ser recuperado desse envelope. Na Fig. 4.8e, em que $A + m(t)$ não é sempre positivo, o envelope $|A + m(t)|$ é retificado de $A + m(t)$ e $m(t)$ não pode ser recuperado desse envelope. Em consequência, na Fig. 4.8d, a demodulação de $\varphi_{AM}(t)$ corresponde à simples detecção de envelope. Assim, a **condição para detecção de envelope** de um sinal AM é

$$A + m(t) \geq 0 \quad \text{para todo } t \quad (4.9a)$$

Se $m(t) \geq 0$ para todo t , $A = 0$ satisfaz a condição (4.9a). Nesse caso, não há necessidade de adicionar qualquer portadora, pois o envelope do sinal DSB-SC $m(t) \cos \omega_c t$ é $m(t)$, de modo que esse sinal DSB-SC pode ser detectado via detecção de envelope. Na discussão a seguir, presumiremos que $m(t) \geq 0$ para todo t , ou seja, $m(t)$ pode ser negativo para alguns valores de t .

Sinais de Mensagem $m(t)$ com Deslocamento Nulo: Sejam $\pm m_p$ os valores máximo e mínimo de $m(t)$, respectivamente (Fig. 4.8). Isto significa que $m(t) \geq -m_p$. Logo, a condição para detecção de envelope (4.9a) é equivalente a

$$A \geq -m_{\min} \quad (4.9b)$$

Dessa forma, a mínima amplitude de portadora necessária para viabilizar a detecção de envelope é m_p . Isso fica bem claro da Fig. 4.8. Definimos o índice de modulação μ como

$$\mu = \frac{m_p}{A} \quad (4.10a)$$

$$\mu = \frac{A}{A}$$

(4.10a)

Para que a detecção de envelope seja sem distorção, a condição é $A \geq m_p$. Portanto,

$$0 \leq \mu \leq 1 \quad (4.10b)$$

é a condição necessária para demodulação sem distorção de sinais AM com detector de envelope.

Quando $A < m_p$, a Eq. (4.10a) mostra que $\mu > 1$ (sobremodulação). Nesse caso, a opção de detecção de envelope deixa de ser viável. Precisamos, então, lançar mão da demodulação síncrona. Vale notar que a demodulação síncrona pode ser usada para qualquer valor de μ , pois o demodulador recuperará o sinal $A + m(t)$. Basta um bloco adicional para remover a tensão DC A . O detector de envelope, consideravelmente mais simples e barato que o detector síncrono, pode ser usado apenas para $\mu \leq 1$.

Sinais de Mensagem $m(t)$ com Deslocamento Não Nulo: Em raras ocasiões, o sinal de mensagem $m(t)$ terá um deslocamento não nulo, de modo que seus valores máximo, m_{\max} , e mínimo, m_{\min} , não sejam simétricos:

$$m_{\min} \equiv -m_{\max}$$

Nesse caso, podemos observar que qualquer deslocamento do envelope não altera a forma da saída do detector de envelope. Na verdade, um deslocamento constante não carrega qualquer informação.

Assim, a detecção de envelope ainda seria sem distorção se

$$0 \leq \mu \leq 1 \quad (4.11a)$$

com a definição do índice de modulação modificada para

$$\mu = \frac{m_{\max} - m_{\min}}{2A + m_{\max} + m_{\min}} \quad (4.11b)$$

Exemplo 4.4 Esboçemos a forma de onda de $\varphi_{AM}(t)$ para índices de modulação $\mu = 0,5$ e $\mu = 1$, com $m(t) = b \cos \omega_m t$. Esse caso é referido como **modulação por tom**, pois o sinal modulante é uma senoide pura (ou tom puro).

Aqui, $m_{\max} = b$ e $m_{\min} = -b$. Logo, segundo a Eq. (4.10a), o índice de modulação é

$$\mu = \frac{b - (-b)}{2A + b + (-b)} = \frac{b}{A}$$

Com isso, $b = \mu A$ e

$$m(t) = b \cos \omega_m t = \mu A \cos \omega_m t$$

Portanto,

$$\varphi_{AM}(t) = [A + m(t)] \cos \omega_c t = A[1 + \mu \cos \omega_m t] \cos \omega_c t$$

A Fig. 4.9 mostra os sinais modulados correspondentes a $\mu = 0,5$ e $\mu = 1$, respectivamente.

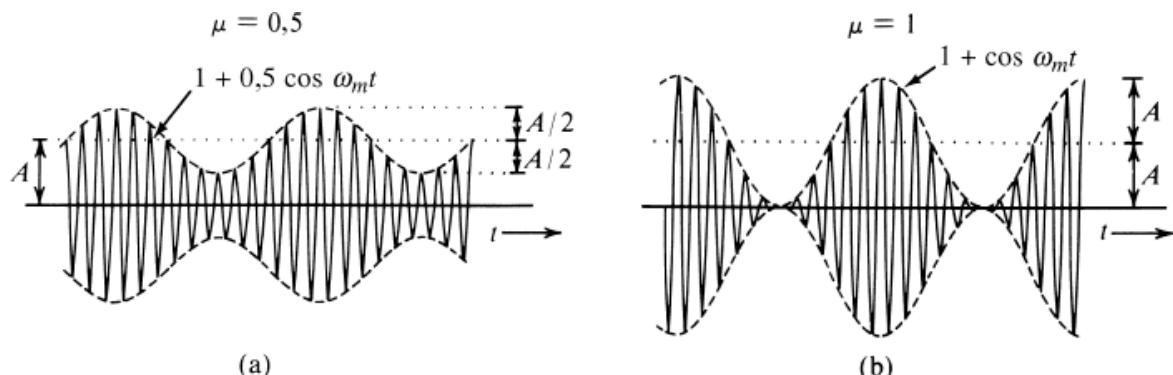


Figura 4.9 Sinal AM modulado por tom (a) $\mu = 0,5$ e (b) $\mu = 1$.

Potências da Banda Lateral e da Portadora

Em AM, a vantagem da detecção de envelope tem um preço, pois o termo da portadora não transporta informação, de modo que, desse ponto de vista, potência da portadora é desperdiçada:

$$\varphi_{\text{AM}}(t) = \underbrace{A \cos \omega_c t}_{\text{portadora}} + \underbrace{m(t) \cos \omega_c t}_{\text{banda lateral}}$$

A potência da portadora P_c é o valor quadrático médio de $A \cos \omega_c t$, que é $A^2/2$. A potência da banda lateral P_s é a potência de $m(t) \cos \omega_c t$, que é $0,5 \overline{m^2}(t)$ [Eq. (3.93)]. Logo,

$$P_c = \frac{A^2}{2} \quad \text{e} \quad P_s = \frac{1}{2} \overline{m^2}(t)$$

A informação útil da mensagem reside na potência da banda lateral, enquanto a potência da portadora é usada por conveniência na modulação e na demodulação. A potência total é a soma das potências da portadora (desperdiçada) e da banda lateral (útil). A eficiência de potência, η , é definida como

$$\eta = \frac{\text{potência útil}}{\text{potência total}} = \frac{P_s}{P_c + P_s} = \frac{\overline{m^2}(t)}{A^2 + \overline{m^2}(t)} 100\%$$

Para o caso especial de modulação por tom

$$m(t) = \mu A \cos \omega_m t \quad \text{e} \quad \overline{m^2}(t) = \frac{(\mu A)^2}{2}$$

Logo,

$$\eta = \frac{\mu^2}{2 + \mu^2} 100\%$$

com a condição $0 \leq \mu \leq 1$. Podemos observar que η cresce monotonamente com μ e que η_{\max} ocorre em $\mu = 1$, de modo que

$$\eta_{\max} = 33\%$$

Portanto, para modulação por tom, na melhor condição ($\mu = 1$), apenas um terço da potência transmitida é usada para transportar mensagens. No caso de sinais práticos, a eficiência é ainda pior, da ordem de 25% ou menos, em comparação com sinais DSB-SC. A melhor condição implica $\mu = 1$. Menores valores de μ degradam a eficiência ainda mais. Por essa razão, compressão de volume e limitação de pico são comumente empregadas em AM para assegurar que modulação completa ($\mu = 1$) é mantida na maior parte do tempo.

Exemplo 4.5 Determinemos η e a porcentagem da potência total transportada pelas bandas laterais da onda AM com modulação por tom, quando $\mu = 0,5$ e $\mu = 0,3$.

Para $\mu = 0,5$,

$$\eta = \frac{\mu^2}{2 + \mu^2} 100\% = \frac{(0,5)^2}{2 + (0,5)^2} 100\% = 11,11\%$$

Logo, apenas 11% da potência total reside nas bandas laterais. Para $\mu = 0,3$,

$$\eta = \frac{(0,3)^2}{2 + (0,3)^2} 100\% = 4,3\%$$

Ou seja, apenas 4,3% da potência está nas bandas laterais que contêm o sinal de mensagem.

Geração de Sinais AM

Em princípio, a geração de sinais AM é idêntica à de sinais DSB-SC discutidos na Seção 4.2, exceto pela componente adicional de portadora $A \cos \omega_c t$, que deve ser adicionada ao sinal DSB-SC.

Demodulação de Sinais AM

Como no caso de sinais DSB-SC, o sinal AM pode ser demodulado de forma coerente por uma portadora gerada localmente. Contudo, a demodulação AM coerente ou síncrona viola o propósito de AM, pois não tira vantagem da componente adicional de portadora $A \cos \omega_c t$. Como vimos, no caso $\mu \leq 1$, o envelope do sinal AM segue o sinal de mensagem $m(t)$. A seguir, consideraremos dois métodos incoerentes de demodulação AM sob a condição $0 < \mu \leq 1$: detecção por retificação e detecção de envelope.

Detector Retificador: Se um sinal AM for aplicado a um circuito consistindo em um diodo e um resistor (Fig. 4.10), a parte negativa da onda AM será removida. A saída através do resistor é uma versão retificada de meia onda do sinal AM. Visualmente, o diodo funciona como um tesoura que corta os meios ciclos negativos da senoide modulada. Em essência, na saída do retificador, o sinal AM é multiplicado por $w(t)$. Logo, a saída retificada de meia onda $v_R(t)$ é

$$v_R(t) = \{[A + m(t)] \cos \omega_c t\} w(t) \quad (4.12)$$

$$= [A + m(t)] \cos \omega_c t \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos \omega_c t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_c t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_c t - \dots \right) \right] \quad (4.13)$$

$$= \frac{1}{\pi} [A + m(t)] + \text{outros termos de frequências mais altas} \quad (4.14)$$

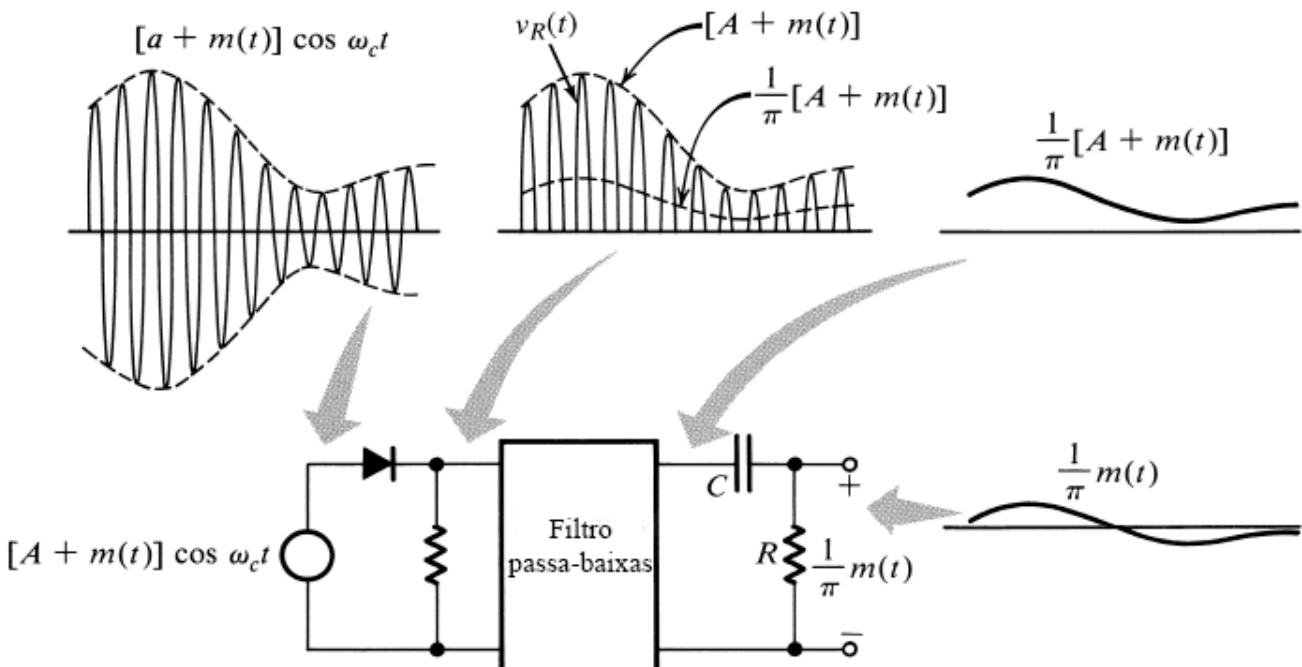


Figura 4.10

Detector retificador de AM.

Quando $v_R(t)$ é aplicado a um filtro passa-baixas com frequência de corte B Hz, a saída é $[A + m(t)]/\pi$ e todos os outros termos em

v_R de frequências maiores que B Hz são suprimidos. O termo de A/π pode ser bloqueado por um capacitor (Fig. 4.10), resultando na saída desejada $m(t)/\pi$. A saída pode ser dobrada com o uso de um retificador de onda completa.

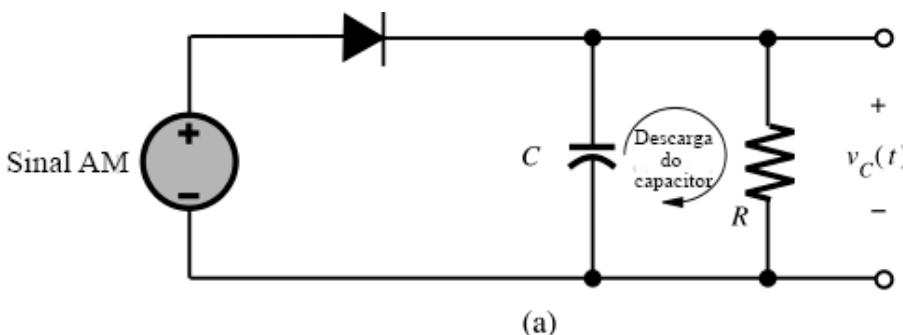
É interessante observar que, por causa da multiplicação por $w(t)$, a detecção por retificação é, para todos os efeitos, uma detecção síncrona realizada sem o uso de um oscilador local. Em AM, a alta componente da portadora assegura que as passagens por zero sejam periódicas e, portanto, que informação a respeito da frequência e da fase da portadora no transmissor estejam embutidas no próprio sinal AM.

Detector de Envelope: A saída de um detector de envelope segue o envelope do sinal modulado. O circuito simples ilustrado na Fig. 4.11a funciona como um detector de envelope. No ciclo positivo do sinal de entrada, a entrada cresce e pode ultrapassar a tensão carregada no capacitor $v_C(t)$. Ligando o diodo e permitindo que o capacitor C se carregue até a tensão de pico do ciclo do sinal de entrada. À medida que o sinal de entrada cai abaixo do valor de pico, seu valor rapidamente fica abaixo da tensão no capacitor (que é muito próxima do valor de pico), causando a abertura do diodo. Agora, o capacitor se descarrega através do resistor R a uma taxa mais baixa (com constante de tempo RC). Durante o próximo ciclo positivo, o mesmo drama se repete. Quando o sinal de entrada ultrapassa a tensão no capacitor, o diodo volta a conduzir. Novamente, o capacitor se carrega até o valor de pico deste (novo) ciclo. O capacitor se descarrega lentamente durante o ciclo negativo.

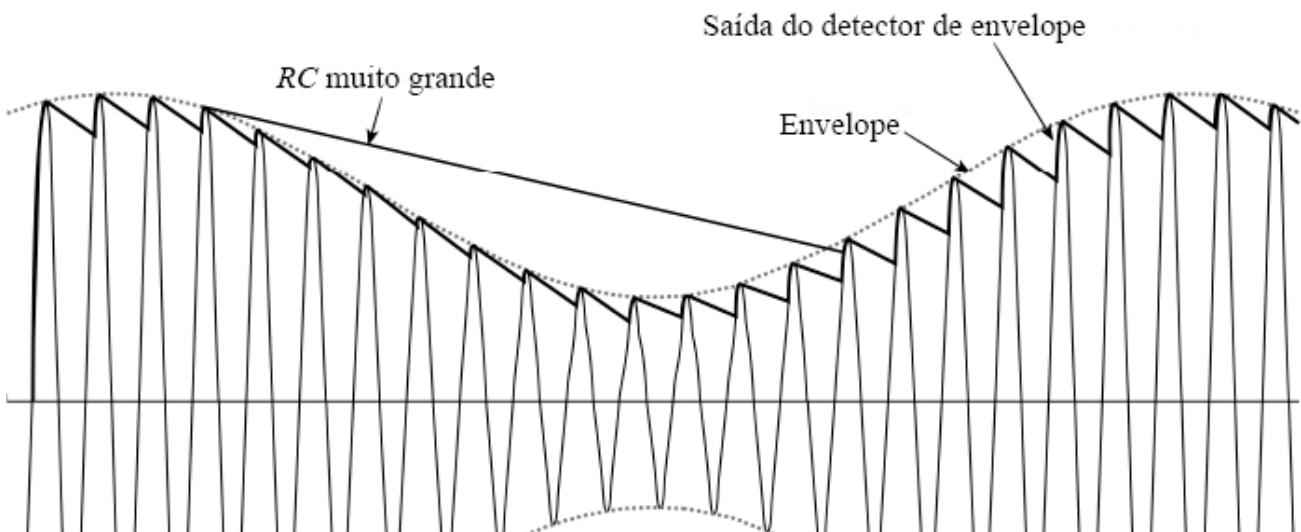
Durante cada ciclo positivo, o capacitor se carrega até a tensão de pico do sinal de entrada e, então, se descarrega lentamente até o próximo ciclo positivo, como ilustrado na Fig. 4.11b. Assim, a tensão de saída, $v_C(t)$, segue o (crescente) envelope do sinal AM de entrada. Igualmente importante, o lento descarregamento do capacitor através do resistor R permite que a tensão no capacitor siga o envelope decrescente. O descarregamento do capacitor entre picos positivos origina um sinal oscilatório de frequência ω_c na saída. Essa oscilação (*ripple*) pode ser reduzida com a escolha de uma maior constante de tempo RC , de modo que o capacitor se descarregue muito pouco entre picos positivos ($RC \gg 1/\omega_c$). Contudo, a escolha de um valor muito grande para RC impossibilitaria que a tensão no capacitor seguisse um envelope de declínio rápido (ver Fig. 4.11b). Uma vez que a máxima taxa de declínio do envelope AM é determinada pela largura de banda B do sinal de mensagem $m(t)$, o critério de projeto para RC deve ser

$$1/\omega_c \ll RC < 1/(2\pi B) \quad \text{ou} \quad 2\pi B < \frac{1}{RC} \ll \omega_c$$

A saída do detector de envelope é $v_C(t) = A + m(t)$, com um *ripple* de frequência ω_c . O termo de A pode ser bloqueado por um capacitor ou um simples filtro passa-altas RC . O *ripple* pode ser ainda mais reduzido com o uso de um outro filtro RC (passa-baixas).



(a)



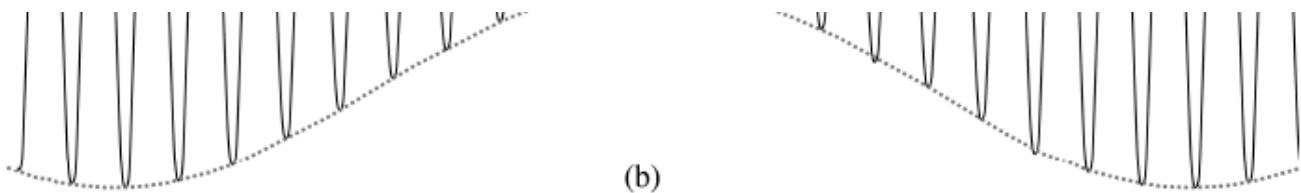


Figura 4.11
Detector de envelope para AM.

4.4 MODULAÇÕES EM AMPLITUDE COM EFICIÊNCIA DE LARGURA DE BANDA

Como ilustrado na Fig. 4.12, o espectro DSB (tanto para portadora suprimida como para AM) tem duas bandas laterais: uma banda lateral superior (USB) e uma banda lateral inferior (LSB), cada uma contendo a informação completa do sinal em banda base $m(t)$. Em consequência, para um sinal em banda base $m(t)$ com largura de banda B Hz, modulações DSB requerem, para transmissão, o dobro da largura de banda de radiofrequênci. Para melhorar a eficiência espectral da modulação em amplitude, existem dois esquemas básicos que ou tiram proveito da redundância espectral de 100% ou a removem:

- Modulação em banda lateral simples (SSB – *single-sideband*), que remove a LSB ou a USB e usa apenas uma largura de banda de B Hz para um sinal de mensagem $m(t)$;
- modulação em amplitude em quadratura (QAM – *quadrature amplitude modulation*), que usa a redundância espectral para enviar duas mensagens na mesma largura de banda de $2B$ Hz.

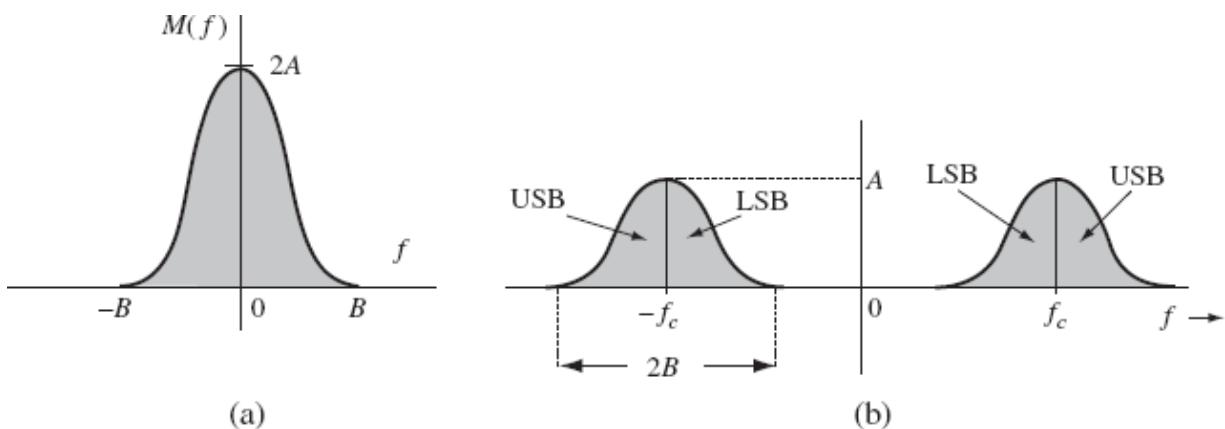
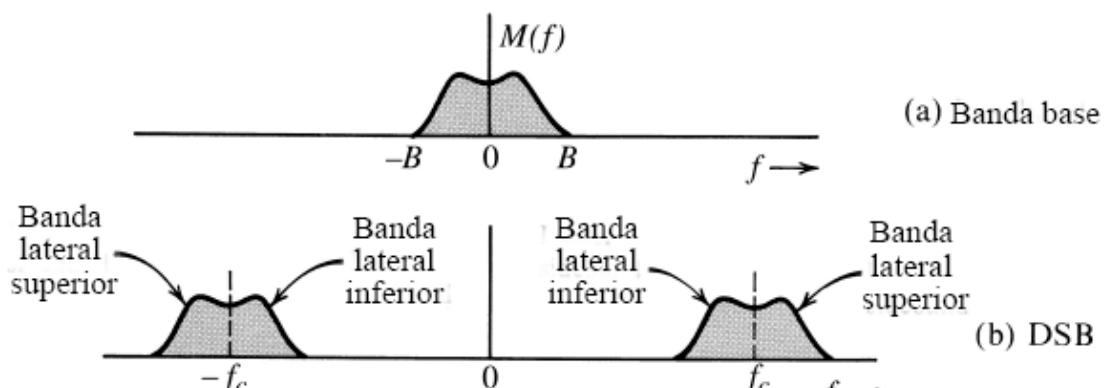


Figura 4.12
(a) Espectro original da mensagem. (b) Redundância de largura de banda na modulação DSB.



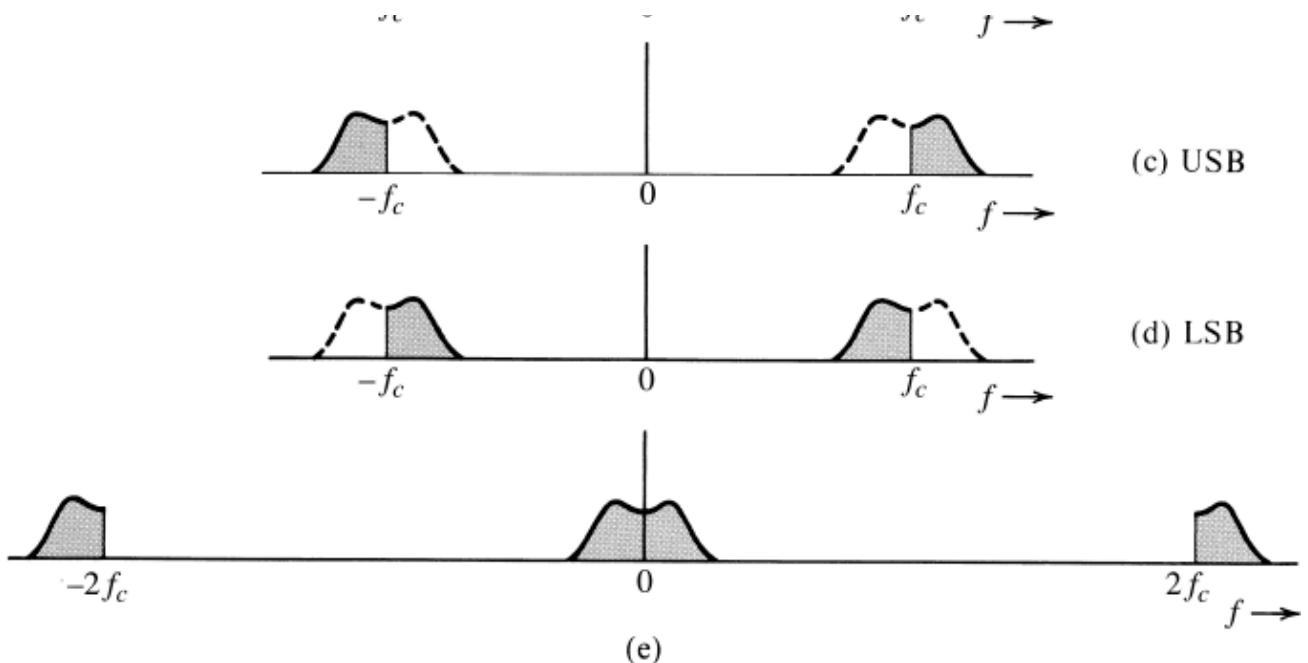


Figura 4.13
Espectros SSB, obtidos com supressão de uma das bandas laterais de DSB.

Modulação em Amplitude: Banda Lateral Simples (SSB)

Como ilustrado na Fig. 4.13, a LSB ou a USB pode ser suprimida do sinal DSB via filtragem passa-faixa. Esquemas em que apenas uma das bandas laterais é transmitida são conhecidos como **transmissão em banda lateral simples (SSB)** e requerem apenas a metade da largura de banda do sinal DSB.

Um sinal SSB pode ser demodulado de modo coerente (síncrono), da mesma forma que um sinal DSB-SC. Por exemplo, a multiplicação de um sinal USB (Fig. 4.13c) por $\cos \omega_c t$ desloca o espectro do mesmo para a esquerda e para a direita por ω_c , resultando no espectro ilustrado na Fig. 4.13e. Uma filtragem passa-baixas desse sinal produz o desejado sinal em banda base. O mesmo se aplica a sinais LSB. Como a demodulação de sinais SSB é idêntica à de sinais DSB, os transmissores podem utilizar apenas a metade da largura de banda de sinais DSB-SC, sem qualquer custo adicional nos receptores. Como uma componente de portadora não acompanha o sinal modulado SSB, as saídas desse tipo de moduladores são referidas como sinais com portadora suprimida (SSB-SC).

Transformada de Hilbert

A seguir, apresentaremos uma nova ferramenta, que usaremos mais adiante, conhecida como **transformada de Hilbert**. Usamos $x_h(t)$ e $\{x(t)\}$ para denotar a transformada de Hilbert do sinal $x(t)$:

$$x_h(t) = \mathcal{H}\{x(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\alpha)}{t - \alpha} d\alpha \quad (4.15)$$

Vale observar que o lado direito da Eq. (4.15) tem a forma de uma convolução

$$x(t) * \frac{1}{\pi t}$$

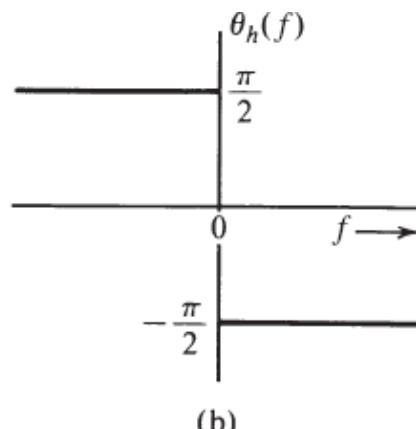
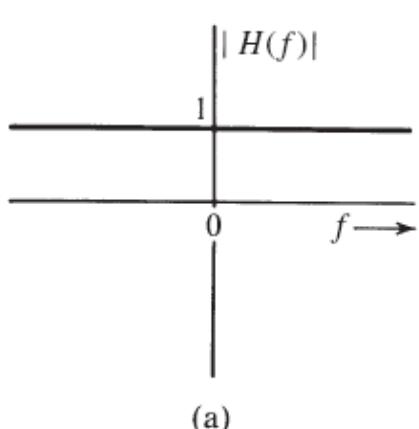


Figura 4.14

Função de transferência de um deslocador de fase ideal de $\pi/2$ (transformador de Hilbert).

A aplicação da propriedade de dualidade do par 12 da Tabela 3.1 resulta em $1/\pi t \Leftrightarrow -j \operatorname{sgn}(f)$. Aplicação da propriedade da convolução temporal à convolução da Eq. (4.15) leva a

$$X_h(f) = -jX(f) \operatorname{sgn}(f) \quad (4.16)$$

Da Eq. (4.16), temos que, se $m(t)$ passar por uma função de transferência $H(f) = -j \operatorname{sgn}(f)$, a saída será $m_h(t)$, a transformada de Hilbert de $m(t)$. Como

$$H(f) = -j \operatorname{sgn}(f) \quad (4.17)$$

$$= \begin{cases} -j = 1 \cdot e^{-j\pi/2} & f > 0 \\ j = 1 \cdot e^{j\pi/2} & f < 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

temos que $|H(f)| = 1$ e $\theta_h(f) = -\pi/2$ para $f > 0$, e $\pi/2$ para $f < 0$, como mostrado na Fig. 4.14. Dessa forma, se alterarmos a fase de cada componente de $m(t)$ de $\pi/2$ (sem alterar sua amplitude), o sinal resultante será $m_h(t)$, a transformada de Hilbert de $m(t)$. Portanto, um transformador de Hilbert é um deslocador de fase ideal que translada a fase de cada componente espectral de $-\pi/2$.

Representação de Sinais SSB no Domínio do Tempo

Uma vez que os blocos fundamentais de um sinal SSB são as bandas laterais, busquemos, primeiro, uma expressão para cada banda lateral no domínio do tempo.

A Fig. 4.15a mostra o espectro de mensagem $M(f)$. A Fig. 4.15b mostra sua metade direita, $M_+(f)$, e a Fig. 4.15c, a metade esquerda, $M_-(f)$. Das Fig. 4.15b e c, observamos que

$$M_+(f) = M(f) \cdot u(f) = M(f) \frac{1}{2} [1 + \operatorname{sgn}(f)] = \frac{1}{2} [M(f) + jM_h(f)] \quad (4.19a)$$

$$M_-(f) = M(f)u(-f) = M(f) \frac{1}{2} [1 - \operatorname{sgn}(f)] = \frac{1}{2} [M(f) - jM_h(f)] \quad (4.19b)$$

Agora, podemos expressar o sinal SSB em termos de $m(t)$ e $m_h(t)$. A partir da Fig. 4.15d, fica claro que o espectro USB, $\Phi_{\text{USB}}(f)$, pode ser expresso como

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{USB}}(f) &= M_+(f - f_c) + M_-(f + f_c) \\ &= \frac{1}{2} [M(f - f_c) + M(f + f_c)] - \frac{1}{2j} [M(f - f_c) - M(f + f_c)] \end{aligned}$$

Da propriedade de translação na frequência, a transformada inversa dessa equação é dada por

$$\varphi_{\text{USB}}(t) = m(t) \cos \omega_c t - m_h(t) \sin \omega_c t \quad (4.20a)$$

Da mesma forma, podemos mostrar que

$$\varphi_{\text{LSB}}(t) = m(t) \cos \omega_c t + m_h(t) \sin \omega_c t \quad (4.20b)$$

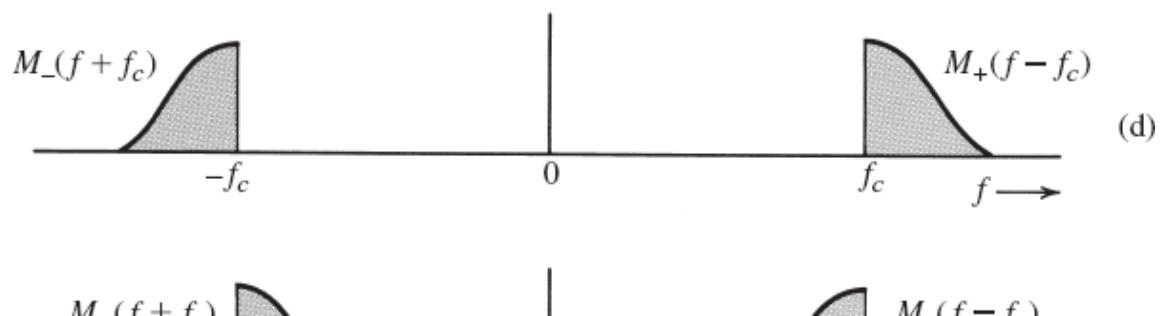
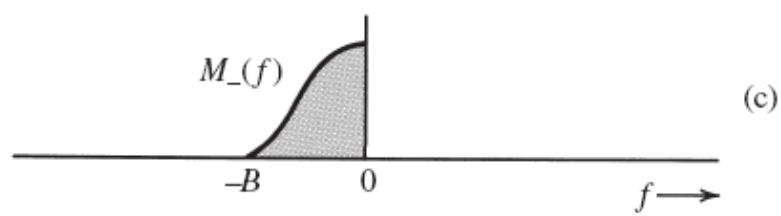
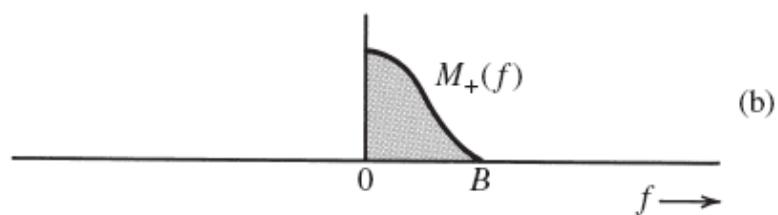
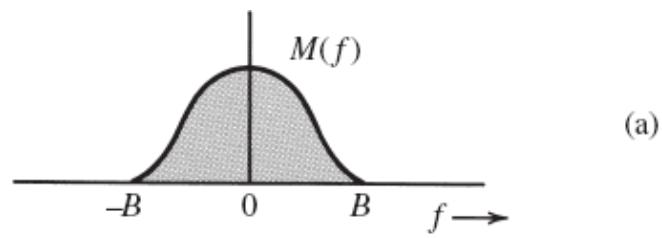




Figura 4.15

Expressão de espectros SSB em termos de $M_+(f)$ e $M_-(f)$.

Logo, um sinal SSB genérico $\varphi_{SSB}(t)$ pode ser expresso como

$$\varphi_{SSB}(t) = m(t) \cos \omega_c t \mp m_h(t) \sin \omega_c t \quad (4.20c)$$

em que o sinal menos se aplica a USB e o sinal mais, a LSB.

Dada a expressão de sinais SSB-SC no domínio do tempo, podemos agora confirmar analiticamente (e não graficamente) que sinais SSB-SC podem ser demodulados coerentemente:

$$\begin{aligned} \varphi_{SSB}(t) \cos \omega_c t &= [m(t) \cos \omega_c t \mp m_h(t) \sin \omega_c t] 2 \cos \omega_c t \\ &= m(t)[1 + \cos 2\omega_c t] \mp m_h(t) \sin 2\omega_c t \\ &= m(t) + \underbrace{[m(t) \cos 2\omega_c t \mp m_h(t) \sin 2\omega_c t]}_{\text{Sinal SSB-SC com portadora } 2\omega_c} \end{aligned}$$

Logo, o produto $\varphi_{SSB}(t) \times 2 \cos \omega_c t$ produz o sinal em banda base e outro sinal SSB com portadora $2\omega_c$. O espectro na Fig. 4.13e mostra precisamente esse resultado. Um filtro passa-baixas suprimirá os termos SSB indesejados, fornecendo o desejado sinal em banda base $m(t)$. Assim, o demodulador é idêntico ao demodulador síncrono usado para sinais DSB-SC. Portanto, qualquer um dos demoduladores DSB-SC discutidos na Seção 4.2 pode ser usado para demodular um sinal SSB-SC.

Exemplo 4.6 Modulação por Tom: SSB

Determinemos $\varphi_{SSB}(t)$ para o caso simples de uma modulação por tom, ou seja, em que o sinal modulante é uma senoide $m(t) = \cos \omega_m t$. Determinemos, também, a demodulação coerente desse sinal SSB.

Recordemos que a transformada de Hilbert atrasa a fase de cada componente espectral de $\pi/2$. No caso considerado, há apenas uma componente espectral, de frequência ω_m . O atraso da fase de $m(t)$ de $\pi/2$ resulta em

$$m_h(t) = \cos \left(\omega_m t - \frac{\pi}{2} \right) = \sin \omega_m t$$

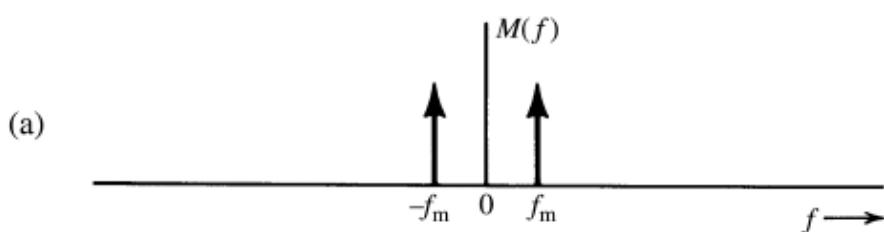
Logo, da Eq. (4.20c),

$$\begin{aligned} \varphi_{SSB}(t) &= \cos \omega_m t \cos \omega_c t \mp \sin \omega_m t \sin \omega_c t \\ &= \cos (\omega_c \pm \omega_m) t \end{aligned}$$

Portanto,

$$\varphi_{USB}(t) = \cos (\omega_c + \omega_m) t \quad \text{e} \quad \varphi_{LSB}(t) = \cos (\omega_c - \omega_m) t$$

Para comprovar esses resultados, consideremos o espectro de $m(t)$ (Fig. 4.16a) e seus espectros DSB-SC (Fig. 4.16b), USB (Fig. 4.16c) e LSB (Fig. 4.16d). Fica evidente que os espectros nas Fig. 4.16c e d correspondem, de fato, aos espectros de $\varphi_{USB}(t)$ e $\varphi_{LSB}(t)$ deduzidos anteriormente.



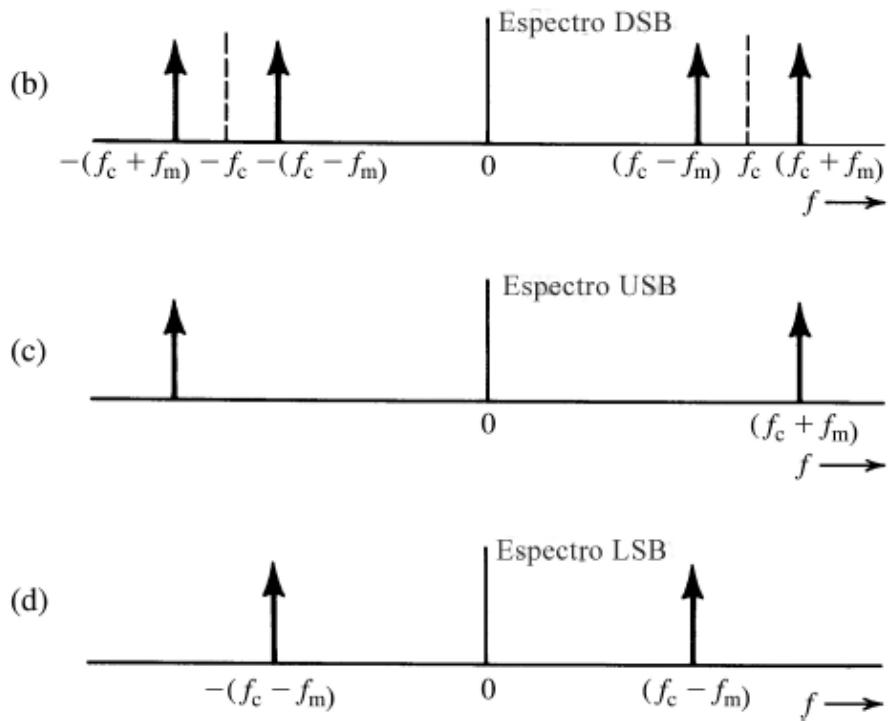


Figura 4.16
Espectros SSB para modulação por tom.

Por fim, a demodulação coerente da modulação SSB por tom é obtida de

$$\begin{aligned}\varphi_{SSB}(t)2 \cos \omega_c t &= 2 \cos (\omega_c \pm \omega_m)t \cos \omega_c t \\ &= \cos \omega_m t + \cos (\omega_c + \omega_m)t\end{aligned}$$

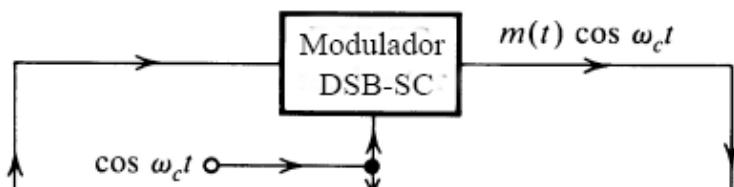
que pode ser aplicado a um filtro passa-baixas para recuperar o tom de mensagem $\cos \omega_m t$.

Sistemas de Modulação SSB

Três métodos são comumente empregados para gerar sinais SSB: deslocamento de fase, filtragem seletiva e o método de Weaver.¹ Nenhum desses métodos de modulação é preciso e todos, em geral, requerem que o espectro do sinal em banda base tenha baixa potência nas proximidades da origem.

O **método de deslocamento de fase** usa diretamente a Eq. (4.20) como base. A Fig. 4.17 mostra sua implementação. A caixa rotulada “ $-\pi/2$ ” é um deslocador de fase, que atrasa a fase de cada componente espectral positiva de $\pi/2$. Portanto, é um transformador de Hilbert. Vale notar que um deslocador de fase de Hilbert ideal é irrealizável, pois o deslocador de fase de Hilbert requer uma mudança brusca de fase de π na frequência zero. Quando a mensagem $m(t)$ tem um nulo dc e pouco conteúdo de baixa frequência, a aproximação prática desse deslocador de fase idealmente não afeta a precisão da modulação SSB.

No **método de filtragem seletiva**, o mais usado na geração de sinais SSB, um sinal DSB-SC é passado por um filtro de corte abrupto para eliminar a banda lateral indesejada. Para a obtenção de USB, o filtro deve deixar passar sem atenuação todas as componentes acima da frequência f_c e deve suprimir completamente todas as componentes abaixo de f_c . Uma operação como essa exige um filtro ideal, que é irrealizável. Contudo, uma boa aproximação é possível caso exista alguma separação entre a banda passante e a banda de rejeição. Felizmente, o sinal de voz satisfaz esta condição, pois seu espectro exibe pouco conteúdo de potência na origem (Fig. 4.18a). Adicionalmente, testes mostraram que, para sinais de voz, componentes de frequências abaixo de 300 Hz não são importantes. Em outras palavras, podemos suprimir todas as componentes abaixo de 300 Hz (e acima de 3500 Hz) sem afetar a inteligibilidade de modo considerável. Assim, a filtragem da banda lateral indesejada se torna relativamente fácil no caso de sinais de voz, pois nos resta uma região de transição de 600 Hz em torno da frequência de corte f_c . Para minimizar interferência em canais adjacentes, a banda lateral indesejada deve ser atenuada em pelo menos 40 dB.



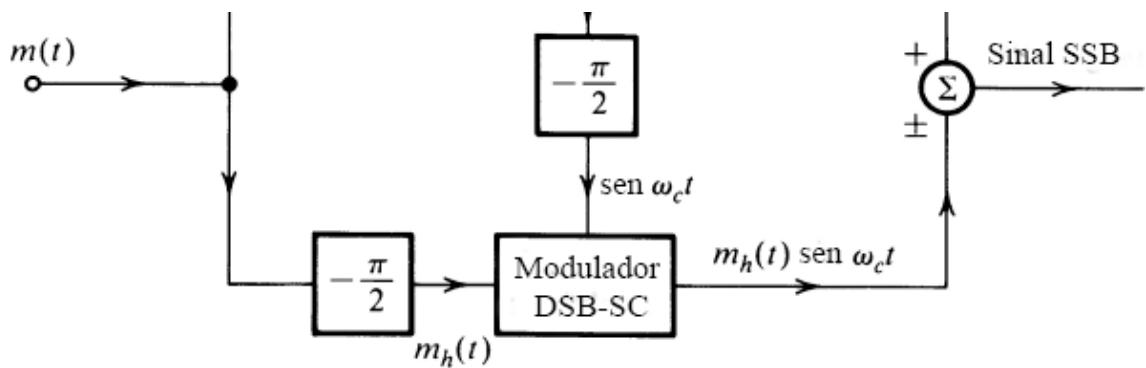


Figura 4.17
Geração de SSB com o método de deslocamento de fase.

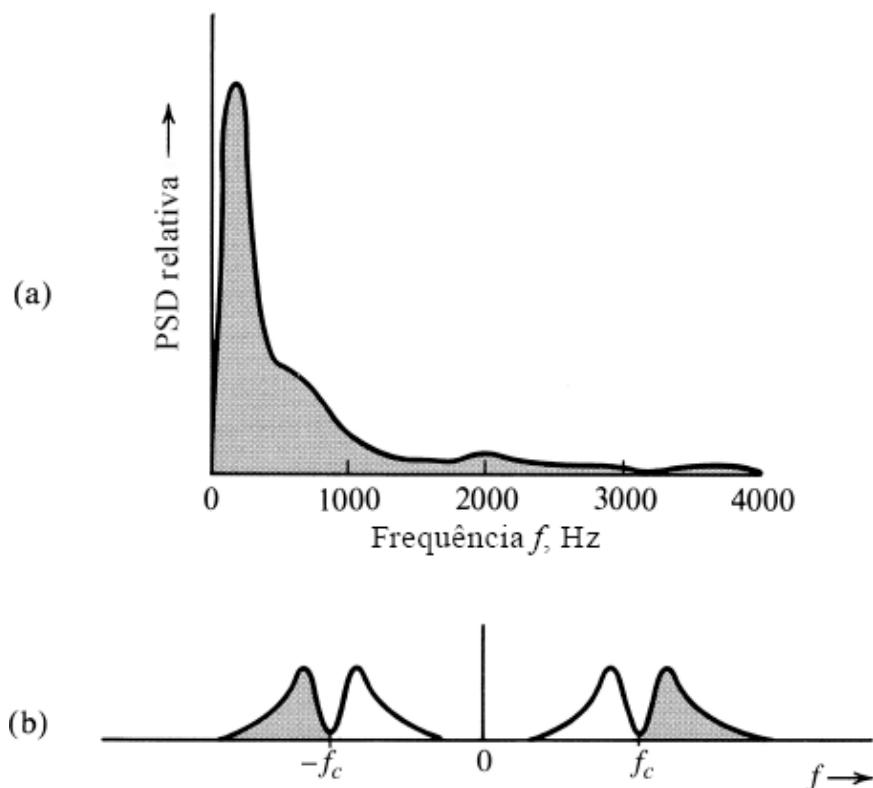


Figura 4.18
(a) Espectro de potência relativa de um sinal de voz e (b) correspondente espectro USB.

Para frequência portadora f_c muito alta, a razão entre a separação de banda (600 Hz) e a frequência portadora pode ser demasiadamente pequena e, em consequência, uma transição de 40 dB em amplitude pode ser difícil de alcançar. Nesse caso, um terceiro método, conhecido como **método de Weaver**,¹ faz uso de dois estágios de modulação em amplitude SSB. Primeiro, a modulação é efetuada com uma frequência portadora baixa (f_{c1}). O resultante sinal SSB efetivamente alarga a separação para $2f_{c1}$ (ver espectro hachurado na Fig. 4.18b). A seguir, esse sinal é tratado como um novo sinal em banda base, o que permite alcançar a modulação SSB em uma frequência portadora mais elevada.

Detectação de Sinais SSB com Portadora (SSB+C)

Agora, consideremos sinais SSB com uma portadora adicional (SSB+C). Tais sinais podem ser expressos como

$$\varphi_{SSB+C} = A \cos \omega_c t + [m(t) \cos \omega_c t + m_h(t) \sin \omega_c t]$$

e $m(t)$ pode ser recuperado por detecção síncrona [multiplicando φ_{SSB+C} por $\cos \omega_c t$] se a componente de portadora $A \cos \omega_c t$ puder ser extraída (via filtragem de banda estreita) de φ_{SSB+C} . Alternativamente, se a amplitude A da portadora for suficientemente grande, $m(t)$ também pode ser (aproximadamente) recuperado de φ_{SSB+C} por detecção de envelope ou com retificação. Para vermos isso, reescrevemos φ_{SSB+C} como

$$\begin{aligned}\varphi_{SSB+C} &= [A + m(t)] \cos \omega_c t + m_h(t) \sin \omega_c t \\ &= E(t) \cos (\omega_c t + \theta)\end{aligned}\quad (4.21)$$

em que $E(t)$, o envelope de φ_{SSB+C} , é dado por [ver Eq. (3.41a)]

$$\begin{aligned}E(t) &= \{[A + m(t)]^2 + m_h^2(t)\}^{1/2} \\ &= A \left[1 + \frac{2m(t)}{A} + \frac{m^2(t)}{A^2} + \frac{m_h^2(t)}{A^2} \right]^{1/2}\end{aligned}$$

Se $A \gg |m(t)|$, em geral* $A \gg |m_h(t)|$, e os termos $m^2(t)/A^2$ e $m_h^2(t)/A^2$ podem ser ignorados. Assim,

$$E(t) \simeq A \left[1 + \frac{2m(t)}{A} \right]^{1/2}$$

Usando expansão em série de Taylor e descartando termos de ordens superiores [pois $m(t)/A \ll 1$], obtemos

$$\begin{aligned}E(t) &\simeq A \left[1 + \frac{m(t)}{A} \right] \\ &= A + m(t)\end{aligned}$$

Fica evidente que, para uma portadora intensa, o sinal SSB+C pode ser demodulado por um detector de envelope.

Em AM, a detecção de envelope exige a condição $A \geq |m(t)|$, enquanto em SSB+C, a condição é $A \gg |m(t)|$. Portanto, no caso SSB, a necessária amplitude da portadora é muito maior que em AM e, consequentemente, a eficiência de SSB+C é pateticamente baixa.

Modulação em Amplitude em Quadratura (QAM)

Dada a dificuldade em gerar sinais SSB-SC com precisão, a modulação em amplitude em quadratura (QAM) representa uma alternativa atraente a SSB-SC. QAM pode ser gerada com exatidão, sem a exigência de filtros passa-faixa com corte abrupto. O funcionamento de QAM é baseado na transmissão de dois sinais DSB com portadoras de mesma frequência, mas em quadratura de fase, como ilustrado na Fig. 4.19. Esse esquema é referido como **modulação em amplitude em quadratura (QAM)** ou **multiplexação em quadratura**.

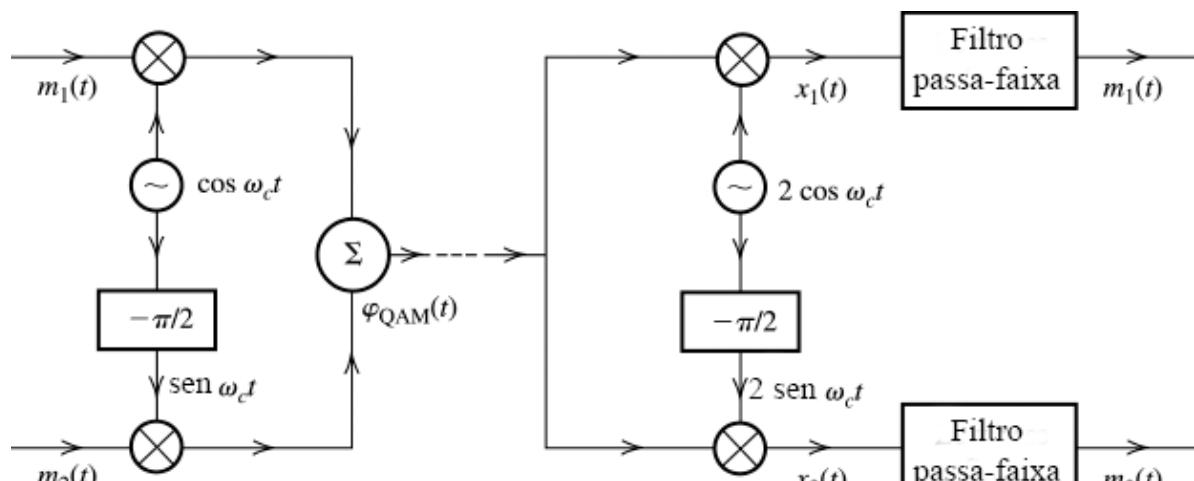


Figura 4.19
Multiplexação em amplitude em quadratura.

Como mostrado na Fig. 4.19, as caixas rotuladas $-\pi/2$ são deslocadores de fase que atrasam a fase de uma entrada senoidal de $-\pi/2$ rad. Se os dois sinais de mensagens em banda base a serem transmitidos forem $m_1(t)$ e $m_2(t)$, o correspondente sinal QAM $\varphi_{\text{QAM}}(t)$, a soma de dois sinais modulados DSB, é

$$\varphi_{\text{QAM}}(t) = m_1(t) \cos \omega_c t + m_2(t) \sin \omega_c t$$

Os dois sinais modulados ocupam a mesma banda. No entanto, os dois sinais em banda base podem ser separados no receptor por detecção síncrona, caso as duas portadoras locais sejam usadas em quadratura de fase, como mostrado na Fig. 4.19. Para comprovarmos isso, consideremos a saída do multiplicador $x_1(t)$ no braço superior do receptor (Fig. 4.19):

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 2\varphi_{\text{QAM}}(t) \cos \omega_c t = 2[m_1(t) \cos \omega_c t + m_2(t) \sin \omega_c t] \cos \omega_c t \\ &= m_1(t) + m_1(t) \cos 2\omega_c t + m_2(t) \sin 2\omega_c t \end{aligned} \quad (4.22a)$$

Os dois últimos termos são sinais passa-faixa centrados em $2\omega_c$. Na verdade, formam um sinal QAM com frequência portadora $2\omega_c$. Esses termos são suprimidos por um filtro passa-faixa, resultando na desejada saída demodulada $m_1(t)$. Do mesmo modo, podemos mostrar que a saída do braço inferior do receptor é $m_2(t)$.

$$\begin{aligned} x_2(t) &= 2\varphi_{\text{QAM}}(t) \sin \omega_c t = 2[m_1(t) \cos \omega_c t + m_2(t) \sin \omega_c t] \sin \omega_c t \\ &= m_2(t) - m_2(t) \cos 2\omega_c t + m_1(t) \sin 2\omega_c t \end{aligned} \quad (4.22b)$$

Assim, dois sinais em banda base, cada um com largura de banda de B Hz, podem ser transmitidos simultaneamente em uma largura de banda $2B$ com o uso de transmissão DSB e multiplexação em quadratura. O canal superior também é referido como canal **em fase** (I) e o canal inferior, como canal **em quadratura** (Q). Os dois sinais $m_1(t)$ e $m_2(t)$ podem ser demodulados separadamente.

No entanto, vale notar que a demodulação QAM deve ser totalmente síncrona. Um erro na fase ou na frequência da portadora no demodulador resultará em perda e interferência entre os dois canais. Para mostrarmos isso, consideremos que a portadora no demodulador seja $2 \cos(\omega_c t + \theta)$. Nesse caso,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 2[m_1(t) \cos \omega_c t + m_2(t) \sin \omega_c t] \cos(\omega_c t + \theta) \\ &= m_1(t) \cos \theta - m_2(t) \sin \theta + m_1(t) \cos(2\omega_c t + \theta) + m_2(t) \sin(2\omega_c t + \theta) \end{aligned}$$

Os dois filtros passa-baixas suprimem os dois sinais modulados por portadora de frequência angular $2\omega_c$, resultando na primeira saída do demodulador

$$m_1(t) \cos \theta - m_2(t) \sin \theta$$

Assim, além do desejado sinal $m_1(t)$, também temos o sinal recebido $m_2(t)$ no braço superior do receptor. Um fenômeno semelhante ocorre no braço inferior. Essa **interferência cocanal** é indesejável. Dificuldades semelhantes surgem quando há erro na frequência local (ver Exercício 4.4-1). Adicionalmente, atenuação desigual na USB e na LSB durante a transmissão leva a interferência cruzada ou cocanal.

Multiplexação em quadratura é usada em televisão analógica em cores para multiplexar os chamados sinais de crominância, que transportam informação sobre cores. Nesse caso, a sincronização é alcançada com a inserção periódica de uma breve explosão de sinal da portadora (referida como **explosão de cor** no sinal transmitido). A transmissão de televisão digital por satélite também faz uso de QAM.

Em termos de exigências de largura de banda, a SSB é semelhante à QAM, mas menos exigente em termos de frequência e fase da portadora e da necessidade de um meio de transmissão sem distorção. Contudo, a geração de SSB se torna difícil quando o sinal em banda base $m(t)$ tem significante conteúdo espectral próximo a dc.

4.5 MODULAÇÕES EM AMPLITUDE: BANDA LATERAL VESTIGIAL (VSB)

Como discutido anteriormente, a geração de sinais SSB exatos é difícil. Em geral, isso requer que o sinal de mensagem $m(t)$ tenha um nulo em torno de dc. Um deslocador de fase, necessário para o método de deslocamento de fase, é irrealizável, ou pode ser realizado apenas de forma aproximada. A geração de sinais DSB é muito mais simples, mas requer o dobro da largura de banda de sinal. A modulação em **banda lateral vestigial (VSB – vestigial sideband)**, também referida como sistema de banda lateral assimétrica, representa um equilíbrio entre DSB e SSB. A VSB herda as vantagens de DSB e de SSB, mas evita suas desvantagens, a um pequeno custo. A geração de sinais VSB é relativamente simples e, ao mesmo tempo, a largura de banda dos mesmos é apenas

um pouco maior (tipicamente, 25%) que a de sinais SSB.

Em VSB, em vez de rejeitar uma banda lateral completamente (como em SSB), um corte gradual de uma banda lateral, como mostrado na Fig. 4.20d, é aceitável. O sinal em banda base pode ser recuperado exatamente por um detector síncrono em conjunto com um filtro equalizador apropriado, $H_o(f)$, na saída do receptor (Fig. 4.21). Caso uma portadora mais intensa seja transmitida juntamente com o sinal VSB, o sinal em banda base pode ser recuperado por um detector de envelope (ou detector retificador).

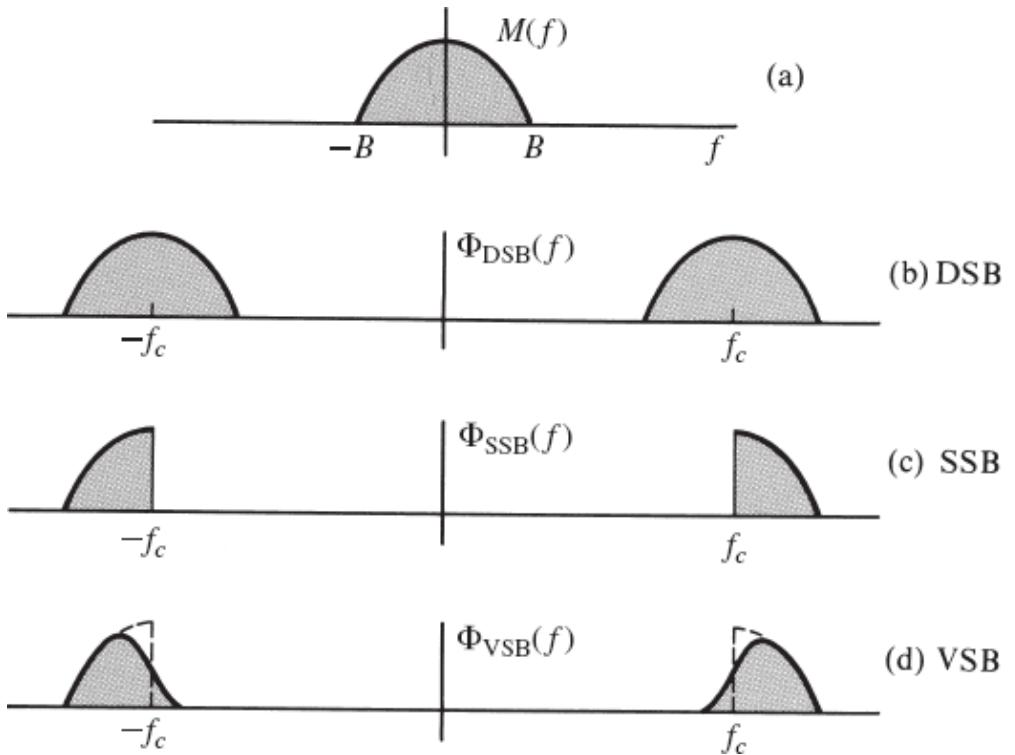


Figura 4.20

Espectros do sinal modulante e dos correspondentes sinais DSB, SSB e VSB.

Se o filtro formatador vestigial que produz VSB a partir de DSB for $H_i(f)$ (Fig. 4.21), o espectro do resultante sinal VSB é

$$\Phi_{VSB}(f) = [M(f + f_c) + M(f - f_c)]H_i(f) \quad (4.23)$$

Este filtro formatador VSB $H_i(f)$ permite a transmissão de uma banda lateral e suprime a outra, não completamente, mas de forma gradual. Isso facilita a realização do filtro, mas resulta em uma largura de banda ligeiramente maior do que a de SSB (em que a outra banda lateral é totalmente suprimida). A largura de banda do sinal VSB é tipicamente 25 a 33% maior que a de sinais SSB.

Desejamos que $m(t)$ seja recuperável de $\varphi_{VSB}(t)$ com demodulação síncrona no receptor. Para isso, o sinal VSB recebido, $\varphi_{VSB}(t)$, é multiplicado por $2 \cos \omega_c t$. O produto $e(t)$ é dado por

$$e(t) = 2\varphi_{VSB}(t) \cos \omega_c t \iff [\Phi_{VSB}(f + f_c) + \Phi_{VSB}(f - f_c)]$$

O sinal $e(t)$ é, ainda, aplicado a um filtro passa-baixas equalizador, com função de transferência $H_o(f)$. A saída do filtro equalizador deve ser $m(t)$. O espectro do sinal de saída é dado por

$$M(f) = [\Phi_{VSB}(f + f_c) + \Phi_{VSB}(f - f_c)]H_o(f)$$

A substituição da Eq. (4.23) na equação anterior e a eliminação do espectro em $\pm 4f_c$ [suprimido pelo filtro passa-baixas $H_o(f)$] resultam em

$$M(f) = M(f)[H_i(f + f_c) + H_i(f - f_c)]H_o(f) \quad (4.24)$$

Logo,

$$H_o(f) = \frac{1}{H_i(f + f_c) + H_i(f - f_c)} \quad |f| \leq B \quad (4.25)$$

Como $H_i(f)$ é um filtro passa-faixa, os termos $H_i(f \pm f_c)$ contêm componentes passa-baixas.

Filtro VSB Complementar e Detecção de Envelope de Sinais VSB+C

Como um caso especial de um filtro no modulador VSB, podemos escolher $H_i(f)$ tal que

$$H_i(f + f_c) + H_i(f - f_c) = 1 \quad |f| \leq B \quad (4.26)$$

O filtro de saída consiste apenas em um filtro passa-baixas com função de transferência

$$H_o(f) = 1 \quad |f| \leq B$$

O sinal resultante VSB mais portadora (VSB+C) pode ser demodulado por detecção de envelope. Podemos comprovar esse método de demodulação usando exatamente o mesmo argumento empregado no caso de sinais SSB+C. Em particular, devido à Eq. (4.26), podemos definir um novo filtro passa-baixas

$$F(f) = j[1 - 2H_i(f - f_c)] = -j[1 - 2H_i(f + f_c)] \quad |f| \leq B$$

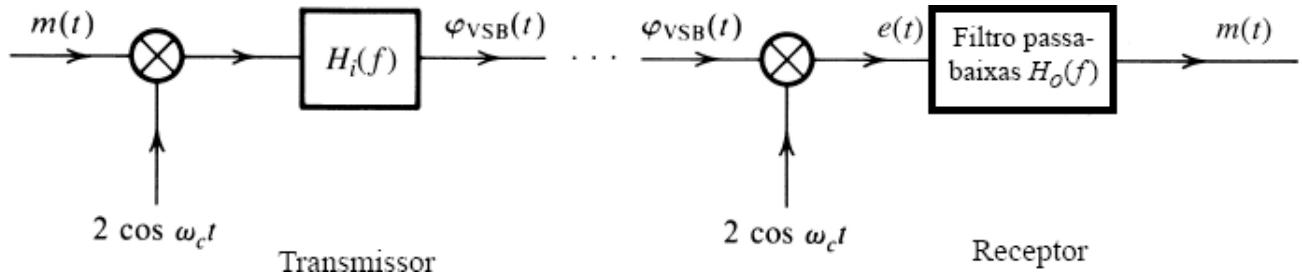


Figura 4.21

Modulador e demodulador VSB.

Definindo um novo sinal passa-baixas (complexo) como

$$m_v(t) \iff M_v(f) = F(f)M(f)$$

podemos reescrever o sinal VSB como

$$\Phi_{VSB}(f) = \frac{M(f - f_c) + M(f + f_c)}{2} + \frac{M_v(f - f_c) - M_v(f + f_c)}{2j} \quad (4.27a)$$

\iff

$$\varphi_{VSB}(t) = m(t) \cos 2\pi f_c t + m_v(t) \sin 2\pi f_c t \quad (4.27b)$$

Fica claro que os sinais modulados SSB e VSB têm a mesma forma, com $m_h(t)$ de SSB substituído por um sinal passa-baixas $m_v(t)$ em VSB. Aplicando a mesma análise feita para a detecção de envelope de SSB+C, a adição de uma portadora intensa a $\varphi_{VSB}(t)$ permitirá a detecção de envelope de VSB+C.

Mostramos que, para detecção de envelope, SSB+C requer uma portadora muito mais intensa que DSB+C (AM). Como VSB+C é

um caso intermediário, a portadora adicional exigida em VSB é mais intensa que em AM, mas menos intensa que em SSB+C.

Exemplo 4.7 A frequência portadora de um certo sinal VSB é $f_c = 20$ kHz, e a largura de banda do sinal em banda base é 6 kHz.

O filtro formatador VSB na saída, $H_i(f)$, que corta a gradualmente a banda lateral inferior ao longo de 2 kHz, é mostrado na Fig. 4.22a. Determinemos o filtro de saída, $H_o(f)$, necessário à recepção sem distorção.

A Fig. 4.22b mostra os segmentos passa-baixas de $H_i(f + f_c) + H_i(f - f_c)$. Desse espectro, nos interessa apenas a porção na banda base (a restante porção indesejada é suprimida pelo filtro de saída). Na banda de 0 a 2 kHz, a amplitude desse espectro é 0,5; de 2 a 6 kHz, a amplitude é 1, como mostrado na Fig. 4.22b. A Fig. 4.22c mostra o desejado filtro de saída $H_o(f)$, que é o recíproco do espectro na Fig. 4.22b [Eq. (4.25)].

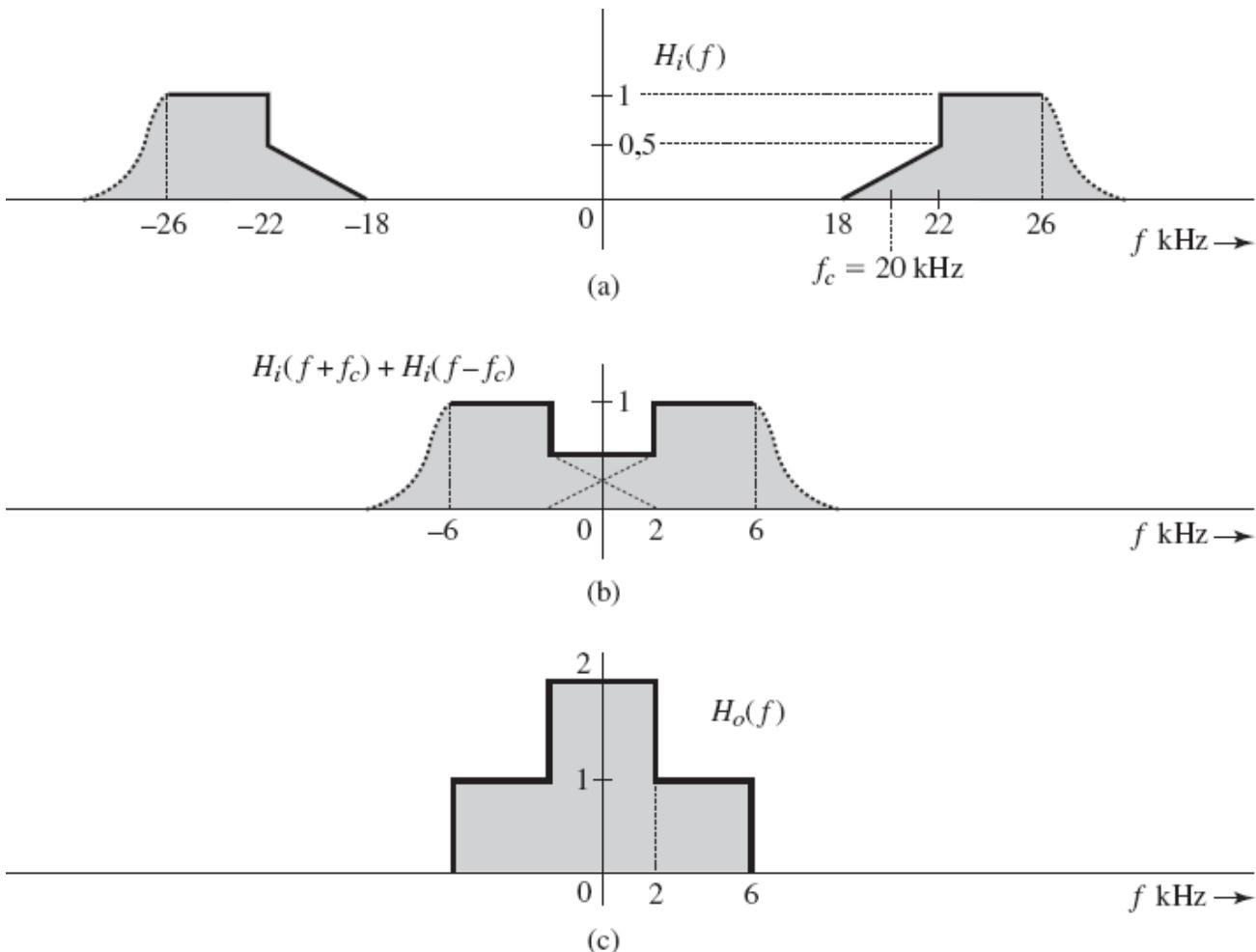


Figura 4.22

Modulador VSB e filtros do receptor.

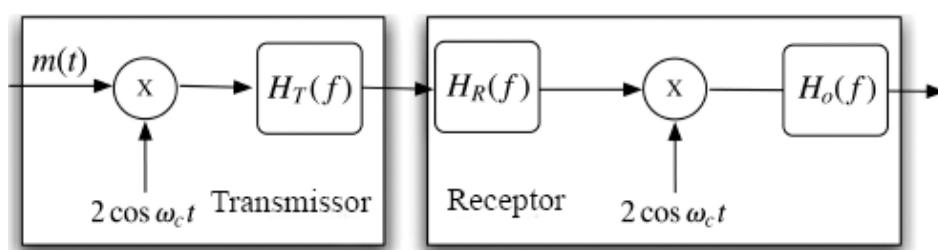


Figura 4.23

Filtro do transmissor, $H_T(f)$, filtro do *front-end* do receptor, $H_R(f)$, e filtro passa-baixas de saída do receptor, $H_o(f)$, para sistemas de televisão VSB.

Usa de VSB na Difusão de Televisão

VSB é um interessante equilíbrio entre SSB e DSB, o que a torna muito atraente para sistemas de difusão de televisão. O sinal de vídeo de televisão em banda base ocupa uma enorme largura de banda de 4,5 MHz, de modo que um sinal DSB requer uma largura de banda de 9 MHz. Para economizar largura de banda, poderia ser desejável o uso de SSB. Infelizmente, isso criaria diversos problemas. Primeiro, o sinal de vídeo em banda base tem potência razoável na região de baixas frequências, o que dificultaria a supressão completa de uma banda lateral. Segundo, para um receptor de difusão, um detector de envelope é mais conveniente do que um detector síncrono, pois reduz o custo do receptor. Vimos, anteriormente, que SSB+C tem baixa eficiência de potência. Adicionalmente, o uso de SSB aumentaria o custo do receptor.

A formatação espectral de sinais VSB de televisão é ilustrada na Fig. 4.23. O espectro vestigial é controlado por dois filtros: o filtro de RF do transmissor, $H_T(f)$, e o filtro de RF do receptor, $H_R(f)$. No conjunto, temos

$$H_i(f) = H_T(f)H_R(f)$$

Portanto, o projeto do filtro de saída do receptor, $H_o(f)$, segue a Eq. (4.25).

O espectro DSB de um sinal de televisão é mostrado na Fig. 4.24a. O filtro de formatação vestigial, $H_i(f)$, corte gradualmente o espectro da banda lateral inferior, de 0,75 MHz a 1,25 MHz abaixo da frequência portadora f_c , como ilustrado na Fig. 4.24b. O filtro de saída do receptor, $H_o(f)$, é projetado segundo a Eq. (4.25). A resultante largura espectral VSB é de 6 MHz. Esse valor deve ser comparado com os 9 MHz da largura de banda DSB e os 4,5 MHz da largura de banda SSB.

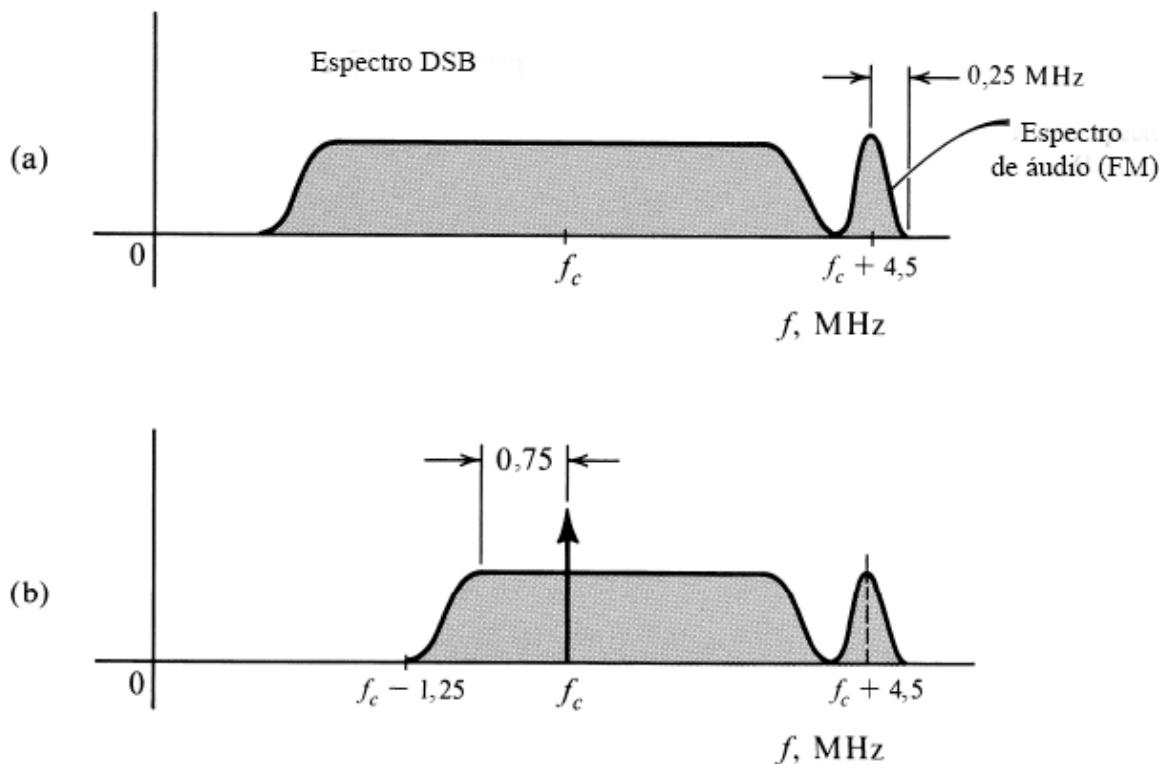


Figura 4.24
Espectro de sinal de televisão: (a) sinal DSB, (b) sinal transmitido.

4.6 SINCRONIZAÇÃO DA PORTADORA LOCAL

Em um sistema modulado em amplitude com portadora suprimida (DSB-SC, SSB-SC e VSB-SC), o receptor coerente deve gerar uma portadora local em sincronia (de frequência e fase) com a portadora recebida. Como discutido anteriormente, qualquer discrepância de frequência ou fase da portadora local causa distorção na saída do detector.

Consideremos um caso SSB-SC em que o sinal recebido é

$$m(t) \cos [(\omega_c + \Delta\omega)t + \delta] - m_h(t) \sin [(\omega_c + \Delta\omega)t + \delta]$$

devido ao atraso de propagação e ao deslocamento de frequência Doppler. A portadora local continua sendo $2 \cos \omega_c t$. O produto do sinal recebido pela portadora local é $e(t)$, dado por

$$e(t) = 2 \cos \omega_c t [m(t) \cos (\omega_c t + \Delta\omega t + \delta) - m_h(t) \sin (\omega_c t + \Delta\omega t + \delta)]$$

$$\begin{aligned}
&= m(t) \cos(\Delta\omega t + \delta) - m_h(t) \sin(\Delta\omega t + \delta) \\
&+ \underbrace{m(t) \cos[(2\omega_c + \Delta\omega)t + \delta] - m_h(t) \sin[(2\omega_c + \Delta\omega)t + \delta]}_{\text{sinal SSB-SC passa-faixa em torno de } 2\omega_c + \Delta\omega}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

A componente passa-faixa é suprimida pelo filtro passa-baixas do receptor, deixando a saída $e_o(t)$ como

$$e_o(t) = m(t) \cos(\Delta\omega t + \delta) - m_h(t) \sin(\Delta\omega t + \delta) \tag{4.29}$$

Se $\Delta\omega$ e δ forem ambos nulos (nenhum erro de frequência nem de fase), então

$$e_o(t) = m(t)$$

como esperado.

Na prática, se a onda de rádio viajar uma distância de d metros à velocidade da luz c , o atraso de fase será

$$\delta = -(\omega_c + \Delta\omega)d/c$$

que pode ser qualquer valor no intervalo $[-\pi, +\pi]$. Dois osciladores com, inicialmente, a mesma frequência também podem se afastar. Se o receptor ou o transmissor estiverem viajando a uma velocidade v_e , o máximo deslocamento de frequência Doppler será

$$\Delta f_{\max} = \frac{v_e}{c} f_c$$

A velocidade v_e depende do veículo em questão (nave espacial, avião, carro etc.). Por exemplo, para uma velocidade v_e de 108 km/h e uma frequência portadora de 100 MHz, o máximo deslocamento de frequência Doppler será de 10 Hz. Um deslocamento fixo $\Delta\omega$ de cada componente de frequência destrói a relação harmônica entre as mesmas. Para $\Delta f = 10$ Hz, as componentes de frequência em 1000 e 2000 Hz serão deslocadas para 1010 e 2010 Hz, respectivamente. Isso afeta a relação harmônica entre elas e, em consequência, a qualidade de sinais que não são de áudio.

É interessante observar que sinais de áudio são altamente redundantes e, a menos que Δf seja muito grande, uma alteração como essa não destrói a inteligibilidade da saída. Para sinais de áudio, $\Delta f < 30$ Hz não afeta a qualidade dos mesmos de modo significativo. $\Delta f > 30$ Hz resultará em uma qualidade de som semelhante à voz do Pato Donald. Contudo, a inteligibilidade não é completamente perdida.

Em geral, há duas maneiras de recuperar uma portadora que chega ao receptor. Uma consiste em o transmissor transmitir um sinal piloto (senoidal) que pode ser a portadora exata ou diretamente a ela relacionada (por exemplo, um piloto na metade da frequência portadora). O piloto é separado no receptor por um filtro de largura de banda muito estreita e sintonizado na frequência do piloto. O sinal piloto é amplificado e usado para sincronizar o oscilador local. Em outro método, no qual um piloto não é transmitido, o receptor emprega um dispositivo não linear para processar o sinal recebido e gerar uma componente separada da portadora, que pode ser extraída por meio de filtros passa-faixa estreitos. Fica claro que filtros passa-faixa eficientes e de pequena largura de banda são muito importantes para os dois métodos. Além disso, o filtro passa-faixa também deve ter a capacidade de ajustar, de modo adaptativo, sua frequência central para combater deslocamentos de frequência ou deslocamentos Doppler significativos. Afara algumas configurações típicas de filtros passa-faixa, a *malha de captura de fase* (PLL – phase locked loop), que tem papel crucial na aquisição de portadora de vários esquemas de modulação, pode ser vista como um desses filtros passa-faixa adaptativos. Os princípios de PLL serão discutidos mais adiante neste capítulo.

4.7 MULTIPLEXAÇÃO POR DIVISÃO EM FREQUÊNCIA (FDM)

A multiplexação de sinais permite a transmissão de vários sinais em um mesmo canal. No Capítulo 6, discutiremos da multiplexação por divisão no tempo (TDM – *time division multiplexing*), na qual vários canais compartilham um mesmo canal no tempo. Em FDM (*frequency division multiplexing*), diversos sinais compartilham a banda de um canal. Cada sinal é modulado por uma frequência portadora diferente. Essas portadoras, referidas como **subportadoras**, são adequadamente separadas para evitar sobreposição (interferência) dos espectros dos vários sinais modulados. Cada sinal pode usar um tipo distinto de modulação (por exemplo, DSB-SC, AM, SSB-SC, VSB-SC ou, até mesmo, modulação em frequência ou modulação em fase). O espectro do sinal modulado pode ser separado por uma estreita banda de guarda para evitar interferência e facilitar a separação de sinais no receptor.

Quando todos os espectros dos sinais modulados são somados, obtemos um sinal composto que pode ser considerado como um sinal em banda base, que, para transmissão, pode modular uma portadora de radiofrequência (RF).

No receptor, o sinal de entrada é, primeiro, demodulado pela portadora de RF, para recuperar o sinal em banda base composto; a seguir, esse é aplicado a filtros passa-faixa para separar todos os sinais modulados. Cada sinal modulado é, então, demodulado individualmente por uma subportadora apropriada para fornecer os desejados sinais em banda base originais.

Um exemplo simples de FDM é o sistema de telefonia analógica de longa distância. Há dois tipos de sistemas de portadoras de telefonia de longa distância: o sistema legado de hierarquia analógica de portadora L e o sistema norte-americano de hierarquia digital de portadora T (ou o sistema europeu de portadora E).³ Ambos foram padronizados pela União Internacional de Telecomunicações (*International Telecommunications Union*), conhecida (antes de 1992) como CCITT (*Comité Consultatif International Téléphonique et Télégraphique*). Discutiremos, primeiro, a hierarquia de telefonia analógica que utiliza FDM e modulação SSB; a discussão da hierarquia digital será feita posteriormente (no Capítulo 6).

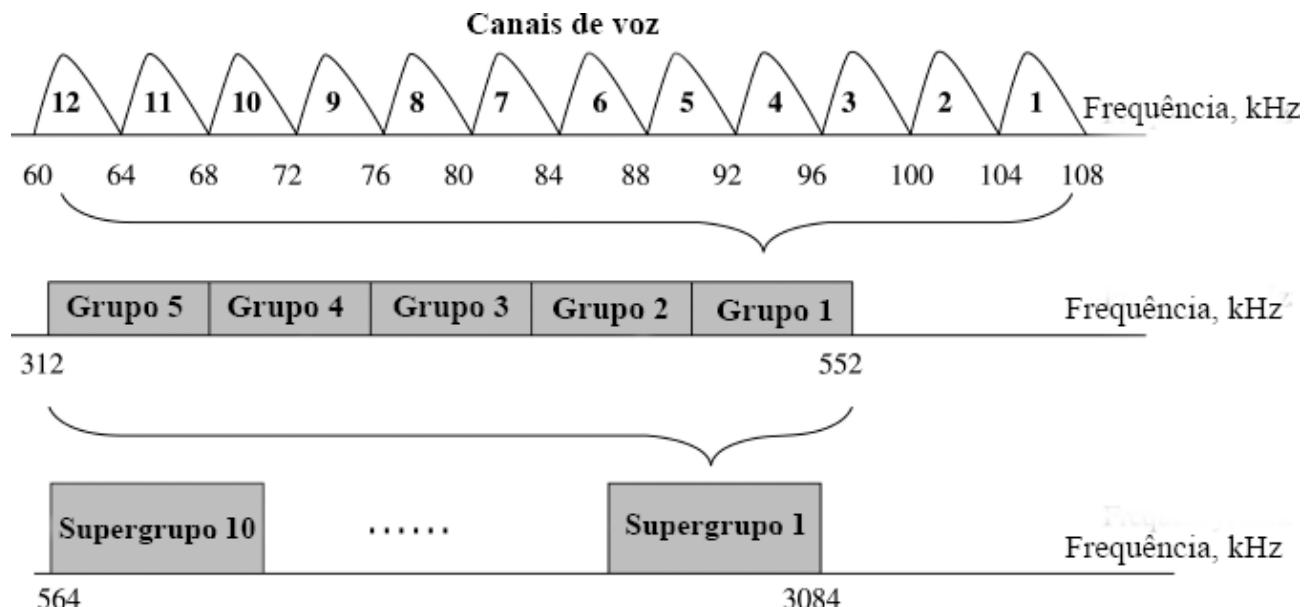


Figura 4.25

Sistema de multiplexação por divisão em frequência para telefonia analógica de longa distância na hierarquia de portadora L.

Na hierarquia analógica de portadora L,⁴ cada canal de voz é modulado com uso de SSB+C. Doze canais de voz formam um **grupo** básico de canais que ocupa a banda de 60 a 108 kHz. Como mostrado na Fig. 4.25, cada canal de usuário utiliza a LSB, e a multiplexação por divisão em frequência (FDM) é alcançada mantendo uma separação de 4 kHz entre portadoras de canal.

Acima na hierarquia,⁵ cinco grupos formam um **supergrupo**, via FDM. A multiplexação de 10 supergrupos gera um **grupo mestre**; a multiplexação de seis supergrupos forma um **grupo jumbo**, que consiste em 3600 canais de voz em uma banda de frequência de 16,984 MHz no sistema L4. A cada nível da hierarquia a partir do supergrupo, espaçamentos adicionais de frequência são previstos para redução de interferência e para a inserção de freqüências-piloto. O sinal multiplexado pode ser alimentado à entrada de banda base de um canal de rádio de micro-ondas ou diretamente a um sistema de transmissão coaxial.

4.8 MALHA DE CAPTURA DE FASE (PHASE LOCKED LOOP – PLL) E ALGUMAS APLICAÇÕES

Malha de Captura de Fase (PLL)*

A **malha de captura de fase (PLL)** é um dispositivo muito importante, geralmente usado para rastrear a fase e a frequência de uma componente de portadora de um sinal recebido. Portanto, é um dispositivo útil para a demodulação síncrona de sinais AM com portadora suprimida ou com uma portadora de baixa intensidade (piloto). A PLL também pode ser usada para a demodulação de sinais modulados em ângulo, especialmente sob condições de baixa relação sinal-ruído (SNR — *signal-to-noise ratio*). A PLL também encontra importantes aplicações em vários sistemas de recuperação de relógio, incluindo recuperação de tempo em receptores digitais. Por essas razões, a PLL tem um papel essencial em praticamente todos os modernos sistemas de comunicação digitais e analógicos.

Uma PLL tem três componentes básicos:

1. Um oscilador controlado por tensão (VCO — *voltage-controlled oscillator*)
2. Um multiplicador, que funciona como um detector de fase (PD — *phase detector*) ou comparador de fase.

3. Um filtro de malha, $H(s)$

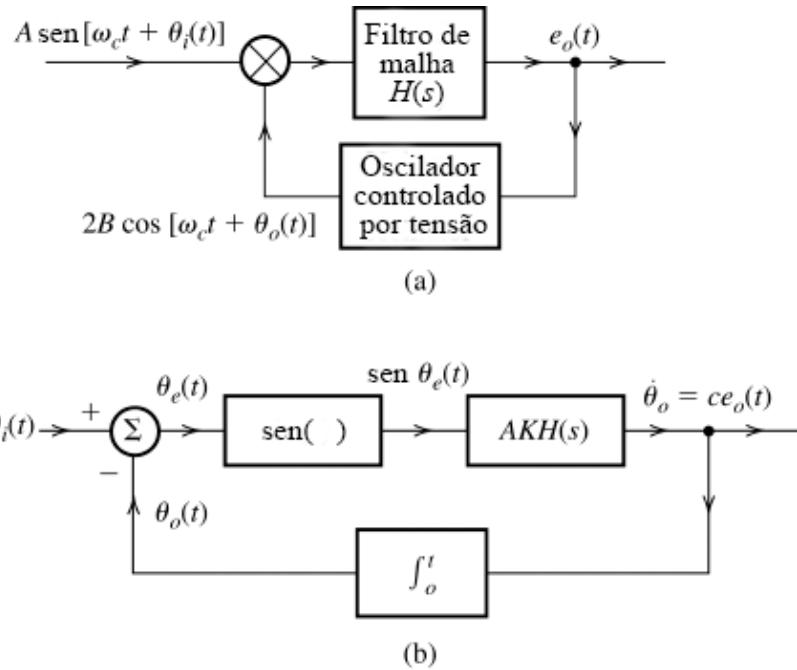


Figura 4.26
Malha de captura de fase e seu circuito equivalente.

Funcionamento Básico da PLL

O funcionamento da PLL é similar ao de um sistema de realimentação (Fig. 4.26a). Em um típico sistema de realimentação, o sinal de realimentação tende a seguir o sinal de entrada. Caso o sinal de realimentação não seja igual ao de entrada, a diferença entre os dois (conhecida como erro) alterará o sinal de realimentação até que este se aproxime do sinal de entrada. O princípio de funcionamento de uma PLL é semelhante, exceto que a grandeza realimentada e comparada não é a amplitude, mas a fase. O VCO ajusta sua própria frequência até que suas frequência e fase acompanhem a frequência e a fase do sinal de entrada. Nesse ponto, os dois sinais estão em sincronismo (exceto se por uma possível diferença de fase constante).

O **oscilador controlado por tensão (VCO)** é um oscilador cuja frequência pode ser controlada linearmente por uma tensão de entrada. Se a tensão de entrada em um VCO for $e_o(t)$, sua saída será uma senoide com frequência instantânea dada por

$$\omega(t) = \omega_c + ce_o(t) \quad (4.30)$$

em que c é uma constante do VCO e ω_c , a **frequência livre** do VCO [quando $e_o(t) = 0$]. A saída do multiplicador sofre uma filtragem passa-baixas pelo filtro de malha e , então, é aplicada à entrada do VCO. Essa tensão altera a frequência do oscilador e mantém a malha **travada (locked)**, forçando a saída do VCO a rastrear a fase (e, consequentemente, a frequência) da senoide de entrada.

Se a saída do VCO for $B \cos [\omega_c t + \theta_o(t)]$, sua frequência instantânea será $\omega_c + \dot{\theta}_o(t)$. Portanto,

$$\dot{\theta}_o(t) = ce_o(t) \quad (4.31)$$

Notemos que c e B são parâmetros constantes da PLL.

Admitamos que o sinal que chega (sinal de entrada da PLL) seja $A \sin [\omega_c t + \theta_i(t)]$. Caso o sinal que chega seja $A \sin [\omega_o t + \psi(t)]$, ainda pode ser expresso como $A \sin [\omega_c t + \theta_i(t)]$, em que $\theta_i(t) = (\omega_o - \omega_c)t + \psi(t)$. Logo, a análise a seguir é geral e não é restrita à condição de que a frequência do sinal que chega seja igual à do sinal livre do VCO.

A saída do multiplicador é

$$AB \sin(\omega_c t + \theta_i) \cos(\omega_c t + \theta_o) = \frac{AB}{2} [\sin(\theta_i - \theta_o) + \sin(2\omega_c t + \theta_i + \theta_o)]$$

O termo da soma de frequências é suprimido pelo filtro de malha. Assim, a saída efetiva do filtro de malha é $\frac{1}{2}AB \sin[\theta_i(t) - \theta_o(t)]$. Seja $h(t)$ a resposta do filtro de malha ao impulso unitário; portanto,

$$\begin{aligned} e_o(t) &= h(t) * \frac{1}{2}AB \sin[\theta_i(t) - \theta_o(t)] \\ &= \frac{1}{2}AB \int_0^t h(t-x) \sin[\theta_i(x) - \theta_o(x)] dx. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Substituindo a Eq. (4.32) na Eq. (4.31) e tomado $K = \frac{1}{2}cB$, obtemos

$$\dot{\theta}_o(t) = AK \int_0^t h(t-x) \sin \theta_e(x) dx \quad (4.33)$$

em que $\theta_e(t)$ é o erro de fase, definido como

$$\theta_e(t) = \theta_i(t) - \theta_o(t)$$

Essas equações [juntamente com a Eq. (4.31)] sugerem prontamente um modelo para a PLL, como ilustrado na Fig. 4.26b.

O projeto da PLL requer seleção criteriosa do filtro de malha $H(s)$ e do ganho da malha AK . Diferentes filtros de malha podem permitir que a PLL capture e rastreie sinais de entrada com distintos tipos de variação de frequência. O ganho da malha, por sua vez, pode afetar a faixa de variações de frequência que podem ser rastreadas.

Análise de PLL sob Pequeno Erro

Na análise de PLL sob pequeno erro, $\sin \theta_e \approx \theta_e$, de modo que o diagrama de blocos na Fig. 4.26b se reduz ao sistema linear (invariante no tempo) mostrado na Fig. 4.27a. Uma simples análise de realimentação fornece

$$\frac{\Theta_o(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{AKH(s)/s}{1 + [AKH(s)/s]} = \frac{AKH(s)}{s + AKH(s)} \quad (4.34)$$

Portanto, a PLL atua como um filtro com função de transferência $AKH(s)/[s + AKH(s)]$, como indicado na Fig. 4.27b. O erro $\Theta_e(s)$ é dado por

$$\begin{aligned} \Theta_e(s) &= \Theta_i(s) - \Theta_o(s) = \left[1 - \frac{\Theta_o(s)}{\Theta_i(s)} \right] \Theta_i(s) \\ &= \frac{s}{s + AKH(s)} \Theta_i(s) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Uma das importantes aplicações de PLL é a aquisição de frequência e de fase para efeitos de sincronização. Seja $A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ o sinal que chega. Desejamos gerar um sinal local de frequência ω_0 e fase* φ_0 . Supondo que a frequência quiescente do VCO seja ω_c , o sinal que chega pode ser expresso como $A \sin[\omega_c t + \theta_i(t)]$, em que

$$\theta_i(t) = (\omega_0 - \omega_c)t + \varphi_0$$

e

$$\Theta_i(s) = \frac{\omega_0 - \omega_c}{s^2} + \frac{\varphi_0}{s}$$

Consideremos o caso especial de $H(s) = 1$. A substituição dessa equação na Eq. (4.35) resulta em

$$\begin{aligned}\Theta_e(s) &= \frac{s}{s+AK} \left[\frac{\omega_0 - \omega_c}{s^2} + \frac{\varphi_0}{s} \right] \\ &= \frac{(\omega_0 - \omega_c)/AK}{s} - \frac{(\omega_0 - \omega_c)/AK}{s+AK} + \frac{\varphi_0}{s+AK}\end{aligned}$$

Logo,

$$\theta_e(t) = \frac{(\omega_0 - \omega_c)}{AK} \left(1 - e^{-AKt} \right) + \varphi_0 e^{-AKt} \quad (4.36a)$$

Observemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_e(t) = \frac{\omega_0 - \omega_c}{AK} \quad (4.36b)$$

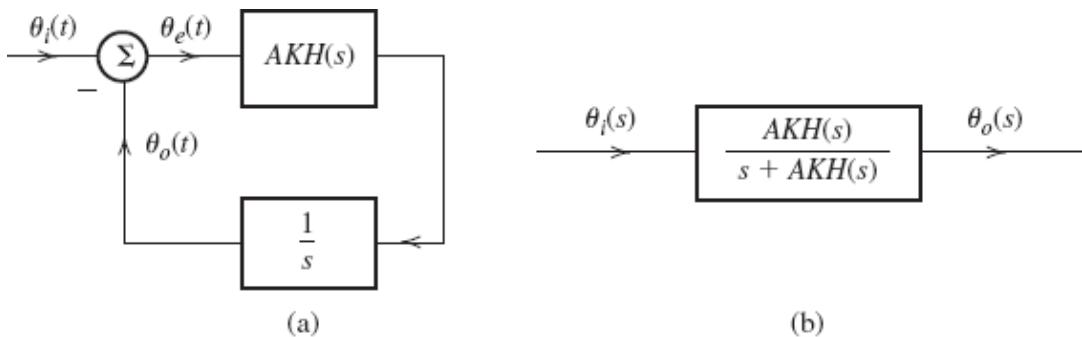


Figura 4.27

Circuitos equivalentes de uma PLL linearizada.

Portanto, depois da morte do transiente (em cerca de $4/AK$ segundos), o erro de fase mantém um valor constante $(\omega_0 - \omega_c)/AK$. Isso significa que a frequência da PLL, por fim, se iguala à frequência recebida ω_0 . Existe, no entanto, um erro de fase constante. A saída da PLL é

$$B \cos \left[\omega_0 t + \varphi_0 - \frac{\omega_0 - \omega_c}{AK} \right]$$

Para uma PLL de segunda ordem que usa

$$H(s) = \frac{s+a}{s} \quad (4.37a)$$

$$\begin{aligned}\Theta_e(s) &= \frac{s}{s+AKH(s)} \Theta_i(s) \\ &= \frac{s^2}{s^2 + AK(s+a)} \left[\frac{\omega_0 - \omega_c}{s^2} + \frac{\varphi_0}{s} \right]\end{aligned} \quad (4.37b)$$

o teorema do valor final fornece diretamente⁶

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Theta_e(s) = 0 \quad (4.38)$$

Nesse caso, a PLL adquire, por fim, tanto a frequência como a fase do sinal recebido.

Podemos usar a análise sob pequeno erro para mostrar que uma malha de primeira ordem não é capaz de rastrear um sinal recebido cuja frequência instantânea varia linearmente com o tempo. No entanto, com o emprego de uma malha de segunda ordem [Eq. (4.37)], um sinal desse tipo pode ser rastreado, a menos de uma fase constante (erro de fase constante): com uma malha de

terceira ordem, o sinal pode ser rastreado com erro de fase nulo.⁷

Vale ressaltar que a análise anterior leva em consideração um modelo linear, válido apenas quando $\theta_e(t) \ll \pi/2$. Isso significa que as frequências ω_0 e ω_c devem ser muito próximas para que essa análise seja válida. No caso geral, devemos usar o modelo não linear na Fig. 4.26b. Para esse tipo de análise, sugerimos uma consulta a Viterbi,⁷ Gardner⁸ ou Lindsey.⁹

Análise de Malha de Primeira Ordem

Aqui, usaremos o modelo não linear na Fig. 4.26b, considerando o caso simples $H(s) = 1$, para o qual $h(t) = \delta(t)$,* e a Eq. (4.33) fornece

$$\dot{\theta}_o(t) = AK \operatorname{sen} \theta_e(t)$$

Como $\theta_e = \theta_i - \theta_o$

$$\dot{\theta}_e = \dot{\theta}_i - AK \operatorname{sen} \theta_e(t). \quad (4.39)$$

Consideremos, agora, o problema da aquisição de frequência e de fase. Suponhamos que o sinal que chega seja $A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \varphi_0)$ e que o VCO tenha uma frequência quiescente ω_c . Logo,

$$\theta_i(t) = (\omega_0 - \omega_c)t + \varphi_0$$

e

$$\dot{\theta}_e = (\omega_0 - \omega_c) - AK \operatorname{sen} \theta_e(t) \quad (4.40)$$

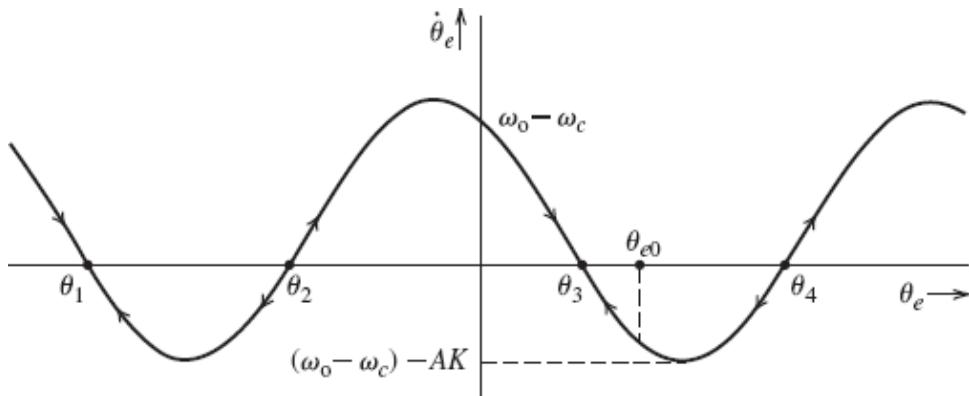


Figura 4.28

Trajetória de uma PLL de primeira ordem.

Para uma melhor compreensão do comportamento da PLL, usemos a Eq. (4.40) para esboçar o gráfico de $\dot{\theta}_e$ em função de θ_e . A Eq. (4.40) mostra que $\dot{\theta}_e$ é uma senoide deslocada verticalmente, como mostrado na Fig. 4.28. Para satisfazer a Eq. (4.40), a operação da malha deve permanecer na trajetória da senoide, como indicado na Fig. 4.28. Quando $\dot{\theta}_e = 0$, o sistema está em equilíbrio, pois, nesses pontos, θ_e deixa de variar no tempo. Assim, $\theta_e = \theta_1, \theta_2, \theta_3$ e θ_4 são pontos de equilíbrio.

Para um erro de fase inicial $\theta_e(0) = \theta_{e0}$ (Fig. 4.28), então θ_e correspondente a esse valor de θ_e é negativo. Portanto, o erro de fase, inicialmente, diminuirá ao longo da trajetória da senoide, até o valor θ_3 , em que é alcançado equilíbrio. Assim, em estado estacionário, o erro de fase é uma constante θ_3 . Isso significa que a malha está travada em frequência; ou seja, a frequência do VCO passa a ser ω_0 , mas há um erro de fase θ_3 . Notemos, contudo, que, se $|\omega_0 - \omega_c| > AK$, não há pontos de equilíbrio na Fig. 4.28, a malha jamais alcança a condição de travamento e θ_e se desloca ao longo da trajetória indefinidamente. Portanto, essa malha simples pode alcançar travamento de fase desde que a diferença entre a frequência de entrada ω_0 e a frequência quiescente ω_c do VCO não seja superior a AK .

Na Fig. 4.28, existem vários pontos de equilíbrio. Metade desses pontos, no entanto, são pontos de equilíbrio instável, o que implica que uma pequena perturbação no estado do sistema afastará mais o ponto de operação destes pontos de equilíbrio. Os pontos θ_1 e θ_3 são estáveis, pois qualquer pequena perturbação ao estado do sistema tenderá a trazê-lo de volta a esses pontos. Consideremos, por exemplo, o ponto θ_3 . Caso o estado seja perturbado ao longo da trajetória em direção à direita, $\dot{\theta}_e$ será negativo, o que tende a reduzir θ_e e trazê-lo de volta a θ_3 . Caso o ponto de operação seja perturbado a partir de θ_3 para a esquerda, $\dot{\theta}_e$ será positivo, e θ_e tenderá a crescer e o ponto de operação retornará a θ_3 . Contudo, se o ponto de operação for perturbado em θ_2 em direção à direita, $\dot{\theta}_e$ será positivo, e θ_e aumentará até alcançar θ_3 . Se, em θ_3 , o ponto de operação for perturbado para a esquerda,

$\dot{\theta}_e$ será negativo e $\dot{\theta}_e$ aumentará até alcançar θ_1 . Portanto, θ_2 é um ponto de equilíbrio instável. Qualquer perturbação, como ruído, deslocará o ponto de operação para θ_1 ou θ_3 . Do mesmo modo, podemos mostrar que θ_4 é um ponto instável e que θ_1 é um ponto de equilíbrio estável.

O ponto de equilíbrio θ_3 ocorre onde $\dot{\theta}_e = 0$. Logo, da Eq. (4.40),

$$\theta_3 = \operatorname{sen}^{-1} \frac{\omega_0 - \omega_c}{AK}$$

Se $\theta_e \ll \pi/2$, então

$$\theta_3 \simeq \frac{\omega_0 - \omega_c}{AK}$$

o que concorda com o resultado obtido anteriormente na análise sob pequeno erro [Eq. (4.36b)].

A malha de primeira ordem está sujeita a um erro de fase constante. Além disso, pode alcançar travamento em frequência somente se a diferença entre a frequência que chega e a frequência quiescente do VCO não ultrapassar AK rad/s. Malhas de ordens superiores superam essas desvantagens, mas criam um novo problema de estabilidade. Uma análise mais detalhada pode ser encontrada em Gardner.⁸

Generalização de Comportamentos de PLL

Para generalização, suponhamos que a malha esteja *travada*, ou seja, que as frequências das senoides de entrada e de saída sejam iguais. Nesse caso, dizemos que os dois sinais são mutuamente **coerentes em fase** ou estão em **travamento de fase**. O VCO rastreia a frequência e a fase do sinal recebido. Uma PLL é capaz de rastrear a frequência de entrada somente em uma faixa finita de deslocamentos de frequência. Essa faixa é denominada faixa de **retenção** (*hold-in range*) ou de **travamento** (*lock range*). Caso, inicialmente, as frequências de entrada e de saída não sejam suficientemente próximas, a malha pode não alcançar o travamento. A faixa de frequências na qual a entrada provocará o travamento da malha é denominada faixa de **aquisição** (*pull-in range*) ou de **captura** (*capture range*). Caso a frequência de entrada varie muito rapidamente, a malha pode não alcançar travamento.

Se a senoide de entrada for ruidosa, a PLL não apenas é capaz de seguir a senoide, mas também de limpá-la. A PLL ainda pode ser usada como um demodulador de sinais modulados em frequência (FM) e como sintetizador de frequência, como mostraremos no próximo capítulo. Multiplicadores e divisores de frequência também podem ser construídos com PLL. Por ser um circuito integrado relativamente barato, a PLL se tornou um dos circuitos de comunicação mais utilizados.

Em naves espaciais, devido ao deslocamento Doppler e à deriva do oscilador, a frequência do sinal recebido contém muita incerteza. O deslocamento Doppler da portadora pode chegar a ± 75 kHz, enquanto a banda do sinal modulado desejado pode ser de apenas 10 Hz. A recepção de um sinal desse tipo com receptores comuns exigiria um filtro de largura de banda de 150 kHz, quando o sinal desejado tem uma largura de banda de apenas 10 Hz. Isso causaria um aumento indesejável no ruído do receptor (por um fator de 15.000), pois a potência de ruído é proporcional à largura de banda. Em casos como esse, a PLL se mostra conveniente, pois é capaz de seguir continuamente a frequência recebida, de modo que a necessária largura de banda do filtro passa a ser de apenas 10 Hz.

Aquisição de Portadora em DSB-SC

A seguir, discutiremos dois métodos de regeneração de portadora com o uso de PLL no receptor em DSB-SC: método quadrático e malha Costas.

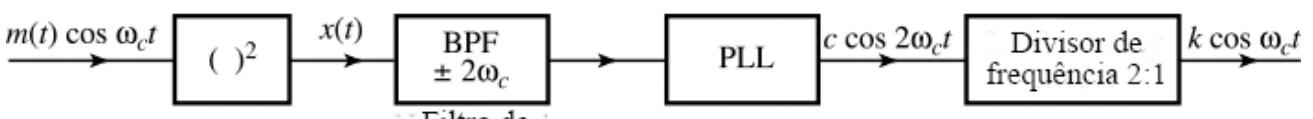
Método Quadrático:

Este esquema é delineado na Fig. 4.29. O sinal recebido é elevado ao quadrado e aplicado a um filtro passa-faixa estreito (de alto Q) sintonizado em $2\omega_c$. A saída desse filtro é a senoide $k \cos 2\omega_c t$, juntamente com algum sinal residual indesejável. Esse sinal é aplicado a uma PLL, para a obtenção de uma senoide mais limpa no dobro da frequência portadora; a senoide é, então, passada por um divisor de frequências 2:1, resultando em uma portadora local em sincronismo de fase e frequência com a portadora recebida. A análise é simples. O sinal quadrático $x(t)$ é

$$x(t) = [m(t) \cos \omega_c t]^2 = \frac{1}{2}m^2(t) + \frac{1}{2}m^2(t) \cos 2\omega_c t$$

Como $m^2(t)$ é um sinal não negativo, tem valor médio não nulo [ao contrário de $m(t)$, que, em geral, tem valor médio nulo]. Suponhamos que o valor médio, componente de $m^2(t)/2$, seja k . Com isso, podemos expressar $m^2(t)/2$ como

$$\frac{1}{2}m^2(t) = k + \phi(t)$$



Fim do de
banda estreita

Figura 4.29

Uso do quadrado do sinal para gerar uma portadora para demodulação coerente.

em que $\phi(t)$ é um sinal em banda base de média zero [$m^2(t)$ menos sua componente dc]. Assim,

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{2}m^2(t) + \frac{1}{2}m^2(t)\cos 2\omega_c t \\&= \frac{1}{2}m^2(t) + k \cos 2\omega_c t + \phi(t) \cos 2\omega_c t\end{aligned}$$

O filtro passa-faixa é um filtro de banda estreita (de alto Q) sintonizado em $2\omega_c$. Esse filtro suprime totalmente o sinal $m^2(t)$, cujo espectro é centrado em $\omega = 0$. O filtro também elimina a maior parte do sinal $\phi(t) \cos 2\omega_c t$. Isso ocorre porque o sinal, embora tenha espectro centrado em $2\omega_c$, tem potência zero (infinitesimal) em $2\omega_c$, pois $\phi(t)$ tem um valor dc zero. Além disso, essa componente é distribuída ao longo da banda de 4B Hz centrada em $2\omega_c$. Portanto, muito pouco desse sinal passa pelo filtro de banda estreita.* Em contraste, o espectro de $k \cos 2\omega_c t$ consiste em impulsos localizados em $\pm 2\omega_c$. Logo, toda sua potência é centrada em $2\omega_c$ e passará pelo filtro. Portanto, a saída do filtro é $k \cos 2\omega_c t$ mais um pequeno resíduo indesejado de $\phi(t) \cos 2\omega_c t$. Esse resíduo pode ser eliminado com o uso de uma PLL que siga $k \cos 2\omega_c t$. A saída da PLL, depois da passagem por um divisor de frequências 2:1, fornece a portadora desejada. Aqui, cabe uma ressalva. Como o sinal recebido é perdido ao ser elevado ao quadrado, temos uma ambiguidade de polaridade (ou ambiguidade de fase π) na portadora gerada. No caso de sinais analógicos, isso é irrelevante. Contudo, no caso de sinais digitais em banda base, a polaridade da portadora é essencial e esse método não pode, portanto, ser usado diretamente.

Malha de Costas: Outro esquema para a geração de uma portadora local, proposto por Costas,¹⁰ é mostrado na Fig. 4.30. O sinal recebido é $m(t) \cos(\omega_c t + \theta_i)$. No receptor, um VCO gera a portadora $\cos(\omega_c t + \theta_o)$. O erro de fase é $\theta_e = \theta_i - \theta_o$. Vários sinais são indicados na Fig. 4.30. Os dois filtros passa-baixas suprimem termos de altas frequências e fornecem $m(t) \cos \theta_e$ e $m(t) \sin \theta_e$. Essas saídas são, então, multiplicadas, resultando em $m^2(t) \sin 2\theta_e$. A aplicação desse sinal a um filtro passa-baixa de banda estreita produz a saída $R \sin 2\theta_e$, em que R é a componente dc de $m^2(t)/2$. O sinal $R \sin 2\theta_e$ é aplicado à entrada de um VCO com frequência quiescente ω_c . A entrada $R \sin 2\theta_e$ aumenta a frequência de saída, que, por sua vez, reduz θ_e . Esse mecanismo foi discutido em detalhes no contexto da Fig. 4.26.

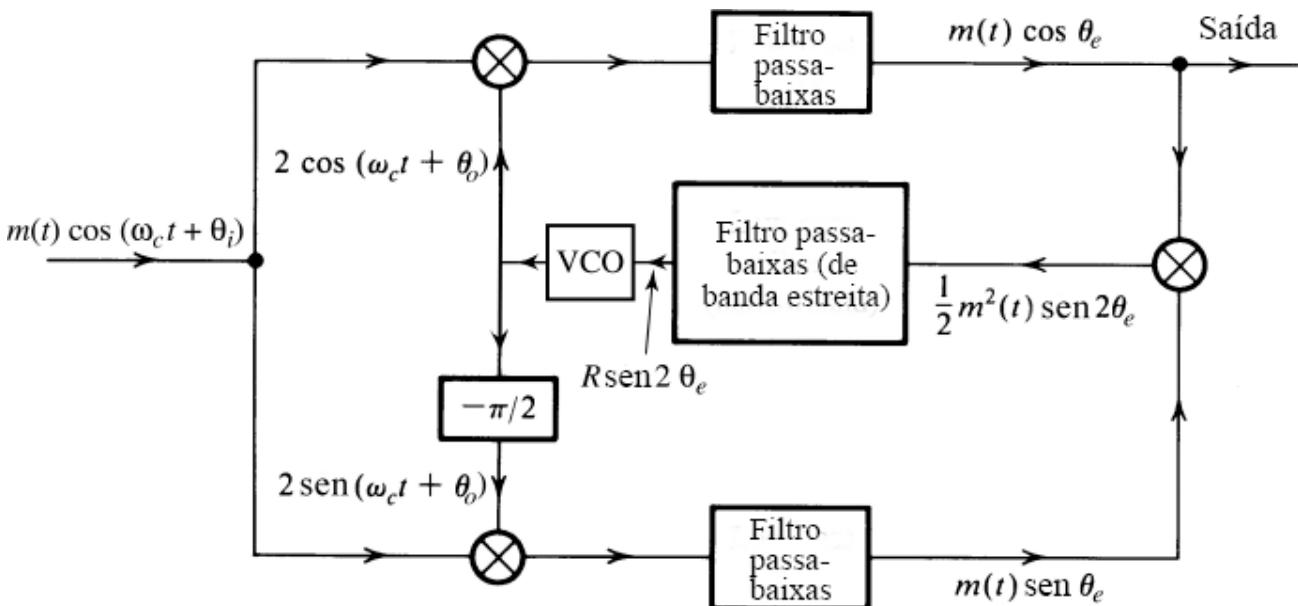


Figura 4.30

Malha de aquisição de fase de Costas para a geração de uma portadora para demodulação coerente.

Aquisição de Portadora em SSB-SC

Para sincronização em um receptor SSB-SC, podemos usar osciladores a cristal altamente estáveis, com cristais cortados para a mesma frequência no transmissor e no receptor. Em frequências muito altas, nas quais cristais de quartzo podem não ter desempenho adequado, uma portadora piloto pode ser transmitida. Esses são os mesmos métodos empregados para DSB-SC. Contudo, nem o método quadrático nem a malha de Costas, utilizados em DSB-SC, podem ser usados em SSB-SC. Para comprovar isto, escrevemos o sinal SSB-SC como

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{SSB}}(t) &= m(t) \cos \omega_c t \mp m_h(t) \sin \omega_c t \\ &= E(t) \cos [\omega_c t + \theta(t)]\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}E(t) &= \sqrt{m^2(t) + m_h^2(t)} \\ \theta(t) &= \tan^{-1} \left[\frac{\pm m_h(t)}{m(t)} \right]\end{aligned}$$

Elevando este sinal ao quadrado, obtemos

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{SSB}}^2(t) &= E^2(t) \cos^2 [\omega_c t + \theta(t)] \\ &= \frac{E^2(t)}{2} \{1 + \cos [2\omega_c t + 2\theta(t)]\}\end{aligned}$$

O sinal $E^2(t)$ é eliminado por um filtro passa-faixa. Lamentavelmente, o sinal remanescente não é uma senoide pura de frequência $2\omega_c$ (como no caso DSB). Nada podemos fazer para remover a fase variante no tempo $2\theta(t)$ dessa senoide. Assim, para SSB, a técnica quadrática não funciona. O mesmo argumento pode ser usado para mostrar que a malha de Costas também não funciona. Essas conclusões se aplicam, ainda, a sinais VSB.

4.9 EXERCÍCIOS COM O MATLAB

Nesta seção, apresentamos exercícios baseados em MATLAB para reforçar alguns dos conceitos básicos de modulação analógica cobertos nas seções anteriores. Usaremos exemplos que podem ilustrar a modulação e a demodulação de sinais DSB-SC, AM, SSB-SC e QAM.

Modulação e Demodulação DSB-SC

O primeiro programa MATLAB, triplesinc.m, gera um sinal que é (quase) estritamente limitado em banda e consiste em três versões atrasadas de um mesmo sinal:

$$m_2(t) = 2 \operatorname{sinc}(2t/T_a) + \operatorname{sinc}(2t/T_a + 1) + \operatorname{sinc}(2t/T_a - 1)$$

```
% (triplesinc.m)
%   Sinal em banda base para AM
%   Uso: m=triplesinc(t,Ta)
function m=triplesinc(t,Ta)
%   t é a duração do sinal
%   Ta é o parâmetro, igual ao dobro do atraso
%
sig_1=sinc(2*t/Ta);
sig_2=sinc(2*t/Ta-1);
sig_3=sinc(2*t/Ta+1);
m=2*sig_1+sig_2+sig_3;
end
```

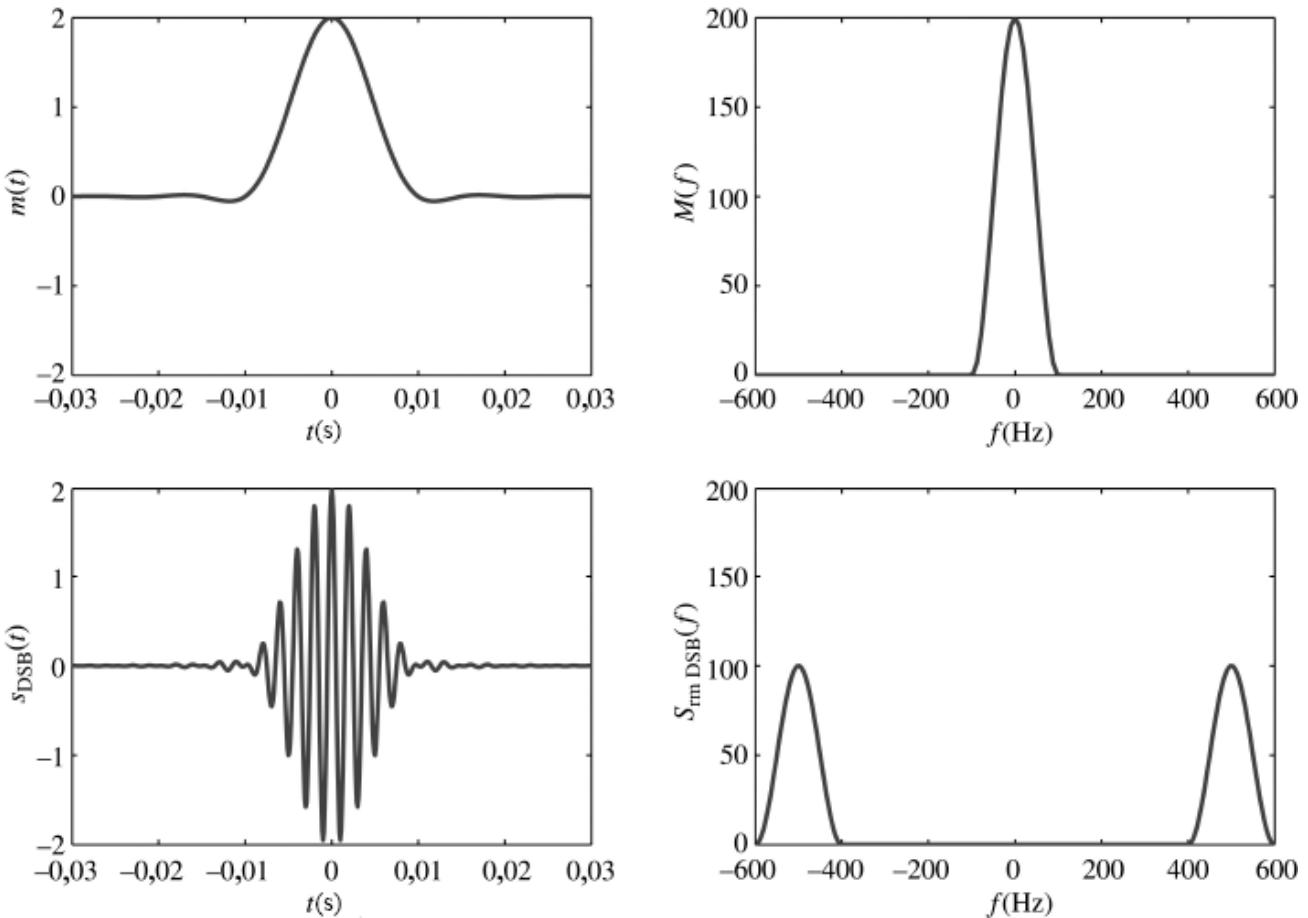


Figura 4.31

Sinais do exemplo, nos domínios do tempo e da frequência durante a modulação DSB.

O sinal DSB-SC pode ser gerado com o arquivo MATLAB `ExampleDSB.m` que gera um sinal DSB-SC para $t \in (-0,04, 0,04)$. A frequência portadora é 300 Hz. O sinal de mensagem original e o sinal DSB-SC, nos domínios do tempo e da frequência, são ilustrados na Fig. 4.31.

```
% (ExampleDSB.m)
% Este programa usa triplesinc.m para ilustrar a modulação
% e a demodulação DSB

ts=1.e-4

t=-0.04:ts:0.04;
Ta=0.01;
m_sig=triplesinc(t,Ta);
Lfft=length(t); Lfft=2^ceil(log2(Lfft));
M_fre=fftshift(fft(m_sig,Lfft));
freqm=(-Lfft/2:Lfft/2-1)/(Lfft*ts);

s_dsb=m_sig.*cos(2*pi*500*t);
Lfft=length(t); Lfft=2^ceil(log2(Lfft)+1);
S_dsb=fftshift(fft(s_dsb,Lfft));
freqs=(-Lfft/2:Lfft/2-1)/(Lfft*ts);

Trange=[-0.03 0.03 -2 2]
figure(1)
subplot(221);td1=plot(t,m_sig);
axis(Trange); set(td1,'Linewidth',2);
xlabel('\it t\ (sec)'); ylabel('m(\it t\ )')
```

```

subplot(223);td2=plot(t,s_dsb);
axis(Trange); set(td2,'Linewidth',2);
xlabel('{\it t} (sec)'); ylabel('{\it s}_{\rm DSB}({\it t})')

Frange=[-600 600 0 200]
subplot(222);fd1=plot(freqm,abs(M_fre));
axis(Frange); set(fd1,'Linewidth',2);
xlabel('{\it f} (Hz)'); ylabel('|{\it M}({\it f})|')
subplot(224);fd2=plot(freqs,abs(S_dsb));
axis(Frange); set(fd2,'Linewidth',2);
xlabel('{\it f} (Hz)'); ylabel('|{\it S}_{\rm DSB}({\it f})|')

```

O primeiro exemplo de modulação, `ExampleDSBdemfilt.m`, é baseado em um sinal de mensagem estritamente passa-baixas $m_0(t)$. A seguir, geramos um sinal de mensagem diferente, que não é estritamente limitado em banda. Na verdade, o novo sinal de mensagem consiste em dois triângulos:

$$m_1(t) = \Delta\left(\frac{t + 0,01}{0,01}\right) - \Delta\left(\frac{t - 0,01}{0,01}\right)$$

A demodulação coerente também é implementada com um filtro passa-baixas de resposta ao impulso finita (FIR — *finite impulse response*) de ordem 40. O sinal de mensagem original $m(t)$, o sinal DSB-SC $s(t)$ dos $\omega_c t$, o sinal do demodulador $e(t) = m(t) \cos^2 \omega_c t$ e o sinal de mensagem $m_d(t)$ recuperado após filtragem passa-baixas são ilustrados na Fig. 4.32, no domínio do tempo, e na Fig. 4.33, no domínio da frequência. O filtro passa-baixas no demodulador tem largura de banda de 150 Hz. O resultado da demodulação quase não exibe distorção.

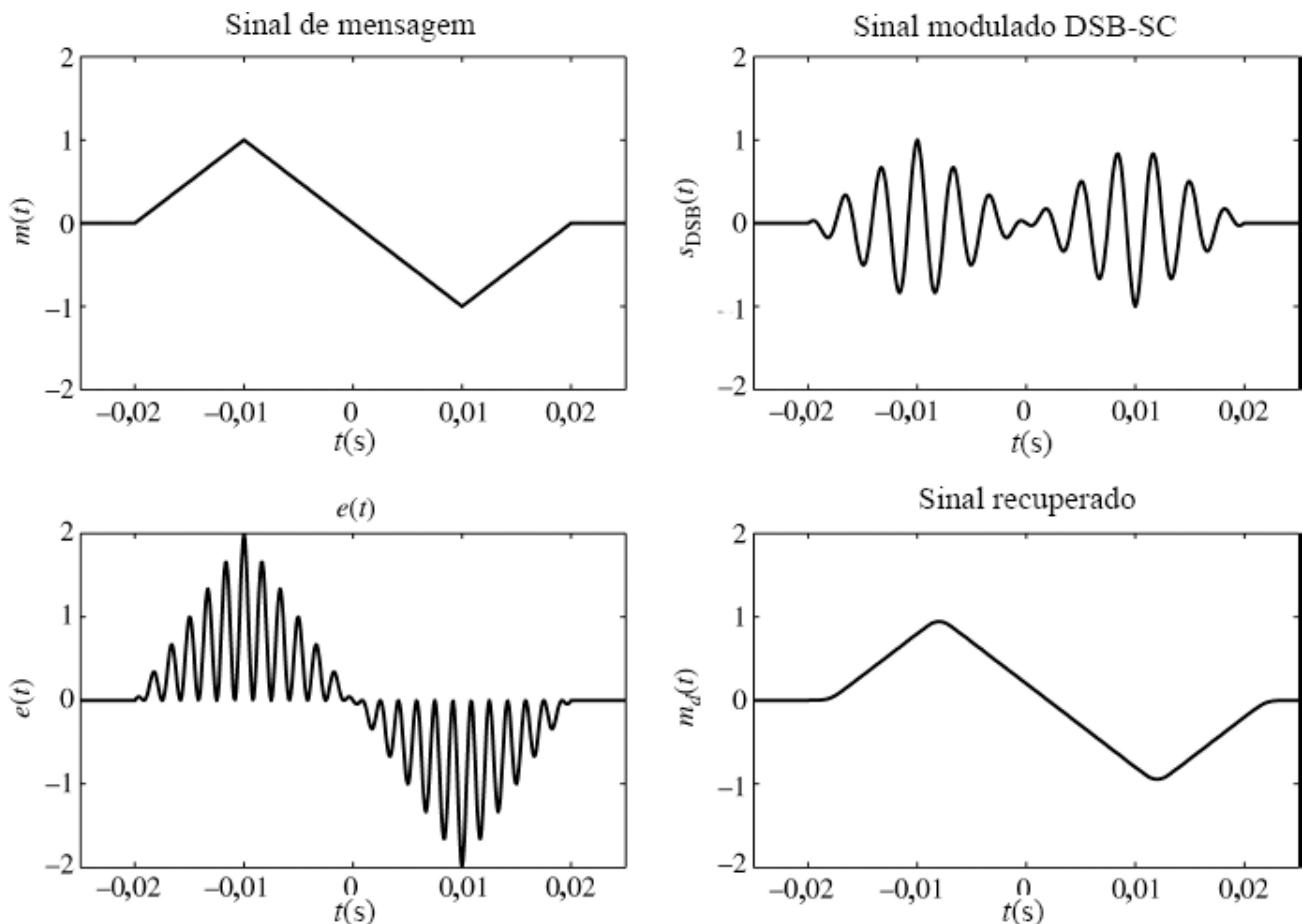


Figura 4.32
Sinais nos domínios do tempo durante a modulação e a demodulação DSB.



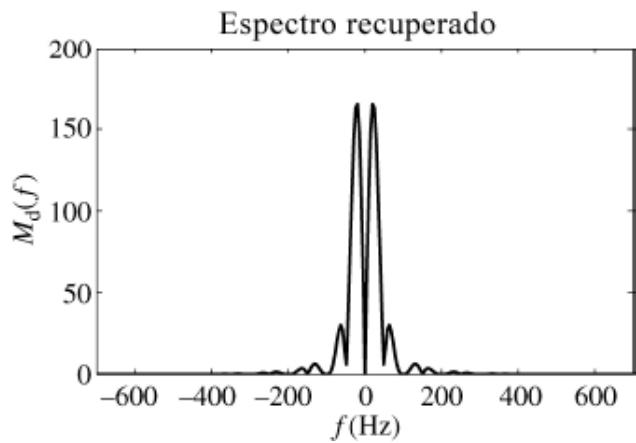
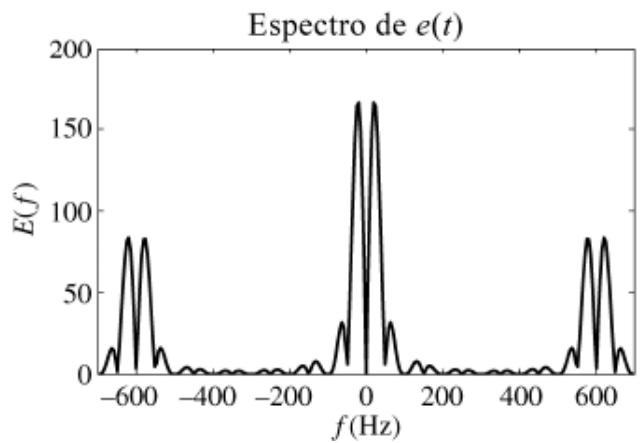
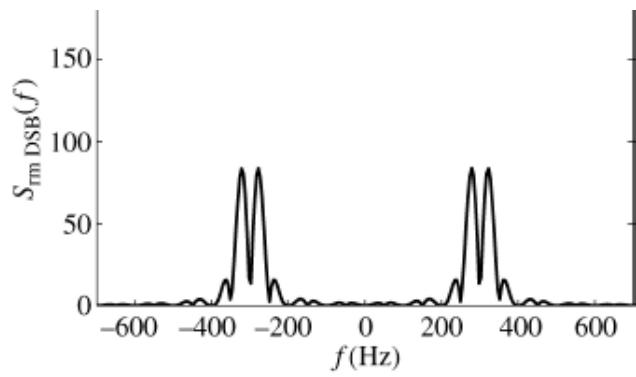
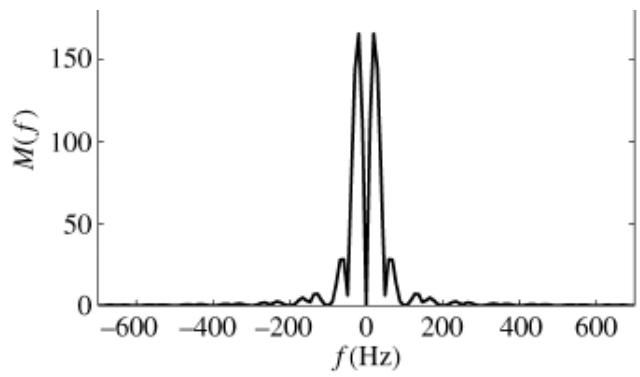


Figura 4.33

Sinais nos domínios da frequência durante a modulação e a demodulação DSB-SC.

```
% (ExampleDSBdemfilt.m)
% Este programa usa triangl.m para ilustrar modulação
% e demodulação DSB
```

% E DEMODULAÇÃO DSB

```
ts=1.e-4;

t=-0.04:ts:0.04;
Ta=0.01;
m_sig=triangl((t+0.01)/0.01)-triangl((t-0.01)/0.01);
Lm_sig=length(m_sig);
Lfft=length(t);
Lfft=2^ceil(log2(Lfft));
M_fre=fftshift(fft(m_sig,Lfft));
freqm=(-Lfft/2:Lfft/2-1)/(Lfft*ts);
B_m=150; %Bandwidth of the signal is B_m Hz.
h=fir1(40,[B_m*ts]);

t=-0.04:ts:0.04;
Ta=0.01;fc=300;
s_dsb=m_sig.*cos(2*pi*fc*t);
Lfft=length(t); Lfft=2^ceil(log2(Lfft)+1);
S_dsb=fftshift(fft(s_dsb,Lfft));
freqs=(-Lfft/2:Lfft/2-1)/(Lfft*ts);

% Demodulação tem início com a multiplicação pela portadora
s_dem=s_dsb.*cos(2*pi*fc*t)*2;
S_dem=fftshift(fft(s_dem,Lfft));

% Uso de filtro passa-baixos ideal com largura de banda de 150 Hz
s_rec=filter(h,1,s_dem);
S_rec=fftshift(fft(s_rec,Lfft));

Trange=[-0.025 0.025 -2 2];
```

```

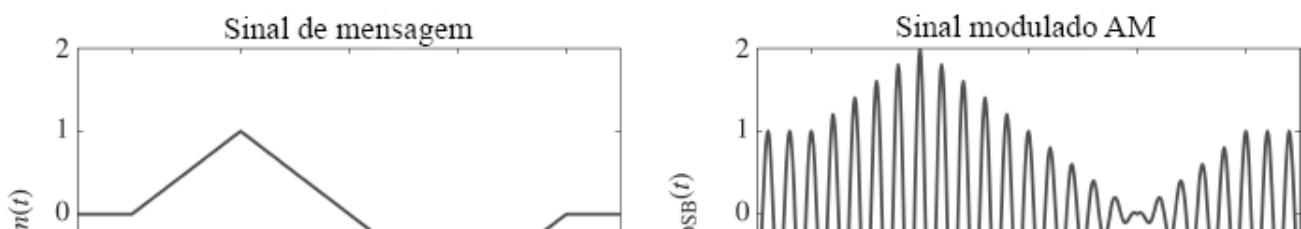
figure(1)
subplot(221);td1=plot(t,m_sig);
axis(Trange); set(td1,'Linewidth',1.5);
xlabel('{\it t} (sec)'); ylabel('{\it m}({\it t})');
title('sinal de mensagem');
subplot(222);td2=plot(t,s_dsb);
axis(Trange); set(td2,'Linewidth',1.5);
xlabel('{\it t} (sec)'); ylabel('{\it s}_{\rm DSB}({\it t})');
title('sinal modulado DSB-SC');
subplot(223);td3=plot(t,s_dem);
axis(Trange); set(td3,'Linewidth',1.5);
xlabel('{\it t} (sec)'); ylabel('{\it e}({\it t})');
title('{\it e}({\it t})');
subplot(224);td4=plot(t,s_rec);
axis(Trange); set(td4,'Linewidth',1.5);
xlabel('{\it t} (sec)'); ylabel('{\it m}_d({\it t})');
title('Sinal recuperado');

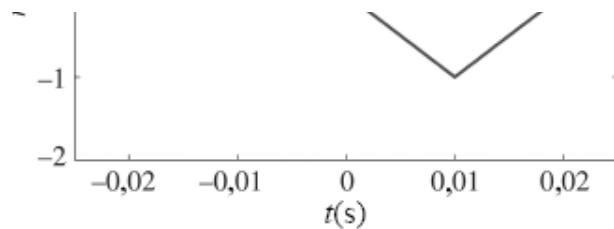
Frango=[-700 700 0 200];
figure(2)
subplot(221);fd1=plot(freqm,abs(M_fre));
axis(Frange); set(fd1,'Linewidth',1.5);
xlabel('{\it f} (Hz)'); ylabel('|{\it M}({\it f})|');
title('espectro da mensagem');
subplot(222);fd2=plot(freqs,abs(S_dsb));
axis(Frange); set(fd2,'Linewidth',1.5);
xlabel('{\it f} (Hz)'); ylabel('|{\it S}_{\rm DSB}({\it f})|');
title('espectro DSB-SC');
subplot(223);fd3=plot(freqs,abs(S_dem));
axis(Frange); set(fd3,'Linewidth',1.5);
xlabel('{\it f} (Hz)'); ylabel('|{\it E}({\it f})|');
title('espectro de {\it e}({\it t})');
subplot(224);fd4=plot(freqs,abs(S_rec));
axis(Frange); set(fd4,'Linewidth',1.5);
xlabel('{\it f} (Hz)'); ylabel('|{\it M}_d({\it f})|');
title('espectro recuperado');

```

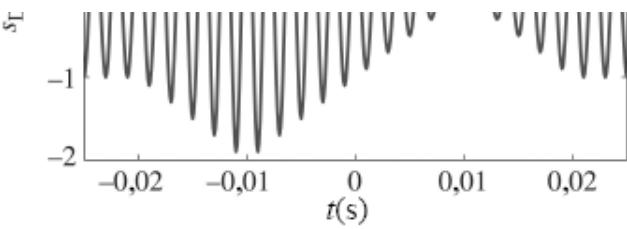
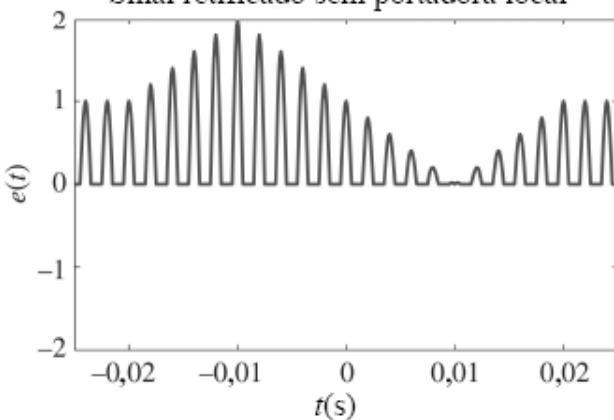
Modulação e Demodulação AM

Neste exercício, geraremos um sinal AM convencional, com índice de modulação $\mu = 1$. Usando o mesmo sinal de mensagem $m(t)$, o programa MATLAB ExampleAMdemfilt.m gera o sinal de mensagem, o correspondente sinal AM, o sinal retificado em demodulação não coerente e o sinal retificado após filtragem passa-baixas. O filtro passa-baixas no demodulador tem largura de banda de 150 Hz. Os sinais no domínio do tempo são ilustrados na Fig. 4.34, e os correspondentes sinais no domínio da frequência, na Fig. 4.35.





Sinal retificado sem portadora local



Sinal detectado

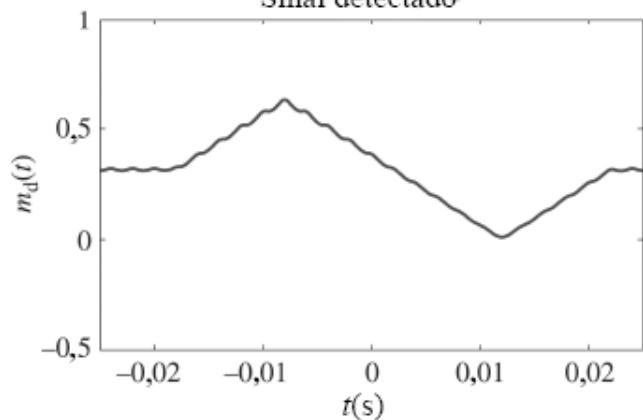
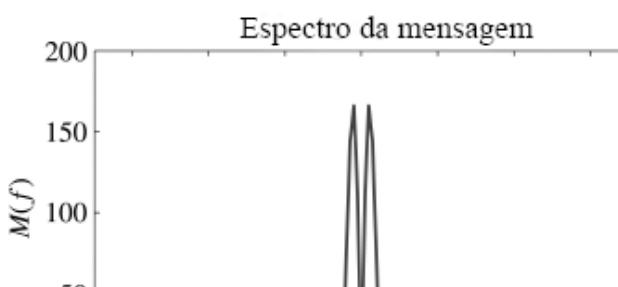


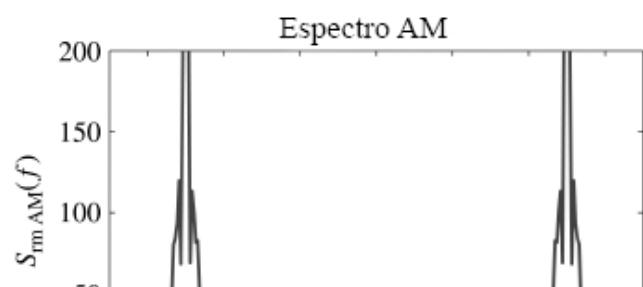
Figura 4.34

Sinais no domínio do tempo em modulação AM e demodulação não coerente.

Notemos o grande impulso no espectro do sinal AM. A limitada janela temporal significa que um impulso ideal não é possível e que apenas picos intensos, centrados na frequência portadora ± 300 Hz, são visíveis. Por fim, como o sinal de mensagem não é estritamente limitado em banda, a relativamente baixa frequência portadora de 300 Hz força o filtro passa-baixas no demodulador a truncar algumas das componentes do sinal de mensagem no demodulador. Distorção é visível nas proximidades dos cantos abruptos do sinal recuperado.



Espectro da mensagem



Espectro AM

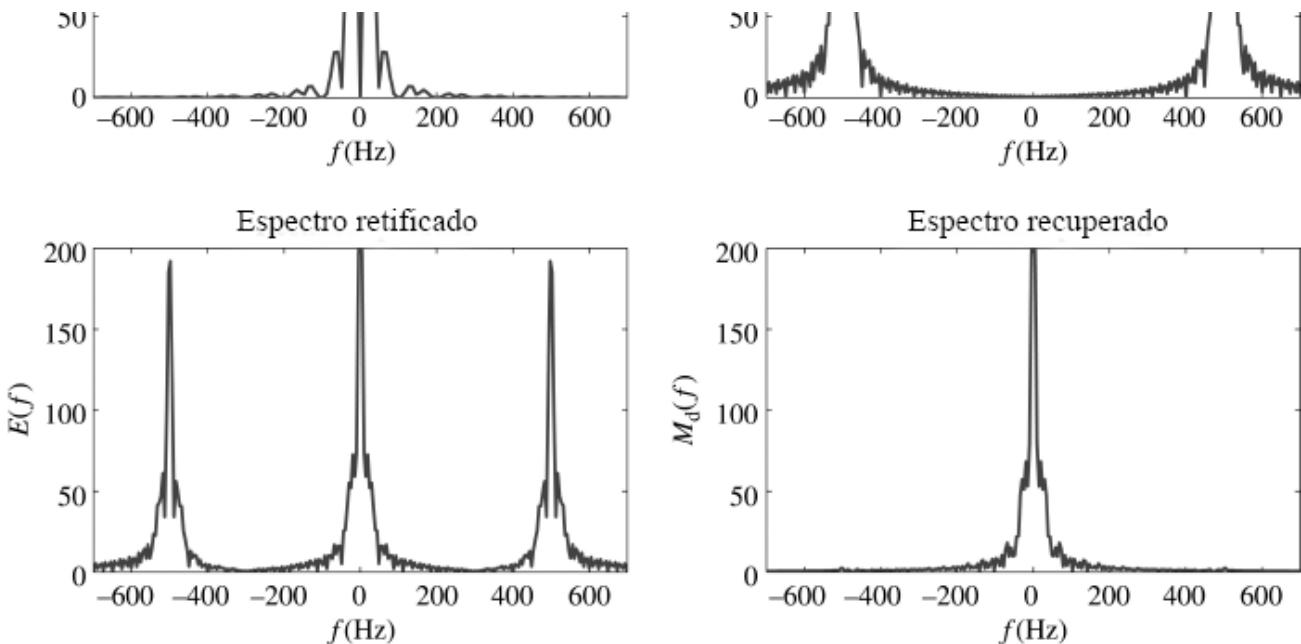


Figura 4.35

Sinais no domínio da frequência em modulação AM e demodulação não coerente.

```
% (ExampleAMdemfilt.m)
% Este programa usa triangl.m para ilustrar modulação
% e demodulação AM

ts=1.e-4;
t=-0.04:ts:0.04;
Ta=0.01; fc=500;
m_sig=triangl((t+0.01)/0.01)-triangl((t-0.01)/0.01);
Lm sig=length(m sig);
```

```

Lfft=length(t); Lfft=2^ceil(log2(Lfft));
M_fre=fftshift(fft(m_sig,Lfft));
freqm=(-Lfft/2:Lfft/2-1)/(Lfft*ts);
B_m=150; %Bandwidth of the signal is B_m Hz.
h=fir1(40,[B_m*ts]);

% Sinal AM gerado com a adição de uma portadora a DSB-SC
s_am=(1+m_sig).*cos(2*pi*fc*t);
Lfft=length(t); Lfft=2^ceil(log2(Lfft)+1);
S_am=fftshift(fft(s_am,Lfft));
freqs=(-Lfft/2:Lfft/2-1)/(Lfft*ts);

% Demodulação tem inicio com o uso de um retificador
s_dem=s_am.* (s_am>0);
S_dem=fftshift(fft(s_dem,Lfft));

% Uso de filtro passa-baixas ideal com largura de banda de 150 Hz
s_rec=filter(h,1,s_dem);
S_rec=fftshift(fft(s_rec,Lfft));

Trange=[-0.025 0.025 -2 2];
figure(1)
subplot(221);td1=plot(t,m_sig);
axis(Trange); set(td1,'Linewidth',1.5);
xlabel('(\it t) (sec)'); ylabel('(\it m)(\it t)');
title('sinal de mensagem');
subplot(222);td2=plot(t,s_am);
axis(Trange); set(td2,'Linewidth',1.5);
xlabel('(\it t) (sec)'); ylabel('(\it s)_DSB(\it t)');
title('sinal modulado AM');
subplot(223);td3=plot(t,s_dem);
axis(Trange); set(td3,'Linewidth',1.5);
xlabel('(\it t) (sec)'); ylabel('(\it e)(\it t)');
title('sinal retificado sem portadora local');
subplot(224);td4=plot(t,s_rec);
Trangelow=[-0.025 0.025 -0.5 1];
axis(Trangelow); set(td4,'Linewidth',1.5);
xlabel('(\it t) (sec)'); ylabel('(\it m)_d(\it t)');
title('sinal detectado');

Frange=[-700 700 0 200];
figure(2)
subplot(221);fd1=plot(freqm,abs(M_fre));
axis(Frange); set(fd1,'Linewidth',1.5);
xlabel('(\it f) (Hz)'); ylabel('(\it M)(\it f)');
title('espectro da mensagem');
subplot(222);fd2=plot(freqs,abs(S_am));

axis(Frange); set(fd2,'Linewidth',1.5);
xlabel('(\it f) (Hz)'); ylabel('(\it S)_AM(\it f)');
title('espectro AM');
subplot(223);fd3=plot(freqs,abs(S_dem));
axis(Frange); set(fd3,'Linewidth',1.5);
xlabel('(\it f) (Hz)'); ylabel('(\it E)(\it f)');
title('espectro retificado');
subplot(224);fd4=plot(freqs,abs(S_rec));
axis(Frange); set(fd4,'Linewidth',1.5);
xlabel('(\it f) (Hz)'); ylabel('(\it M)_d(\it f)');
title('espectro recuperado').

```

Modulação e Demodulação SSB-SC

Para ilustrar os processos de modulação e de demodulação SSB-SC, esse exercício gera um sinal SSB-SC usando o mesmo sinal de mensagem $m_1(t)$ com triângulos duplos. A frequência portadora continua sendo 300 Hz. O programa MATLAB ExampleSSBdemfilt.m executa essa função. É aplicada demodulação coerente, na qual um simples filtro passa-baixas com largura de banda de 150 Hz é usado para produzir o sinal de mensagem recuperado.

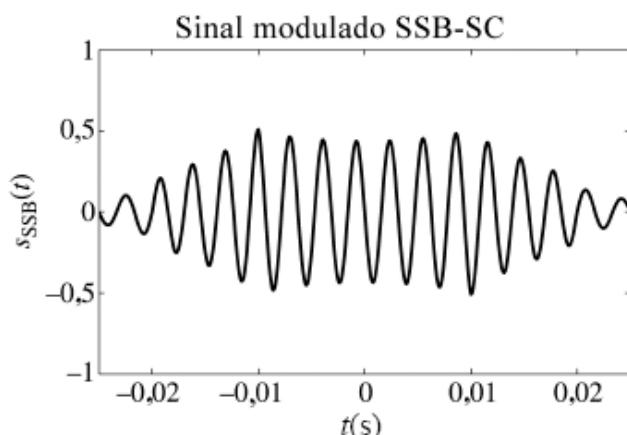
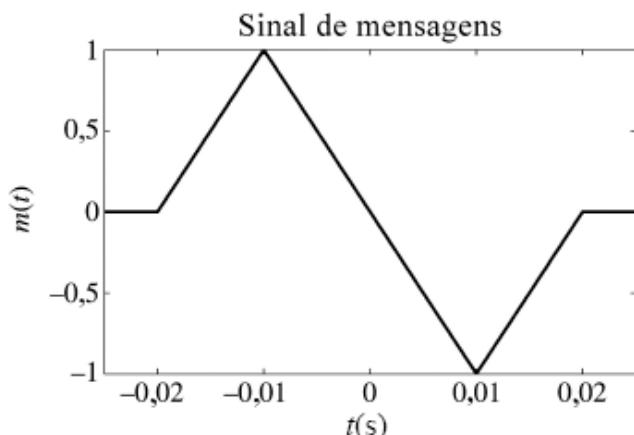
Os sinais no domínio do tempo são mostrados na Fig. 4.36, enquanto os correspondentes sinais no domínio da frequência são mostrados na Fig. 4.37.

```
% (ExampleSSBdemfilt.m)
% Este programa usa triangl.m
% para ilustrar modulação SSB % e demodulação
clear;clf;

ts=1.e-4;
t=-0.04:ts:0.04;
Ta=0.01; fc=300;
m_sig=triangl((t+0.01)/0.01)-triangl((t-0.01)/0.01);
Lm_sig=length(m_sig);
Lfft=length(t); Lfft=2^ceil(log2(Lfft));
M_free=fftshift(fft(m_sig,Lfft));
freqm=(-Lfft/2:Lfft/2-1)/(Lfft*ts);
B_m=150; % A largura de banda do sinal é B_m Hz.
h=fir1(40,[B_m*ts]);

s_dsb=m_sig.*cos(2*pi*fc*t);
Lfft=length(t); Lfft=2^ceil(log2(Lfft)+1);
S_dsb=fftshift(fft(s_dsb,Lfft));
L_lsb=floor(fc*ts*Lfft);
SSBfilt=ones(1,Lfft);
SSBfilt(Lfft/2-L_lsb+1:Lfft/2+L_lsb)=zeros(1,2*L_lsb);
S_ssbb=S_dsb.*SSBfilt;
freqss=(-Lfft/2:Lfft/2-1)/(Lfft*ts);
s_ssbb=real(ifft(fftshift(S_ssbb)));
s_ssbb=s_ssbb(1:Lm_sig);

% A demodulação começa pela multiplicação com a portadora
s_dem=s_ssbb.*cos(2*pi*fc*t)*2;
S_dem=fftshift(fft(s_dem,Lfft));
```



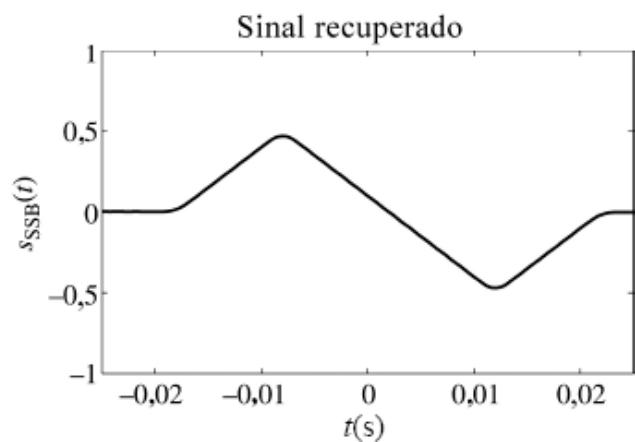
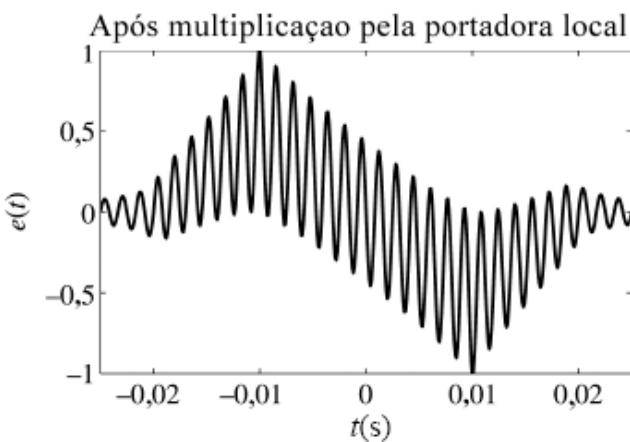


Figura 4.36
Sinais no domínio do tempo durante modulação SSB-SC e demodulação coerente.

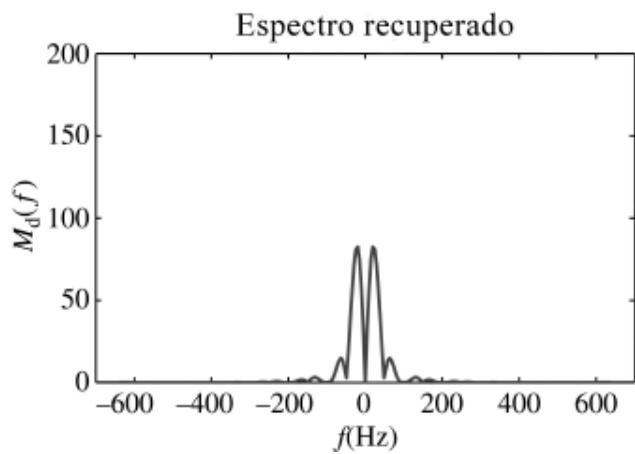
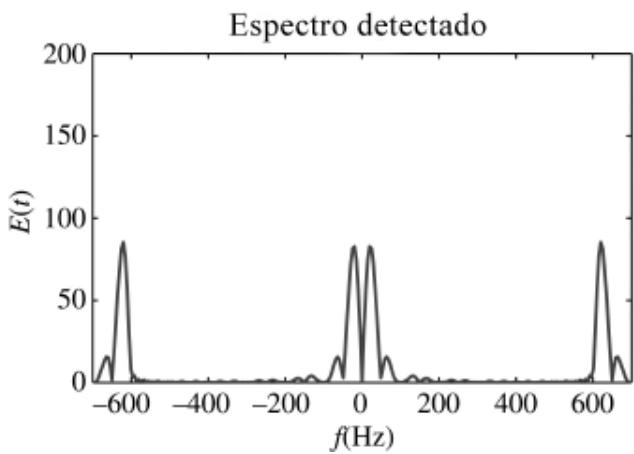
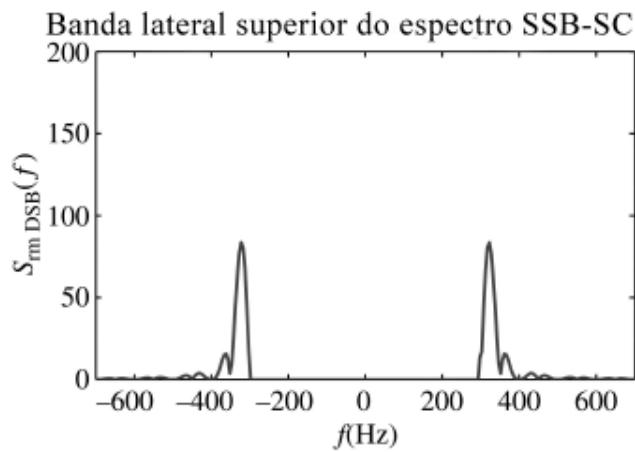
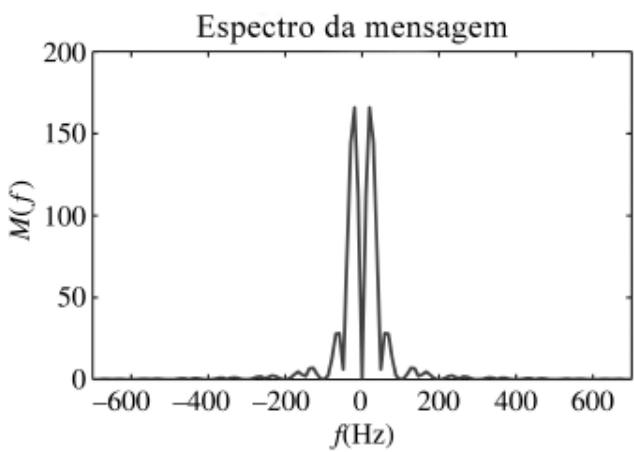


Figura 4.37 Sinais no domínio da frequência durante modulação SSB-SC e demodulação coerente.

```
% Usando um filtro PB com largura de banda 150 Hz
s_rec=filter(h,1,s_dem);
S_rec=fftshift(fft(s_rec,Lfft));

Trange=[-0.025 0.025 -1 1];
figure(1)
subplot(221);td1=plot(t,m_sig);
axis(Trange); set(td1,'Linewidth',1.5);
xlabel('(\it t) (sec)'); ylabel('(\it m)(\it t)');
title('sinal de mensagem');
subplot(222);td2=plot(t,s_ssbb);
axis(Trange); set(td2,'Linewidth',1.5);
```

```

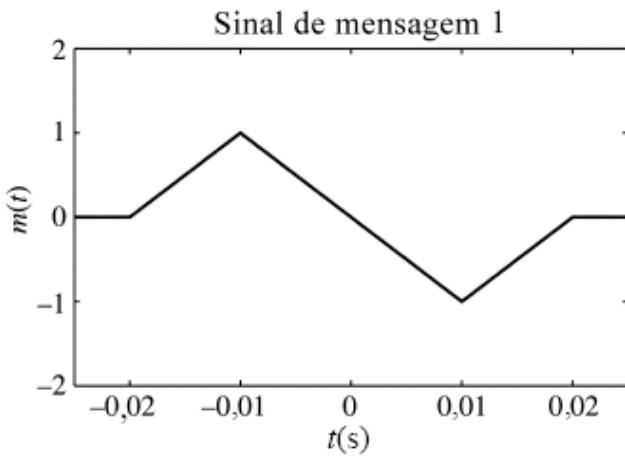
xlabel('(\it t) (sec)'); ylabel('(\it s)_\rm SSB(\it t)')
title('sinal modulado SSB-SC');
subplot(223);td3=plot(t,s_dem);
axis(Frange); set(td3,'Linewidth',1.5);
xlabel('(\it t) (sec)'); ylabel('(\it e)(\it t)');
title('após multiplicação pela portadora local');
subplot(224);td4=plot(t,s_rec);
axis(Frange); set(td4,'Linewidth',1.5);
xlabel('(\it t) (sec)'); ylabel('(\it m)_d(\it t)');
title('Sinal recuperado');

Frange=[-700 700 0 200];
figure(2)
subplot(221);fd1=plot(freqm,abs(M_fre));
axis(Frange); set(fd1,'Linewidth',1.5);
xlabel('(\it f) (Hz)'); ylabel('(\it M)(\it f)');
title('espectro da mensagem');
subplot(222);fd2=plot(freqs,abs(S_ss));
axis(Frange); set(fd2,'Linewidth',1.5);
xlabel('(\it f) (Hz)'); ylabel('(\it S)_\rm DSB(\it f)');
title('banda lateral superior do espectro SSB-SC');
subplot(223);fd3=plot(freqs,abs(S_dem));
axis(Frange); set(fd3,'Linewidth',1.5);
xlabel('(\it f) (Hz)'); ylabel('(\it E)(\it f)');
title('espectro detectado');
subplot(224);fd4=plot(freqs,abs(S_rec));
axis(Frange); set(fd4,'Linewidth',1.5);
xlabel('(\it f) (Hz)'); ylabel('(\it M)_d(\it f)');
title('espectro recuperado');

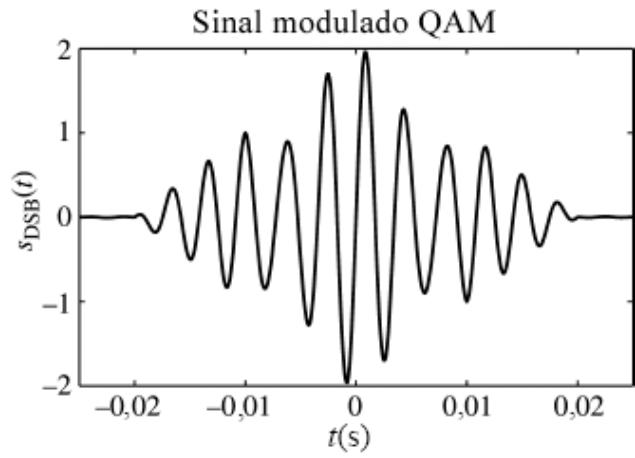
```

Modulação e Demodulação QAM

Neste exercício, aplicaremos a QAM para modular e demodular dois sinais de mensagem $m_1(t)$ e $m_2(t)$. A frequência portadora permanece em 300 Hz, mas dois sinais são modulados e detectados simultaneamente. O sinal QAM é demodulado coerentemente com a multiplicação por $\cos 600\pi t$ e $\sin 600\pi t$, para recuperar os dois sinais de mensagem. Cada produto é filtrado pelo mesmo filtro passa-baixas de ordem 40. O programa MATLAB `ExampleQAMdemfilt.m` completa essa ilustração produzindo gráficos dos sinais no domínio do tempo, durante a modulação e a demodulação do primeiro sinal $m_1(t)$ e do segundo sinal $m_2(t)$. Os resultados para $m_1(t)$ nos domínios do tempo e da frequência são mostrados nas Fig. 4.38 e Fig. 4.39, respectivamente. As Fig. 4.40 e Fig. 4.41 mostram, respectivamente, os resultados para $m_2(t)$ nos domínios do tempo e da frequência.



Primeira saída do demodulador



Sinal detectado 1

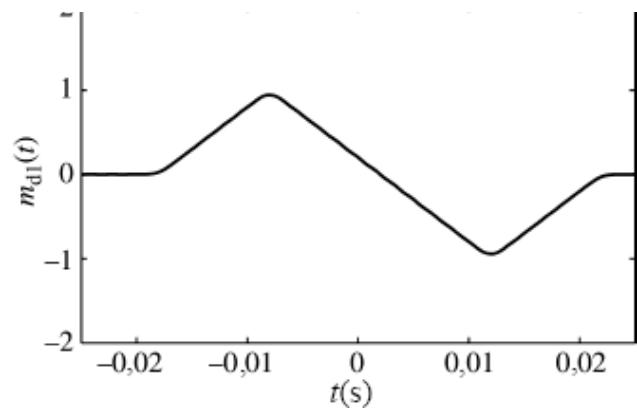
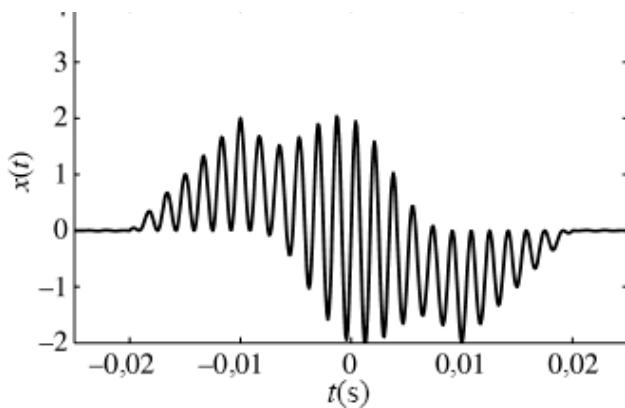


Figura 4.38

Sinais no domínio do tempo durante modulação QAM e demodulação coerente da primeira mensagem $m_2(t)$.

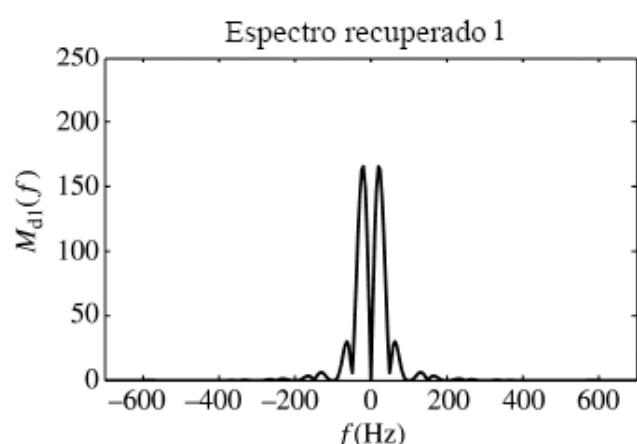
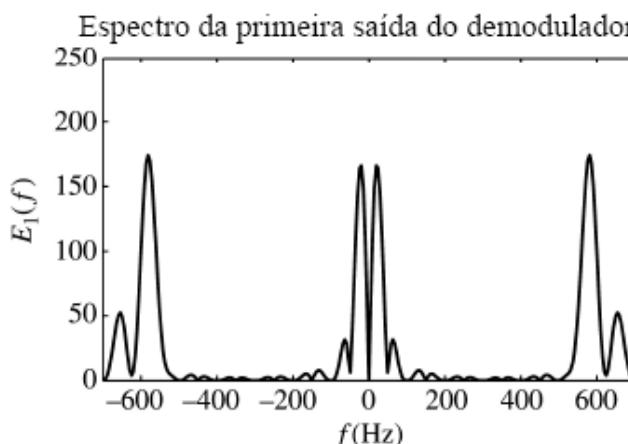
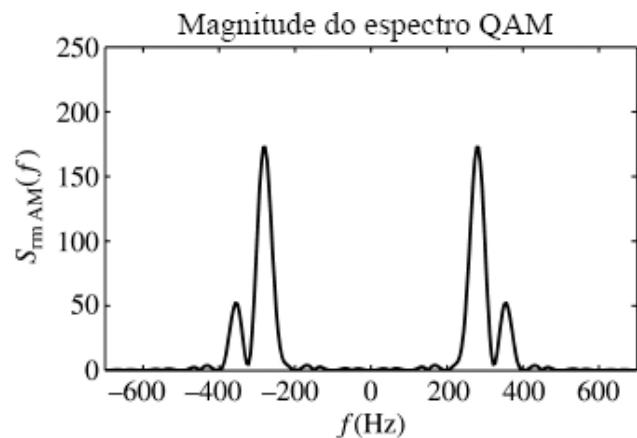
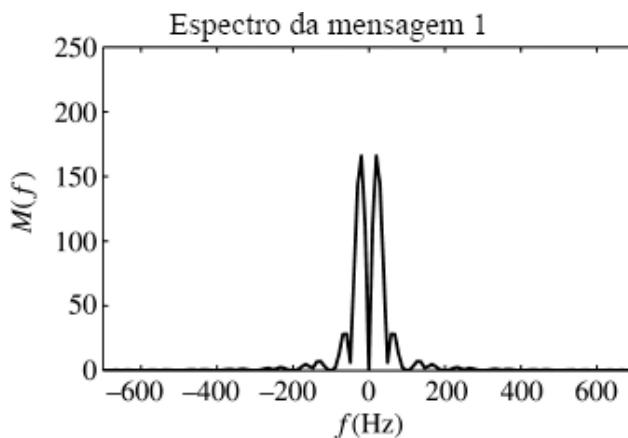
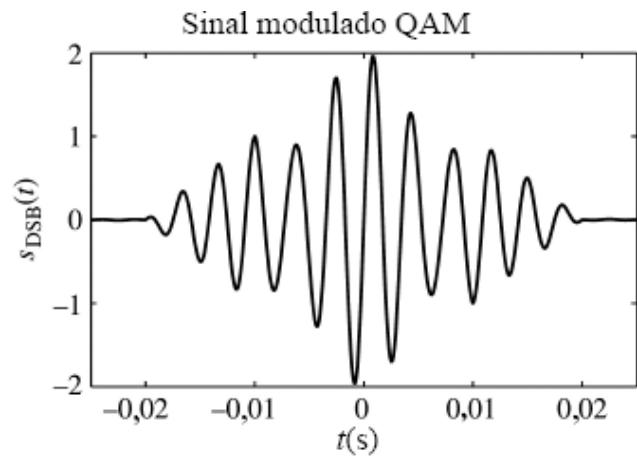
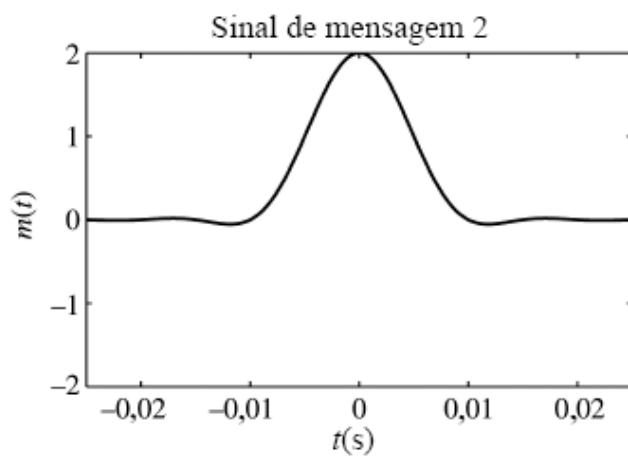


Figura 4.39

Sinais no domínio da frequência durante modulação QAM e demodulação coerente da primeira mensagem $m_2(t)$.



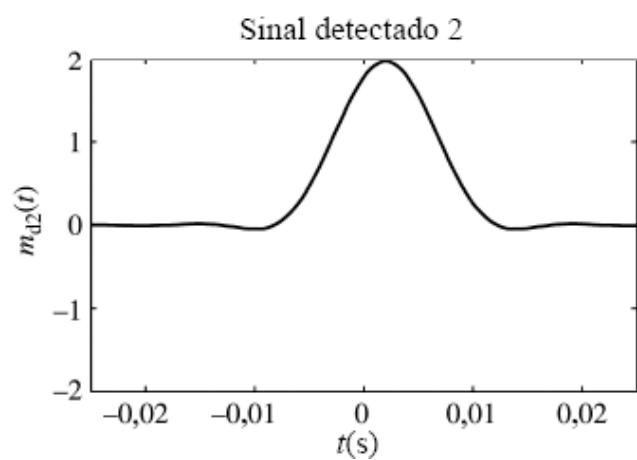
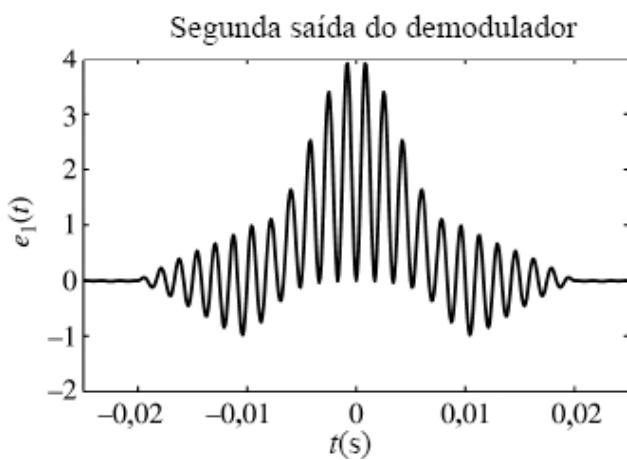
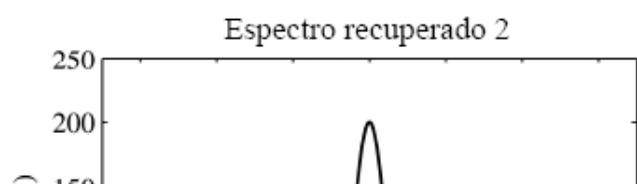
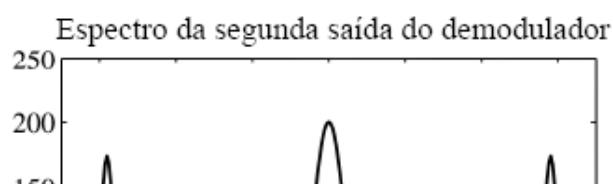
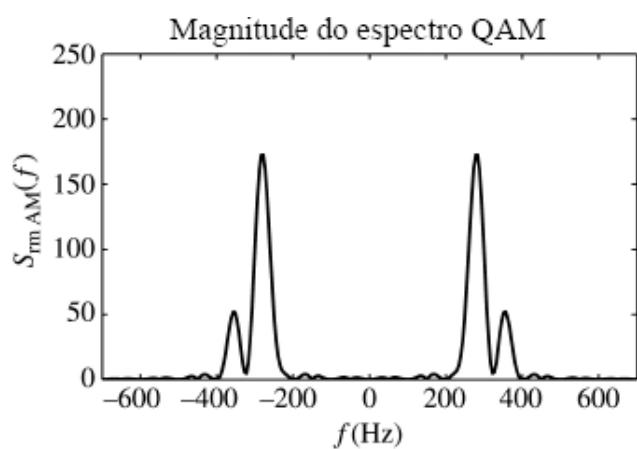
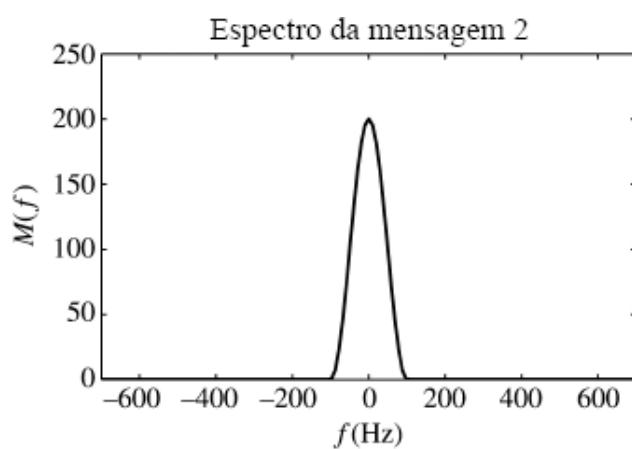


Figura 4.40

Sinais no domínio do tempo durante modulação QAM e demodulação coerente da segunda mensagem $m_2(t)$.



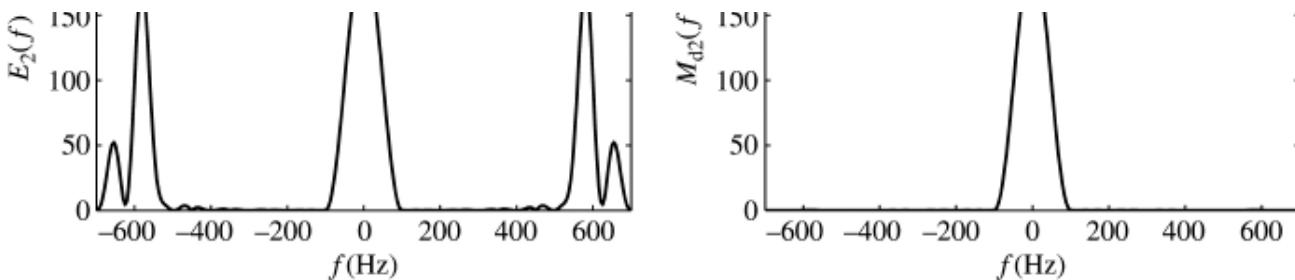


Figura 4.41

Sinais no domínio da frequência durante modulação QAM e demodulação coerente da segunda mensagem $m_2(t)$.

```
% (ExampleQAMdemfilt.m)
% Este programa usa triangl.m e triplesinc.m
% para ilustrar modulação QAM % e demodulação
% de dois sinais de mensagem
clear;clf;
ts=1.e-4;
t=-0.04:ts:0.04;
Ta=0.01; fc=300;
% Usa triangl.m e triplesinc.m para gerar
% dois sinais de mensagem de diferentes formas e espectros
m_sig1=triangl((t+0.01)/0.01)-triangl((t-0.01)/0.01);
m_sig2=triplesinc(t,Ta);
Lfft=length(m_sig1);
Lfft=length(t); Lfft=2^ceil(log2(Lfft));
M1_fre=fftshift(fft(m_sig1,Lfft));
M2_fre=fftshift(fft(m_sig2,Lfft));
freqm=(-Lfft/2:Lfft/2-1)/(Lfft*ts);
%
B_m=150; %A largura de banda do sinal é B_m Hz.
% Projeta um simples filtro passa-baixas com largura de banda B_m Hz.
h=fir1(40,[B_m*ts]);

% Sinal QAM gerado com a adição de uma portadora a DSB-SC
s_qam=m_sig1.*cos(2*pi*fc*t)+m_sig2.*sin(2*pi*fc*t);
Lfft=length(t); Lfft=2^ceil(log2(Lfft)+1);
S_qam=fftshift(fft(s_qam,Lfft));
freqs=(-Lfft/2:Lfft/2-1)/(Lfft*ts);

% Demodulação tem início com o uso de um retificador
s_dem1=s_qam.*cos(2*pi*fc*t)*2;
S_dem1=fftshift(fft(s_dem1,Lfft));
% Demodulação do segundo sinal
s_dem2=s_qam.*sin(2*pi*fc*t)*2;
S_dem2=fftshift(fft(s_dem2,Lfft));
%
% Uso de um filtro passa-baixas ideal com a largura de banda de 150 Hz
s_rec1=filter(h,1,s_dem1);
S_rec1=fftshift(fft(s_rec1,Lfft));
s_rec2=filter(h,1,s_dem2);
S_rec2=fftshift(fft(s_rec2,Lfft));

Trange=[-0.025 0.025 -2 2];
Trange2=[-0.025 0.025 -2 4];
figure(1)
```

```

subplot(221);td1=plot(t,m_sig1);
axis(Trange); set(td1,'Linewidth',1.5);
xlabel('{\it t} (sec)'); ylabel('{\it m}({\it t})');
title('sinal de mensagem 1');
subplot(222);td2=plot(t,s_qam);
axis(Trange); set(td2,'Linewidth',1.5);
xlabel('{\it t} (sec)'); ylabel('{\it s}_{\rm DSB}({\it t})');
title('sinal modulado QAM');
subplot(223);td3=plot(t,s_dem1);
axis(Trange2); set(td3,'Linewidth',1.5);

xlabel('{\it t} (sec)'); ylabel('{\it x}({\it t})')
title('primeira saída do demodulador');
subplot(224);td4=plot(t,s_rec1);
axis(Trange); set(td4,'Linewidth',1.5);
xlabel('{\it t} (sec)'); ylabel('{\it m}_{d1}({\it t})');
title('sinal detectado 1');

figure(2)
subplot(221);td5=plot(t,m_sig2);
axis(Trange); set(td5,'Linewidth',1.5);
xlabel('{\it t} (sec)'); ylabel('{\it m}({\it t})');
title('sinal de mensagem 2');
subplot(222);td6=plot(t,s_qam);
axis(Trange); set(td6,'Linewidth',1.5);
xlabel('{\it t} (sec)'); ylabel('{\it s}_{\rm DSB}({\it t})');
title('sinal modulado QAM');
subplot(223);td7=plot(t,s_dem2);
axis(Trange2); set(td7,'Linewidth',1.5);
xlabel('{\it t} (sec)'); ylabel('{\it e}_1({\it t})');
title('segunda saída do demodulador');
subplot(224);td8=plot(t,s_rec2);
axis(Trange); set(td8,'Linewidth',1.5);
xlabel('{\it t} (sec)'); ylabel('{\it m}_{d2}({\it t})');
title('sinal detectado 2');

Frange=[-700 700 0 250];
figure(3)
subplot(221);fd1=plot(freqm,abs(M1_fre));
axis(Frange); set(fd1,'Linewidth',1.5);
xlabel('{\it f} (Hz)'); ylabel('{\it M}({\it f})');
title('espectro da mensagem 1');
subplot(222);fd2=plot(freqs,abs(S_qam));
axis(Frange); set(fd2,'Linewidth',1.5);
xlabel('{\it f} (Hz)'); ylabel('{\it S}_{\rm AM}({\it f})');
title('magnitude do espectro QAM');
subplot(223);fd3=plot(freqs,abs(S_dem1));
axis(Frange); set(fd3,'Linewidth',1.5);
xlabel('{\it f} (Hz)'); ylabel('{\it E}_1({\it f})');
title('espectro da primeira saída do demodulador');
subplot(224);fd4=plot(freqs,abs(S_rec1));

```

```

axis(Frange); set(fd4,'Linewidth',1.5);
xlabel('{\it f} (Hz)'); ylabel('{\it M}_{d1}({\it f})');
title('espectro recuperado 1');
figure(4)
subplot(221);fd1=plot(freqm,abs(M2_fre));
axis(Frange); set(fd1,'Linewidth',1.5);
xlabel('{\it f} (Hz)'); ylabel('{\it M}({\it f})');
title('espectro da mensagem 2');
subplot(222);fd2=plot(freqs,abs(S_qam));
axis(Frange); set(fd2,'Linewidth',1.5);
xlabel('{\it f} (Hz)'); ylabel('{\it S}_{rm AM}({\it f})');
title('magnitude do espectro QAM');
subplot(223);fd7=plot(freqs,abs(S_dem2));
axis(Frange); set(fd7,'Linewidth',1.5);
xlabel('{\it f} (Hz)'); ylabel('{\it E}_2({\it f})');
title('espectro da segunda saída do demodulador');
subplot(224);fd8=plot(freqs,abs(S_rec2));
axis(Frange); set(fd8,'Linewidth',1.5);
xlabel('{\it f} (Hz)'); ylabel('{\it M}_{d2}({\it f})');
title('espectro recuperado 2');

```

REFERÊNCIAS

1. Single Sideband Issue, *Proc. IRE*, vol. 44, Dec. 1956.
2. D. K. Weaver Jr., “A Third Method of Generation and Detection of Single Sideband Signals,” *Proc. IRE*, vol. 44, pp. 1703–1705, Dec. 1956.
3. Bell Telephone Laboratories, *Transmission Systems for Communication*, 4th ed., Murray Hill, NJ, 1970.
4. R. T. James, “AT&T Facilities and Services,” *Proc. IEEE*, vol. 60, pp. 1342–1349, Nov. 1972.
5. W. L. Smith, “Frequency and Time in Communications,” *Proc. IEEE*, vol. 60, pp. 589–594, May 1972.
6. B. P. Lathi, B. P., *Linear Systems and Signals*, Oxford University Press, New York, 2000.
7. A. J. Viterbi, *Principles of Coherent Communication*, McGraw-Hill, New York, 1966.
8. F. M. Gardner, *Phaselock Techniques*, 3rd ed., Wiley, Hoboken, NJ, 2005.
9. W. C. Lindsey, *Synchronization Systems in Communication and Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1972.
10. J. P. Costas, “Synchronous Communication,” *Proc. IRE*, vol. 44, pp. 1713–1718, Dec. 1956.

EXERCÍCIOS

- 4.2-1** Para cada um dos sinais em banda base: (i) $m(t) = \cos 1000\pi t$; (ii) $m(t) = 2\cos 1000\pi t + \sin 2000\pi t$; (iii) $m(t) = \cos 1000\pi t \cos 3000\pi t$, faça o seguinte:
- (a) Esboce o espectro de $m(t)$.
 - (b) Esboce o espectro do sinal DSB-SC $m(t) \cos 10.000\pi t$.
 - (c) Identifique os espectros da banda lateral superior (USB) e da banda lateral inferior (LSB).
 - (d) Identifique as frequências na banda base e as correspondentes frequências nos espectros DSB-SC, USB e LSB. Explique, em cada caso, a natureza da translação de frequência.
- 4.2-2** Repita o Exercício 4.2-1 [apenas as partes (a), (b) e (c)] para: (i) $m(t) = \text{sinc}(100t)$; (ii) $m(t) = e^{-|t|}$; (iii) $m(t) = e^{-|t-1|}$. Observe que $e^{-|t-1|}$ é $e^{-|t|}$ atrasado de 1 segundo. Para o último caso, é necessário considerar tanto o espectro de magnitude como o de fase.
- 4.2-3** Repita o Exercício 4.2-1 [apenas as partes (a), (b) e (c)] para $m(t) = e^{-|t|}$, para a portadora $\cos(10.000t - \pi/4)$.

Sugestão: Use a Eq. (3.37).

- 4.2-4** Projete um modulador DSB-SC para gerar um sinal modulado $km(t) \cos(\omega_c t + \theta)$, em que $m(t)$ é um sinal limitado em banda a B Hz. A Fig. E.4.2-4 mostra um modulador DSB-SC disponível no estoque. O gerador de portadora disponível produz $\cos^3 \omega_c t$ em vez de $\cos \omega_c t$. É possível gerar o sinal desejado usando apenas esse equipamento? Você pode empregar qualquer tipo de filtro que achar necessário.

- (a) Que tipo de filtro é exigido na Fig. E.4.2-4?
- (b) Determine os espectros do sinal nos pontos b e c e indique as bandas de frequências ocupadas por esses espectros.
- (c) Qual é o mínimo valor utilizável de ω_c ?
- (d) Esse esquema funcionaria se a saída do gerador de portadora fosse $\sin^3 \omega_c t$? Explique.

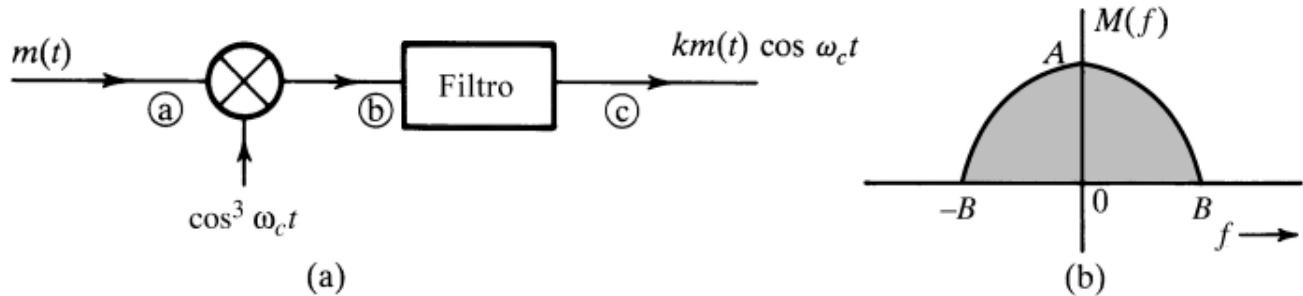


Figura E.4.2-4

- (e) Esse esquema funcionaria se a saída do gerador de portadora fosse $\cos^n \omega_c t$, para qualquer inteiro $n \geq 2$?
- 4.2-5** Projete um modulador DSB-SC para gerar um sinal modulado $km(t) \cos(\omega_c t + \theta)$, com uma frequência portadora $f_c = 300$ kHz ($\omega_c = 2\pi \times 300.000$). O seguinte equipamento está disponível no estoque: (i) gerador de sinal com frequência 100 kHz; (ii) modulador em anel; (iii) filtro passa-faixa sintonizado em 300 kHz.
- (a) Mostre como gerar o sinal desejado.
 - (b) Se a saída do modulador for $k \times m(t) \cos \omega_c t$, determine k .
- 4.2-6** Moduladores e demoduladores em amplitude também podem ser construídos sem o uso de multiplicadores. Na Fig. E.4.2-6, a entrada $\phi(t) = m(t)$ e a amplitude $A \gg |\phi(t)|$. Os dois diodos são idênticos, com uma resistência de r ohms no modo de condução, e resistência infinita no modo de corte. Mostre que a saída $e_o(t)$ é dada por

$$e_o(t) = \frac{2R}{R+r} w(t) m(t)$$

em que $w(t)$ é o sinal periódico chaveado mostrado na Fig. 2.20a, com período $2\pi/W_c$ segundos.

- (a) Mostre que esse circuito pode ser usado como um modulador DSB-SC.
- (b) Como você usaria esse circuito como demodulador síncrono para sinais DSB-SC?

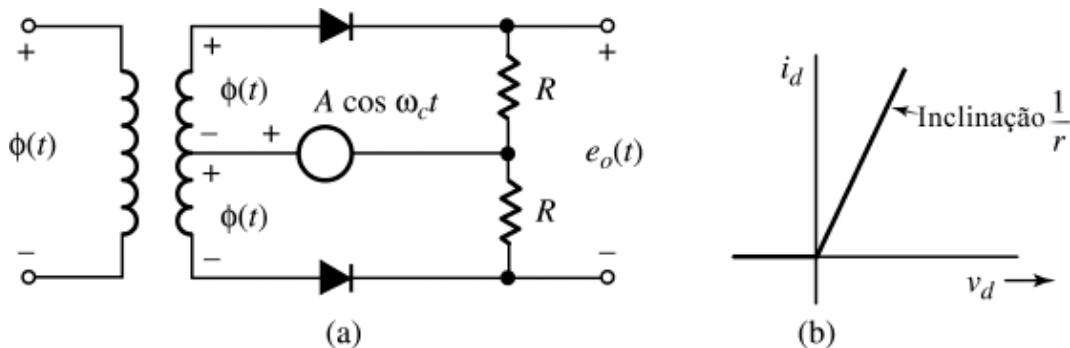


Figura E.4.2-6

- 4.2-7** Na Fig. E.4.2-6, caso $\phi(t) = \text{sen}(\omega_c t + \theta)$ e a saída $e_0(t)$ seja aplicada a um filtro passa-baixas, mostre que o circuito pode ser usado como um detector de fase, ou seja, um circuito que mede a diferença de fase entre duas senoides de mesma frequência (ω_c).

Sugestão: Mostre que a saída do filtro é um sinal dc proporcional a $\text{sen} \theta$.

- 4.2-8** Dois sinais $m_1(t)$ e $m_2(t)$, ambos limitados em banda a 5.000 Hz, devem ser transmitidos simultaneamente em um canal, com o esquema de multiplexação ilustrado na Fig. E.4.2-8. No ponto b , o sinal é o sinal multiplexado, que modula uma portadora de frequência 20.000 Hz. No ponto c , o sinal modulado é transmitido no canal.

- Esboce os espectros de sinais nos pontos a , b e c .
- Qual deve ser a largura de banda do canal?
- Projete um receptor para recuperação dos sinais $m_1(t)$ e $m_2(t)$ a partir do sinal modulado no ponto c .

- 4.2-9** O sistema mostrado na Fig. E.4.2-9 é usado para embaralhar sinais de áudio. A saída $y(t)$ é a versão embaralhada da entrada $m(t)$.

- Determine o espectro do sinal embaralhado $y(t)$.
- Sugira um método para o desembaralhamento de $y(t)$, para recuperar $m(t)$.

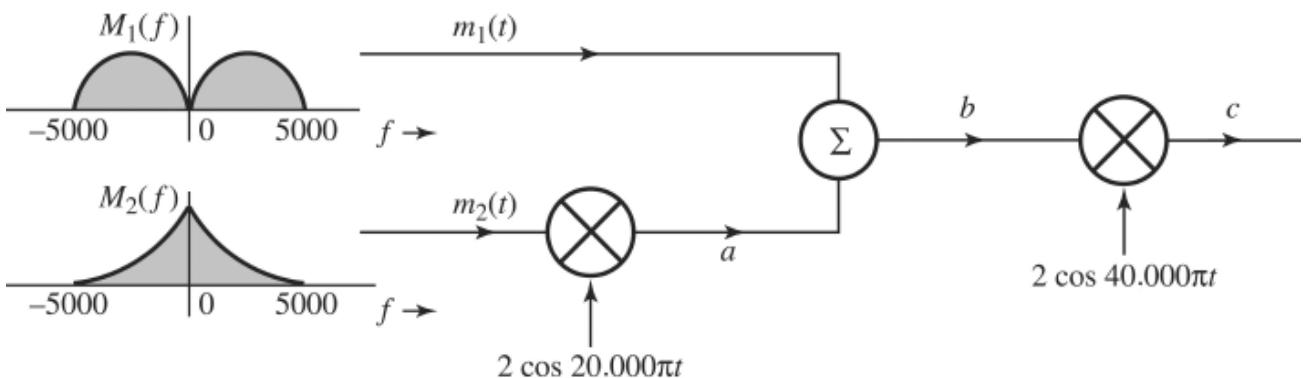


Figura E.4.2-8

Uma versão ligeiramente modificada desse desembaralhador foi usada comercialmente pela primeira vez em um enlace de telefone via rádio de 25 milhas conectando Los Angeles à ilha de Santa Catalina.

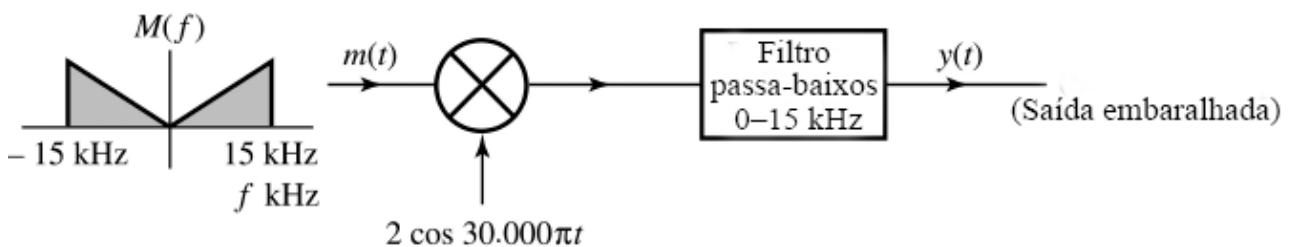


Figura E.4.2-9

- 4.2-10** Um sinal DSB-SC é dado por $m(t) \cos(2\pi \cdot 10^6 t)$. A frequência portadora desse sinal, 1 MHz, deve ser alterada para 400 kHz. O único equipamento disponível consiste em um modulador em anel, um filtro passa-faixa centrado em 400 kHz e um gerador de onda senoidal, cuja frequência pode ser variada de 150 a 210 kHz. Mostre como o sinal desejado $cm(t) \cos(2\pi \cdot 400 \cdot 10^3 t)$ pode ser obtido de $m(t) \cos(2\pi \cdot 10^6 t)$. Determine o valor de c .

- 4.3-1** A Fig. E.4.3-1 mostra um esquema para demodulação coerente (síncrona). Mostre que esse esquema pode demodular o sinal AM $[A + m(t)] \cos(2\pi f_c t)$, independentemente do valor de A .



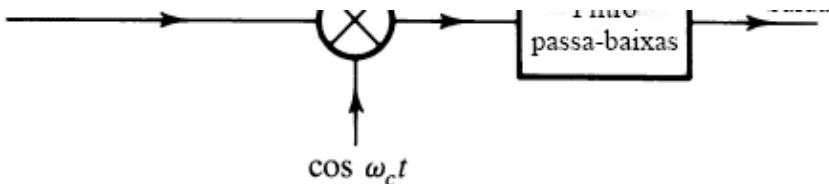


Figura E.4.3-1

- 4.3-2** Esboce a forma de onda do sinal AM $[A + m(t)] \cos(2\pi f_c t)$, para o sinal triangular periódico $m(t)$ mostrado na Fig. E.4.3-2, com índices de modulação (a) $\mu = 0,5$; (b) $\mu = 1$; (c) $\mu = 2$; (d) $\mu = \infty$. Como você interpreta o caso $\mu = \infty$?

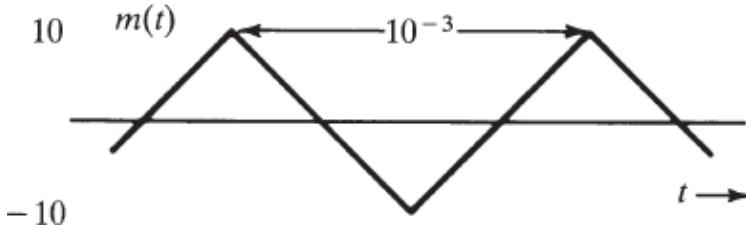


Figura E.4.3-2

- 4.3-3** Para o sinal AM com $m(t)$ mostrado na Fig. E.4.3-2 e $\mu = 0,8$:

- (a) Determine a amplitude e a potência da portadora.
- (b) Determine a potência na banda lateral e a eficiência de potência η .

(a) Esboce a forma de onda do sinal DSB-SC correspondente ao sinal de mensagem $m(t) = \cos 2\pi t$.

(b) O sinal DSB-SC da parte (a) é aplicado à entrada de um detector de envelope. Mostre que a saída do detector de envelope não é $m(t)$, mas $|m(t)|$. Mostre que, em geral, se um sinal AM $[A + m(t)] \cos \omega_c t$ for detectado por envelope, a saída é $|A + m(t)|$. Então, mostre que a condição para a recuperação de $m(t)$ com um detector de envelope é $A + m(t) > 0$ para todo t .

- 4.3-5** Mostre que qualquer esquema que possa ser usado para gerar sinais DSB-SC também gera sinais AM. A recíproca é verdadeira? Justifique.

- 4.3-6** Mostre que qualquer esquema que possa ser usado para demodular sinais DSB-SC também demodula sinais AM. A recíproca é verdadeira? Justifique.

- 4.3-7** No texto, a eficiência de potência de AM para uma senoide $m(t)$ foi determinada. Efetue uma análise similar para o caso em que $m(t)$ é um sinal binário aleatório, como mostrado na Fig. E.4.3-7, e $\mu = 1$. Esboce a forma de onda do sinal AM com $\mu = 1$. Determine a potência na banda lateral e a potência total (potência do sinal AM), assim como a razão entre elas (eficiência de potência η).

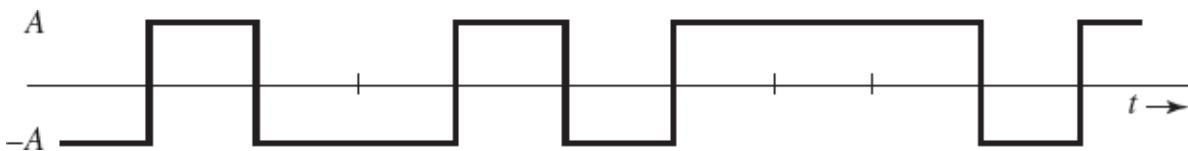


Figura E.4.3-7

- 4.3-8** Na era inicial do rádio, sinais AM eram demodulados por um detector a cristal seguido por um filtro passa-baixas e um bloqueador dc, como mostrado na Fig. E.4.3-8. Considere que um detector a cristal seja basicamente um dispositivo quadrático. Determine os sinais nos pontos *a*, *b*, *c* e *d*. Identifique o termo de distorção na saída $y(t)$. Mostre que, se $A \gg |m(t)|$, a distorção é pequena.



Figura E.4.3-8

- 4.4-1** Em um sistema QAM (Fig. 4.19), a portadora gerada localmente tem um erro de frequência $\Delta\omega$ e um erro de fase δ ; ou seja, a portadora no receptor é $\cos[(\omega_c + \Delta\omega)t + \delta]$ ou $\sin[(\omega_c + \Delta\omega)t + \delta]$. Mostre que a saída do braço superior do receptor é

$$m_1(t) \cos[(\Delta\omega)t + \delta] - m_2(t) \sin[(\Delta\omega)t + \delta]$$

em vez de $m_1(t)$, e que a saída do braço inferior do receptor é

$$m_1(t) \sin[(\Delta\omega)t + \delta] + m_2(t) \cos[(\Delta\omega)t + \delta]$$

em vez de $m_2(t)$.

- 4.4-2** Um sinal modulante $m(t)$ é dado por:

- (a) $m(t) = \cos 100\pi t + 2 \cos 300\pi t$
- (b) $m(t) = \sin 100\pi t \sin 500\pi t$

Em cada caso:

- (i) Esboce o espectro de $m(t)$.
- (ii) Determine e esboce o espectro do sinal DSB-SC $2m(t) \cos 1000\pi t$.
- (iii) Do espectro obtido em (ii), elimine o espectro LSB e obtenha o espectro USB.
- (iv) Conhecendo o espectro USB em (ii), escreva a expressão $\varphi_{\text{USB}}(t)$ para o sinal USB.
- (v) Repita (iii) e (iv) para obter o sinal $\varphi_{\text{LSB}}(t)$.

- 4.4-3** Para os sinais no Exercício 4.4-2, use a Eq. (4.20) e determine as expressões temporais $\varphi_{\text{LSB}}(t)$ e $\varphi_{\text{USB}}(t)$ com uma frequência portadora $\omega_c = 1000$ rad/s.

Sugestão: Se $m(t)$ for uma senoide, sua transformada de Hilbert $m_h(t)$ será a senoide $m(t)$ com um atraso de fase de $\pi/2$ rad.

- 4.4-4** Determine $\varphi_{\text{LSB}}(t)$ e $\varphi_{\text{USB}}(t)$ para o sinal modulante $m(t) = \pi B \operatorname{sinc}^2(2\pi Bt)$, com $B = 2000$ Hz e frequência portadora $f_c = 10.000$ Hz. Faça o seguinte:
- (a) Esboce os espectros de $m(t)$ e do correspondente sinal DSB-SC $2m(t) \cos \omega_c t$.
 - (b) Para determinar o espectro LSB, elimine a USB do espectro DSB-SC obtido na parte (a).
 - (c) Determine o sinal $\varphi_{\text{LSB}}(t)$, que é a transformada de Fourier inversa do espectro LSB determinado na parte (b). Siga o mesmo procedimento e determine $\varphi_{\text{USB}}(t)$.

- 4.4-5** Se $m_h(t)$ for a transformada de Hilbert de $m(t)$, então

- (a) Mostre que a transformada de Hilbert de $m_h(t)$ é $-m(t)$.
- (b) Mostre que as energias de $m(t)$ e de $m_h(t)$ são idênticas.

- 4.4-6** Um sinal LSB é demodulado coerentemente, como mostrado na Fig. E.4.4-6. Lamentavelmente, devido ao atraso na transmissão, o sinal de portadora recebido não é $2 \cos \omega_c t$, como foi transmitido, mas $2 \cos[(\omega_c t + \Delta\omega)t + \delta]$. O oscilador local ainda é $\cos \omega_c t$. Mostre que

- (a) Quando $\delta = 0$, a saída $y(t)$ é o sinal $m(t)$ com todas as componentes espectrais deslocadas de $\Delta\omega$.

Sugestão: Observe que a saída $y(t)$ é idêntica ao lado direito da Eq. (4.20a), com ω_c substituído por $\Delta\omega$.

- (b) Quando $\Delta\omega = 0$, a saída é o sinal $m(t)$ com as fases de todas as componentes espectrais deslocadas de δ .

Sugestão: Mostre que o espectro de saída $Y(f) = M(f)e^{j\delta}$, para $f \geq 0$, e igual a $M(f)e^{-j\delta}$, quando $f < 0$.

- (c) Em cada um desses casos, explique a natureza da distorção.

Sugestão: Para a parte (a), a demodulação consiste no deslocamento de um espectro LSB para a esquerda e para a direita, por $\omega_c + \Delta\omega$ e na filtragem passa-baixas do resultado. Para a parte (b), use a

expressão (4.20b) para $\varphi_{LSB}(t)$, multiplique-a pela portadora local $2 \cos(\omega_c t + \delta)$ e aplique o resultado a um filtro passa-baixas.

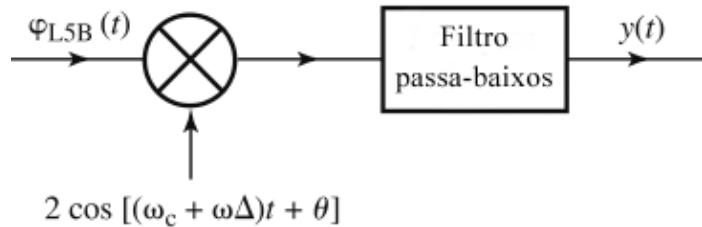


Figura E.4.4-6

- 4.4-7** Um sinal USB é gerado com o método de deslocamento de fase (Fig. 4.17). Se a entrada a esse sistema for $m_h(t)$, em vez de $m(t)$, qual será a saída? Esse ainda é um sinal SSB com largura de banda igual à de $m(t)$? Esse sinal pode ser demodulado [para recuperar $m(t)$]? Em caso afirmativo, como?

- 4.5-1** Um filtro vestigial $H_i(f)$, mostrado no transmissor da Fig. 4.21, tem a função de transferência mostrada na Fig. E.4.5-1. A frequência portadora é $f_c = 10$ kHz e a largura de banda do sinal em banda base é de 4 kHz. Determine a correspondente função de transferência do filtro equalizador $H_o(f)$ mostrado no receptor da Fig. 4.21.

Sugestão: Use a Eq. (4.25).

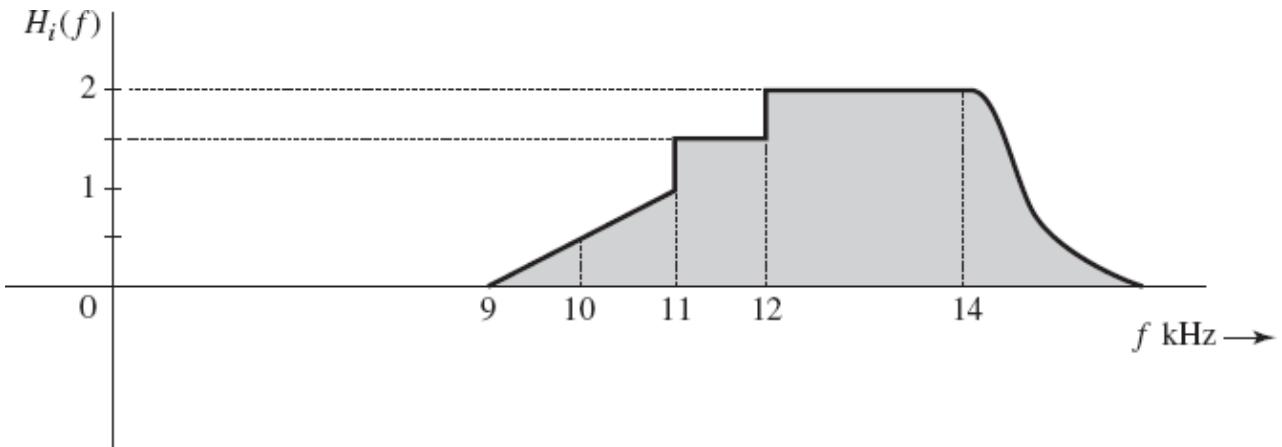


Figura E.4.5-1

*O termo **portadora suprimida** não significa, necessariamente, a ausência de espectro na frequência da portadora f_c , mas que não existe uma componente discreta da frequência da portadora. Isso implica que o espectro da modulação DSB-SC não tem impulsos em $\pm f_c$; o que também implica que o sinal modulado $m(t) \cos 2\pi f t$ não contém um termo da forma $k \cos 2\pi f t$ [supondo que $m(t)$ tenha valor médio nulo].

*A fase θ_1 não é relevante.

* Isto pode não ser verdade para todo t , mas é verdade para a maioria dos valores de t .

* O termo “malha de sincronismo de fase” é igualmente empregado para PLL. (N.T.)

* Com uma diferença $\pi/2$.

*Na verdade, $h(t) = 2B \operatorname{sinc}(2\pi Bt)$, em que B é a largura de banda do filtro de malha. Esse é um filtro passa-baixos estreito, que suprime o sinal de alta frequência centrado em $2\omega_c$. Isto leva a $H(s) = 1$ em uma estreita banda passabaios de B Hz.

* Isso também explica por que não podemos extrair a portadora diretamente de $m(t) \cos \omega_c t$ passando por um filtro de banda estreita centrado em ω_c . A razão é que a potência de $m(t) \cos \omega_c t$ em ω_c é zero, pois $m(t)$ não tem componente dc [o valor médio de $m(t)$ é zero].

5 MODULAÇÕES E DEMODULAÇÕES EM ÂNGULO

Como discutido no capítulo anterior, uma modulação de portadora pode ser feita modulando a amplitude, a frequência ou a fase de uma **portadora senoidal** de frequência f_c . Nele focamos os vários sistemas de modulação linear em amplitude e as correspondentes demodulações. Agora, discutiremos modulações não lineares em frequência (FM — *frequency modulation*) e em fase (PM — *phase modulation*), também conhecidas como modulações em ângulo.

5.1 MODULAÇÃO NÃO LINEAR

No caso de sinais AM, a amplitude de uma portadora é modulada por um sinal $m(t)$ e, portanto, o conteúdo de informação em $m(t)$ está nas variações de amplitude da portadora. Como vimos, os dois outros parâmetros de uma portadora senoidal — frequência e fase — também podem ser variados proporcionalmente ao sinal de mensagem, na forma de sinais modulados em frequência e em fase, respectivamente. A seguir, descreveremos a essência da modulação em frequência (FM) e da modulação em fase (PM).

Falsa Largada

Na década de 1920, radiodifusão estava em sua infância. Contudo, havia uma busca intensa por técnicas para redução de ruído (estática). Como a potência de ruído é proporcional à largura de banda do sinal modulado (bandas laterais), esforços foram dedicados ao desenvolvimento de um esquema de modulação que reduzisse a largura de banda. Ainda mais importante, a redução da largura de banda também permitiria mais usuários; e havia rumores sobre a descoberta de um novo método que eliminava as bandas laterais (sem banda lateral, sem largura de banda!). A ideia da **modulação em frequência (FM)**, em que a frequência portadora seria variada em proporção com a mensagem $m(t)$, era intrigante. A frequência angular da portadora $\omega(t)$ seria variável no tempo, de modo que $\omega(t) = \omega_c + km(t)$, sendo k uma constante arbitrária. Se a amplitude de pico de $m(t)$ for m_p , os valores máximo e mínimo da frequência portadora serão $\omega_c + km_p$ e $\omega_c - km_p$, respectivamente. Portanto, as componentes espectrais permaneceriam nessa faixa, com uma largura de banda de $2km_p$, centrada em ω_c . O entendimento era que o controle do parâmetro constante k controlava a largura de banda do sinal modulado. Embora isso fosse verdade, havia também a esperança de que o uso de um valor arbitrariamente pequeno para k tornaria a largura de banda de informação arbitrariamente pequena. Essa possibilidade era vista como um passaporte ao paraíso das comunicações. Lamentavelmente, resultados experimentais mostraram que esse raciocínio continha sério erro. A largura de banda de FM, como foi revelado, é sempre maior que (ou, na melhor das hipóteses, igual a) a largura de banda de AM. Em alguns casos, a largura de banda de FM é muitas vezes maior que a de AM. Onde estava a falácia no raciocínio original? Logo descobriremos.

O Conceito de Frequência Instantânea

Enquanto sinais AM transportam a mensagem em suas amplitudes variantes, sinais FM podem variar a frequência instantânea proporcionalmente ao sinal modulante $m(t)$. Isso significa que a frequência portadora é alterada de modo contínuo a cada instante. À primeira vista, isso não faz muito sentido, pois, para definir uma frequência, devemos ter um sinal senoidal com a mesma frequência pelo menos ao longo de um ciclo (ou meio ciclo ou um quarto de ciclo). Esse problema nos faz recordar o primeiro encontro com velocidade instantânea em um curso introdutório de mecânica. Até a apresentação de derivadas, por Leibniz e Newton, estávamos acostumados a pensar em velocidade como sendo constante em um intervalo de tempo e éramos incapazes de, ao menos, imaginar que a velocidade pudesse variar a cada instante. Jamais esquecemos o encanto e o deslumbramento causados pela análise de derivadas e velocidade instantânea quando esses conceitos nos foram apresentados. Uma experiência similar aguarda o leitor no que diz respeito à frequência instantânea.

Consideremos um sinal senoidal generalizado $\varphi(t)$ dado por

$$\varphi(t) = A \cos \theta(t) \quad (5.1)$$

em que $\theta(t)$ é o **ângulo generalizado**, uma função de t . A Fig. 5.1 mostra um caso hipotético de $\theta(t)$. O ângulo generalizado para uma senoide convencional $A \cos(\omega_c t + \theta_0)$ é uma reta $\omega_c t + \theta_0$, como ilustrado na Fig. 5.1. Um caso geral hipotético de $\theta(t)$ corresponde à tangente ao ângulo $(\omega_c t + \theta_0)$ em algum instante t . O ponto crucial é que, em torno de t , em um pequeno intervalo $\Delta t \leq 0$, o sinal $\varphi(t) = A \cos \theta(t)$ e a senoide $A \cos(\omega_c t + \theta_0)$ são idênticos; ou seja,

$$\varphi(t) = A \cos(\omega_c t + \theta_0) \quad t_1 < t < t_2$$

Podemos afirmar que, nesse pequeno intervalo Δt , a frequência angular de $\varphi(t)$ é ω_c . Como $(\omega_c t + \theta_0)$ tangencia $\theta(t)$, a frequência angular de $\varphi(t)$ é a inclinação de seu ângulo $\theta(t)$ nesse pequeno intervalo. Podemos generalizar esse conceito em **cada instante** de tempo e definir a frequência instantânea ω_i em um instante qualquer de tempo t como a inclinação de $\theta(t)$ em t . Assim, para $\varphi(t)$ na Eq. (5.1), a frequência angular instantânea e o ângulo generalizado se relacionam por

$$\omega_i(t) = \frac{d\theta}{dt} \quad (5.2a)$$

$$\theta(t) = \int_{-\infty}^t \omega_i(\alpha) d\alpha \quad (5.2b)$$

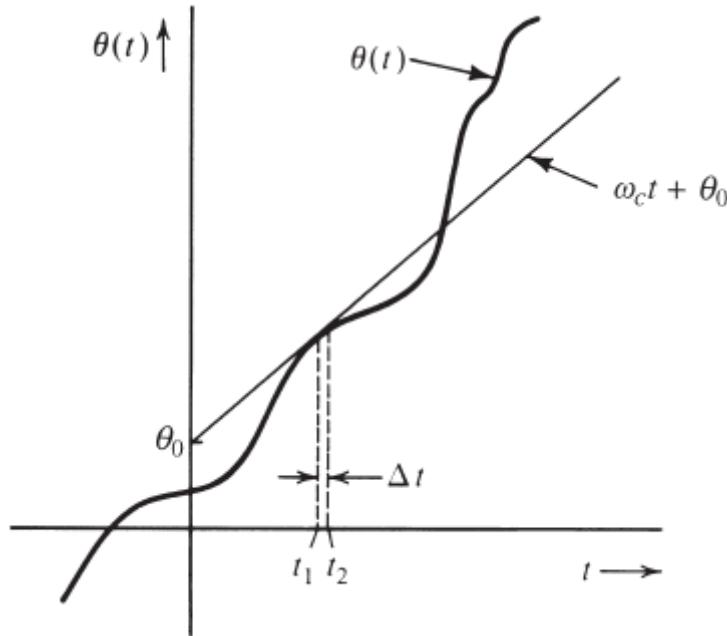


Figura 5.1 Conceito de frequência instantânea.

Agora, podemos ver a possibilidade de transmitir a informação de $m(t)$ variando o ângulo θ de uma portadora. Tais técnicas de modulação, em que o ângulo de uma portadora é variado de alguma forma por um sinal modulante $m(t)$, são conhecidas como **modulação em ângulo** ou **modulação exponencial**. Duas possibilidades simples são a **modulação em fase (PM)** e a **modulação em frequência (FM)**. Em PM, o ângulo $\theta(t)$ varia linearmente com $m(t)$:

$$\theta(t) = \omega_c t + \theta_0 + k_p m(t)$$

em que k_p é uma constante e ω_c , a frequência portadora. Supondo que $\theta_0 = 0$, sem perda de generalidade,

$$\theta(t) = \omega_c t + k_p m(t) \quad (5.3a)$$

A resultante onda PM é

$$\varphi_{PM}(t) = A \cos [\omega_c t + k_p m(t)] \quad (5.3b)$$

Nesse caso, a frequência angular instantânea $\omega_i(t)$ é dada por

$$\omega_i(t) = \frac{d\theta}{dt} = \omega_c + k_p \dot{m}(t) \quad (5.3c)$$

Portanto, em PM, a frequência angular instantânea ω_i varia linearmente com a derivada do sinal modulante. Se a frequência angular instantânea ω_i variar linearmente com o sinal modulante, temos FM. Assim, em FM, a frequência angular instantânea ω_i é

$$\omega_i(t) = \omega_c + k_f m(t) \quad (5.4a)$$

em que k_f é uma constante. O ângulo $\theta(t)$ é, agora, dado por

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \int_{-\infty}^t [\omega_c + k_f m(\alpha)] d\alpha \\ &= \omega_c t + k_f \int_{-\infty}^t m(\alpha) d\alpha \end{aligned}$$

Aqui, assumimos que o termo constante em $\theta(t)$ é zero, sem perda de generalidade. A onda FM é

$$\varphi_{FM}(t) = A \cos \left[\omega_c t + k_f \int_{-\infty}^t m(\alpha) d\alpha \right] \quad (5.5)$$

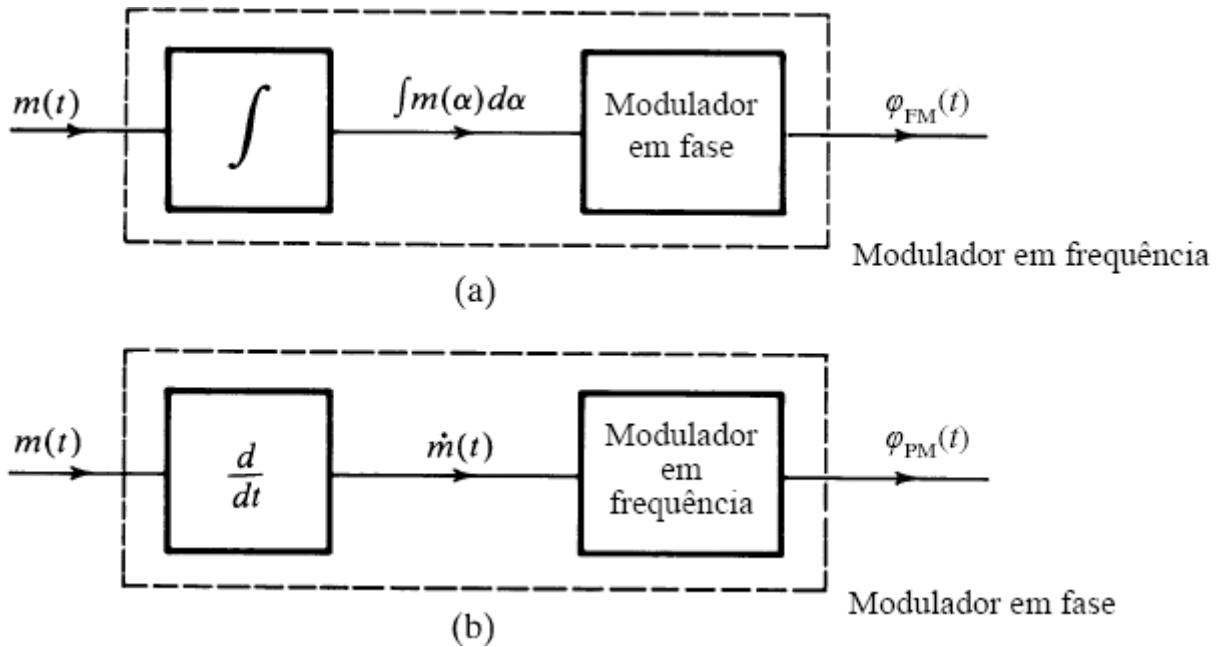


Figura 5.2 Modulações em fase e em frequência são equivalentes e intercambiáveis.

Relação entre FM e PM

Das Eqs. (5.3b) e (5.5), fica aparente que PM e FM não são apenas muito parecidas, mas também inseparáveis. A substituição de $m(t)$ na Eq. (5.3b) por $\int m(\alpha) d\alpha$ transforma PM em FM. Assim, um sinal que seja a onda FM correspondente a $m(t)$ também é a onda PM correspondente a $\int m(\alpha) d\alpha$ (Fig. 5.2a). Da mesma forma, a onda PM correspondente a $m(t)$ também é a onda FM correspondente a $\dot{m}(t)$ (Fig. 5.2b). Portanto, ao examinar um sinal modulado em ângulo $\varphi(t)$, não há como saber se o mesmo é FM ou PM. Na verdade, não faz sentido perguntar se um sinal modulado em ângulo é FM ou PM. Isso é análogo a perguntar a um homem casado que tem filhos se ele é um pai ou um filho. Essa discussão e a Fig. 5.2 também mostram que não é necessário discutir separadamente os métodos de geração e demodulação de cada tipo de modulação.

As Eqs. (5.3b) e (5.5) mostram que, tanto em PM como em FM, o ângulo de uma portadora varia proporcionalmente a alguma medida de $m(t)$. Em PM, o ângulo é diretamente proporcional a $m(t)$, enquanto em FM, é proporcional à integral de $m(t)$. Como mostrado na Fig. 5.2b, um modulador em frequência pode ser usado diretamente para gerar um sinal FM ou a mensagem de entrada $m(t)$ pode ser processada por um filtro (diferenciador) com função de transferência $H(s) = s$ para gerar um sinal PM.

Contudo, por que limitarmos nosso estudo a esses casos? Há um número infinito de modos de processar $m(t)$ antes de FM. Caso restrinjamos a escolha a um operador linear, uma medida de $m(t)$ pode ser obtida como a saída de um sistema linear invertível (invariante no tempo), com função de transferência $H(s)$ ou resposta ao impulso $h(t)$. A portadora com modulação em ângulo generalizada $\varphi_{\text{EM}}(t)$ pode ser expressa como

$$\varphi_{\text{EM}}(t) = A \cos [\omega_c t + \psi(t)] \quad (5.6a)$$

$$= A \cos \left[\omega_c t + \int_{-\infty}^t m(\alpha) h(t - \alpha) d\alpha \right] \quad (5.6b)$$

Desde que $H(s)$ seja uma operação reversível (ou invertível), $m(t)$ pode ser recuperado de $\psi(t)$ passando esse sinal modulado por um sistema com função de transferência $[H(s)]^{-1}$, como mostrado na Fig. 5.3. Assim, PM e FM são apenas dois casos especiais com $h(t) = k_p \delta(t)$ e $h(t) = k_p u(t)$, respectivamente.

Isso mostra que, se analisarmos um tipo de modulação em ângulo (como FM), podemos estender os resultados prontamente a qualquer outro tipo. Historicamente, o conceito de modulação em ângulo iniciou com FM, de modo que, neste capítulo, analisaremos primeiramente FM, com discussão ocasional de PM. No entanto, isso não significa que FM é superior a outros tipos de modulação em ângulo. Ao contrário, para a maioria dos sinais práticos, PM é superior a FM. Na verdade, o desempenho ótimo não é alcançado nem com PM puro, nem com FM puro, mas com algo entre esses dois tipos de modulação.

Potência de uma Onda Modulada em Ângulo

Embora as frequências e fases instantâneas de uma onda modulada em ângulo possam variar com o tempo, a amplitude A permanece constante. Portanto, a potência de uma onda modulada em ângulo (PM ou FM) sempre é $A^2/2$, independentemente do valor de k_p ou de k_f .

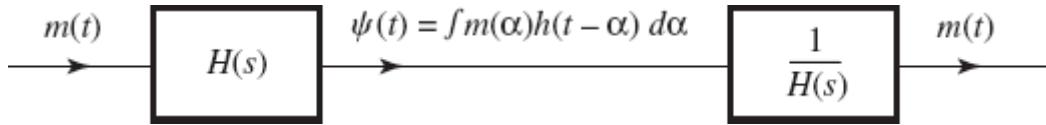


Figura 5.3 Modulação em ângulo generalizada via filtro $H(s)$ e recuperação da mensagem com a passagem do sinal modulado pelo filtro inverso $1/H(s)$.

Exemplo 5.1 Esboçemos as formas de onda FM e PM para o sinal modulante mostrado na Fig. 5.4a. As constantes k_f e k_p são $2\pi \times 10^5$ e 10π , respectivamente, e a frequência portadora f_c é de 100 MHz.

Para FM:

$$\omega_i = \omega_c + k_f m(t)$$

Dividindo tudo por 2π , temos a equação em termos da variável f (frequência em hertz). A frequência instantânea f_i é

$$f_i = f_c + \frac{k_f}{2\pi} m(t)$$

$$= 10^8 + 10^5 m(t)$$

$$(f_i)_{\min} = 10^8 + 10^5 [m(t)]_{\min} = 99,9 \text{ MHz}$$

$$(f_i)_{\max} = 10^8 + 10^5 [m(t)]_{\max} = 100,1 \text{ MHz}$$

Como $m(t)$ aumenta e diminui linearmente com o tempo, a frequência instantânea aumenta linearmente de 99,9 a 100,1 MHz em um meio ciclo e cai linearmente de 100,1 a 99,9 MHz no meio ciclo restante do sinal modulante (Fig. 5.4b).

PM para $m(t)$ é FM para $m(t)$. Isso resulta da Eq. (5.3c).

Para PM:

$$f_i = f_c + \frac{k_p}{2\pi} \dot{m}(t)$$

$$= 10^8 + 5 \dot{m}(t)$$

$$(f_i)_{\min} = 10^8 + 5 [\dot{m}(t)]_{\min} = 10^8 - 10^5 = 99,9 \text{ MHz}$$

$$(f_i)_{\max} = 10^8 + 5 [\dot{m}(t)]_{\max} = 100,1 \text{ MHz}$$

Como oscila entre os valores de -20.000 a 20.000 , a frequência portadora oscila entre $99,9$ e $100,1$ MHz a cada meio ciclo de $\dot{m}(t)$, como mostrado na Fig. 5.4d.

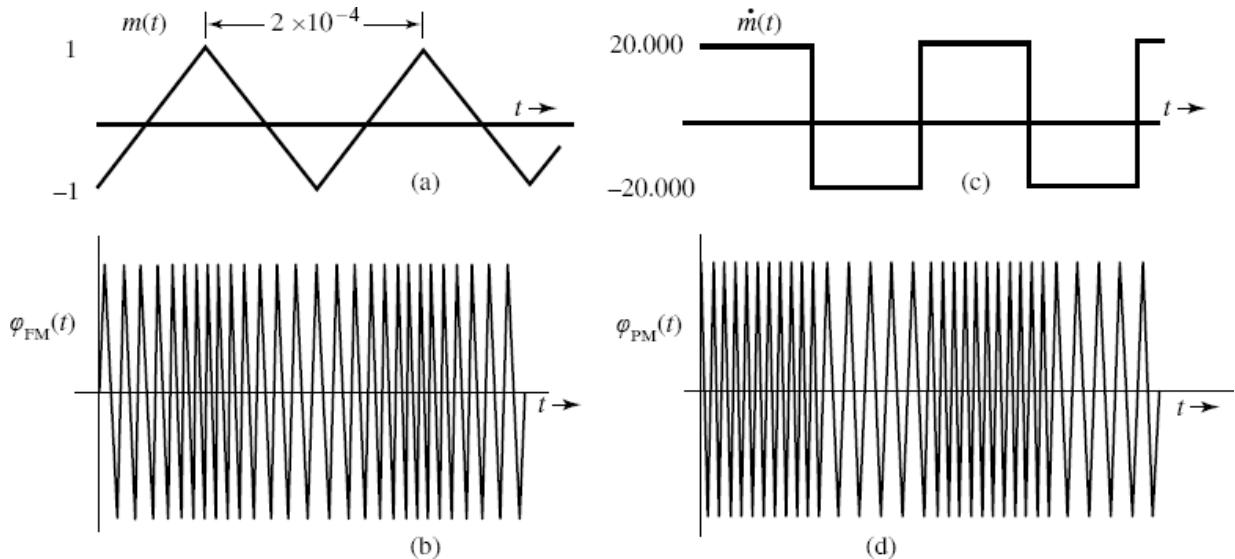


Figura 5.4 Formas de onda FM e PM.

Este método indireto para esboçar a forma de onda PM [usando $\dot{m}(t)$ para modular a portadora em frequência] funciona desde que $m(t)$ seja um sinal contínuo. Caso $m(t)$ seja descontínuo, o sinal PM sofrerá mudanças bruscas de fase e, em consequência, $\dot{m}(t)$ conterá impulsos. Esse método indireto falha em *pontos de descontinuidade*. Nesses casos, uma abordagem direta deve ser usada no ponto de descontinuidade para especificar as mudanças bruscas de fase. Isso é demonstrado no próximo exemplo.

Exemplo 5.2 Esbocemos as formas de onda FM e PM para o sinal modulante digital $m(t)$ mostrado na Fig. 5.5a. As constantes k_f e k_p valem $2\pi \times 10^5$ e $\pi/2$, respectivamente, e $f_c = 100$ MHz.

Para FM:

$$f_i = f_c + \frac{k_f}{2\pi} m(t) = 10^8 + 10^5 m(t)$$

Como $m(t)$ oscila entre -1 e 1 , a frequência da onda FM oscila entre $99,9$ e $100,1$ MHz, como mostrado na Fig. 5.5b. O esquema de modulação de uma portadora em frequência por um sinal digital (Fig. 5.5b) é denominado **chaveamento de frequência (FSK — frequency shift keying)**, pois os dígitos de informação são transmitidos via chaveamento de diferentes frequências (ver Seção 7.8).

Para PM:

$$f_i = f_c + \frac{k_p}{2\pi} \dot{m}(t) = 10^8 + \frac{1}{4} \dot{m}(t)$$

A derivada $\dot{m}(t)$ (Fig. 5.5c) é zero, exceto em pontos de descontinuidade de $m(t)$, em que impulsos de amplitude ± 2 estão presentes. Isso significa que a frequência do sinal PM permanece a mesma, exceto nesses instantes isolados do tempo! Não fica imediatamente claro como uma frequência instantânea pode sofrer uma alteração de tamanho infinito e retornar ao valor original em tempo zero. Consideremos a abordagem direta:

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{PM}}(t) &= A \cos [\omega_c t + k_p m(t)] \\ &= A \cos \left[\omega_c t + \frac{\pi}{2} m(t) \right] \\ &= \begin{cases} A \sin \omega_c t & \text{quando } m(t) = -1 \\ -A \sin \omega_c t & \text{quando } m(t) = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

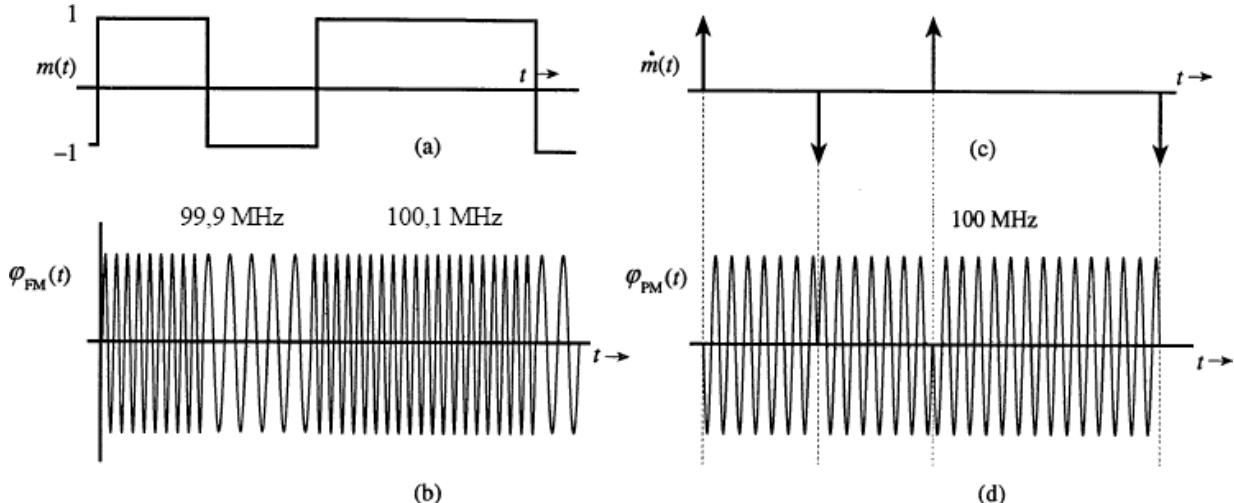


Figura 5.5 Formas de onda FM e PM.

Esta onda PM é mostrada na Fig. 5.5d. Tal esquema de modulação em fase de uma portadora por um sinal digital é denominado **chaveamento de fase (PSK – phase shift keying)**, pois os dígitos de informação são transmitidos via chaveamento da fase da portadora. Notemos que PSK também pode ser visto como uma modulação DSB-SC por $m(t)$.

A onda PM $\varphi_{\text{PM}}(t)$, neste caso, apresenta descontinuidade de fase em instantes nos quais estão localizados impulsos de $\dot{m}(t)$. Nesses instantes, a fase da portadora sofre uma alteração de π instantaneamente. Um deslocamento de fase finito em tempo zero implica frequência instantânea infinita nesses instantes. Isso está em acordo com nossa observação a respeito de $\dot{m}(t)$.

A descontinuidade de fase de $\varphi_{\text{PM}}(t)$ no instante em que $m(t)$ é descontínuo é $k_p m_d$, em que m_d é o valor da descontinuidade de $m(t)$ no dado instante. Neste exemplo, a amplitude de $m(t)$ sofre uma descontinuidade de 2 (de -1 a 1). Logo, a descontinuidade de fase de $\varphi_{\text{PM}}(t)$ é $k_p m_d = (\pi/2) H 2 = \pi$ rad, que confirma o resultado obtido anteriormente.

Quando é um sinal digital (como na Fig. 5.5a), $\varphi_{\text{PM}}(t)$ apresenta uma descontinuidade de fase nos pontos em que $m(t)$ tem uma descontinuidade degrau. A seguir, mostraremos que, para evitar ambiguidade na demodulação nesses casos, o desvio de fase $k_p m(t)$ deve ficar restrito ao intervalo $(-\pi, \pi)$. Por exemplo, se k_p fosse $3\pi/2$, então

$$\varphi_{\text{PM}}(t) = A \cos \left[\omega_c t + \frac{3\pi}{2} m(t) \right]$$

Neste caso, $\varphi_{\text{PM}}(t) = A \sin \omega_c t$ quando $m(t) = 1$ ou $-1/3$. Isso certamente causará ambiguidade no receptor quando $A \sin \omega_c t$ for recebido. Especificamente, o receptor não é capaz de determinar o valor exato de $m(t)$. Tal ambiguidade jamais ocorre se $k_p m(t)$ ficar restrito ao intervalo $(-\pi, \pi)$.

O que causa essa ambiguidade? Quando $m(t)$ tem uma descontinuidade degrau, a fase de $\varphi_{\text{PM}}(t)$ muda instantaneamente. Como a fase $\varphi_0 + 2\pi$ é indistinguível da fase φ_0 , ambiguidades serão inerentes ao demodulador, a menos que as variações de fase fiquem limitadas ao intervalo $(-\pi, \pi)$. Isso significa que k_p deve ser suficientemente pequeno para restringir a mudança de fase $k_p m(t)$ ao intervalo $(-\pi, \pi)$.

Nenhuma restrição é imposta ao valor de k_p se $m(t)$ for contínuo. Nesse caso, a mudança de fase com o tempo deixa de ser instantânea e passa a ser gradual; uma fase $\varphi_0 + 2n\pi$ exibirá n ciclos adicionais da portadora, para uma fase de apenas φ_0 . A onda PM pode ser detectada com um demodulador FM seguido por um integrador (ver Exercício 5.4-1). Os n ciclos adicionais serão detectados pelo demodulador FM e a subsequente integração produzirá uma fase $2n\pi$. Assim, as fases φ_0 e $\varphi_0 + 2n\pi$ podem ser detectadas sem ambiguidade. Essa conclusão pode ser comprovada a partir do Exemplo 5.1, em que a máxima mudança de fase é $\Delta\varphi = 10\pi$.

Como um sinal limitado em banda não pode ter descontinuidades do tipo degrau, também podemos dizer que, quando $m(t)$ for limitado em banda, nenhuma restrição é imposta ao valor de k_p .

5.2 LARGURA DE BANDA DE ONDAS MODULADAS EM ÂNGULO

Diferentemente de AM, a modulação em ângulo é não linear, de modo que nenhuma propriedade da transformada de Fourier pode ser aplicada diretamente para efeitos de análise de largura de banda. Para determinar a largura de banda de uma onda FM, definamos

$$a(t) = \int_{-\infty}^t m(\alpha) d\alpha \quad (5.7)$$

e

$$\hat{\varphi}_{\text{FM}}(t) = A e^{j[\omega_c t + k_f a(t)]} = A e^{jk_f a(t)} e^{j\omega_c t} \quad (5.8a)$$

de modo que a relação para sinais FM é

$$\varphi_{\text{FM}}(t) = \text{Re} [\hat{\varphi}_{\text{FM}}(t)] \quad (5.8b)$$

Expandindo a exponencial $e^{jk_f a(t)}$ na Eq. (5.8a) em uma série de potências, obtemos

$$\hat{\varphi}_{\text{FM}}(t) = A \left[1 + jk_f a(t) - \frac{k_f^2}{2!} a^2(t) + \cdots + j^n \frac{k_f^n}{n!} a^n(t) + \cdots \right] e^{j\omega_c t} \quad (5.9a)$$

e

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{FM}}(t) &= \text{Re} [\hat{\varphi}_{\text{FM}}(t)] \\ &= A \left[\cos \omega_c t - k_f a(t) \sin \omega_c t - \frac{k_f^2}{2!} a^2(t) \cos \omega_c t + \frac{k_f^3}{3!} a^3(t) \sin \omega_c t + \cdots \right] \end{aligned} \quad (5.9b)$$

A onda modulada consiste em uma portadora não modulada mais vários termos modulados em amplitude, como $a(t) \sin \omega_c t$, $a^2(t) \cos \omega_c t$, $a^3(t) \sin \omega_c t$, ... O sinal $a(t)$ é uma integral de $m(t)$. Se $M(f)$ for limitado em banda a B , $A(f)$ também será limitado em banda* a B . O espectro de $a^2(t)$ é simplesmente $A(f) * A(f)$ e limitado em banda a $2B$. De modo similar, o espectro de $a^n(t)$ é limitado em banda a nB . Portanto, o espectro consiste em uma portadora não modulada mais os espectros de $a(t)$, $a^2(t), \dots, a^n(t)$, centrados em ω_c . Fica claro que a onda modulada não é limitada em banda: tem largura de banda infinita e não guarda uma relação simples com o espectro do sinal modulante, como no caso de AM.

Embora a largura de banda de uma onda FM seja, em teoria, infinita, para sinais práticos, com $|a(t)|$ limitado, $|k_f a(t)|$ permanecerá finito. Como $n!$ aumenta muito mais rápido que $|k_f a(t)|$, temos

$$\frac{k_f^n a^n(t)}{n!} \simeq 0 \quad \text{para } n \text{ grande}$$

Portanto, podemos concluir que a maior parte da potência do sinal modulado reside em uma largura de banda finita. Esse é o principal fundamento da análise de largura de banda de modulações em ângulo. Há duas possibilidades em termos de largura de banda: FM de banda estreita e FM de banda larga.

Aproximação para Modulação em Ângulo de Banda Estreita

Em contraste com AM, modulações em ângulo são não lineares. A relação não linear entre $a(t)$ e $\varphi(t)$ fica evidente dos termos que envolvem $a''(t)$ na Eq. (5.9b). Quando k_f é muito pequeno, tal que

$$|k_f a(t)| \ll 1$$

todos os termos de ordens superiores na Eq. (5.9b) são desprezíveis, exceto os dois primeiros. Assim, temos uma boa aproximação

$$\varphi_{\text{FM}}(t) \approx A [\cos \omega_c t - k_f a(t) \sin \omega_c t] \quad (5.10)$$

Essa aproximação é uma modulação linear cuja expressão é similar à de um sinal AM com sinal de mensagem $a(t)$. Como a largura de banda de $a(t)$ é B Hz, a largura de banda de $\varphi_{\text{FM}}(t)$ na Eq. (5.10) é $2B$ Hz, segundo a propriedade de translação em frequência, devido ao termo $a(t) \sin \omega_c t$. Por essa razão, o sinal FM correspondente ao caso $|k_f a(t)| \ll 1$ é denominado **FM de banda estreita (NBFM – narrowband FM)**. De modo similar, o sinal **PM de banda estreita (NBPM – narrowband PM)** é aproximado por

$$\varphi_{\text{PM}}(t) \approx A [\cos \omega_c t - k_p m(t) \sin \omega_c t] \quad (5.11)$$

NBPM também tem uma largura de banda aproximada de $2B$.

Uma comparação entre NBFM [Eq. (5.10)] e AM [Eq. (5.9a)] ressalta as semelhanças e diferenças entre os dois tipos de modulação. Os dois têm a mesma largura de banda modulada $2B$. O espectro da banda lateral apresenta, no caso de FM, um deslocamento de fase de $\pi/2$ em relação à portadora e, no caso de AM, está em fase com a portadora. Devemos, no entanto, recordar que, apesar das aparentes semelhanças, os sinais AM e FM têm formas de onda muito distintas. Em um sinal AM, a frequência de oscilação é constante e a amplitude varia no tempo; em um sinal FM, a amplitude permanece constante e a frequência varia no tempo.

Análise de FM de Banda Larga: A Falácia Revelada

Um sinal de FM faz sentido apenas caso seu desvio de frequência seja suficientemente grande. Em outras palavras, em aplicações práticas de FM, o valor escolhido para a constante k_f é grande o bastante para que a condição $|k_f a(t)| \ll 1$ não seja atendida. Nesses casos, nos referimos aos sinais FM como **FM de banda larga (WBFM – wideband FM)**. Assim, na análise de largura de banda de WBFM, não podemos ignorar todos os termos de ordens superiores na Eq. (5.9b). Inicialmente, escolheremos a rota dos pioneiros que, com seu raciocínio intuitivamente simples, falharam na estimativa da largura de banda de FM. Se descobrirmos a falácia em seu raciocínio, teremos uma chance para obter uma melhor estimativa da largura de FM (de banda larga).

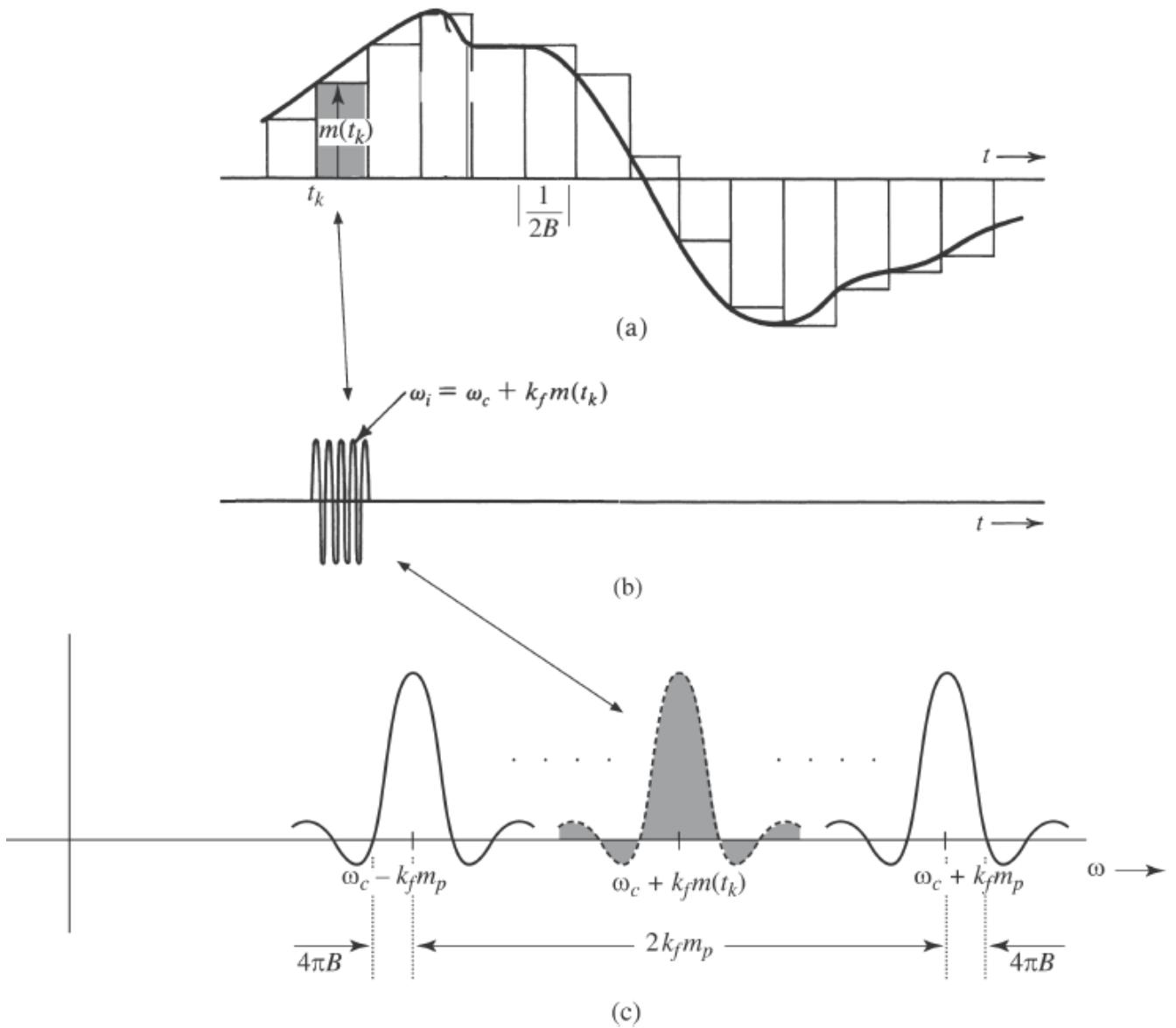


Figura 5.6 Estimativa da largura de banda de uma onda FM.

Consideremos uma mensagem $m(t)$ passa-baixos, com largura de banda de B Hz. Esse sinal pode ser bem aproximado por um sinal em escada $\hat{m}(t)$, como mostrado na Fig. 5.6a. O sinal $m(t)$ é, agora, aproximado por pulsos de amplitude constante. Por conveniência, cada um desses pulsos será denominado uma “célula”. Para assegurar que $\hat{m}(t)$ contenha toda a informação de $m(t)$, a largura da célula em $\hat{m}(t)$ não deve ser maior que o intervalo de Nyquist $1/2B$ segundo, de acordo com o teorema da amostragem (Capítulo 6).

A análise do sinal FM correspondente a $\hat{m}(t)$ é relativamente mais simples, por conta dos pulsos (células) de amplitude constante e largura $T = 1/2B$ segundos. Consideremos uma célula típica, com início em $t = t_k$. Essa célula tem amplitude constante $m(t_k)$. Assim o sinal FM a ela correspondente é uma senoide de frequência $\omega_c + k_f m(t_k)$ e duração $T = 1/2B$, como mostrado na Fig. 5.6b. O sinal FM para $\hat{m}(t)$ consiste em uma sequência de pulsos senoidais como este, de frequência constante e duração $T = 1/2B$, correspondentes às várias células de $\hat{m}(t)$. O espectro FM para $\hat{m}(t)$ é a soma das transformadas de Fourier dos pulsos senoidais associados às células. A transformada de Fourier do pulso senoidal na Fig. 5.6b (que corresponde à k -ésima célula) é uma função sinc, mostrada hachurada na Fig. 5.6c, dada pela Eq. (3.27a), com $\tau = 1/2B$, e Eq. (3.26), com $f_0 = f_c + k_f m(t_k)/2\pi$:

$$\text{rect}(2Bt) \cos [\omega_c t + k_f m(t_k)t] \iff \frac{1}{2} \text{sinc} \left[\frac{\omega + \omega_c + k_f m(t_k)}{4B} \right] + \frac{1}{2} \text{sinc} \left[\frac{\omega - \omega_c - k_f m(t_k)}{4B} \right]$$

Notemos que o espectro desse pulso se espalha nos dois lados da frequência central $\omega_c + k_f m(t_k)$ por $4\pi B$ como o lóbulo principal da função sinc. A Fig. 5.6c mostra os espectros de pulsos senoidais correspondentes a várias células. As amplitudes mínima e máxima das células são $-m_p$ e m_p , respectivamente. Portanto, as frequências *centrais* mínima e máxima dos pulsos senoidais curtos correspondentes ao sinal FM para todas as células são $\omega_c - k_f m_p$ e $\omega_c + k_f m_p$, respectivamente.

Consideremos o lóbulo principal da função sinc dessas respostas de frequências como contribuição significativa à largura da banda FM, como mostrado na Fig. 5.6c. Assim, os valores máximo e mínimo das frequências significativas nesse espectro são $\omega_c + k_f m_p + 4\pi B$ e $\omega_c - k_f m_p - 4\pi B$, respectivamente. A largura de banda do espectro FM é, aproximadamente,

$$B_{\text{FM}} = \frac{1}{2\pi} (2k_f m_p + 8\pi B) = 2 \left(\frac{k_f m_p}{2\pi} + 2B \right) \text{ Hz}$$

Agora podemos entender a falácia no raciocínio dos pioneiros. As frequências portadoras máxima e mínima são $\omega_c + k_f m_p$ e $\omega_c - k_f m_p$, respectivamente. Por isso, foi concluído que as componentes espetrais também devem estar contidas nesse intervalo, resultando em uma largura da banda de FM igual a $2k_f m_p$. A hipótese implícita é que uma senoide de frequência ω tem todo seu espectro concentrado em ω . Infelizmente, isso é verdadeiro somente no caso da senoide eterna com duração $T = \infty$ (o que transforma a função sinc em um impulso). Para uma senoide de duração finita, com duração de T segundos, o espectro se espalha como a função sinc nos dois lados de ω por, pelo menos, a largura do lóbulo principal, que é $2\pi/T$. Os pioneiros deixaram escapar esse efeito de espalhamento.

Por conveniência de notação, dado o desvio da frequência portadora (em radianos por segundos) de $\pm k_f m_p$, denotaremos o *pico do desvio de frequência* em hertz por Δf . Assim,

$$\Delta f = k_f \frac{m_{\max} - m_{\min}}{2 \cdot 2\pi} = f = k_f \frac{m_p}{2\pi}$$

A largura de banda de FM estimada (em hertz) pode, então, ser expressa como

$$B_{\text{FM}} \simeq 2(\Delta f + 2B) \quad (5.12)$$

A estimativa de largura de banda agora obtida é um pouco maior que o valor real, pois corresponde à aproximação de $m(t)$ em degraus, e não ao verdadeiro sinal $m(t)$, que é consideravelmente mais suave. Portanto, a real largura de banda de FM é menor que esse valor estimado. Com base na Fig. 5.6c, fica claro que uma melhor aproximação para a largura de banda FM fica entre

$$[2\Delta f, 2\Delta f + 4B]$$

Portanto, devemos reajustar nossa estimativa de largura de banda. Para efetuar essa correção, observemos que, para o caso NBFM, k_f é muito pequeno. Dessa forma, em NBFM, dado um valor fixo m_p , Δf é muito pequeno (em comparação com B). Nesse caso, ignoramos o pequeno termo Δf na Eq. (5.12), e obtemos

$$B_{\text{FM}} \approx 4B$$

Contudo, mostramos anteriormente que, no caso de banda estreita, a largura de banda FM é aproximadamente $2B$ Hz. Isso indica que uma melhor estimativa para a largura de banda é

$$B_{\text{FM}} = 2(\Delta f + B) = 2 \left(\frac{k_f m_p}{2\pi} + B \right) \quad (5.13)$$

Este é exatamente o resultado obtido por Carson,¹ que investigou esse problema de forma rigorosa para modulação por tom [senoide $m(t)$]. Na literatura, esta fórmula recebe o nome de **regra de Carson**. Observemos que, para um caso verdadeiramente de banda larga, onde $\Delta f \gg B$, a Eq. (5.13) pode ser aproximada por

$$B_{\text{FM}} \approx 2\Delta f \quad \Delta f \gg B \quad (5.14)$$

Como $\Delta\omega = k_f m_p$, essa fórmula é precisamente a que os pioneiros usaram para a largura de banda FM. O único erro estava em pensar que essa fórmula seria válida para todos os casos, especialmente para o de banda estreita, em que $\Delta f \ll B$.

Definamos uma razão de desvio β como

$$\beta = \frac{\Delta f}{B} \quad (5.15)$$

A regra de Carson pode ser expressa em termos da razão de desvio como

$$B_{\text{FM}} = 2B(\beta + 1) \quad (5.16)$$

A razão de desvio controla o grau de modulação e, em consequência, tem um papel semelhante ao do índice de modulação em AM. De fato, para o caso especial de FM modulado por tom, a razão de desvio β é denominado **índice de modulação**.

Modulação em Fase

Todos os resultados deduzidos para FM se aplicam diretamente a PM. Assim, no caso de PM, a frequência instantânea é dada por

$$\omega_i = \omega_c + k_p \dot{m}(t)$$

Portanto, o pico de desvio de frequência Δf é

$$\Delta f = k_p \frac{[\dot{m}(t)]_{\text{máx}} - [\dot{m}(t)]_{\text{mín}}}{2 \cdot 2\pi} \quad (5.17a)$$

Supondo que

$$\dot{m}_p = [\dot{m}(t)]_{\text{máx}} = -|\dot{m}(t)_{\text{mín}}| \quad (5.17b)$$

então

$$\Delta f = k_p \frac{\dot{m}_p}{2\pi} \quad (5.17c)$$

Portanto,*

$$B_{\text{PM}} = 2(\Delta f + B) \quad (5.18a)$$

$$= 2 \left(\frac{k_p \dot{m}_p}{2\pi} + B \right) \quad (5.18b)$$

Um aspecto muito interessante de FM é o fato de $\Delta\omega = k_f m_p$ depender somente do valor de pico de $m(t)$; $\Delta\omega$ é independente do espectro de $m(t)$. Em PM, por sua vez, $\Delta\omega = k_p \dot{m}_p$ depende do valor de pico de $\dot{m}(t)$. Contudo, $\dot{m}(t)$ tem forte dependência da composição espectral de $m(t)$. A presença de componentes de altas frequências em $m(t)$ implica rápidas variações temporais, resultando em um maior valor para \dot{m}_p . Reciprocamente, uma predominância de componentes de frequências baixas resultará em um menor valor para \dot{m}_p . Dessa forma, embora a largura de banda de sinais FM [Eq. (5.13)] seja praticamente independente da forma espectral de $m(t)$, a largura de banda de sinais PM [Eq. (5.18)] é fortemente afetada pela forma espectral de $m(t)$. Quando o espectro de $m(t)$ está concentrado nas frequências baixas, B_{PM} será menor que quanto o espectro de $m(t)$ estiver concentrado nas frequências altas.

Análise Espectral da Modulação em Frequência por Tom

Para uma portadora FM com um sinal de mensagem genérico $m(t)$, a análise espectral requer o uso da aproximação do sinal por degraus. Modulação por tom é um caso especial, para o qual uma análise espectral exata é possível: $m(t)$ é uma senoide. Usemos este caso especial para comprovar a aproximação de largura de banda FM. Seja

$$m(t) = \alpha \cos \omega_m t$$

Da Eq. (5.7), com a hipótese que, inicialmente, $a(-\infty) = 0$, temos

$$a(t) = \frac{\alpha}{\omega_m} \sin \omega_m t$$

Assim, da Eq. (5.8a), temos

$$\hat{\varphi}_{\text{FM}}(t) = A e^{(j\omega_c t + k_f \alpha / \omega_m \operatorname{sen} \omega_m t)}$$

Além disso,

$$\Delta\omega = k_f m_p = \alpha k_f$$

e a largura de banda de $m(t)$ é $2\pi B = \omega_m$ rad/s. A razão de desvio (ou, neste caso, o índice de modulação) é

$$\beta = \frac{\Delta f}{B} = \frac{\Delta\omega}{2\pi B} = \frac{\alpha k_f}{\omega_m}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_{\text{FM}}(t) &= A e^{j(\omega_c t + \beta \operatorname{sen} \omega_m t)} \\ &= A e^{j\omega_c t} (e^{j\beta \operatorname{sen} \omega_m t})\end{aligned}\quad (5.19)$$

Notemos que $e^{j\beta \operatorname{sen} \omega_m t}$ é um sinal periódico, com período $2\pi/\omega_m$, e pode ser expandido em uma série de Fourier exponencial como

$$e^{j\beta \operatorname{sen} \omega_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_m t}$$

em que

$$D_n = \frac{\omega_m}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_m}^{\pi/\omega_m} e^{j\beta \operatorname{sen} \omega_m t} e^{-jn\omega_m t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\beta \operatorname{sen} x - nx)} dx$$

A integral no lado direito não pode ser calculada em uma forma fechada, e deve ser integrada por expansão em uma série infinita. Essa integral é tabelada e denotada por $J_n(\beta)$, a função de Bessel de primeira espécie e ordem n . A Fig. 5.7a mostra gráficos dessa função em função de n e para diversos valores de β . Assim,

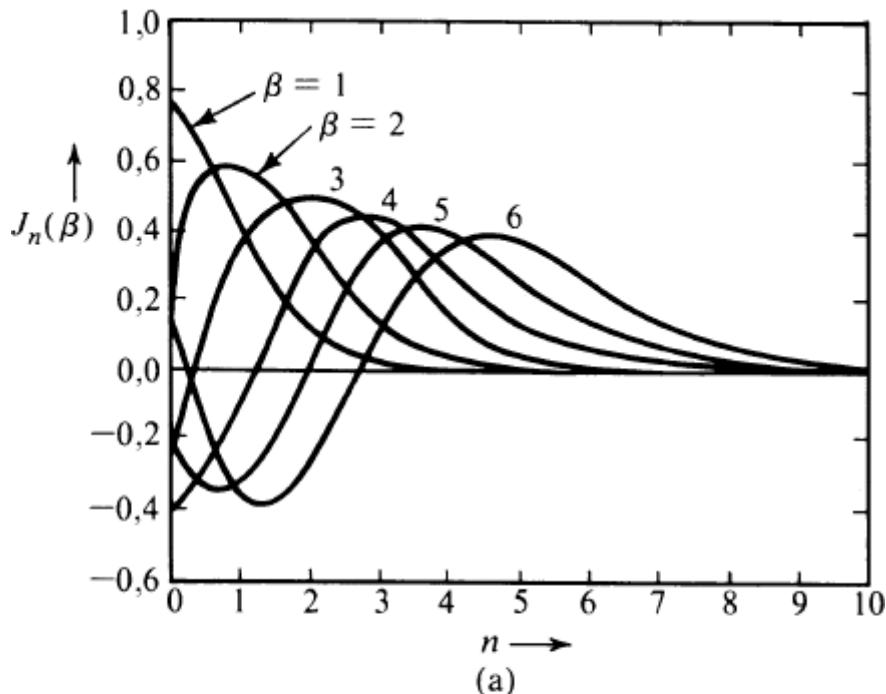
$$e^{j\beta \operatorname{sen} \omega_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{jn\omega_m t} \quad (5.20)$$

Substituindo a Eq. (5.20) na Eq. (5.19), obtemos

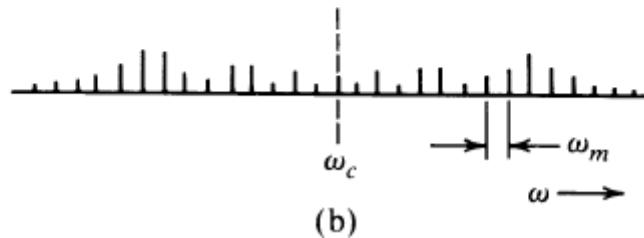
$$\hat{\varphi}_{\text{FM}}(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{j(\omega_c t + n\omega_m t)}$$

e

$$\varphi_{\text{FM}}(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos(\omega_c + n\omega_m)t$$



(a)



(b)

Figura 5.7 (a) Variação de $J_n(\beta)$ em função de n , para diversos valores de β , (b) Espectro de onda FM modulada por tom.

O sinal FM modulado por tom tem uma componente de portadora e um número infinito de bandas laterais de frequências $\omega_c \pm \omega_m, \omega_c \pm 2\omega_m, \dots, \omega_c \pm n\omega_m, \dots$, como mostrado na Fig. 5.7b. Esse resultado contrasta fortemente com o obtido para o espectro DSB-SC, que tem apenas uma banda lateral de cada lado da frequência portadora. A magnitude da n -ésima banda lateral em $\omega_c + n\omega_m$ é $*J_n(\beta)$. Dos gráficos de $J_n(\beta)$ na Fig. 5.7a, podemos verificar que, para um dado β , $J_n(\beta)$ decresce com n e que há um número finito de linhas espectrais significativas nas bandas laterais. Podemos ver na Fig. 5.7a que $J_n(\beta)$ é desprezível para $n > \beta + 1$. Portanto, o número de impulsos significativos nas bandas laterais é $\beta + 1$. A largura de banda da portadora FM é dada por

$$\begin{aligned} B_{FM} &= 2(\beta + 1)f_m \\ &= 2(\Delta f + B) \end{aligned}$$

o que está em acordo com o resultado obtido anteriormente [Eq. (5.13)]. Quando $\beta \ll 1$ (NBFM), existe somente uma banda lateral significativa e a largura de banda é $B_{FM} = 2f_m = 2B$. É importante notar que a análise desse caso de modulação por tom é uma comprovação, não uma prova, da fórmula de Carson.

Na literatura, modulação por tom em FM é, em geral, discutida em detalhe. Como, no entanto, modulação em ângulo é uma modulação não linear, os resultados deduzidos para modulação por tom podem ter pouca relação com situações práticas. Na verdade, na melhor das hipóteses, esses resultados não fazem sentido e, na pior, podem ser enganosos se generalizados a sinais práticos.** Como autores e professores, parece-nos que dar demasiada ênfase à modulação por tom pode ser enganador. Por isso, aqui, omitimos discussão adicional sobre o assunto.

O método para determinar o espectro de uma onda FM modulada por tom pode ser usado na determinação do espectro de uma onda FM para o caso em que $m(t)$ é um sinal periódico genérico:

$$\hat{\varphi}_{FM}(t) = A e^{j\omega_c t} [e^{jk_f a(t)}]$$

Como $a(t)$ é um sinal periódico, $e^{jk_f a(t)}$ também é um sinal periódico, que pode ser expresso em uma série de Fourier exponencial, como na equação anterior. Feito isso, é relativamente simples escrever $\varphi_{FM}(t)$ em termos da portadora e das bandas laterais.

Exemplo 5.3 **(a)** Estimemos B_{FM} e B_{PM} para o sinal modulante $m(t)$ na Fig. 5.4a, para $k_f = 2\pi \times 10^5$ e $k_p = 5\pi$. Suponhamos que a largura de banda essencial do sinal periódico $m(t)$ seja igual à frequência de seu terceiro harmônico.

(b) Repitamos o exercício para o caso em que a amplitude de $m(t)$ é dobrada [$m(t)$ multiplicado por 2].

(a) A amplitude de pico de $m(t)$ é unitária. Assim, $m_p = 1$. A seguir, determinemos a largura de banda essencial B de $m(t)$. Deixamos como exercício mostrar que a série de Fourier para esse sinal periódico é dada por

$$m(t) = \sum_n C_n \cos n\omega_0 t \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{2 \times 10^{-4}} = 10^4 \pi$$

em que

$$C_n = \begin{cases} \frac{8}{\pi^2 n^2} & n \text{ ímpar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}$$

Podemos observar que as amplitudes dos harmônicos decaem rapidamente com n . O terceiro harmônico é apenas 11% da fundamental e o quinto harmônico, 4%. Isso significa que as potências do terceiro e do quinto harmônicos correspondem a 1,21% e 0,16% da potência da componente fundamental, respectivamente. Assim, podemos tomar a largura de banda essencial de $m(t)$ como a frequência de seu terceiro harmônico, ou seja,

$$B = 3 \times \frac{10^4}{2} = 15 \text{ kHz}$$

Para FM

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi} k_f m_p = \frac{1}{2\pi} (2\pi \times 10^5)(1) = 100$$

e

$$B_{\text{FM}} = 2(\Delta f + B) = 230 \text{ kHz}$$

A razão de desvio β é dado por

$$\beta = \frac{\Delta f}{B} = \frac{100}{15}$$

e

$$B_{\text{FM}} = 2B(\beta + 1) = 30 \left(\frac{100}{15} + 1 \right) = 230 \text{ kHz}$$

Para PM: A amplitude de pico de é 20.000 e

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi} k_p m_p = 50 \text{ kHz}$$

Logo,

$$B_{\text{PM}} = 2(\Delta f + B) = 130 \text{ kHz}$$

A razão de desvio β é dado por

$$\beta = \frac{\Delta f}{B} = \frac{50}{15}$$

e

$$B_{\text{PM}} = 2B(\beta + 1) = 30 \left(\frac{50}{15} + 1 \right) = 130 \text{ kHz}.$$

(b) Quando multiplicamos $m(t)$ por 2, dobrarmos seu valor de pico. Ou seja, $m_p = 2$. Contudo, a largura de banda não é alterada, de modo que $B = 15 \text{ kHz}$.

Para FM:

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi} k_f m_p = \frac{1}{2\pi} (2\pi \times 10^5)(2) = 200 \text{ kHz}$$

e

$$B_{\text{FM}} = 2(\Delta f + B) = 430 \text{ kHz}$$

A razão de desvio β é dado por

$$\beta = \frac{\Delta f}{B} = \frac{200}{15}$$

e

$$B_{\text{FM}} = 2B(\beta + 1) = 30 \left(\frac{200}{15} + 1 \right) = 430 \text{ kHz}$$

Para PM: Quando multiplicamos $m(t)$ por 2, dobrarmos sua derivada, de modo que, agora, $= 40.000$ e

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi} k_p \dot{m}_p = 100 \text{ kHz}$$

e

$$B_{\text{PM}} = 2(\Delta f + B) = 230 \text{ kHz}$$

A razão de desvio β é dado por

$$\beta = \frac{\Delta f}{B} = \frac{100}{15}$$

e

$$B_{\text{PM}} = 2B(\beta + 1) = 30 \left(\frac{100}{15} + 1 \right) = 230 \text{ kHz}$$

Observemos que dobrar a amplitude do sinal [dobrar $m(t)$] resulta, aproximadamente, no dobro do desvio de frequência Δf tanto da forma de onda FM como da forma de onda PM.

Exemplo 5.4 Repitamos o Exemplo 5.1 para o caso em que $m(t)$ é dilatado temporalmente por um fator 2; ou seja, o período de $m(t)$ passa a ser $4 \text{ H} 10^{-4}$.

Recordemos que a dilatação temporal de um sinal por um fator 2 reduz a largura espectral (largura de banda) do sinal por um fator 2. Podemos comprovar isso observando que a frequência fundamental agora é 2,5 kHz e o terceiro harmônico, 7,5 kHz. Logo, $B = 7,5 \text{ kHz}$, que é a metade da largura de banda no exemplo anterior. Além disso, a dilatação temporal não afeta a amplitude de pico, de modo que $m_p = 1$. Contudo, \dot{m}_p fica dividido por 2, ou seja, $\dot{m}_p = 10.000$.

Para FM:

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi} k_f m_p = 100 \text{ kHz}$$

$$B_{\text{FM}} = 2(\Delta f + B) = 2(100 + 7,5) = 215 \text{ kHz}$$

Para PM:

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi} k_p \dot{m}_p = 25 \text{ kHz}$$

$$B_{\text{PM}} = 2(\Delta f + B) = 65 \text{ kHz}$$

Notemos que a dilatação temporal de $m(t)$ tem pouco efeito sobre a largura de banda FM, mas reduz a largura de banda PM à metade do valor original. Isso comprova a observação feita anteriormente, que o espectro PM depende fortemente do espectro de $m(t)$.

Exemplo 5.5 Um sinal modulado em ângulo, com portadora $\omega_c = 2\pi \text{ H} 10^5$ é descrito pela equação

$$\varphi_{\text{EM}}(t) = 10 \cos(\omega_c t + 5 \operatorname{sen} 3000t + 10 \operatorname{sen} 2000\pi t)$$

- (a) Determinemos a potência do sinal modulado.
- (b) Determinemos o desvio de frequência Δf .
- (c) Determinemos a razão de desvio β .
- (d) Determinemos o desvio de fase $\Delta\phi$.
- (e) Estimemos a largura de banda de $\varphi_{\text{EM}}(t)$.

A largura de banda do sinal é a maior frequência em $m(t)$ (ou sua derivada). Nesse caso, $B = 2000\pi/2\pi = 1000 \text{ Hz}$.

- (a) A amplitude da portadora é 10 e a potência,

$$P = \frac{10^2}{2} = 50$$

- (b) Para determinar o desvio de frequência Δf , determinemos a frequência instantânea ω_i , que é dada por

$$\omega_i = \frac{d}{dt}\theta(t) = \omega_c + 15.000 \cos 3000t + 20.000\pi \cos 2000\pi t$$

O desvio da portadora é $15.000 \cos 3000t + 20.000\pi \cos 2000\pi t$. As duas senoides se somam em fase em algum ponto, de modo que o valor máximo dessa expressão é $15.000 + 20.000\pi$. Esse é o máximo desvio da portadora $\Delta\omega$. Logo,

$$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = 12.387,32 \text{ Hz}$$

(c) $\beta = \frac{\Delta f}{B} = \frac{12.387,32}{1000} = 12,387$

- (d) O ângulo $\theta(t) = \omega t + (5 \operatorname{sen} 3000t + 10 \operatorname{sen} 2000\pi t)$. O desvio de fase é o valor máximo do ângulo entre parênteses, dado por $\Delta\phi = 15$ rad.
- (e) $B_{EM} = 2(\Delta f + B) = 26.774,65$ Hz.

Vale observar a generalidade do método para estimar a largura de banda de uma onda modulada em ângulo. Não é preciso saber se é uma onda FM, PM ou de algum outro tipo de modulação em ângulo. O método é aplicável a qualquer sinal modulado em ângulo.

Uma Nota Histórica: Edwin H. Armstrong (1890-1954)

Hoje, ninguém duvida que FM tem um papel importante em radiodifusão e comunicações. No entanto, até a década de 1960, a radiodifusão FM parecia fadada ao fracasso, devido ao antieconômico uso de largura de banda.

A história de FM é repleta de estranhas ironias. O ímpeto por trás do desenvolvimento de FM residia no desejo de reduzir a largura de banda na transmissão de sinais. Um raciocínio superficial mostrara que seria possível reduzir a largura de banda de transmissão com o uso de FM. Contudo, resultados experimentais mostraram o contrário. Na verdade, a largura de banda de transmissão de FM era maior do que a de AM. Uma cuidadosa análise matemática efetuada por Carson mostrou que FM exigia uma largura de banda maior que AM. Lamentavelmente, Carson não reconheceu a vantagem compensadora de FM, no que diz respeito à capacidade de eliminação de ruído. Sem muita base, ele concluiu que FM introduzia distorção inerente e não exibia qualquer vantagem compensadora.¹ Em um artigo posterior, escreveu



“Na verdade, à medida que mais e mais esquemas são analisados e testados, e a natureza essencial do problema se torna mais claramente perceptível, somos forçados a concluir que a estática (ruído), assim como os pobres, sempre estará entre nós.”² Assim, a opinião de um dos maiores matemáticos especializados na área de comunicações da época atrasou o desenvolvimento de FM em mais de uma década. A *vantagem supressora de ruído* de FM foi posteriormente provada pelo major Edwin H. Armstrong,³ um brilhante engenheiro cujas contribuições ao campo de sistemas de rádio são comparáveis às de Hertz e Marconi. Em grande parte, o trabalho de Armstrong foi responsável pela retomada do interesse em FM.

Embora não tenha inventado o conceito, Armstrong é considerado o pai da moderna modulação FM. Nascido a 18 de dezembro de 1890, na cidade de Nova York, Edwin H. Armstrong é reconhecido como um dos pioneiros da radioeletricidade do século XX. Armstrong tem o crédito da invenção do *círculo regenerativo* (Patente americana 1.113.149, concedida em 1912 quando ele era aluno de graduação na Columbia University), do *círculo super-heteródino* (Patente americana 1.342.885, concedida em 1918 quando ele servia ao exército dos Estados Unidos, estacionado em Paris, durante a Primeira Guerra Mundial), do *círculo super-regenerativo* (Patente americana 1.424.065, concedida em 1922) e do sistema completo de radiodifusão FM (Patente americana 1.941.066, de 1933). Todas foram contribuições inovadoras ao campo do rádio. Em 1933, a revista *Fortune* declarou: a modulação em frequência de banda larga é a quarta, e talvez a maior, em uma lista de invenções de Armstrong que moldaram grande parte da moderna radiodifusão. O major Armstrong é o reconhecido inventor do circuito “de realimentação” regenerativo, que tirou a arte do rádio do estágio dos fones de ouvido baseados no detector a cristal e tornou possível a amplificação da difusão; do circuito super-heteródino, que é a base de praticamente todo o rádio moderno; e do circuito super-regenerativo, agora em largo uso em... sistemas de ondas curtas.⁴

Armstrong foi o último de uma linhagem de inventores solitários. Após receber a patente por FM em 1933, Armstrong leu seu agora famoso artigo (que, posteriormente, foi publicado nos anais do IRE⁵), acompanhado da primeira demonstração pública da radiodifusão FM no dia 5 de novembro de 1935, em uma reunião seccional do Instituto de Engenheiros de Rádio (IRE – *Institute of Radio Engineers*, um predecessor do IEEE*). A dramática redução do ruído estático com FM não foi bem recebida pela indústria da radiodifusão, que viu FM como uma ameaça a seu vasto investimento comercial em rádio AM. Para estabelecer a difusão FM, Armstrong travou uma longa e cara batalha com a indústria da radiodifusão, que, encorajada pela Comissão Federal de Comunicação (FCC — *Federal Communication Commission*), lutou com unhas e dentes para resistir à modulação FM. Mesmo assim, em dezembro de 1941, 67 estações comerciais FM foram autorizadas, com cerca de meio milhão de receptores em uso, e 43 pedidos de autorização pendentes. Durante audiência da FCC em setembro de 1944, o Conselho de Planejamento Técnico de Rádio (RTPB — *Radio Technical Planning Board*) fez sua recomendação final para que 75 canais fossem alocados a FM, na faixa de 41 a 56 MHz.

Apesar da recomendação do RTPB, que representava a melhor orientação para a comunidade de engenharia de rádio, persistia intenso *lobby* para que a FCC deslocasse a banda FM, principalmente por parte daqueles que divulgavam a preocupação quanto às fortes interferências que poderiam ocorrer na banda de 40 MHz em decorrência de reflexões na ionosfera. Assim, em junho de 1945, a FCC, com base no testemunho errôneo de um especialista técnico, bruscamente deslocou a largura de banda alocada a FM da faixa de 42 a 50 MHz para 88 a 108 MHz. Esse foi um duro golpe em FM, pois tornou obsoletos mais de meio milhão de receptores e equipamentos (transmissores, antenas etc.), fabricados e vendidos pela indústria de FM às 50 estações desde 1941, para a banda de 42 a 50 MHz. Armstrong lutou contra a decisão e, posteriormente, conseguiu que o especialista técnico reconhecesse seu erro. Apesar de tudo isso, as alocações da FCC permaneceram inalteradas. Nas disputas judiciais, Armstrong gastou a considerável fortuna que havia acumulado com as invenções. Os gigantes da radiodifusão, que haviam resistido a FM com tanto empenho, mudaram de opinião e usaram suas invenções sem pagar-lhe os devidos *royalties*. Armstrong gastou muito de seu tempo em tribunais em alguns dos mais longos, notáveis e cársticos processos judiciais de patentes da época.⁵ Por fim, sem recursos, com energia exaurida e vida familiar destroçada, o desiludido Armstrong cometeu suicídio: (em 1945) pulou da janela de seu apartamento no décimo terceiro andar, em River House, Nova York.

A viúva de Armstrong prosseguiu com a batalha judicial e venceu. Na década de 1960, FM estava bem estabelecida como um sistema superior de rádio⁶ e Edwin H. Armstrong, devidamente reconhecido como o inventor da modulação em frequência. Em 1955, a UIT adicionou seu nome ao rol de grandes inventores. Em 1980, Edwin H. Armstrong foi introduzido ao *U.S National Inventors Hall of Fame* [Hall da Fama de Inventores Americanos]; em 1983, seu retrato foi estampado em um selo do correio dos Estados Unidos.⁷

5.3 GERAÇÃO DE ONDAS FM

Existem, basicamente, duas maneiras de gerar ondas FM: **direta** e **indireta**. Primeiro, descreveremos o gerador de FM de banda estreita utilizado na **geração indireta de FM** de sinais de banda larga modulados em ângulo.

Geração de NBFM

Para NBFM e sinais NBPM, mostramos anteriormente que, como $|k_f a(t)| \ll 1$ e $|k_p m(t)| \ll 1$, respectivamente, os sinais modulados podem ser aproximados como

$$\varphi_{\text{NBPM}}(t) \simeq A[\cos \omega_c t - k_f a(t) \sin \omega_c t] \quad (5.21\text{a})$$

$$\varphi_{\text{NBFM}}(t) \simeq A[\cos \omega_c t - k_p m(t) \sin \omega_c t] \quad (5.21\text{b})$$

As duas aproximações são lineares e similares à expressão para a onda AM. Na verdade, as Eq. (5.21) sugerem um possível método para a geração de sinais FM e PM de banda estreita com o uso de moduladores DSB-SC. A representação em diagrama de bloco de tais sistemas é mostrada na Fig. 5.8.

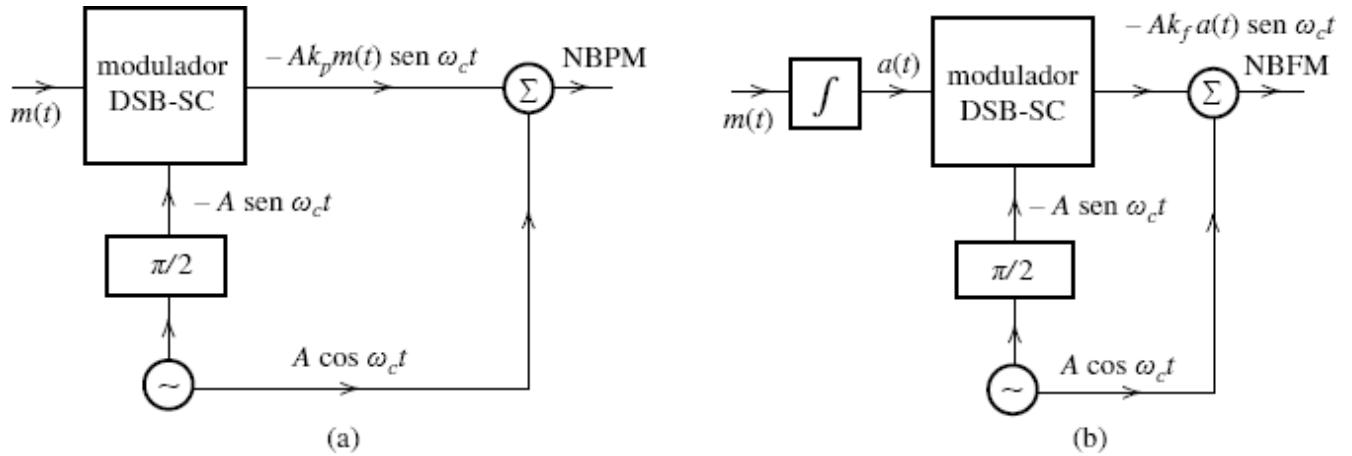
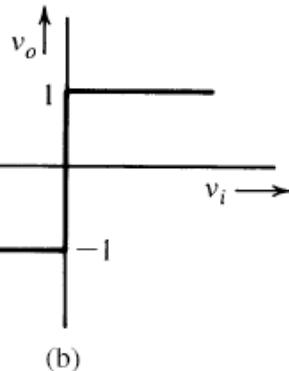
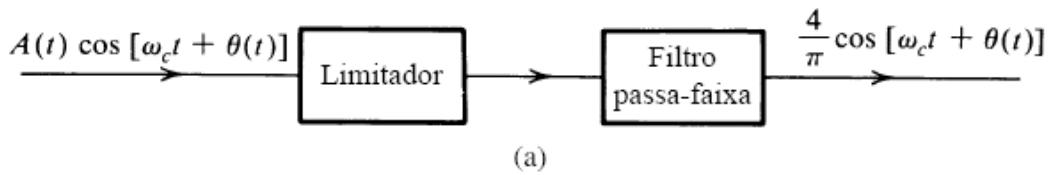
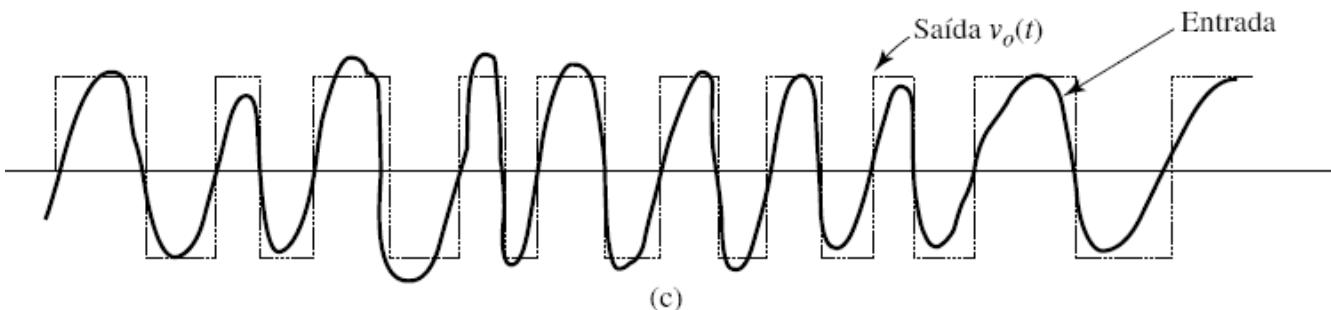


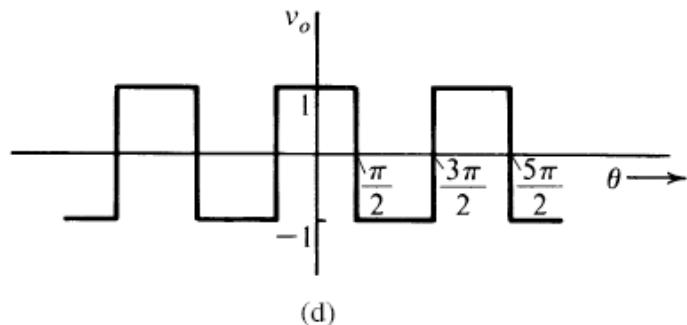
Figura 5.8 (a) Gerador PM de banda estreita, (b) Gerador de sinal FM de banda estreita.



(b)



(c)



(d)

Figura 5.9 (a) Limitador e filtro passa-faixa usados para remover variações de amplitude em uma onda FM. (b) Característica entrada-saída do limitador. (c) Entrada do limitador e correspondente saída, (d) Saída do limitador em função de θ .

É importante ressaltar que o sinal NBFM gerado como na Fig. 5.8b tem alguma distorção, devido à aproximação na Eq. (5.10). A saída desse modulador NBFM também exibe algumas variações de amplitude. Um dispositivo não linear projetado para limitar a amplitude de um sinal passa-faixa pode remover a maior parte dessa distorção.

Limitador Passa-Faixa

As variações de amplitude de uma portadora modulada em ângulo podem ser eliminadas com um **limitador passa-faixa**, que consiste em um limitador seguido por um filtro passa-faixa (Fig. 5.9a). A característica entrada-saída de um limitador é mostrada na Fig. 5.9b. Observemos que, para uma entrada senoidal, a saída do limitador passa-faixa será uma onda quadrada de amplitude unitária, qualquer que seja a amplitude senoidal de entrada. Além disso, os pontos em que a senoide de entrada se anula (pontos de cruzamento do zero) são preservados na saída, pois, quando a entrada é zero, a saída também é zero (Fig. 5.9b). Assim, uma entrada senoidal modulada em ângulo $v_i(t) = A(t) \cos \theta(t)$ resulta em uma onda quadrada modulada em ângulo, de amplitude constante, $v_o(t)$, como indicado na Fig. 5.9c. Como vimos, uma operação não linear desse tipo preserva a informação da modulação em ângulo. Quando $v_o(t)$ é aplicado ao filtro passa-faixa centrado em ω_c , a saída é uma onda modulada em ângulo, de amplitude constante. Para comprovar isso, consideremos a onda de entrada modulada em ângulo

$$v_i(t) = A(t) \cos \theta(t)$$

em que

$$\theta(t) = \omega_c t + k_f \int_{-\infty}^t m(\alpha) d\alpha$$

A saída $v_o(t)$ do limitador é +1 ou -1, dependendo se $v_i(t) = A(t) \cos \theta(t)$ é positivo ou negativo (Fig. 5.9c). Como $A(t) \geq 0$, $v_o(t)$ pode ser expresso como uma função de θ :

$$v_o(\theta) = \begin{cases} +1 & \cos \theta > 0 \\ -1 & \cos \theta < 0 \end{cases}$$

Portanto, como uma função de θ , v_o é uma função periódica de onda quadrada, com período 2π (Fig. 5.9d), que pode ser expandida em uma série de Fourier (Capítulo 2)

$$v_o(\theta) = \frac{4}{\pi} \left(\cos \theta - \frac{1}{3} \cos 3\theta + \frac{1}{5} \cos 5\theta + \dots \right)$$

Em qualquer instante de tempo t , $\theta = \omega_c t + k_f \int m(\alpha) d\alpha$. Logo, como função do tempo, a saída v_o é dada por

$$\begin{aligned} v_o[\theta(t)] &= v_o \left[\omega_c t + k_f \int m(\alpha) d\alpha \right] \\ &= \frac{4}{\pi} \left\{ \cos \left[\omega_c t + k_f \int m(\alpha) d\alpha \right] - \frac{1}{3} \cos 3 \left[\omega_c t + k_f \int m(\alpha) d\alpha \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5} \cos 5 \left[\omega_c t + k_f \int m(\alpha) d\alpha \right] \dots \right\} \end{aligned}$$

A saída, portanto, tem a onda original FM mais ondas FM com frequências multiplicadas por fatores 3, 5, 7,... Podemos aplicar a saída do limitador a um filtro passa-faixa com frequência central ω_c e largura da banda B_{FM} , como mostrado na Fig. 5.9a. A saída do filtro $e_o(t)$ é a desejada portadora modulada em ângulo, com amplitude constante,

$$e_o(t) = \frac{4}{\pi} \cos \left[\omega_c(t) + k_f \int m(\alpha) d\alpha \right]$$

Embora tenhamos deduzido esses resultados para FM, os mesmos também se aplicam a PM (modulação em ângulo em geral). O filtro passa-faixa não apenas mantém constante a amplitude da deseja portadora modulada em ângulo, mas ainda suprime parcialmente o ruído de canal, quando esse é pequeno.⁸

Método Indireto de Armstrong

No método indireto de Armstrong, o NBFM é gerado como mostrado na Fig. 5.8b [ou Eq. (5.10)]. O sinal NBFM é, então, convertido em WBFM com o uso de **multiplicadores de frequência** adicionais.

Um multiplicador de frequência pode ser realizado por um dispositivo não linear seguido por um filtro passa-faixa. Primeiro, consideraremos um dispositivo não linear cujo sinal de saída $y(t)$ correspondente a uma entrada $x(t)$ seja dado por

$$y(t) = a_2 x^2(t)$$

Caso um sinal FM passe por esse dispositivo, o sinal de saída será

$$\begin{aligned}
y(t) &= a_2 \cos^2 \left[\omega_c t + k_f \int m(\alpha) d\alpha \right] \\
&= 0.5a_2 + 0.5a_2 \cos \left[2\omega_c t + 2k_f \int m(\alpha) d\alpha \right]
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Portanto, um filtro passa-faixa centrado em $2\omega_c$ recuperará um sinal FM com o dobro da frequência instantânea original. Em geral, um dispositivo linear deve ter uma característica da forma

$$y(t) = a_0 + a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + \cdots + a_n x^n(t) \tag{5.23}$$

Se $x(t) = A \cos [\omega_c t + k_f \int m(\alpha) d\alpha]$, com o uso de identidades trigonométricas, podemos mostrar prontamente que $y(t)$ tem a forma

$$\begin{aligned}
y(t) &= c_o + c_1 \cos \left[\omega_c t + k_f \int m(\alpha) d\alpha \right] + c_2 \cos \left[2\omega_c t + 2k_f \int m(\alpha) d\alpha \right] \\
&\quad + \cdots + c_n \cos \left[n\omega_c t + nk_f \int m(\alpha) d\alpha \right]
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Ou seja, a saída terá espectros em $\omega_c, 2\omega_c, \dots, n\omega_c$, com desvios de frequência $\Delta f, 2\Delta f, \dots, n\Delta f$, respectivamente. Cada uma dessas componentes é um sinal FM separado dos outros. Assim, um filtro passa-faixa centrado em $n\omega_c$ pode recuperar um sinal FM cuja frequência instantânea é ω_c multiplicado por um fator n . Esses dispositivos, que consistem em uma não linearidade e um filtro passa-faixa, são conhecidos como **multiplicadores de frequência**. Na verdade, um multiplicador de frequência pode aumentar tanto a frequência portadora como o desvio de frequência por um fator inteiro n . Dessa forma, se desejarmos um aumento de doze vezes no desvio de frequência, podemos usar um dispositivo não linear de décima segunda ordem ou dois de segunda ordem e um de terceira ordem em cascata. A saída tem um filtro passa-faixa centrado em $12\omega_c$, para que selecione somente o termo apropriado, cujos frequências portadora e desvio de frequência Δf são 12 vezes os valores originais.

Isso forma a base do modulador indireto de Armstrong. Primeiro, o NBFM é gerado aproximadamente. A seguir, a frequência NBFM é multiplicada e suas variações de amplitude, limitadas. Em geral, desejamos aumentar Δf por um fator n muito grande. Isso também aumenta a frequência portadora por n . Um aumento tão grande na frequência portadora pode não ser necessário. Se for esse o caso, podemos aplicar mistura de frequências (ver Exemplo 4.2, Fig. 4.7) para deslocar a frequência portadora até o valor desejado.

Um diagrama simplificado de um transmissor FM comercial baseado no método de Armstrong é mostrado na Fig. 5.10. A saída final deve ter uma frequência portadora de 91,2 MHz e $\Delta f = 75$ kHz. Iniciamos com NBFM, com frequência portadora $f_{c1} = 200$ kHz, gerada por um oscilador a cristal.

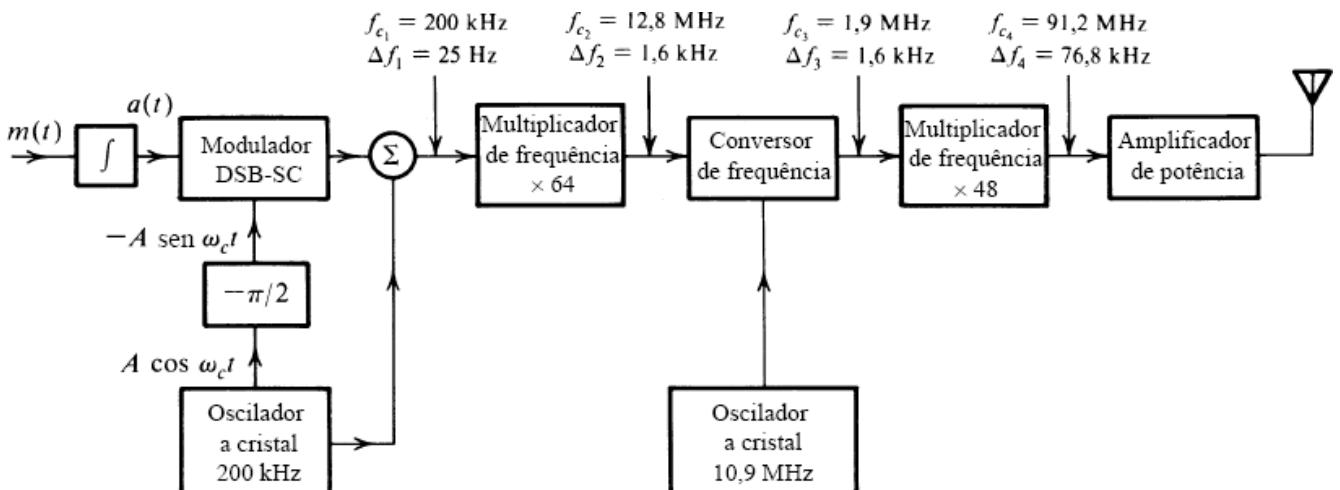


Figura 5.10 Diagrama em blocos do transmissor FM indireto de Armstrong.

Essa frequência foi escolhida devido à facilidade de construção de osciladores a cristal estáveis, assim como moduladores平衡ados, para a mesma. Para manter $\beta \ll 1$, como necessário para NBFM, o valor do desvio Δf é escolhido como 25 Hz. Para

modulação por tom, $\beta = \Delta f/f_m$. O espectro de banda base (necessário para fins de alta fidelidade) ocupa a faixa de 50 Hz a 15 kHz. A escolha de $\Delta f = 25$ Hz é razoável, pois, para o pior caso possível ($f_m = 50$), resulta em $\beta = 0,5$.

Para alcançar $\Delta f = 75$ kHz, devemos multiplicar por $75.000/25 = 3.000$. Isso pode ser feito com dois estágios multiplicadores, de 64 e 48, como indicado na Fig. 5.10, resultando em uma multiplicação total de $64 \times 48 = 3.072$, e em $\Delta f = 76,8$ kHz.* A multiplicação é efetuada por meio de dobradores e triplicadores de frequência em cascata, segundo a necessidade. Dessa forma, uma multiplicação por 64 pode ser obtida com seis dobradores em cascata, e uma multiplicação por 48, com quatro dobradores e um triplicador em cascata. No entanto, a multiplicação de $f_c = 200$ kHz por 3.072 resultaria em uma portadora de cerca de 600 MHz. Esse problema é resolvido por meio de uma translação ou conversão de frequência após o primeiro multiplicador (Fig. 5.10). A primeira multiplicação por 64 resulta em uma frequência portadora $f_{c,2} = 200$ kHz $\times 64 = 12,8$ MHz, e em um desvio de portadora $\Delta f_2 = 25$ Hz $\times 64 = 1,6$ kHz. Agora, usamos um conversor de frequência (ou misturador), com frequência portadora de 10,9 MHz, para trasladar todo o espectro. Isso resulta em uma nova frequência portadora $f_{c,3} = 12,8 - 10,9 = 1,9$ MHz. O conversor de frequência translada todo o espectro, sem alterar Δf . Assim, $\Delta f_3 = 1,6$ kHz. A multiplicação por 48 resulta em $f_{c,4} = 1,9$ H $\times 48 = 91,2$ MHz e $\Delta f_4 = 1,6$ H $\times 48 = 76,8$ kHz.

Este esquema tem a vantagem de estabilidade de frequência, mas está sujeito a ruído inerente, causado por excessiva multiplicação e distorção nas frequências modulantes mais baixas, em que o valor de $\Delta f/f_m$ não é suficientemente pequeno.

Exemplo 5.6 Discutamos a natureza da distorção inerente ao gerador de FM indireto de Armstrong.

Dois tipos de distorção surgem neste esquema: distorção de amplitude e distorção de frequência. A onda NBFM é dada por [Eq. (5.10)]:

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{FM}}(t) &= A[\cos \omega_c t - k_f a(t) \sin \omega_c t] \\ &= AE(t) \cos [\omega_c t + \theta(t)]\end{aligned}$$

em que

$$E(t) = \sqrt{1 + k_f^2 a^2(t)} \quad \text{e} \quad \theta(t) = \tan^{-1}[k_f a(t)]$$

Distorção de amplitude ocorre porque a amplitude $AE(t)$ da forma de onda modulada não é constante. Esse não é um problema sério, pois variações de amplitude podem ser eliminadas por um limitador passa-faixa, como discutido anteriormente nessa seção (ver Fig. 5.9). Idealmente, $\theta(t)$ deve ser igual a $k_f a(t)$. Contudo, na equação anterior, a fase $\theta(t)$ é

$$\theta(t) = \tan^{-1}[k_f a(t)]$$

e a frequência instantânea $\omega_i(t)$,

$$\begin{aligned}\omega_i(t) &= \dot{\theta}(t) = \frac{k_f \dot{a}(t)}{1 + k_f^2 a^2(t)} \\ &= \frac{k_f m(t)}{1 + k_f^2 a^2(t)} \\ &= k_f m(t)[1 - k_f^2 a^2(t) + k_f^4 a^4(t) - \dots]\end{aligned}$$

No caso ideal, a frequência instantânea deveria ser $k_f m(t)$. Os termos remanescentes nessa equação são a distorção.

Investiguemos o efeito dessa distorção na modulação por tom, em que $m(t) = \alpha \cos \omega_m t$, $a(t) = \alpha \sin \omega_m t / \omega_m$, e o índice de modulação é $\beta = \alpha k_f / \omega_m$:

$$\omega_i(t) = \beta \omega_m \cos \omega_m t (1 - \beta^2 \sin^2 \omega_m t + \beta^4 \sin^4 \omega_m t - \dots)$$

Dessa última equação, fica evidente que esse esquema tem distorção por harmônicos impares, sendo o terceiro harmônico o termo mais importante. Desprezando os termos restantes, a última equação fica escrita como

$$\begin{aligned}\omega_i(t) &\simeq \beta\omega_m \cos \omega_m t (1 - \beta^2 \sin^2 \omega_m t) \\ &= \underbrace{\beta\omega_m \left(1 - \frac{\beta^2}{4}\right) \cos \omega_m t}_{\text{desejado}} + \underbrace{\frac{\beta^3 \omega_m}{4} \cos 3\omega_m t}_{\text{distorção}}\end{aligned}$$

A razão entre a distorção por terceiro harmônico e o sinal desejado pode ser obtida para o gerador na Fig. 5.10. Para o estágio NBFM,

$$\beta B = \Delta f_1 = 25 \text{ Hz}$$

Logo, o pior caso ocorre na frequência modulante mais baixa. Por exemplo, se a frequência do tom for apenas 50 Hz, $\beta = 0,5$. Nesse caso, a distorção por terceiro harmônico é 1/15 ou 6,67%.

Geração Direta

Em um oscilador controlado por tensão (VCO), a frequência é controlada por uma tensão externa. A frequência de oscilação varia linearmente com a tensão de controle. Podemos gerar uma onda FM usando o sinal modulante como um sinal de controle. Isso fornece

$$\omega_i(t) = \omega_c + k_f m(t)$$

Podemos construir um VCO com um amplificador operacional e um comparador histerético,⁹ (como um circuito disparador de Schmitt, ou Schmitt trigger). Outra forma de alcançar o mesmo objetivo consiste em variar um dos parâmetros reativos (C ou L) do circuito ressonante de um oscilador. Um *diodo semicondutor com polarização reversa* atua como um capacitor cuja capacitância varia com a tensão de polarização. A capacitância desses diodos, conhecidos por diferentes nomes comerciais (por exemplo, Varicap, Varactor, Voltacap), pode ser aproximada como uma função linear da tensão de polarização $m(t)$, em um intervalo limitado. Nos osciladores Hartley ou Colpitts, por exemplo, a frequência de oscilação é dada por

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Se a capacitância C for variada pelo sinal modulante $m(t)$, ou seja, se

$$C = C_0 - km(t)$$

então

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC_0 \left[1 - \frac{km(t)}{C_0}\right]}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{LC_0} \left[1 - \frac{km(t)}{C_0}\right]^{1/2}} \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{LC_0}} \left[1 + \frac{km(t)}{2C_0}\right] \quad \frac{km(t)}{C_0} \ll 1\end{aligned}$$

Neste cálculo, utilizamos a aproximação em série de Taylor

$$(1+x)^n \approx 1 + nx \quad |x| \ll 1$$

com $n = 1/2$. Logo,

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \omega_c \left[1 + \frac{km(t)}{2C_0} \right] \text{ em que } \omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC_0}} \\ &= \omega_c + k_f m(t) \quad \text{com} \quad k_f = \frac{k\omega_c}{2C_0} \end{aligned}$$

Como $C = C_0 - km(t)$, o máximo desvio de capacitância é

$$\Delta C = km_p = \frac{2k_f C_0 m_p}{\omega_c}$$

Portanto,

$$\frac{\Delta C}{C_0} = \frac{2k_f m_p}{\omega_c} = \frac{2\Delta f}{f_c}$$

Na prática, $\Delta f/f_c$ é, em geral, pequeno; logo, ΔC é uma pequena fração de C_0 , o que ajuda a limitar a distorção harmônica causada pela aproximação empregada nessa dedução.

Podemos, também, gerar FM diretamente por meio de um reator com núcleo saturável, no qual a indutância de uma bobina é variada por uma corrente através de uma segunda bobina (em volta do mesmo núcleo). Isso resulta em um indutor variável, cuja indutância é proporcional à corrente na segunda bobina.

A geração direta de FM produz, em geral, um desvio de frequência suficiente e requer pouca multiplicação de frequência. Contudo, a estabilidade de frequência desse método é pobre. Na prática, é feito uso de realimentação para estabilizar a frequência. A frequência de saída é comparada com uma frequência constante gerada por um oscilador a cristal estável. Um sinal de erro (erro na frequência) é detectado e realimentado ao oscilador para corrigir o erro.

Propriedades da Modulação em Ângulo

A FM (como modulação em ângulo, em geral) tem certas propriedades características que recomendam sua aplicação em diversos sistemas de rádio. A largura de banda de transmissão de sistemas AM não pode ser alterada. Por isso, sistemas AM não são capazes de trocar potência de sinal por largura de banda de transmissão. Sistemas baseados em modulação por codificação de pulso (PCM) (Capítulo 6) têm essa capacidade, assim como sistemas de modulação em ângulo. Na modulação em ângulo, a largura de banda de transmissão pode ser ajustada pelo valor de Δf . Para sistemas de modulação em ângulo, a SNR é aproximadamente proporcional ao quadrado da largura de banda de transmissão B_T . Em PCM, a SNR varia exponencialmente com B_T e, portanto, é superior à modulação em ângulo.

Exemplo 5.7 Projetemos um modulador FM indireto para gerar um sinal FM com frequência portadora 97,3 MHz e $\Delta f = 10,24$ kHz. Há disponibilidade de um gerador NBFM com $f_{c1} = 20$ kHz e $\Delta f = 5$ Hz. Somente dobradores de frequência podem ser usados como multiplicadores. Adicionalmente, para mistura de frequência, há disponibilidade de um oscilador local (LO) com frequência ajustável entre 400 e 500 kHz.

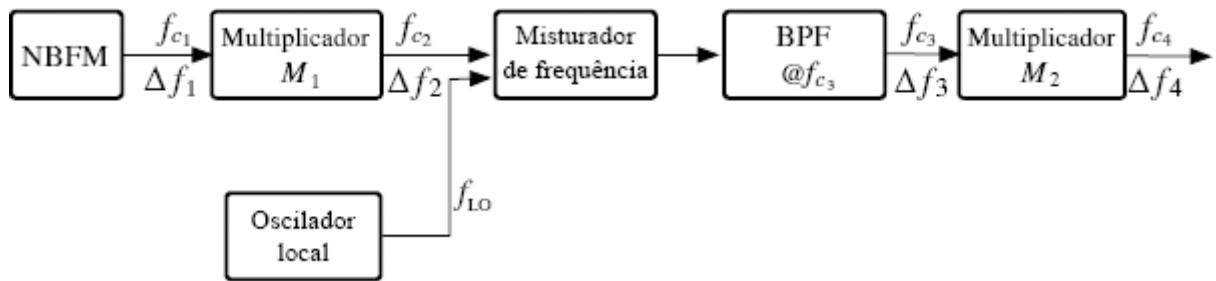


Figura 5.11 Projeto de um modulador indireto de Armstrong.

O modulador é mostrado na Fig. 5.11. Devemos determinar M_1 , M_2 e f_{LO} . Primeiro, o gerador NBFM produz

$$f_{c_1} = 20.000 \quad \text{e} \quad \Delta f_1 = 5$$

O WBFM final deve ter

$$f_{c_4} = 97,3 \times 10^6 \quad \Delta f_4 = 10.240$$

Calculemos, agora, o fator total de multiplicação de frequência:

$$M_1 \cdot M_2 = \frac{\Delta f_4}{\Delta f_1} = 2048 = 2^{11} \quad (5.25)$$

Como apenas dobradores de frequência podem ser utilizados, temos três equações:

$$\begin{aligned} M_1 &= 2^{n_1} \\ M_2 &= 2^{n_2} \\ n_1 + n_2 &= 11 \end{aligned}$$

Temos, ainda,

$$f_{c_2} = 2^{n_1} f_{c_1} \quad \text{e} \quad f_{c_4} = 2^{n_2} f_{c_3}$$

Para determinar f_{LO} , há três relações possíveis:

$$f_{c_3} = f_{c_2} \pm f_{\text{LO}} \quad \text{e} \quad f_{c_3} = f_{\text{LO}} - f_{c_2}$$

Cada uma deve ser testada para estabelecer qual delas cai na faixa

$$400.000 \leq f_{\text{LO}} \leq 500.000$$

(a) Primeiro, testemos $f_{c_3} = f_{c_2} - f_{\text{LO}}$. Isso nos leva a

$$\begin{aligned} 97,3 \times 10^6 &= 2^{n_2} (2^{n_1} f_{c_1} - f_{\text{LO}}) \\ &= 2^{n_1+n_2} f_{c_1} - 2^{n_2} f_{\text{LO}} \\ &= 2^{11} 20 \times 10^3 - 2^{n_2} f_{\text{LO}} \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$f_{\text{LO}} = 2^{-n_2} \left(4,096 \times 10^7 - 9,73 \times 10^7 \right) < 0$$

Este valor está fora da faixa de frequência do oscilador local.

(b) A seguir, testemos $f_{c3} = f_{c2} + f_{\text{LO}}$, que nos leva a

$$\begin{aligned} 97,3 \times 10^6 &= f_{\text{LO}} - 2^{n_2} 2^{n_1} f_{c_1} \\ &= 2^{n_2} f_{\text{LO}} - 2^{11} (20 \times 10^3) \end{aligned}$$

Assim, temos

$$f_{\text{LO}} = 2^{-n_2} \left(5,634 \times 10^7 \right)$$

Se $n_2 = 7$, $f_{\text{LO}} = 440$ kHz, que está na faixa de valores realizáveis com o oscilador local.

(c) Se escolhermos $f_{c3} = f_{\text{LO}} - f_{c2}$, teremos

$$\begin{aligned} 97,3 \times 10^6 &= f_{\text{LO}} - 2^{n_2} 2^{n_1} f_{c_1} \\ &= 2^{n_2} f_{\text{LO}} - 2^{11} (20 \times 10^3) \end{aligned}$$

Portanto, temos

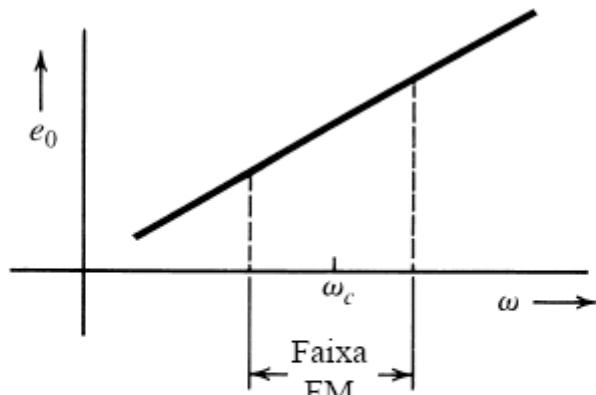
$$f_{\text{LO}} = 2^{-n_2} \left(13,826 \times 10^7 \right)$$

Nenhum inteiro n_2 levará a um valor realizável de f_{LO} .

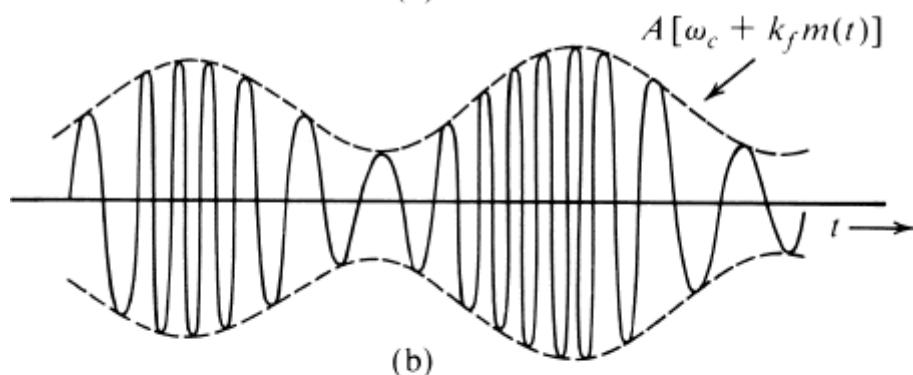
Assim, o projeto final é $M_1 = 16$, $M_2 = 128$ e $f_{\text{LO}} = 440$ kHz.

5.4 DEMODULAÇÃO DE SINAIS FM

A informação contida em sinais FM reside na frequência instantânea $\omega_i = \omega_c + k_f m(t)$. Portanto, um circuito seletivo em frequência, com função de transferência $|H(f)| = 2a\pi f + b$ na faixa FM, produziria uma saída proporcional à frequência instantânea (Fig. 5.12a).^{*} Existem diversos circuitos com tais características. O mais simples é um diferenciador ideal, com função de transferência $j2\pi f$.



(a)



(b)

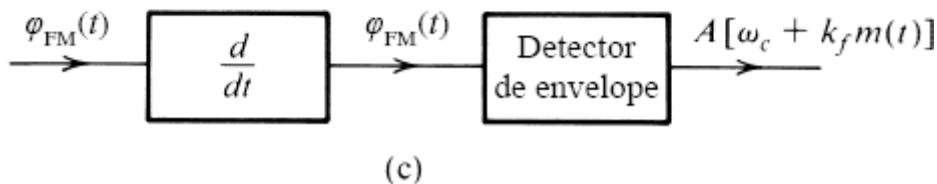


Figura 5.12 (a) Resposta do demodulador de frequência. (b) Saída de um diferenciador para a onda FM de entrada. (c) Demodulação FM por diferenciação direta.

Se aplicarmos $\varphi_{\text{FM}}(t)$ a um diferenciador ideal, a saída será

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_{\text{FM}}(t) &= \frac{d}{dt} \left\{ A \cos \left[\omega_c t + k_f \int_{-\infty}^t m(\alpha) d\alpha \right] \right\} \\ &= A [\omega_c + k_f m(t)] \sin \left[\omega_c t + k_f \int_{-\infty}^t m(\alpha) d\alpha - \pi \right]\end{aligned}\quad (5.26)$$

Tanto a amplitude como a frequência do sinal são moduladas (Fig. 5.12); o envelope é $A[\omega_c + k_f m(t)]$. Como $\Delta\omega = k_f m_p < \omega_c$, temos $\omega_c + k_f m(t) > 0$ para todo t , e $m(t)$ pode ser obtido com a detecção de envelope de (Fig. 5.12c).

A amplitude A da portadora FM que chega ao receptor deve ser constante. Caso a amplitude A não seja constante, mas uma função do tempo, no lado direito da Eq. (5.26) haverá um termo adicional contendo dA/dt . Mesmo que este termo seja desprezível, o envelope de $\varphi_{\text{FM}}(t)$ será $A(t)[\omega_c + k_f m(t)]$ e a saída do detector de envelope será proporcional a $m(t)A(t)$, o que ainda causará distorção. Portanto, é essencial manter A constante. Diversos fatores, como ruído de canal e desvanecimento, fazem A variar. A variação em A deve ser suprimida por meio de um limitador passa-faixa (discutido na Seção 5.3) antes que o sinal seja aplicado ao detector FM.

Demoduladores de Frequência Práticos

O diferenciador representa apenas uma forma de converter a variação de frequência de sinais FM em variações de amplitude que, subsequentemente, podem ser detectadas por um detector de envelope. Podemos usar um amplificador operacional como diferenciador no receptor FM. O papel do diferenciador pode ser substituído por um sistema linear cuja resposta de frequência

contenha um segmento linear com inclinação positiva. A aproximação da inclinação linear ideal na Fig. 5.12a constitui o método conhecido como **deteção de inclinação**.

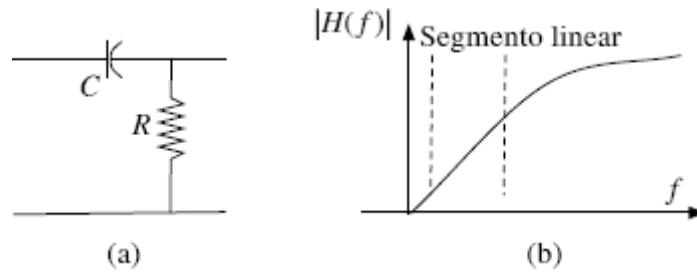


Figura 5.13 (a) Filtro passa-altos RC . (b) Segmento de inclinação positiva na resposta de amplitude.

Um dispositivo simples pode ser o filtro passa-altos RC da Fig. 5.13. A resposta de frequência RC é

$$H(f) = \frac{j2\pi fRC}{1 + j2\pi fRC} \approx j2\pi fRC \quad \text{se} \quad 2\pi fRC \ll 1$$

Assim, se o parâmetro RC for muito pequeno, tal que seu produto pela frequência portadora $\omega_c RC \ll 1$, o filtro RC aproxima um diferenciador.

De modo similar, um simples circuito sintonizado RLC seguido por um detector de envelope também pode funcionar como detector de frequência, pois, abaixo da frequência de ressonância $\omega_o = 1/\sqrt{LC}$, sua resposta de frequência $|H(f)|$ aproxima uma inclinação linear. Assim, o projeto do receptor requer

$$\omega_c < \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Como a operação é feita com a inclinação de $|H(f)|$, esse método também é conhecido como **deteção de inclinação**. Contudo, como a inclinação de $|H(f)|$ é linear somente em uma faixa muito estreita, a saída contém considerável distorção. Essa deficiência pode ser parcialmente corrigida por um **discriminador balanceado**, formado por dois detectores de inclinação. Outro demodulador balanceado, o **detector de razão**, largamente utilizado no passado, oferece melhor proteção contra variações de amplitude que discriminadores. Durante muitos anos, detectores de razão foram o padrão em quase todos os receptores FM.¹⁰

Detectores de cruzamento do zero também são utilizados devido aos avanços em circuitos digitais integrados. O primeiro passo consiste em usar o amplificador limitador da Fig. 5.9a para gerar o pulso retangular de saída na Fig. 5.9c. O resultante trem de pulsos retangulares de largura variável pode, então, ser aplicado para disparar um contador digital, que é um **contador de frequência** projetado para medir a frequência instantânea a partir do número de cruzamentos do zero. A taxa de cruzamentos do zero é igual à frequência instantânea do sinal de entrada.

Demodulação FM via PLL

Consideremos uma PLL travada ao sinal de entrada $\sin[\omega_c t + \theta_i(t)]$, e um sinal de erro $e_o(t)$. Quando o sinal de entrada é um sinal FM,

$$\theta_i(t) = k_f \int_{-\infty}^t m(\alpha) d\alpha + \frac{\pi}{2} \quad (5.27)$$

e,

$$\theta_o(t) = k_f \int_{-\infty}^t m(\alpha) d\alpha + 0,5\pi - \theta_e(t)$$

Com a PLL travada, podemos presumir um pequeno erro de frequência $\dot{\theta}_e(t) \approx 0$. Assim, o sinal de saída do filtro de malha é

$$e_o(t) = \frac{1}{c} \dot{\theta}_o(t) = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left[k_f \int_{-\infty}^t m(\alpha) d\alpha + 0,5\pi - \theta_e(t) \right] \simeq \frac{k_f}{c} m(t) \quad (5.28)$$

Portanto, a PLL atua como um demodulador FM. Se o sinal de entrada for uma onda PM, $e_o(t) = k_p/c$. Neste caso, é necessário integrar $e_o(t)$ para que obtenhamos o desejado sinal $m(t)$.

Para uma análise mais precisa do comportamento da PLL como demodulador FM, consideremos o caso de um pequeno erro (modelo linear da PLL), com $H(s) = 1$. Para esse caso, a análise de realimentação da PLL sob pequeno erro do Capítulo 4 passa a

$$\Theta_o(s) = \frac{AK H(s)}{s + AK H(s)} \Theta_i(s) = \frac{AK}{s + AK} \Theta_i(s)$$

Se $E_o(s)$ e $M(s)$ forem as transformadas de Laplace de $e_o(t)$ e $m(t)$, respectivamente, das Eqs. (5.27) e (5.28), obtemos

$$\Theta_i(s) = \frac{k_f M(s)}{s} \quad \text{e} \quad s \Theta_o(s) = c E_o(s)$$

Logo,

$$E_o(s) = \left(\frac{k_f}{c} \right) \frac{AK}{s + AK} M(s)$$

Portanto, a saída da PLL $e_o(t)$ é uma versão distorcida de $m(t)$, e é equivalente à saída de um circuito de um polo simples (como um circuito RC simples), com função de transferência $k_f AK/c (s + AK)$, tendo $m(t)$ como entrada. Para reduzir a distorção, devemos escolher AK bem acima da largura de banda de $m(t)$, de modo que $e_o(t) \approx k_f m(t)/c$.

Na presença de pequeno ruído, o comportamento da PLL é comparável ao de um discriminador de frequência. A vantagem da PLL em relação ao discriminador de frequência deixa de existir somente quando o ruído é grande.

5.5 EFEITOS DE DISTORÇÃO NÃO LINEAR E INTERFERÊNCIA

Imunidade da Modulação em Ângulo a Não Linearidades

Uma propriedade muito útil da modulação em ângulo é sua amplitude constante, que a torna menos susceptível a não linearidades. Consideremos, por exemplo, um amplificador com distorção não linear de segunda ordem, cujas entrada e saída estão relacionadas por

$$y(t) = a_0 + a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + \cdots + a_n x^n(t)$$

Fica claro que o primeiro termo é o desejado termo de amplificação do sinal, enquanto os termos restantes são as indesejadas distorções não lineares. Para o sinal modulado em ângulo

$$x(t) = A \cos [\omega_c t + \psi(t)]$$

Podemos empregar identidades trigonométricas para reescrever a saída não ideal $y(t)$ do sistema como

$$\begin{aligned} y(t) &= c_o + c_1 \cos [\omega_c t + \psi(t)] + c_2 \cos [2\omega_c t + 2\psi(t)] \\ &\quad + \cdots + c_n \cos [n\omega_c t + n\psi(t)] \end{aligned}$$

Um valor suficientemente grande de ω_c torna as componentes de $y(t)$ separáveis no domínio da frequência; assim, um filtro passa-faixa centrado em ω_c e largura de banda igual a B_{FM} (ou B_{PM}) pode extrair a desejada componente de sinal FM $c_1 \cos [\omega_c t + \psi(t)]$ sem distorção. Isso mostra que sinais modulados em ângulos são imunes às distorções não lineares.

Em AM, uma não linearidade similar causa não apenas modulações indesejadas, com frequências portadoras $n\omega_c$, mas também distorção do sinal desejado. Por exemplo, se um sinal DSB-SC $m(t) \cos \omega_c t$ passar por uma não linearidade $y(t) = a x(t) + b x^3(t)$, a saída será

$$\begin{aligned}
y(t) &= a m(t) \cos \omega_c t + b m^3(t) \cos^3 \omega_c t \\
&= \left[a m(t) + \frac{3b}{4} m^3(t) \right] \cos \omega_c t + \frac{b}{4} m^3(t) \cos 3\omega_c t
\end{aligned}$$

Se este sinal for aplicado a um filtro passa-faixa, a saída será $[am(t) + (3b/4)m^3(t)]\cos \omega_c t$. Notemos a componente de distorção $(3b/4)m^3(t)$ que aparece junto com o sinal desejado $am(t)$.

Imunidade à não linearidade é a principal razão do uso de modulação em ângulo em sistemas de rádio de micro-ondas, nas quais os níveis de potência são elevados. Isso requer amplificadores de micro-ondas de classe C altamente eficientes. Adicionalmente, a amplitude constante dá a FM uma espécie de imunidade contra desvanecimento rápido. O efeito de variações de amplitude causadas por desvanecimento rápido pode ser eliminado com o uso de controle automático de ganho e limitação em banda passante. Essas vantagens tornaram a FM atraente para a tecnologia por trás da primeira geração (1G) de sistemas de telefonia celular.

As mesmas vantagens também tornam FM atraente para sistemas de rádio de micro-ondas. Nos sistemas legados de telefonia de longa distância, vários canais são multiplexados por meio de sinais SSB para formar sinais de portadora L. Os sinais multiplexados são modulados em frequência e transmitidos em sistemas de rádio de micro-ondas com muitos enlaces em tandem. Contudo, nessa aplicação, FM não é usado para reduzir efeitos de ruído, mas para tirar proveito de outras vantagens associadas à amplitude constante; assim, é usado NBFM em vez de WBFM.

Efeito de Interferência

A modulação em ângulo, quando comparada com AM, também é menos vulnerável a interferências de pequenos sinais entre canais adjacentes.

Consideremos o simples caso de interferência entre uma portadora não modulada $A \cos \omega_c t$ e outra senoide $I \cos(\omega_c + \omega)t$. O sinal recebido $r(t)$ é

$$\begin{aligned}
r(t) &= A \cos \omega_c t + I \cos(\omega_c + \omega)t \\
&= (A + I \cos \omega t) \cos \omega_c t - I \sin \omega t \sin \omega_c t \\
&= E_r(t) \cos [\omega_c t + \psi_d(t)]
\end{aligned}$$

em que

$$\psi_d(t) = \tan^{-1} \frac{I \sin \omega t}{A + I \cos \omega t}$$

Quando o sinal interferente é pequeno em comparação com a portadora ($I \ll A$),

$$\psi_d(t) \simeq \frac{I}{A} \sin \omega t \quad (5.29)$$

A fase de $E_r(t) \cos [\omega_c t + \psi_d(t)]$ é $\dot{\psi}_d(t)$ e a frequência instantânea, $\omega_c + \dot{\psi}_d(t)$. Se o sinal $E_r(t) \cos [\omega_c t + \psi_d(t)]$ for aplicado a um demodulador de fase ideal, a saída $y_d(t)$ será $\dot{\psi}_d(t)$. De modo similar, a saída $y_d(t)$ de um demodulador de frequência ideal será $\dot{\psi}_d(t)$. Logo,

$$y_d(t) = \frac{I}{A} \sin \omega t \quad \text{para PM} \quad (5.30)$$

$$y_d(t) = \frac{I\omega}{A} \cos \omega t \quad \text{para FM} \quad (5.31)$$

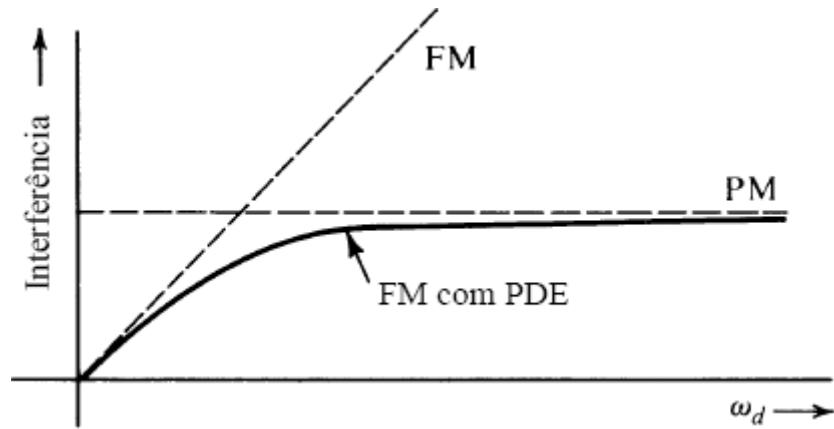


Figura 5.14 Efeito de interferência em PM, FM e FM com pré-ênfase/deênfase (PDE).

Observemos que, nos dois casos, a saída de interferência é inversamente proporcional à amplitude da portadora A . Assim, quanto maior a amplitude da portadora A , menor o efeito da interferência. Isso difere muito do que se passa em sinais AM, nos quais a saída de interferência independe da amplitude da portadora^{*}. Portanto, no que diz respeito à supressão de interferência fraca ($I \ll A$), sistemas com modulação em ângulo são muito melhores que sistemas AM.

Devido à supressão de interferência fraca em FM, quando ouvimos rádios FM, observamos o que é conhecido como **efeito de captura**. No caso de dois transmissores em que a separação entre as frequências portadoras é menor que a faixa de áudio, em vez de interferência, observamos que a portadora mais intensa efetivamente suprime (captura) a mais fraca. Testes subjetivos mostraram que, em sinais de áudio, mesmo um baixo nível de interferência de 35 dB pode causar efeitos indesejáveis. Portanto, em AM, o nível de interferência deve ser mantido abaixo de 35 dB. No caso de FM, devido ao efeito de captura, basta que o nível de interferência fique abaixo de 6 dB.

A Fig. 5.14 mostra curvas da amplitude da interferência (I/A para PM e $I\omega/A$ para FM) em função de ω na saída do receptor. Em PM, a amplitude da interferência é constante para todo ω e, no caso de FM, aumenta linearmente com ω .^{**}

Interferência Devido a Ruído de Canal

Em um sinal modulado em ângulo, o ruído de canal atua como uma interferência. Consideremos a forma mais comum de ruído, o ruído branco, que tem densidade espectral de potência constante. Esse ruído pode ser considerado como a soma de senoides de todas as frequências na banda. Todas as componentes têm a mesma amplitude (devido à densidade uniforme). Isso significa que I é constante para todo ω ; o espectro da amplitude da interferência na saída do receptor; e mostrado na Fig. 5.14. O espectro da amplitude da interferência é constante para PM e, no caso de FM, cresce linearmente com ω .

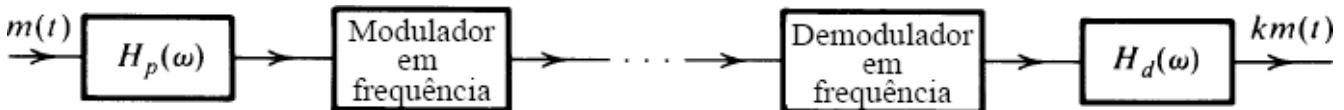
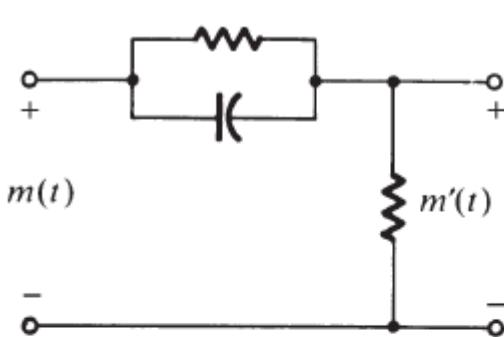
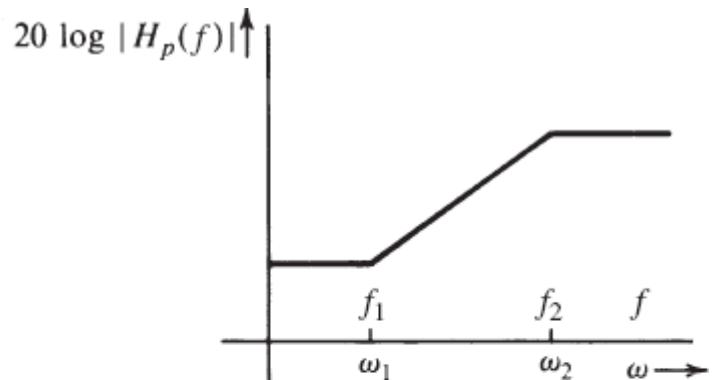


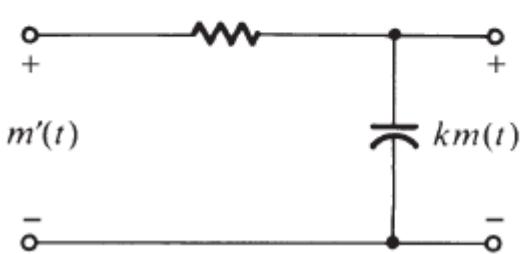
Figura 5.15 Pré-ênfase e deênfase em um sistema FM.



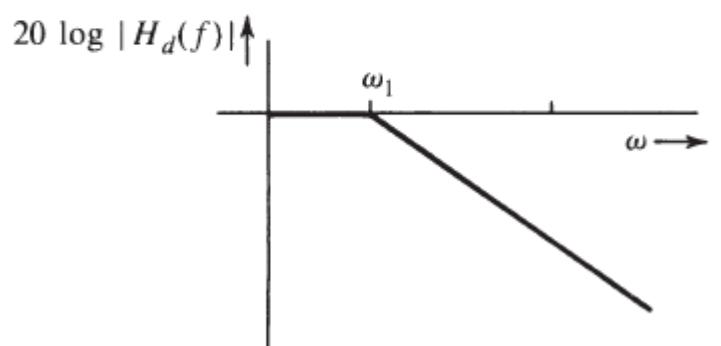
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.16 (a) Filtro de pré-ênfase e (b) sua resposta de frequência. (c) Filtro de deênfase e (d) sua resposta de frequência.

Pré-Ênfase e Deênfase na Difusão FM

A Fig. 5.14 mostra que, em FM, a interferência (ruído) aumenta linearmente com a frequência, e a potência de ruído na saída do receptor se concentra nas frequências altas. Uma análise da Fig. 4.18b mostra que a densidade espectral de potência (PSD) de um sinal de áudio $m(t)$ se concentra nas frequências abaixo de 2,1 kHz. Assim, a PSD de ruído se concentra nas frequências altas, nas quais $m(t)$ é mais fraco. Isso pode parecer uma catástrofe. Contudo, na verdade, nessa situação há uma oportunidade velada para uma grande redução do ruído. O processo, ilustrado na Fig. 5.15, funciona da seguinte maneira: no transmissor, as componentes mais fracas do sinal de áudio $m(t)$ (acima de 2,1 kHz) são amplificadas antes da modulação por um filtro de **pré-ênfase**, com função de transferência $H_p(f)$. No receptor, a saída do demodulador é aplicada a um filtro de **deênfase**, com função de transferência $H_d(f) = 1/H_p(f)$. Dessa forma, o filtro de deênfase desfaz a pré-ênfase atenuando (deemfatizando) as componentes de altas frequências (acima de 2,1 kHz) e, assim, restaura o sinal original $m(t)$. O ruído, no entanto, entra no canal e, portanto, não passa por pré-ênfase (amplificação). Todavia, o ruído passa pelo filtro de deênfase, que atenua as componentes de altas frequências, em que está concentrada a maior parte da potência de ruído (Fig. 5.14). O processo de pré-ênfase/deênfase (PDE) preserva o sinal desejado, mas reduz a potência de ruído consideravelmente.

Filtros de Pré-Ênfase e de Deênfase

A Fig. 5.14 oferece uma oportunidade para pré-ênfase. Nas frequências baixas, FM é menos sujeito a interferência que PM; nas frequências altas, ocorre o oposto. Se pudermos fazer nosso sistema se comportar como FM nas frequências baixas e como PM nas frequências altas, teremos o melhor dos dois mundos. Na difusão comercial, isso é feito com um sistema (Fig. 5.15) de filtros de pré-ênfase (antes da modulação) $H_p(f)$ e deênfase (após a modulação) $H_d(f)$, mostrados na Fig. 5.16. A frequência f_1 é de 2,1 kHz e f_2 , tipicamente 30 kHz ou mais (bem acima da faixa de áudio), de modo que f_2 fique fora da faixa de interesse. Esses filtros podem ser realizados por simples circuitos RC (Fig. 5.16). A escolha de $f_1 = 2,1$ kHz foi, aparentemente, feita com base na experiência. Foi observado que essa escolha de f_1 mantinha a mesma amplitude de pico m_p com ou sem pré-ênfase.¹¹ Esse resultado satisfazia a condição de uma largura de banda de transmissão fixa.

A função de transferência de pré-ênfase é

$$H_p(f) = K \frac{j2\pi f + \omega_1}{j2\pi f + \omega_2} \quad (5.32a)$$

em que K , o ganho, é tomado com o valor ω_2/ω_1 . Assim,

$$H_p(f) = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \frac{j2\pi f + \omega_1}{j2\pi f + \omega_2} \quad (5.32b)$$

Para $2\pi f \ll \omega_1$,

$$H_p(f) \simeq 1 \quad (5.32c)$$

Para frequências $\omega_1 \ll 2\pi f \ll \omega_2$,

$$H_p(f) \simeq \frac{j2\pi f}{\omega_1} \quad (5.32d)$$

Portanto, nas frequências intermediárias (2,1 – 15 kHz), o circuito de pré-ênfase atua como um diferenciador, o que, efetivamente, transforma o esquema em PM nessas frequências. Isso significa que FM com PDE é FM na faixa de frequências do sinal modulante, de 0 a 2,1 kHz, e quase PM na faixa de 2,1 kHz a 15 kHz, como desejado.

O filtro de deênfase $H_d(f)$ é dado por

$$H_d(f) = \frac{\omega_1}{j2\pi f + \omega_1}$$

Notemos que, para $2\pi f \ll \omega_2$, $H_p(f) \simeq (j2\pi f + \omega_1)/\omega_1$. Logo, $H_p(f) H_d(f) \simeq 1$ na faixa de frequências de 0 a 15 kHz.

Por motivos históricos e práticos, filtros ótimos PDE não são usados na vida real. Pode ser mostrado que a PDE aumenta a SNR em 13,27 dB (uma razão de potência de 21,25).

O efeito colateral benéfico de PDE é uma melhora na característica de interferência. Como a interferência (sinais indesejados e estações vizinhas) entra após o estágio transmissor, passa apenas pela operação de deênfase e não pela de amplificação ou pré-ênfase. Assim, nas frequências acima de 2,1 kHz, as amplitudes de interferências sofrem atenuação quase linear com a frequência.

O método PDE de redução de ruído não se limita à difusão FM. Também é usado na gravação de áudio e na gravação (análogica) fonográfica, nas quais o ruído de chiado também se concentra nas frequências altas. Um som de chiado claro é causado por irregularidades no material de gravação. Sistemas **Dolby de redução de ruído** para fitas de áudio têm o mesmo princípio de funcionamento, embora o sistema Dolby-A seja um pouco mais elaborado. Nos sistemas Dolby-B e C, a banda é dividida em duas sub-bandas (abaixo e acima de 3 kHz, em vez de 2,1 kHz). No sistema Dolby-A, projetado para uso comercial, as bandas são divididas em quatro sub-bandas (abaixo de 80 Hz, 80 Hz-3 kHz, 3-9 kHz e acima de 9 kHz). O grau de pré-ênfase é otimizado para cada banda.

Também podemos usar PDE na difusão AM para melhorar a SNR de saída. Contudo, na prática, isso não é feito por várias razões. Primeira, em AM, a amplitude do ruído de saída é constante com a frequência e não aumenta linearmente, como em FM. Portanto, a deênfase não resulta em um ganho tão grande em AM quanto no FM. Segunda, a introdução de PDE obrigaría modificações nos receptores já em uso. Terceira, o aumento da amplitude das componentes de alta frequência (pré-ênfase) aumentaria a interferência com estações adjacentes (esse problema não ocorre em FM). Além disso, um aumento na razão de desvio de frequência β nas altas frequências tornaria o projeto do detector mais difícil.

5.6 RECEPTORES ANALÓGICOS AM/FM SUPER-HETERÓDINOS

O receptor de rádio usado em sistemas de difusão AM e FM é chamado receptor **super-heteródino** (Fig. 5.17). O receptor consiste em uma seção de RF (radiofrequência), um conversor de frequência (Exemplo 4.2), um amplificador de frequência intermediária (FI), um detector de envelope e um amplificador de áudio.

A seção de RF consiste basicamente em um filtro sintonizável e em um amplificador que pega a estação desejada sintonizando o filtro àpropriada faixa de frequências. A próxima seção, o misturador (conversor) de frequências, traslada a portadora de ω_c a uma frequência FI fixa ω_{FI} (ver Exemplo 4.2 para conversão de frequências). Para esse fim, o receptor usa um oscilador local, cuja frequência f_{LO} é exatamente um valor f_{FI} maior que a frequência portadora de entrada, f_c ; ou seja,

$$f_{LO} = f_c + f_{FI}$$

A sintonia simultânea do oscilador local e do filtro de RF sintonizável é feita por um único botão de sintonia. Capacitores de sintonia nos dois circuitos são agrupados e projetados de modo que a frequência de sintonia do oscilador local seja sempre f_{FI} Hz

acima da frequência de sintonia f_c do filtro de RF. Isso significa que cada estação sintonizada é trasladada a uma frequência intermediária fixa de f_{FI} Hz pelo conversor de frequências, para processamento posterior na FI.

Essa estrutura do receptor super-heteródino é largamente utilizada na maioria dos sistemas de difusão. As frequências intermediárias são escolhidas em 455 kHz (rádio AM), 10,7 MHz (rádio FM) e 38 MHz (recepção de TV).

Como descoberto por Armstrong para sinais AM, a translação de todas as estações a uma frequência intermediária fixa (para AM, $f_{FI} = 455$ kHz) nos permite obter seletividade adequada. É difícil projetar filtros passa-faixa precisos com 10 kHz de largura de banda (espectro do sinal de áudio modulado) quando a frequência central f_c é muito alta. Isso é particularmente verdadeiro para o caso de filtros sintonizáveis. Assim, o filtro de RF não é capaz de oferecer seletividade adequada para evitar canais adjacentes. Contudo, quando trasladado a uma frequência intermediária por um conversor, o sinal é ainda amplificado por um amplificador de FI (em geral, um amplificador de três estágios), que tem boa seletividade. Isso é possível porque a frequência FI é razoavelmente baixa; além disso, a frequência central do amplificador de FI é fixa e sintonizada na fábrica. Portanto, a seção de FI é capaz de, efetivamente, eliminar a interferência entre canais adjacentes, devido à alta seletividade. Essa seção também amplifica o sinal para a detecção de envelope.

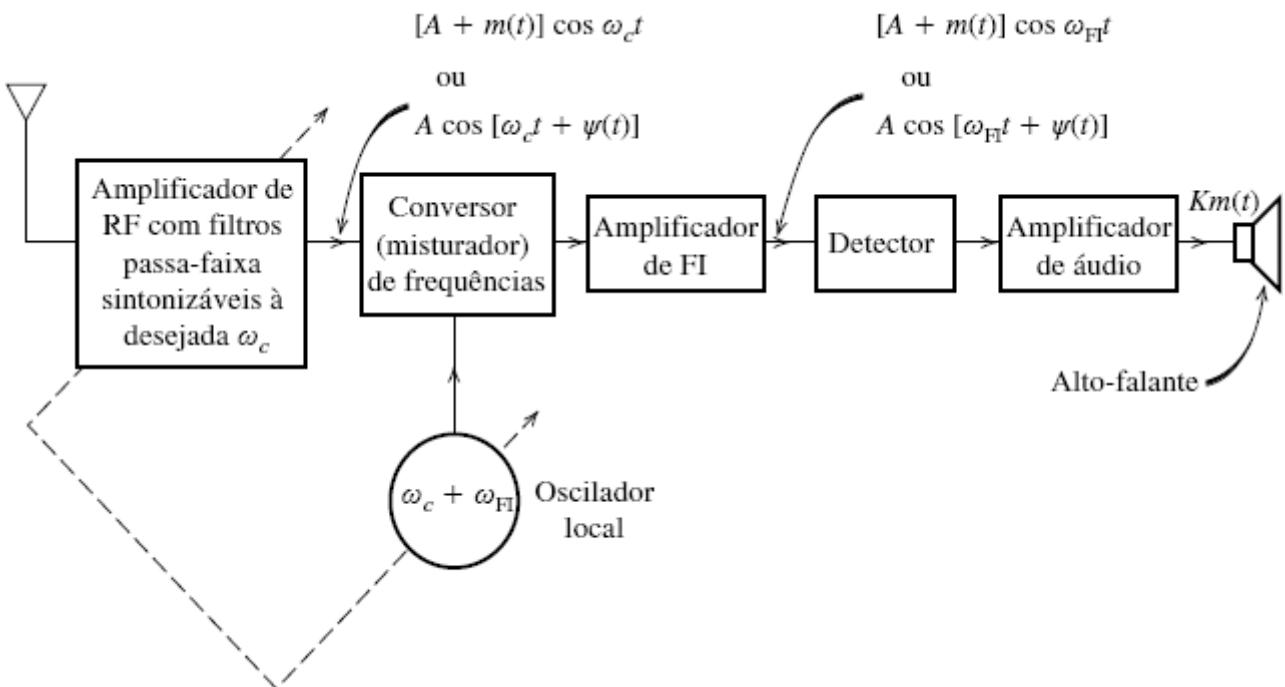


Figura 5.17 Receptor super-heteródino.

Na verdade, toda a seletividade é obtida na seção de FI; a seção de RF tem um papel secundário. A principal função da seção de RF é a supressão de frequência imagem. Como observado no Exemplo 4.2, a saída do misturador ou conversor consiste em componentes da diferença entre a frequência que chega ao receptor (f_c) e a do oscilador local (F_{LO}) (ou seja, $f_{FI} = |f_{LO} - f_c|$). Agora, consideremos o exemplo de AM. Se a frequência portadora recebida for $f_c = 1000$ kHz, então $f_{LO} = f_c + f_{RF} = 1000 + 455 = 1455$ kHz. Contudo, outra portadora, com $f'_c = 1455 + 455 = 1910$ kHz, também será selecionada, pois a diferença $f'_c - f_{LO}$ é 455 kHz. Dizemos que a estação em 1910 kHz é a **imagem** da estação em 1000 kHz. Estações AM separadas em frequência por $2f_{FI} = 910$ kHz são denominadas **estações-imagem** e as duas apareceriam simultaneamente na saída de FI, se não fosse pela presença do filtro de RF na entrada do receptor. O filtro de RF pode ter seletividade pobre para estações adjacentes separadas por 10 kHz, mas tem seletividade razoável para estações separadas por 910 kHz. Assim, quando desejamos sintonizar uma estação em 1000 kHz, o filtro de RF, sintonizado em 1000 kHz, provê supressão adequada da estação-imagem em 1910 kHz.

Para converter a frequência portadora de entrada à FI, o receptor (Fig. 5.17) utiliza um oscilador local de frequência f_{LO} maior que a frequência portadora; por isso, recebe a denominação de receptor super-heteródino. Escolhemos f_{LO} maior que f_c porque isso resulta em menor razão de sintonia, considerando as frequências máxima e mínima de sintonia para o oscilador local. As frequências de difusão AM residem na faixa de 530 a 1710 kHz. A faixa da f_{LO} super-heteródina é de 1005 a 2055 kHz (razão de 2,045); a faixa da f_{LO} sub-heteródina é de 95 a 1145 kHz (razão de 12,05). É muito mais fácil projetar um oscilador sintonizável quando a razão de frequência é menor.

Não podemos deixar de ressaltar a importância do princípio super-heteródino na difusão de rádio e televisão. Inicialmente (antes de 1919), toda a seletividade para separar estações adjacentes estava no filtro de RF. Como, em geral, esse filtro tinha seletividade pobre, era necessário utilizar vários estágios (diversos circuitos ressonantes) em cascata para obter uma seletividade adequada. Nos primeiros receptores, cada filtro era sintonizado individualmente. A sintonia de uma estação, com a sincronização de todos os circuitos ressonantes, era uma tarefa tediosa e demorada. Isso foi facilitado com o agrupamento de capacitores variáveis, montados em um mesmo chassis, girado por um botão. Contudo, capacitores variáveis são volumosos e há um limite ao número de capacitores que podem ser agrupados. Esses fatores limitavam a seletividade de receptores. Em

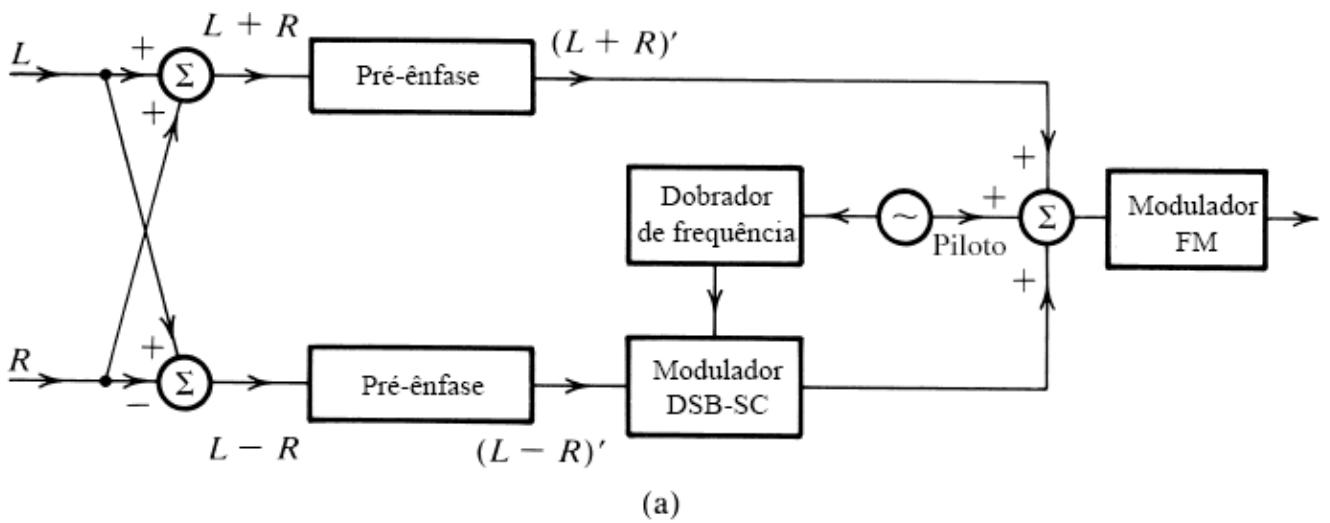
consequência, era necessária grande separação entre frequências portadoras adjacentes, o que resultava em menor número de bandas de frequências. O receptor super-heteródino permitiu a acomodação de muito mais estações de rádio.

5.7 SISTEMAS DE DIFUSÃO FM

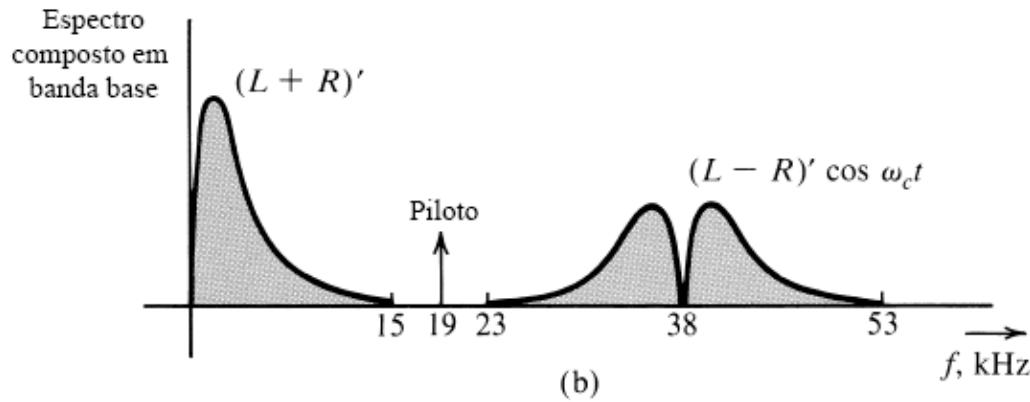
A FCC alocou a faixa de frequências de 88 a 108 MHz para a difusão FM, com separação de 200 kHz entre estações adjacentes^{*} e um desvio máximo de frequência $\Delta f = 75$ kHz.

Um receptor FM monofônico é idêntico ao receptor AM super-heteródino mostrado na Fig. 5.17, exceto que a frequência intermediária é 10,7 MHz, e o detector de envelope é substituído por uma PLL ou um discriminador de frequência seguido de um circuito de deênfase.

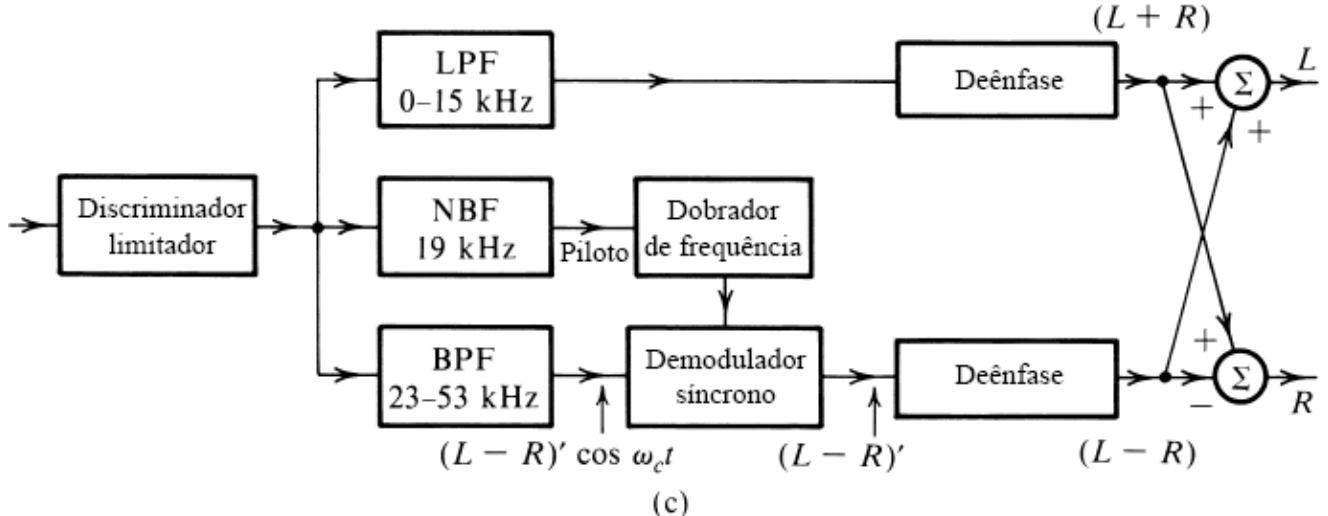
Inicialmente, as transmissões FM eram monofônicas. Transmissão FM estereofônica, na qual dois sinais de áudio – L (microfone da esquerda) e R (microfone da direita)^{**} – são usados para um efeito mais natural, foi proposta posteriormente. A FCC estipulou que o sistema estereofônico devia ser compatível com o sistema monofônico original. Isso significava que os antigos receptores monofônicos deveriam ser capazes de receber o sinal $L + R$, e a largura de banda total de transmissão para os dois canais (L e R) deve permanecer em 200 kHz, com $\Delta f = 75$ kHz para os dois sinais combinados. Isso asseguraria que receptores抗igos seriam capazes de receber tanto sinais monofônicos como estereofônicos, embora o efeito estéreo ficasse ausente.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.18 (a) Transmissor FM estéreo. (b) Espectro de um sinal estéreo em banda base. (c) Receptor FM estéreo.

Um transmissor e um receptor para difusão estereofônica são mostrados na Fig. 5.18a e c. No transmissor, os dois sinais L e R são somados e subtraídos, fornecendo $L + R$ e $L - R$. Esses sinais passam por pré-ênfase. Após a pré-ênfase, o sinal $(L - R)'$ modula, em DSB-SC, uma portadora de 38 kHz, obtida do dobramento de um sinal de 19 kHz, usado como piloto. O sinal $(L + R)'$ é usado diretamente. Os três sinais (o terceiro é o piloto) formam um sinal em banda base composto $m(t)$ (Fig. 5.18b),

$$m(t) = (L + R)' + (L - R)'\cos\omega_ct + \alpha\cos\frac{\omega_ct}{2} \quad (5.33)$$

A razão para o uso do piloto de 19 kHz, em vez de 38 kHz, é a facilidade em separar o piloto de 19 kHz, pois não há componentes de sinal na faixa de 4 kHz nos dois lados dessa frequência.

O funcionamento do receptor (Fig. 5.18c) é autoexplicativo. Um receptor monofônico consiste apenas no braço superior do receptor estéreo e, portanto, recebe somente o sinal $L + R$. Esse é o sinal de áudio completo, sem o efeito estéreo. O sistema, então, é compatível. O piloto é extraído e (depois de ter a frequência dobrada) usado para demodular coerentemente o sinal $(L - R)' \cos \omega_c t$.

Um aspecto interessante da transmissão estéreo é que a amplitude de pico do sinal composto $m(t)$ na Eq. (5.33) é praticamente igual à do sinal monofônico (se ignorarmos o piloto) e, portanto, o valor de Δf – que, na transmissão estereofônica, é proporcional à amplitude de pico do sinal – permanece praticamente igual ao do caso monofônico. Isso pode ser explicado pelo chamado efeito de **entrelaçamento** (*interleaving*), discutido a seguir.

Os sinais L' e R' são, em geral, muito parecidos. Assim, podemos supor que suas amplitudes de pico são iguais a A_p . Na pior das hipóteses, L' e R' alcançarão seus valores de pico ao mesmo tempo, resultando em [Eq. (5.33)]

$$|m(t)|_{\text{máx}} = 2A_p + \alpha$$

No caso monofônico, a amplitude de pico do sinal em banda base $(L + R)'$ é $2A_p$. Logo, as amplitudes de pico nos dois casos diferem apenas de α , a amplitude do piloto. Para levar isso em consideração, a amplitude de pico de áudio no caso estéreo é reduzida a 90% do valor total. Isso corresponde a uma redução na potência de sinal por uma razão $(0,9)^2 = 0,81$ ou 1 dB. Com isso, a SNR efetiva é reduzida em 1 dB, devido à inclusão do piloto.

5.8 EXERCÍCIOS COM O MATLAB

Nesta seção, usamos MATLAB para construir um exemplo de modulação e demodulação FM. O programa MATLAB é `ExampleFM.m`. Mais uma vez, aplicamos o mesmo sinal de mensagem $m_2(t)$. O coeficiente FM é $k_f = 80$ e o coeficiente PM, $k_p = \pi$. A frequência portadora permanece sendo 300 Hz. Os resultantes sinais FM e PM no domínio do tempo são mostrados na Fig. 5.19. As correspondentes respostas de frequência também são ilustradas na Fig. 5.19. As respostas no domínio da frequência mostram claramente as maiores larguras de banda dos sinais FM e PM, em comparação com o sinal modulado em amplitude.

```
% (ExampleFM.m)
% Este programa usa triangl.m para ilustrar modulação
% e demodulação em frequência
ts=1.e-4;

t=-0.04:ts:0.04;
Ta=0.01;
m_sig=triangl((t+0.01)/Ta)-triangl((t-0.01)/Ta);
Lfft=length(t); Lfft=2^ceil(log2(Lfft));
M_fre=fftshift(fft(m_sig,Lfft));
freqm=(-Lfft/2:Lfft/2-1)/(Lfft*ts);
B_m=100; %Bandwidth of the signal is B_m Hz.
% Design a simple lowpass filter with bandwidth B_m Hz.
h=fir1(80,[B_m*ts]);
%
kf=160*pi;
m_intg=kf*ts*cumsum(m_sig);
s_fm=cos(2*pi*300*t+m_intg);
s_pm=cos(2*pi*300*t+pi*m_sig);
Lfft=length(t); Lfft=2^ceil(log2(Lfft)+1);
S_fm=fftshift(fft(s_fm,Lfft));
S_pm=fftshift(fft(s_pm,Lfft));
```

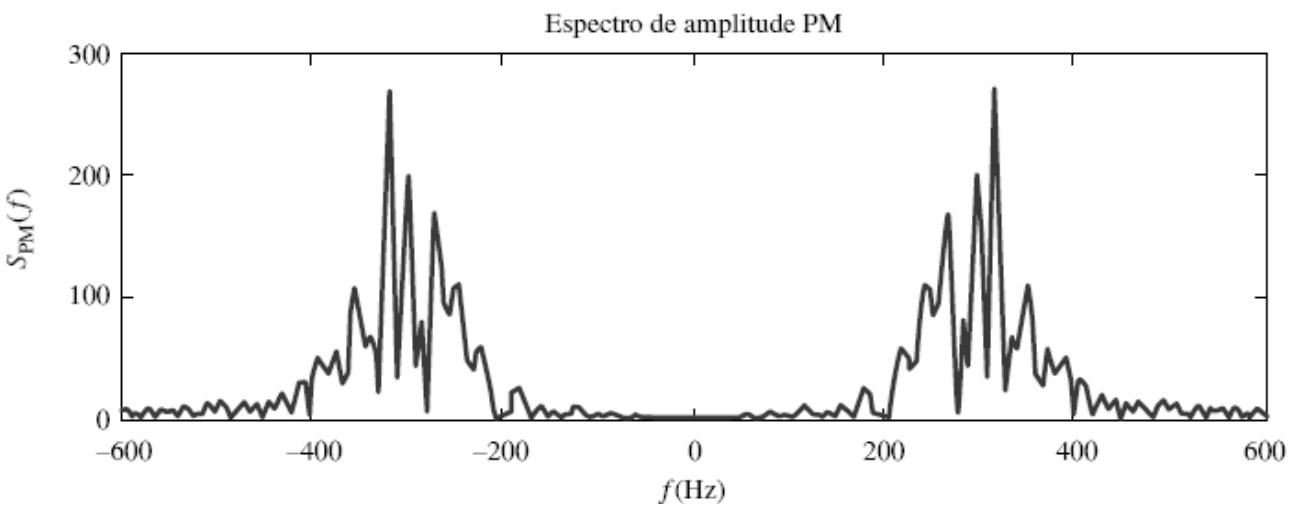
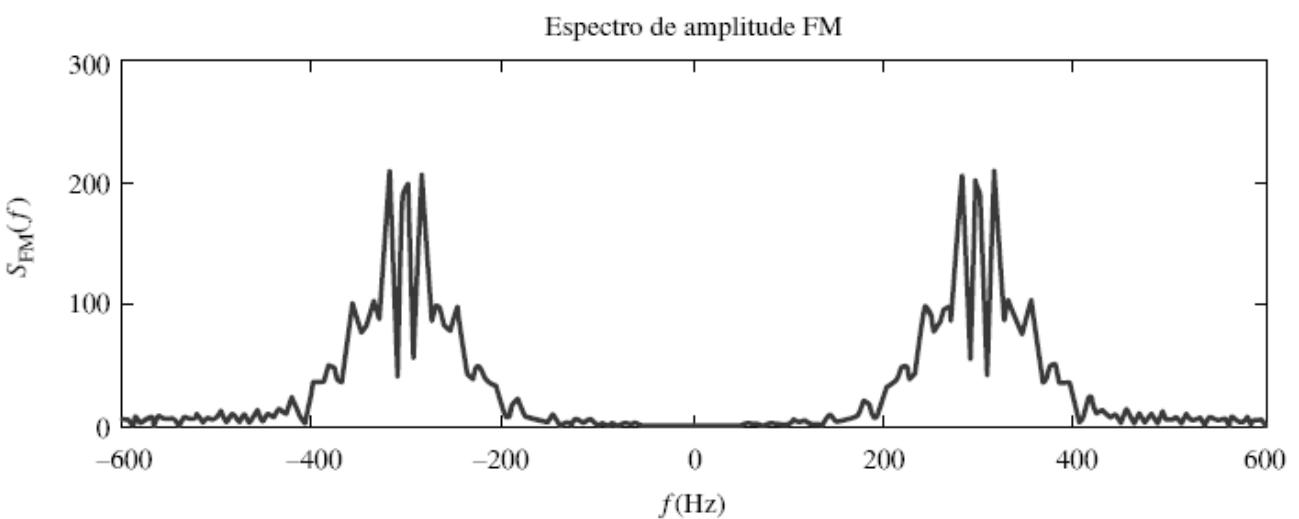
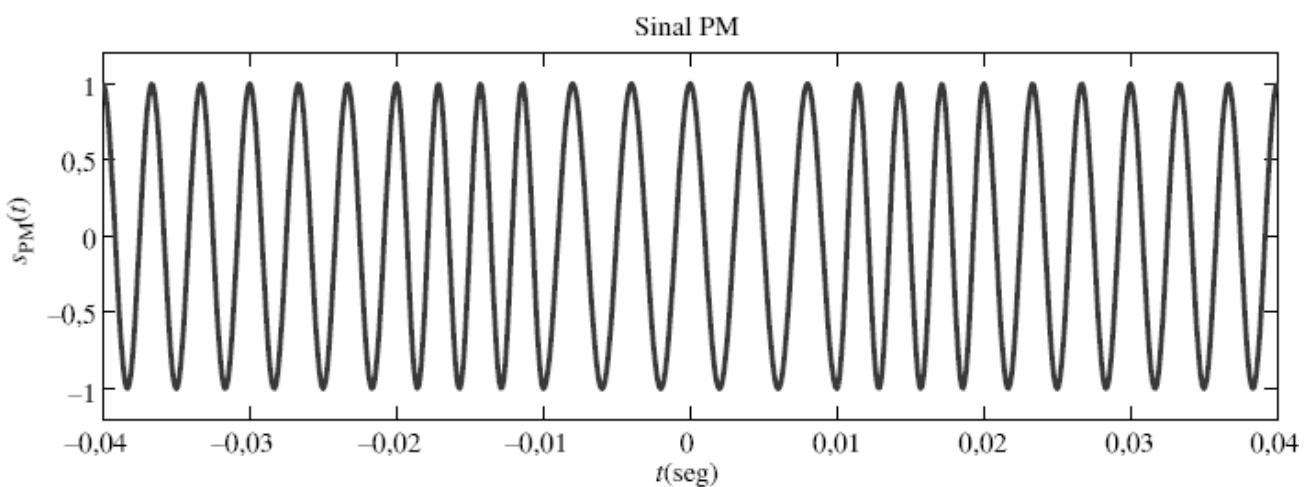
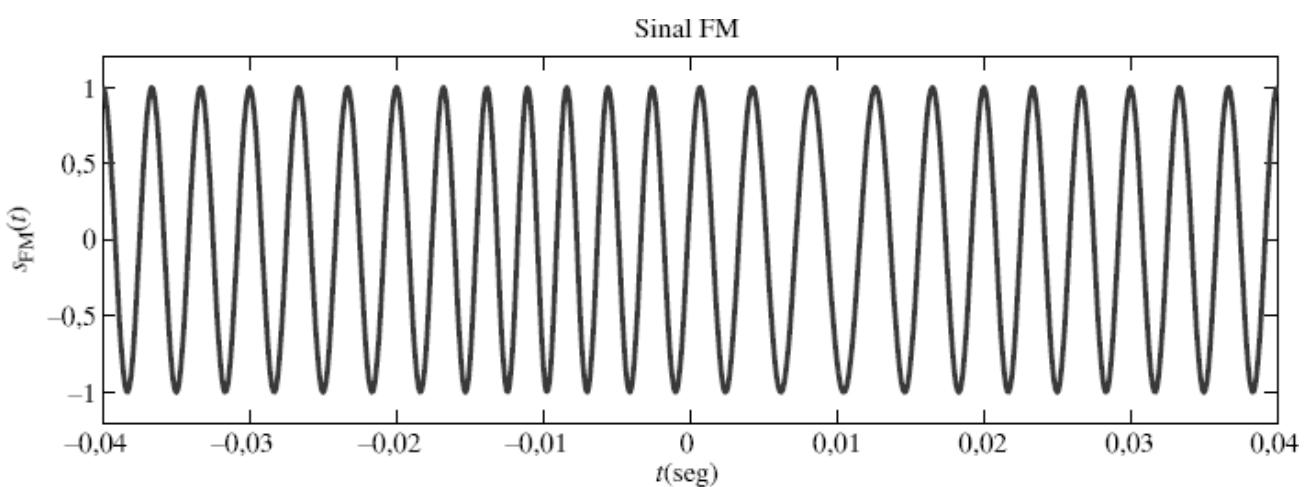


Figura 5.19 Sinais FM e PM nos domínios do tempo e da frequência.

```
freqs=(-Lfft/2:Lfft/2-1)/(Lfft*ts);

s_fmdem=diff([s_fm(1) s_fm])/ts/kf;
s_fmrec=s_fmdem.*(s_fmdem>0);
s_dec=filter(h,1,s_fmrec);

% Demodulação
% Usando um filtro passa-baixos ideal com largura de banda de 200 Hz

Trangel=[-0.04 0.04 -1.2 1.2];

figure(1)
subplot(211);m1=plot(t,m_sig);
axis(Trangel); set(m1,'Linewidth',2);
xlabel('{\it t} (seg)'); ylabel('{\it m}({\it t})');
title('Sinal de mensagem');
subplot(212);m2=plot(t,s_dec);
set(m2,'Linewidth',2);
xlabel('{\it t} (seg)'); ylabel('{\it m}_d({\it t})')
title('Sinal FM demodulado');

figure(2)
subplot(211);td1=plot(t,s_fm);
axis(Trangel); set(td1,'Linewidth',2);
xlabel('{\it t} (seg)'); ylabel('{\it s}_{\rm FM}({\it t})');
title('sinal FM');
subplot(212);td2=plot(t,s_pm);
axis(Trangel); set(td2,'Linewidth',2);
xlabel('{\it t} (seg)'); ylabel('{\it s}_{\rm PM}({\it t})');
title('Sinal PM');

figure(3)
subplot(211);fp1=plot(t,s_fmdem);
set(fp1,'Linewidth',2);
xlabel('{\it t} (seg)'); ylabel('{\it d s}_{\rm FM}({\it t})/dt');
title('derivada FM');
subplot(212);fp2=plot(t,s_fmrec);
set(fp2,'Linewidth',2);
xlabel('{\it t} (seg)');
title('derivada FM retificada');

Frange=[-600 600 0 300];
figure(4)
subplot(211);fd1=plot(freqs,abs(S_fm));
axis(Frange); set(fd1,'Linewidth',2);
xlabel('{\it f} (Hz)'); ylabel('{\it S}_{\rm FM}({\it f})');
title('espectro de amplitude FM');
subplot(212);fd2=plot(freqs,abs(S_pm));
axis(Frange); set(fd2,'Linewidth',2);
xlabel('{\it f} (Hz)'); ylabel('{\it S}_{\rm PM}({\it f})');
title('espectro de amplitude PM');
```

Para obter os resultados de demodulação, um diferenciador é, primeiro, aplicado para transformar o sinal modulado em frequência em um sinal modulado em amplitude e em frequência (Fig. 5.20). Com o uso do retificador para detecção de envelope, vemos que o sinal de mensagem segue de perto as variações do envelope da saída do retificador.

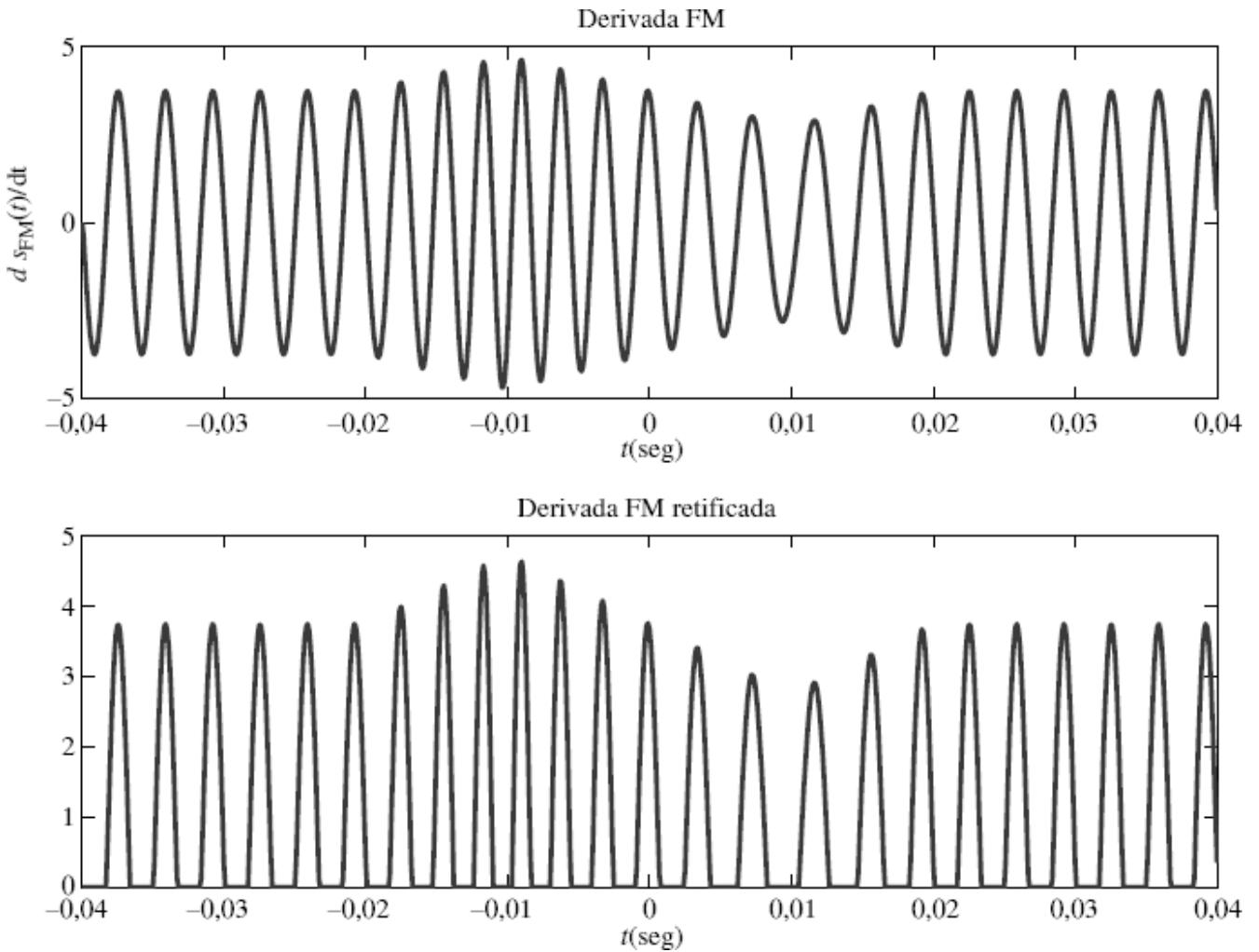


Figura 5.20 Sinais no demodulador: (a) após o diferenciador, (b) após o retificador.

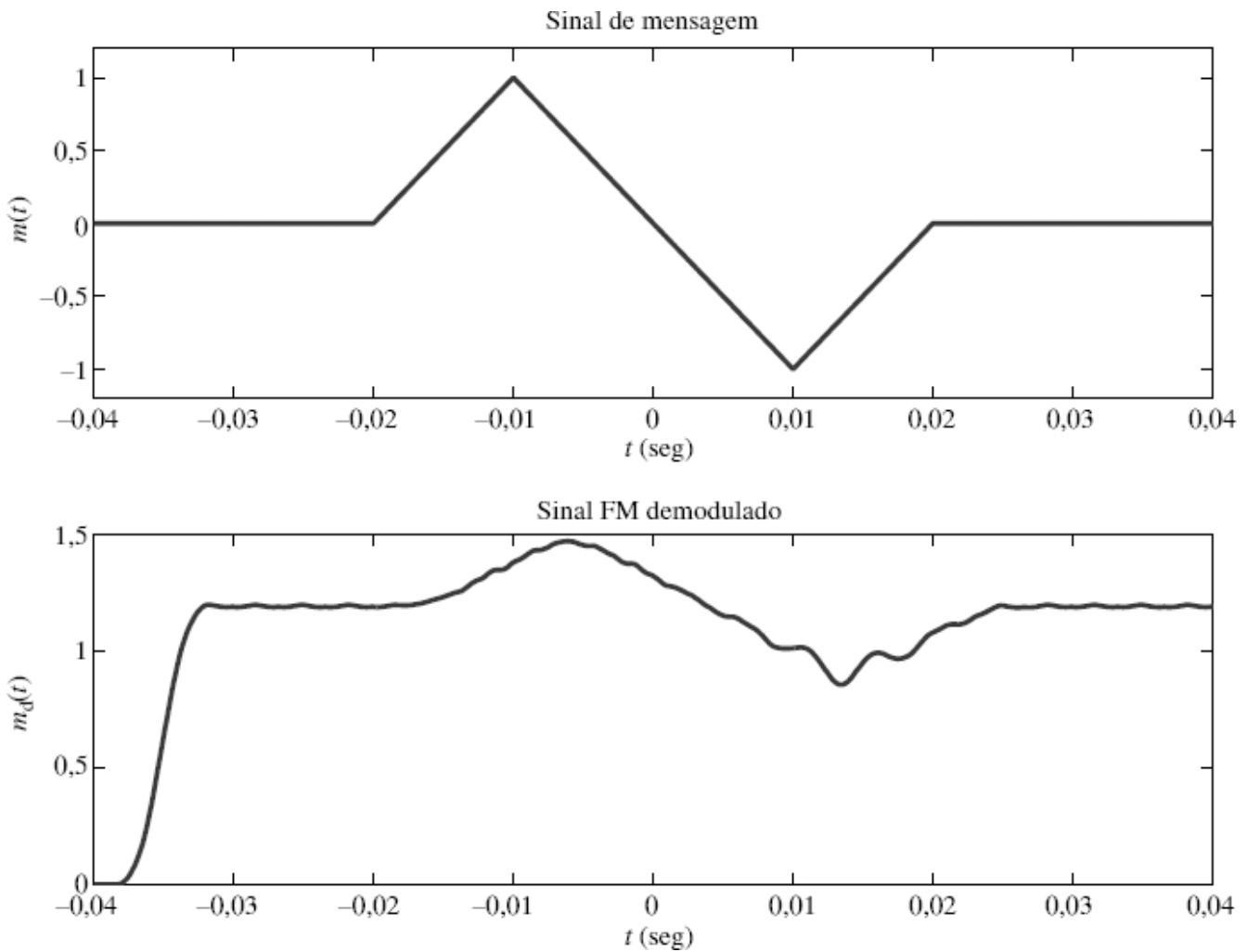


Figura 5.21 Modulação e demodulação FM: (a) mensagem original; (b) sinal recuperado.

Por fim, o sinal de saída do retificador é aplicado a um filtro passa-baixos com largura de banda de 100 Hz. Neste exemplo, por conta dos requisitos mais estritos de filtragem, usamos um filtro passa-baixos de ordem 80, com resposta ao impulso finita. Na Fig. 5.21, a saída do detector FM é comparada ao sinal de mensagem original.

Os resultados da demodulação FM mostram claramente algumas distorções. Primeiro, o tempo de resposta e o atraso do filtro passa-baixos de ordem mais alta são muito maiores. Segundo, a distorção durante a metade negativa da mensagem é mais severa porque o retificador gera poucos ciclos da meia senoide. Isso ocorre porque, quando o sinal de mensagem é negativo, a frequência instantânea do sinal FM é baixa. Como usamos uma frequência portadora de apenas 300 Hz, o efeito da baixa frequência instantânea é muito mais pronunciado. Se aplicássemos uma frequência portadora prática de 100 MHz, esse tipo de distorção seria totalmente desprezível.

REFERÊNCIAS

1. J. Carson, “Notes on the Theory of Modulation,” *Proc. IRE*, vol. 10, pp. 57–64, Feb. 1922.
2. J. Carson, “Reduction of Atmospheric Disturbances,” *Proc. IRE*, vol. 16, July 1928.
3. E. H. Armstrong, “A Method of Reducing Disturbances in Radio Signaling by a System of Frequency Modulation,” *Proc. IRE*, vol. 24, pp. 689–740, May 1936.
4. “A Revolution in Radio,” *Fortune*, vol. 20, p. 116, Oct. 1939.
5. L. Lessing, *Man of High Fidelity: Edwin Howard Armstrong*, Lippincott, Philadelphia, 1956.
6. H. R. Slotten, “‘Rainbow in the Sky’: FM Radio Technical Superiority, and Regulatory Decision Making,” Society for the History of Technology, 1996.
7. J. E. Brittain, “Electrical Engineering Hall of Fame—Edwin H. Armstrong,” *Proc. IEEE*, vol 92, pp. 575–578, Mar. 2004.
8. W. B. Davenport, Jr., “Signal-to-Noise Ratios in Bandpass Limiters,” *J. Appl. Phys.*, vol. 24, pp. 720–727, June 1953.
9. D. H. Sheingold, ed., *Nonlinear Circuits Handbook*, Analog Devices, Inc., Norwood, MA, 1974.
10. H. L. Krauss, C. W. Bostian, and F. H. Raab, *Solid-State Radio Engineering*, Wiley, New York, 1980.

EXERCÍCIOS

- 5.1-1** Esboce as formas de onda de $\varphi_{\text{FM}}(t)$ e $\varphi_{\text{PM}}(t)$ para o sinal modulante $m(t)$ mostrado na Fig. E.5.1-1, dados $\omega_c = 10^8$ rad/s, $k_f = 10^5$ e $k_p = 25$.

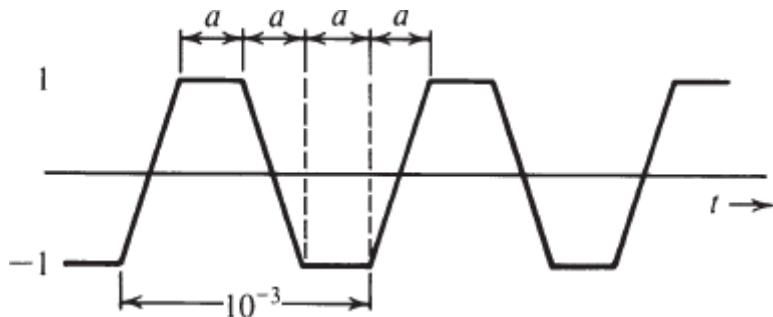


Figura E.5.1-1

- 5.1-2** Um sinal em banda base $m(t)$ é o sinal dente de serra periódico mostrado na Fig. E.5.1-2.

- (a) Esboce as formas de onda de $\varphi_{\text{FM}}(t)$ e $\varphi_{\text{PM}}(t)$ para este sinal $m(t)$, dados $\omega_c = 2\pi \times 10^6$ rad/s, $k_f = 2000\pi$ e $k_p = \pi/2$.
- (b) Mostre que o sinal PM é equivalente a um sinal PM modulado por uma mensagem quadrada periódica. Explique por que, neste caso, é necessário usar $k_p < \pi$. [Note que o sinal PM tem uma frequência constante, mas tem descontinuidades de fase que correspondem às descontinuidades de $m(t)$.]

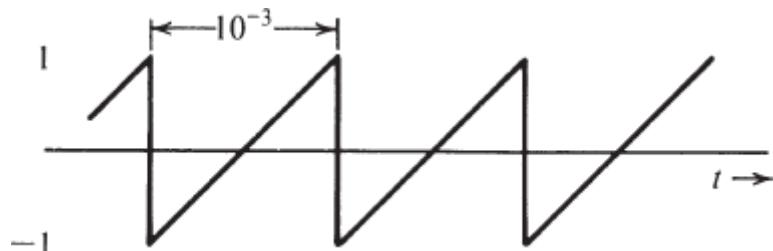


Figura E.5.1-2

- 5.1-3** No intervalo $|t| \leq 1$, um sinal modulado em ângulo é dado por

$$\varphi_{\text{EM}}(t) = 10 \cos 13.000\pi t$$

A frequência portadora é $\omega_c = 10.000\pi$ rad/s.

- (a) Admitindo que este é um sinal PM com $k_p = 1000$, determine $m(t)$ no intervalo $|t| \leq 1$.
- (b) Admitindo que este é um sinal FM com $k_f = 1000$, determine $m(t)$ no intervalo $|t| \leq 1$.

- 5.2-1** Para o sinal de mensagem

$$m(t) = 2 \cos 100t + 18 \cos 2000\pi t$$

- (a) Escreva as expressões (sem desenhar gráficos) de $\varphi_{\text{PM}}(t)$ e $\varphi_{\text{FM}}(t)$ com $A = 10$, $\omega_c = 10^6$ rad/s, $k_f = 1000\pi$, $k_p = 1$. Para determinar $\varphi_{\text{FM}}(t)$, use a integral indefinida de $m(t)$, ou seja, considere o valor da integral em $t = -\infty$ como 0.
- (b) Estime as larguras de banda de $\varphi_{\text{FM}}(t)$ e $\varphi_{\text{PM}}(t)$.

5.2-2 Um sinal modulado em ângulo com frequência central $\omega_c = 2\pi \times 10^6$ rad/s é descrito pela equação

$$\varphi_{EM}(t) = 10 \cos(\omega_c t + 0,1 \sin 2000\pi t)$$

- (a) Calcule a potência do sinal modulado.
- (b) Calcule o desvio de frequência Δf .
- (c) Calcule o desvio de fase $\Delta\phi$.
- (d) Estime a largura de banda de $\varphi_{EM}(t)$.

5.2-3 Repita o Exercício 5.2-2 para o caso em que

$$\varphi_{EM}(t) = 5 \cos(\omega_c t + 20 \sin 1000\pi t + 10 \sin 2000\pi t)$$

5.2-4 Estime as larguras de banda de $\varphi_{PM}(t)$ e $\varphi_{FM}(t)$ no Exercício 5.1-1. Suponha que a largura de banda de $m(t)$ na Fig. E.5.1-1 seja igual à frequência do terceiro harmônico de $m(t)$.

5.2-5 Estime as larguras de banda de $\varphi_{PM}(t)$ e $\varphi_{FM}(t)$ no Exercício 5.1-2. Suponha que a largura de banda de $m(t)$ na Fig. E.5.1-2 seja igual à frequência do quinto harmônico de $m(t)$.

5.2-6 Dados $m(t) = \sin 2000\pi t$, $k_f = 200.000\pi$ e $k_p = 10$.

- (a) Estime as larguras de banda de $\varphi_{FM}(t)$ e $\varphi_{PM}(t)$.
- (b) Repita a parte (a) para o caso em que a amplitude do sinal de mensagem é dobrada.
- (c) Repita a parte (a) para o caso em que a frequência do sinal de mensagem é dobrada.
- (d) Comente a sensibilidade das larguras de banda de FM e PM em relação ao espectro de $m(t)$.

5.2-7 Dados $m(t) = e^{-t^2} f_c = 10^4$ Hz, $k_f = 6000\pi$ e $k_p = 8000\pi$.

- (a) Calcule Δf , o desvio de frequência para FM e PM.
- (b) Estime as larguras de bandas das ondas FM e PM.

Sugestão: Determine $M(f)$ e sua largura de banda de 3 dB ($B \ll \Delta f$).

5.3-1 Projete (apenas o diagrama em blocos) um modulador FM indireto de Armstrong para gerar uma portadora FM com frequência de 98,1 MHz e $\Delta f = 75$ Hz. Há disponibilidade de um gerador de FM de banda estreita, com frequência portadora de 100 kHz e desvio de frequência $\Delta f = 10$ Hz. No estoque, há um oscilador de frequência ajustável na faixa de 10 a 11 MHz. Há, ainda, diversos dobradores, triplicadores e quintuplicadores de frequência.

5.3-2 Projete (apenas o diagrama em blocos) um modulador FM indireto de Armstrong para gerar uma portadora FM com frequência de 96 MHz e $\Delta f = 20$ Hz. Há disponibilidade de um gerador de FM de banda estreita, com $f_c = 200$ kHz e desvio de frequência Δf ajustável na faixa de 9 a 10 Hz. No estoque, há um oscilador de frequência ajustável na faixa de 9 a 10 MHz. Há, ainda, um filtro passa-faixa com frequência central arbitrária e dobradores de frequência.

5.4-1 (a) Mostre que, quando $m(t)$ não tem descontinuidades do tipo degrau, um demodulador FM seguido por um integrador (Fig. E.5.4-1) forma um demodulador PM. Explique por que é necessário que o demodulador PM remova qualquer componente dc antes do integrador.

(b) Mostre que um demodulador PM seguido por um diferenciador (Fig. 5.4.1b) funciona como um demodulador FM mesmo que $m(t)$ tenha descontinuidades do tipo degrau ou que a saída do demodulador PM tenha componente dc.

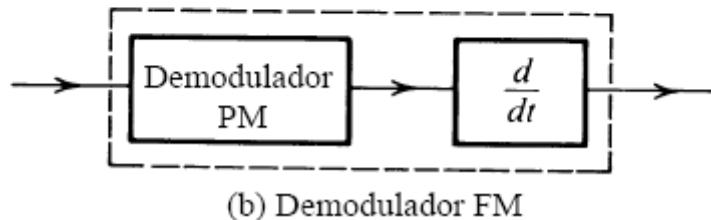
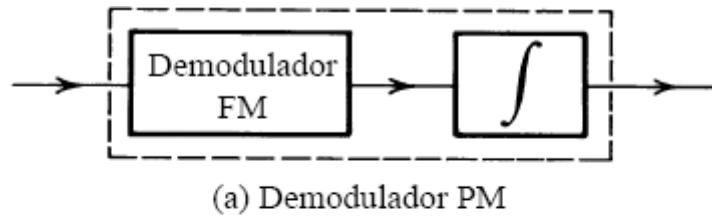


Figura E. 5.4-1

- 5.4-2** Uma onda quadrada periódica $m(t)$ (Fig. E.5.4-2a) modula em frequência uma portadora $f_c = 10$ kHz, com $\Delta f = 1$ kHz. A amplitude da portadora é A . O resultante sinal FM é demodulado, como mostrado na Fig. E.5.4-2b, pelo método discutido na Seção 5.4 (Fig. 5.12). Esboce as formas de onda nos pontos b , c , d e e .

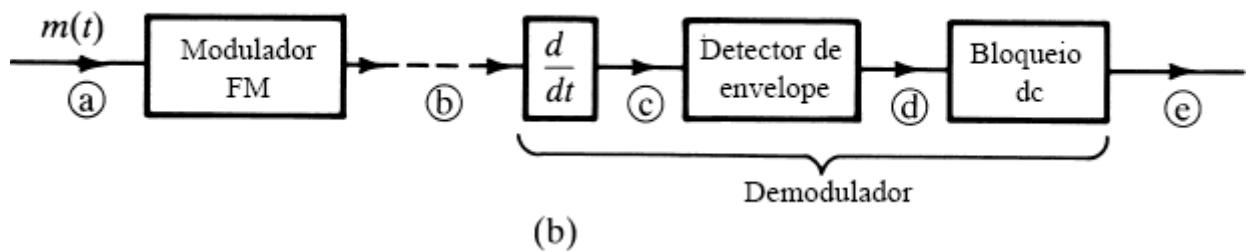
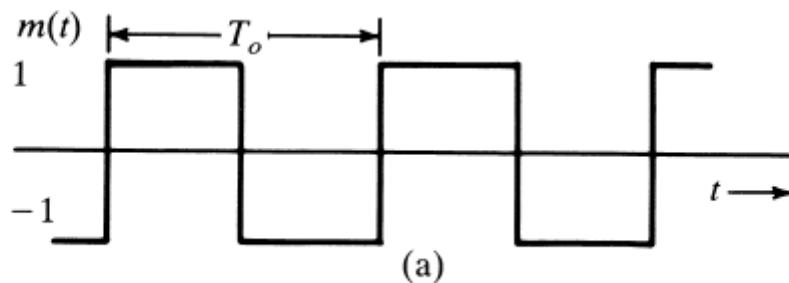


Figura E. 5.4-2

- 5.4-3** Use a análise de PLL sob pequeno erro para mostrar que uma malha de primeira ordem [$H(s) = 1$] não pode rastrear um sinal de entrada cuja frequência instantânea varia linearmente com o tempo [$\theta_i(t) = kt^2$]. Esse sinal pode ser rastreado, a menos de uma constante de fase, se $H(s) = (s + a)/s$. O sinal pode ser rastreado sem erro de fase caso $H(s) = (s^2 + as + b)/s^2$.

- 5.6-1** Um transmissor transmite um sinal AM com frequência portadora de 1500 kHz. Quando um receptor de rádio barato (cujo filtro passa-faixa do estágio de RF tem seletividade pobre) é sintonizado a 1500 kHz, o sinal é ouvido forte e claro. Esse mesmo sinal também é ouvido (não tão bem) em outra sintonia. Diga, com justificativa, em que frequência essa estação será ouvida. A frequência FI é de 455 kHz.
- 5.6-2** Considere um receptor FM super-heteródino projetado para receber a faixa de frequências de 1 a 30 MHz, com frequência FI de 8 MHz. Qual é a faixa de frequências geradas pelo oscilador local para esse receptor? Um sinal de entrada com frequência portadora de 10 MHz é recebido na sintonia de 10 MHz. Nessa sintonia do receptor, também é recebida interferência de um sinal com outra frequência portadora,

caso o filtro passa-faixa do estágio de RF do receptor tenha seletividade pobre. Qual é a frequência portadora do sinal interferente?

*Isso se deve ao fato de que integração é uma operação linear equivalente a passar o sinal por uma função de transferencia $1/j2\pi f$. Assim, se $M(f)$ for limitado em banda a B , $A(f)$ também deve ser limitado em banda a B .

*A Eq. (5.17a) pode ser aplicada somente se $m(t)$ for uma função contínua do tempo. Caso $m(t)$ tenha descontinuidades, sua derivada não existe. Nessa situação, devemos usar a abordagem direta (discutida no Exemplo 5.2) para determinar $\varphi_{PM}(t)$ e, então, determinamos $\Delta\omega$ de $\varphi_{PM}(t)$.

*Como $J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta)$, a magnitude da LSB em $\omega = \omega_c - n\omega_m$ é igual a da USB em $\omega = \omega_c + n\omega_m$.

**Por exemplo, com base na análise da modulação por tom, é comum afirmar que FM é superior a PM por um fator de 3, no que diz respeito à SNR de saída. Na verdade, isso é falso para a maioria dos sinais encontrados na prática.

*Institute of Electrical and Electronic Engineers (Instituto de Engenheiros Elétricos e Eletrônicos). (N.T.)

*Caso desejemos que Δf seja exatamente 75 kHz, em vez de 76,8 kHz, devemos reduzir o desvio Δf de banda estreita de 25 Hz para $25(75/76,8) = 24,41$ Hz.

*Desde que as variações de ω_i sejam lentas em comparação com a constante de tempo do circuito.

* Por exemplo, um sinal AM com uma interferência senoidal $I \cos(\omega_c + \omega)t$ é dado por

$$\begin{aligned} r(t) &= [A + m(t)] \cos \omega_c t + I \cos(\omega_c + \omega)t \\ &= [A + m(t) + I \cos \omega t] \cos \omega_c t - I \sin \omega t \sin \omega_c t \end{aligned}$$

Para esse sinal, o envelope é

$$E(t) = \{[A + m(t) + I \cos \omega t]^2 + I^2 \sin^2 \omega t\}^{1/2} \approx A + m(t) + I \cos \omega t \quad I \ll A$$

Assim, o sinal de interferência na saída do detector de envelope é $I \cos \omega t$, que independe da amplitude da portadora A . Obteríamos o mesmo resultado caso demodulação síncrona fosse utilizada. A mesma conclusão se aplica a sistemas AM-SC.

** Os resultados nas Eqs. (5.30) e (5.31) podem ser prontamente estendidos ao caso de mais de uma senoide interferente. Quando há várias senoides interferentes, o sistema se comporta linearmente, desde que as amplitudes das senoides sejam muito pequenas em comparação com a amplitude da portadora.

* No Brasil, a Agência Nacional de Telecomunicações – ANATEL adota o mesmo plano de frequências. (N.T.)

** As letras *L* e *R* são herdadas do inglês: *Left* (esquerdo) e *Right* (direito). (N.T.)

6 AMOSTRAGEM E CONVERSÃO ANALÓGICO-DIGITAL

Como discutido brevemente no Capítulo 1, sinais analógicos podem ser digitalizados por meio de amostragem e quantização. Essa conversão analógico-digital (A/D) estabelece o sustentáculo dos modernos sistemas de comunicação digital. No conversor A/D, a taxa de amostragem deve ser suficientemente grande para permitir que o sinal analógico seja reconstruído das amostras com precisão adequada. O **teorema da amostragem**, que é a base para a determinação da apropriada (sem perda) taxa de amostragem para um dado sinal, tem um papel essencial no processamento de sinais, teoria das comunicações e projeto de circuitos A/D.

6.1 TEOREMA DA AMOSTRAGEM

Primeiro, mostremos que um sinal $g(t)$ cujo espectro é limitado em banda a B Hz, ou seja,

$$G(f) = 0 \quad \text{para } |f| > B$$

pode ser reconstruído exatamente (sem qualquer erro) a partir de suas amostras em tempo discreto tomadas uniformemente a uma taxa de R amostras por segundo. A condição é que $R > 2B$. Em outras palavras, a mínima frequência de amostragem para recuperação perfeita do sinal é $f_s = 2B$ Hz.

Para provar o teorema da amostragem, consideremos um sinal $g(t)$ (Fig. 6.1a) cujo espectro seja limitado em banda a B Hz (Fig. 6.1b).^{*} Por conveniência, espectros são mostrados como funções tanto de f como de ω . Amostrar $g(t)$ a uma taxa de f_s Hz significa tomar f_s amostras uniformes por segundo. Tal amostragem uniforme é efetuada com a multiplicação de $g(t)$ por um trem de impulsos δ_{T_s} da Fig. 6.1c, que consiste em impulsos unitários repetidos periodicamente a cada T_s segundos, em que $T_s = 1/f_s$. Isso resulta no sinal amostrado $\bar{g}(t)$ ilustrado na Fig. 6.1d. O sinal amostrado consiste em impulsos espaçados a cada T_s segundos (o intervalo de amostragem). O n -ésimo impulso, localizado em $t = nT_s$, tem amplitude $g(nT_s)$, que é o valor de $g(t)$ em $t = nT_s$. Assim, a relação entre o sinal amostrado $\bar{g}(t)$ e o sinal analógico original $g(t)$ é

$$\bar{g}(t) = g(t)\delta_{T_s}(t) = \sum_n g(nT_s)\delta(t - nT_s) \quad (6.1)$$

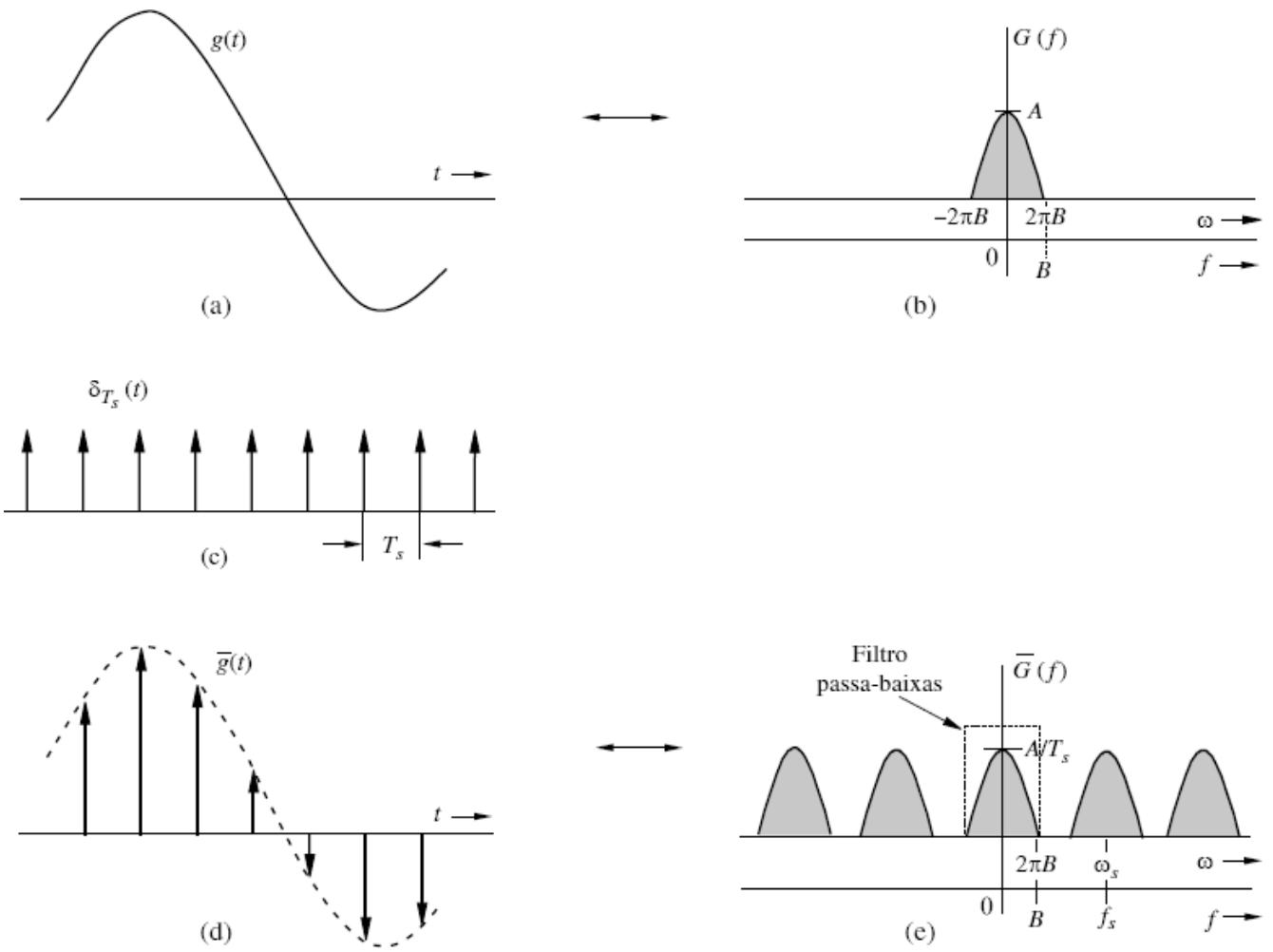


Figura 6.1 Sinal amostrado e seu espectro de Fourier.

Como o trem de impulsos $\delta_{T_s}(t)$ é um sinal periódico de período T_s , pode ser expresso como uma série de Fourier exponencial, já calculada no Exemplo 3.11, como

$$\delta_{T_s}(t) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t} \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = 2\pi f_s \quad (6.2)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \bar{g}(t) &= g(t)\delta_{T_s}(t) \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t)e^{jn2\pi f_s t} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Para calcular $\bar{G}(f)$, a transformada de Fourier de $\bar{g}(t)$, tomamos a transformada de Fourier do somatório na Eq. (6.3). Com base na propriedade de translação de frequência, a transformada do n -ésimo termo é deslocada de nf_s . Portanto,

$$\bar{G}(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(f - nf_s) \quad (6.4)$$

Isso significa que o espectro $\bar{G}(f)$ consiste em $G(f)$ multiplicado por uma constante $1/T_s$ e repetido periodicamente a cada $f_s = 1/T_s$, como ilustrado na Fig. 6.1e.

Após a amostragem uniforme que gera um conjunto de amostras $\{g(kT_s)\}$, a questão vital se torna: **Será possível reconstruir $g(t)$ a partir de $\bar{g}(t)$ sem perda ou distorção?** Se formos capazes de reconstruir $g(t)$ de $\bar{g}(t)$, no domínio da frequência,

equivalentemente, devemos ser capazes de recuperar $G(f)$ de $\overline{G}(f)$. Da Fig. 6.1, vemos que a recuperação perfeita é possível se não houver sobreposição entre as réplicas de $\overline{G}(f)$. A Fig. 6.1e mostra claramente que isso requer

$$f_s > 2B \quad (6.5)$$

O intervalo de amostragem é, então, $T_s = 1/f_s$. Portanto,

$$T_s < \frac{1}{2B} \quad (6.6)$$

Assim, desde que a frequência de amostragem f_s seja maior que o dobro da largura de banda B (em hertz), $\overline{G}(f)$ consistirá em repetições de $G(f)$ que não se sobrepõem. Quando isso é verdadeiro, a Fig. 6.1e mostra que $\overline{g}(t)$ pode ser recuperado de suas amostras $\bar{g}(t)$ aplicando o sinal amostrado a um filtro passa-baixas de largura de banda B . A mínima taxa de amostragem $f_s = 2B$ exigida para recuperar $g(t)$ de $\bar{g}(t)$ é denominada **taxa de Nyquist** para $g(t)$ e o correspondente intervalo de amostragem $T_s = 1/2B$, **intervalo de Nyquist** para o sinal passa-baixas $g(t)$.*

É necessário ressaltar um ponto importante relativo à possibilidade $f_s = 2B$ e a uma particular classe de sinais passa-baixas. Para um espectro de sinal genérico, provamos que a taxa de amostragem $f_s > 2B$. Contudo, caso o espectro $G(f)$ não contenha impulso (ou suas derivadas) na maior frequência B , não haverá sobreposição desde que a taxa de amostragem seja maior que ou igual à taxa de Nyquist, ou seja

$$f_s \geq 2B$$

Se, no entanto, $G(f)$ contiver um impulso na frequência mais alta $\pm B$, a igualdade deve ser removida ou ocorrerá sobreposição. Nesse caso, a taxa de amostragem f_s deve ser maior do que 2B Hz: Um exemplo conhecido é a senoide $g(t) = \sin 2\pi B(t - t_0)$. Esse sinal é limitado à banda de B Hz, mas se as amostras são uniformemente tomadas à taxa $f_s = 2B$ (iniciando em $t = t_0$), todas serão nulas, e $g(t)$ não poderá ser recuperado de suas amostras de Nyquist. Portanto, para senoides, a condição $f_s > 2B$ deve ser satisfeita.

6.1.1 Reconstrução de Sinais a partir de Amostras Uniformes

O processo de reconstrução de um sinal do tempo contínuo $g(t)$ a partir de suas amostras também é conhecido com **interpolação**. Na Fig. 6.1, usamos uma prova construtiva para mostrar que um sinal $g(t)$ limitado em banda a B Hz pode ser reconstruído (interpolar) exatamente de suas amostras. Isso significa não apenas que amostragem uniforme feita acima da taxa de Nyquist preserva a informação do sinal, mas também que a simples aplicação do sinal amostrado a um filtro passa-baixas ideal de largura de banda B Hz reconstrói a mensagem original. Como visto na Eq. (6.3), o sinal amostrado contém uma componente $(1/T_s)g(t)$ e, para recuperar $g(t)$ [ou $G(f)$], o sinal amostrado

$$\bar{g}(t) = \sum g(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

deve ser aplicado a um filtro passa-baixas ideal de largura de banda B Hz e ganho T_s . Um filtro ideal como esse tem a função de transferência

$$H(f) = T_s \Pi\left(\frac{\omega}{4\pi B}\right) = T_s \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \quad (6.7)$$

Reconstrução Ideal

A Fig. 6.2a mostra a função de transferência do filtro ideal de interpolação, obtida na Eq. (6.7), para recuperar o sinal analógico de suas amostras uniformes. A resposta ao impulso desse filtro, transformada de Fourier inversa de $H(f)$, é

$$h(t) = 2BT_s \operatorname{sinc}(2\pi Bt) \quad (6.8)$$

Considerando o uso da taxa de amostragem de Nyquist, ou seja, $2BT_s = 1$, temos

$$h(t) = \operatorname{sinc}(2\pi Bt) \quad (6.9)$$

Esta função $h(t)$ é mostrada na Fig. 6.2b. Um fato muito interessante a ser observado é que $h(t) = 0$ em todos os instantes de amostragem de Nyquist ($t = \pm n/2B$), exceto em $t = 0$. Quando o sinal amostrado $\bar{g}(t)$ é aplicado à entrada deste filtro, a saída é $g(t)$. Cada amostra em $\bar{g}(t)$, por ser um impulso, gera um pulso sinc de altura igual à intensidade da amostra, como ilustrado na Fig. 6.2c. O processo é idêntico ao mostrado na Fig. 6.6, exceto que $h(t)$ é um pulso sinc, em vez de um pulso retangular. A adição de pulsos sinc gerados por todas as amostras resulta em $g(t)$. A k -ésima amostra da entrada $\bar{g}(t)$ é o impulso $g(kT_s)\delta(t - kT_s)$; a saída do filtro para esse impulso é $g(kT_s)h(t - kT_s)$. Logo, a saída do filtro para $\bar{g}(t)$, que é $g(t)$, pode ser expressa como uma soma

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_k g(kT_s)h(t - kT_s) \\ &= \sum_k g(kT_s) \operatorname{sinc}[2\pi B(t - kT_s)] \end{aligned} \quad (6.10a)$$

$$= \sum_k g(kT_s) \operatorname{sinc}(2\pi Bt - k\pi) \quad (6.10b)$$

A Eq. (6.10) é a **fórmula de interpolação**, que produz valores de $g(t)$ entre amostras como uma soma ponderada de todos os valores de amostras.

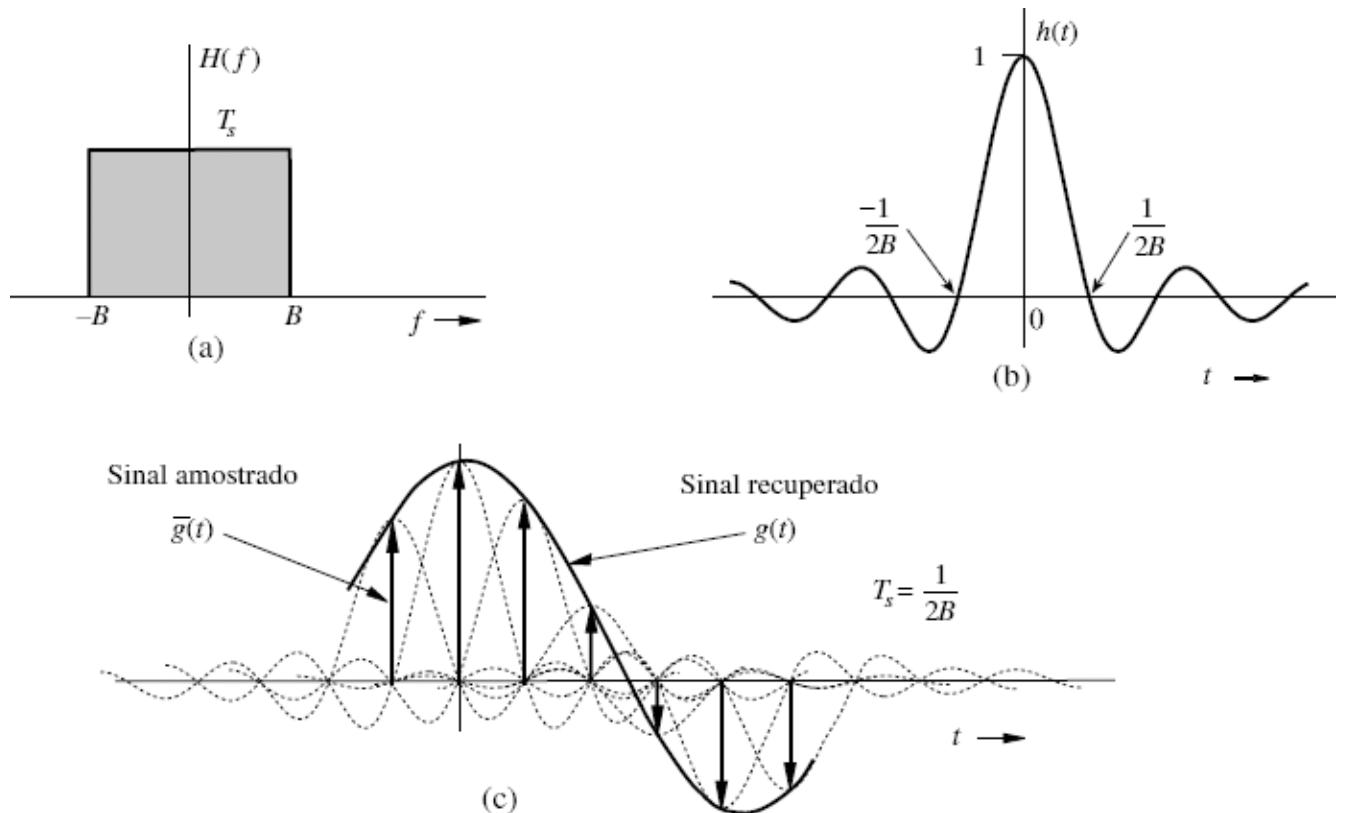


Figura 6.2 Interpolação ideal.

Exemplo 6.1 Determinemos o sinal $g(t)$ limitado em banda a B Hz e cujas amostras são

$$g(0) = 1 \quad \text{e} \quad g(\pm T_s) = g(\pm 2T_s) = g(\pm 3T_s) = \dots = 0$$

em que o intervalo de amostragem T_s é o intervalo de Nyquist para $g(t)$, ou seja, $T_s = 1/2B$.

Usemos a fórmula de interpolação (6.10b) para construir $g(t)$ a partir das amostras. Como todas as amostras de Nyquist, exceto uma, são nulas, somente um termo (correspondente a $k = 0$) sobrevive na soma no lado direito da Eq. (6.10b).

Assim,

$$g(t) = \text{sinc}(2\pi Bt) \quad (6.11)$$

Este sinal é mostrado na Fig. 6.3. Observemos que este é o único sinal que tem largura de banda B Hz e valores de amostras $g(0) = 1$ e $g(nT_s) = 0$ ($n \neq 0$). Nenhum outro sinal satisfaz essas condições.

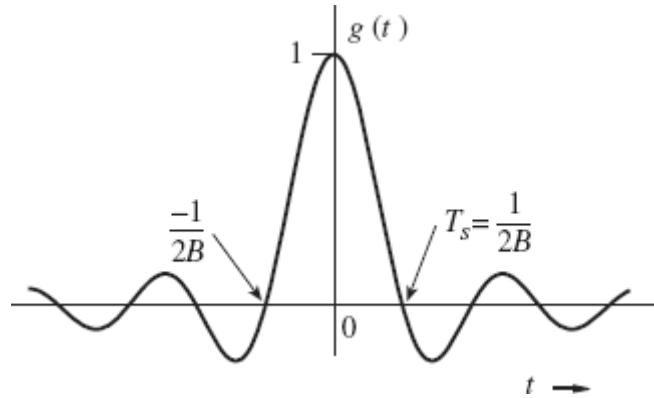


Figura 6.3 Sinal reconstruído das amostras de Nyquist no Exemplo 6.1.

Reconstrução (Interpolação) Prática de Sinais

Na Seção 3.5, vimos que um filtro passa-baixas ideal é não causal e, portanto, irrealizável. Isso também pode ser visto da natureza infinitamente longa do pulso de reconstrução sinc usado na reconstrução ideal da Eq. (6.10). Para aplicações práticas de reconstrução de sinais (por exemplo, em um reproduutor de CD), é necessário implementar um sistema realizável para a reconstrução de sinais a partir de amostras uniformes dos mesmos.

Para implementação prática, o pulso de reconstrução $p(t)$ deve ser de fácil geração. Por exemplo, podemos aplicar o pulso de reconstrução $p(t)$ mostrado na Fig. 6.4. No entanto, devemos primeiro usar o pulso não ideal de interpolação $p(t)$ para analisar a precisão do sinal reconstruído. Denotemos o sinal obtido da reconstrução por

$$\tilde{g}(t) \triangleq \sum_n g(nT_s)p(t - nT_s) \quad (6.12)$$

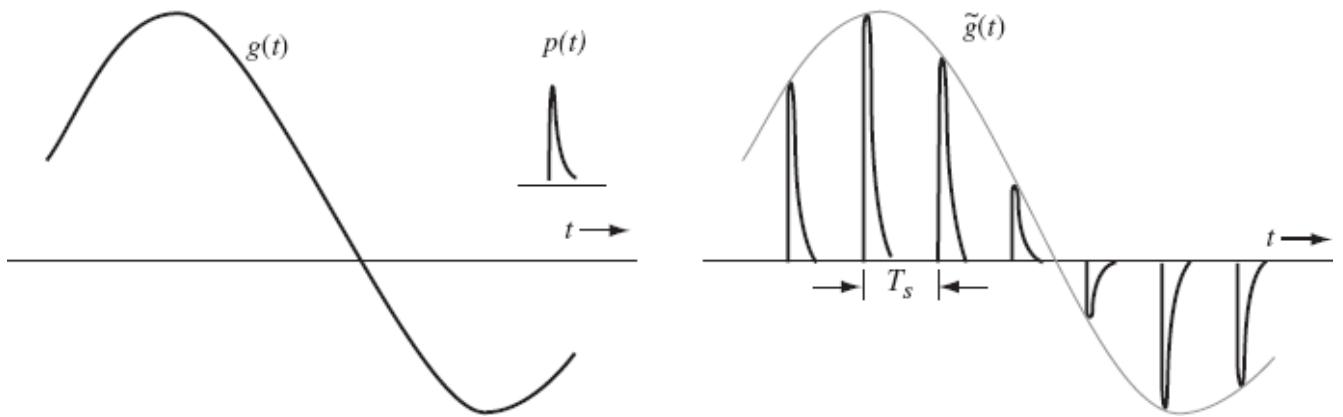


Figura 6.4 Pulso prático de reconstrução (interpolação).

Para determinar a relação entre este sinal e o sinal analógico original $g(t)$, das propriedades da convolução e da Eq. (6.1), vemos que

$$\begin{aligned}\tilde{g}(t) &= \sum_n g(nT_s)p(t - nT_s) = p(t) * \left[\sum_n g(nT_s)\delta(t - nT_s) \right] \\ &= p(t) * \bar{g}(t)\end{aligned}\quad (6.13a)$$

No domínio da frequência, a relação entre a reconstrução e o sinal analógico original é obtida com ajuda da Eq. (6.4)

$$\tilde{G}(f) = P(f) \frac{1}{T_s} \sum_n G(f - nf_s) \quad (6.13b)$$

Isso significa que o sinal $\tilde{g}(t)$ reconstruído com uso do pulso $p(t)$ consiste em múltiplas réplicas de $G(f)$, com frequências centrais nf_s e filtradas por $P(f)$. Para recuperar $g(t)$ completamente, filtragem adicional de $\tilde{g}(t)$ se torna necessária. Tais filtros são, em geral, referidos como equalizadores.

Denotemos a função de transferência do equalizador por $E(f)$. A reconstrução sem distorção requer

$$\begin{aligned}G(f) &= E(f)\tilde{G}(f) \\ &= E(f)P(f) \frac{1}{T_s} \sum_n G(f - nf_s)\end{aligned}$$

Esta relação indica claramente que o equalizador deve remover todas as réplicas deslocadas $G(f - nf_s)$ da soma, exceto o termo passa-baixas com $n = 0$, ou seja,

$$E(f)P(f) = 0 \quad |f| > f_s - B \quad (6.14a)$$

Adicionalmente, a reconstrução sem distorção requer

$$E(f)P(f) = T_s \quad |f| < B \quad (6.14b)$$

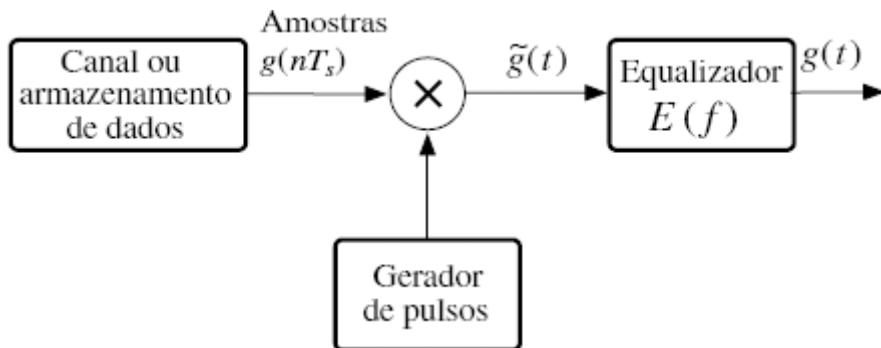


Figura 6.5 Reconstrução prática de sinal.

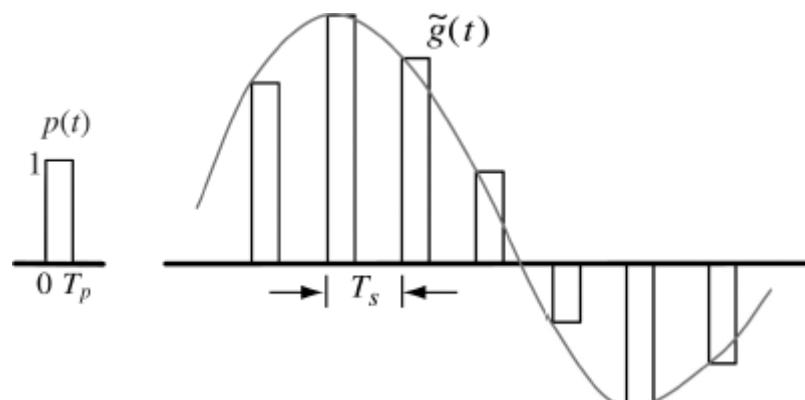


Figura 6.6 Interpolação simples por meio de pulsos retangulares.

O filtro equalizador $E(f)$ deve ser passa-baixas em natureza, para suprimir todo conteúdo de frequência acima de $f_s - B$ Hz, e deve ser o inverso de $P(f)$ na largura de banda de B Hz do sinal. A Fig. 6.5 ilustra o diagrama de um sistema prático de reconstrução que utiliza um equalizador desse tipo.

Consideremos, agora, um gerador de pulsos de interpolação muito simples que gera pulsos curtos (retenção de ordem zero – *zero order hold*). Como mostrado na Fig. 6.6,

$$p(t) = \Pi\left(\frac{t - 0,5T_p}{T_p}\right)$$

Este é um pulso retangular de altura unitária e duração T_p . A reconstrução, primeiro, gerará

$$\tilde{g}(t) = \sum_n g(nT_s) \Pi\left(\frac{t - nT_s - 0,5T_p}{T_p}\right)$$

A função de transferência do filtro $P(f)$ é a transformada de Fourier de $\Pi(t/T_p)$ deslocada de $0,5T_p$:

$$P(f) = T_p \operatorname{sinc}(\pi f T_p) e^{-j\pi f T_p} \quad (6.15)$$

Como resultado, a resposta de frequência do equalizador deve satisfazer

$$E(f) = \begin{cases} T_s/P(f) & |f| \leq B \\ \text{Flexível} & B < |f| < (1/T_s - B) \\ 0 & |f| \geq (1/T_s - B) \end{cases}$$

É importante que determinemos se a resposta de banda passante do equalizador é realizável. Primeiro, podemos acrescentar outro atraso temporal à reconstrução, tal que

$$E(f) = T_s \cdot \frac{\pi f}{\operatorname{sen}(\pi f T_p)} e^{-j2\pi f t_0} \quad |f| \leq B \quad (6.16)$$

Para que um ganho de banda passante $E(f)$ seja bem definido, é imperativo que escolhemos uma pequena largura de pulso T_p , tal que

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi f T_p)}{\pi f} \neq 0 \quad |f| \leq B$$

Isso significa que o equalizador $E(f)$ não precisa alcançar ganho infinito. Se não for assim, o equalizador se tornará irrealizável. De modo equivalente,

$$T_p < 1/B$$

Portanto, desde que a largura do pulso retangular de reconstrução seja menor que $1/B$, deve ser possível projetar um filtro equalizador analógico para recuperar o sinal analógico original $g(t)$ do trem de pulsos de reconstrução não ideal. Obviamente, este é um requisito para um gerador de pulsos retangulares de reconstrução. Na prática, T_p pode ser escolhido muito pequeno, fornecendo a seguinte resposta de banda passante do equalizador:

$$E(f) = T_s \cdot \frac{\pi f}{\operatorname{sen}(\pi f T_p)} \approx \frac{T_s}{T_p} \quad |f| \leq B \quad (6.17)$$

Isso significa que resta pouca distorção quando pulsos retangulares muito curtos são usados na reconstrução de sinais. Esses casos tornam o projeto do equalizador desnecessário ou muito simples. Um exemplo é dado na forma de exercício com o MATLAB na Seção 6.9.

Podemos obter um resultado melhor que com o filtro de retenção de ordem zero se usarmos um filtro **de retenção de primeira ordem**, que resulta em interpolação linear no lugar da interpolação em degraus. O interpolador linear, cuja resposta ao impulso é um pulso triangular $\Delta(t/2T_s)$, leva a uma interpolação em que os topes de amostras adjacentes são conectados por segmentos de reta (Exercício 6.1-7).

6.1.2 Questões Práticas Relativas à Amostragem e à Reconstrução de Sinais

Realizabilidade de Filtros de Reconstrução

Se um sinal for amostrado à taxa de Nyquist $f_s = 2B$ Hz, o espectro $\overline{G}(f)$ consiste em repetições de $G(f)$ sem qualquer separação entre ciclos adjacentes, como mostrado na Fig. 6.7a. Para recuperar $g(t)$ de $\overline{g}(t)$, é preciso aplicar o sinal amostrado $\overline{g}(t)$ a um filtro passa-baixas ideal (área pontilhada na Fig. 6.7a). Como visto na Seção 3.5, um filtro como este é irrealizável na prática; uma boa aproximação para o filtro pode ser obtida apenas com atraso temporal infinito na resposta. Isso significa que podemos recuperar o sinal $g(t)$ de suas amostras com atraso temporal infinito.

Uma solução prática a este problema consiste em amostrar o sinal a uma taxa maior que a de Nyquist ($f_s > 2B$ ou $\omega_s > 4\pi B$). O resultado é $\overline{G}(f)$ que, agora, consiste em repetições de $G(f)$ com separação finita entre ciclos adjacentes, como ilustrado na Fig. 6.7b. Assim, podemos recuperar $G(f)$ de $\overline{G}(f)$ [ou de $\tilde{G}(f)$] com o uso de um filtro passa-baixas com característica de corte gradual (área pontilhada na Fig. 6.7b). Contudo, mesmo neste caso, o ganho do filtro deve ser zero além do primeiro ciclo de $G(f)$ (Fig. 6.7b). Segundo o critério de Paley-Wiener, a realização deste filtro também é impossível. A única vantagem neste caso é a possibilidade de obter uma aproximação para o filtro com menor atraso temporal. Isto mostra que, na prática, é impossível recuperar exatamente um sinal limitado em banda $g(t)$ a partir de suas amostras, mesmo que a taxa de amostragem seja maior do que a de Nyquist. No entanto, à medida que a taxa de amostragem aumenta, o sinal recuperado se aproxima mais do sinal desejado.

A Perfídia do Mascaramento

Há outra dificuldade prática fundamental associada à reconstrução de um sinal a partir de suas amostras. O teorema da amostragem foi provado sob a hipótese de que o sinal $g(t)$ era limitado em banda. Entretanto, *todos os sinais práticos são limitados no tempo*; ou seja, têm duração ou largura finita. Podemos demonstrar (Exercício 6.1-8) que um sinal não pode ser simultaneamente limitado no tempo e em banda. Um sinal limitado no tempo não pode ser limitado em banda e vice-versa (mas um sinal pode ser simultaneamente não limitado no tempo e em banda). Fica claro que todos os sinais práticos, que são necessariamente limitados no tempo, não são limitados em banda, como ilustrado na Fig. 6.8a; estes sinais têm largura de banda infinita e o espectro $\overline{G}(f)$ consiste em ciclos de $G(f)$ que se sobrepõem e se repetem a cada f_s Hz (frequência de amostragem), como indicado na Fig. 6.8b. Por causa da largura de banda infinita, a sobreposição de espectro é inevitável, qualquer que seja a taxa de amostragem. O aumento da taxa de amostragem reduz, mas não elimina a sobreposição de ciclos espectrais repetitivos. Devido à cauda da sobreposição, $\overline{G}(f)$ deixa de conter a informação completa de $G(f)$ e não é mais possível, nem mesmo teoricamente, recuperar $g(t)$ exatamente do sinal amostrado $\overline{g}(t)$. Caso o sinal amostrado seja aplicado a um filtro passa-baixas ideal de frequência de corte $f_s/2$ Hz, a saída não será $G(f)$, mas $G_a(f)$ (Fig. 6.8c), que é uma versão distorcida de $G(f)$, devido a duas causas separadas:

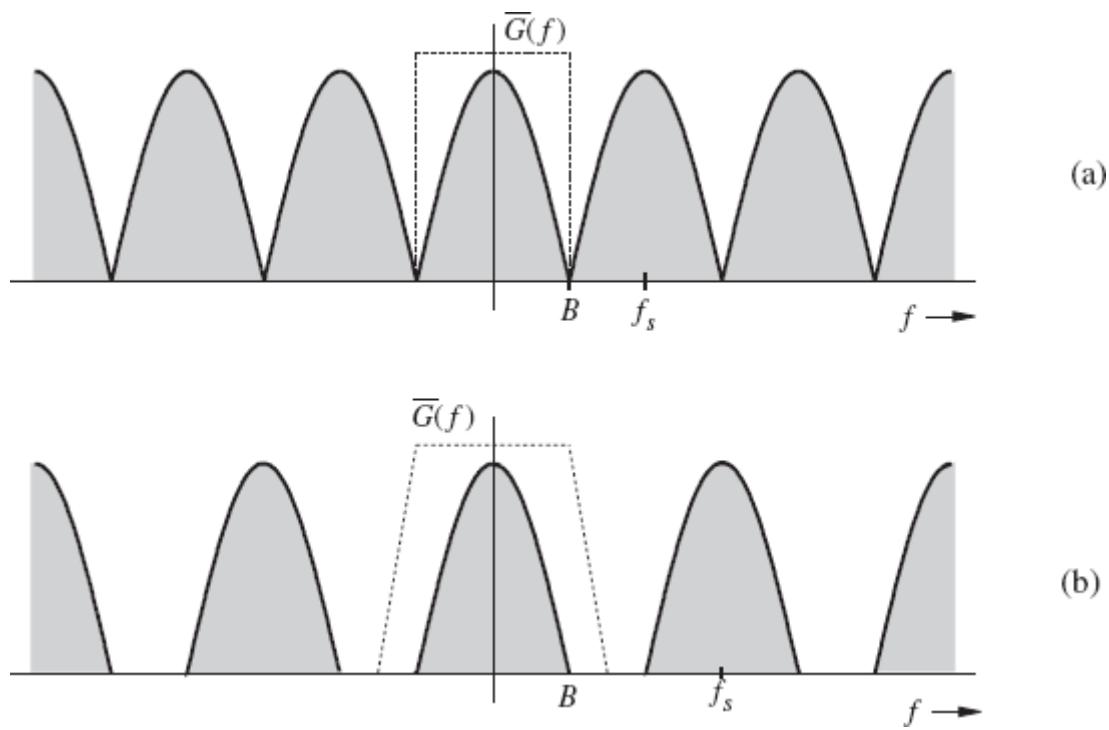


Figura 6.7 Espectros de um sinal amostrado; (a) à taxa de Nyquist; (b) a uma taxa maior que a de Nyquist.

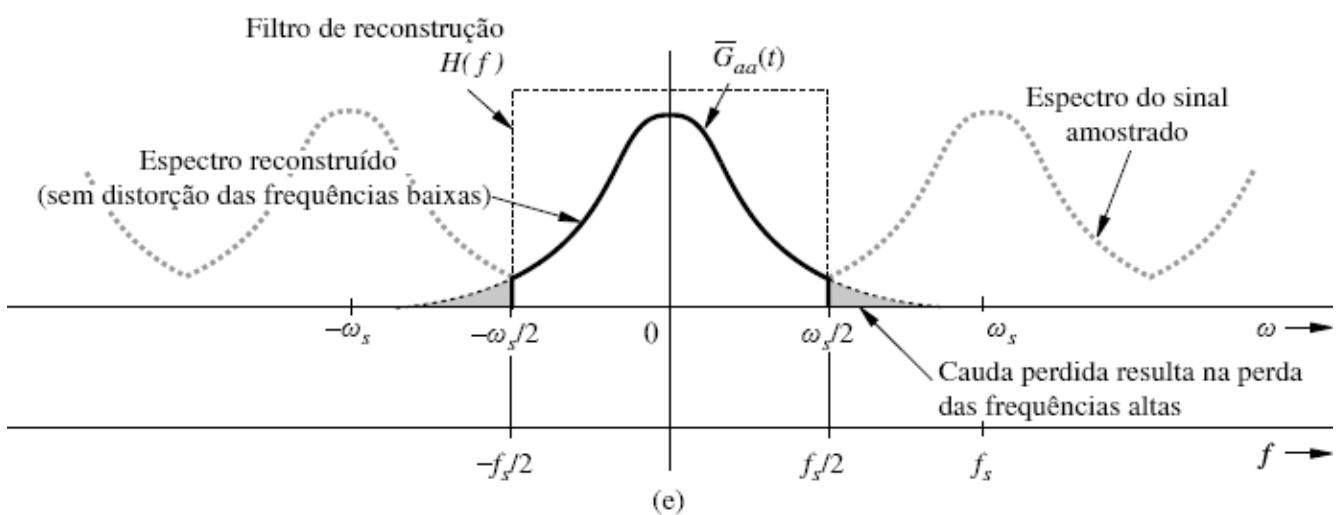
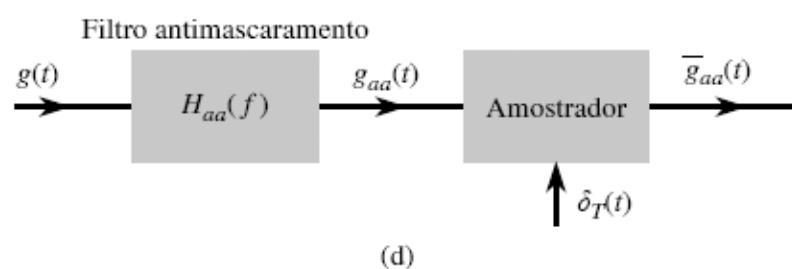
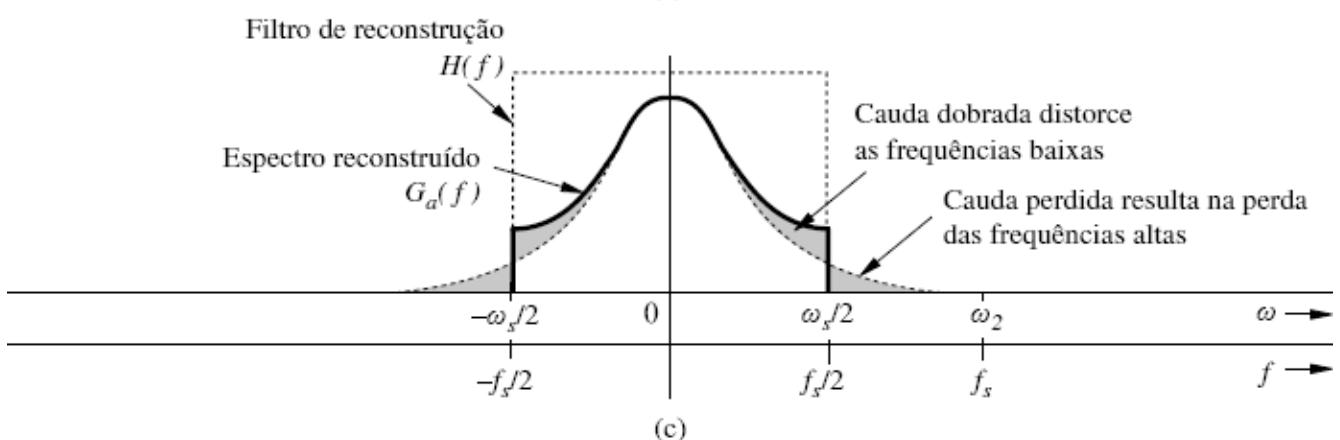
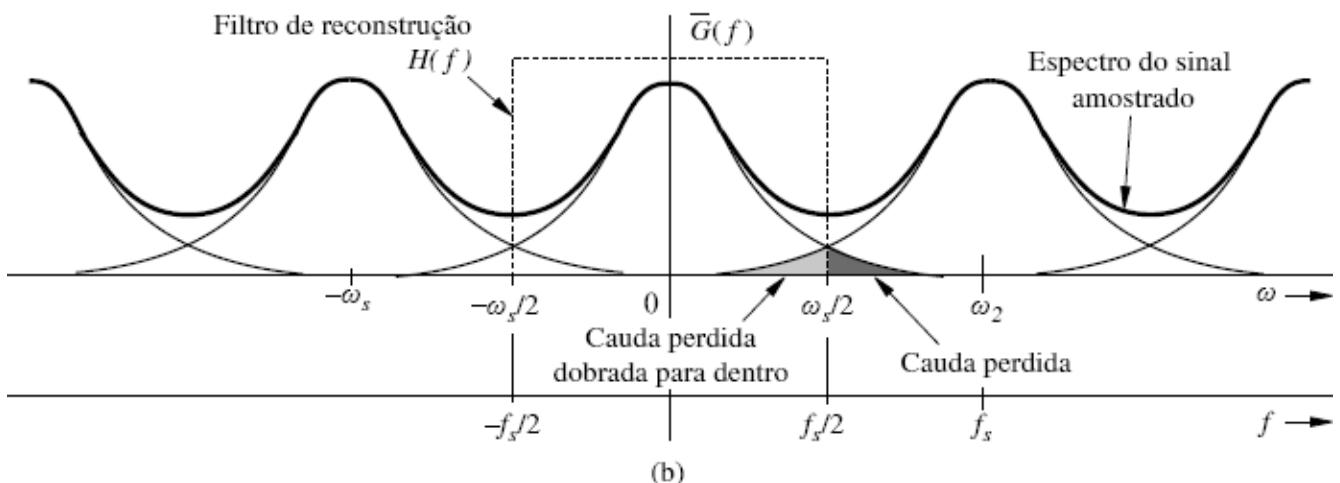
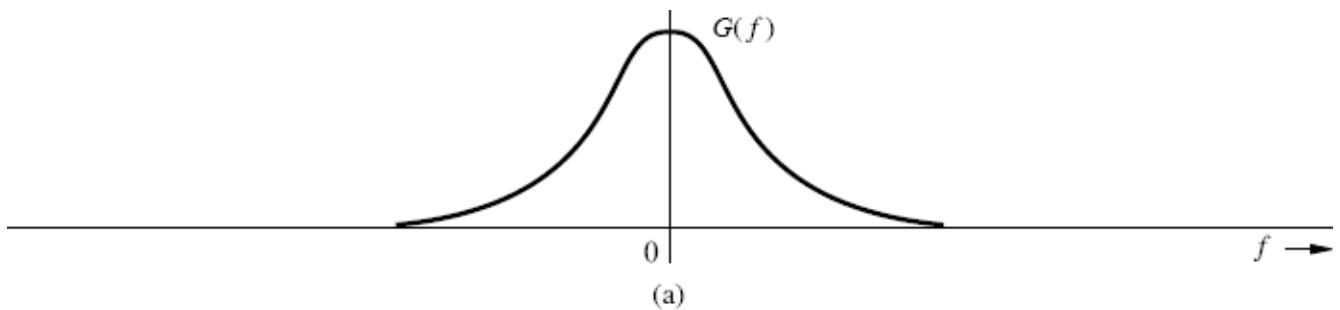


Figura 6.8 Efeito de mascaramento. (a) Espectro de um sinal prático $g(t)$. (b) Espectro de $g(t)$ amostrado. (c) Espectro do sinal reconstruído. (d) Esquema de amostragem com uso de filtro antimascaramento. (e) Espectros dos sinais amostrado (linha pontilhada) e reconstruído (linha cheia) com filtroantimascaramento.

1. A perda da cauda de $G(f)$ além de $|f| > f_s/2$ Hz.
2. A reaparição desta cauda invertida ou dobrada dentro do espectro.

Notemos que os espectros se cruzam na frequência $f_s/2 = 1/2T$ Hz, chamada frequência de *dobramento*. O espectro pode ser visto como se a cauda perdida se dobrasse para dentro na frequência de dobramento. Por exemplo, uma componente de frequência $(f_s/2) + f_z$ aparece “disfarçada” de uma componente de frequência baixa $(f_s/2) - f_z$. Assim, as componentes de frequências acima de $f_s/2$ reaparecem como componentes de frequências abaixo de $f_s/2$. Esta inversão da cauda, conhecida como *dobramento espectral* ou *mascaramento*, é ilustrada na Fig. 6.8b e, também, na Fig. 6.8c. No processo de mascaramento, não apenas são perdidas todas as componentes de frequências acima da frequência de dobramento $f_s/2$ Hz, mas as mesmas reaparecem (mascaradas) como componentes de frequências abaixo da frequência de dobramento $f_s/2$, como ilustrado na Fig. 6.8c.

O problema de mascaramento é análogo ao de um batalhão do exército em que um pelotão deserta para o lado inimigo, mas permanece aparentemente leal. O batalhão fica sujeito a risco duplo. Primeiro, perdeu o pelotão desertor como uma força de combate. Além disso, durante uma batalha, o batalhão enfrentará sabotagem causada pelos desertores e terá de usar um pelotão leal para neutralizar os desertores. Assim, a força armada perdeu dois pelotões, que deixaram de ter atividade produtiva.

Eliminação de Desertores: Filtro de Antimascaramento

Para o comandante do batalhão traído, a solução do problema seria óbvia. Assim que tomasse conhecimento da deserção, incapacitaria, de alguma forma, o pelotão desertor. Se fizer isso *antes do início da batalha*, o comandante perderá apenas um pelotão (o desertor).^{*} Esta é uma solução parcial ao duplo problema de traição e sabotagem; uma solução que retifica o problema parcialmente e elimina metade das perdas.

Seguiremos exatamente esta estratégia. Os desertores em potencial são todas as componentes de frequências acima da frequência de dobramento $f_s/2 = 1/2T$ Hz. Devemos eliminar (suprimir) estas componentes de $g(t)$ *antes da amostragem*. Tal supressão das frequências altas pode ser efetuada por um filtro passa-baixas ideal com frequência de corte $f_s/2$ Hz, como mostrado na Fig. 6.8d. Esse filtro recebe a denominação de *filtro antimascaramento*. A Fig. 6.8d também mostra que a filtragem antimascaramento é feita antes da amostragem. A Fig. 6.8c mostra os espectros do sinal amostrado e do sinal reconstruído, $G_{aa}(f)$, quando o esquema antimascaramento é empregado. Um filtro antimascaramento basicamente limita o sinal $g(t)$ em banda a $f_s/2$ Hz. Dessa forma, perdemos apenas as componentes acima da frequência de dobramento $f_s/2$ Hz. As componentes suprimidas não podem reaparecer e corromper as componentes de frequências abaixo da frequência de dobramento. O uso de um filtro antimascaramento faz com que o espectro do sinal reconstruído seja $G_{aa}(f) = G(f)$ para $|f| < f_s/2$. Embora percais o espectro além de $f_s/2$, o espectro para todas as frequências abaixo de $f_s/2$ permanece intacto. A distorção de mascaramento é reduzida à metade devido à eliminação do dobramento. Ressaltamos, mais uma vez, que a operação antimascaramento deve ser executada *antes da amostragem do sinal*.

Um filtro antimascaramento também ajuda a reduzir o ruído. Em geral, o ruído tem um espectro de banda larga e, sem antimascaramento, o próprio fenômeno de mascaramento faria que componentes de ruído fora da banda do sinal desejado aparecessem na banda do sinal. O antimascaramento suprime todo o espectro de ruído além da frequência $f_s/2$.

O filtro antimascaramento, por ser um filtro ideal, é irrealizável. Na prática, usamos um filtro de corte abrupto, que deixa um espectro residual altamente atenuado além da frequência de dobramento $f_s/2$.

Amostragem Força Sinais Não Limitados em Banda a Parecerem Limitados em Banda

A Fig. 6.8b mostra que o espectro de um sinal $\bar{g}(t)$ consiste em ciclos de $G(f)$ sobrepostos. Isso significa que $\bar{g}(t)$ são amostras sub-Nyquist de $g(t)$. Contudo, também podemos ver o espectro na Fig. 6.8b como o espectro $G_a(f)$ (Fig. 6.8c) repetido periodicamente a cada f_s Hz sem sobreposição. O espectro $G_a(f)$ é limitado em banda a $f_s/2$ Hz. Portanto, essas amostras (sub-Nyquist) de $g(t)$ são, na verdade, as amostras de Nyquist para o sinal $g_a(t)$. Em resumo, a amostragem de um sinal não limitado em banda $g(t)$ a uma taxa de f_s Hz faz com que as amostras pareçam ser as amostras de Nyquist de um outro sinal $g_a(t)$, que é limitado em banda a $f_s/2$ Hz. Em outras palavras, a amostragem faz um sinal não limitado em banda aparecer como um sinal limitado em banda $g_a(t)$, com largura de banda $f_s/2$ Hz. Uma conclusão semelhante se aplica quando $g(t)$ é um sinal limitado em banda, mas amostrado a uma taxa sub-Nyquist.

6.1.3 Máxima Taxa de Informação: Duas Porções de Informação por Segundo por Hertz

Um conhecimento da máxima taxa em que a informação pode ser transmitida ao longo de um canal de largura de banda B Hz é de fundamental importância em comunicações digitais. A seguir, deduziremos uma das relações mais básicas em comunicações, segundo a qual *um máximo de $2B$ porções independentes de informação por segundo pode ser transmitido, sem erro, em um canal de largura de banda B Hz*. Este resultado advém do teorema da amostragem.

Primeiro, o teorema da amostragem garante que um sinal de largura de banda de B Hz pode ser totalmente recuperado de amostras tomadas uniformemente a uma taxa de $2B$ amostras por segundo. Agora, precisamos mostrar que qualquer sequência de dados independentes a uma taxa de $2B$ Hz pode vir de amostras uniformes de um sinal passa-baixas de largura de banda B . Além disso, podemos construir esse sinal passa-baixas a partir da sequência de dados independentes.

Suponhamos que uma sequência de dados independentes seja denotada por $\{g_n\}$. A taxa correspondente é de $2B$ amostras por segundo. Portanto, sempre existe um sinal $g(t)$ (não necessariamente limitado em banda) tal que

$$g_n = g(nT_s) \quad T_s = \frac{1}{2B}$$

Na Fig. 6.9a, ilustramos, mais uma vez, o efeito de amostrar um sinal não limitado em banda $g(t)$ a uma taxa $f_s = 2B$ Hz. Devido ao mascaramento, o sinal amostrado ideal é

$$\begin{aligned} \bar{g}(t) &= \sum_n g(nT_s) \delta(t - nT_s) \\ &= \sum_n g_a(nT_s) \delta(t - nT_s) \end{aligned}$$

em que $g_a(t)$ é o sinal passa-baixas mascarado cujas amostras $g_a(nT_s)$ são iguais às amostras de $g(nT_s)$. Em outras palavras, amostragem de um sinal $g(t)$ a uma taxa sub-Nyquist gera amostras que podem ser igualmente obtidas da amostragem de um sinal limitado em banda $g_a(t)$ à taxa de Nyquist. Assim, pela Fig. 6.9, demonstramos que as amostragens de $g(t)$ e $g_a(t)$ à taxa de $2B$ Hz geram a mesma sequência de dados independentes $\{g_n\}$:

$$g_n = g(nT_s) = g_a(nT_s) \quad T_s = \frac{1}{2B} \quad (6.18)$$

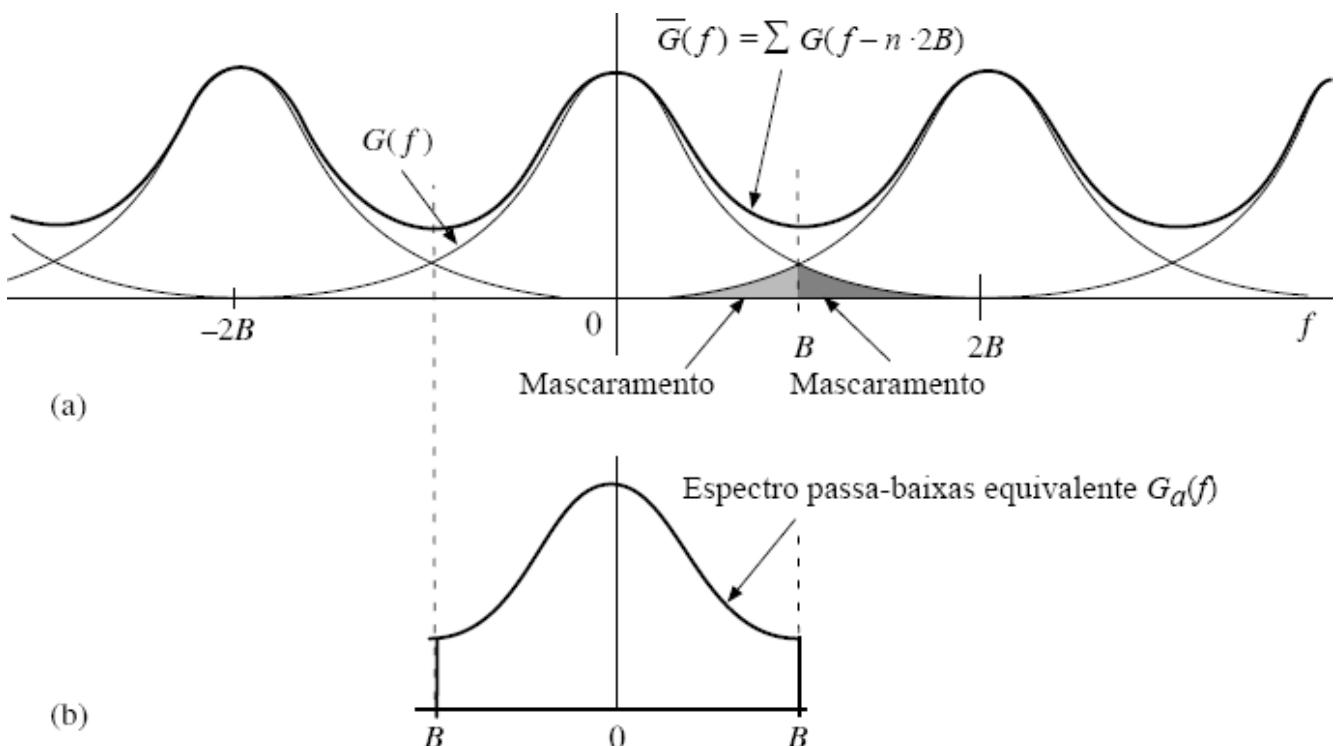


Figura 6.9 (a) Espectro de um sinal não limitado em banda e correspondente espectro amostrado $\bar{G}(f)$. (b) Espectro passa-baixas equivalente $G_a(f)$ construído das amostras uniformes de $g(t)$ à taxa de amostragem $2B$.

Ainda usando o teorema da amostragem, vemos que um sinal passa-baixas $g_a(t)$ com largura de banda B pode ser reconstruído de suas amostras uniformes [Eq. (6.10)]

$$g_a(t) = \sum_n g_n \operatorname{sinc} (2\pi Bt - k\pi)$$

Presumindo que não haja ruído, esse sinal pode ser transmitido sem erro ao longo de um canal sem distorção e com largura de banda B Hz. No receptor, a sequência de dados $\{g_n\}$ pode ser recuperada das amostras de Nyquist da saída do canal sem distorção $g_a(t)$ como os dados de informação desejados.

Essa taxa teórica de comunicação supõe um canal sem ruído. Na prática, ruído de canal é inevitável e, em consequência, essa taxa causará alguns erros de detecção. No Capítulo 14, discutiremos a capacidade de Shannon, que permite determinar a taxa teórica de comunicação sem erro na presença de ruído.

6.1.4 Análise de Amostragem Prática Não Ideal

Até aqui, focamos principalmente a amostragem uniforme ideal, que pode usar um trem de impulsos ideais para extrair precisamente o valor de sinal $g(kT_s)$ no instante de tempo exato $t = kT_s$. Na prática, nenhum dispositivo físico é capaz de executar esta tarefa. Em consequência, precisamos considerar implementações mais práticas de amostragem. Essa análise é importante para um melhor entendimento dos erros que, em geral, ocorrem durante conversão A/D prática e seus efeitos na reconstrução de sinais.

Amostradores práticos colhem cada amostra de sinal em um curto período de tempo T_p em torno de $t = kT_s$. Em outras palavras, a cada T_s segundos, o dispositivo de amostragem colhe uma fotografia de duração T_p do sinal $g(t)$ sendo amostrado. Isso é como tirar uma sequência de fotografias de um velocista olímpico em uma corrida de 100 m rasos. Assim como uma câmera fotográfica gera uma imagem estática tomando uma média do cenário ao logo da janela T_p , o amostrador prático gera um valor de amostra em $t = kT_s$ tomando a média de valores do sinal $g(t)$ na janela T_p , ou seja,

$$g_1(kT_s) = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} g(kT_s + t) dt \quad (6.19a)$$

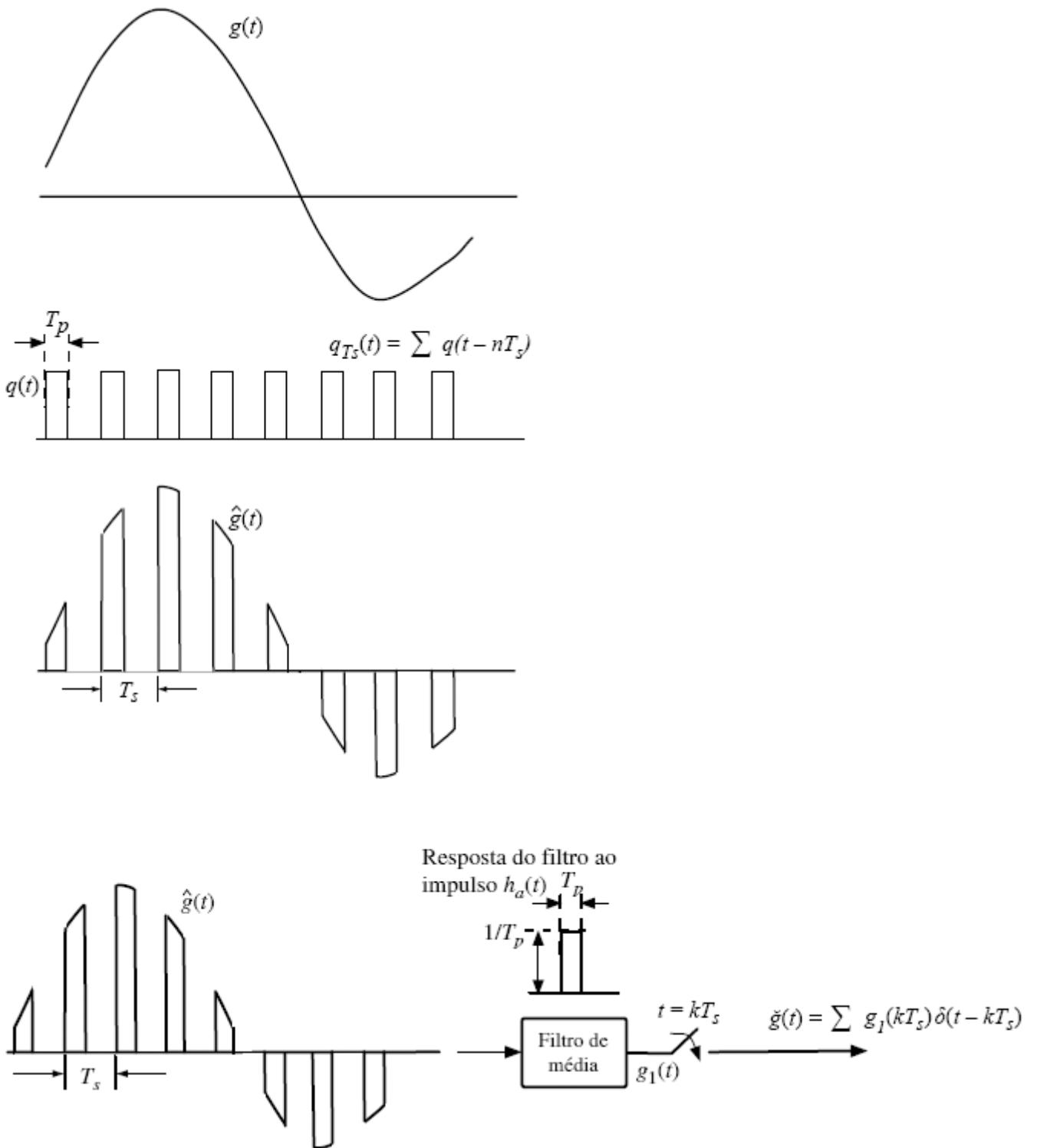


Figura 6.10 Ilustração de amostragem prática.

Dependendo do dispositivo, essa média pode ser ponderada por uma função de peso $q(t)$ que depende do dispositivo:

$$g_1(kT_s) = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} q(t)g(kT_s + t) dt \quad (6.19b)$$

Portanto, usamos a analogia com a câmera fotográfica para entender que amostradores práticos geram sinais amostrados da forma

$$\check{g}(t) = \sum g_1(kT_s)\delta(t - kT_s) \quad (6.20)$$

Agora, mostraremos a relação entre o sinal amostrado prático $\check{g}(t)$ e o sinal passa-baixas analógico original $g(t)$ no domínio da frequência.

Usaremos a Fig. 6.10 para ilustrar a relação entre $\check{g}(t)$ e $g(t)$ para o caso especial de ponderação uniforme. Isto significa que

$$q(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq 0,5T_p \\ 0 & |t| > 0,5T_p \end{cases}$$

Como mostrado na Fig. 6.10, $g_1(t)$ pode ser obtido, de modo equivalente, usando primeiro “amostragem natural” para gerar as *fotografias* do sinal

$$\hat{g}(t) = g(t) \cdot q_{T_s}(t) \quad (6.21)$$

em que

$$q_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q(t - nT_s)$$

A Fig. 6.10b ilustra o sinal-fotografia $\hat{g}(t)$. Podemos, então, definir um filtro de média (*averaging filter*) com a seguinte resposta ao impulso

$$h_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{T_p} & -\frac{T_p}{2} \leq t < \frac{T_p}{2} \\ 0 & \text{para outros valores de } t \end{cases}$$

ou função de transferência

$$H_a(f) = \text{sinc}(\pi f T_p)$$

Aplicação do sinal-fotografia $\hat{g}(t)$ ao filtro de média gera o sinal de saída

$$g_1(t) = h_a(t) * \hat{g}(t)$$

Como ilustrado na Fig. 6.10c, o amostrador prático gera um sinal por meio de amostragem da saída do filtro $g_1(kT_s)$. Portanto, usamos a Fig. 6.10c para estabelecer o processo equivalente para gerar amostras práticas de $g(t)$, que consiste em tirar fotografias, tomar a média e amostrar. Agora, podemos examinar as relações no domínio da frequência para analisar a distorção gerada por amostradores práticos.

Na análise a seguir, consideraremos uma função de peso genérica $q(t)$ sujeita à única condição

$$q(t) = 0, \quad t \notin (-0,5T_p, 0,5T_p)$$

Primeiro, notemos que $q_{T_s}(t)$ é periódica. Portanto, sua série de Fourier pode ser escrita como

$$q_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n e^{jn\omega_s t}$$

em que

$$Q_n = \frac{1}{T_s} \int_{-0,5T_p}^{0,5T_p} q(t) e^{-j n \omega_s t} dt$$

Assim, o sinal de saída do filtro de média é

$$\begin{aligned} g_1(t) &= h_a(t) * [g(t)q_{T_s}(t)] \\ &= h_a(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n g(t) e^{jn\omega_s t} \end{aligned} \quad (6.22)$$

No domínio da frequência, temos

$$\begin{aligned} G_1(f) &= H(f) \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n G(f - nf_s) \\ &= \text{sinc}(\pi f T_p) \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n G(f - nf_s) \end{aligned} \quad (6.23)$$

Como

$$\check{g}(t) = \sum_k g_1(kT_s) \delta(t - kT_s)$$

podemos aplicar o teorema da amostragem para mostrar que

$$\begin{aligned} \check{G}(f) &= \frac{1}{T_s} \sum_m G_1(f + mf_s) \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_m \text{sinc}\left[\frac{(2\pi f + m2\pi f_s)T_p}{2}\right] \sum_n Q_n G(f + mf_s - nf_s) \\ &= \sum_{\ell} \left(\frac{1}{T_s} \sum_n Q_n \text{sinc}[(\pi f + (n + \ell)\pi f_s)T_p] \right) G(f + \ell f_s) \end{aligned} \quad (6.24)$$

A última igualdade veio da mudança do índice do somatório $\ell = m - n$.

Podemos definir a resposta em frequência

$$F_{\ell}(f) = \frac{1}{T_s} \sum_n Q_n \text{sinc}[(\pi f + (n + \ell)\pi f_s)T_p]$$

Esta definição nos permite escrever

$$\check{G}(f) = \sum_{\ell} F_{\ell}(f) G_1(f + \ell f_s) \quad (6.25)$$

Para o sinal passa-baixas $G(f)$ com largura de banda B Hz, a aplicação de um filtro passa-baixas ideal (interpolação) gera um sinal distorcido

$$F_0(f)G(f) \quad (6.26a)$$

com

$$F_0(f) = \frac{1}{T_s} \sum_n Q_n \operatorname{sinc} [\pi(f + nf_s) T_p] \quad (6.26b)$$

Podemos ver das Eqs. (6.25) e (6.26) que o sinal resultante de amostragem prática sempre contém uma distorção conhecida $F_0(f)$.

Além disso, o uso de um pulso prático de reconstrução $p(t)$, como na Eq. (6.12), gera distorções adicionais. Reconstruamos $g(t)$ usando as amostras práticas para gerar

$$\check{g}(t) = \sum_n g_1(nT_s)p(t - nT_s)$$

Da Eq. (6.13), obtemos a relação entre os espectros da reconstrução e da mensagem original $G(f)$ como

$$\check{G}(f) = P(f) \sum_n F_n(f) G(f + nf_s) \quad (6.27)$$

Como $G(f)$ tem largura de banda de B Hz, precisaremos projetar um novo equalizador com função de transferência $E(f)$, de modo que a reconstrução não apresente distorção na largura de banda B , ou seja,

$$E(f)P(f)F_0(f) = \begin{cases} 1 & |f| < B \\ \text{Flexível} & B < |f| < f_s - B \\ 0 & |f| > f_s - B \end{cases} \quad (6.28)$$

O equalizador simples pode ser projetado para compensar duas fontes de distorção: efeito de amostragem não ideal em $F_0(f)$ e efeito de reconstrução não ideal em $P(f)$. O projeto do equalizador é possível porque as duas distorções são conhecidas previamente.

6.1.5 Algumas Aplicações do Teorema da Amostragem

O teorema da amostragem é muito importante na análise, processamento e transmissão de sinais, pois nos permite substituir um sinal temporal contínuo por uma sequência discreta de números. O processamento de um sinal temporal contínuo é, portanto, equivalente ao processamento de uma sequência discreta de números. Isso nos leva diretamente à área de filtragem digital. No campo das comunicações, a transmissão de uma mensagem contínua se reduz à transmissão de uma sequência de números. Isso abre portas a muitas técnicas novas de comunicação de sinais temporais contínuos por trens de pulsos. O sinal temporal contínuo $g(t)$ é amostrado, e os valores das amostras são usados para modificar certos parâmetros de um trem de pulsos periódicos. Podemos variar as amplitudes (Fig. 6.11b), as larguras (Fig. 6.11c) ou as posições (Fig. 6.11d) dos pulsos proporcionalmente aos valores das amostras do sinal $g(t)$. Assim, podemos ter **modulação por amplitude de pulso** (PAM – *pulse amplitude modulation*), **modulação por largura de pulso** (PWM – *pulse width modulation*), ou **modulação por posição de pulso** (PPM – *pulse position modulation*). A mais importante forma de modulação por pulso hoje em dia é a modulação por **codificação de pulsos** (PCM – *pulse code modulation*), introduzida na Seção 1.2. Em todos estes casos, em vez de transmitir $g(t)$, transmitimos o sinal modulado em pulsos. No receptor, lemos a informação do sinal modulado em pulsos e reconstruímos o sinal analógico $g(t)$.

Uma das vantagens do uso de modulação em pulsos é permitir a transmissão simultânea de vários sinais por meio de compartilhamento do tempo – **multiplexação por divisão no tempo** (TDM – *time division multiplexing*). Como um sinal modulado em pulsos ocupa somente uma parte do canal temporal, podemos transmitir vários sinais modulados em pulsos em um mesmo canal entrelaçando-os. A Fig. 6.12 ilustra a TDM de dois sinais PAM. Dessa forma, podemos multiplexar diversos sinais em um mesmo canal com a redução da largura de cada pulso.

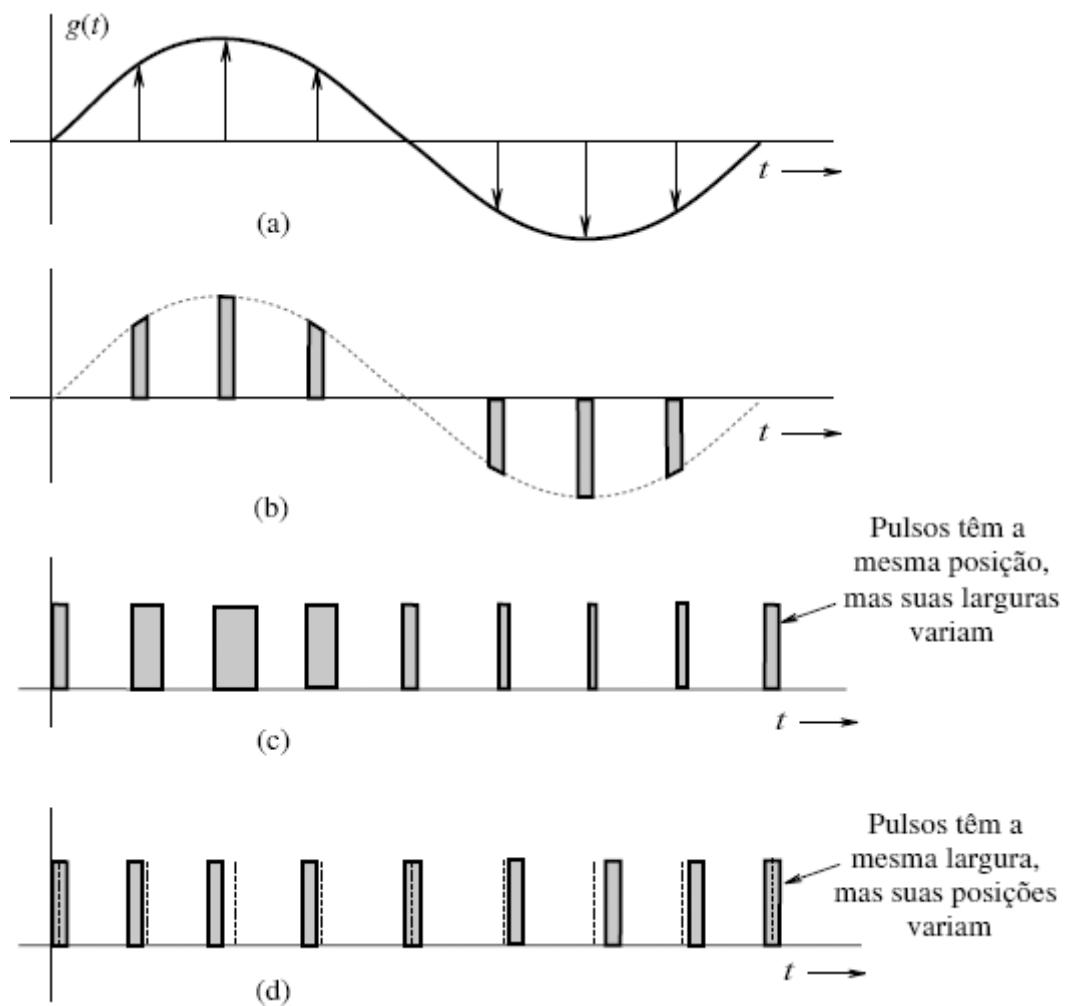


Figura 6.11 Sinais modulados em pulsos. (a) Sinal não modulado. (b) Sinal PAM. (c) Sinal PWM. (d) Sinal PPM.

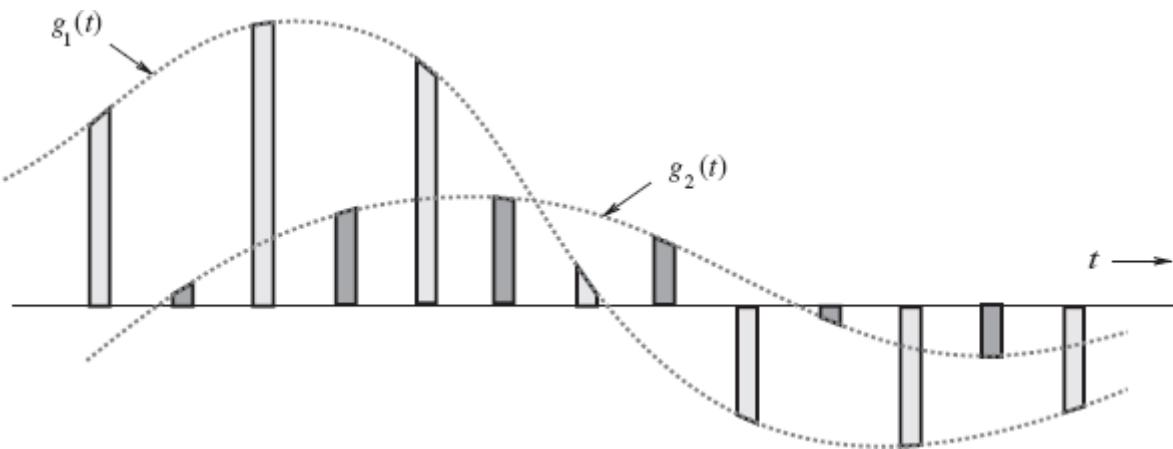


Figura 6.12 Multiplexação por divisão do tempo de dois sinais.

Outro método de transmissão simultânea de vários sinais em banda base é a multiplexação por divisão em frequência (FDM – *frequency division multiplexing*), discutida brevemente no Capítulo 4. Em FDM, vários sinais são multiplexados por compartilhamento da largura de banda do canal. O espectro de cada mensagem é deslocado a uma banda específica não ocupada por qualquer outro sinal. A informação de vários sinais é posicionada em bandas de frequências do canal que não se sobrepõem. De certa forma, TDM e FDM são duais uma da outra.

6.2 MODULAÇÃO POR CODIFICAÇÃO DE PULSO (PCM)

A PCM é a mais útil e mais largamente empregada das modulações em pulsos mencionadas. Como ilustrado na Fig. 6.13, a PCM é basicamente uma ferramenta para converter um sinal analógico em um sinal digital (conversão A/D). Um sinal **analógico** é caracterizado por uma amplitude que pode assumir qualquer valor em um intervalo contínuo. Isso significa que pode assumir um número infinito de valores. Um sinal **digital**, por sua vez, tem uma amplitude que pode assumir apenas um número finito de

valores. Um sinal analógico pode ser convertido em um sinal digital através de amostragem e **quantização**, ou seja, aproximação de seu valor ao mais próximo dos números permitidos (ou **níveis de quantização**), como indicado na Fig. 6.14. As amplitudes do sinal analógico $m(t)$ ocorrem no intervalo $(-m_p, m_p)$, que é dividido em L subintervalos, cada um com largura $\Delta v = 2m_p/L$. A seguir, cada amplitude de amostra é aproximada pelo valor no ponto médio do subintervalo em que a amostra ocorre (Fig. 6.14, com $L = 16$). Cada amostra é, então, aproximada a um dos L números. Assim, o sinal é digitalizado, com amostras quantizadas que assumem um dos L valores. Um sinal deste tipo é conhecido como um **sinal digital L -ário**.



Figura 6.13 Diagrama de blocos de um sistema PCM.

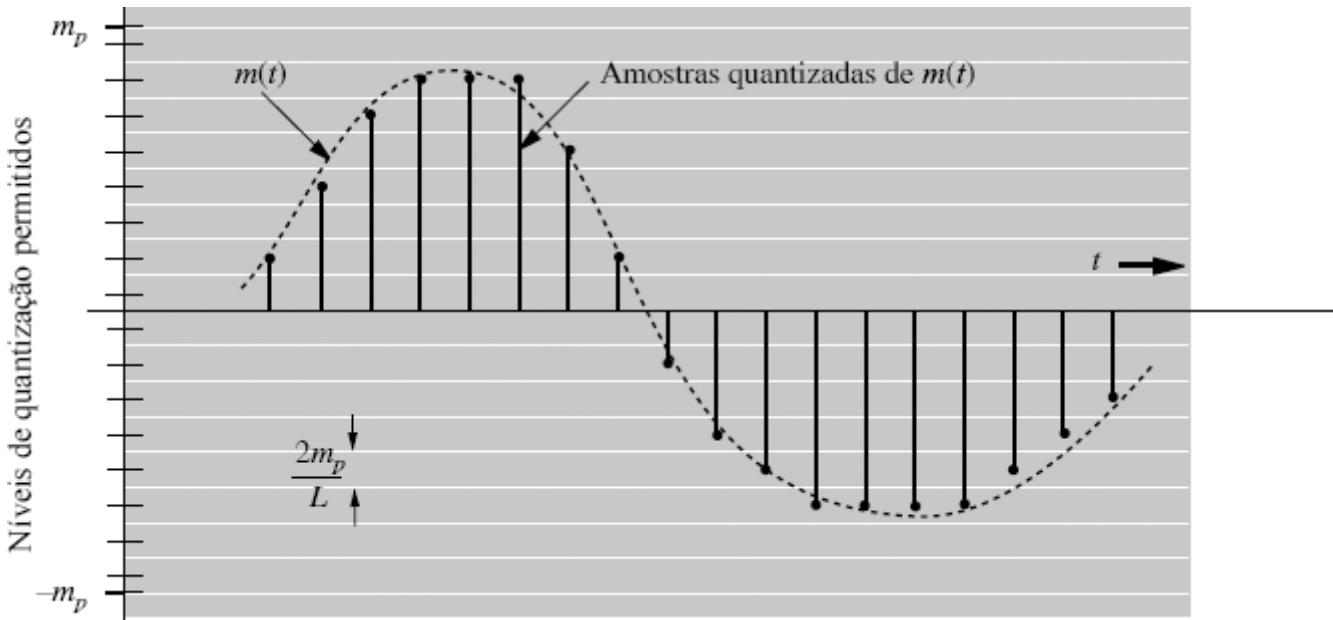


Figura 6.14 Quantização de um sinal analógico amostrado.

De um ponto de vista prático, um sinal digital binário (sinal que pode assumir apenas dois valores) é muito desejável, devido à sua simplicidade, economia, e facilidade de implementação. Podemos converter um sinal L -ário em um sinal binário através de codificação por pulsos. Essa codificação é ilustrada na Fig. 1.5 para o caso $L = 16$. Esta codificação, formada pela representação binária dos 16 dígitos decimais de 0 a 15, é conhecida como **código binário natural (CBN)**. Outras maneiras de obtenção de códigos binários serão discutidas posteriormente. A cada um dos 16 níveis a serem transmitidos é alocado código binário de quatro dígitos. O sinal analógico $m(t)$ fica, então, convertido em um sinal digital (binário). Um dígito binário é denominado **bit** (de *binary digit*), por conveniência. Essa contração de “*binary digit*” em “*bit*” se tornou uma abreviação padrão na indústria e é usada em todo o livro.

Cada amostra no exemplo é, portanto, codificada por quatro bits. Para a transmissão destes dados binários, precisamos alocar uma forma diferente de pulso a cada um dos dois bits. Uma possibilidade é alocar um pulso negativo ao binário **0** e um pulso positivo ao binário **1** (Fig. 1.5), de modo que cada amostra seja transmitida por um grupo de quatro pulsos binários (codificação por pulsos). O sinal resultante é um sinal binário.

A largura de banda de um sinal de áudio é de cerca de 15 kHz. Contudo, para voz, testes subjetivos mostraram que a articulação (inteligibilidade) do sinal não é afetada se todas as componentes acima de 3400 Hz forem suprimidas.* Como, em telefonia, o objetivo é a inteligibilidade e não alta fidelidade, as componentes acima de 3400 Hz são eliminadas por um filtro passa-baixas. O sinal resultante é, então, amostrado a uma taxa de 8000 amostras por segundo (8 kHz). Esta taxa é intencionalmente maior que a taxa de amostragem Nyquist de 6,8 kHz para que filtros realizáveis possam ser aplicados na reconstrução do sinal. Cada amostra é, por fim, quantizada em 256 níveis ($L = 256$), o que requer um grupo de oito pulsos binários para codificar cada amostra ($2^8 = 256$). Assim, um sinal de telefonia requer $8 \times 8.000 = 64.000$ pulsos binários por segundo.

Uma aplicação mais recente de PCM é o *compact disc* (CD). Esse é um caso de alta fidelidade e requer uma largura de banda de 20 kHz para o sinal de áudio. Embora a taxa de amostragem de Nyquist seja apenas 40 kHz, a taxa de amostragem usada é de 44,1 kHz, pelas razões mencionadas anteriormente. O sinal é quantizado em um número muito maior ($L = 65.536$) de níveis de

quantização, e cada um é representado por 16 bits para reduzir o erro de quantização. Amostras codificadas em binário (1,4 milhão de bits/s) são, então, gravadas no CD.

6.2.1 Vantagens de Comunicação Digital

A seguir, são listadas algumas vantagens da comunicação digital em relação à comunicação analógica:

1. A comunicação digital é capaz de suportar muito mais ruído de canal e distorção, desde que o ruído e a distorção estejam dentro de certos limites, e é mais robusta do que a comunicação analógica. No caso de mensagens analógicas, qualquer distorção ou ruído, não importa quanto pequenos sejam, alterará o sinal recebido.

2. A maior vantagem da comunicação digital em relação à analógica, no entanto, é viabilizar o uso de repetidores regeneradores. Em um sistema de comunicação analógica, um sinal de mensagem se torna progressivamente mais fraco à medida que viaja pelo canal, enquanto o ruído cumulativo de canal e a distorção se tornam progressivamente mais fortes. Por fim, o sinal é superado por ruído e distorção. A amplificação é de pouca utilidade, pois o sinal e o ruído são amplificados na mesma proporção. Em consequência, a distância ao longo da qual uma mensagem analógica pode ser transmitida é limitada pela potência de transmissão inicial. No caso de comunicação digital, uma longa distância de transmissão também pode acarretar ruído e interferências excessivas. O truque, no entanto, consiste em montar estações repetidoras ao longo da rota de transmissão em distâncias curtas o bastante para que pulsos de sinal possam ser detectados antes que o acúmulo de ruído e distorção destrua o sinal. Em cada estação repetidora, os pulsos são detectados e pulsos novos e limpos são transmitidos à próxima estação repetidora, que, por sua vez, duplica esse procedimento. Se o ruído e a distorção forem mantidos abaixo de certos limites (o que é possível, tendo em vista o pequeno espaçamento entre repetidores), os pulsos podem ser detectados corretamente.* Assim, mensagens digitais podem ser transmitidas por distâncias maiores e com mais confiabilidade do que mensagens analógicas. Na PCM, o erro mais significativo advém da quantização. Esse erro pode ser reduzido tanto quanto desejado, com o aumento do número de níveis de quantização; o preço dessa solução é pago com o aumento da largura de banda do meio de transmissão (canal).

3. A implementação em hardware digital é flexível e permite o uso de microprocessadores, computadores digitais e circuitos integrados de larga escala.

4. Sinais digitais podem ser codificados para produzir taxas de erro extremamente pequenas e alta fidelidade, assim como privacidade.

5. A multiplexação de sinais digitais é mais fácil e eficiente que a de sinais analógicos.

6. A comunicação digital é inherentemente mais eficiente que a analógica no que diz respeito à troca de SNR por largura de banda.

7. O armazenamento de sinais digitais é relativamente simples e barato e permite a busca e seleção de informação em bases de dados eletrônicas distantes.

8. A reprodução com mensagens digitais pode ser extremamente confiável e sem deterioração. Mensagens analógicas, como fotocópias e filmes, por exemplo, perdem qualidade a cada estágio sucessivo de reprodução e devem ser transportadas fisicamente de um local distante a outro, o que, em geral, tem custo relativamente alto.

9. O custo de hardware digital continua tendo redução de 50% a cada dois ou três anos, enquanto o desempenho ou capacidade dobra no mesmo período. E não há um fim à vista para o empolgante e exponencial progresso da tecnologia digital. Em consequência, hoje, as tecnologias digitais dominam todas as áreas de comunicação e armazenamento de informação.

Nota Histórica

Para descrever prosódia, o antigo escritor indiano Pingala aplicou sofisticados conceitos matemáticos, produzindo a primeira descrição de um sistema numérico digital de que temos notícia, possivelmente no oitavo século a.C.⁶ Outros, como R. Hall, em *Mathematics of Poetry* (Matemática da Poesia), localizaram-no mais tarde, por volta de 200 a.C. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) foi o primeiro matemático no ocidente a estabelecer sistematicamente a representação binária (usando 1s e 0s) para qualquer número. Ele sentiu uma significância espiritual em sua descoberta, acreditando que **1**, representando a unidade, era claramente um símbolo para Deus, enquanto **0** representava o nada. Ele raciocinou que, se todos os números podem ser representados meramente com o uso de **1** e **0**, isto provava, com certeza, que Deus criara o universo a partir do nada!

6.2.2 Quantização

Como mencionado anteriormente, sinais digitais têm uma variedade de fontes. Algumas, como computadores, são inherentemente digitais. Outras são analógicas, convertidas à forma digital por meio de diferentes técnicas, como PCM ou modulação delta (DM), que analisaremos em seguida. O resto desta seção apresenta uma discussão quantitativa da PCM e de seus vários aspectos, como quantização, codificação, sincronização e as necessárias largura de banda e SNR de transmissão.

Para quantização, limitamos a amplitude do sinal de mensagem $m(t)$ ao intervalo $(-m_p, m_p)$, como mostrado na Fig. 6.14. Notemos que m_p não é necessariamente a amplitude de pico $m(t)$. As amplitudes de $m(t)$ que ultrapassam $\pm m_p$ são simplesmente truncadas. Portanto, m_p não é um parâmetro do sinal $m(t)$; é o limite do quantificador. O intervalo de amplitudes $(-m_p, m_p)$ é dividido em L intervalos uniformemente espaçados, cada um com largura $\Delta v = 2m_p/L$. Um valor de amostra é

aproximado pelo valor no ponto médio do intervalo em que a amostra ocorre (Fig. 6.14). As amostras quantizadas são codificadas e transmitidas como pulsos binários. No receptor, alguns pulsos podem ser detectados erroneamente. Em consequência, há duas fontes de erro neste esquema: *erro de quantização* e *erro de detecção de pulso*. Em quase todos os esquemas práticos, o erro de detecção de pulsos é muito pequeno em comparação com o erro de quantização, e pode ser desprezado. Assim, na análise a seguir, admitiremos que o erro no sinal recebido é causado exclusivamente pela quantização.

Se $m(kT_s)$ for a k -ésima amostra do sinal $m(t)$ e $\hat{m}(kT_s)$ e for a correspondente amostra quantizada, da fórmula de interpolação na Eq. (6.10), temos

$$m(t) = \sum_k m(kT_s) \operatorname{sinc} (2\pi Bt - k\pi)$$

e

$$\hat{m}(t) = \sum_k \hat{m}(kT_s) \operatorname{sinc} (2\pi Bt - k\pi)$$

em que $\hat{m}(t)$ é o sinal reconstruído das amostras quantizadas. A componente de distorção $q(t)$ no sinal reconstruído é $q(t) = \hat{m}(t) - m(t)$. Logo,

$$\begin{aligned} q(t) &= \sum_k [\hat{m}(kT_s) - m(kT_s)] \operatorname{sinc} (2\pi Bt - k\pi) \\ &= \sum_k q(kT_s) \operatorname{sinc} (2\pi Bt - k\pi) \end{aligned}$$

em que $q(kT_s)$ é o erro de quantização na k -ésima amostra. O sinal $q(t)$ é o sinal indesejado e, portanto, atua como um ruído, conhecido como **ruído de quantização**. Para calcular a potência ou valor quadrático médio de $q(t)$, temos

$$\begin{aligned} \overline{q^2(t)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} q^2(t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_k q(kT_s) \operatorname{sinc} (2\pi Bt - k\pi) \right]^2 dt \end{aligned} \quad (6.29a)$$

Podemos mostrar (ver o Exercício 3.7-4) que os sinais $\operatorname{sinc} (2\pi Bt - m\pi)$ e $\operatorname{sinc} (2\pi Bt - n\pi)$ são ortogonais, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc} (2\pi Bt - m\pi) \operatorname{sinc} (2\pi Bt - n\pi) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{1}{2B} & m = n \end{cases} \quad (6.29b)$$

Por conta desse resultado, a integral dos termos cruzados no lado direito da Eq. (6.29a) se anula, e obtemos

$$\begin{aligned} \overline{q^2(t)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_k q^2(kT_s) \operatorname{sinc}^2 (2\pi Bt - k\pi) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_k q^2(kT_s) \int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sinc}^2 (2\pi Bt - k\pi) dt \end{aligned}$$

pela relação de ortogonalidade (6.29b), temos

$$\tilde{q^2}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2BT} \sum_k q^2(kT_s) \quad (6.30)$$

Como a taxa de amostragem é $2B$, o número total de amostras no intervalo de média T é $2BT$. Assim, o lado direito da Eq. (6.30) representa o valor médio, ou a média do quadrado do erro de quantização. Os níveis de quantização são separados por $\Delta v = 2m_p/L$. Como um valor de amostra é aproximado pelo ponto médio do subintervalo (de altura Δv) em que a amostra é feita, o máximo erro de quantização é $\pm\Delta v/2$. Assim, o erro de quantização está no intervalo $(-\Delta v/2, \Delta v/2)$, sendo

$$\Delta v = \frac{2m_p}{L} \quad (6.31)$$

Admitindo que o erro possa assumir qualquer valor no intervalo $(-\Delta v/2, \Delta v/2)$ com igual probabilidade, o erro de quantização quadrático médio $\tilde{q^2}$ é dado por*

$$\begin{aligned} \tilde{q^2} &= \frac{1}{\Delta v} \int_{-\Delta v/2}^{\Delta v/2} q^2 dq \\ &= \frac{(\Delta v)^2}{12} \end{aligned} \quad (6.32)$$

$$= \frac{m_p^2}{3L^2} \quad (6.33)$$

Como $\tilde{q^2}(t)$ é o valor quadrático médio ou potência do ruído de quantização, será denotado por N_q .

$$N_q = \tilde{q^2}(t) = \frac{m_p^2}{3L^2}$$

Supondo que o erro de detecção de pulsos no receptor seja desprezível, o sinal reconstruído $\hat{m}(t)$ na saída do receptor é

$$\hat{m}(t) = m(t) + q(t)$$

O sinal desejado na saída é $m(t)$ e o ruído (erro) de quantização, $q(t)$. Como a potência do sinal de mensagem $m(t)$ é $\tilde{m^2}(t)$, então

$$\begin{aligned} S_o &= \tilde{m^2}(t) \\ N_o = N_q &= \frac{m_p^2}{3L^2} \\ \text{e} \\ \frac{S_o}{N_o} &= 3L^2 \frac{\tilde{m^2}(t)}{m_p^2} \end{aligned} \quad (6.34)$$

Nesta equação, m_p é o valor de pico da amplitude que o quantizador pode aceitar e, portanto, é um parâmetro do quantizador. Isso significa que S_o/N_o , a SNR, é uma função linear da potência $\tilde{m^2}(t)$ do sinal de mensagem (ver a Fig. 6.18, com $\mu = 0$).

6.2.3 Princípio da Taxação Progressiva: Quantização Não Uniforme

Recordemos que S_o/N_o , a SNR, é uma indicação da qualidade do sinal recebido. Idealmente, gostaríamos de ter uma SNR constante (mesma qualidade) para todos os valores de potência $\overbrace{m^2(t)}$ do sinal de mensagem. Infelizmente, a SNR é diretamente proporcional à potência $\overbrace{m^2(t)}$ do sinal, que chega a variar em até 40 dB (uma relação de potência de 10^4) de alto-falante para alto-falante. A potência de sinal também pode variar devido a diferentes comprimentos dos circuitos de conexão. Isso indica que a SNR na Eq. (6.34) pode variar muito, dependendo do alto-falante e do comprimento do circuito. Mesmo para um dado alto-falante, a qualidade do sinal recebido sofrerá degradação apreciável se a pessoa falar com voz suave. Estatisticamente, as menores amplitudes predominam na voz, e as maiores amplitudes ocorrem com frequência muito menor. Isso significa que a SNR será baixa na maior parte do tempo.

A raiz desta dificuldade reside no fato de que os incrementos de quantização têm valor uniforme $\Delta v = 2m_p/L$. O ruído de quantização $N_q = (\Delta v)^2/12$ [Eq. (6.32)] é diretamente proporcional ao quadrado do incremento. O problema pode ser resolvido com o uso de incrementos menores para amplitudes menores (quantização não uniforme), como mostrado na Fig. 6.15a. O mesmo resultado é obtido se as amostras de sinal forem, primeiro, comprimidas e, depois, quantizadas com incremento uniforme. A característica entrada-saída de um compressor é ilustrada na Fig. 6.15b. Nessa figura, o eixo horizontal é o sinal de entrada normalizado (ou seja, a amplitude do sinal de entrada m dividida pelo valor de pico do sinal m_p). O eixo vertical é o sinal de saída y . O compressor mapeia incrementos Δm do sinal de entrada em incrementos maiores Δy para sinais menores; o contrário se passa para grandes sinais de entrada. Dessa forma, um dado intervalo Δm contém um maior número de incrementos (ou incrementos de menor tamanho) quando m é pequeno. O erro de quantização é menor para menores valores de potência do sinal de entrada. Uma característica logarítmica aproximada de compressão produz um ruído de quantização que é praticamente proporcional à potência de sinal $\overbrace{m^2(t)}$, resultando em uma SNR que praticamente independe da potência do sinal de entrada em um grande intervalo dinâmico⁵ (ver a Fig. 6.18). Essa abordagem de equalização da SNR parece semelhante ao uso de taxação progressiva de imposto de renda para equalizar os rendimentos da população. Os que falam alto e sinais mais fortes são penalizados com maiores incrementos de ruído Δv para compensar os que falam baixo e os sinais mais fracos.

Entre as diversas opções, duas leis de compressão têm sido aceitas como padrões desejáveis pela ITU-T:⁶ a lei μ , usada na América do Norte e no Japão, e a lei A , usada na Europa, no resto do mundo e em rotas internacionais. As curvas das leis μ e A têm simetria ímpar em relação ao eixo vertical. A lei μ (para amplitudes positivas) é dada por

$$y = \frac{1}{\ln(1+\mu)} \ln \left(1 + \frac{\mu m}{m_p} \right) \quad 0 \leq \frac{m}{m_p} \leq 1 \quad (6.35a)$$

A lei A (para amplitudes positivas) é dada por

$$y = \begin{cases} \frac{A}{1 + \ln A} \left(\frac{m}{m_p} \right) & 0 \leq \frac{m}{m_p} \leq \frac{1}{A} \\ \frac{1}{1 + \ln A} \left(1 + \ln \frac{A m}{m_p} \right) & \frac{1}{A} \leq \frac{m}{m_p} \leq 1 \end{cases} \quad (6.35b)$$

Estas características são ilustradas na Fig. 6.16.

O parâmetro de compressão μ (ou A) determina o grau de compressão. Para que S_o/N_o seja praticamente constante em um intervalo dinâmico de 40 dB para a potência do sinal de entrada, μ deve ser maior que 100. Os primeiros bancos de canais e outros terminais digitais norte-americanos usavam um valor $\mu = 100$, que produzia os melhores resultados para codificação em 7 bits (128 níveis). Um valor ótimo $\mu = 255$ tem sido usado em todos os terminais digitais norte-americanos de 8 bits (256 níveis), e o valor anterior de μ se tornou quase extinto. Para a lei A , um valor $A = 87,6$ produz resultados comparáveis e foi padronizado pela ITU-T.⁶

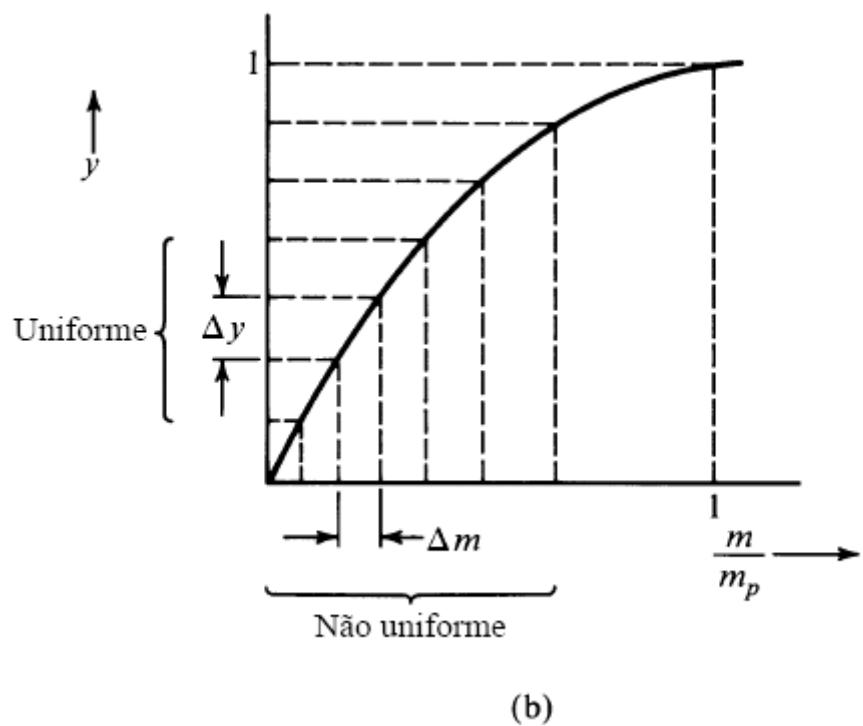
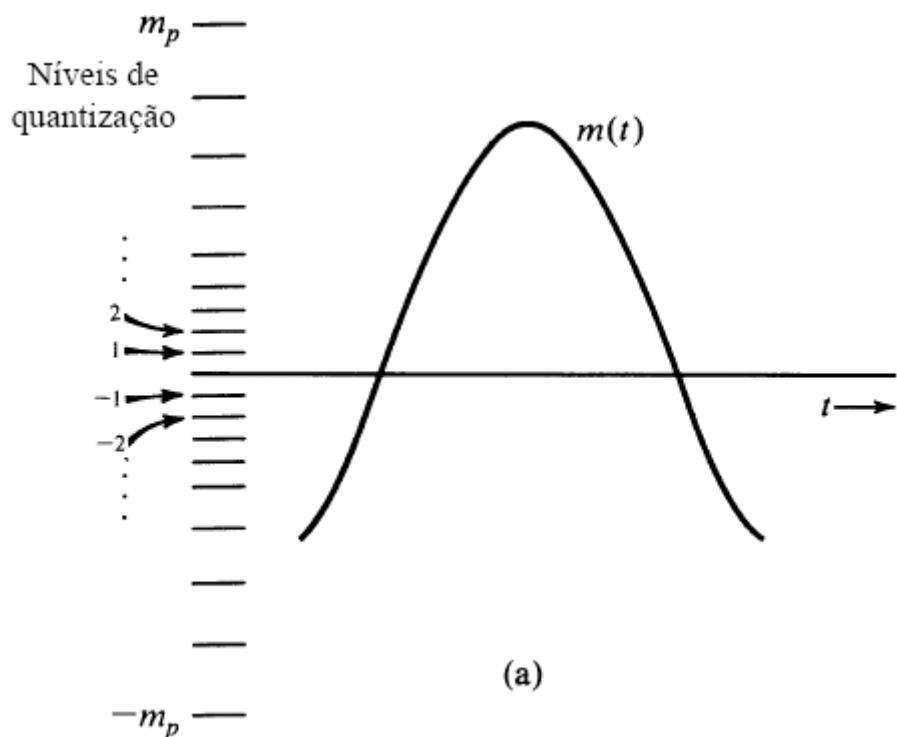
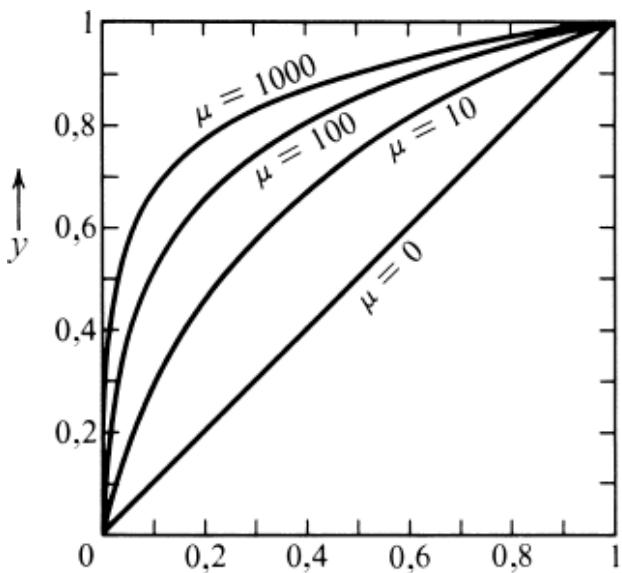
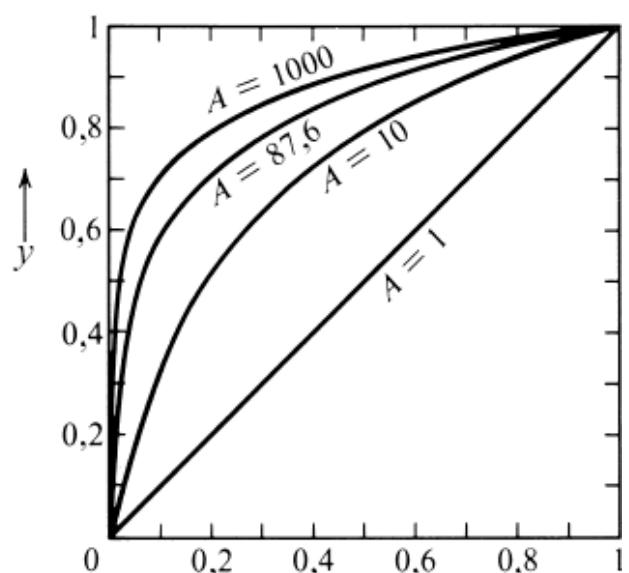


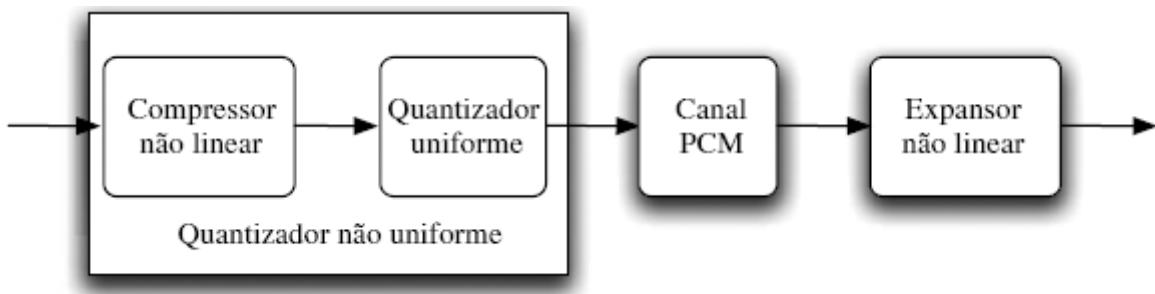
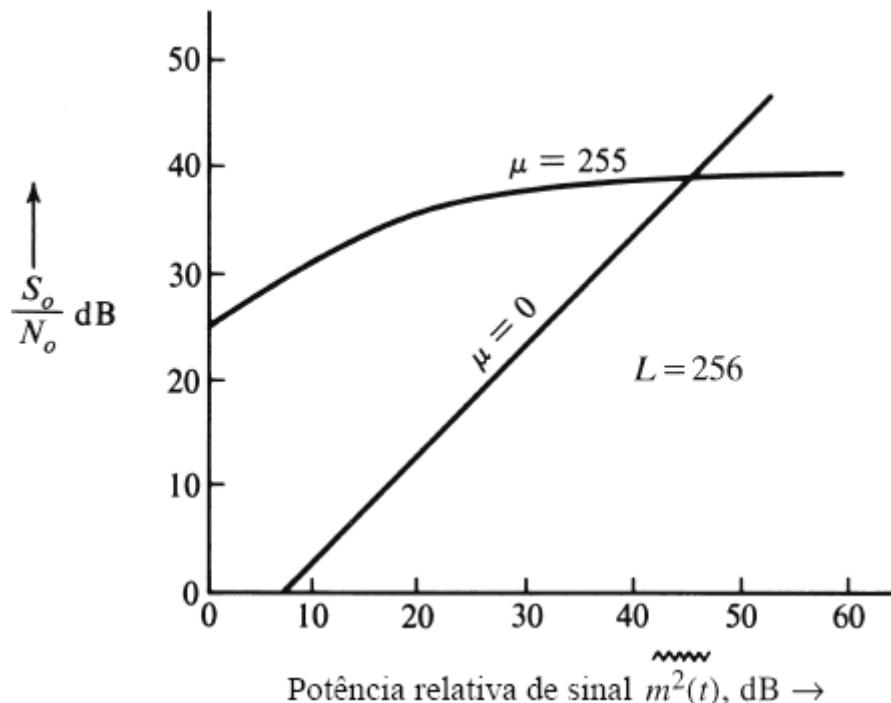
Figura 6.15 Quantização não uniforme.



(a)



(b)

Figura 6.16 (a) Característica de lei μ . (b) Característica de lei A .**Figura 6.17** Utilização de compressor e expensor para quantização não uniforme.**Figura 6.18** Razão entre sinal e ruído de quantização em PCM com e sem compressão.

No receptor, as amostras comprimidas devem ser restauradas a seus valores originais; isso é feito com o uso de um expansor com característica complementar à do compressor. Juntos, compressor e expansor são denominados **compandor**. A Fig. 6.17 descreve o uso de compressor e expansor com um quantizador uniforme para obter quantização não uniforme.

De modo geral, a compressão temporal de um sinal aumenta a largura de banda do mesmo. No entanto, em PCM, o que é comprimido no tempo não é o sinal $m(t)$, mas suas amostras. Como, neste caso, nenhuma alteração é feita na escala de tempo e no número de amostras, o problema de aumento de largura de banda não ocorre. Quando um compandor de lei μ é usado, a SNR de saída é

$$\frac{S_o}{N_o} \simeq \frac{3L^2}{[\ln(1+\mu)]^2} \quad \mu^2 \gg \frac{m_p^2}{m^2(t)} \quad (6.36)$$

A Fig. 6.18 mostra, para os casos $\mu = 255$ e $\mu = 0$ (quantização uniforme), a SNR de saída em função de $\overbrace{m^2(t)}$ (potência do sinal de mensagem).

Compandor

Um compressor logarítmico pode ser realizado com um diodo semicondutor, pois a característica $V-I$ de um diodo desse tipo tem, no primeiro quadrante, a forma desejada

$$V = \frac{KT}{q} \ln \left(1 + \frac{I}{I_s} \right)$$

Dois diodos casados em paralelo, com polaridades opostas, produzem uma característica desejada aproximada no primeiro e no terceiro quadrantes (ignorando a corrente de saturação). Na prática, resistores ajustáveis são posicionados em série com cada diodo, e um terceiro resistor variável é adicionado em paralelo. O ajuste de vários resistores possibilita que a característica resultante iguale a característica ideal em um número finito de pontos (em geral, sete).



Figura 6.19 Característica linear por partes de compressor.

Uma abordagem alternativa consiste em usar uma aproximação linear por partes para a característica logarítmica. Uma aproximação com 15 segmentos (Fig. 6.19) à lei de 8 bits ($L = 256$), com $\mu = 255$, é largamente usada em banco de canais D2 usado em conjunção com o sistema de portadora T1. A aproximação segmentada é apenas marginalmente inferior em termos de SNR.⁸ A aproximação linear por partes substitui quase totalmente a anterior aproximação logarítmica à verdadeira característica $\mu = 255$, e se tornou o método preferencial adotado em padrões norte-americanos. Embora o conjunto de um verdadeiro compressor com $\mu = 255$ trabalhando com um expansor com $\mu = 255$ seja superior a dispositivos similares lineares por partes, um terminal digital com a característica verdadeira tem, em uma rede atual, de trabalhar com outros elementos de rede baseados na aproximação linear por partes. Essa combinação de características diferentes tem desempenho inferior ao obtido quando o compressor e o expansor operam segundo a mesma lei de compressão.

No formato padrão de arquivo de áudio usado por Sun, Unix e Java, o áudio em arquivos “au” pode ser modulado por codificação de pulsos ou comprimido com o padrão ITU-T G.711 usando a lei μ ou a lei A .⁶ O compressor de lei μ (com $\mu = 255$) converte amostras PCM lineares assinadas de 14 bits a amostras logarítmicas de 8 bits, favorecendo economia de armazenagem.

O compressor de lei A (com $A = 87,6$) converte amostras PCM lineares positivas ou negativas de 13 bits a amostras logarítmicas de 8 bits. Nos dois casos, com taxa de amostragem de 8000 Hz, o codificador G.77 cria, a partir de sinais de áudio, sequências de bit a 64 quilobits por segundo (kbit/s). Como as leis A e μ são mutuamente compatíveis, áudio gravado em arquivos “au” pode ser decodificado em qualquer dos dois formatos. Vale notar que o formato de áudio WAV da Microsoft também tem opções de compressão que usam a lei μ e a lei A .

Codificador PCM

A saída multiplexada PAM é aplicada à entrada do codificador, que quantiza e codifica cada amostra em um grupo de n dígitos binários. Embora exista uma variedade de codificadores,^{7,10} discutiremos o codificador de **um dígito por vez** (*digit-at-a-time*), que faz n comparações sequenciais para gerar uma palavra de código de n bits. A amostra é comparada com uma tensão obtida por uma combinação de tensões de referência proporcionais a $2^7, 2^6, 2^5, \dots, 2^0$. As tensões de referência são convenientemente geradas por um banco de resistores $R, 2R, 2^2R, \dots, 2^7R$.

A codificação exige respostas a sucessivas perguntas, das quais a primeira é se a amostra está na metade superior ou inferior do intervalo permitido. O primeiro dígito de código **1** ou **0** é gerado, dependendo se a amostra estiver na metade superior ou inferior do intervalo. No segundo passo, outro dígito 1 ou 0 é gerado, dependendo se a amostra estiver na metade superior ou inferior do subintervalo em que está localizada. O processo continua até que o último dígito binário no código tenha sido gerado.

A decodificação é o inverso da codificação. Neste caso, cada um dos n dígitos é aplicado a um resistor de valor diferente. O k -ésimo dígito é aplicado a um resistor 2^kR . As correntes em todos os resistores são somadas. A soma é proporcional ao valor da amostra quantizada. Por exemplo, uma palavra de código binário **10010110** produzirá uma corrente proporcional a $2^7 + 0 + 0 + 2^4 + 0 + 2^2 + 2^1 + 0 = 150$. Isso completa a conversão D/A.

6.2.4 Largura de Banda de Transmissão e SNR de Saída

Para PCM binária, alocamos um grupo distinto de n dígitos binários (bits) a cada um dos L níveis de quantização. Como a sequência de n dígitos binários pode ser organizada em 2^n padrões diferentes,

$$L = 2^n \quad \text{ou} \quad n = \log_2 L \quad (6.37)$$

cada amostra quantizada é, portanto, codificada em n bits. Como um sinal $m(t)$ limitado em banda a B Hz requer um mínimo de $2B$ amostras por segundo, precisamos de $2nB$ bits/s, ou seja, $2nB$ porções de informação por segundo. Tendo em vista que uma largura de banda unitária (1 Hz) pode transmitir um máximo de duas porções de informação por segundo (Seção 6.1.3), precisamos de uma largura de banda mínima de canal B_T Hz dada por

$$B_T = nB \text{ Hz} \quad (6.38)$$

Essa é a mínima largura de banda teórica para a transmissão de um sinal PCM. Nas Seções 7.2 e 7.3, mostraremos que, por motivos práticos, podemos usar larguras de banda maiores que esse mínimo teórico.

Exemplo 6.2 Um sinal $m(t)$ limitado em banda a 3 kHz é amostrado a uma taxa 33 1/3 % maior que a taxa de Nyquist. O erro máximo aceitável na amplitude de amostras (máximo erro de quantização) é 0,5% da amplitude de pico m_p . As amostras quantizadas são codificadas em binário. Determinemos a mínima largura de banda de um canal necessária para a transmissão do sinal binário codificado. Se 24 desses sinais forem multiplexados por divisão no tempo, determinemos a mínima largura de banda necessária para a transmissão do sinal multiplexado.

A taxa de amostragem de Nyquist é $R_N = 2 \times 3000 = 6000$ Hz (amostras por segundo). A real taxa de amostragem é $R_A = 6000 \times (1) = 8000$ Hz.

O incremento de quantização é Δv e o máximo erro de quantização é $\pm \Delta v/2$. Portanto, a partir da Eq. (6.31),

$$\frac{\Delta v}{2} = \frac{m_p}{L} = \frac{0,5}{100} m_p \implies L = 200$$

Para codificação binária, L deve ser uma potência de 2. Assim, o próximo valor de L maior que 200 que é uma potência de 2 é $L = 256$.

Pela Eq. (6.37), precisamos de $n = \log_2 256 = 8$ bits por amostra. Precisaremos transmitir um total de $C = 8 \times 8000 = 64.000$ bits/s. Como podemos transmitir até 2 bits/s por hertz de largura de banda, necessitaremos de uma largura de banda mínima de transmissão $B_T = C/2 = 32$ kHz.

O sinal multiplexado tem um total de $C_M = 24 \times 64.000 = 1,536$ Mbit/s, o que requer uma largura de banda mínima de transmissão de $1,536/2 = 0,768$ MHz.

Aumento Exponencial da SNR de Saída

Da Eq. (6.37), $L^2 = 2^{2n}$, e a SNR de saída na Eq. (6.34) ou Eq. (6.36) pode ser expressa como

$$\frac{S_o}{N_o} = c(2)^{2n} \quad (6.39)$$

em que

$$c = \begin{cases} \frac{3 \overbrace{m^2(t)}^{\sim\sim\sim\sim}}{m_p^2} & [\text{caso não comprimido, Eq. (6.34)}] \\ \frac{3}{[\ln(1 + \mu)]^2} & [\text{caso comprimido, Eq. (6.36)}] \end{cases}$$

A substituição da Eq. (6.38) na Eq. (6.39) resulta em

$$\frac{S_o}{N_o} = c(2)^{2B_T/B} \quad (6.40)$$

Da Eq. (6.40), observamos que a SNR aumenta exponencialmente com a largura de banda de transmissão B_T . Essa barganha de SNR por largura de banda é interessante e se aproxima do limite teórico. Um pequeno aumento na largura de banda resulta em um grande benefício em termos de SNR. Essa relação é vista claramente quando usamos a escala em decibéis para escrever a Eq. (6.39).

$$\begin{aligned} \left(\frac{S_o}{N_o}\right)_{\text{dB}} &= 10 \log_{10} \left(\frac{S_o}{N_o}\right) \\ &= 10 \log_{10}[c(2)^{2n}] \\ &= 10 \log_{10} c + 2n \log_{10} 2 \\ &= (\alpha + 6n) \quad \text{dB} \end{aligned} \quad (6.41)$$

na qual $\alpha = 10 \log_{10} c$. Isso mostra que o aumento de n em 1 (acrescentar um bit na palavra de código) quadruplica a SNR de saída (aumento de 6 dB). Assim, se aumentarmos n de 8 para 9, a SNR quadruplica, mas a largura de banda de transmissão aumenta apenas de 32 kHz para 36 kHz (aumento de 12,5%). Isso mostra que, em PCM, a SNR pode ser controlada pela largura de banda de transmissão. Veremos, mais tarde, que isso também ocorre com modulações em frequência e em fase. Mas, nestes casos, para quadruplicar a SNR, é necessário dobrar a largura de banda. Neste ponto, PCM é muito superior a FM ou PM.

Exemplo 6.3 Um sinal $m(t)$ de largura de banda $B = 4$ kHz é transmitido com o uso de PCM compandido binário com $\mu = 100$. Comparemos o caso $L = 64$ com o caso $L = 256$, quanto à largura de banda de transmissão e SNR de saída.

Para $L = 64$, $n = 6$ e a largura de banda de transmissão é $nB = 24$ kHz,

$$\begin{aligned} \frac{S_o}{N_o} &= (\alpha + 36) \text{ dB} \\ \alpha &= 10 \log \frac{3}{[\ln(101)]^2} = -8,51 \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{S_o}{N_o} = 27,49 \text{ dB}$$

Para $L = 256$, $n = 8$ e a largura de banda de transmissão é $nB = 32 \text{ kHz}$,

$$\frac{S_o}{N_o} = \alpha + 6n = 39,49 \text{ dB}$$

A diferença entre as duas SNRs é 12 dB, que é uma razão de 16. Assim, a SNR para $L = 256$ é 16 vezes a SNR para $L = 64$. A largura de banda no primeiro caso é apenas 33% maior que a no segundo.

Comentários sobre Unidades Logarítmicas

Unidades logarítmicas e escalas logarítmicas são convenientes quando uma variável tem um intervalo dinâmico grande. Este é o caso de variáveis de frequência e SNRs. Uma unidade logarítmica para a razão de potência é o decibel (dB), definido como $10 \log_{10}$ (razão de potência). Assim, uma SNR é x dB, sendo

$$x = 10 \log_{10} \frac{S}{N}$$

Usamos a mesma unidade para expressar ganho ou perda de potência em certos meios de transmissão. Por exemplo, se, ao longo de um certo cabo, a potência de sinal for atenuada por um fator de 15, o ganho do cabo é

$$G = 10 \log_{10} \frac{1}{15} = -11,76 \text{ dB}$$

ou a atenuação (perda) do cabo, 11,76 dB.

Embora seja uma medida de razões de potência, decibel também é largamente utilizado como uma medida de potência. Por exemplo, uma potência de “100 watts” pode ser considerada com uma razão de 100 em relação a uma potência de 1 watt, e expressa em unidades de dBW como

$$P_{\text{dBW}} = 10 \log_{10} 100 = 20 \text{ dBW}$$

Assim, uma potência de 100 watts corresponde 20 dBW. De modo similar, potência medida em relação à potência de 1 mW é expressa em dBm. Por exemplo, uma potência de 100 watt é

$$P_{\text{dBm}} = 10 \log \frac{100 \text{ W}}{1 \text{ mW}} = 50 \text{ dBm}$$

6.3 TELEFONIA DIGITAL: PCM EM SISTEMAS DE PORTADORAS

Nota Histórica

Devido à indisponibilidade de dispositivos de comutação apropriados, mais de 20 anos se passaram entre a invenção da PCM e sua implementação. Válvulas a vácuo, usadas antes da invenção do transistor, não eram apenas volumosas, mas eram comutadores pobres e dissipavam muito calor. Sistemas que utilizam válvulas como comutadores são grandes, nada confiáveis e tendem a sofrer de superaquecimento. A PCM aguardava a invenção do transistor, um dispositivo pequeno, que consome pouca potência e é um comutador quase ideal.

Coincidemente, na mesma época em que o transistor foi inventado, a demanda por serviços telefônicos aumentou tanto que o sistema existente ficou sobrecarregado, particularmente em grandes cidades. Não era simples a instalação de novos cabos subterrâneos, porque o espaço sob as ruas de muitas cidades já estava ocupado com outros serviços (água, gás, esgoto etc.) Além disso, a escavação de ruas e o resultante transtorno não eram bem vistos. Foi feita uma tentativa, em escala limitada, de aumentar a capacidade com a multiplexação por divisão em frequência de vários canais de voz por meio de modulação em

amplitude. Infelizmente, os cabos haviam sido projetados principalmente para a faixa de frequências da voz (0-4 kHz) e eram extremamente afetados por ruído. Um problema adicional era a interferência entre pares de canais em um mesmo cabo, inaceitável em frequências altas. Ironicamente, a PCM – que exigia uma largura de banda muitas vezes maior que a necessária para sinais FM – era a solução. Isso se devia ao fato de que sistemas digitais com repetidores regeneradores proximamente espaçados são capazes de trabalhar de modo satisfatório em linhas ruidosas que têm baixo desempenho em altas frequências.⁹ Os repetidores, espaçados a cada 1,8 km aproximadamente, limpavam o sinal e regeneravam os pulsos antes que se tornassem demasiadamente distorcidos e ruidosos. Essa é a história do sistema de portadora T1 do grupo Bell System.^{3,10} Um par de fios usado para transmitir um sinal de áudio com 4 kHz de largura de banda passou a transmitir 24 sinais telefônicos PCM multiplexados por divisão no tempo, com largura de banda total de 1,544 MHz.

Canal

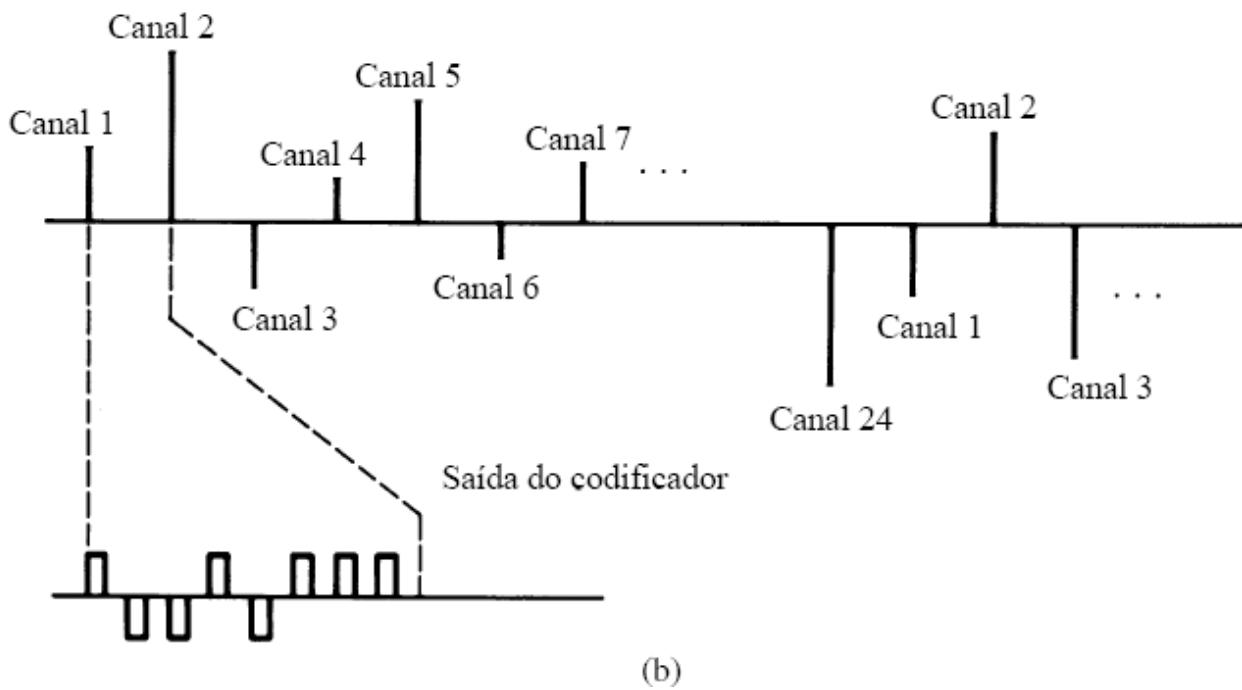
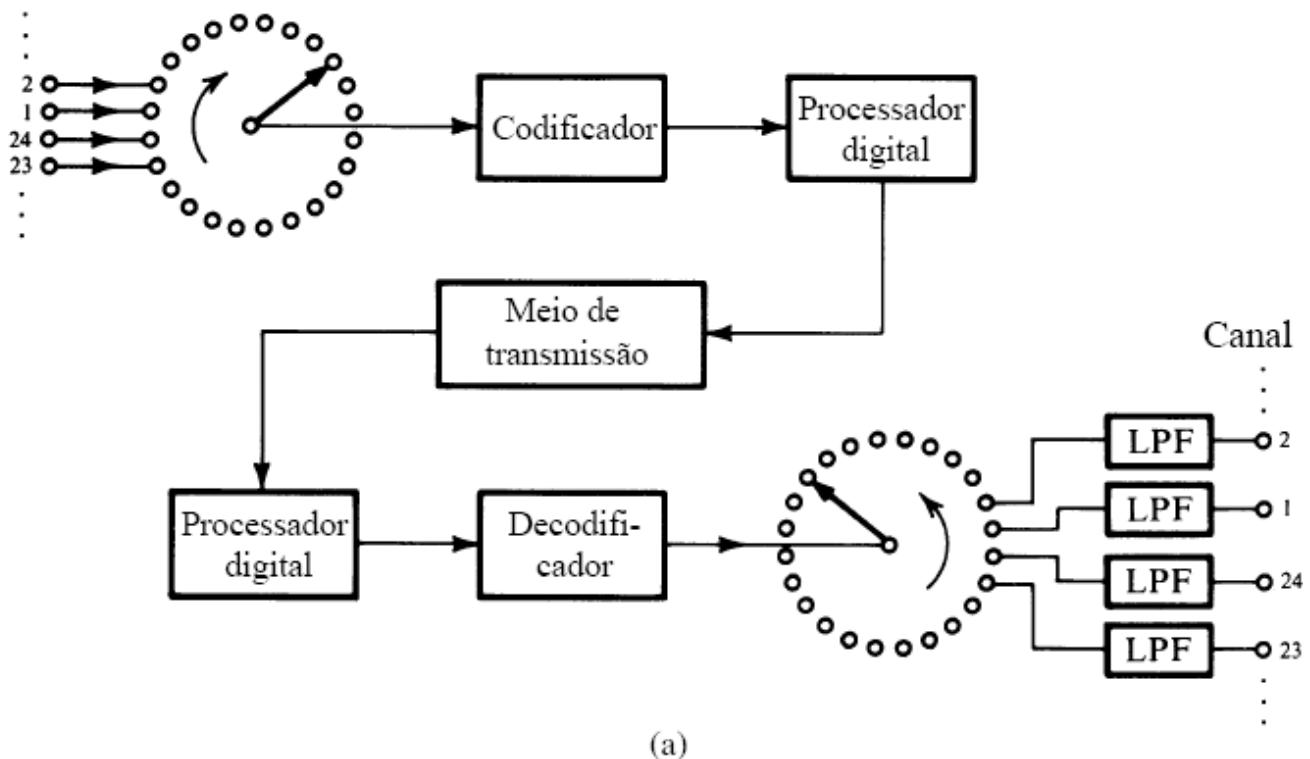


Figura 6.20 Sistema de portadora T1.

Multiplexação por Divisão no Tempo T1

Um esquema de um sistema de portadora T1 é mostrado na Fig. 6.20a. Todos os 24 canais são amostrados em sequência. A saída do amostrador representa um sinal PAM multiplexado por divisão no tempo. O sinal PAM multiplexado é, então, aplicado à entrada de um codificador que quantiza cada amostra e a codifica em oito pulsos binários – uma palavra de código binária^{*} (Fig. 6.20b). O sinal, agora convertido à forma digital, é enviado ao longo do meio de transmissão. Repetidores regeneradores espaçados em cerca de 1,8 km detectam os pulsos e retransmitem pulsos novos. No receptor, o decodificador converte os pulsos binários em amostras (decodificação). As amostras são, então, demultiplexadas (ou seja, distribuídas a cada um dos 24 canais). O desejado sinal de áudio é reconstruído com a aplicação das amostras a um filtro passa-baixas em cada canal.

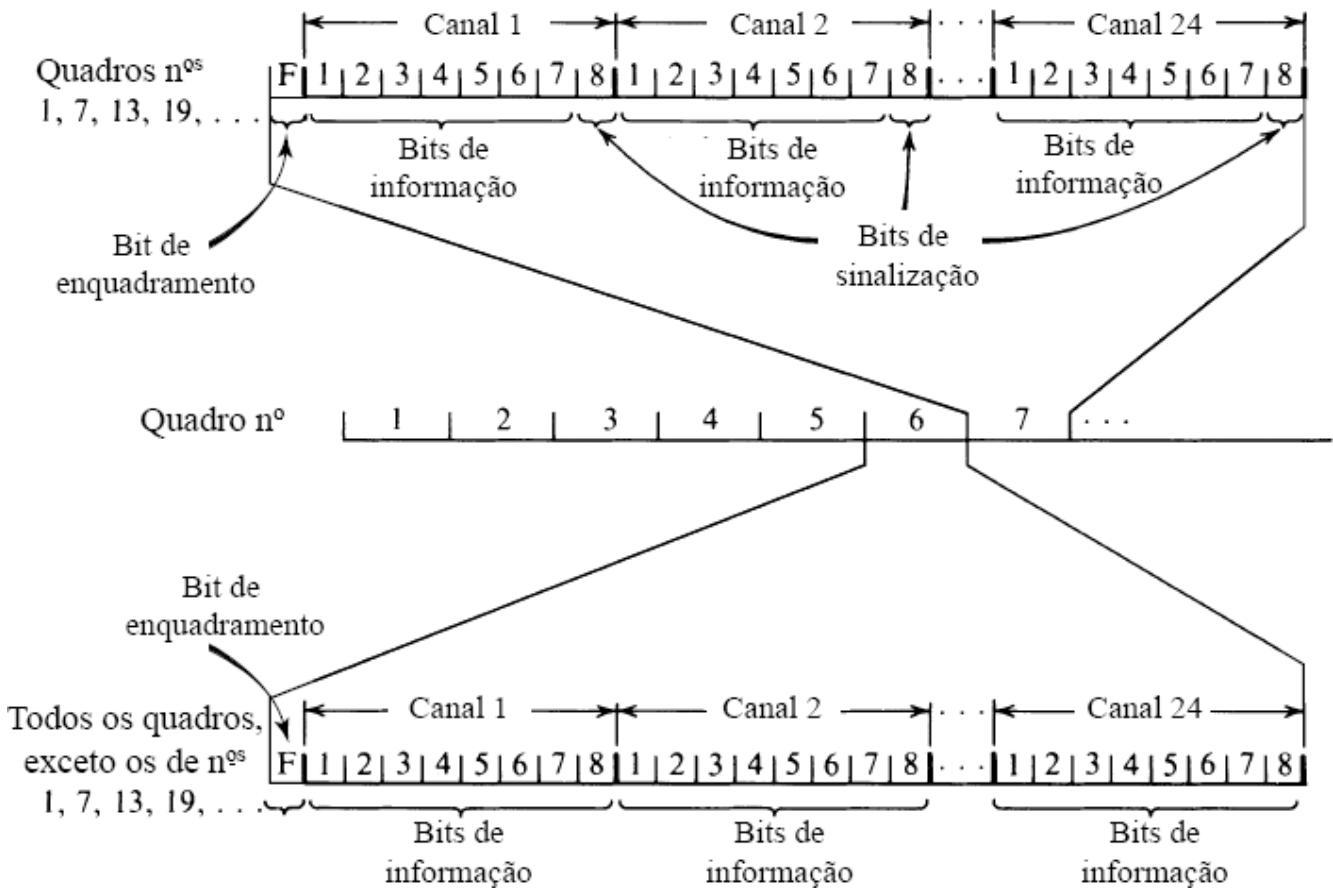


Figura 6.21 Formato de sinalização do sistema T1.

Os comutadores na Fig. 6.20 não são mecânicos: são circuitos comutadores eletrônicos de alta velocidade. Existem diversos esquemas para este propósito.¹¹ A amostragem é feita por portas (*gates*) eletrônicas (como um circuito ponte de diodos, como mostrado na Fig. 4.5a) abertas periodicamente por pulsos estreitos de $2 \mu\text{s}$ de duração. O sinal de 1,544 Mbit/s do sistema T1, chamado **nível de sinal digital 1 (DS1 –digital signal level 1)**, é progressivamente multiplexado para formar sinais de níveis mais altos DS2, DS3 e DS4, como descrito na Seção 6.4.

Depois de o grupo Bell System ter introduzido o sistema de portadora T1 nos Estados Unidos, dezenas de variações foram propostas ou adotadas em outros locais, até que a ITU-T padronizasse o sistema PCM de 30 canais, com uma taxa de 2,048 Mbit/s (em contraste com o sistema T1, de 24 canais e 1,544 Mbit/s). O sistema de 30 canais é usado em todo o mundo, exceto na América do Norte e no Japão. Devido à adoção do sistema de portadora T1 em larga escala na América do Norte e no Japão antes da padronização pela ITU-T, os dois padrões continuam em uso em diferentes partes do mundo, com interfaces apropriadas em conexões internacionais.

Sincronização e Sinalização

Palavras de código binárias correspondentes às amostras de cada um dos 24 canais são multiplexadas em uma sequência, como indicado na Fig. 6.21. Um segmento contendo uma palavra de código (correspondente a uma amostra) de cada um dos 24 canais recebe o nome de **quadro (frame)**. Cada quadro tem $24 \times 8 = 192$ bits de informação. Como a taxa de amostragem é de 8000 amostras por segundo, cada quadro ocupa $125 \mu\text{s}$. Para separar os bits de informação corretamente no receptor, é necessário ter certeza do ponto de início de cada quadro. Para isso, um **bit de enquadramento (framing bit)** é adicionado ao início de cada quadro. O número total de bits em um quadro, então, passa a 193. Bits de enquadramento são escolhidos de modo que uma sequência desses bits, um no início de cada quadro, forme um padrão especial, cuja ocorrência em um sinal de voz seja improvável.

A sequência formada com o primeiro bit de cada quadro é examinada pela lógica do terminal receptor. Caso a sequência não siga o dado padrão de código (padrão dos bits de enquadramento), uma perda de sincronismo é detectada e a próxima posição é

examinada para determinar se é o bit de enquadramento. A detecção leva de 0,4 a 6 ms e o reenquadramento, cerca de 50 ms (no pior caso).

Além de bits de informação e de enquadramento, precisamos transmitir bits de sinalização correspondentes aos pulsos de discagem, assim como sinais telefônicos de livre e ocupado. Quando canais desenvolvidos por esse sistema são usados na transmissão de sinais entre sistemas de comutação telefônica, os comutadores devem ser capazes de se comunicarem entre si, para que os canais sejam usados de forma eficaz. Como todos os oito bits agora são usados para transmissão, em vez dos sete da versão anterior,* o canal de sinalização provido pelo oitavo bit deixou de existir. Como basta um canal de sinalização de baixa velocidade, em vez de criar uma janela temporal adicional para esta informação, usamos um bit de informação (o bit menos significativo) a cada seis amostras de um sinal para transmitir essa informação. Isso significa que cada sexta amostra de um sinal de voz terá um possível erro correspondente ao bit menos significativo. Cada sexto quadro tem, portanto, $7 \times 24 = 168$ bits de informação, 24 bits de sinalização e 1 bit de enquadramento. Todos os outros quadros terão 192 bits de informação e 1 bit de enquadramento. Essa técnica é denominada codificação de bit **7/6**, e o canal de sinalização recebe o nome **sinalização por bit roubado (robbed-bit signaling)**. A pequena degradação da SNR decorrente da alteração de um de cada seis quadros é considerada uma penalidade aceitável. Os bits de sinalização para cada sinal ocorrem a uma taxa de $8000/6 = 1333$ bit/s. O formato de quadro é mostrado na Fig. 6.21.

O antigo formato de quadros com sete bits requeria apenas identificação das fronteiras dos quadros para que cada canal pudesse ser localizado na sequência de bits. Quando a sinalização é superposta aos canais a cada seis quadros, torna-se necessário identificar, no receptor, os quadros que são quadros de sinalização. Uma nova estrutura de quadros, denominada **superquadro**, foi desenvolvida para cuidar disso. Os bits de enquadramento são transmitidos a 8 kbit/s como antes e ocupam o primeiro bit de cada quadro. Os bits de enquadramento formam um padrão especial, que se repete a cada 12 quadros: **100011011100**. Assim, esse padrão permite a identificação das fronteiras dos quadros como antes, mas também permite a determinação da localização do sexto e do décimo segundo quadro no superquadro. Vale notar que o superquadro descrito aqui tem 12 quadros de comprimento. Como dois bits por superquadro são disponíveis para sinalização para cada canal, é possível prover sinalização de quatro estados para um canal com o uso dos quatro padrões possíveis para os dois bits de sinalização: **00**, **01**, **10** e **11**. Embora a maioria das aplicações comutador a comutador na rede de telefonia exija apenas sinalização de dois estados, técnicas de sinalização de três e quatro estados são usadas em certas aplicações especiais.

Avanços na eletrônica digital e na teoria de codificação tornaram desnecessário o uso de todos os 8 kbits/s do canal de enquadramento em um sistema DS1 para implementar a tarefa de enquadramento. Uma nova estrutura de superquadro, denominada formato de **superquadro estendido (ESF –extended superframe)**, foi introduzida na década de 1970 para tirar proveito da reduzida exigência de largura de banda para enquadramento. Um ESF tem 24 quadros de comprimento e carrega bits de sinalização a cada oito bits de cada canal nos quadros 6, 12, 18 e 24. Isso possibilita sinalização em dezesseis estados, que é usada em alguns casos, embora, com o formato de superquadro, a maioria das aplicações requeira somente sinalização em dois estados.

Os 8 kbit/s de *overhead* de capacidade (de enquadramento) do sinal ESF são divididos em três canais: 2 kbit/s para enquadramento, 2 kbit/s para um canal de detecção de erro por verificação cíclica de redundância (CRC-6 – *cyclic redundancy check*) e 4 kbit/s para um canal de dados. A detecção de erro de alta confiabilidade provida pelo padrão CRC-6 e o uso de um canal de dados para transportar informação sobre o desempenho de sinal como recebido pelo terminal distante fazem com que o formato ESF seja muito mais atrativo para provedores de serviços que o antigo formato de superquadro. O Capítulo 14 apresenta mais detalhes sobre detecção de erro por CRC.

O canal de enquadramento de 2 kbit/s do formato ESF transporta o padrão repetitivo **001011...**, um padrão que se repete a cada 24 quadros e é muito menos vulnerável a falsificação que padrões associados a formatos anteriores.

Por diversas razões, incluindo o desenvolvimento de nós comutadores de rede inteligente, a função da sinalização está sendo transferida dos canais que transportam as mensagens ou sinais de dados para redes de sinalização separadas, denominadas sistemas de **canal comum de sinalização entre centrais (CCIS –common channel interoffice signaling)**. O emprego universal desse sistema diminuirá a importância da sinalização por bit roubado, e todos os oito bits de cada mensagem (ou amostra) serão transmitidos na maioria das aplicações.

A Conferência sobre Administração Postal e Telegráfica Europeia (CEPT – *Conference on European Postal and Telegraph Administration*) padronizou um PCM com 256 janelas temporais por quadro. Cada quadro tem $30 \times 8 = 240$ bits de informação, correspondendo a 30 canais de voz (cada um com oito bits). Os restantes 16 bits por quadro são usados para sincronização e sinalização. Portanto, embora a taxa de bits seja 2,048 Mbit/s, o que corresponde a 32 canais de voz, somente 30 canais de voz são transmitidos.

6.4 MULTIPLEXAÇÃO DIGITAL

Vários sinais de baixas taxas de bits podem ser multiplexados, ou combinados, para formar um sinal a uma taxa de bits mais elevada, a ser transmitido em um meio de alta frequência. Como o meio é compartilhado no tempo por vários sinais, este é um caso de TDM (multiplexação por divisão no tempo). Os sinais dos diversos canais de entrada, ou tributários, podem ter naturezas variadas, como sinais de voz digitalizada (PCM), uma saída de computador, dados de telemetria ou um fac-símile digital. Não é necessário que as taxas de bits dos diversos tributários sejam iguais.

Consideremos, inicialmente, o caso em que todos os tributários têm a mesma taxa de bits. A multiplexação pode ser feita bit a bit (o que é conhecido como **entrelaçamento de bits**), como mostrado na Fig. 6.22a, ou palavra a palavra (o que é conhecido como **entrelaçamento de palavras**). A Fig. 6.22b mostra o entrelaçamento de palavras, formadas por quatro bits. A hierarquia digital norte-americana usa entrelaçamento de bits (exceto no nível mais baixo), no qual um bit por vez é tirado de cada um dos sinais a serem multiplexados. O entrelaçamento de bits, usado na construção do sinal DS1 e de sinais formatados para SONET^{*}, consiste na inserção alternada de bytes dos canais a serem multiplexados.

A portadora T1, discutida na Seção 6.3, usa o entrelaçamento de palavras de oito bits. Quando as taxas de bits dos sinais de entrada não são iguais ao canal de taxa de bits mais elevada são alocadas proporcionalmente mais janelas temporais. A multiplexação de quatro canais consiste em três canais, B, C e D, com a mesma taxa de bits R e um (canal A) com taxa de bits $3R$. (Fig. 6.22c, d). Resultados similares podem ser obtidos com a combinação de palavras de comprimentos diferentes. Fica evidente que o comprimento mínimo do quadro multiplexado deve ser um múltiplo do mínimo múltiplo comum das taxas de bits dos sinais de entrada e, portanto, este tipo de esquema é prático somente quando existe uma relação simples entre as várias taxas. O caso de canais totalmente assíncronos é discutido posteriormente.

No terminal receptor, a sequência de dígitos de entrada deve ser dividida e distribuída ao canal de saída apropriado. Para tanto, o terminal receptor deve ser capaz de identificar cada bit corretamente. Isso requer que o sistema receptor tenha sincronismo temporal com o início de cada quadro, com cada janela (*slot*) em um quadro, e com cada bit em uma janela. Para isso, bits de sincronismo e de enquadramento são adicionados aos bits de dados. Esses bits adicionais são parte dos chamados **bits de overhead**.

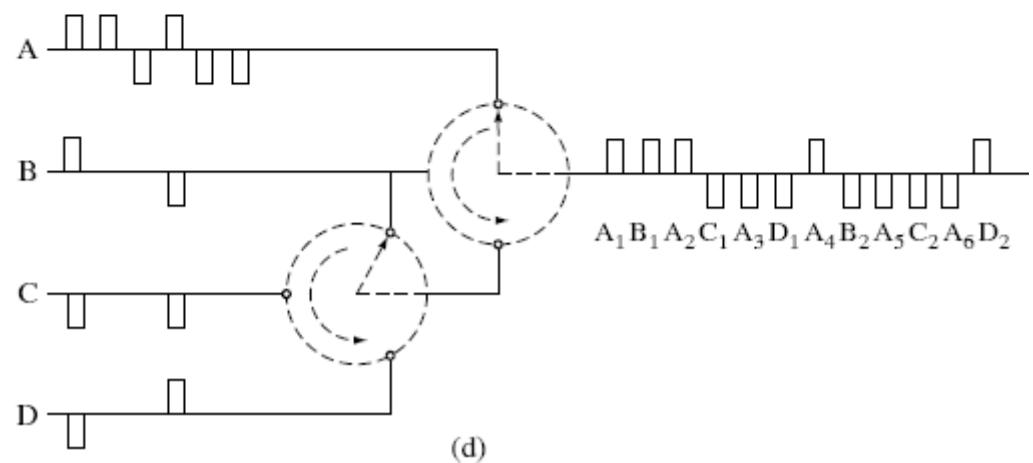
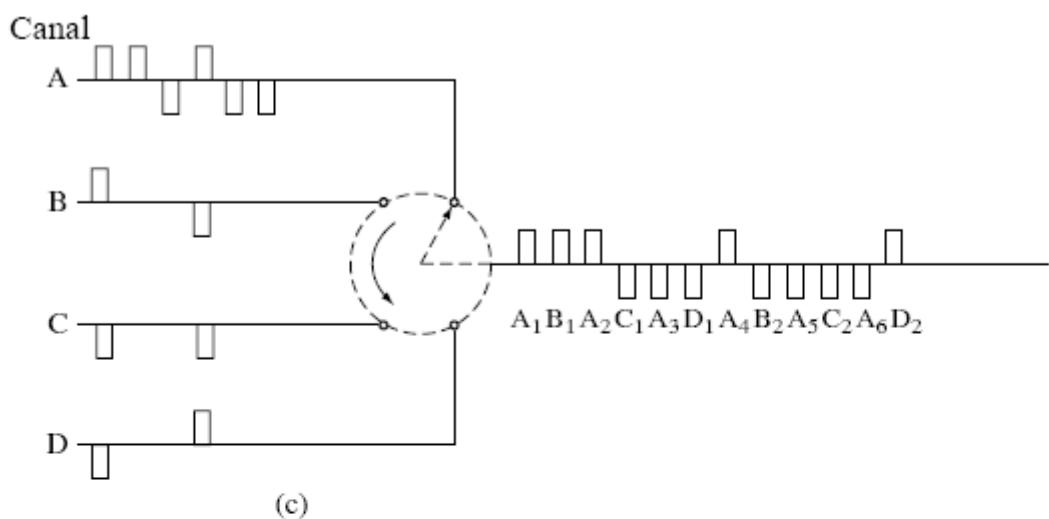
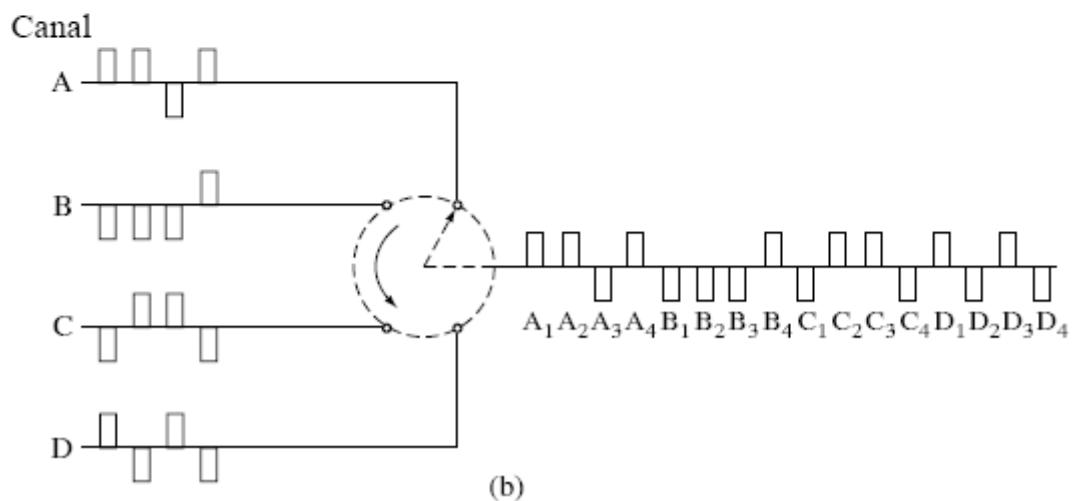
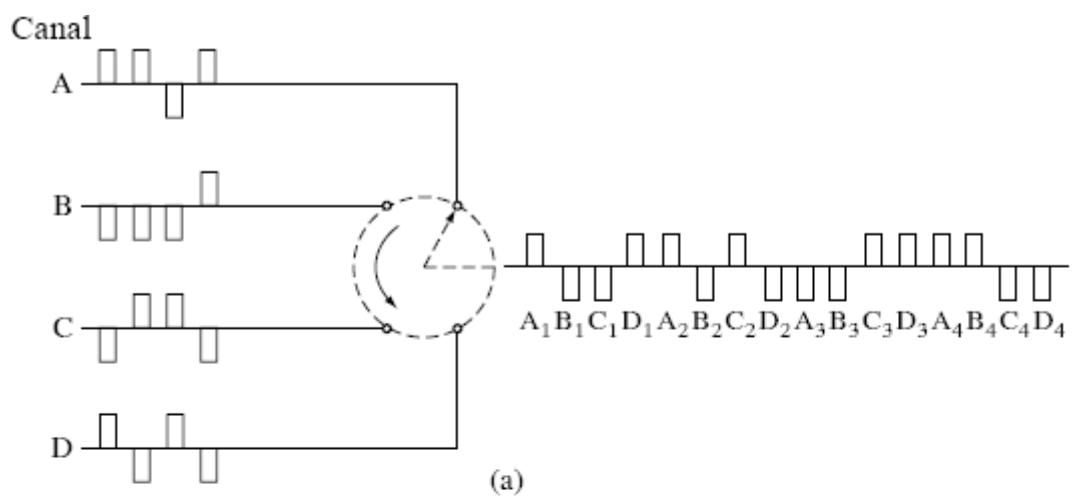


Figura 6.22 Multiplexação por divisão no tempo de sinais digitais: (a) entrelaçamento de dígitos; (b) entrelaçamento de palavras (ou bytes); (c) entrelaçamento de canais com diferentes taxas de bits; (d) esquema alternativo para (c).

6.4.1 Formato de Sinal

A Fig. 6.23 ilustra um formato típico, o do multiplexador DM1/2, em que há entrelaçamento bit a bit de quatro canais, cada um à taxa de 1,544 Mbit/s. O quadro principal (multiquadro) consiste em quatro subquadros. Cada subquadro tem seis bits de *overhead*; por exemplo, o subquadro 1 (primeira linha na Fig. 6.23) tem bits de *overhead* M_0 , C_A , F_0 , C_A , C_A e F_1 . Entre os bits de *overhead*, há 48 bits de dados entrelaçados, provenientes dos quatro canais (12 bits de dados de cada canal). Iniciamos com o bit de *overhead* M_0 , seguido por 48 bits de dados multiplexados, adicionamos um segundo bit de *overhead* C_A , seguido por 48 bits de dados multiplexados, e assim por diante. Portanto, há um total de $48 \times 6 = 1152$ bits de dados e $6 \times 4 = 24$ bits de *overhead* perfazendo um total de 1176 bits/quadro. A eficiência é de $1152/1176 \approx 98\%$. Os bits de *overhead* com subscrito 0 são sempre 0 e aqueles com subscrito 1, sempre 1. Assim, M_0 , F_0 são todos 0s, M_1 , F_1 são todos 1s. Os dígitos F são periódicos **010101...** e provêm o principal padrão de quadros que o multiplexador usa para obter sincronismo com quadro. Após alcançar sincronismo por meio deste padrão, o demultiplexador busca o padrão **0111** formado pelos bits de *overhead* $M_0 M_1 M_1 M_1$. Isso identifica os quatro subquadros, cada um correspondendo a uma linha na Fig. 6.23. É possível, embora improvável, que bits de sinal também tenham um padrão **101010...** O receptor poderia ficar travado à sequência incorreta. A presença de $M_0 M_1 M_1 M_1$ permite a confirmação da verdadeira sequência $F_0 F_1 F_0 F_1$. Os bits C são usados para transmitir informação adicional sobre preenchimento de bits, como discutido mais adiante.

M_0	[48]	C_A	[48]	F_0	[48]	C_A	[48]	C_A	[48]	F_1	[48]
M_1	[48]	C_B	[48]	F_0	[48]	C_B	[48]	C_B	[48]	F_1	[48]
M_1	[48]	C_C	[48]	F_0	[48]	C_C	[48]	C_C	[48]	F_1	[48]
M_1	[48]	C_D	[48]	F_0	[48]	C_D	[48]	C_D	[48]	F_1	[48]

Figura 6.23 Formato de multiplexador DM1/2.

Na maioria dos casos, nem todos os canais de entrada são ativos todo o tempo: alguns transmitem dados, outros estão ociosos. Isso significa que o sistema é subutilizado. Para, em um dado momento, tirar proveito da inatividade de pelo menos um canal, podemos aceitar mais canais de entrada. Obviamente, isso envolve operações de comutação muito mais complicadas, além de um planejamento cuidadoso do sistema. Em qualquer situação de tráfego aleatório, não podemos garantir que a demanda por canais de transmissão não ultrapassará o número de canais disponíveis; contudo, por meio de uma estatística das fontes de sinal, é possível assegurar uma probabilidade baixa aceitável de que isso ocorra. Estruturas de multiplexação desse tipo foram desenvolvidas para sistemas de comunicação por satélite e são conhecidas como **sistemas de acesso múltiplo por divisão no tempo (TDMA – time division multiple-access)**.

Nos sistemas TDMA empregados em telefonia, os parâmetros de projeto são escolhidos de modo que qualquer condição de sobrecarga dure apenas uma fração de um segundo, o que garante desempenho aceitável para comunicação de voz. Para outros tipos de dados e telegrafia, atrasos de transmissão são irrelevantes. Portanto, em situação de sobrecarga, os dados de entrada podem ser armazenados e transmitidos posteriormente.

6.4.2 Canais Assíncronos e Preenchimento de Bits

Na discussão anterior, presumimos a existência de sincronismo entre todos os canais de entrada e o multiplexador. Isso é difícil de ocorrer, mesmo quando todos os canais têm iguais taxas nominais. Por exemplo, consideremos um cabo coaxial de 1000 km que transporta 2×10^8 m/s pulsos por segundo. Supondo que a velocidade nominal de propagação no cabo seja 2×10^8 m/s, o tempo de trânsito é de 1/200 segundo, e um milhão de pulsos estarão em trânsito. Se a temperatura do cabo aumentar em $0,6^\circ\text{C}$, a velocidade de propagação aumentará em cerca de 0,01%. Isso fará com que os pulsos em trânsito cheguem mais cedo, resultando em um aumento temporário na taxa de pulsos recebidos. Como os pulsos adicionais não podem ser acomodados no multiplexador, devem ser temporariamente armazenados no receptor. Se a temperatura do cabo cair, a taxa de pulsos recebidos também cairá, e o multiplexador terá janelas vazias, sem dados. Estas janelas devem ser preenchidas com dígitos arbitrários (**preenchimento de pulsos**).

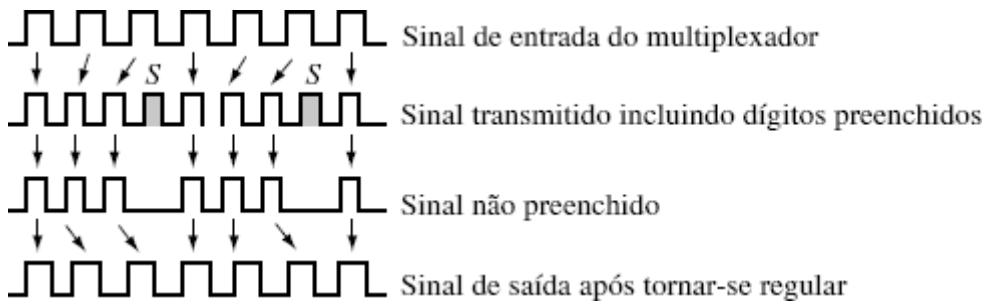


Figura 6.24 Preenchimento de pulsos.

Na rede norte-americana, sinais DS1 são, em geral, produzidos por osciladores a cristal em bancos de canais individuais ou outro terminal digital. Embora os osciladores sejam muito estáveis, não oscilarão exatamente na mesma frequência, dando origem a outra causa de assincronismo na rede.

Isso mostra que, mesmo em sistemas multiplexados síncronos, os dados raramente são recebidos a uma taxa síncrona. Sempre há necessidade de armazenagem (conhecida como **armazenagem elástica**) e preenchimento de pulsos (conhecido como **justificação**) para acomodar tal situação. Obviamente, esse método de armazenagem elástica e preenchimento de pulsos funcionará até mesmo quando os canais estiverem em assincronismo.

Há três variantes do esquema de preenchimento de pulsos: (1) preenchimento positivo de pulsos, (2) preenchimento negativo de pulsos e (3) preenchimento positivo/negativo de pulsos. No preenchimento positivo de pulsos, a taxa do multiplexador é mais alta que o necessário para acomodar todos os tributários de chegada em suas taxas máximas. Assim, as janelas temporais no sinal multiplexado ficarão disponíveis a uma taxa maior que a dos dados de entrada, de modo que os dados tributários tenderão a se atrasar (Fig. 6.24). Em algum momento, o sistema decidirá que esse atraso se tornou grande o bastante para exigir preenchimento de pulsos. A informação sobre as posições dos pulsos preenchidos é transmitida juntamente com os bits de *overhead*. A partir dos bits de *overhead*, o receptor toma conhecimento da posição do pulso preenchido e o elimina.

O preenchimento negativo de pulsos é um complemento do preenchimento positivo de pulsos. As janelas temporais no sinal multiplexado agora aparecem a uma taxa ligeiramente menor que as dos tributários, de modo que o sinal multiplexado não é capaz de acomodar todos os pulsos tributários. Informação a respeito de qualquer pulso que tenha ficado de fora e sua posição é transmitida pelos bits de *overhead*. O preenchimento positivo/negativo de pulsos é uma combinação dos dois esquemas anteriores: usamos preenchimento positivo de pulsos em alguns momentos e preenchimento negativo em outros. Toda essa informação é enviada através dos bits de *overhead*.

Os dígitos C na Fig. 6.23 são usados para transmitir informação de preenchimento. Apenas um bit de preenchimento por canal de entrada é permitido por quadro. Isso é o suficiente para acomodar variações esperadas na taxa de sinal de entrada. Os bits C_A transportam informação sobre preenchimento no canal A, bits C_B transportam informação sobre preenchimento no canal B, e assim por diante. A inserção de um pulso de preenchimento em um subquadro qualquer é denotada com a fixação dos valores dos três Cs na linha correspondente em 1. Se não houver preenchimento, valores dos três Cs são fixados em 0s. Se um bit de preenchimento for inserido, este será o primeiro bit de informação associado ao canal imediatamente após o bit F_1 , ou seja, o primeiro desses bits na última sequência de 48 bits no subquadro em questão. Para o primeiro subquadro, o bit de preenchimento vem imediatamente após o bit F_1 . Para o segundo subquadro, o bit de preenchimento será o segundo bit após o bit F_1 , e assim por diante.

6.4.3 Hierarquia Digital Plesiócrona (Quase Síncrona)

A seguir, apresentaremos a hierarquia digital desenvolvida pelo grupo Bell System e atualmente incluída nos padrões ANSI para telecomunicações (Fig. 6.25). A hierarquia digital norte-americana é implementada na América do Norte e no Japão.

Duas categorias principais de multiplexadores são usadas na prática. A primeira é usada para combinar canais de baixa taxa de dados, e multiplexa canais de taxas de até 9.600 bit/s em um sinal com taxa de dados de até 64 kbit/s. O sinal multiplexado, denominado “nível de sinal digital 0” (**DS0**) na hierarquia norte-americana, é transmitido em um canal de classe de voz. A segunda categoria de multiplexadores é voltada para uma taxa de bits muito mais elevada.

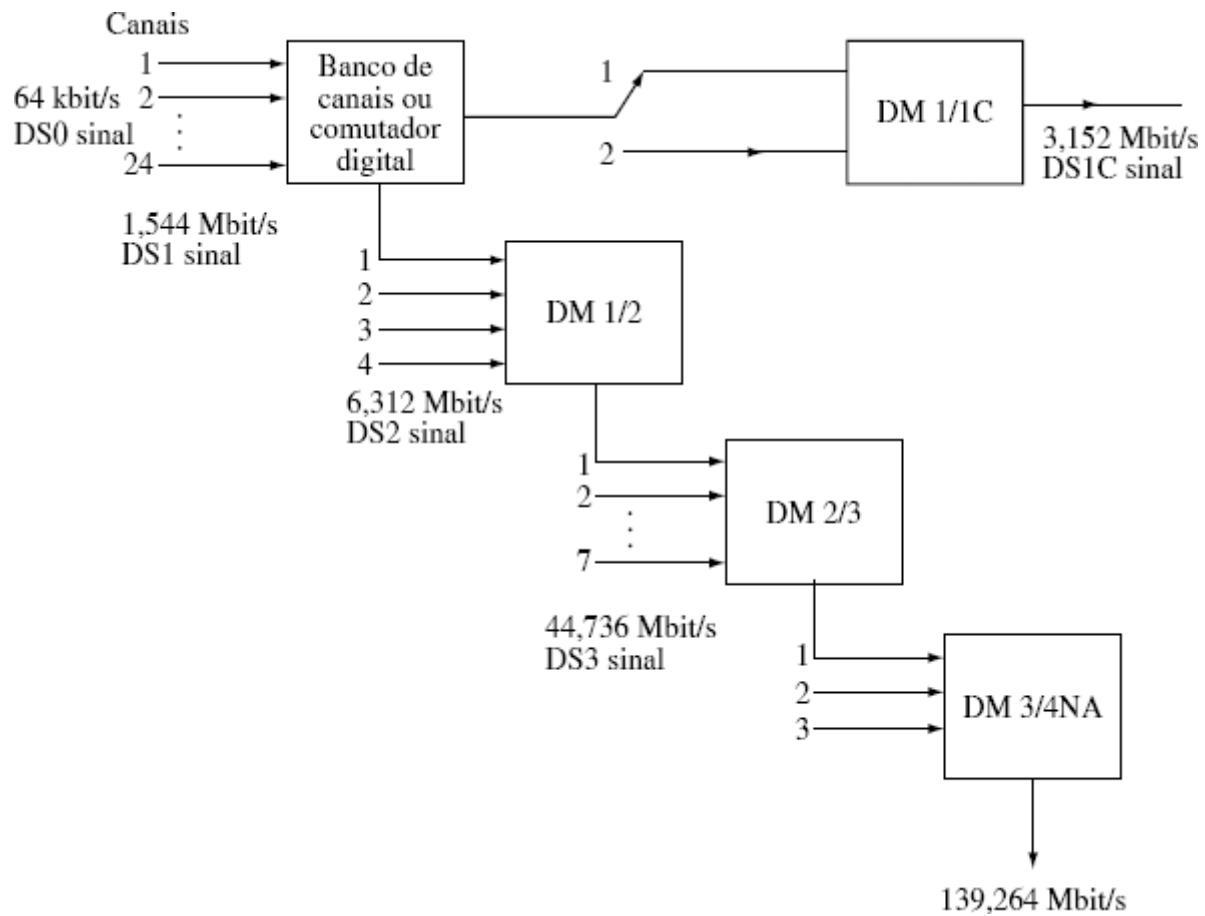


Figura 6.25 Hierarquia digital norte-americana (sistema da AT&T).

Há quatro ordens, ou níveis, de multiplexação. O primeiro nível é o **multiplexador T1** ou **banco de canais**, consistindo em 24 canais de 64 kbit/s cada um. A saída deste multiplexador é um sinal **DS1 (nível digital 1)**, a uma taxa de 1,544 Mbit/s. Quatro sinais DS1 são multiplexados por um multiplexador DM1/2 para produzir um sinal DS2 à taxa de 6,321 Mbit/s. Sete sinais DS2 são multiplexados por um multiplexador DM2/3 para produzir um sinal DS3 à taxa de 44,736 Mbit/s. Por fim, três sinais DS3 são multiplexados por um multiplexador DM3/4NA para produzir um sinal DS4NA à taxa de 132,264 Mbit/s. Há, ainda, uma hierarquia de multiplexação a uma taxa inferior, conhecida como **sistema de dados digitais (DDS –digital data system)**, que provê padrões para a multiplexação de sinais digitais a taxas baixas, como 2,4 kbit/s, em um sinal DS0 para transmissão na rede.

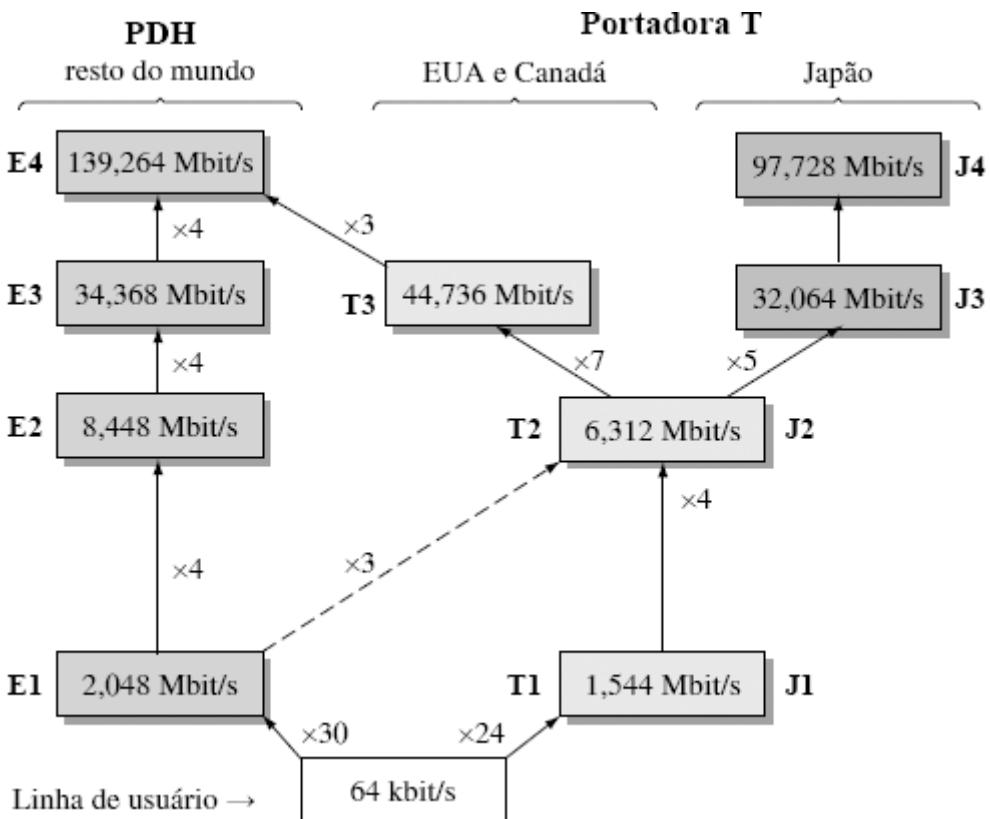


Figura 6.26 Hierarquia digital plesiócrona (PDH – *plesiochronous digital hierarchy*), segundo a Recomendação G.704 de ITU-T.

Não é necessário que as entradas de um multiplexador T1 fiquem restritas somente a canais de voz digitalizados. Qualquer sinal digital de 64 kbit/s e formato apropriado pode ser transmitido. O caso dos níveis mais altos é similar. Por exemplo, não é necessário que todos os canais de entrada do multiplexador DM1/2 tenham sido obtidos da multiplexação de 24 canais de 64 kbit/s cada um. Alguns podem ser sinais digitais de 1,544 Mbit/s e formato apropriado.

Na Europa e em muitas outras partes do mundo, foi adotada outra hierarquia, recomendada pela ITU como um padrão. Essa hierarquia, baseada na multiplexação de 30 canais telefônicos de 64 kbit/s (canais E-0) em uma portadora E-1 de 2,048 Mbit/s (30 canais), é ilustrada na Fig. 6.26. A partir do nível básico E-1, quatro linhas de nível mais baixo formam, progressivamente, uma linha de nível elevado, gerando uma linha E-1 com vazão de dados de 8,448 Mbit/s, uma linha E-3 com 34,368 Mbit/s de vazão de dados, uma linha E-4 com vazão de dados de 139,264 Mbit/s, e uma linha E-5 com vazão de dados de 565,148 Mbit/s. Como deve haver interconexão de redes distintas nos três sistemas em uso no mundo (norte-americano, japonês e outro), a Fig. 6.26 demonstra a relação entre os sistemas e pontos das interfaces comuns.

6.5 MODULAÇÃO POR CODIFICAÇÃO DE PULSO DIFERENCIAL (DPCM)

A PCM não é um sistema muito eficiente, pois gera um número excessivo de bits e requer grande largura de banda de transmissão. Vários conceitos diferentes foram propostos para melhorar a eficiência de codificação da conversão A/D. Em geral, esses conceitos exploram características da fonte do sinal. A DPCM (*differential pulse code modulation*) é um deles.

Em mensagens analógicas, podemos ter uma boa ideia do valor de uma amostra a partir dos valores de amostras anteriores. Em outras palavras, os valores das amostras não são independentes e, em geral, há um alto grau de redundância nas amostras de Nyquist. A exploração adequada dessa redundância permite a codificação de um sinal com um número menor de bits. Consideremos um esquema simples: em vez de transmitir os valores das amostras, transmitimos a diferença entre valores de amostras sucessivas. Assim, se $m[k]$ for a k -ésima amostra, em vez de transmitirmos $m[k]$, transmitimos a diferença $d[k] = m[k] - m[k - 1]$. No receptor, o conhecimento de $d[k]$ e de diversos valores de amostras anteriores $m[k - 1]$ permite a reconstrução de $m[k]$. Ou seja, a partir do conhecimento de $d[k]$, podemos reconstruir $m[k]$ iterativamente no receptor. A diferença entre valores de amostras sucessivas é, em geral, muito menor que os valores das amostras. Assim, a diferença de pico m_p dos valores transmitidos é consideravelmente reduzido. Como o intervalo de quantização é $\Delta v = m_p/L$, para um dado L (ou n), isso também reduz o tamanho Δv do intervalo de quantização, o que reduz o ruído de quantização, dado por $\Delta v^2/12$. Por conseguinte, para um dado n (ou largura de banda de transmissão), podemos aumentar a SNR ou, para uma dada SNR, podemos reduzir n (ou a largura de banda de transmissão).

Podemos melhorar este esquema se fizermos uma estimativa (ou previsão) do valor $m[k]$ da k -ésima amostra a partir do conhecimento de valores de várias amostras anteriores. Se a estimativa for $\hat{m}[k]$, podemos transmitir a diferença (erro de predição) $d[k] = m[k] - \hat{m}[k]$. No receptor, determinamos o valor da estimativa $\hat{m}[k]$ a partir de valores de amostras

anteriores e, então, geramos $m[k]$ somando $d[k]$ à estimativa $\hat{m}[k]$. Assim, reconstruímos as amostras no receptor iterativamente. Se a predição for boa, o valor predito (estimado) $\hat{m}[k]$ será próximo de $m[k]$ e a diferença entre eles (o erro de predição) $d[k]$ será ainda menor que a diferença entre valores de amostras sucessivas. Em consequência, esse esquema, conhecido como **PCM diferencial (DPCM)**, é superior à simples predição descrita no parágrafo anterior, que é um caso especial de DPCM, em que a estimativa do valor de uma amostra é tomado como o valor da amostra anterior, ou seja, $\hat{m}[k] = m[k - 1]$.

Espíritos de Taylor, Maclaurin e Wiener

Antes de descrever os princípios de DPCM, discutiremos brevemente a abordagem à predição (estimação) de sinal. Aos iniciantes, a previsão do futuro parece algo misterioso, associado a videntes, magos, médiums e assemelhados, que podem clamar ajuda do mundo espiritual. Engenheiros eletricistas não têm a menor chance nessa atividade. Não é bem assim! Também podemos clamar ajuda dos espíritos de Taylor, Maclaurin, Wiener e de outros. Mais que isso, ao contrário dos espíritos de Shakespeare, quando chamados, nossos espíritos vêm.* Consideremos, por exemplo, um sinal $m(t)$, cujas derivadas de todas as ordens existem em t . Usando a série de Taylor para este sinal, podemos expressar $m(t + T_s)$ como

$$m(t + T_s) = m(t) + T_s \dot{m}(t) + \frac{T_s^2}{2!} \ddot{m}(t) + \frac{T_s^3}{3!} \dddot{m}(t) + \dots \quad (6.42a)$$

$$\approx m(t) + T_s \dot{m}(t) \text{ para pequeno } T_s \quad (6.42b)$$

A Eq. (6.42a) mostra que, a partir do conhecimento do sinal e de suas derivadas no instante t , podemos prever um valor futuro do sinal em $t + T_s$. Na verdade, mesmo que conheçamos somente a primeira derivada, ainda podemos prever este valor aproximadamente, como na Eq. (6.42b). Denotemos a k -ésima amostra de $m(t)$ por $m[k]$, ou seja, $m(kT_s) = m[k]$, e $m(kT_s \pm T_s) = m[k \pm 1]$, e assim por diante. Tomando $t = kT_s$ na Eq. (6.42b) e usando a aproximação $|\dot{m}[kT_s] \approx [m(kT_s) - m(kT_s - T_s)]/T_s$, obtemos

$$\begin{aligned} m[k+1] &\approx m[k] + T_s \left[\frac{m[k] - m[k-1]}{T_s} \right] \\ &= 2m[k] - m[k-1] \end{aligned}$$

Isso mostra que podemos obter uma previsão grosseira do valor da amostra de ordem ($k + 1$) a partir dos valores das duas amostras anteriores. A aproximação na Eq. (6.42b) melhora se adicionarmos mais termos à série no lado direito. Para determinar derivadas de ordens superiores na série, precisamos de mais amostras no passado. Quanto maior o número de amostras passadas, melhor será a predição. Em geral, podemos expressar a fórmula de predição como

$$m[k] \approx a_1 m[k-1] + a_2 m[k-2] + \dots + a_N m[k-N] \quad (6.43)$$

O lado direito é $\hat{m}[k]$, o valor predito para $m[k]$. Logo,

$$\hat{m}[k] = a_1 m[k-1] + a_2 m[k-2] + \dots + a_N m[k-N] \quad (6.44)$$

Essa é a equação para o preditor de ordem N . Em geral, um maior valor de N resulta em melhor predição. A saída desse filtro (preditor) é $\hat{m}[k]$, o valor predito para $m[k]$. A entrada consiste nas amostras anteriores $m[k-1], m[k-2], \dots, m[k-N]$, embora seja comum dizer que a entrada é $m[k]$ e a saída, $\hat{m}[k]$. Vale observar que, no caso da predição de primeira ordem, essa equação se reduz a $\hat{m}[k] = m[k-1]$, resultado que advém da Eq. (6.42b), onde retemos somente o primeiro termo no lado direito. Isso significa que $a_1 = 1$ e que o preditor de primeira ordem é apenas um atraso temporal.

Delineamos, assim, um procedimento muito simples para o projeto do preditor. Em uma abordagem mais sofisticada, discutida na Seção 8.5, em que usamos o critério de mínimo erro quadrático médio para a melhor predição, os **coeficientes de predição** a_j na Eq. (6.44) são determinados da correlação estatística entre as várias amostras. O preditor descrito na Eq. (6.44) é denominado *preditor linear* e consiste basicamente em um filtro transversal (linha de atraso com derivação – *tapped delay line*), em que os ganhos das derivações (*taps*) são tomados como iguais aos coeficientes de predição, como ilustrado na Fig. 6.27.

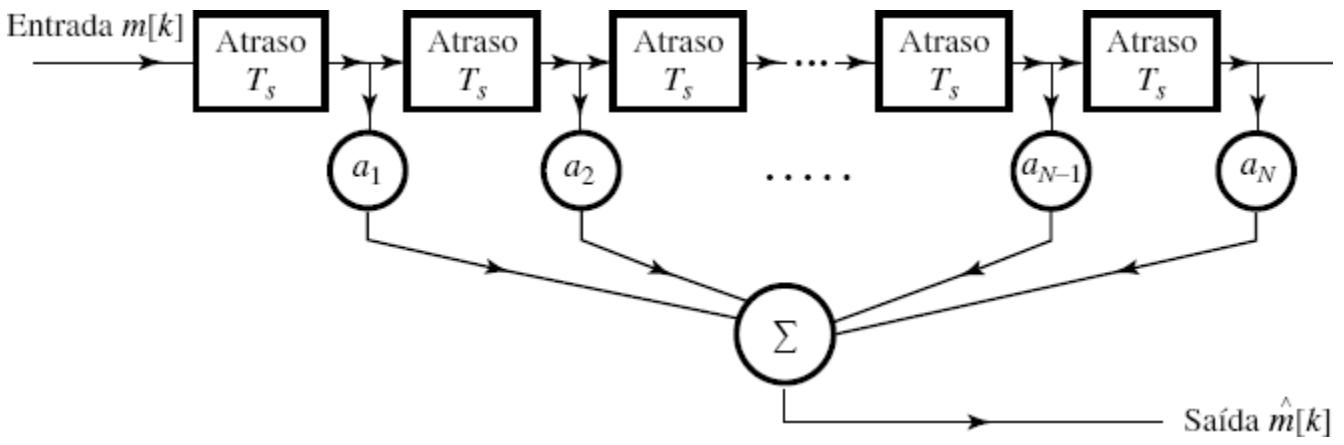


Figura 6.27 Filtro transversal (linha de atraso com derivação) usado como um preditor linear.

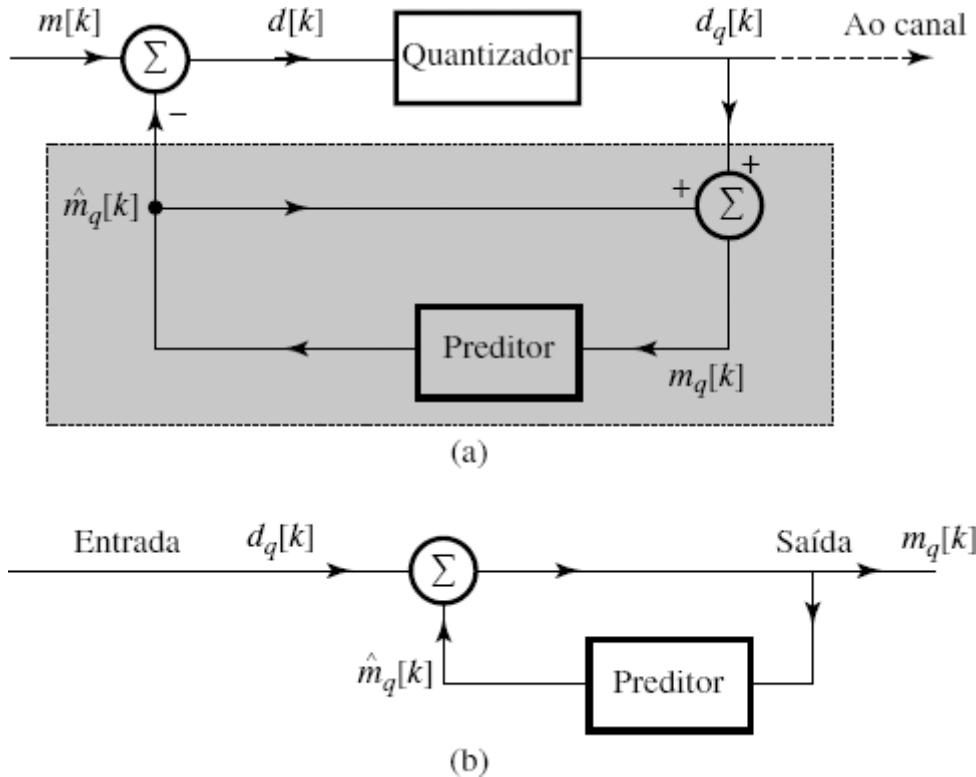


Figura 6.28 Sistema DPCM: (a) transmissor; (b) receptor.

Análise da DPCM

Como já mencionado, na DPCM, não transmitimos a amostra atual $m[k]$, mas $d[k]$ (a diferença entre $m[k]$ e seu valor predito $\hat{m}[k]$). No receptor, geramos $\hat{m}[k]$ a partir dos valores de amostras passadas, aos quais, para gerar $m[k]$, é somado o valor recebido $d[k]$. No entanto, há uma dificuldade associada a este esquema. No receptor, em vez das amostras passadas $m[k - 1], m[k - 2], \dots$, e de $d[k]$, temos suas versões quantizadas $m_q[k - 1], m_q[k - 2], \dots$. Portanto, não podemos determinar $\hat{m}[k]$, mas apenas $\hat{m}_q[k]$, o valor estimado da amostra quantizada $m_q[k]$, em termos das amostras quantizadas $m_q[k - 1], m_q[k - 2], \dots$. Isso aumentará o erro na reconstrução. Nesses casos, uma estratégia melhor consiste em, no transmissor, determinar $\hat{m}_q[k]$, o valor estimado de $m_q[k]$ (em vez de $m[k]$) a partir das versões quantizadas $m_q[k - 1], m_q[k - 2], \dots$. A diferença $d[k] = m[k] - \hat{m}_q[k]$ é, então, transmitida via PCM. No receptor, podemos gerar $\hat{m}_q[k]$ e, a partir do valor $d[k]$ recebido, reconstruir $m_q[k]$.

A Fig. 6.28a ilustra um transmissor DPCM. Logo, mostraremos que a entrada do preditor é $m_q[k]$. Naturalmente, sua saída é $\hat{m}_q[k]$, o valor predito para $m[k]$. A diferença

$$d[k] = m[k] - \hat{m}_q[k] \quad (6.45)$$

é quantizada, produzindo

$$d_q[k] = d[k] + q[k] \quad (6.46)$$

em que $q[k]$ é o erro de quantização. A saída do preditor $\hat{m}_q[k]$ é realimentada à entrada, de modo que a entrada do preditor $m_q[k]$ se torna

$$\begin{aligned} m_q[k] &= \hat{m}_q[k] + d_q[k] \\ &= m[k] - d[k] + d_q[k] \\ &= m[k] + q[k] \end{aligned} \quad (6.47)$$

Isso mostra que $m_q[k]$ é uma versão quantizada de $m[k]$. A entrada do preditor é, de fato, $m_q[k]$, como presumido. O sinal quantizado $d_q[k]$ é, agora, transmitido através do canal. O receptor mostrado na Fig. 6.28b é idêntico à porção hachurada do transmissor. Nos dois casos, as entradas também são as mesmas, ou seja, $d_q[k]$. Portanto, a saída do preditor deve ser $\hat{m}_q[k]$ (igual à saída do preditor no transmissor). Assim, a saída do receptor (que é a entrada do preditor) também é a mesma, $m_q[k] = m[k] + q[k]$, como calculado na Eq. (6.47). Isso mostra que foi possível receber o sinal desejado $m[k]$ mais o erro de quantização $q[k]$. Este é o ruído de quantização associado ao sinal-diferença $d[k]$ que, em geral, é muito menor que $m[k]$. As amostras recebidas $m_q[k]$ são decodificadas e aplicadas a um filtro passa-baixas para conversão D/A.

Melhora da SNR

Para determinar a melhora da DPCM em relação à PCM, denotemos as amplitudes de pico de $m(t)$ e $d(t)$ por m_p e d_p , respectivamente. Se usarmos o mesmo valor de L nos dois casos, o incremento de quantização Δv em DPCM é reduzido por um fator d_p/m_p . Como a potência do ruído de quantização é $(\Delta v)^2/12$, na DPCM, o ruído de quantização é reduzido por um fator $(m_p/d_p)^2$, e a SNR é aumentada pelo mesmo fator. Além disso, a potência de sinal é proporcional ao quadrado do valor de pico (supondo que outras propriedades estatísticas sejam invariantes). Portanto, G_p (melhora da SNR devido à predição) é, pelo menos,

$$G_p = \frac{P_m}{P_d}$$

em que P_m e P_d são as potências de $m(t)$ e $d(t)$, respectivamente. Em decibéis, isso significa que a SNR aumenta em $10\log_{10}(P_m/P_d)$ dB. Portanto, a Eq. (6.41) se aplica à DPCM também com um valor de α aumentado por $10\log_{10}(P_m/P_d)$ dB. No Exemplo 8.24, é analisado um processador preditor de segunda ordem para sinais de voz. Para este caso, a melhora na SNR é calculada como 5,6 dB. Na prática, em casos como espectros de sinais de voz de curta duração e espectros de imagens de baixa atividade, a melhora da SNR pode chegar a 25 dB.¹² Alternativamente, para a mesma SNR, a taxa de bits para DPCM pode ser 3 a 4 bits por amostra ser menor que para PCM. Assim, o sistema telefônico que usa DPCM pode, em geral, operar a 32 ou, até mesmo, a 24 kbits/s.

6.6 PCM DIFERENCIAL ADAPTATIVA (ADPCM)

A DPCM adaptativa (ADPCM) pode melhorar ainda mais a eficiência da codificação DPCM com a incorporação de um quantizador adaptativo no codificador. A Fig. 6.29 ilustra a configuração básica de ADPCM. Por motivos práticos, o número de níveis de quantização L é fixo. Quando é aplicado um incremento de quantização fixo Δv , o erro de quantização ou é muito grande, quando Δv é grande, ou o quantizador não pode cobrir o necessário intervalo de variação do sinal, quando Δv é muito pequeno. Portanto, seria melhor que o incremento de quantização Δv fosse adaptável, de modo que Δv fosse grande ou pequeno dependendo se o erro de predição para quantização fosse grande ou pequeno.

É importante notar que o erro de predição quantizado $d_q[k]$ pode ser um bom indicador do tamanho do erro de predição. Por exemplo, quando as amostras do erro de predição quantizado variam muito próximas do maior valor positivo (ou maior valor negativo), isso indica que o erro de predição é grande e que Δv deve aumentar. Reciprocamente, se as amostras quantizadas oscilam próximas de zero, o erro de predição é pequeno e Δv deve diminuir. É importante que tanto o modulador como o receptor tenham acesso às mesmas amostras quantizadas. Portanto, o quantizador adaptativo e a reconstrução do receptor podem aplicar o mesmo algoritmo para ajustar o valor de Δv identicamente.

Em comparação com a DPCM, a ADPCM pode comprimir ainda mais o número de bits necessários para uma forma de onda. Por exemplo, na prática, é muito comum que uma sequência PCM de 8 bits seja codificada em uma sequência ADPCM de 4 bits à mesma taxa de amostragem. Isso representa uma redução de 2:1 na largura de banda ou na necessidade de armazenagem, sem praticamente qualquer perda.

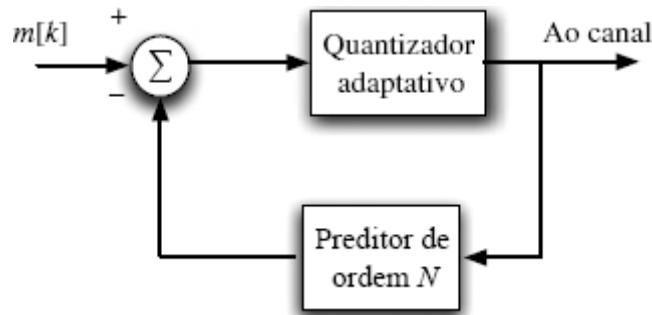


Figura 6.29 Codificador ADPCM usa um quantizador adaptativo controlado apenas pelos bits de saída do codificador.

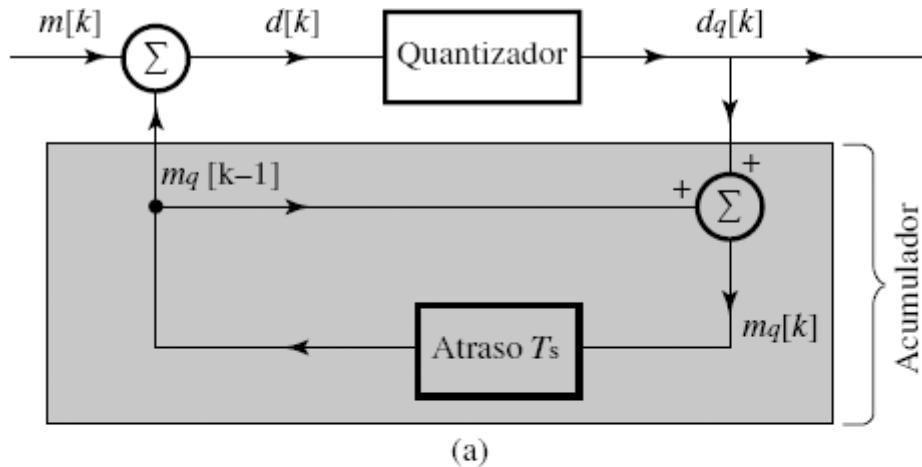
O codificador ADPCM tem várias aplicações. O padrão ITU-T G.726 especifica um codificador e decodificador (denominado **codec**) de voz para amostras de voz tomadas a 8 kHz.⁷ O preditor ADPCM G.726 usa um preditor de oitava ordem. Para diferentes níveis de quantização, o padrão G.726 especifica quatro taxas ADPCM diferentes: 16, 24, 32 e 40 kbit/s. Essas taxas correspondem a quatro diferentes representações de cada amostra de voz, a 2 bits, 3 bits, 4 bits e 5 bits, respectivamente, o que é equivalente a 4, 8, 16 e 32 níveis de quantização, respectivamente.

Os codificadores de voz ADPCM mais comuns usam 32 kbit/s. Na prática, há uma variedade de codecs de voz ADPCM. Além da especificação ITU-T G.726,⁷ há o codec ADPCM OKI, o codec ADPCM Microsoft suportado por *players* do formato WAVE, e ADPCM da Associação de Multimídia Interativa (IMA – *Interactive Multimedia Association*), também conhecido como DVI ADPCM. O codec 32 kbit/s ADPCM de voz ITU-T G.726 é largamente utilizado em sistemas DECT (*digital enhanced cordless telecommunications* – telecomunicações sem fio digitais aprimoradas), que, por sua vez, encontra grande utilização em telefonia sem fio residencial e comercial. Projetado para uso em curta distância como um mecanismo de acesso à rede principal, DECT oferece comunicação sem fio para voz, fax, dados e multimídia. Atualmente, DECT é usado em mais de 100 países ao redor do mundo. Outro uso importante do codec ADPCM de 32 kbit/s é o Personal Handy-phone System (PHS) [sistema de telefonia portátil pessoal], também comercializado como Personal Access System (PAS) [sistema de acesso pessoal] e conhecido na China como *Xiaolingtong*.

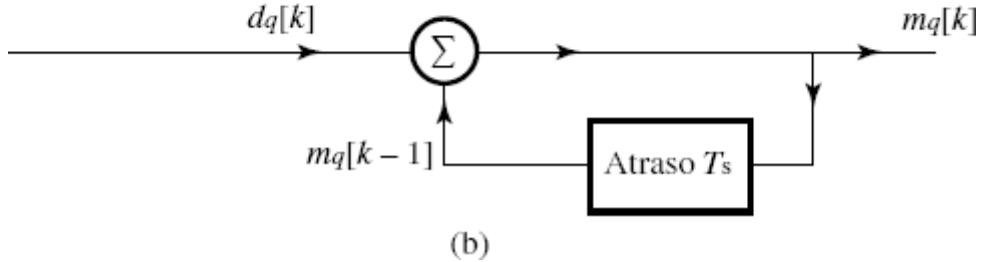
O PHS é um sistema de telefonia móvel semelhante ao sistema celular, que opera na faixa de frequências de 1880 a 1930 MHz e é usado principalmente no Japão, China, Formosa e em outros locais na Ásia. Originalmente desenvolvido pela Laboratório NTT, no Japão, em 1989, o PHS tem implementação e utilização muito simples. Ao contrário das redes celulares, telefones e estações de base de PHS são de baixa potência e de curto alcance. O serviço é pejorativamente chamado de “celular do pobre” devido ao alcance limitado e pouca capacidade de *roaming*. As primeiras aplicações de PHS ocorreram no Japão, em 1995, (NTT-Personal, DDI-Pocket e ASTEL) e, desde então, praticamente desapareceu. Contudo, de modo surpreendente, o PHS está ressurgindo em mercados como China, Formosa, Vietnã, Bangladesh, Nigéria, Mali, Tanzânia e Honduras, onde o baixo custo de equipamentos e de utilização compensa as desvantagens do sistema. Na China, houve uma expansão explosiva e, em 2006, o número de assinantes era próximo de 80 milhões.

6.7 MODULAÇÃO DELTA

A correlação de amostras usada em DPCM é ainda mais explorada na **modulação delta** (**DM –delta modulation**) por meio de superamostragem (tipicamente, a uma taxa quatro vezes maior que a de Nyquist) do sinal em banda base. Isso aumenta a correlação entre amostras adjacentes, o que resulta em pequeno erro de predição, que pode ser codificado por apenas um bit ($L = 2$). Assim, DM é basicamente DPCM de 1 bit, ou seja, DPCM que utiliza somente dois níveis ($L = 2$) para a quantização de $m[k] - \hat{m}_q[k]$. Em comparação com a PCM (e DPCM), esse é um método de conversão A/D muito simples e barato. A palavra de código de 1 bit em DM torna desnecessário o enquadramento (*framing*) de palavra no transmissor e no receptor. Essa estratégia permite o uso de menor número de bits por amostra para a codificação de um sinal em banda base.



(a)



(b)

Figura 6.30 Modulação delta é um caso especial de DPCM.

Em DM, usamos um preditor de primeira ordem, que, como visto anteriormente, é apenas um atraso temporal T_s (intervalo de amostragem). Assim, o transmissor (modulador) e receptor (demodulador) DM são idênticos aos de DPCM na Fig. 6.28, com um atraso temporal para o preditor, como mostrado na Fig. 6.30, da qual podemos escrever:

$$m_q[k] = m_q[k - 1] + d_q[k] \quad (6.48)$$

Logo,

$$m_q[k - 1] = m_q[k - 2] + d_q[k - 1]$$

A substituição desta equação na Eq. (6.48) resulta em

$$m_q[k] = m_q[k - 2] + d_q[k] + d_q[k - 1]$$

Prosseguindo com esse processo iterativamente e admitindo condição inicial zero, ou seja, $m_q[0] = 0$, escrevemos

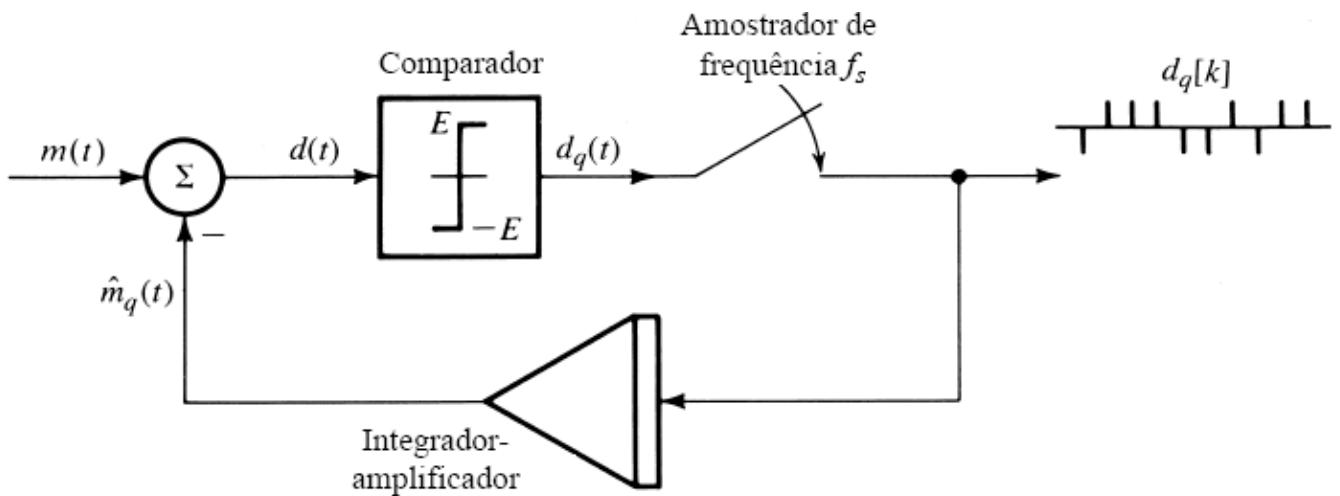
$$m_q[k] = \sum_{m=0}^k d_q[m] \quad (6.49)$$

Isso mostra que o receptor (demodulador) é apenas um acumulador (somador). Se a saída $d_q[k]$ for representada por impulsos, o acumulador (receptor) pode ser realizado por um integrador, pois sua saída é a soma das intensidades dos impulsos de entrada (soma das áreas sob os impulsos). Podemos, também, substituir a porção de realimentação do modulador (que é idêntico ao demodulador) pelo integrador. A saída do demodulador é $m_q[k]$, que, ao ser aplicada a um filtro passa-baixas, produz o sinal desejado, reconstruindo-o das amostras quantizadas.

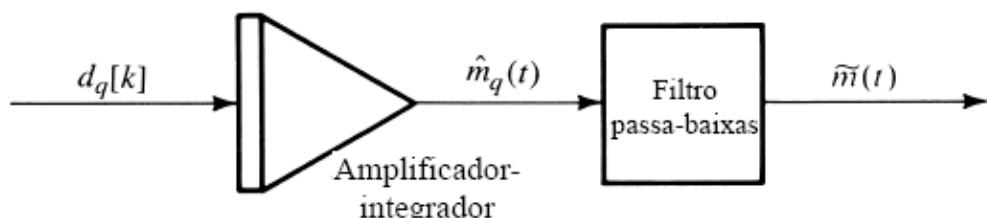
A Fig. 6.31 mostra uma implementação prática do modulador e do demodulador delta. Como discutido anteriormente, o preditor de primeira ordem é substituído por um circuito integrador de baixo custo (como um integrador RC). O modulador (Fig. 6.31a) consiste em um comparador e um amostrador na rota direta, e em um amplificador-integrador na rota de realimentação. Examinemos o funcionamento deste modulador delta.

O sinal analógico $m(t)$ é comparado com o sinal de realimentação (que serve como um sinal preditor) $\hat{m}_q[t]$. O sinal de erro $d(t) = m(t) - \hat{m}_q[t]$ é aplicado a um comparador. Se $d(t)$ for positivo, a saída do comparador é um sinal constante de amplitude E ; se $d(t)$ for negativo, a saída do comparador é $-E$. Assim, a diferença é um sinal binário ($L = 2$), necessário para gerar

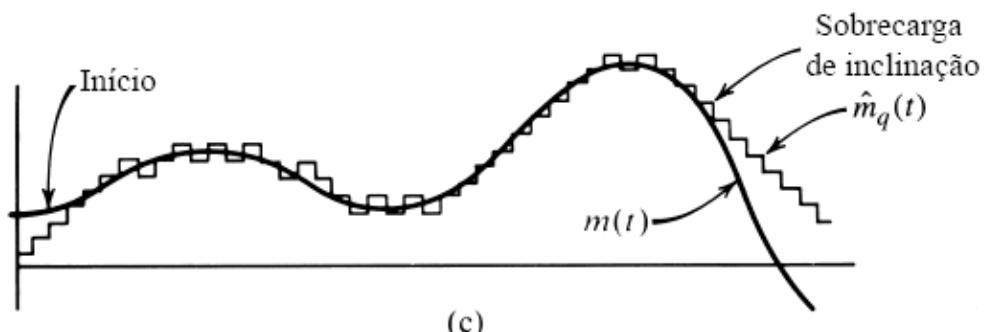
DPCM de 1 bit. A saída do comparador é amostrada por um amostrador à taxa de f_s amostras por segundo, sendo f_s , tipicamente, muito maior que a taxa de Nyquist. O amostrador, então, produz um trem de pulsos estreitos $d_q[k]$ (para simular impulsos); quando $m(t) > \hat{m}_q[t]$, o pulso é positivo; quando $m(t) < \hat{m}_q[t]$, o pulso é negativo. Reparemos que cada amostra é codificada por apenas um pulso binário (DPCM de 1 bit), como necessário. O trem de pulsos $d_q[k]$ é o trem de pulsos com modulação delta (Fig. 6.31d). O sinal modulado $d_q[k]$ é amplificado e integrado na rota de realimentação para gerar $\hat{m}_q[t]$ (Fig. 6.31c), que tenta seguir $m(t)$.



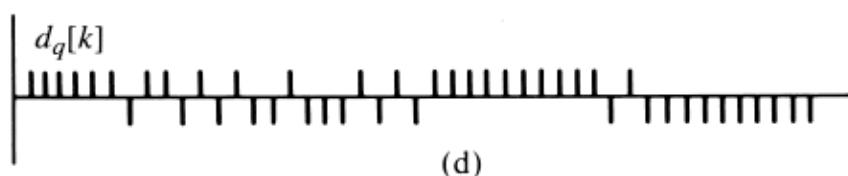
(a)



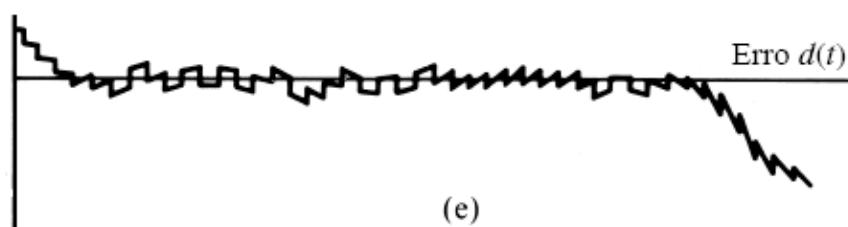
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 6.31 (a) Modulador delta; (b) demodulador delta; (c) sinal de mensagem *versus* sinal de saída do integrador; (d) trem de pulsos com modulação delta; (e) erros de modulação.

Para entender como isso funciona, notemos que cada pulso em $d_q[k]$ na entrada do integrador origina uma função degrau (positiva ou negativa, dependendo da polaridade do pulso) em $\hat{m}_q[t]$. Se, por exemplo, $m(t) > \hat{m}_q[t]$, é gerado um pulso positivo em $d_q[k]$, que dá origem a um degrau positivo em $\hat{m}_q[t]$, tentando, em pequenos passos a cada instante de amostragem, fazer $\hat{m}_q[t]$ igualar $m(t)$, como mostrado na Fig. 6.31c. Podemos observar que $\hat{m}_q[t]$ é uma espécie de aproximação em degraus de $m(t)$. Quando $\hat{m}_q[t]$ é aplicado a um filtro passa-baixas, a aspereza dos degraus é eliminada, e obtemos uma melhor aproximação para $m(t)$. No receptor, o demodulador consiste em um integrador-amplificador (idêntico ao da rota de realimentação do modulador) seguido por um filtro passa-baixas (Fig. 6.31b).

DM Transmite a Derivada de $m(t)$

Em PCM, as amostras do sinal analógico são quantizadas em L níveis, e esta informação é transmitida por n pulsos por amostras ($n = \log_2 L$). Uma pequena reflexão mostra que, em DM, o sinal modulado transporta informação sobre a diferença entre amostras sucessivas, e não sobre amostras de sinais. Se a diferença for positiva ou negativa, um pulso positivo ou negativo (respectivamente) é gerado no sinal modulado $d_q[k]$. Portanto, DM transporta informação sobre a derivada de $m(t)$, daí o nome “modulação delta”. Isso também pode ser visto do fato de que a integração do sinal modulado em delta produz $\hat{m}_q[t]$, que é uma aproximação de $m(t)$.

Em PCM, a informação de cada amostra quantizada é transmitida por uma palavra de código de n bits, enquanto em DM a informação sobre a diferença entre amostras sucessivas é transmitida por uma palavra de código de 1 bit.

Limiar de Codificação e Sobrecarga

Efeitos de limiar e sobrecarga podem ser vistos claramente na Fig. 6.31c. Variações em $m(t)$ menores que o valor do degrau (limiar de codificação) são perdidos em DM. Além disso, se $m(t)$ variar demasiadamente rápido, ou seja, se $|\dot{m}(t)|$ for demasiadamente grande, $\hat{m}_q[t]$ não será capaz de seguir $m(t)$ e ocorrerá sobrecarga. Isso caracteriza a chamada **sobrecarga de inclinação** (*slope overload*), que dá origem ao ruído de sobrecarga de inclinação. Esse ruído é um dos fatores limitantes básicos ao desempenho de DM. Em DM, deveríamos esperar sobrecarga de inclinação em vez de sobrecarga de amplitude, pois DM transporta basicamente informação sobre $|\dot{m}(t)|$. A natureza granular do sinal de saída dá origem ao ruído granular, similar ao ruído de quantização. O ruído de sobrecarga de inclinação pode ser reduzido com o aumento de E (o incremento). Lamentavelmente, isso aumenta o ruído granular. Existe um valor ótimo de E , que produz o melhor equilíbrio, resultando no ruído mínimo. Esse valor ótimo de E depende da frequência de amostragem f_s e da natureza do sinal.¹²

A sobrecarga de inclinação ocorre quando $\hat{m}_q(t)$ não consegue seguir $m(t)$. Durante o intervalo de amostragem T_s , $\hat{m}_q(t)$ pode ser alterado em E , em que E é a altura do degrau. Assim, a máxima inclinação que $\hat{m}_q(t)$ é capaz de seguir é E/T_s ou Ef_s , em que f_s é a frequência de amostragem. Portanto, sobrecarga de inclinação não ocorre quando

$$|\dot{m}(t)| < Ef_s$$

Consideremos o caso da modulação por tom (mensagem senoidal):

$$m(t) = A \cos \omega t$$

A condição para não haver sobrecarga é

$$|\dot{m}(t)|_{\max} = \omega A < Ef_s \quad (6.50)$$

Logo, a máxima amplitude A_{\max} deste sinal que pode ser tolerada sem sobrecarga é dada por

$$A_{\max} = \frac{Ef_s}{\omega} \quad (6.51)$$

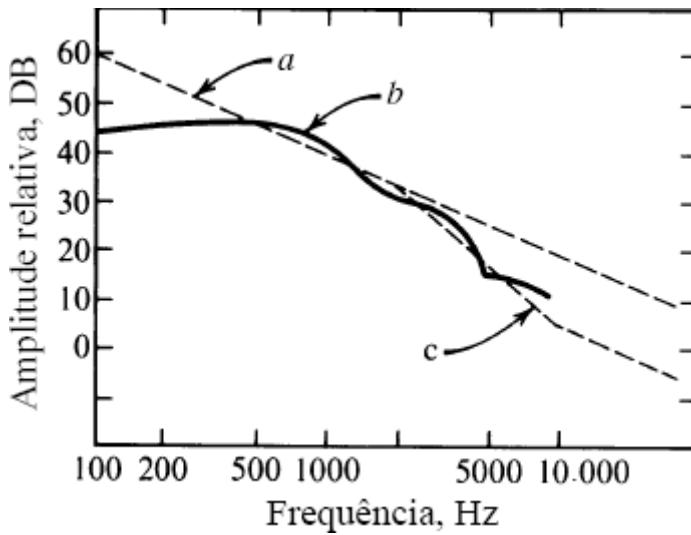


Figura 6.32 Espectro de sinal de voz.

A amplitude de sobrecarga do sinal modulante é inversamente proporcional à frequência ω . Para frequências modulantes mais altas, a sobrecarga ocorre para amplitudes menores. No caso de sinais de voz, que contêm todas as componentes de frequência de até (digamos) 4 kHz, o cálculo de A_{\max} pela Eq. (6.51), com $\omega = 2\pi \times 4000$, fornece um valor demasiadamente conservador. Jager¹³ mostrou que, para sinais de voz, A_{\max} pode ser calculado usando $\omega_r \approx 2\pi \times 800$ na Eq. (6.51),

$$[A_{\max}]_{\text{voz}} \approx \frac{Ef_s}{\omega_r} \quad (6.52)$$

Portanto, a máxima amplitude de sinal de voz A_{\max} que pode ser usada sem causar sobrecarga de inclinação em DM é igual à máxima amplitude de um sinal senoidal com frequência de referência f_r ($f_r \approx 800$ Hz) que pode ser usada sem causar sobrecarga de inclinação no mesmo sistema.

Felizmente, a amplitude do espectro de voz (assim como do sinal de vídeo de televisão) também cai com a frequência e segue a característica de sobrecarga de perto (curva *c*, Fig. 6.32). Por essa razão, DM é muito apropriada para sinais de voz (e de televisão). Na verdade, o espectro do sinal de voz (curva *b*) cai com $1/\omega$ até cerca de 2000 Hz e, além dessa frequência, passa a cair com $1/\omega^2$. Se tivéssemos usado uma integração dupla no circuito de realimentação, em vez de uma integração simples, A_{\max} , na Eq. (6.51), seria proporcional a $1/\omega^2$. Assim, um melhor casamento entre o espectro de voz e as características de sobrecarga é obtido com o uso de integração simples até 2000 Hz e de integração dupla acima de 2000 Hz. Um circuito desse tipo (com integração dupla) tem resposta rápida, mas com uma tendência à instabilidade, que pode ser reduzida com o uso de algum preditor de ordem baixa juntamente com a integração dupla. Um integrador duplo pode ser construído com uma cascata de dois integradores RC passa-baixas, com constantes de tempo $R_1 C_1 = 1/200\pi$ e $R_2 C_2 = 1/4000\pi$. Isso resulta em integração simples de 100 a 2000 Hz e integração dupla além de 2000 Hz.

Modulação Sigma-Delta

Na discussão sobre limiar de codificação e sobrecarga, ilustramos que a essência de DM convencional é a codificação e transmissão da derivada do sinal de mensagem analógico. Assim, o receptor DM requer um integrador, como mostrado na Fig. 6.31 e, de modo equivalente, na Fig. 6.33a. Como a transmissão de sinal é inevitavelmente sujeita ao ruído de canal, tal ruído será integrado e se acumulará na saída do receptor, um fenômeno altamente indesejável e a maior deficiência de DM.

Para superar essa deficiência de DM, podemos fazer uma pequena modificação. Primeiro, podemos ver o sistema DM global como consistindo em um transmissor e um receptor aproximadamente sem distorção e lineares. Assim, um dos componentes seriais, o integrador $1/s$ do receptor, pode ser deslocado para a frente do transmissor (codificador) sem afetar as respostas finais do modulador e do demodulador, como mostrado na Fig. 6.33b. Por fim, os dois integradores podem ser fundidos em um só, após o subtrator, como indicado na Fig. 6.33c. Esse sistema modificado é conhecido como modulação sigma-delta ($\Sigma-\Delta M$).

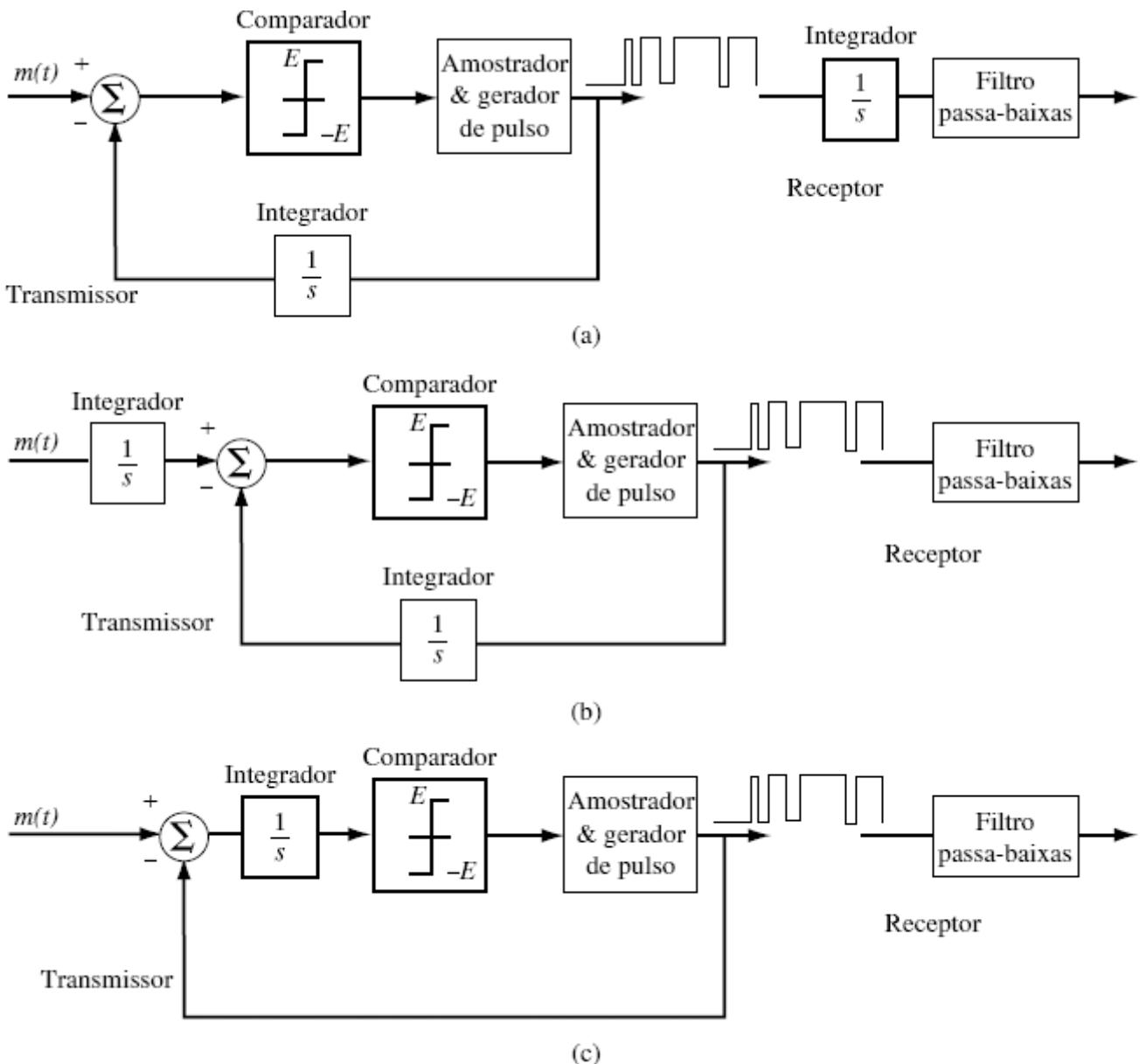


Figura 6.33 (a) Modulador delta convencional. (b) Modulador Σ - Δ . (c) Modulador Σ - Δ mais simples.

Como vimos no estudo de filtros de pré-ênfase e de ênfase em FM, dado que o ruído de canal e o sinal de mensagem não seguem a mesma rota, a ordem dos componentes seriais no sistema global de modulação-demodulação pode ter diferentes efeitos na SNR. O aparente pequeno deslocamento do integrador $1/s$, na verdade, tem várias vantagens significativas:

- O ruído de canal não mais se acumula no demodulador.
- O importante conteúdo de baixa frequência da mensagem $m(t)$ sofre pré-ênfase no integrador $1/j\omega$. Isso ajuda muitos sinais práticos (como os de voz), cujas componentes de frequências baixas são mais importantes.
- O integrador, de fato, suaviza o sinal para codificação (Fig. 6.33b). Assim, a sobrecarga se torna menos provável.
- A natureza passa-baixas do integrador aumenta a correlação entre amostras sucessivas, resultando em menor erro de codificação.
- O demodulador é simplificado.

Modulação Delta Adaptativa (ADM)

A DM discutida até aqui tem uma série desvantagem. A faixa dinâmica de amplitudes é demasiadamente pequena, devido aos efeitos de limiar e sobregrada analisados anteriormente. Para superar esse problema, algum tipo de compressão de sinal se faz necessário. Em DM, um método adequado parece ser a adaptação (ajuste) do valor do degrau E segundo o nível da derivada do sinal de entrada. Por exemplo, na Fig. 6.31, quando o sinal $m(t)$ cai rapidamente, ocorre sobregrada de inclinação. Se pudermos aumentar a altura do degrau durante este período, a sobregrada seria evitada. Contudo, se a inclinação do sinal $m(t)$ for pequena, uma redução na altura do degrau serviria para reduzir o nível de limiar e o ruído granular. A sobregrada de inclinação faz com que

$d_q[k]$ tenha vários pulsos sucessivos de mesma polaridade. Isso pede uma redução na altura do degrau. De modo similar, pulsos em $d_q[k]$ com alternância contínua de polaridade indicam variações de pequena amplitude, o que requer uma redução na altura do degrau. Em ADM (*adaptative delta modulation*), detectamos esses padrões de pulsos e ajustamos a altura do degrau automaticamente.¹⁴ Isso resulta em uma faixa dinâmica muito maior para DM.

6.8 VOCODERS E COMPRESSÃO DE VÍDEO

PCM, DPCM, ADPCM, DM e $\Sigma\Delta$ M são exemplos do que é conhecido como codificadores de fonte de forma de onda. Basicamente, codificadores de forma de onda não levam em consideração como foram gerados os sinais para digitalização. Assim, o grau de compressão alcançável por codificadores de forma de onda é altamente limitado pelo grau de correlação entre amostras sucessivas de sinal. Para uma fonte de sinal passa-baixas com largura de banda finita de B Hz, mesmo que aplicássemos a mínima taxa de amostragem de Nyquist, de $2B$ Hz, e codificação de 1 bit, a taxa de bits não pode ser inferior a $2B$ bit/s. Vários métodos foram introduzidos com sucesso para reduzir drasticamente a taxa de codificação de fonte de sinal de voz e de vídeo, muito importantes para nossas necessidades diárias de comunicação. Diferentemente de codificadores de forma de onda, os mais bem-sucedidos codificadores de voz e de vídeo são baseados em modelos fisiológicos humanos envolvidos na geração da voz e na percepção de vídeo. Aqui, descreveremos os princípios básicos da predição linear de codificadores de voz (conhecidos como vocoders) e o método de compressão de vídeo proposto pelo *Moving Picture Experts Group – MPEG* (Grupo de Especialistas em Imagens Animadas).

6.8.1 Vocoders com Codificação de Predição Linear

Modelos da Fala e Vocoders Baseados em Modelo

Vocoders com codificação de predição linear (LPC – *linear prediction coding*) são sistemas baseados em modelo. O modelo, por sua vez, é baseado no bom entendimento do mecanismo de produção da voz humana. A Fig. 6.34 apresenta uma ilustração seccional do aparato de produção da voz humana. Em resumo, a voz humana é produzida pela interação dos pulmões, cordas vocais e o trato de articulação, que consiste nas cavidades nasal e bucal. Com base nesse modelo fisiológico da fala, a voz humana pode ser dividida nas categorias de som *sonoro* (*voiced*) e *surdos* (*unvoiced*). Sons sonoros são feitos com cordas vocais vibrantes. Coloque um dedo no pomo-de-adão^{*} enquanto fala e poderá sentir a vibração das cordas vocais quando pronunciar todas as vogais e algumas consoantes, como *g*, como em *gota*, *b*, como em *boa*, *n*, como em *não*. Sons surdos são feitos sem vibração das cordas vocais. Várias consoantes, como *k*, *p*, *t*, são surdas. Alguns exemplos de sons surdos são *r*, como em *roda*, *c*, como em *calo*, *p*, como em *pulo*.

Para a produção de sons sonoros, os pulmões expelem ar através da epiglote, fazendo vibrar as cordas vocais. As cordas vocais vibrantes interrompem o fluxo de ar e produzem uma onda de pressão quase periódica, que consiste em impulsos. Os impulsos da onda de pressão são denominados impulsos de timbre (*pitch*), e a frequência do sinal de pressão é chamada frequência de timbre ou frequência fundamental, como mostrado na Fig. 6.34b. Essa é a parte do sinal de voz que define o timbre da fala. Voz emitida em uma frequência de timbre constante soa monótona. Em geral, a frequência de timbre de um orador varia de modo quase contínuo, de sílaba para sílaba.

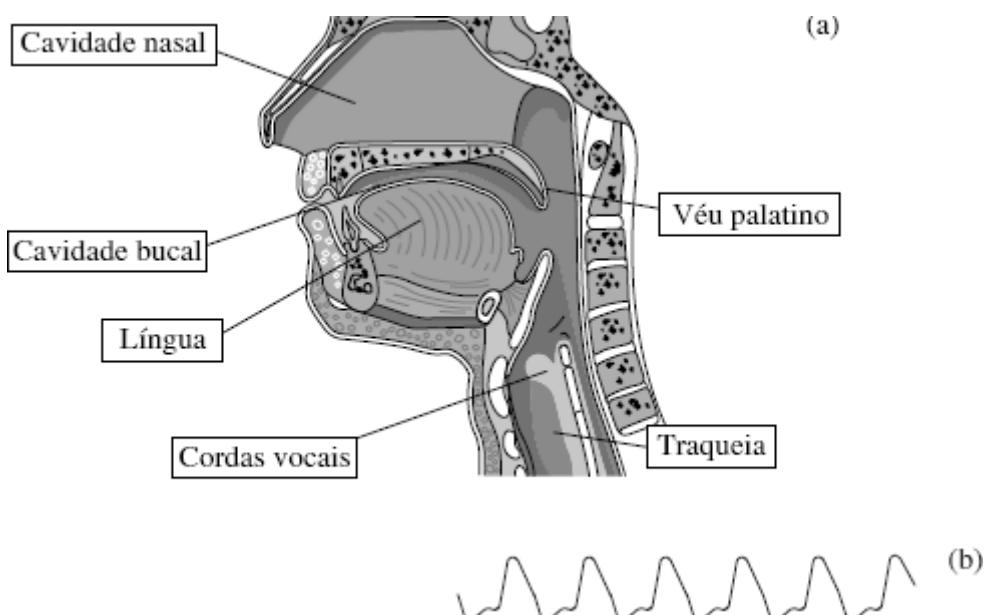


Figura 6.34 (a) Mecanismo de produção da voz humana. (b) Típicos impulsos de pressão.

Em sons sonoros, os impulsos de timbre estimulam o ar no trato vocal (cavidades bucal e nasal). Em sons surdos, a excitação advém diretamente do fluxo de ar. Estudos detalhados¹⁵⁻¹⁷ mostraram que, no caso de sons surdos, a excitação do trato vocal é mais parecido com um ruído de banda larga. Quando as cavidades no trato vocal ressoam sob excitação, radiam uma onda sonora, que é o sinal de voz. As duas cavidades formam ressoadores com frequências de ressonâncias características (frequências formantes). A alteração da forma (e, portanto, das características de ressonância) da cavidade bucal permite que diferentes sons sejam pronunciados. Surpreendentemente, esse trato de articulação (vocal) pode ser aproximado por um modelo que consiste em um filtro digital linear com função de transferência que tem somente polos

$$H(z) = \frac{g}{A(z)} = g \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}\right)^{-1}$$

em que g é o fator de ganho, e $A(z)$ é conhecido como filtro preditor, como o filtro de realimentação usado em DPCM e ADPCM. Podemos interpretar a função do aparato de articulação vocal como um filtro de formatação espectral $H(z)$.

Modelos LPC

Com base neste modelo da fala humana, podemos determinar uma abordagem para codificação de voz diferente da codificação de forma de onda. Em vez de enviar as próprias amostras de sinal, vocoders baseados em modelo *analisam* os sinais de voz segmento a segmento, para determinar os parâmetros que melhor se ajustem ao sinal. Como mostrado na Fig. 6.35, após a análise do sinal de voz, para cada segmento do sinal, o transmissor envia ao receptor os necessários parâmetros (formantes) do modelo da voz. O receptor usa os parâmetros do modelo da voz para estabelecer um sintetizador de voz para regenerar os respectivos segmentos do sinal de voz. Em outras palavras, o que o usuário ouve no receptor consiste, na verdade, em sinais reproduzidos por uma *máquina sintetizadora* de voz artificial!

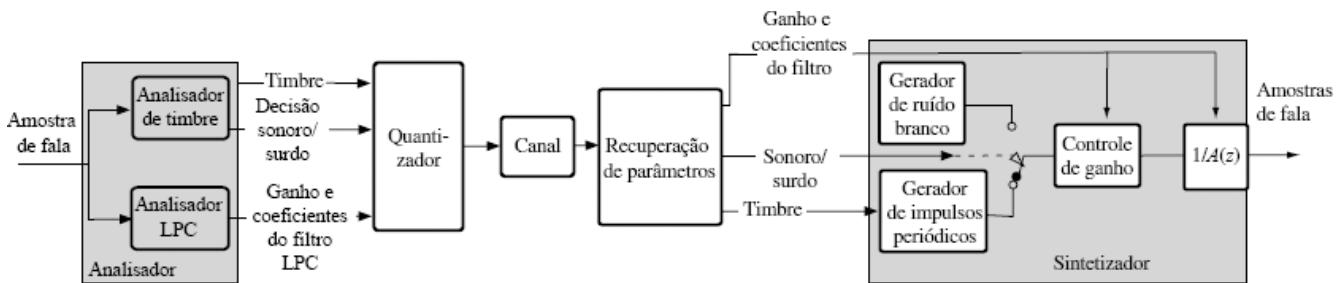


Figura 6.35 Análise e síntese de sinais de voz em codificador e decodificador LPC.

Tabela 6.1
Alocação de Bit de Quantização em Vocoder LPC-10

Período do Timbre	Sonoros/Surdos	Ganho g	Parâmetros do Filtro LP10, bits/coeficientes			
			$r_1 - r_4$	$r_5 - r_8$	r_9	r_{10}
			5 bits	4 bits	3 bits	2 bits
6 bits	1 bit	5 bits	5 bits		<i>Não usado</i>	Surdo

Na análise de um segmento de voz amostrada (consistindo em múltiplas amostras), a análise de timbre determinará, primeiro, se a voz é sonora ou surda. Se o sinal for classificado como “sonoro”, o analisador de timbre estimará a frequência do timbre (ou, o que é equivalente, o período do timbre). Além disso, o analisador de coeficientes de predição linear (LPC – *linear prediction coefficients*) estimará os coeficientes do filtro com polos apenas em $A(z)$. Como o erro de predição linear indica quão bem o filtro de predição linear se ajusta às amostras de voz, o analisador LPC pode determinar os coeficientes do filtro ótimo por meio da minimização do erro quadrático médio (MSE – *mean square error*) do erro de predição linear.^{18, 19}

A transmissão direta dos parâmetros do filtro de predição linear (LP – *linear prediction*) não faz sentido, pois o filtro é muito sensível a erros nos parâmetros, devido aos ruídos de quantização e de canal. Pior ainda, o filtro LP pode até mesmo se tornar instável por causa de pequenos erros nos coeficientes. Na prática, a estabilidade desse filtro de predição linear com polos apenas pode ser assegurada com a utilização de filtro em estrutura de modular de treliça, por meio do bem conhecido algoritmo de Levinson-Durbin.^{20, 21} Parâmetros do filtro de treliça, conhecidos como coeficientes de reflexão $\{r_k\}$, são menos sensíveis a

erros de quantização e de ruído. A transmissão pode ser melhorada com o envio das razões logarítmicas de área (LAR – *Log-area ratios*), definidas como

$$o_k \triangleq \log \frac{1 + r_k}{1 - r_k}$$

ou com o envio de valores intermediários da recursão de Levinson-Durbin, conhecidos como coeficientes de reflexão parcial (PARCOR – *partial reflection coefficients*). Outra abordagem prática consiste em determinar os *pares de raias espectrais* (LSP – *line spectral pairs*) equivalentes como uma representação dos coeficientes do filtro LPC para transmissão nos canais. LSP tem a vantagem de baixa sensibilidade ao ruído de quantização.^{22,23} Desde que seja estável, o filtro LP só de polos de ordem p pode ser representado por p frequências de raias espectrais reais. Em cada representação, um filtro sintetizador de ordem p pode ser obtido pelo decodificador LPC a partir dos p coeficientes reais. Em geral, de 8 a 14 parâmetros LP bastam para a representação do trato vocal.

Podemos, agora, usar um exemplo especial de LPC para ilustrar a eficiência de codificação de vocoders baseados em modelo. No chamado vocoder LPC-10,^{*} a fala é amostrada a 8 kHz. Cento e oitenta amostras (22,5 ms) formam um quadro LPC para transmissão.²⁴ Os bits por quadro de fala são alocados para quantizar o período do timbre, o sinalizador (*flag*) sonoro/surdo, o ganho do filtro e os 10 coeficientes do filtro, segundo a Tabela 6.1. Assim, cada quadro requer entre 32 (surdo) e 53 (sonoro) bits. A adição de bits de controle de quadro resulta em uma palavra de código com comprimento médio de 54 bits por quadro, ou uma taxa global de 2.400 bits/s.²⁴ Com base em testes subjetivos, esse simples codec LPC-10 tem baixo grau de opinião médio (MOS – *mean opinion score*), mas permite conexões de voz altamente inteligíveis. LPC-10 é parte de FS-1015, um padrão de codec de telefonia segura de baixa taxa desenvolvido pelo Departamento de Defesa do governo dos Estados Unidos em 1984. Um aprimoramento posterior de LPC-10 é conhecido como LPC-10(e).

Em comparação com codecs de forma de onda PCM de 64 kbit/s ou ADPCM de 32 kbit/s, vocoders LPC são muito mais eficientes e podem alcançar taxas de codificação de voz abaixo de 9,6 kbit/s. O exemplo de LPC-10 de 2,4 kbit/s permite digitalização de fala a uma taxa muito mais baixa que a taxa de amostragem de forma de onda de 8 kHz. A perda de qualidade da fala é uma barganha natural. Para um melhor entendimento da diferença entre vocoders de forma de onda e vocoders baseados em modelo, como LPC, podemos usar a analogia com um serviço de entrega de restaurante. Imaginemos uma família que viva no Alasca e deseje pedir um prato de um famoso restaurante de Nova York. Por motivos práticos, o restaurante teria de enviar pratos preparados crus e congelados, e a família, então, seguiria as instruções de cozimento. A comida, provavelmente, seria saborosa, mas a refeição perderia a fineza do *chef* original. Essa opção é parecida com a transmissão via PCM. O receptor tem os ingredientes básicos, mas deve tolerar o erro de quantização (que se manifesta pela ausência da fineza do *chef* de cozinha). Para reduzir o peso do transporte, a família tem a opção e pedir somente os ingredientes essenciais. Os ingredientes mais pesados e mais comuns (como arroz e batata) podem ser adquiridos localmente. Essa abordagem é como DPCM ou ADPCM, nas quais apenas a parte imprevisível da fala é transmitida. Por fim, a família pode simplesmente encomendar a receita do *chef*. Todos os ingredientes seriam comprados localmente e o prato também seria montado no local. Assim, a família alasquense poderia satisfazer seu desejo de comida gourmet sem receber um único item do restaurante de Nova York! O último cenário captura a ideia de vocoders baseados em modelo. Vocoders LPC basicamente transmitem a receita (ou seja, os parâmetros LPC) para síntese de voz no receptor.

Vocoders LP Práticos de Alta Qualidade

A simples síntese LPC de dois estados ilustrada na Fig. 6.35 descreve somente a ideia básica por trás de codecs de voz baseados em modelo. Na prática, a qualidade de vocoders LPC tem sido melhorada por meio de numerosos codecs mais elaborados. Com a adição de alguns bits, esses vocoders baseados em LP tentam melhorar a qualidade da voz de duas maneiras: por codificação do erro de predição residual e com melhora do sinal de excitação.

Os métodos mais bem-sucedidos pertencem à classe conhecida como vocoders de predição linear com excitação por código (CELP – *Code-Excited Linear Prediction*). Vocoders CELP usam um livro de códigos, tabela de típicos sinais de erro (ou resíduo) LP, definido *a priori* por projetistas. No transmissor, o analisador compara o resíduo real de predição para todas as entradas no livro de códigos, escolhe aquela que representa melhor casamento e adiciona o endereço (código) dessa entrada aos bits para transmissão. O sintetizador recebe esse código, recupera o correspondente resíduo do livro de códigos e o utiliza para modificar a saída sintetizada. Para que CELP funcione bem, o livro de códigos deve ser suficientemente extenso, o que requer mais bits para transmissão. O vocoder FS-1016 representa um aprimoramento do FS-1015 e oferece boa qualidade e fala de som natural, a 4,8 kbit/s.²⁵ Variantes mais modernas incluem o codec LPC RPE-LTP (*regular pulse excitation, long-term prediction* – excitação normal por pulsos, predição de longo prazo) usado em sistemas celulares GSM, CELP algébrico (ACELP), CELP relaxado (RCELP), Qualcomm CELP (QCELP) de sistemas celulares CDMA e predição linear com excitação por soma vetorial (VSELP – *vector-sum excited linear prediction*). As taxas de dados variam de 1,2 kbit/s a 13 kbit/s (GSM em taxa completa). Estes vocoders formam a base de muitos dos modernos vocoders para sistemas celulares, voz sobre protocolo IP (VoIP) e outros padrões da ITU-T da série G.

Compressão de Vídeo

A digitalização de vídeo e de televisão representa um enorme desafio. Devido à grande largura de banda (cerca de 4,2 MHz), o uso de amostragem e quantização diretas resulta em sinal de vídeo não comprimido de aproximadamente 150 Mbit/s. Em consequência, o modesto grau de compressão oferecido por técnicas como ADPCM e codificação em sub-banda^{26, 27} é insuficiente. A chave para a compressão de vídeo está associada à percepção visual humana.

Um grande esforço de pesquisa e desenvolvimento resultou em métodos que reduzem drasticamente a largura de banda digital necessária à transmissão de vídeo. As primeiras técnicas de compressão de sinais de vídeo produziam taxas da ordem de 45 Mbit/s (DS3). Contudo, para emergentes tecnologias de entrega de vídeo, como HFC, ADSL, HDTV e outras, um maior grau de compressão era necessário. MPEG tratou desse problema e desenvolveu novas técnicas de compressão, que ofereciam qualidade de vídeo de rede ou VCR com graus de compressão muito mais elevados. O MPEG é um esforço conjunto das Organizações Internacionais de Padronização (ISO – *International Standards Organizations*), do Comitê Eletrotécnico Internacional (IEC – *International Electrotechnical Committee*) e do Comitê X3L3 do Instituto Nacional Americano de Padronização (ANSI – *American National Standards Institute*).^{28, 29} O MPEG mantém um web site muito informativo, que provê extensa informação sobre as tecnologias MPEG e JPEG e sobre padrões (<http://www.mpeg.org/index.html/>). Mantém, ainda, um fórum industrial para a promoção dos produtos da organização (<http://www.m4if.org/>).

O conceito de compressão de vídeo digital se baseia no fato de que, em média, um número relativamente pequeno de pixels muda de um quadro a outro. Portanto, se apenas as alterações forem transmitidas, a largura de banda de transmissão pode ser reduzida drasticamente. A digitalização permite a recuperação sem ruído de sinais analógicos e melhora a qualidade da imagem no receptor. A compressão reduz a largura de banda necessária à transmissão e o espaço para armazenagem de um programa de vídeo e, em consequência, expande a capacidade do canal. Sem compressão, a armazenagem de um programa de vídeo NTSC de duas horas de duração exige aproximadamente 100 gigabytes, muito além da capacidade de qualquer disco DVD.

Há três padrões principais MPEG em uso:

MPEG-1: Usado para vídeo de qualidade VCR e armazenagem em CD de vídeo (ou VCD), a uma taxa de 1,5 Mbit/s. Esses VCDs são muito populares em países da Ásia (excetuando o Japão). Decodificadores MPEG-1 estão disponíveis na maioria dos computadores. O VCD também é um formato muito popular para karaokê.

MPEG-2: Este padrão suporta diversas aplicações de codificação de vídeo para transmissão, com qualidade variando de VCR a TV de alta definição (HDTV – *high definition television*), dependendo da taxa de dados. O MPEG-2 oferece uma taxa de compressão de vídeo de 50:1, e é um formato extremamente popular, usado em DVD, HDTV, difusão de vídeo digital terrestre (DVB-T – *terrestrial digital video broadcasting*) e difusão de vídeo digital por satélite (DVB-S).

MPEG-4: Este padrão provê transmissão contínua (*streaming*) de conteúdo multimídia (áudio, visual ou audiovisual) em diferentes larguras de banda, incluindo internet. O MPEG-4 é suportado pelo Media Player de Microsoft Windows, Real Networks, Quicktime e iPod da Apple. Recentemente, o MPEG-4 convergiu a um padrão ITU-T conhecido com H.264, a ser discutido mais adiante.

O poder da compressão de vídeo é fabuloso. Para efeito de comparação, a difusão de televisão NTSC no formato digital requer de 45 a 120 Mbit/s, enquanto MPEG-2 requer de 1,5 a 15 Mbit/s. A HDTV, por sua vez, exige 800 Mbit/s sem compressão; com compressão MPEG-2, a transmissão de HDTV pode ser feita a 19,39 Mbit/s.

Há dois tipos de compressão MPEG, que eliminam redundâncias em sinais audiovisuais não perceptíveis pelo ouvido ou visão humanos:

1. Vídeo

- Compressão temporal ou *entre quadros* através da predição de movimento entre quadros e remoção de redundância entre quadros.
- Compressão espacial ou intraquadro, que forma um identificador de bloco para um grupo de pixels com características iguais (cor, intensidade etc.), para cada quadro. Somente o identificador de bloco é transmitido.

2. Áudio, que utiliza um modelo psicoacústico de efeitos mascaradores.

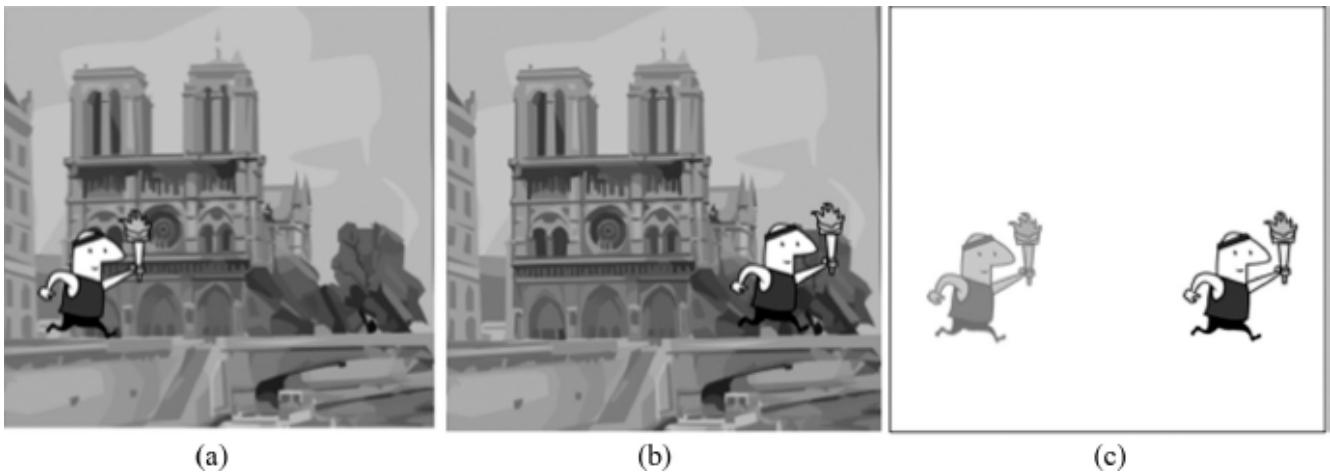


Figura 6.36 (a) Quadro 1. (b) Quadro 2. (c) Informação transferida entre quadros 1 e 2.

A base da compressão de vídeo é a remoção de redundâncias no fluxo (*stream*) de sinal de vídeo. Como exemplo de redundância entre quadros, consideremos a Fig. 6.36a e b. Na Fig. 6.36a, o corredor está na posição *A* e na Fig. 6.36b, na posição *B*. Reparemos que o fundo (catedral, prédios e ponte) permanece essencialmente inalterado de um quadro a outro. A Fig. 6.36c representa a informação não redundante para transmissão; ou seja, o que sofreu alteração entre os dois quadros. A imagem do corredor à esquerda representa os blocos do quadro 1 que são substituídos pelo fundo do quadro 2. A imagem do corredor à direita representa os blocos do quadro 1 que substituirão o fundo no quadro 2.

A compressão de vídeo tem início com um codificador, que converte o sinal de vídeo analógico da câmera de vídeo ao formato digital pixel a pixel. Cada quadro de vídeo é dividido em blocos de 8×8 pixels, que são analisados pelo codificador para determinar que blocos devem ser transmitidos, ou seja, que blocos têm alterações significativas de um quadro a outro. Esse processo se dá em duas etapas:

1. Estimação e compensação de movimento. Aqui, um estimador de movimento identifica as áreas ou grupos de blocos de um quadro anterior que casa áreas correspondentes no quadro atual e envia a magnitude e direção do deslocamento a um preditor no decodificador. A informação sobre a diferença entre quadros é chamada de resíduo.
2. Transformação do resíduo quadro a quadro em uma forma mais compacta.

O sinal de resíduo codificado é transformado em uma forma mais compacta por meio de uma transformada de cosseno discreta (DCT – *discrete cosine transform*) (ver Seção 6.5.2 em Haskell *et al.*²⁸), que usa um valor numérico para representar cada pixel e normaliza esse valor para transmissão mais eficiente. A DCT é da forma

$$F(j, k) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} f(n, m) \cos \left[\frac{(2n+1)j\pi}{2N} \right] \cos \left[\frac{(2m+1)k\pi}{2N} \right]$$

em que $f(n, m)$ é o valor alocado ao bloco na posição (n, m) . A transformada inversa é

$$f(n, m) = \frac{1}{N^2} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} F(j, k) \cos \left[\frac{(2n+1)j\pi}{2N} \right] \cos \left[\frac{(2m+1)k\pi}{2N} \right]$$

Para um bloco de 8×8 , a DCT é multiplicada pela expressão $C(j)C(k)/4$, em que

$$C(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{para } x = 0 \\ 1 & \text{ao contrário} \end{cases}$$

As Tabelas 6.2 e 6.3 listam os valores dos blocos de pixels antes e depois da DCT. Podemos notar, na Tabela 6.3, que há relativamente poucos elementos significativos; ou seja, elementos com valores significativos em relação aos valores centrados na posição 0, 0. Assim, a maioria dos valores na matriz pode ser admitida como zero e, após a transformada inversa, os valores

originais são reproduzidos com alta precisão. Este processo em muito reduz a quantidade de dados que devem ser transmitidos, talvez por um fator médio de 8 a 10. Reparemos que o tamanho do resíduo pode ser igual ao de um bloco individual ou, no outro extremo, ao de toda a imagem.

Tabela 6.2
Bloco de Resíduo de 8×8 Pixels

		n							
		158	158	158	163	161	161	162	162
m	157	157	157	162	163	161	162	162	162
	157	157	157	160	161	161	161	161	161
	155	155	155	162	162	161	160	159	
	159	159	159	160	160	162	161	159	
	156	156	156	158	163	160	155	150	
	156	156	156	159	156	153	151	144	
	155	155	155	155	153	149	144	139	

Tabela 6.3
Coeficientes da Transformação DCT
do Bloco de Resíduo de 8×8 Pixels

		i							
		1259,6	1,0	-12,1	5,2	2,1	1,7	-2,7	-1,3
k	22,6	-17,5	6,2	-3,2	2,9	-0,1	-0,4	-1,2	
	-10,9	9,3	-1,6	-1,5	0,2	0,9	-0,6	0,1	
	7,1	-1,9	-0,2	1,5	-0,9	-0,1	0,0	0,3	
	-0,6	0,8	1,5	-1,6	-0,1	0,7	0,6	-1,3	
	-1,8	-0,2	-1,6	-0,3	0,8	1,5	-1,0	-1,0	
	-1,3	0,4	-0,3	1,5	-0,5	-1,7	1,1	0,8	
	2,6	1,6	3,8	-1,8	-1,9	1,2	0,6	-0,4	

Tabela 6.4
Coeficientes Normalizados e
Quantizados da DCT do Resíduo

		jn							
		21	0	-1	0	0	0	0	0
k	2	-1	0	0	0	0	0	0	0
	-1	1	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Os valores transmitidos da matriz de um bloco (Tabela 6.4) são normalizados, de modo que os valores na matriz do bloco sejam menores que 1. A matriz resultante é, então, quantizada para produzir a Tabela 6.4. A normalização é feita por uma matriz dinâmica de valores multiplicativos, que são aplicados à matriz transformada elemento a elemento. A matriz normalizada na

Tabela 6.4 é a informação de bloco transmitida ao decodificador. A matriz desnormalizada listada na Tabela 6.5 e o resíduo reconstruído (por transformação inversa) na Tabela 6.6 são determinados pelo decodificador. O processo de transformação segue um padrão de zigue-zague, como ilustrado na Fig. 6.37.

Tabela 6.5
Coeficientes DCT Desnormalizados

	jn							
k	1260	0	-12	0	0	0	0	0
	23	-18	0	0	0	0	0	0
	-11	10	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 6.6
Coeficientes da DCT
Inversa do Resíduo Reconstruído

	n							
m	158	158	158	163	161	161	162	162
	157	157	157	162	163	161	162	162
	157	157	157	160	161	161	161	161
	155	155	155	162	162	161	160	159
	159	159	159	160	160	162	161	159
	156	156	156	158	163	160	155	150
	156	156	156	159	156	153	151	144
	155	155	155	155	153	149	144	139

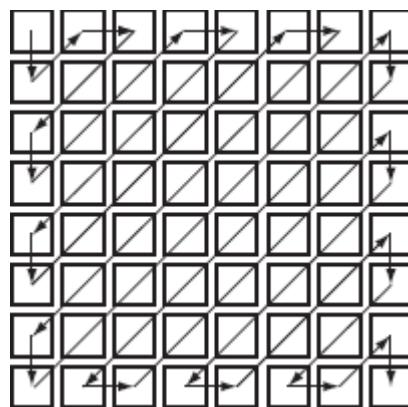


Figura 6.37 Padrão em zigue-zague de varredura de coeficientes DCT.

O MPEG utiliza estimativa e compensação de movimento para remover redundâncias temporais (quadro a quadro) de forma própria. Usa três tipos de quadros: quadro I ou intraquadro (às vezes chamado de quadro codificado independentemente ou intracodificado), quadro P ou predito e quando B ou quadro de predição bidirecional. Quadros P são preditos de quadros I. Quadros B são preditos bidirecionalmente, de quadros passados ou futuros. Um quadro I e um ou mais quadros P e B formam o padrão básico de processamento MPEG, chamado de grupo de imagens (GOP – group of pictures). A maioria dos quadros em uma imagem comprimida MPEG é de quadros B. Os quadros I provêm a referência inicial para que a diferença entre quadros dispare o processo de codificação MPEG. Reparemos que o aspecto bidirecional do procedimento introduz um atraso na transmissão dos

quadros. Isso ocorre porque o GOP é transmitido como uma unidade e, portanto, a transmissão não pode ter início até que o GOP esteja completo (Fig. 6.38). Os detalhes do procedimento estão além do escopo deste texto. Numerosos livros cobrem este assunto em detalhe. Além disso, várias referências sobre compressão MPEG e HDTV podem ser encontradas na internet.

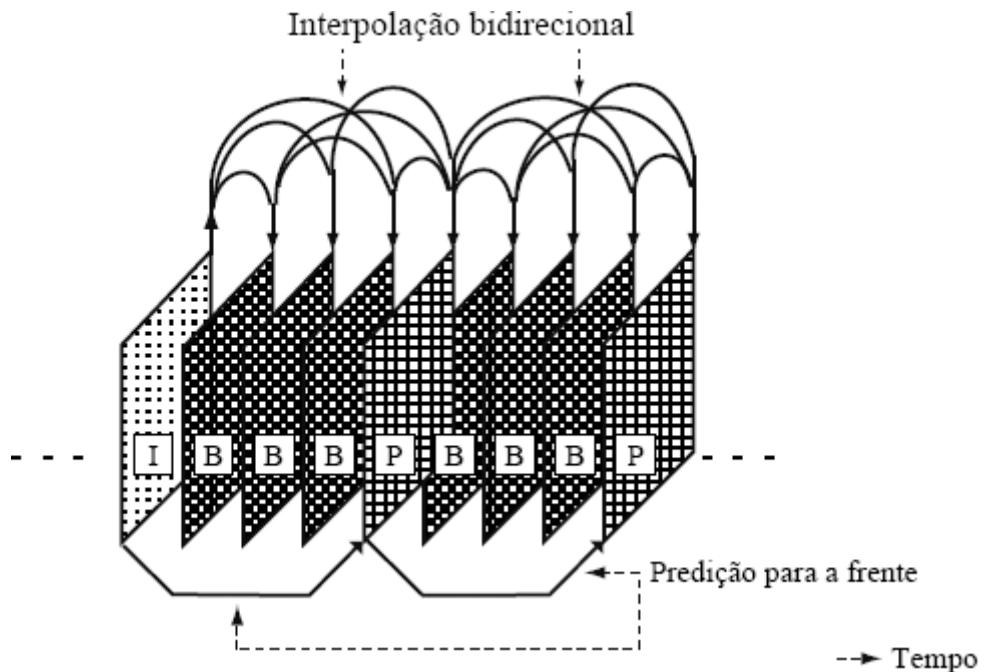


Figura 6.38 Estrutura temporal de quadros MPEG.

Outros Padrões de Compressão de Vídeo

Devemos mencionar que, além do MPEG, há um esforço paralelo da ITU-T para padronizar a codificação de vídeo. Esses padrões aplicam conceitos similares aos estudados para compressão de vídeo. Atualmente, os mais conhecidos padrões ITU-T para compressão de vídeo são os da série H.26x, incluindo H.261, H.263 e H.264. O padrão H.261 foi desenvolvido para transmissão de vídeo a uma taxa de múltiplos de 64 kbit/s para aplicações como videotelefonia e videoconferência. Assim como a compressão MPEG, o H.261 usa previsão temporal por compensação de movimento.

O H.263 foi projetado para aplicações em codificação a taxas de bits muito baixas, como videoconferência. Este padrão utiliza a estrutura DCT com compensação de movimento.³⁰ Baseado no H.261, o H.263 foi otimizado para codificação a taxas de bits muito baixas e sua eficiência de codificação é maior que a do H.261. Flash Video, um formato extremamente popular para compartilhamento de vídeo em muitos web sites, como YouTube e MySpace, emprega uma variante do H.263 conhecida como codec Sorenson Spark.

O padrão H.264 representa, na verdade, a convergência entre ITU-T e MPEG, sendo um esforço conjunto dos dois grupos. Também conhecido como MPEG-4 Parte 10, o H.264 tem melhor desempenho que o MPEG-2 e reduz a taxa de dados em quase 50%. Esse versátil padrão suporta aplicações de vídeo em diferentes graus de largura de banda e qualidade, incluindo serviço de telefonia móvel em 50-60 kbit/s, vídeo com padrão internet a 1-2 Mbit/s e vídeo de alta definição a 5-8 Mbit/s. O H.264 também é suportado em diversos outros produtos e aplicações, como IPod, difusão direta de TV por satélite, algumas TV terrestres regionais, Mac OS X (Tiger) e Playstation Portable da Sony.

Nota sobre Televisão de Alta Definição (HDTV)

A televisão de alta definição (HDTV), que emprega o padrão MPEG-2 para compressão de vídeo, é uma das funções de televisão avançada (ATV – *advanced television*) com vídeo comprimido de 525 linhas para difusão direta por satélite (DBS – *direct broadcast satellite*) ou por cabo. O conceito de HDTV surgiu no final da década de 1970. Os primeiros desenvolvimentos se deram principalmente no Japão, com base em um sistema analógico. Em meados dos anos 1980, ficou claro que a largura de banda exigida pelo sistema analógico era excessiva. Foram, então, iniciados trabalhos para um sistema digital que utilizasse a largura de banda de 6 MHz do sistema de televisão NTSC. No início da década de 1990, foram propostos sete sistemas digitais, mas testes indicaram que nenhum seria satisfatório. Em consequência, em 1993, a FCC sugeriu a formação de uma “Grande Aliança” (GA - *Grand Alliance*) industrial para desenvolver um padrão HDTV. Em dezembro de 1997, o padrão A/53 para difusão de televisão, proposto pelo Comitê de Sistemas Avançados de Televisão (ATSC - *Advanced Television Systems Committee*), foi finalizado pela FCC nos Estados Unidos.

O padrão de HDTV do GA tem por base uma razão de aspecto de 16:9 (razão de aspecto de cinema), em vez da razão de aspecto de 4:3 do sistema NTSC de televisão. A HDTV utiliza compressão MPEG-2 a 19,39 Mbit/s e formato de modulação digital denominado 8-VSB (banda lateral vestigial), que usa um símbolo com oito níveis de amplitude para representar 3 bits de

informação. A transmissão é feita em blocos de 207 bytes, incluindo 20 bytes de paridade para código de correção de erro para a frente Reed-Solomon. O formato de pacote com os restantes 187 bytes é um subconjunto do protocolo MPEG-2 e inclui cabeçalhos para sincronização, comutação e outros controles de transmissão.

O Comitê de Sistemas Avançados de Televisão, sucessor da Grande Aliança, prossegue com o desenvolvimento de padrões e recomendações para HDTV, que podem ser encontrados, assim como uma variedade de outras informações, em <http://www.atsc.org/>.

6.9 EXERCÍCIOS COM O MATLAB

Nos exercícios com o MATLAB desta seção, fornecemos exemplos de amostragem de sinal, reconstrução de um sinal a partir de amostras, quantização uniforme, modulação por modificação de pulsos (PCM) e modulação delta (DM).

Amostragem e Reconstrução de Sinais Passa-Baixas

No exemplo de amostragem, primeiro, construímos um sinal $g(t)$ com duas componentes senoidais de 1 segundo de duração; suas frequências são 1 e 3 Hz. Reparemos, contudo, que a duração finita do sinal implica que o mesmo não é limitado em banda, embora a maior parte do conteúdo esteja em uma largura de banda de 5 Hz. Por isso, selecionamos uma frequência de amostragem de 50 Hz, muito maior que a mínima frequência de Nyquist, de 6 Hz. O programa MATLAB, `Exsample.m`, implementa a amostragem e a reconstrução do sinal. A Fig. 6.39 ilustra o sinal original, suas amostras uniformes à taxa de amostragem de 50 Hz e a resposta de frequência do sinal amostrado. Segundo a análise na Seção 6.1, o espectro do sinal amostrado $g_T(t)$ consiste na repetição do espectro do sinal original a cada 50 Hz.

```
% (Exsample.m)
% Exemplo de amostragem, quantização e retenção de ordem zero
clear;clf;
td=0.002;          %taxa de amostragem original 500 Hz
t=[0:td:1.];       %intervalo temporal de 1 segundo
xsig=sin(2*pi*t)-sin(6*pi*t);    % senoides 1Hz+3Hz
Lsig=length(xsig);

ts=0.02;           %nova taxa de amostragem = 50Hz.
Nfactor=ts/td;
% envia o sinal por meio de um quantizador uniforme de 16 níveis
[s_out,sq_out,sqh_out,Delta,SQNR]=sampandquant(xsig,16,td,ts);
%   recebe 3 sinais:
%     1. sinal amostrado: s_out
%     2. sinal amostrado e quantizado: sq_out
%     3. sinal amostrado, quantizado e com retenção de ordem zero:sqh_out
%
%   calcula transformadas de Fourier
Lfft=2^ceil(log2(Lsig)+1);
Fmax=1/(2*td);
```

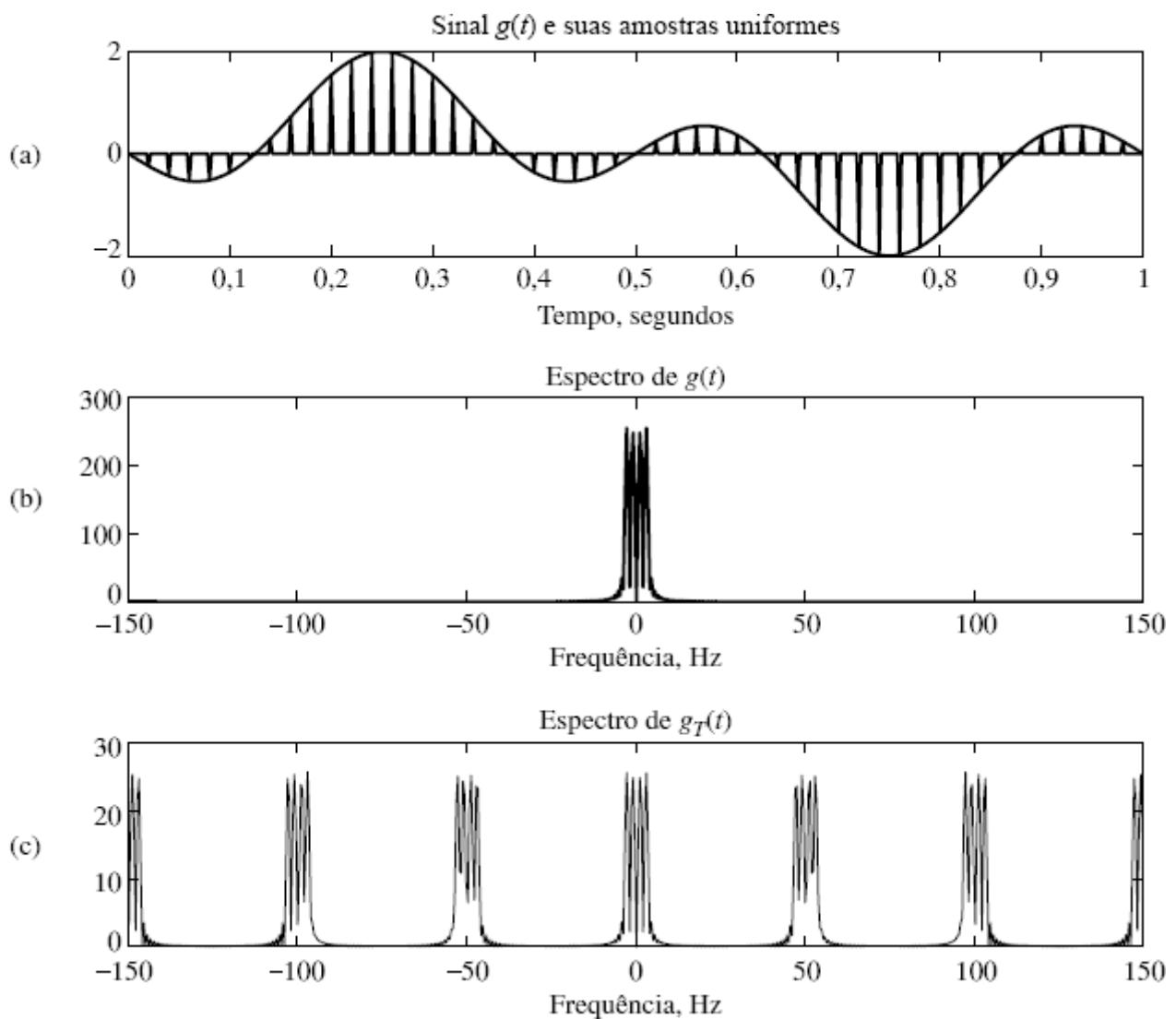


Figura 6.39 Relação entre sinal original e sinal amostrado uniformemente ideal, nos domínios do tempo (a) e da frequência (b, c).

```

Faxis=linspace(-Fmax,Fmax,Lfft);
Xsig=fftshift(fft(xsig,Lfft));
S_out=fftshift(fft(s_out,Lfft));
% Exemplos de amostragem e reconstrução usando
%     a) trem de impulsos ideais por LPF
%     b) reconstrução com pulso retangular por meio de LPF
% traça gráfico do sinal original e do sinal amostrado nos domínios do
% tempo e da frequência
figure(1);
subplot(311); sfig1a=plot(t,xsig,'k');
hold on; sfig1b=plot(t,s_out(1:Lsig),'b'); hold off;
set(sfig1a,'LineWidth',2); set(sfig1b,'LineWidth',2.);
xlabel('tempo, segundos');
title('sinal  $\{g\}(\{t\})$  e suas amostras uniformes');
subplot(312); sfig1c=plot(Faxis,abs(Xsig));
xlabel('frequência (Hz)');
axis([-150 150 0 300])
set(sfig1c,'LineWidth',1); title('Espectro de  $\{g\}(\{t\})$ ');
subplot(313); sfig1d=plot(Faxis,abs(S_out));
xlabel('frequência (Hz)');
axis([-150 150 0 300/Nfactor])
set(sfig1c,'LineWidth',1); title('Espectro de  $\{g\}_T(\{t\})$ ');
% calcula o sinal reconstruído a partir de amostragem ideal e
% LPF (filtro passa-baixas) ideal

```

```

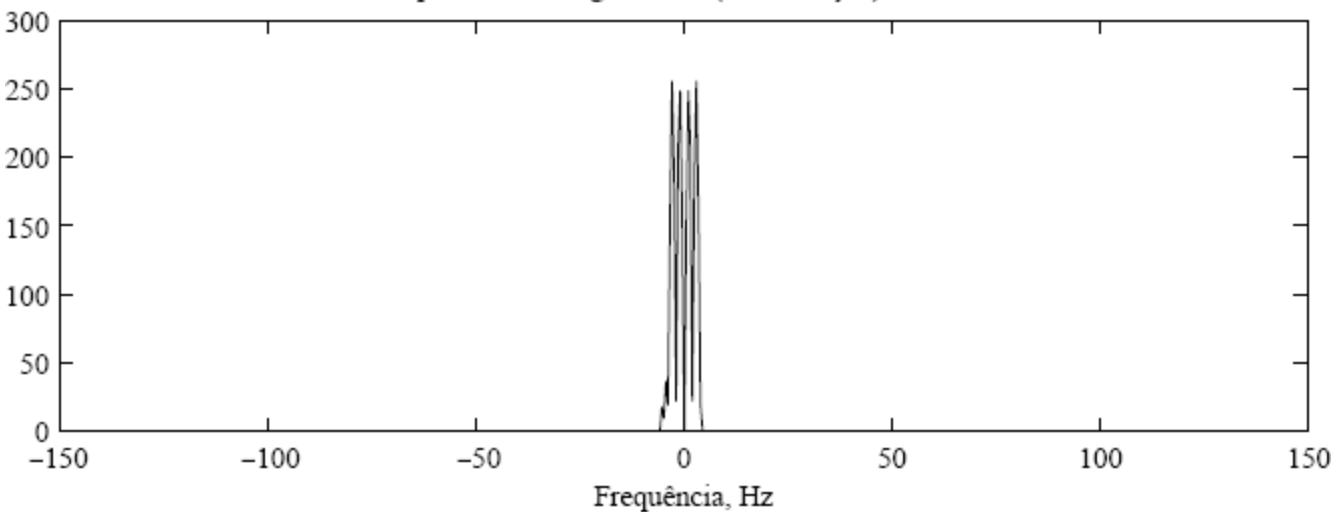
% Máxima largura do LPF é igual a BW=floor((Lfft/Nfactor)/2);
BW=10; %Largura de banda não é maior que 10Hz.
H_lpf=zeros(1,Lfft);H_lpf(Lfft/2-BW:Lfft/2+BW-1)=1; %ideal LPF
S_recv=Nfactor*S_out.*H_lpf; % filtragem ideal
s_recv=real(ifft(fftshift(S_recv))); % domínio da frequência reconstruído
s_recv=s_recv(1:Lsig); % domínio do tempo reconstruído
% traça gráfico do sinal reconstruído idealmente nos domínios do
% tempo e da frequência
figure(2)
subplot(211); sfig2a=plot(Faxis,abs(S_recv));
xlabel('frequência (Hz)');
axis([-150 150 0 300]);
title('Espectro de filtragem ideal (reconstrução)');
subplot(212); sfig2b=plot(t,xsig,'k-.',t,s_recv(1:Lsig),'b');
legend('Sinal original','Sinal reconstruído');
xlabel('Tempo, segundos');
title('Sinal original versus sinal reconstruído idealmente');
set(sfig2b,'Linewidth',2);
% reconstrução não ideal
ZOH=ones(1,Nfactor);
s_ni=kron(downsampel(s_out,Nfactor),ZOH);
S_ni=fftshift(fft(s_ni,Lfft));
S_recv2=S_ni.*H_lpf; % filtragem ideal
s_recv2=real(ifft(fftshift(S_recv2))); % domínio da frequência reconstruído
s_recv2=s_recv2(1:Lsig); % domínio do tempo reconstruído
% traça gráfico do sinal reconstruído idealmente nos domínios do tempo
% e da frequência
figure(3)
subplot(211); sfig3a=plot(t,xsig,'b',t,s_ni(1:Lsig),'b');
xlabel('Tempo, segundos');
title('sinal original versus reconstrução com pulso retangular');
subplot(212); sfig3b=plot(t,xsig,'b',t,s_recv2(1:Lsig),'b--');
legend('sinal original','Reconstrução LPF');
xlabel('Tempo, segundos');
set(sfig3a,'Linewidth',2); set(sfig3b,'Linewidth',2);
title('sinal original versus reconstrução com pulso retangular após LPF');

```

Para construir o sinal original $g(t)$ do trem de impulsos de amostragem $g_T(t)$, aplicamos um filtro passa-baixas ideal com largura de banda de 10 Hz no domínio da frequência. Isso corresponde à interpolação usando a função sinc ideal, como mostrado na Seção 6.1.1. O espectro resultante, como ilustrado na Fig. 6.40, é quase idêntico ao espectro da mensagem original $g(t)$. Além disso, as formas de onda no domínio do tempo também são comparadas na Fig. 6.40 e mostram um casamento quase perfeito.

Em nosso último exercício sobre amostragem e reconstrução, dado no mesmo programa, usamos um pulso retangular de largura T_s (período de amostragem) para reconstruir o sinal original a partir das amostras (Fig. 6.41). Um filtro passa-baixas é aplicado à reconstrução retangular, e o resultado também é mostrado na Fig. 6.41. A comparação com o sinal original deixa claro que o sinal recuperado ainda é muito próximo do sinal original $g(t)$. Isso se deve ao fato de termos escolhido uma alta taxa de amostragem, tal que $T_p = T_s$ fosse tão pequeno que a aproximação na Eq. (6.17) fosse válida. Certamente, com base em nossa análise, com aplicação do filtro de equalização passa-baixas da Eq. (6.16), o erro de reconstrução pode ser muito reduzido.

Espectro de filtragem ideal (reconstrução)



Sinal original versus sinal reconstruído idealmente

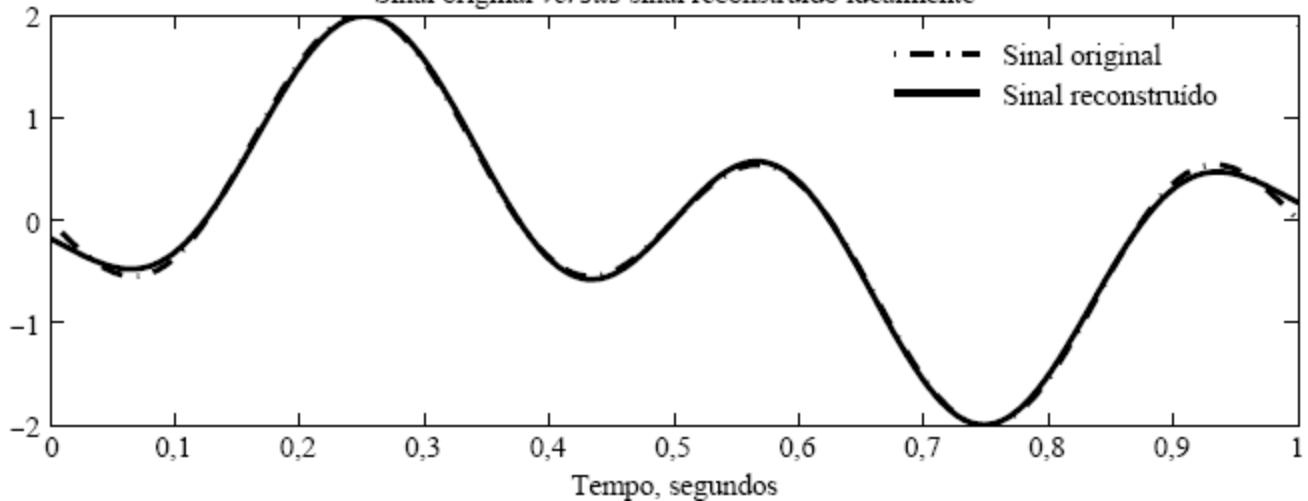


Figura 6.40 Espectro e forma de onda do sinal reconstruído com aplicação de amostragem ideal por impulsos e filtro passa-baixas ideal para reconstrução.

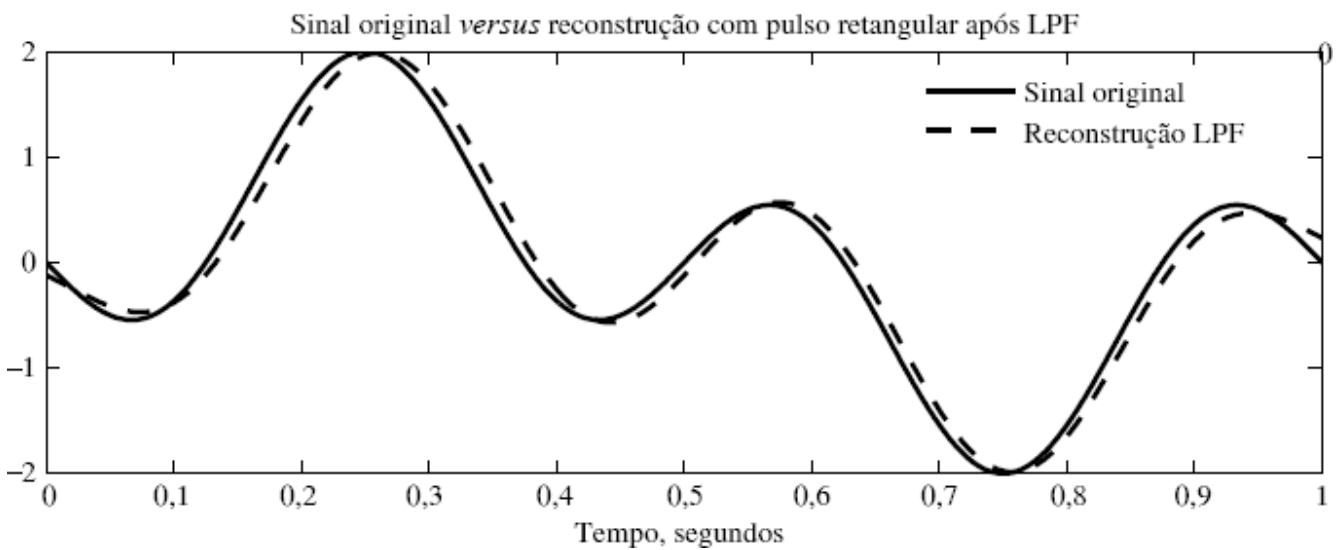
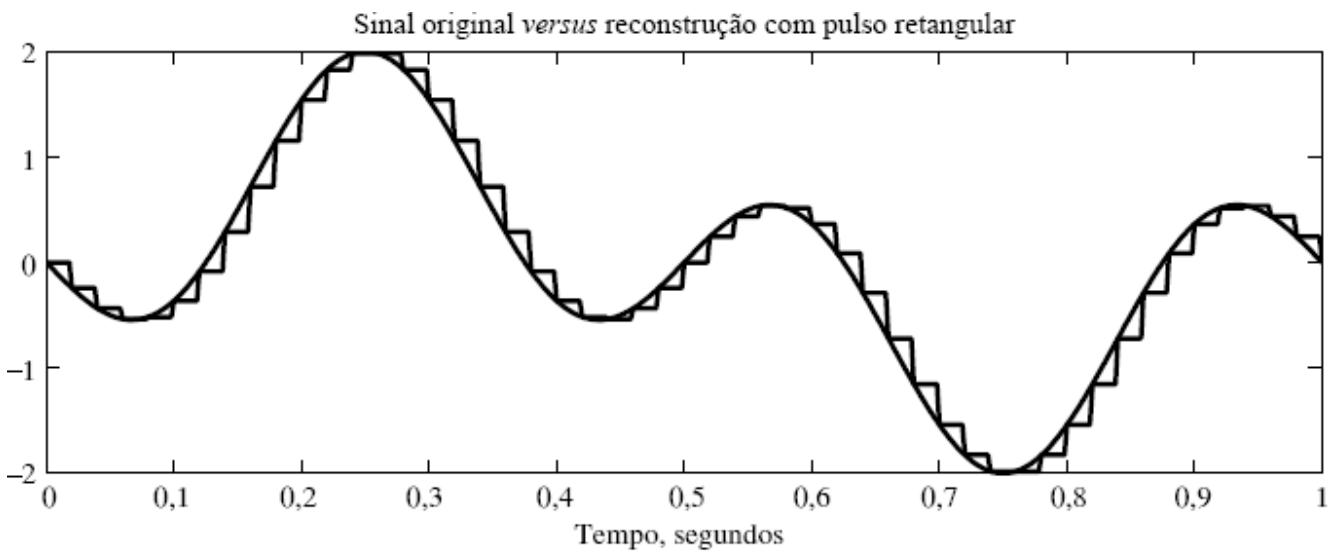


Figura 6.41 Espectro e forma de onda do sinal reconstruído com aplicação de pulso retangular de reconstrução (Fig. 6.6) seguido por LPF sem equalização.

Exemplo de PCM

A quantização uniforme de um sinal analógico usando L níveis de quantização pode ser implementada com a função MATLAB `uniquan.m`.

```
% (uniquan.m)
function [q_out,Delta,SQNR]=uniquan(sig_in,L)
% Uso
% [q_out,Delta,SQNR]=uniquan(sig_in,L)
% L - número de níveis de quantização uniforme
% sig_in - vetor para sinal de entrada
% Saídas de função:
%         q_out - saída quantizada
%         Delta - intervalo de quantização
%         SQNR - real relação sinal-ruído de quantização
sig_pmax=max(sig_in); % determina pico positivo
sig_nmax=min(sig_in); % determina pico negativo
Delta=(sig_pmax-sig_nmax)/L; % intervalo de quantização
q_level=sig_nmax+Delta/2:Delta:sig_pmax-Delta/2; % define Q níveis
L_sig=length(sig_in); % determina comprimento do sinal
sigp=(sig_in-sig_nmax)/Delta+1/2; % converte à faixa de 1/2 a L+1/2
qindex=round(sigp); % arredonda a 1, 2, ... L níveis
qindex=min(qindex,L); % elimina L+1 como uma possibilidade rara
q_out=q_level(qindex); % usa vetor index para gerar saída
SQNR=20*log10(norm(sig_in)/norm(sig_in-q_out)); %valor da SQNR
end
```

A função sampandquant.m executa amostragem e quantização uniforme simultaneamente. O período de amostragem ts é necessário, assim como o número L de níveis de quantização, para gerar a saída amostrada s_out, a saída amostrada e quantizada sq_out e o sinal após amostragem, quantização e retenção de ordem zero sqh_out.

```
% (sampandquant.m)
function [s_out,sq_out,sqh_out,Delta,SQNR]=sampandquant(sig_in,L,td,ts)
% Uso
% [s_out,sq_out,sqh_out,Delta,SQNR]=sampandquant(sig_in,L,td,fs)
% L - número de níveis de quantização uniforme
% sig_in - vetor para sinal de entrada
% td - período original de amostragem de sinal de sig_in
% ts - novo período de amostragem
% NOTA: td*fs deve ser um inteiro positivo;
% Saídas de função:
%         s_out - saída amostrada
%         sq_out - saída amostrada e quantizada
%         sqh_out- saída amostrada, quantizada e retida
%         Delta - intervalo de quantização
%         SQNR - real relação sinal-ruído de quantização

if (rem(ts/td,1)==0)
nfac=round(ts/td);
p_zoh=ones(1,nfac);
s_out=downsample(sig_in,nfac);
```

```

[sq_out,Delta,SQNR]=uniquan(s_out,L);
s_out=upsample(s_out,nfac);
sqh_out=kron(sq_out,p_zoh);
sq_out=upsample(sqh_out,nfac);
else
    warning('Erro! ts/td não é um inteiro!');
    s_out=[];sq_out=[];sqh_out=[];Delta=[];SQNR=[];
end
end

```

O programa MATLAB ExPCM.m fornece um exemplo numérico que usa essas duas funções MATLAB para gerar sinais PCM.

```

% (ExPCM.m)
% Exemplo de amostragem, quantização e retenção de ordem zero
clear;clf;
td=0.002;          %taxa de amostragem original 500 Hz
t=[0:td:1.];      %intervalo temporal de 1 segundo
xsig=sin(2*pi*t)-sin(6*pi*t);  % sinoides de 1Hz+3Hz
Lsig=length(xsig);
Lfft=2^ceil(log2(Lsig)+1);
Xsig=fftshift(fft(xsig,Lfft));
Fmax=1/(2*td);
Faxis=linspace(-Fmax,Fmax,Lfft);
ts=0.02;           %nova taxa de amostragem = 50Hz.
Nfact=ts/td;
% envia o sinal por meio de um quantizador uniforme de 16 níveis
[s_out,sq_out,sqh_out1,Delta,SQNR]=sampandquant(xsig,16,td,ts);
%   sinal PCM obtido, que é
%       - amostrado, quantizado e com retenção de ordem zero: sqh_out
%   traça gráfico do sinal original e do sinal PCM no domínio do tempo
figure(1);
subplot(211);sfig1=plot(t,xsig,'k',t,sqh_out1(1:Lsig),'b');
set(sfig1,'LineWidth',2);
title('Sinal {\it g}({\it t}) e o correspondente sinal PCM de 16 níveis')
xlabel('tempo, segundos');
% envia o sinal por meio de um quantizador uniforme de 16 níveis
[s_out,sq_out,sqh_out2,Delta,SQNR]=sampandquant(xsig,4,td,ts);
%   sinal PCM obtido, que é
%       - amostrado, quantizado e com retenção de ordem zero: sqh_out
%   traça gráfico do sinal original e do sinal PCM no domínio do tempo
subplot(212);sfig2=plot(t,xsig,'k',t,sqh_out2(1:Lsig),'b');
set(sfig2,'LineWidth',2);
title('Sinal {\it g}({\it t}) e o correspondente sinal PCM de 4 níveis')
xlabel('tempo, segundos');

Lfft=2^ceil(log2(Lsig)+1);
Fmax=1/(2*td);
Faxis=linspace(-Fmax,Fmax,Lfft);
SQH1=fftshift(fft(sqh_out1,Lfft));
SQH2=fftshift(fft(sqh_out2,Lfft));

```

```

% Agora, usa LPF para filtrar os dois sinais PCM
BW=10; %Largura de banda não é maior que 10 Hz.
H_lpf=zeros(1,Lfft);H_lpf(Lfft/2-BW:Lfft/2+BW-1)=1; %ideal LPF
S1_recv=SQH1.*H_lpf; % filtragem ideal
s_recv1=real(ifft(fftshift(S1_recv))); % domínio da frequência reconstruído
s_recv1=s_recv1(1:Lsig); % domínio do tempo reconstruído
S2_recv=SQH2.*H_lpf; % filtragem ideal
s_recv2=real(ifft(fftshift(S2_recv))); % domínio da frequência reconstruído
s_recv2=s_recv2(1:Lsig); % domínio do tempo reconstruído
% Traça gráfico dos sinais filtrados versus sinal original
figure(2)
subplot(211);sfig3=plot(t,xsig,'b-',t,s_recv1,'b-.');
legend('original','reconstruído')
set(sfig3,'LineWidth',2);
title('Sinal {\it g}({\it t}) e o correspondente sinal PCM filtrado de 16 níveis')
xlabel('tempo, segundos');
subplot(212);sfig4=plot(t,xsig,'b-',t,s_recv2(1:Lsig),'b-.');
legend('original','reconstruído')
set(sfig4,'LineWidth',2);
title('sinal {\it g}({\it t}) e o correspondente sinal PCM filtrado de 4 níveis')
xlabel('tempo, segundos');

```

No primeiro exemplo, mantivemos a frequência de amostragem de 50 Hz e utilizamos $L = 16$ níveis de quantização uniforme. O resultante sinal PCM é mostrado na Fig. 6.42. Este sinal PCM pode ser aplicado a um filtro passa-baixas no receptor e comparado com o sinal de mensagem original, como na Fig. 6.43. Podemos observar que sinal recuperado é muito próximo do sinal original $g(t)$.

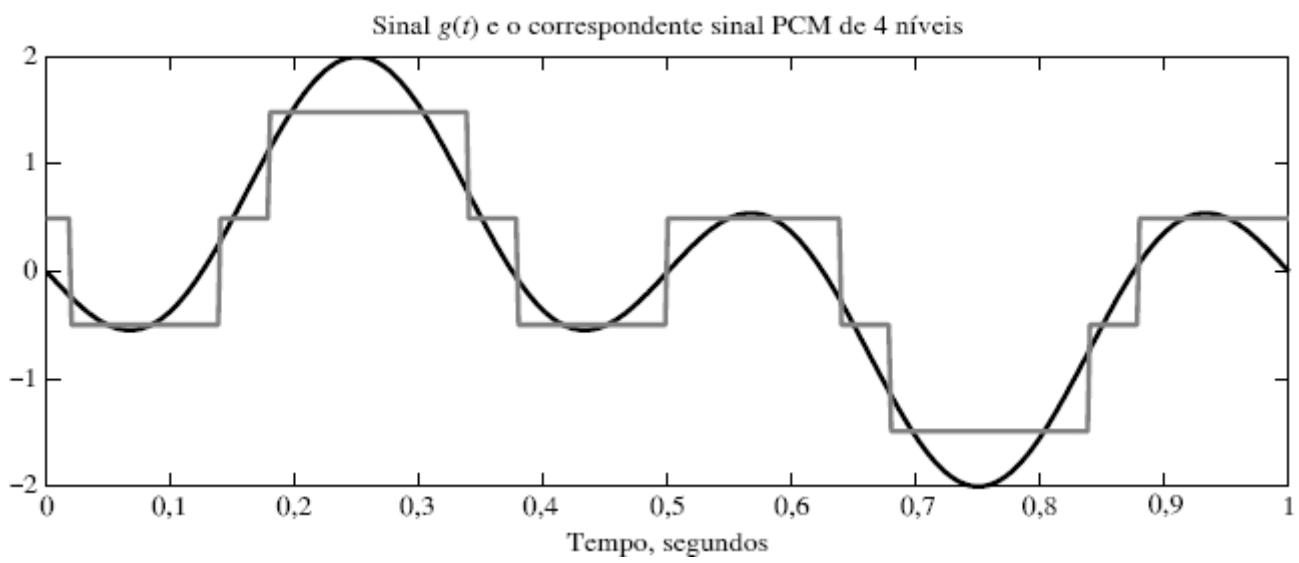
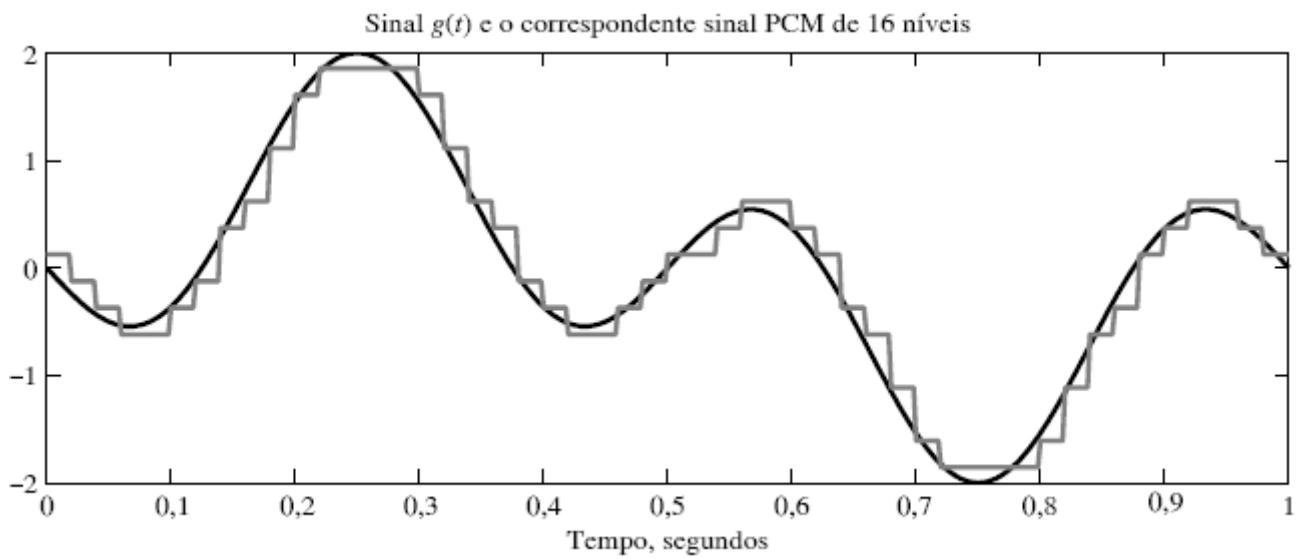


Figura 6.42 Sinal original e sinais PCM obtidos com diferentes níveis de quantização.

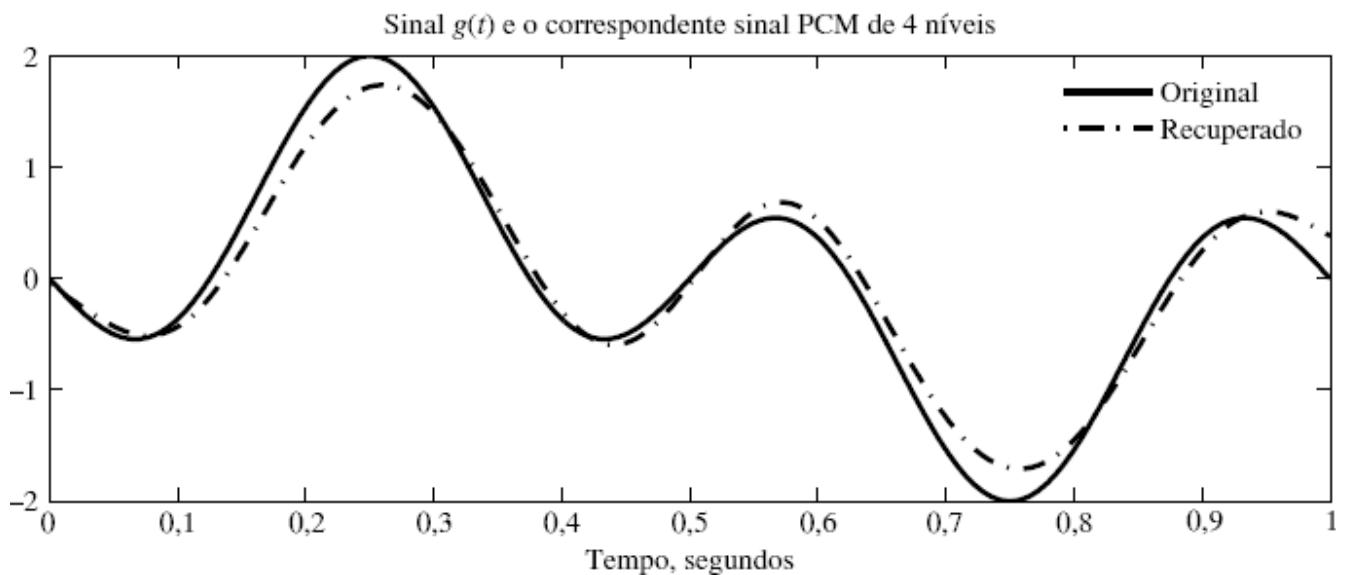
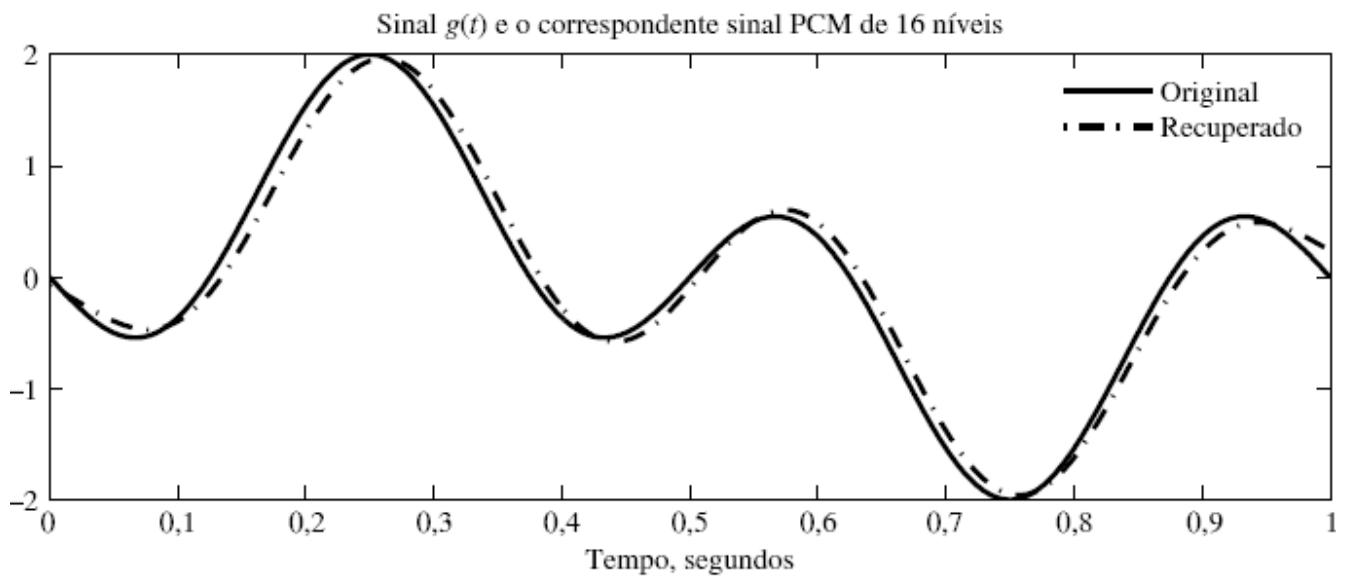


Figura 6.43 Comparação entre o sinal original e os sinais PCM após filtragem passa-baixas para recuperar a mensagem original.

Para ilustrar o efeito da quantização, aplicamos $L = 4$ níveis de quantização PCM. O sinal resultante PCM também é mostrado na Fig. 6.42. O correspondente sinal recuperado é mostrado na Fig. 6.43. Fica claro que o menor número de níveis de quantização ($L = 4$) resulta em maior erro de aproximação.

Modulação Delta

Em vez de aplicar PCM, ilustremos o efeito prático da seleção do incremento Δ no projeto do codificador DM. A função básica para a implementação de DM é dada em `deltamod.m`.

```
% (deltamod.m)
function s_DMout= deltamod(sig_in,Delta,td,ts)
% Uso
%     s_DMout = deltamod(xsig,Delta,td,ts))
% Delta -      Incremento DM
% sig_in -      vetor para sinal de entrada
% td -          período original de amostragem de sinal de sig_in
% ts -          novo período de amostragem
% NOTA: td*fs deve ser um inteiro positivo;
% Saidas de função:
%             s_DMout - saída DM amostrada
if (rem(ts/td,1)==0)
nfac=round(ts/td);
p_zoh=ones(1,nfac);

s_down=downsample(sig_in,nfac);
Num_it=length(s_down);
s_DMout(1)=-Delta/2;
for k=2:Num_it
    xvar=s_DMout(k-1);
    s_DMout(k)=xvar+Delta*sign(s_down(k)-xvar);
end
s_DMout=kron(s_DMout,p_zoh);
else
    warning('Erro! ts/td não é um inteiro!');
    s_DMout=[];
end
end
```

Para gerar sinais DM com diferentes incrementos, aplicamos o mesmo sinal $g(t)$ usado no exemplo PCM. O programa MATLAB ExDM.m aplica três valores de incrementos: $\Delta_1 = 0,2$, $\Delta_2 = 2\Delta_1$ e $\Delta_3 = 4\Delta_1$.

```
% (ExDM.m)
% Exemplo de amostragem, quantização e retenção de ordem zero
clear;clf;
td=0.002;          %taxa de amostragem original 500 Hz
t=[0:td:1.];      %intervalo temporal de 1 segundo
xsig=sin(2*pi*t)-sin(6*pi*t);    % senoides de 1Hz+3Hz
Lsig=length(xsig);
ts=0.02;           %nova taxa de amostragem = 50Hz.
Nfact=ts/td;
% envia o sinal por meio de um quantizador uniforme de 16 níveis
Delta1=0.2;        % Primeiro, seleciona pequeno Delta = 0,2 em DM
s_DMout1=deltamod(xsig,Delta1,td,ts);
%   sinal DM obtido
%   traça gráfico do sinal original e do sinal DM no domínio do tempo
figure(1);
subplot(311);sfig1=plot(t,xsig,'k',t,s_DMout1(1:Lsig),'b');
set(sfig1,'LineWidth',2);
title('Sinal {\it g}({\it t}) e sinal DM')
xlabel('tempo, segundos'); axis([0 1 -2.2 2.2]);
%
% Aplica DM novamente, dobrando o valor de Delta
Delta2=2*Delta1; %
s_DMout2=deltamod(xsig,Delta2,td,ts);
%   sinal DM obtido
%   traça gráfico do sinal original e do sinal DM no domínio do tempo
subplot(312);sfig2=plot(t,xsig,'k',t,s_DMout2(1:Lsig),'b');
set(sfig2,'LineWidth',2);
title('Sinal {\it g}({\it t}) e sinal DM com incremento dobrado')
xlabel('tempo, segundos'); axis([0 1 -2.2 2.2]);
%
Delta3=2*Delta2;      % Dobra o incremento DM novamente.
s_DMout3=deltamod(xsig,Delta3,td,ts);
%   traça gráfico do sinal original e do sinal DM no domínio do tempo
```

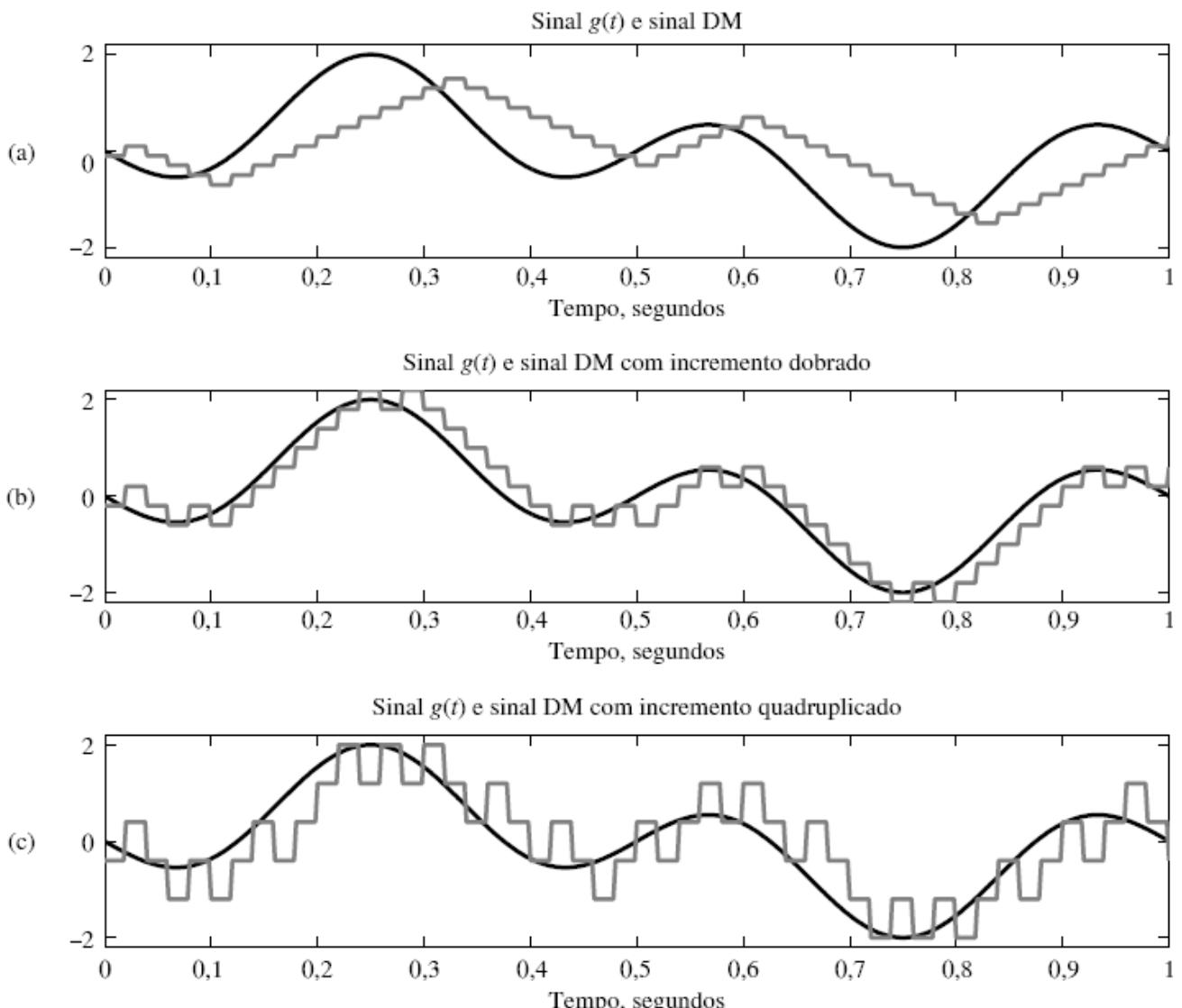


Figura 6.44 Exemplos de saída de modulação delta com três valores de incremento: (a) pequeno incremento resulta em sobrecarga; (b) incremento de valor razoável; (c) incremento grande causa grande erro de quantização.

```
subplot(313); sfig3=plot(t,xsig,'k',t,s_DMout3(1:Lsig),'b');
set(sfig3,'LineWidth',2);
title('Sinal {\it g}({\it t}) e sinal DM com incremento
      quadruplicado')
xlabel('tempo, segundos'); axis([0 1 -2.2 2.2]);
```

Para ilustrar o efeito de DM, os sinais resultantes do codificador DM são mostrados na Fig. 6.44. Este exemplo mostra claramente que, quando o valor do incremento é demaisiadamente pequeno (Δ_1), há um grande efeito de sobrecarga, pois o sinal original varia tão rápido que o pequeno incremento não é capaz de acompanhar. Dobrar o incremento DM resolve o problema de sobrecarga neste exemplo. Contudo, a quadruplicação do valor do incremento (Δ_3) produziria erro de quantização desnecessariamente grande. Este exemplo, portanto, confirma nossa análise anterior, que indicou que a seleção do valor do incremento é crítica.

REFERÊNCIAS

1. D. A. Linden, "A discussion of sampling theorem," *Proc. IRE*, vol. 47, no.7, pp. 1219–1226, July 1959.
2. H. P. Kramer, "A Generalized Sampling Theorem," *J. Math. Phys.*, vol. 38, pp. 68–72, 1959.
3. W. R. Bennett, *Introduction to Signal Transmission*, McGraw-Hill, New York, 1970.
4. W. S. Anglin and J. Lambek, *The Heritage of Thales*, Springer, Berlin, 1995.

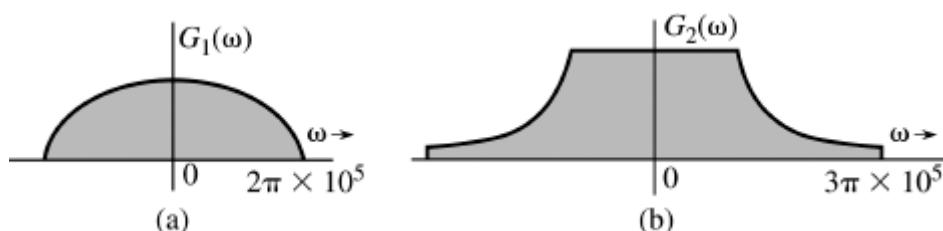
5. B. Smith, "Instantaneous Companding of Quantized Signals," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 36, pp. 653–709, May 1957.
6. ITU-T Standard Recommendation G.711, English, 1989.
7. ITU-T Standard Recommendation G.726, English, 1990.
8. C. L. Dammann, L. D. McDaniel, and C. L. Maddox, "D-2 Channel Bank Multiplexing and Coding," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 51, pp. 1675–1700, Oct. 1972.
9. K.W. Cattermole, *Principles of Pulse-Code Modulation*, Ilife, England, 1969.
10. Bell Telephone Laboratories, *Transmission Systems for Communication*, 4th ed., Bell, Murray Hill, NJ, 1970.
11. E. L. Gruenberg, *Handbook of Telemetry and Remote Control*, McGraw-Hill, New York, 1967.
12. J. B. O'Neal, Jr., "Delta Modulation Quantizing Noise: Analytical and Computer Simulation Results for Gaussian and Television Input Signals," *Bell Syst. Tech. J.*, pp. 117–141, Jan. 1966.
13. F. de Jager, "Delta Modulation, a Method of PCM Transmission Using the 1-Unit Code," *Philips Res. Rep.*, no. 7, pp. 442–466, 1952.
14. A. Tomozawa and H. Kaneko, "Companded Delta Modulation for Telephone Transmission," *IEEE Trans. Commun. Technol.*, vol. CT-16, pp. 149–157, Feb. 1968.
15. B. S. Atal, "Predictive Coding of Speech Signals at Low Bit Rates," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COMM-30, pp. 600–614, 1982.
16. J. P. Campbell and T. E. Tremain, "Voiced/Unvoiced Classification of Speech with Applications to the U.S. Government LPC-10E Algorithm," *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process.*, Tokyo, pp. 473–476, 1986.
17. A. Gersho, "Advances in Speech and Audio Compression," *Proc. IEEE*, vol. 82, pp. 900–918, 1994.
18. L. R. Rabiner and R. W. Schafer, *Digital Processing of Speech Signals*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1978.
19. Lajos Hanzo, Jason Woodward, and Clare Sommerville, *Voice Compression and Communications*, Wiley, Hoboken; NJ, 2001.
20. N. Levinson, "The Wiener rms Error Criterion in Filter Design and Prediction," *J. Math. Phys.*, vol. 25, pp. 261–278, 1947.
21. A. H. Sayed, *Fundamentals of Adaptive Filtering*, Wiley-IEEE Press, Hoboken, NJ, 2003.
22. J. Y. Stein, *Digital Signal Processing: A Computer Science Perspective*, Wiley, Hoboken, NJ, 2000.
23. K. K. Paliwal and B.W. Kleijn, "Quantization of LPC Parameters," in *Speech Coding and Synthesis*, W. B. Kleijn and K. K. Paliwal, Eds. Elsevier Science, Amsterdam, 1995.
24. T. E. Tremain, "The Government Standard Linear Predictive Coding Algorithm LPC-10," *Speech Technol.*, 40–49, 1982.
25. M. R. Schroeder and B. S. Atal, "Code-Excited Linear Prediction (CELP): High-Quality Speech at Very Low Bit Rates," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Process. (ICASSP)*, vol. 10, pp. 937–940, 1985.
26. S. Mallat, "A Theory of Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intel.*, vol. 11, pp. 674–693, 1989.
27. M. J. Smith and T. P. Barnwell, "Exact Reconstruction for Tree Structured Sub-Band Coders," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Process.*, vol. 34, no. 3, pp. 431–441, 1986.
28. B. G. Haskell, A. Puri, and A. N. Netravali, *Digital Video: An Introduction to MPEG-2*, Chapman & Hall, New York, 1996.
29. J. L. Mitchell, W. B. Pennebaker, C.E Fogg, and D. J. LeGall, *MPEG Video Compression Standard*, Chapman & Hall, New York, 1996.
30. ITU-T Recommendation H.263, Video Coding for Low Bit Rate Communication.

EXERCÍCIOS

- 6.1-1** A Fig. E.6.1-1 mostra os espectros de Fourier dos sinais $g_1(t)$ e $g_2(t)$. Determine o intervalo de Nyquist e a taxa de amostragem para os sinais $g_1(t)$, $g_2(t)$, , e $g_1(t)g_2(t)$.

Sugestão: Use convolução em frequência e a propriedade de largura da convolução.

Figura E.6.1-1



6.1-2 Determine a taxa de amostragem e o intervalo de amostragem de Nyquist para os sinais:

- (a) $\text{sinc}(100\pi t)$
- (b) $\text{sinc}^2(100\pi t)$
- (c) $\text{sinc}(100\pi t) + \text{sinc}(50\pi t)$
- (d) $\text{sinc}(100\pi t) + 3 \text{sinc}^2(60\pi t)$
- (e) $\text{sinc}(50\pi t) \text{sinc}(100\pi t)$

6.1-3 Um sinal $g(t)$ limitado em banda a B Hz é amostrado por um trem de pulsos periódicos $p_{T_s}(t)$, consistindo em um pulso retangular de largura $1/8B$ segundo (centrado na origem) que é repetido à taxa de Nyquist ($2B$ pulsos por segundo). Mostre que o sinal amostrado ($\bar{g}(t)$) é dado por

$$\bar{g}(t) = \frac{1}{4}g(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) g(t) \cos 4n\pi Bt$$

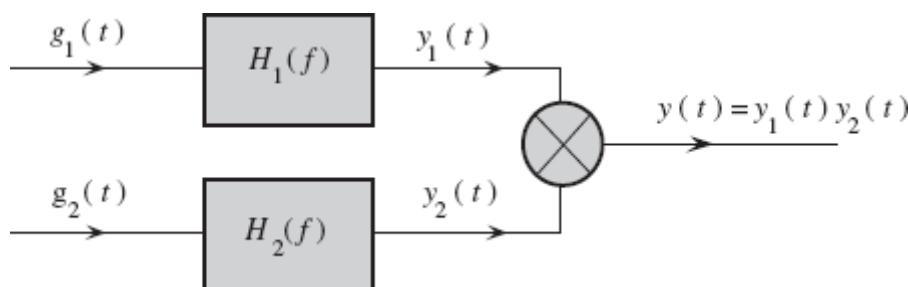
Mostre que o sinal $g(t)$ pode ser recuperado com a aplicação de $\bar{g}(t)$ a um filtro passa-baixas ideal de largura de banda B Hz e ganho 4.

6.1-4 Um sinal $g(t) = \text{sinc}^2(5\pi t)$ é amostrado (usando impulsos uniformemente espaçados) a uma taxa de **(i)** 5 Hz; **(ii)** 10 Hz; **(iii)** 20 Hz. Para cada caso,

- (a) Esboce o gráfico do sinal amostrado no domínio do tempo.
- (b) Esboce o gráfico do espectro do sinal amostrado.
- (c) Explique se é possível recuperar o sinal $g(t)$ do sinal amostrado.
- (d) Se o sinal amostrado for aplicado a um filtro passa-baixas ideal de largura de banda 5 Hz, esboce o gráfico do espectro do sinal de saída.

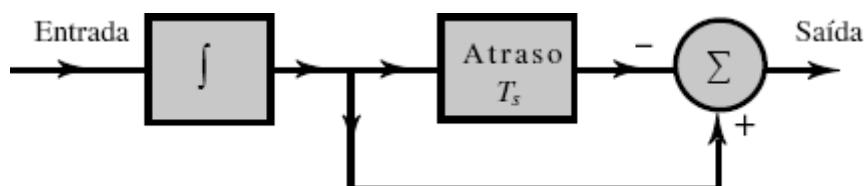
6.1-5 Os sinais $g_1(t) = 10^4 \Pi(10^4 t)$ e $g_2(t) = \delta(t)$ são aplicados às entradas de filtros passa-baixas ideais $H_1(f) = \Pi(f/20.000)$ e $H_2(f) = \Pi(f/10.000)$ (Fig. E.6.1-5). As saídas $y_1(t)$ e $y_2(t)$ desses filtros são multiplicadas para produzir o sinal $y(t) = y_1(t)y_2(t)$. Determine a taxa de Nyquist para $y_1(t)$, $y_2(t)$ e $y(t)$. Use a propriedade da convolução e a propriedade de largura da convolução para determinar a largura de banda de $y_1(t)y_2(t)$. Veja, também, o Exercício 6.1-1.

Figura E.6.1-5



6.1-6 Um circuito de retenção de ordem zero (Fig. E.6.1-6) é, muitas vezes, usado para reconstruir um sinal $g(t)$ a partir de suas amostras.

Figura E.6.1-6



- (a) Determine a resposta ao impulso unitário desse circuito.
- (b) Determine a função de transferência $H(f)$ e esboce o gráfico de $|H(f)|$.
- (c) Mostre que, quando um sinal amostrado $\bar{g}(t)$ é aplicado à entrada desse circuito, a saída é uma aproximação em degraus de $g(t)$. O intervalo de amostragem é T_s .
- 6.1-7** (a) Um circuito de retenção de primeira ordem também pode ser usado para reconstruir um sinal $g(t)$ de suas amostras. A resposta ao impulso desse circuito é

$$h(t) = \Delta \left(\frac{t}{2T_s} \right)$$

em que T_s é o intervalo de amostragem. Considere um típico sinal amostrado $\bar{g}(t)$ e mostre que esse circuito efetua interpolação linear. Em outras palavras, a saída do filtro consiste em amostras cujos picos são conectados por segmentos de linha reta. Siga o procedimento discutido na Seção 6.1.1 (Fig. 6.2b).

- (b) Determine a função de transferência e a resposta de amplitude desse filtro e compare-a com a do filtro ideal necessário à reconstrução do sinal.
- (c) Por ser não causal, esse filtro é irrealizável. Sugira uma modificação que torne esse filtro realizável. Como tal modificação afetaria a reconstrução de $g(t)$ de suas amostras? Como afetaria a resposta de frequência do filtro?
- 6.1-8** Prove que um sinal não pode ser simultaneamente limitado no tempo e em largura de banda.

Sugestão: Mostre que a hipótese oposta leva a uma contradição. Admita que um sinal seja simultaneamente limitado no tempo e em largura de banda, de modo que $G(f) = 0$ para $|f| > B$. Neste caso, $G(f) = G(f) \Pi(f/2B')$, para $B' > B$. Isso significa que $g(t)$ é igual a $g(t) * 2B' \text{sinc}(2\pi B't)$. Mostre que a última função não pode ser limitada no tempo.

- 6.2-1** O Código Padrão Americano para Intercâmbio de Informação (ASCII – *American Standard Code for Information Interchange*) tem 128 caracteres, que são codificados em binário. Se um certo computador gerar 100.000 caracteres por segundo, determine:
- (a) O número de bits (dígitos binários) necessários para a representação de cada caractere.
- (b) O número de bits por segundo necessário para transmitir a saída do computador e a mínima largura de banda exigida para a transmissão do sinal.
- (c) Para a capacidade de detecção de um erro, um bit (bit de paridade) é adicionado ao código de cada caractere. Modifique suas respostas aos itens (a) e (b) tendo em vista essa informação.
- 6.2-2** Um *compact disc* (CD) grava sinais de áudio digitalmente, com uso de PCM. Admita que a largura de banda do sinal de áudio seja igual a 15 kHz.
- (a) Se as amostras de Nyquist forem uniformemente quantizadas em $L = 65.536$ níveis e, então, codificadas em binário, determine o número de dígitos binários necessários para codificar uma amostra.
- (b) Se o sinal de áudio tiver potência média de 0,1 watt e tensão de pico de 1 volt, determine a resultante relação sinal-ruído de quantização (SQNR) da saída quantizada uniformemente na parte (a).
- (c) Determine o número de dígitos binários por segundo (bit/s) requerido para a codificação do sinal de áudio.
- (d) Pelas razões práticas discutidas no texto, sinais são amostrados a uma taxa bem acima da taxa de Nyquist. CDs usados na vida real empregam 44.100 amostras por segundo. Se $L = 65.536$, determine o número de bits por segundo necessário para a codificação do sinal, e a mínima largura de banda requerida para a transmissão do sinal codificado.

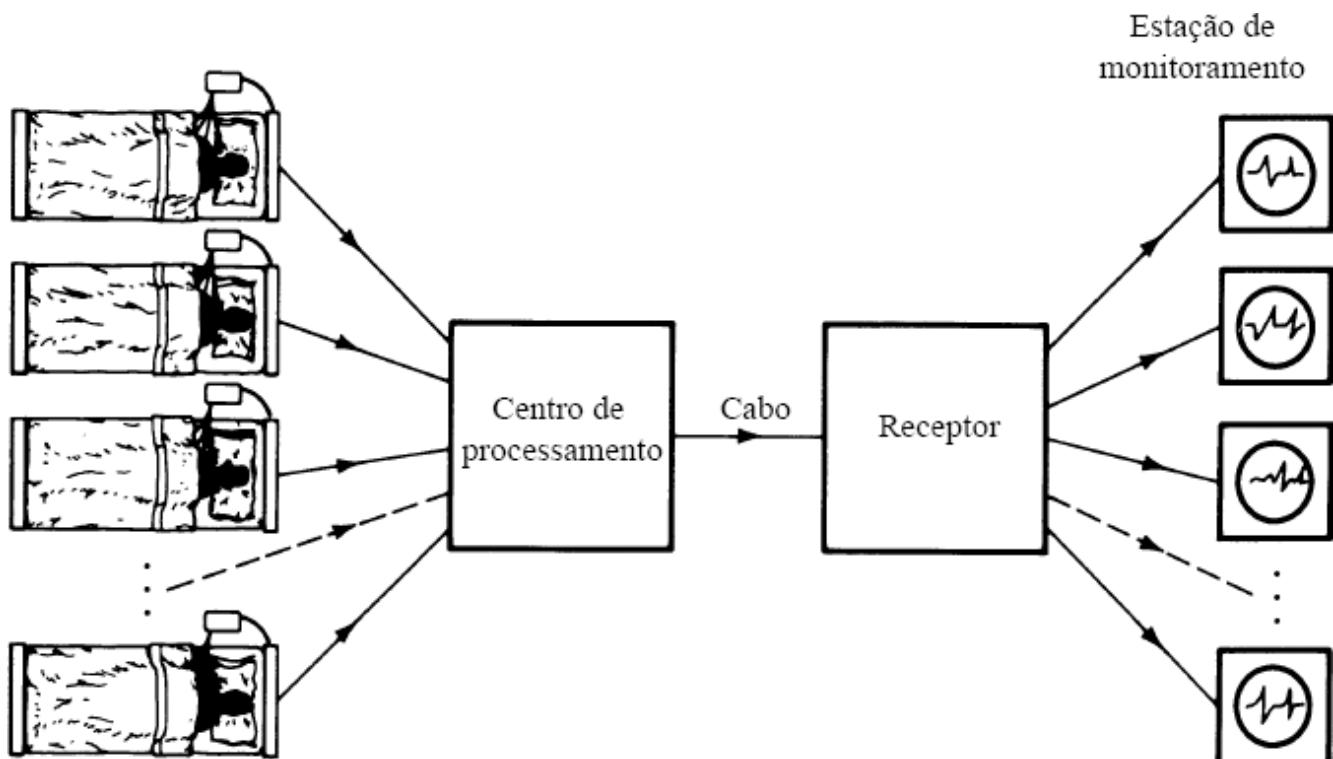
6.2-3 Um sinal de televisão (vídeo e áudio) tem largura de banda de 4,5 MHz. Esse sinal é amostrado e codificado em binário para produzir um sinal PCM.

- Determine a taxa de amostragem quando o sinal for amostrado a uma taxa 20% acima da taxa de Nyquist.
- Se as amostras forem quantizadas em 1024 níveis, determine o número de pulsos binários necessários à codificação de cada amostra.
- Determine a taxa de pulsos binários (bits por segundo) do sinal codificado em binário e a mínima largura de banda necessária à transmissão do sinal.

6.2-4 Cinco sinais de telemetria, cada um com largura de banda de 240 Hz, devem ser transmitidos simultaneamente por PCM binário. Os sinais devem ser amostrados a uma taxa pelo menos 20% acima da taxa de Nyquist. O enquadramento e a sincronização requerem 0,5% bits adicionais. Um codificador PCM é usado para converter esses sinais antes que sejam multiplexados no tempo em um fluxo de dados. Determine a mínima taxa de bits (bit/s) possível que deve ser transmitida e a mínima largura de banda necessária à transmissão do sinal multiplexado.

6.2-5 Desejamos montar uma estação central para o monitoramento simultâneo de eletrocardiogramas (ECG) de 10 pacientes hospitalizados. Os dados dos 10 pacientes são levados ao centro de processamento por meio de fios, e são amostrados, quantizados, codificados em binário e multiplexados por divisão no tempo. Os dados multiplexados são, então, transmitidos à estação de monitoramento (Fig. E.6.2-5). A largura de banda do sinal ECG é de 100 Hz. O máximo erro aceitável em amplitudes de amostras é de 0,25% da amplitude de pico do sinal. A taxa de amostragem deve ser pelo menos o dobro da taxa de Nyquist. Determine a mínima largura de banda do cabo necessário para transmitir estes dados.

Figura E.6.2-5



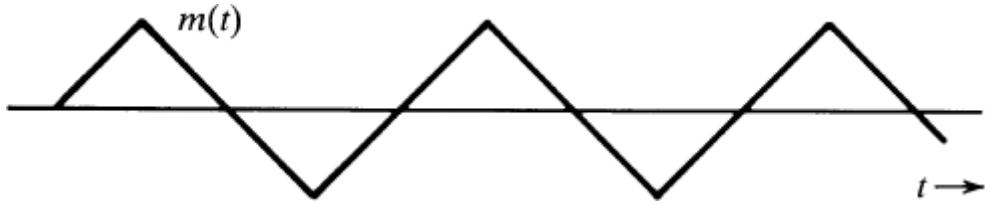
6.2-6 Um sinal de mensagem $m(t)$ é transmitido por PCM binário sem compressão. Se a necessária SQNR for de pelo menos 47 dB, determine o mínimo valor requerido para $L = 2^n$, supondo que $m(t)$ seja senoidal. Determine a real SQNR obtida com este valor mínimo de L .

6.2-7 Repita o Exercício E.6.2-6 para o sinal $m(t)$ mostrado na Fig. E.6.2-7.

Sugestão: A potência de um sinal periódico é a média de sua energia em um ciclo. Neste caso, como a amplitude do sinal assume o mesmo valor a cada quarto de ciclo, a potência também pode ser obtida da

energia média em um quarto de ciclo.

Figura E.6.2-7



- 6.2-8** Para um sinal PCM, determine L quando o parâmetro de compressão $\mu = 100$ e a mínima SNR necessária é de 45 dB. Determine, com este valor de L , a SQNR da saída. Lembre-se de que L deve ser uma potência de 2, ou seja, $L = 2^n$, para um sinal PCM binário.
- 6.2-9** Um sinal limitado em banda a 1 MHz é amostrado a uma taxa 50% maior que a taxa de Nyquist e, com o uso de um quantizador de lei μ , é quantizado em 256 níveis empregando $\mu = 255$.
- Determine a relação sinal-ruído de quantização (SQNR).
 - A SQNR (qualidade do sinal recebido) calculada na parte (a) era insatisfatória, e deve ser aumentada em pelo menos 10 dB. Caso fosse observado que uma taxa de amostragem 20% acima da de Nyquist era suficiente, você seria capaz de obter a desejada SQNR sem aumentar largura de banda de transmissão?
- 6.2-10** Foi determinado que a SQNR de saída de um PCM de 10 bits estava 30 dB abaixo do necessário. Para alcançar a desejada SNR de 42 dB, foi aumentado o número de níveis de quantização L . Determine o aumento relativo na largura de banda de transmissão acarretado pelo aumento de L .
- 6.4-1** Em um certo sistema de telemetria, há quatro sinais analógicos $m_1(t)$, $m_2(t)$, $m_3(t)$ e $m_4(t)$. A largura de banda de $m_1(t)$ é de 3,6 kHz; a largura de banda de cada um dos sinais restantes é de 1,4 kHz. Cada sinal deve ser amostrado a taxa não inferior à correspondente taxa de Nyquist, e os sinais devem ser multiplexados palavra a palavra. Isso pode ser feito com a multiplexação de amostras PAM dos quatro sinais, seguida da codificação binária das amostras multiplexadas (como no caso da portadora T1 na Fig. 6.20a). Sugira um esquema de multiplexação adequado a este propósito. Qual é a frequência do comutador (em rotações por segundo)? *Nota:* Em alguns casos, pode ser necessário amostrar algum(ns) sinal(is) a taxa(s) superior(es) à(s) correspondente(s) taxa(s) de Nyquist.
- 6.4-2** Repita o Exercício 6.4-1 para o caso de quatro sinais $m_1(t)$, $m_2(t)$, $m_3(t)$ e $m_4(t)$ com larguras de banda de 1200, 700, 300 e 200 Hz, respectivamente.
- Sugestão:* Primeiro multiplexe $m_2(t)$, $m_3(t)$ e $m_4(t)$ e, depois, multiplexe o sinal composto com $m_1(t)$.
- 6.4-3** Um sinal $m_1(t)$ é limitado em banda a 3,6 kHz, e três outros sinais $m_2(t)$, $m_3(t)$ e $m_4(t)$ são limitados em banda a 1,2 kHz cada um. Esses sinais são amostrados à taxa de Nyquist e codificados em binário com 512 níveis de quantização ($L = 512$). Sugira um esquema adequado de multiplexação bit a bit (como na Fig. 6.12). Qual é a frequência do comutador (em rotações por segundo) e qual é a taxa de bits de saída?
- 6.7-1** Em um sistema DM de integração simples, o sinal de voz é amostrado a uma taxa de 64 kHz, como em PCM. A máxima amplitude normalizada de sinal é $A_{\max} = 1$.
- Determine o valor mínimo do incremento σ para evitar sobrecarga.
 - Determine a potência de ruído granular N_o se a largura de banda do sinal de voz for 3,4 kHz.
 - Admitindo que o sinal de voz seja senoidal, determine S_o e a SNR.
 - Admitindo que a amplitude do sinal de voz seja uniformemente distribuída no intervalo (-1, 1), determine S_o e a SNR.
 - Determine a mínima largura de banda de transmissão.

* O espectro $G(f)$ na Fig. 6.1b é mostrado como real, por conveniência. Os argumentos são igualmente válidos para $G(f)$ complexo.

* O teorema enunciado (e provado) aqui se aplica a sinais passa-baixas. Um sinal passa-faixa, cujo espectro existe em uma banda de frequências $f_c - B/2 < |f| < f_c + B/2$, tem uma largura de banda B Hz. Um sinal desse tipo também pode ser recuperado exatamente de amostras tomadas à frequência de Nyquist $2B$ definida acima. Neste caso, em geral, o teorema da amostragem é mais complexo e faz uso de dois trens de amostragem uniforme entrelaçados, cada um na metade da taxa total de amostragem $R_s > B$. As referências 1 e 2 podem ser consultadas para mais detalhes.

* A Fig. 6.8b mostra que, dentre um número infinito de ciclos repetitivos, apenas ciclos espectrais vizinhos se sobreponem. Esta é uma imagem simplificada. Na verdade, todos os ciclos se sobreponem e interagem com todos os outros, devido à largura infinita do espectro de qualquer sinal prático. Felizmente, todos os espectros práticos também devem decair nas frequências altas. Isso resulta em um grau insignificante de interferência de ciclos que não sejam vizinhos imediatos. Quando esta hipótese não se aplica, o cálculo de mascaramento se torna mais elaborado.

* Componentes abaixo de 300 Hz também podem ser suprimidas sem afetar a articulação.

* O erro na detecção dos pulsos pode ser desprezado.

* Aqueles que têm familiaridade com a teoria da probabilidade podem deduzir esse resultado diretamente observando que a densidade de probabilidade do erro de quantização q é $1/(2m_p/L) = L/2m_p$ no intervalo $|q| \leq m_p/L$ e zero para qualquer outro valor de q . Logo,

$$\overbrace{q^2}^{\sim\sim} = \int_{-m_p/L}^{m_p/L} q^2 p(q) dq = \int_{-m_p/L}^{m_p/L} \frac{L}{2m_p} q^2 dq = \frac{m_p^2}{3L^2}$$

* Em uma versão anterior, cada amostra era codificada por sete bits. Um bit adicional foi acrescentado para sinalização.

* Na versão anterior de T1, os níveis de quantização $L = 128$ requeriam apenas sete bits de informação. O oitavo bit era usado para sinalização.

* *synchronous optical networks*, ou redes ópticas síncronas, versão óptica da hierarquia digital síncrona, de uso padronizado na América do Norte. Existe um padrão internacional semelhante, SDH – *synchronous digital hierarchy*, utilizado no resto do mundo. (N.T.)

* De Shakespeare, Henrique IV, Parte 1, Ato III, Cena I:

Glendower: *Posso evocar espíritos do abismo.*

Hotspur: *Isso, até eu, e assim qualquer pessoa;*

Mas eles vêm, no caso de os chamardes?

Da tradução disponível em <http://www.ebooksbrasil.org/eLibris/henry4.html#12>. (N.T.)

* Pequena protuberância na frente da garganta, formada pela maior cartilagem da laringe; em geral, mais saliente no homem que na mulher.

* Assim chamado porque usa ordem $p = 10$. A ideia é alocar dois parâmetros a cada possível pico de frequência formante.

7 PRINCÍPIOS DE TRANSMISSÃO DE DADOS DIGITAIS

Durante a maior parte do século vinte, uma parcela significativa de sistemas de comunicação era de forma analógica. Contudo, ao final da década de 1990, o formato digital começou a dominar a maioria das aplicações. Não é necessário muito esforço para que percebamos a contínua migração de comunicação analógica para digital: do áudio em fita cassete para MP3 e CD, da TV analógica NTSC ou PAL-M para a digital HDTV, da telefonia tradicional para VoIP, e do vídeo em VHS para DVD. Na verdade, até o último refúgio analógico da radiodifusão enfrenta um poderoso competidor digital, na forma de rádio por satélite. Dada a importância dominadora de sistemas de comunicação digital em nosso dia a dia, nunca é cedo demais para estudar os princípios básicos e vários aspectos de comunicação de dados digitais, como faremos neste capítulo.

Este capítulo trata do problema da transmissão de dados digitais em um canal. Portanto, consideraremos que as mensagens iniciais são digitais. Iniciaremos com a consideração do caso binário, em que os dados consistem em somente dois símbolos: **1** e **0**. Aloquemos uma forma de onda (pulso) distinta a cada um desses símbolos. A resultante sequência de pulsos é transmitida através do canal. No receptor, esses pulsos são detectados e convertidos aos dados binários (**1s** e **0s**).

7.1 SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO DIGITAL

Um sistema de comunicação digital consiste em diversos componentes, como indicado na Fig. 7.1. Nesta seção, delinearemos, de forma conceitual, a funcionalidade de cada componente em sistemas de comunicação. Os detalhes de análise e projeto serão apresentados posteriormente no capítulo, em seções dedicadas.

7.1.1 Fonte

A entrada de um sistema digital toma a forma de uma sequência de dígitos. A entrada pode ser a saída de um conjunto de dados, de um computador, um sinal de áudio digitalizado (PCM, DM ou LPC), facsímile digital, HDTV, dados de telemetria, e assim por diante. Embora a maior parte da discussão neste capítulo seja restrita ao caso binário (esquemas de comunicação que usam apenas dois símbolos), o caso mais geral de comunicação *M*-ária, que utiliza *M* símbolos, também será discutido nas Seções 7.7 e 7.9.



Figura 7.1
Blocos fundamentais de um sistema de comunicação digital.

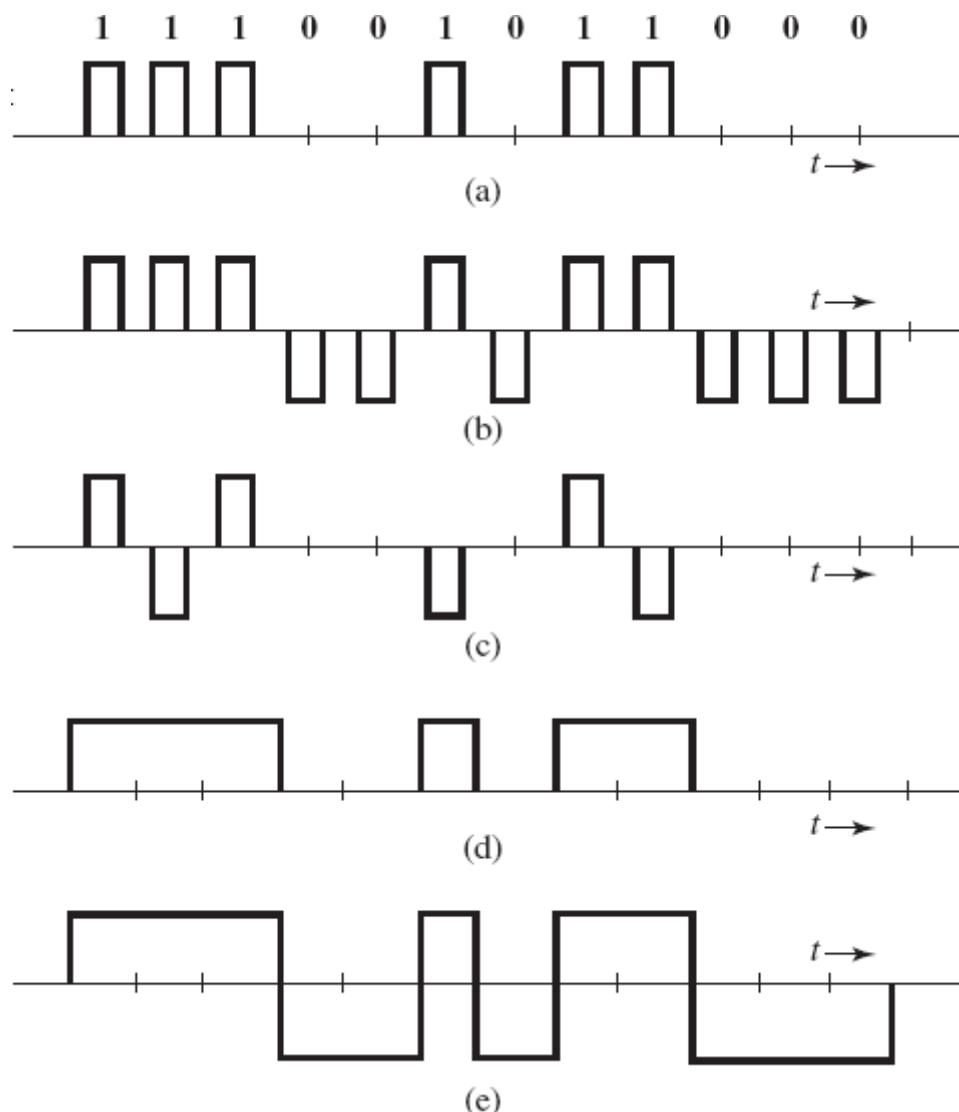


Figura 7.2

Exemplos de códigos de linha: (a) on-off (RZ); (b) polar (RZ); (c) bipolar (RZ); (d) on-off (NRZ); (e) polar (NRZ).

7.1.2 Codificador de Linha

A saída digital de um codificador de fonte é convertida (ou codificada) em pulsos elétricos (formas de onda) para fins de transmissão no canal. Esse processo recebe a denominação **codificação de linha** ou **codificação de transmissão**. Há muitas formas possíveis de alocar formas de onda (pulsos) aos dados digitais. No caso binário (2 símbolos), por exemplo, a codificação de linha conceitualmente mais simples é **on-off** (liga-desliga), em que **1** é transmitido por um pulso $p(t)$ e **0** é transmitido por ausência de pulso (sinal nulo), como mostrado na Fig. 7.2a. Outro código de uso muito comum é o **polar**, em que **1** é transmitido por um pulso $p(t)$ e **0** é transmitido por um pulso $-p(t)$ (Fig. 7.2b). O esquema polar é o código com a maior eficiência de potência, pois, para um dado grau de imunidade ao ruído (probabilidade de erro), requer a menor potência. Outro código popular em PCM é o **bipolar**, também conhecido como **pseudoternário** ou **inversão alternada de sinal (AMI – alternate mark inversion)**, em que **0** é codificado por ausência de pulso e **1** é codificado por um pulso $p(t)$ ou $-p(t)$, dependendo se o **1** anterior foi codificado por $-p(t)$ ou $p(t)$. Em resumo, pulsos que representam **1s** sucessivos têm sinais alternados, como indicado na Fig. 7.2c. Esse código tem a vantagem de que, se ocorrer **um único** erro na detecção de pulsos, a sequência de pulsos recebida violará a regra bipolar e o erro poderá ser detectado imediatamente (embora não possa ser corrigido).*

Outro código de linha que, inicialmente, pareceu promissor é o duobinário (e duobinário modificado), proposto por Lender.¹ Esse código é melhor que o bipolar em termos de eficiência de largura de banda. Sua versão mais proeminente, o código de linha *duobinário modificado*, tem sido aplicada em canais de leitura de hard disc drives, em transmissão óptica a 10 Gbit/s para redes metropolitanas, e na primeira geração de modems para rede digital de serviços integradas (ISDN –*integrated services digital networks*). Detalhes de códigos de linha duobinários serão discutidos mais adiante neste capítulo.

Até aqui, em nossa discussão, usamos pulsos de meia largura somente para facilitar a ilustração. Podemos selecionar outras larguras. Pulsos de largura completa são usados em algumas aplicações. Sempre que pulsos de largura completa são utilizados, a amplitude do pulso é mantida em um valor constante durante toda a duração do pulso (isto é, a amplitude não retorna a zero antes do início do pulso seguinte). Por essa razão, tais esquemas são denominados **sem retorno ao zero** ou esquemas **NRZ** (*non-return-to-zero*).

to-zero), em contraste com esquemas com **retorno ao zero** ou **RZ** (*return-to-zero*) (Fig. 7.2a-c). A Fig. 7.2d mostra um sinal NRZ on-off e a Fig. 7.2e, um sinal NRZ polar.

7.1.3 Multiplexador

Em termos gerais, a capacidade de um canal físico (por exemplo, cabo coaxial, fibra óptica) para transmitir dados é muito maior que a taxa de dados de uma fonte. Para utilizar essa capacidade de modo eficaz, combinamos várias fontes por meio de um multiplexador digital. A multiplexação digital pode ser feita por divisão em frequência ou por divisão no tempo, como já discutimos. A divisão em código (a ser discutida no Capítulo 11) também é uma alternativa prática e eficiente. Um canal físico é, portanto, compartilhado por várias mensagens simultâneas.

7.1.4 Repetidor Regenerador

Repetidores regeneradores são usados em intervalos regularmente espaçados, ao longo de uma linha de transmissão digital, para detectar o sinal digital que chega e regenerar novos pulsos “limpos” para transmissão em mais um trecho da linha. Esse processo periódico elimina e, portanto, combate, o acúmulo de ruído e distorção de sinal na extensão da rota de transmissão. A capacidade de eliminação de ruído e efeitos de distorção de sinal desses repetidores regeneradores é uma das maiores vantagens de sistemas de comunicação digital em relação aos sistemas analógicos.

Se forem transmitidos pulsos a uma taxa de R_b pulsos por segundo, é necessário ter informação de temporização periódica – o sinal de relógio na frequência R_b Hz – para amostrar os pulsos que chegam ao receptor. Essa informação de temporização pode ser extraída do próprio sinal recebido, desde que o código de linha seja escolhido de forma adequada. A retificação do sinal polar RZ na Fig. 7.2b, por exemplo, produz um sinal de relógio periódico de frequência R_b Hz, que contém o desejado sinal periódico de temporização de frequência R_b Hz. Quando esse sinal é aplicado a um circuito ressonante sintonizado na frequência R_b , a saída, que é uma senoide de frequência R_b Hz, pode ser usada para a temporização. O sinal on-off pode ser expresso como a soma de um sinal periódico (na frequência do relógio) e um sinal polar ou randômico, como mostrado na Fig. 7.3. Devido à presença da componente periódica, podemos extraír a informação de temporização desse sinal com o uso de um circuito ressonante sintonizado na frequência do relógio. Um sinal bipolar, ao ser retificado, se torna um sinal on-off. Portanto, a informação de temporização pode ser extraída da mesma forma como para um sinal on-off.

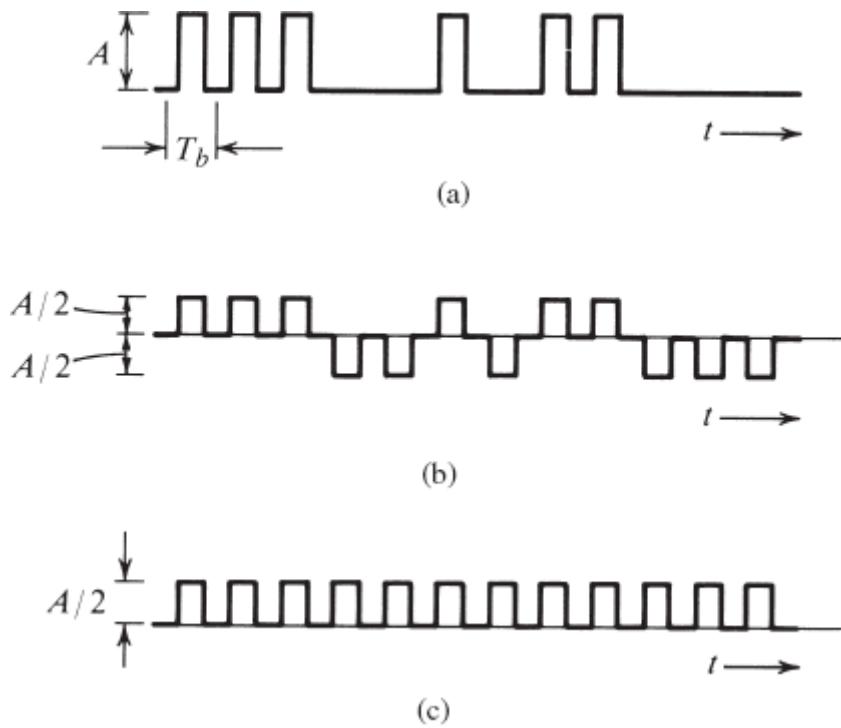


Figura 7.3

Sinal on-off (a) é a soma de um sinal polar randômico (b) com um sinal periódico na frequência do relógio (c).

O sinal de temporização (saída do circuito ressonante) é sensível ao padrão de bit de chegada. No caso on-off ou polar, um **0** é transmitido por “ausência de pulso”. Assim, se houver um grande número de **0s** em uma sequência (ausência de pulsos), não haverá sinal na entrada do circuito ressonante e sua saída senoidal passa a decair, originando erro na informação de temporização. Mais adiante, discutiremos formas de solucionar esse problema. Dizemos que código de linha é **transparente** quando o padrão de bits não afeta a precisão da informação de temporização. O esquema polar RZ (em que cada bit é transmitido por algum pulso) é transparente; os esquemas on-off e bipolar não são transparentes.

7.2 CODIFICAÇÃO DE LINHA

Dados digitais podem ser transmitidos por vários **códigos de linha** ou de **transmissão**. Vimos exemplos de códigos on-off, polar e bipolar. Cada código de linha tem suas vantagens e desvantagens. Entre outras propriedades desejáveis, um código de linha deve ter as seguintes:

- *Largura de banda de transmissão* tão pequena quanto possível.
- *Eficiência de potência*. Para dadas largura de banda e taxa de erros de detecção, a potência transmitida deve ser tão baixa quanto possível.
- *Capacidade de detecção e correção de erros*. É desejável que erros sejam detectados e, de preferência, corrigidos. No caso bipolar, por exemplo, um erro isolado causará violação da regra bipolar e poderá ser facilmente detectado. Códigos correctores de erros serão discutidos em detalhe no Capítulo 14.
- *Densidade espectral de potência favorável*. É desejável ter densidade espectral de potência (PSD) zero em $f = 0$ (dc), pois acoplamento e transformadores ac são usados nos repetidores.* Potência significativa nas componentes de frequências baixas também deve ser evitada, pois causa ondulação dc (*dc wander*) na sequência de pulsos quando acoplamento ac é usado.
- *Conteúdo de temporização adequado*. Deve ser possível extrair a informação de temporização ou de relógio do sinal.
- *Transparência*. A transmissão correta de um sinal digital deve ser possível, independentemente do padrão de **1s** e **0s**. Vimos, nos casos de códigos on-off e bipolar, que uma longa sequência de **0s** pode causar problema para a extração de temporização. Um código é transparente se os dados forem codificados de modo que, para qualquer sequência possível de bits, o sinal codificado possa ser detectado com fidelidade.

7.2.1 PSD de Diversos Códigos de Linha

No Exemplo 3.19, discutimos o procedimento para determinar a PSD de um trem de pulsos polares. Usemos um procedimento similar para determinar uma expressão geral para PSD de sinais resultantes da modulação em banda base (codificação de linha), como ilustrado na Fig. 7.1. Em particular, aplicamos diretamente a relação entre PSD e a função de autocorrelação do sinal da modulação em banda base, dada na Seção 3.8 [Eq. (3.85)].

Na discussão a seguir, consideramos um pulso genérico $p(t)$, cuja transformada de Fourier é $P(f)$. Denotamos o símbolo do código de linha no instante de tempo k por a_k . Se a taxa de transmissão for $R_b = 1/T_b$ pulsos por segundo, o código de linha gera um trem de pulsos construído a partir do pulso básico $p(t)$, com amplitude a_k e iniciando no tempo $t = kT_b$; em outras palavras, o k -ésimo símbolo é transmitido como $a_k p(t - kT_b)$. A Fig. 7.4a fornece uma ilustração de um pulso especial $p(t)$, enquanto a Fig. 7.4b mostra o correspondente trem de pulsos gerado pelo codificador de linha na banda base. Como mostrado na Fig. 7.4b, contando uma sucessão de transmissões de símbolos espaçados por T_b segundos, o sinal em banda base é um trem de pulsos da forma

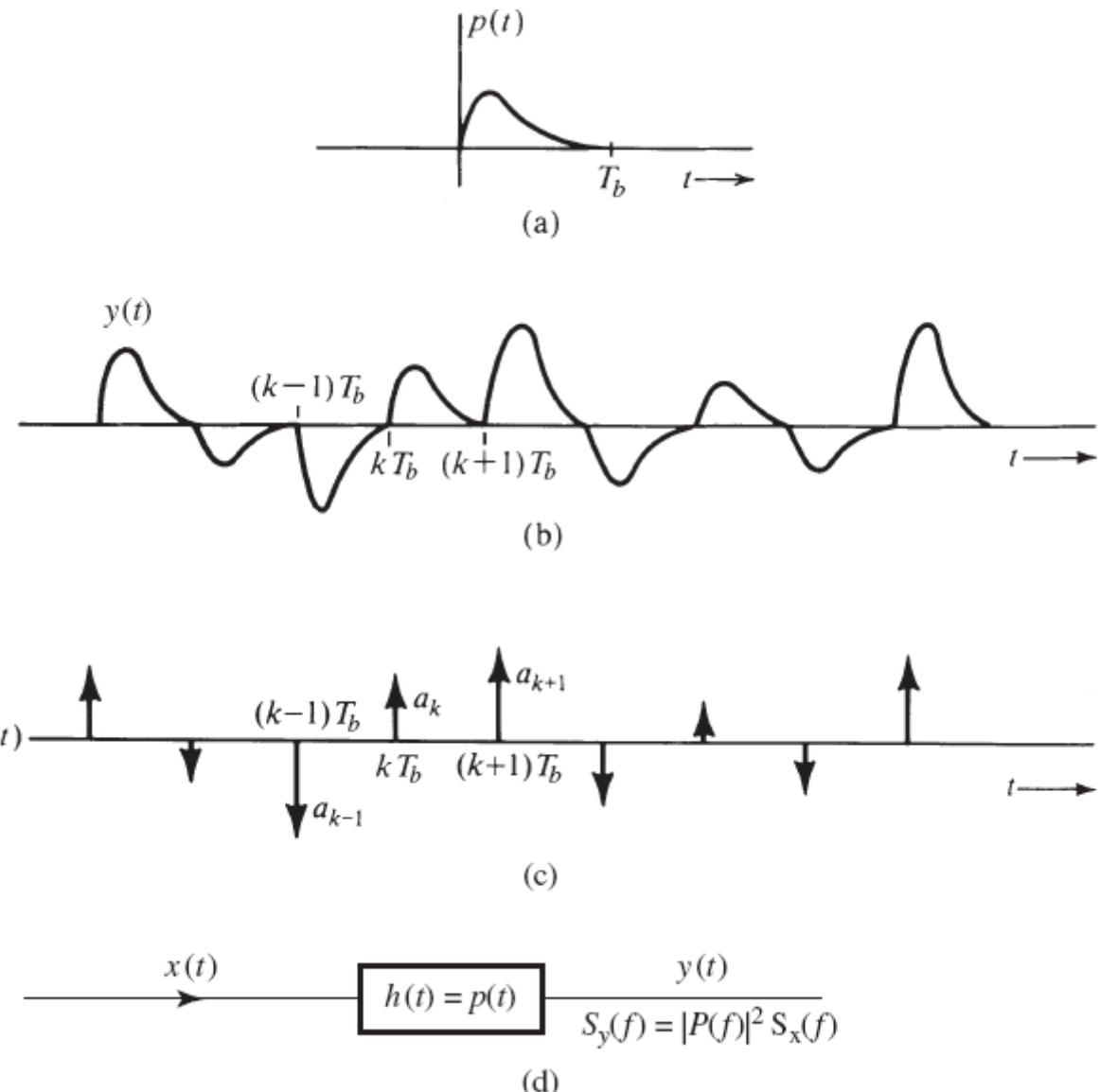


Figura 7.4

Sinal modulado em amplitude por sequência aleatória de pulsos e sua geração por um trem de impulsos PAM.

$$y(t) = \sum a_k p(t - kT_b) \quad (7.1)$$

Reparamos que o codificador de linha determina o símbolo $\{a_k\}$ como a amplitude do pulso $p(t - kT_b)$.

Os valores de a_k são aleatórios e dependem da entrada do codificador de linha e do próprio código de linha; $y(t)$ é um sinal modulado em amplitude de pulso (sinal PAM). Os códigos de linha on-off, polar e bipolar, são casos especiais desse trem de pulsos $y(t)$, em que a_k assume os valores 0, 1 ou -1 de modo aleatório, sujeito a algumas condições. Podemos, portanto, analisar muitos códigos de linha segundo a PSD de $y(t)$. Infelizmente, a PSD de $y(t)$ depende de a_k e de $p(t)$. Se a forma do pulso $p(t)$ for alterada, pode ser necessário refazer todo o cálculo da PSD. Essa dificuldade pode ser contornada com o simples artifício de selecionar um sinal PAM $x(t)$ que use um impulso unitário como o pulso básico $p(t)$ (Fig. 7.4c). Os impulsos ocorrem a intervalos T_b e a intensidade (área) do k -ésimo impulso é a_k . Se $x(t)$ for aplicado à entrada de um filtro cuja resposta ao impulso seja $h(t) = p(t)$ (Fig. 7.4d), a saída será o trem de pulsos $y(t)$ na Fig. 7.4b. Além disso, aplicação da Eq. (3.92) permite calcular a PSD de $y(t)$ como

$$S_y(f) = |P(f)|^2 S_x(f)$$

Essa relação nos permite determinar $S_y(f)$, a PSD de um código de linha que corresponde a uma forma de onda $p(t)$ qualquer, uma vez que conhecemos $S_x(f)$. A generalidade dessa abordagem a torna atrativa.

Agora, precisamos determinar $R_x(\tau)$, a função de autocorrelação temporal do trem de impulsos $x(t)$. Isso pode ser feito com certa facilidade se considerarmos o impulso como uma forma limite de pulsos retangulares, como mostrado na Fig. 7.5a. Cada pulso tem uma largura $\rightarrow 0$, e a altura do k -ésimo pulso é dada por

$$h_k = \frac{a_k}{\epsilon} \rightarrow \infty$$

Com isso, garantimos que a intensidade do k -ésimo impulso seja a_k , ou

$$\epsilon h_k = a_k$$

Se designarmos o correspondente trem de pulsos retangulares por $\hat{x}(t)$, então, por definição [Eq. (3.82) na Seção 3.8],

$$\mathcal{R}_{\hat{x}}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \hat{x}(t) \hat{x}(t - \tau) dt \quad (7.2)$$

Como $\mathcal{R}_{\hat{x}}(\tau)$ é uma função par de τ [Eq. (3.83)], basta que consideremos somente valores positivos de τ . Inicialmente, consideraremos o caso $\tau < \epsilon$. Nesse caso, a integral na Eq. (7.2) é a área sob o sinal $\hat{x}(t)$ multiplicado por $\hat{x}(t)$ atrasado por τ ($\tau < \epsilon$). Como visto na Fig. 7.5b, a área associada ao k -ésimo pulso é $h_k^2(\epsilon - \tau)$, e

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\hat{x}} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_k h_k^2(\epsilon - \tau) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_k a_k^2 \left(\frac{\epsilon - \tau}{\epsilon^2} \right) \\ &= \frac{R_0}{\epsilon T_b} \left(1 - \frac{\tau}{\epsilon} \right) \end{aligned} \quad (7.3a)$$

em que

$$R_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_b}{T} \sum_k a_k^2 \quad (7.3b)$$

Durante o intervalo de média T ($T \rightarrow \infty$), há N pulsos ($N \rightarrow \infty$), em que

$$N = \frac{T}{T_b} \quad (7.4)$$

Da Eq. (7.3b),

$$R_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_k a_k^2 \quad (7.5)$$

Observemos que a soma é feita com N pulsos. Portanto, R_0 é a média temporal do quadrado das amplitudes a_k do pulso. Usando a notação de média temporal, podemos expressar R_0 como

$$R_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_k a_k^2 = \overline{a_k^2} \quad (7.6)$$

Também sabemos que $\mathcal{R}_{\hat{x}}(\tau)$ é uma função de τ [ver Eq. (3.83)]. Logo, a Eq. (7.3) pode ser expressa como

$$\mathcal{R}_{\hat{x}}(\tau) = \frac{R_0}{\epsilon T_b} \left(1 - \frac{|\tau|}{\epsilon}\right) \quad |\tau| < \epsilon \quad (7.7)$$

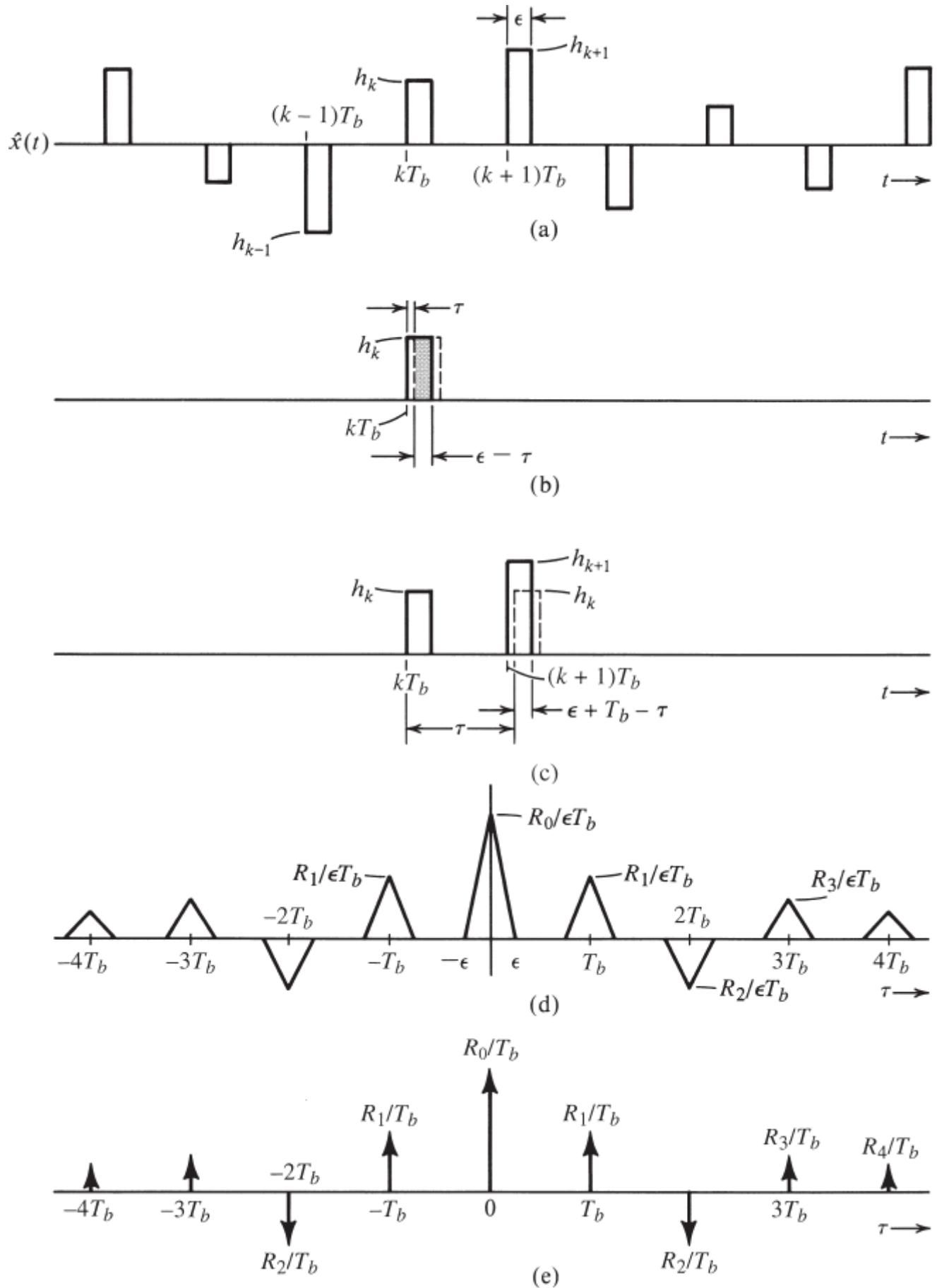


Figura 7.5

Dedução da PSD de um sinal PAM aleatório com largura de pulso muito estreita ϵ e altura $h_k = a_k/\epsilon$.

Este é um pulso retangular de altura $R_0 / \epsilon T_b$, largura 2ϵ e centrado em $\tau = 0$ (Fig. 7.5d). Isso é esperado, pois, à medida que τ aumenta além de ϵ , não há sobreposição entre o sinal atrasado $\hat{x}(t - \tau) e \hat{x}(t)$; logo, $\mathcal{R}_{\hat{x}}(\tau) = 0$, como visto na Fig. 7.5d. Contudo, à medida que aumentamos τ ainda mais, observamos que o k -ésimo pulso de $\hat{x}(t - \tau)$ começará a se sobrepor ao $(k + 1)$ -ésimo pulso de $\hat{x}(t)$, quando τ se aproximar de T_b (Fig. 7.5c). Repetindo esse argumento, vemos que $\mathcal{R}_{\hat{x}}(\tau)$ terá outro pulso retangular de largura 2ϵ centrado em $\tau = T_b$, com altura $R_1 / \epsilon T_b$, em que

$$\begin{aligned} R_1 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_b}{T} \sum_k a_k a_{k+1} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_k a_k a_{k+1} \\ &= \overbrace{a_k a_{k+1}}^{\sim \sim \sim \sim \sim} \end{aligned}$$

Observemos que R_1 é obtido da multiplicação de cada intensidade de pulso (a_k) pela intensidade de seu vizinho imediato (a_{k+1}), da soma de todos esses produtos e, então, da divisão pelo número total de pulsos. Isso é claramente a média temporal do produto $a_k a_{k+1}$ e o resultado, em nossa notação, é $\overbrace{a_k a_{k+1}}^{\sim \sim \sim \sim \sim}$. Algo similar ocorre em torno de $\tau = 2T_b, 3T_b, \dots$. Assim, $\mathcal{R}_{\hat{x}}(\tau)$ consiste em uma sequência de pulsos triangulares de largura 2ϵ , centrados em $\tau = 0, \pm T_b, \pm 2T_b, \dots$. A altura dos pulsos centrados em $\pm nT_b$ é R_n / T_b , em que

$$\begin{aligned} R_n &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_b}{T} \sum_k a_k a_{k+n} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_k a_k a_{k+n} \\ &= \overbrace{a_k a_{k+n}}^{\sim \sim \sim \sim \sim} \end{aligned}$$

R_n é, essencialmente, a função de autocorrelação discreta dos símbolos do código de linha $\{a_k\}$.

Para calcular $R_x(\tau)$, fazemos $\epsilon \rightarrow 0$ em $\mathcal{R}_{\hat{x}}(\tau)$. À medida que $\epsilon \rightarrow 0$, a largura de cada pulso triangular $\rightarrow 0$ e a altura $\rightarrow \infty$, de modo que a área permanece finita. Assim, no limite $\epsilon \rightarrow 0$, os pulsos triangulares se tornam impulsos. Para o n -ésimo pulso centrado em nT_b , a altura é $R_n / \epsilon T_b$ e a área, R_n / T_b . Portanto, (Fig. 7.5e),

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \frac{1}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \delta(\tau - nT_b) \quad (7.8)$$

A PSD $S_x(f)$ é a transformada de Fourier de $R_x(\tau)$. Logo,

$$S_x(f) = \frac{1}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n e^{-jn2\pi f T_b} \quad (7.9)$$

Lembrando que $R_{-n} = R_n$, [pois $R(\tau)$ é uma função par de τ], temos

$$S_x(f) = \frac{1}{T_b} \left[R_o + 2 \sum_{n=1}^{\infty} R_n \cos(n2\pi f T_b) \right] \quad (7.10)$$

A entrada $x(t)$ do filtro com resposta ao impulso $h(t) = p(t)$ resulta na saída $y(t)$, como mostrado na Fig. 7.4d. Se $p(t) \iff P(f)$, a função de transferência do filtro é $H(f) = P(f)$ e, segundo a Eq. (3.91),

$$S_y(f) = |P(f)|^2 S_x(f) \quad (7.11a)$$

$$= \frac{|P(f)|^2}{T_b} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n e^{-jn2\pi f T_b} \right] \quad (7.11b)$$

$$= \frac{|P(f)|^2}{T_b} \left[R_o + 2 \sum_{n=1}^{\infty} R_n \cos n2\pi f T_b \right] \quad (7.11c)$$

Portanto, a PSD de um código de linha é totalmente caracterizada pelo correspondente R_n e pela seleção de forma de pulso de $P(f)$. A seguir, usaremos esse resultado geral para determinar as PSDs de vários códigos de linha específicos, a partir da determinação da autocorrelação entre símbolos.

7.2.2 Sinalização Polar

Na sinalização polar, **1** é transmitido por um pulso $p(t)$ e **0**, por um pulso $-p(t)$. Nesse caso, a_k tem igual probabilidade de ser 1 ou -1, e a_k^2 será sempre 1. Assim,

$$R_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_k a_k^2$$

Há N pulsos, e $a_k^2 = 1$ para cada um, de modo que a soma no lado direito da equação anterior é N . Logo,

$$R_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} (N) = 1 \quad (7.12a)$$

Além disso, tanto a_k como a_{k+1} são 1 ou -1. Logo, $a_k a_{k+1}$ é 1 ou -1. Como a amplitude a_k tem, em média, igual probabilidade de ser 1 e -1, considerando N termos, o produto $a_k a_{k+1}$ é igual a 1 para $N/2$ termos e igual a -1 para os restantes $N/2$ termos. Portanto,

Possíveis valores de $a_k a_{k+1}$				
		a_k	-1	+1
a_{k+1}	-1		1	-1
	+1		-1	1

$$R_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left[\frac{N}{2}(1) + \frac{N}{2}(-1) \right] = 0 \quad (7.12b)$$

Com esse raciocínio, podemos ver que o produto $a_k a_{k+n}$ também tem igual probabilidade de ser 1 ou -1. Assim,

$$R_n = 0 \quad n \geq 1 \quad (7.12c)$$

Portanto, da Eq. (7.11c),

$$\begin{aligned} S_y(f) &= \frac{|P(f)|^2}{T_b} R_0 \\ &= \frac{|P(f)|^2}{T_b} \end{aligned} \quad (7.13)$$

Para efeitos de comparação de vários esquemas, consideremos uma forma de pulso *específica*. Seja $p(t)$ um pulso retangular de largura $T_b/2$ (pulso retangular de meia largura), ou seja,

$$p(t) = \Pi\left(\frac{t}{T_b/2}\right) = \Pi\left(\frac{2t}{T_b}\right)$$

e

$$P(f) = \frac{T_b}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi f T_b}{2}\right) \quad (7.14)$$

Portanto,

$$S_y(f) = \frac{T_b}{4} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi f T_b}{2}\right) \quad (7.15)$$

A Fig. 7.6 mostra o espectro $S_y(f)$. Fica claro que a maior parte da potência do sinal polar se concentra nas frequências mais baixas. Teoricamente, o espectro se torna muito estreito à medida que a frequência aumenta, mas sua largura jamais iguala zero acima de uma dada frequência. Para termos uma medida representativa de largura de banda, consideramos a *primeira frequência de nulo não dc* como a **largura de banda essencial**.*

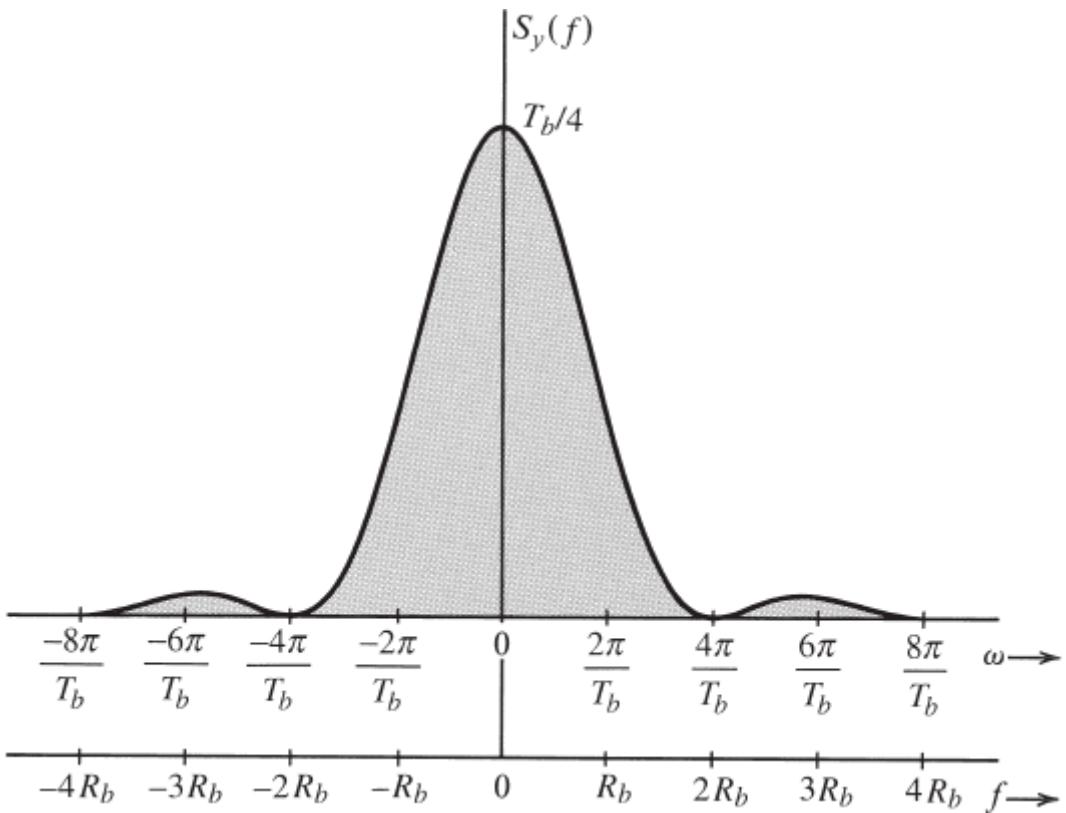


Figura 7.6

Densidade espectral de potência de um sinal polar.

Do espectro do sinal polar, a largura de banda essencial do sinal é calculada como $2R_b$ Hz (em que R_b é a frequência do relógio). Isso é 4 vezes a largura de banda teórica (largura de banda de Nyquist) exigida para transmitir R_b pulsos por segundo. O aumento da largura do pulso reduz a largura de banda (expansão no domínio do tempo resulta em compressão no domínio da frequência). Para um pulso de largura completa* (máxima largura de pulso possível), a largura de banda essencial é a metade, ou seja, R_b Hz. Esta, no entanto, ainda é o dobro da largura de banda teórica. Assim, sinalização polar não é a mais eficiente do ponto de vista de largura de banda.

Uma segunda deficiência da sinalização polar é não ter capacidade de detecção ou correção de erro. Outra desvantagem da sinalização polar é ter PSD não nula em dc ($f = 0$). Isso impede o uso de acoplamento ac durante a transmissão. O modo de acoplamento ac é muito importante na prática, pois permite que transformadores e capacitores de bloqueio auxiliem no casamento de impedância e na remoção de polarização, assim como a alimentação de potência dos repetidores em linha por meio dos pares de cabo. Mais adiante, mostraremos como a PSD de um código de linha pode ser forçada a zero em dc por meio de escolha adequada da forma de $p(t)$.

Quanto aos aspectos positivos, a sinalização polar é o esquema mais eficiente do ponto de vista de consumo de potência. Para uma dada potência, podemos mostrar que a probabilidade de detecção de erro em um esquema polar é a menor dentre todas as

técnicas de sinalização (Capítulo 10). A sinalização polar também é transparente, pois sempre há algum pulso (positivo ou negativo), qualquer que seja a sequência de bits. Não há uma componente discreta do relógio no espectro do sinal polar. Contudo, a retificação do sinal polar *RZ* produz um sinal periódico na frequência do relógio e pode ser usado prontamente para extrair a temporização.

7.2.3 Construção de um Nulo DC na PSD via Formatação de Pulso

Como $S_y(f)$, a PSD de um código de linha, contém um fator $|P(f)|^2$, podemos forçar a PSD a ter um nulo dc se selecionarmos um pulso $p(t)$ tal que $P(f)$ seja zero em dc ($f=0$). Como

$$P(f) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

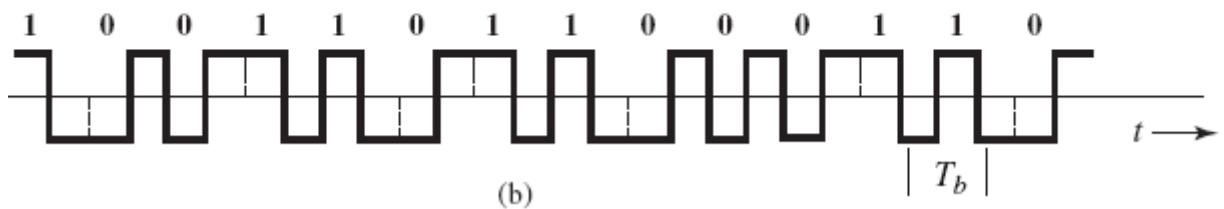
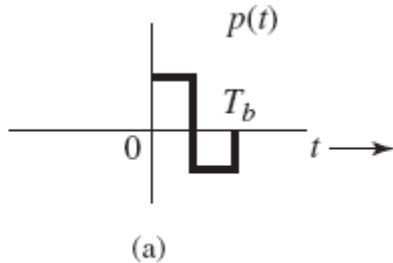


Figura 7.7

Sinal bifásico (Manchester ou de fase alternada). (a) Pulso básico para sinalização Manchester. (b) Forma de onda transmitida para sequência binária de dados usando sinalização Manchester.

temos

$$P(0) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt$$

Portanto, se a área sob $p(t)$ for feita igual a zero, $P(0)$ será zero, e teremos um nulo dc na PSD. Para um pulso retangular, uma possível forma de $p(t)$ para obter este efeito é mostrada na Fig. 7.7a. Quando usamos esse pulso com codificação de linha polar, o sinal resultante é conhecido como sinal em **código Manchester**, **bifásico**, ou de **fase alternada**. O leitor pode usar a Eq. (7.13) para mostrar que, para esse pulso, a PSD do código de linha Manchester tem um nulo dc (Exercício 7.2-2).

7.2.4 Sinalização On-Off

Na sinalização on-off, um **1** é transmitido por um pulso $p(t)$ e um **0**, pela ausência de pulso. Assim, a amplitude de pulso a_k tem igual probabilidade de ser 1 ou 0. Dentre N pulsos no intervalo de T segundos, a_k é 1 para $N/2$ pulsos e 0 para os restantes $N/2$ pulsos, em média. Portanto,

$$R_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left[\frac{N}{2}(1)^2 + \frac{N}{2}(0)^2 \right] = \frac{1}{2} \quad (7.16)$$

Para calcular o valor de R_n , precisamos considerar o produto $a_k a_{k+n}$. Como a_k e a_{k+n} têm igual probabilidade de serem 1 ou 0, o produto $a_k a_{k+n}$ tem igual probabilidade de ser 1×1 , 1×0 , 0×1 ou 0×0 , ou seja, 1, 0, 0, 0. Portanto, em média, o produto

$a_k a_{k+n}$ é igual a 1 para $N/4$ termos e 0 para $3N/4$ termos, e

$$R_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left[\frac{N}{4}(1) + \frac{3N}{4}(0) \right] = \frac{1}{4} \quad n \geq 1 \quad (7.17)$$

Portanto [Eq. (7.9)],

$$S_x(f) = \frac{1}{2T_b} + \frac{1}{4T_b} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} e^{-jn2\pi f T_b} \quad (7.18a)$$

$$= \frac{1}{4T_b} + \frac{1}{4T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn2\pi f T_b} \quad (7.18b)$$

A Eq. (7.18b) é obtida da Eq. (7.18a) dividindo em dois o termo $1/2T_b$ correspondente a R_0 : $1/4T_b$ fora do somatório e $1/4T_b$ dentro do somatório (correspondendo a $n = 0$). Agora, usamos a fórmula (ver a nota de rodapé para a prova*)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn2\pi f T_b} = \frac{1}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left(f - \frac{n}{T_b} \right)$$

A substituição deste resultado na Eq. (7.18b) leva a

$$S_x(f) = \frac{1}{4T_b} + \frac{1}{4T_b^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left(f - \frac{n}{T_b} \right) \quad (7.19a)$$

e à desejada PSD da forma de onda on-off $y(t)$ [da Eq. (7.11a)]

$$S_y(f) = \frac{|P(f)|^2}{4T_b} \left[1 + \frac{1}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left(f - \frac{n}{T_b} \right) \right] \quad (7.19b)$$

Reparemos que, ao contrário do espectro contínuo da PSD da sinalização polar, a PSD do sinal on-off na Eq. (7.19b) tem uma parte discreta adicional, que pode ser anulada se a forma do pulso for escolhida de modo que

$$P \left(\frac{n}{T_b} \right) = 0 \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

Tomando como exemplo o caso de um pulso retangular de meia largura [Eq. (7.14)],

$$S_y(f) = \frac{T_b}{16} \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi f T_b}{2} \right) \left[1 + \frac{1}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left(f - \frac{n}{T_b} \right) \right] \quad (7.20)$$

A resultante PSD é mostrada na Fig. 7.8. A componente contínua do espectro é $(T_b/16) \operatorname{sinc}^2(\pi f T_b/2)$. Isso é igual (exceto por um fator de escala) ao espectro do sinal polar [Eq. (7.15)]. A componente discreta é representada pelo produto de um trem de impulsos pela componente contínua $(T_b/16) \operatorname{sinc}^2(\pi f T_b/2)$. Assim, essa componente aparece como impulsos periódicos, tendo a componente contínua como envelope. Além disso, a frequência de repetição dos impulsos é a frequência do relógio $R_b = 1/T_b$, pois sua frequência fundamental é $2\pi/T_b$ rad/s ou $1/T_b$ Hz. Esse é um resultado lógico, pois, como mostra a Fig. 7.3, um sinal on-off pode ser expresso como a soma de uma componente polar com uma componente periódica. A componente polar $y_1(t)$ é exatamente a metade do sinal polar discutido anteriormente. Logo, a PSD dessa componente é um quarto da PSD na Eq. (7.15). A componente periódica tem a frequência do relógio R_b , e consiste em componentes discretas de frequência R_b e seus harmônicos.

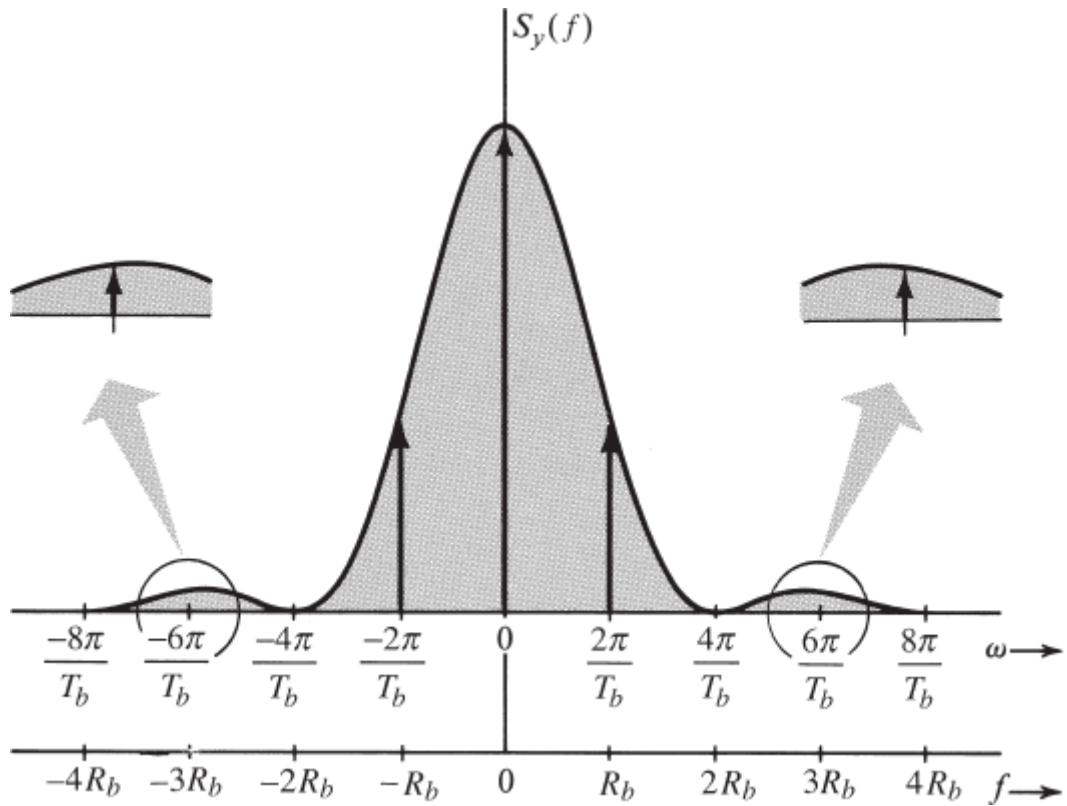


Figura 7.8

Densidade espectral de potência (PSD) de um sinal on-off.

A sinalização on-off não tem muito do que se gabar. Para uma dada potência transmitida, tem menos imunidade ao ruído do que o esquema polar, que usa um pulso positivo para **1** e um pulso negativo para **0**. Isso decorre do fato de que a imunidade ao ruído depende da diferença entre as amplitudes que representam **1** e **0**. Portanto, para a mesma imunidade, se a sinalização on-off usar pulsos de amplitude 2 e 0, a sinalização polar precisa apenas de pulsos com amplitudes 1 e -1. É simples mostrar que a sinalização on-off requer o dobro da potência da sinalização polar. Se um pulso de amplitude 1 ou -1 tiver energia E , o pulso de amplitude 2 tem energia $(2)^2 E = 4E$. Como $1/T_b$ dígitos são transmitidos por segundo, a potência do sinal polar é $(E)(1/T_b) = E/T_b$. Para o caso on-off, a energia de cada pulso é $4E$, embora, em média, um pulso seja transmitido na metade do tempo, enquanto nada é transmitido na outra metade. Assim, a potência média de sinal on-off é

$$\frac{1}{T_b} \left(4E \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{2E}{T_b}$$

que é o dobro da potência requerida pela sinalização polar. Além disso, ao contrário do caso polar, a sinalização on-off não é transparente. Uma longa sequência de **0s** (ou **offs**) causa ausência de sinal e pode levar a erros na extração da temporização. Adicionalmente, todas as desvantagens da sinalização polar (por exemplo, excessiva largura de banda de transmissão, espectro de potência não nulo em dc, incapacidade de detecção ou correção de erros) também estão presentes na sinalização on-off.

7.2.5 Sinalização Bipolar

O esquema de sinalização usado em PCM para redes de telefonia é denominado bipolar (pseudoternário ou inversão alternada de sinal). Um **0** é transmitido pela ausência de pulso e um **1**, por um pulso $p(t)$ ou $-p(t)$, dependendo se o **1** anterior foi transmitido por $-p(t)$ ou $p(t)$. Com pulsos consecutivos alternados, podemos evitar ondulação dc e, assim, causar um nulo na PSD. A sinalização bipolar, na verdade, usa três símbolos $[p(t), 0 \text{ e } -p(t)]$ e, portanto, é uma sinalização ternária, e não binária.

Para calcular a PSD, temos

$$R_o = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_k a_k^2$$

Em média, metade dos a_k s são 0 e a outra metade é 1 ou -1, com $a_k^2 = 1$. Logo,

$$R_o = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left[\frac{N}{2} (\pm 1)^2 + \frac{N}{2} (0)^2 \right] = \frac{1}{2}$$

Para calcular R_1 , consideremos o produto das amplitudes de pulsos $a_k a_{k+1}$. Quatro sequências de dois bits têm igual probabilidade de ocorrência: **11, 10, 01, 00**. Como o bit **0** é codificado por ausência de pulso ($a_k = 0$), o produto $a_k a_{k+1}$ é zero para as três últimas sequências. Isso significa, em média, que $3N/4$ combinações têm $a_k a_{k+1} = 0$ e apenas $N/4$ combinações têm $a_k a_{k+1}$ não nulo. Devido à regra bipolar, a sequência de bits **11** pode ser codificada somente por pulsos de polaridades opostas. Isso significa que o produto $a_k a_{k+1} = -1$ para $N/4$ combinações. Portanto,

$$R_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left[\frac{N}{4} (-1) + \frac{3N}{4} (0) \right] = -\frac{1}{4}$$

Para calcular R_2 de modo similar, devemos analisar o produto $a_k a_{k+2}$. Para isso, precisamos considerar todas as possíveis combinações de três bits em sequência. Há oito combinações com igual probabilidade de ocorrência: **111, 101, 110, 100, 011, 010, 001, 000**. As últimas seis combinações têm **0** como o primeiro ou o último bit; logo, $a_k a_{k+2} = 0$ para todas essas seis combinações. As duas primeiras são as únicas combinações que têm $a_k a_{k+2}$ não nulo. Dada a regra bipolar, o primeiro e o último bits na combinação **111** têm a mesma polaridade, resultando em $a_k a_{k+2} = 1$. Contudo, em **101**, o primeiro e o último bits têm polaridades opostas, resultando em $a_k a_{k+2} = -1$. Assim, em média, $a_k a_{k+2} = 1$ para $N/8$ termos, -1 para $N/8$ termos e 0 para $3N/4$ termos. Logo,

$$R_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left[\frac{N}{8} (1) + \frac{N}{8} (-1) + \frac{3N}{8} (0) \right] = 0$$

Em geral,

$$R_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_k a_k a_{k+n}$$

Para $n > 2$, o produto $a_k a_{k+n}$ pode ser $1, -1$ ou 0 . Além disso, um número igual de combinações tem valores 1 e -1 . Isso causa $R_n = 0$. Portanto,

$$R_n = 0 \quad n > 1$$

e [ver Eq. (7.11c)]

$$S_y(f) = \frac{|P(f)|^2}{2T_b} [1 - \cos 2\pi f T_b] \quad (7.21a)$$

$$= \frac{|P(f)|^2}{T_b} \sin^2(\pi f T_b) \quad (7.21b)$$

Reparemos que $S_y(f) = 0$ para $f = 0$ (dc), qualquer que seja $P(f)$. Logo, a PSD tem um nulo dc, o que é desejável para acoplamento ac. Além disso, $\sin^2(\pi f T_b) = 0$ em $f = 1/T_b$, ou seja, em $f = 1/T_b = R_b$ Hz. Portanto, independentemente de $P(f)$, fica garantida a largura de banda R_b Hz para o primeiro nulo não dc. Para o caso de pulsos de meia largura,

$$S_y(f) = \frac{T_b}{4} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi f T_b}{2}\right) \sin^2(\pi f T_b) \quad (7.22)$$

Isso é ilustrado na Fig. 7.9. A largura de banda essencial do sinal é R_b ($R_b = 1/T_b$), que é a metade da largura de banda do esquema polar que usa o mesmo pulso de meia largura ou da sinalização on-off e o dobro da mínima largura de banda teórica. Observamos que pudemos calcular a largura de banda R_b para o caso polar (ou on-off) com pulso de largura completa. Para o caso bipolar, a largura de banda é R_b Hz, tanto para pulso de meia largura como de largura completa.

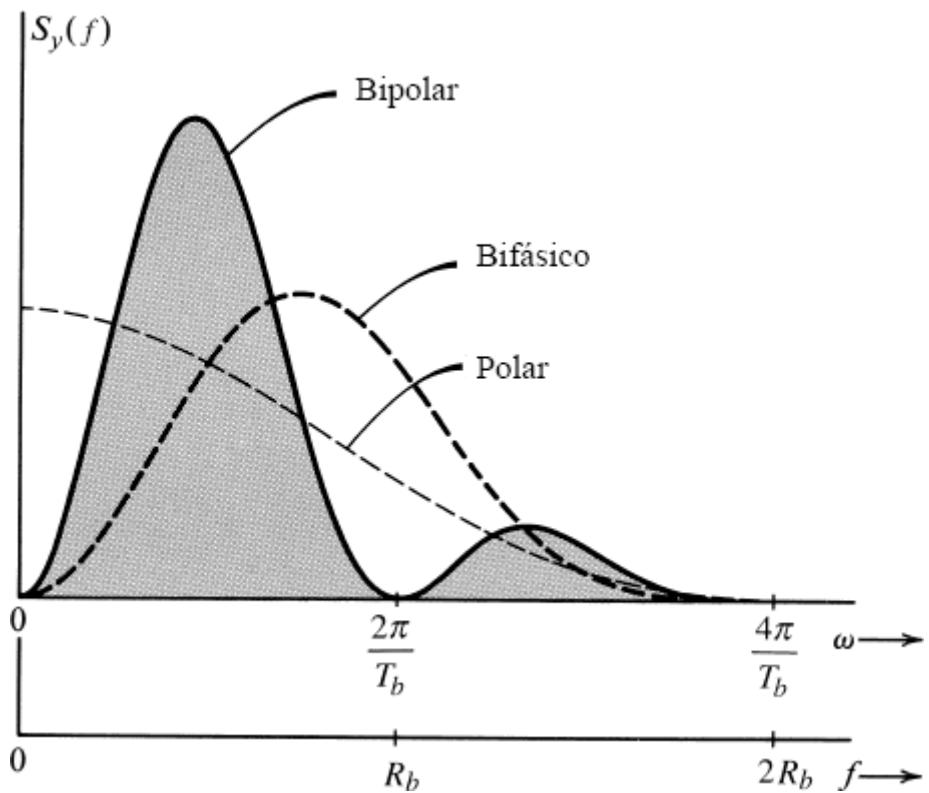


Figura 7.9

PSD de sinais bipolar, polar e bifásico normalizados para iguais potências. Pulsos retangulares de meia largura são usados.

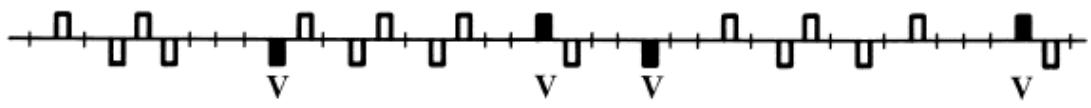
A sinalização bipolar tem diversas vantagens: (1) seu espectro tem um nulo dc; (2) sua largura de banda não é excessiva, (3) tem capacidade de detecção de erro isolado. Isso se deve ao fato de que mesmo um erro isolado viola a regra de pulsos alternados e será detectado imediatamente. Se um sinal bipolar for retificado, obtemos um sinal on-off que tem uma componente discreta na frequência do relógio. Entre as desvantagens de um sinal bipolar está a exigência do dobro da potência (3 dB) usada por um sinal polar. Isso decorre do fato de a detecção ser essencialmente equivalente à da sinalização on-off, sob o ponto de vista de detecção: a distinção é entre $+p(t)$ ou $-p(t)$ e 0, e não entre $\pm p(t)$.

Outra desvantagem da sinalização bipolar é não ser transparente. Na prática, vários esquemas substitutos foram usados para evitar que longas de zeros lógicos permitissem que sinais de relógio se desviassem. A seguir, discutiremos dois desses esquemas.

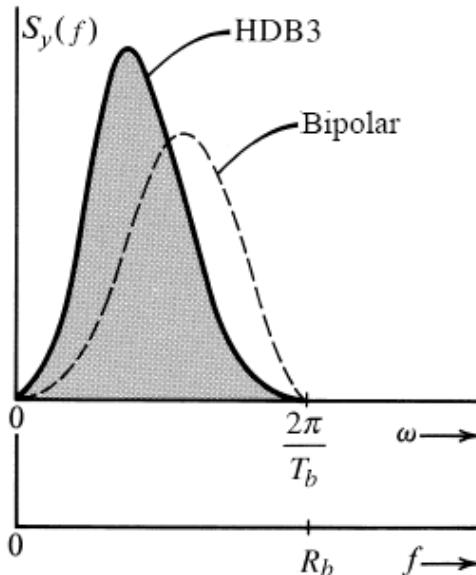
Dígitos de entrada **0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 0 0 0 1**

Dígitos codificados **0 1 0 1 1 1 [0 0 0 V] 1 0 1 1 0 1 [1 0 0 V] 1 0 0 V 0 0 1 0 1 1 0 1 0 1 [0 0 0 V] 1**

Forma de onda transmitida



(a)



(b)

Figura 7.10

(a) Sinal HDB3 e (b) sua PSD.

Sinalização Bipolar de Alta Densidade (HDB)

O esquema HDB (*high-density bipolar*) é um padrão ITU-T (antigo CCITT – Comitê Consultivo Internacional de Telefonia e Telegrafia). Nesse esquema, o problema de falta de transparência da sinalização bipolar é eliminado com a adição de pulsos quando o número de pulsos consecutivos 0s ultrapassa N . Esse código modificado é denominado **codificação bipolar de alta densidade** (HDBN), em que N pode assumir qualquer valor 1, 2, 3, O código HDB mais importante é o formato HDB3, adotado como padrão internacional.

A ideia básica do código HDBN é que, na ocorrência de uma sequência de $N + 1$ zeros, esse grupo de zeros é substituído por uma das sequências especiais de $N + 1$ dígitos binários. Para aumentar o conteúdo de temporização do sinal, as sequências são escolhidas de modo a incluir alguns 1s binários. Os 1s incluídos deliberadamente violam a regra bipolar para facilitar a identificação da sequência subsequente. Na codificação HDB3, por exemplo, as sequências especiais usadas são **000V** e **B00V**, em que **B = 1**, que respeita a regra bipolar, e **V = 1**, que viola a regra bipolar. A escolha da sequência **000V** ou **B00V** é feita de forma que os pulsos **V** consecutivos têm sinais alternados para evitar ondulação dc e manter o nulo dc na PSD. Isso requer que a sequência **B00V** seja usada quando há um número par de 1s após a última sequência especial, e a sequência **000V** é usada quando há um número ímpar de 1s após a última sequência. A Fig. 7.10a mostra um exemplo desse código. Reparemos que, na sequência **B00V**, **B** e **V** são codificados pelo mesmo pulso. O decodificador deve verificar duas coisas: as violações bipolares e o número de 0s que antecede cada violação, para determinar se o 1 anterior também era uma substituição.

Apesar das deliberadas violações da regra bipolar, a sinalização HDB mantém a capacidade de detecção de erro. Qualquer erro isolado inserirá uma violação bipolar espúria (ou removerá uma das violações deliberadas). Isso se tornará aparente quando, na próxima violação, a alternância de violações não desaparecer. Isso também mostra que violações deliberadas podem ser detectadas, apesar de erros isolados. A Fig. 7.10b mostra a PSD de HDB3 juntamente com a de um sinal bipolar, para facilitar a comparação.³

Sinalização Binária com Substituição de N Zeros (BNZS)

Uma classe de códigos de linha similar a HDBN é a **binária com substituição de N zeros**, ou **BNZS** (*binary with N zero substitution*). Nesse código, se ocorrerem N zeros em sequência, estes são substituídos por uma das duas sequências especiais que contêm alguns 1s para aumentar o conteúdo de temporização. Há violações deliberadas da regra bipolar, assim como em HDBN. A codificação binária com substituição de oito zeros (B8ZS) é usada em sinais DS1 da hierarquia de telefonia digital, discutidos no Capítulo 6. Essa codificação substitui quaisquer sequências de oito zeros por uma sequência de uns e zeros que contém duas violações bipolares. É improvável que uma sequência desse tipo seja afetada por erros, e qualquer uma que seja recebida é substituída por uma sequência de oito zeros antes da decodificação. A sequência empregada como substituição consiste nos padrões **000VB0VB**. Do mesmo modo, no código **B6ZS** usado em sinais DS2, uma sequência de seis zeros é substituída por **0VB0VB**; um código B3ZS é aplicado a sinais DS3. O código B3ZS é um pouco mais complexo que os outros, pois usa **B0V** ou **00V**, sendo a escolha feita de modo que o número de pulsos **B** entre pulsos **V** consecutivos seja ímpar. Esses códigos BNZS, com $N = 3, 6$ ou 8 , envolvem violações bipolares e, portanto, devem ser cuidadosamente substituídos pelas correspondentes sequências de zero no receptor.

Há muitos outros códigos (de linha) de transmissão, em número demasiadamente grande para serem listados aqui. Uma lista de códigos e referências apropriadas pode ser encontrada em Bylanski e Ingram.³

7.3 FORMATAÇÃO DE PULSO

A PSD $S_y(f)$ de um sinal digital $y(t)$ pode ser controlada por uma escolha do código de linha ou por $P(f)$, a forma do pulso. Na última seção, discutimos como a PSD é controlada por um código de linha. Na presente seção, examinaremos como $S_y(f)$ é influenciada pela forma do pulso $p(t)$, e aprenderemos como formatar um pulso $p(t)$ para obter uma $S_y(f)$ desejada. A PSD $S_y(f)$ é forte e diretamente influenciada pela forma do pulso $p(t)$, pois $S_y(f)$ contém o termo $|P(f)|^2$. Assim, em comparação com a natureza do código de linha, a forma do pulso é um fator mais direto e poderoso para formatar a PSD $S_y(f)$.

7.3.1 Interferências Intersimbólicas (ISI) e Efeitos

Na última seção, por conveniência, usamos um simples pulso retangular de meia largura $p(t)$. A rigor, nesse caso, a largura de banda $S_y(f)$ é infinita, pois $P(f)$ tem largura de banda infinita. Contudo, vimos que a largura de banda essencial de $S_y(f)$ era finita. Por exemplo, a maior parte da potência de um sinal bipolar está contida na largura de banda essencial entre 0 e R_b Hz. Notemos, no entanto, que a PSD é pequena, mas não nula, no intervalo $f > R_b$ Hz. Portanto, quando um sinal desse tipo é transmitido em um canal de largura de banda R_b Hz, uma porção significativa de seu espectro é transmitida, enquanto uma parcela pequena é suprimida. Nas Seções 3.5 e 3.6, vimos que uma distorção espectral como essa tendia a espalhar o pulso (dispersão). Espalhamento de um pulso além da janela de tempo T_b a ele alocada causará interferência com pulsos vizinhos. Isso é conhecido como **interferência intersimbólica** ou **ISI** (*intersymbol interference*).

ISI *não* é ruído. ISI é causada por canais não ideais que não são livres de distorção em toda a largura de banda do sinal. No caso de um pulso retangular de meia largura, a largura de banda do sinal é, estritamente falando, infinita. A ISI, como uma manifestação de distorção do canal, pode causar erros na detecção do pulso, caso seja suficientemente grande.

Para resolver a dificuldade associada à ISI, redefinimos nosso problema. Precisamos transmitir um pulso a cada T_b segundos, sendo $a_k p(t - kT_b)$ o k -ésimo pulso. O canal tem largura de banda finita, e devemos detectar a amplitude de pulso a_k corretamente (ou seja, sem ISI). Em nossa discussão até aqui, consideramos pulsos limitados no tempo. Como tais pulsos não podem ser limitados em frequência, parte de seus espectros é suprimida por um canal de largura de banda finita. Isso causa distorção dos pulsos (que se espalham) e, em consequência, a ISI. Podemos, inicialmente, tentar resolver essa dificuldade usando pulsos que tenham largura de banda finita, de modo que possam ser transmitidos intactos pelo canal de banda finita. No entanto, pulsos limitados em frequência não podem ser limitados no tempo. Obviamente, vários pulsos se sobreporão e causarão ISI. Portanto, quer usemos pulsos limitados no tempo ou pulsos limitados em frequência, parece que a ISI não pode ser evitada: é inerente à transmissão em largura de banda finita. Por sorte, existe uma escapatória desse beco sem saída. Amplitudes de pulso podem ser detectadas corretamente apesar de espalhamento (ou sobreposição) dos pulsos, desde que não haja ISI nos instantes de tomada de decisão. Isso pode ser alcançado por meio de pulsos limitados em frequência com forma apropriada. Para eliminar ISI, Nyquist propôs três diferentes critérios para formatação de pulsos,⁴ sendo permitida sobreposição de pulsos. Todavia, os pulsos são formatados de modo a causar interferência zero (ou controlada) em todos os outros pulsos nos instantes de tomada de decisão. Assim, ao limitar a exigência de não interferência somente nos instantes de tomada de decisão, eliminamos a necessidade de não sobreposição total dos pulsos. Consideraremos apenas os dois primeiros critérios. O terceiro é menos útil,⁵ e, por conseguinte, não será analisado aqui.

7.3.2 Primeiro Critério de Nyquist para ISI Nula

No primeiro método, Nyquist obtém ISI zero ao escolher uma forma de pulso que tenha amplitude não nula no centro (digamos, em $t = 0$) e amplitudes nulas em $t = \pm nT_b$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), em que T_b é a separação entre pulsos transmitidos sucessivos (Fig. 7.11a). Assim,

$$p(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t = \pm nT_b \end{cases} \quad \left(T_b = \frac{1}{R_b} \right) \quad (7.23)$$

Um pulso que satisfaça esse critério causa ISI zero nos centros de todos os outros pulsos, ou instantes de sinalização, como mostrado na Fig. 7.11a, na qual ilustramos vários pulsos sucessivos (linha tracejada), centrados em $t = 0, T_b, 2T_b, 3T_b, \dots$ ($T_b = 1/R_b$). Por conveniência, mostramos todos os pulsos como positivos.* Fica claro que, desta figura, as amostras em $t = 0, T_b, 2T_b, 3T_b, \dots$ consistem na amplitude de apenas um pulso (centrado no instante de amostragem), sem interferência dos outros pulsos.

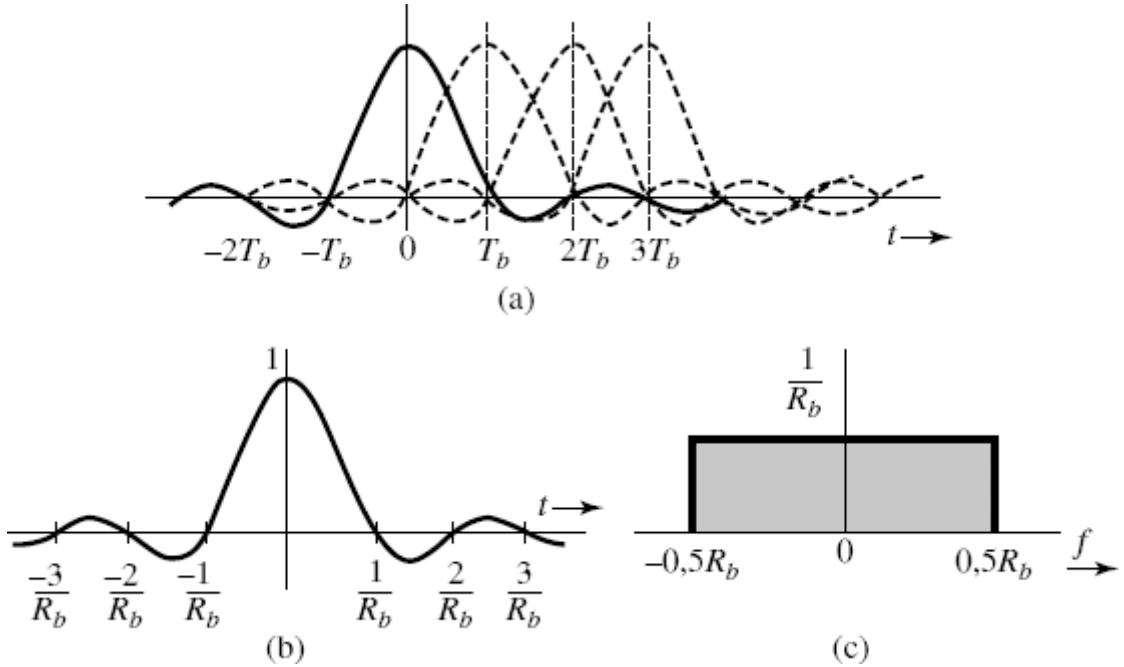


Figura 7.11

Pulso com mínima largura de banda que satisfaz o primeiro critério de Nyquist e seu espectro.

A transmissão de R_b bit/s requer uma mínima largura de banda teórica de $R_b/2$ Hz. Seria muito bom se a mínima largura de banda de um pulso que satisfizesse o critério de Nyquist fosse $R_b/2$ Hz. Será possível determinar um pulso $p(t)$ desse tipo? Já resolvemos esse problema (Exemplo 6.1 com $B = R_b/2$), e mostramos que existe um (e somente um) pulso que atende o critério de Nyquist (7.23) e tem largura de banda de $R_b/2$ Hz. Esse pulso $p(t) = \text{sinc}(\pi R_b t)$ (Fig. 7.11b) tem a propriedade

$$\text{sinc}(\pi R_b t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t = \pm nT_b \end{cases} \quad \left(T_b = \frac{1}{R_b} \right) \quad (7.24a)$$

Além disso, a transformada de Fourier desse pulso é

$$P(f) = \frac{1}{R_b} \Pi\left(\frac{f}{R_b}\right) \quad (7.24b)$$

que tem largura de banda $R_b/2$ Hz, como visto na Fig. 7.11c. Podemos usar esse pulso para transmitir uma taxa de R_b pulsos por segundo sem ISI, em uma largura de banda de $R_b/2$.

Esse esquema mostra que podemos alcançar o limite teórico de desempenho se usarmos um pulso sinc. Lamentavelmente, esse pulso é impraticável, pois tem início em $-\infty$. Teremos de esperar um tempo infinito para gerá-lo. Qualquer tentativa de truncá-lo aumentaria sua largura de banda além dos $R_b/2$ Hz. Contudo, mesmo se esse pulso fosse realizável, teria uma característica indesejável: decairia a uma taxa demasiadamente lenta de $1/t$. Isto causaria alguns sérios problemas práticos. Por exemplo, se a taxa de dados nominal R_b bit/s requerida para esse esquema variasse um pouco, a amplitude de um pulso não se anularia nos centros dos outros pulsos. Como os pulsos decaem com $1/t$ apenas, a interferência cumulativa no centro de um dado pulso devido a todos os outros seria da forma $\Sigma(1/n)$. É um fato bem conhecido que essa série infinita não converge e pode produzir um valor muito alto. Um resultado similar ocorreria se tudo fosse perfeito no transmissor, mas a taxa de amostragem no

receptor se desvia da taxa de R_b Hz. A mesma coisa aconteceria se os instantes de amostragem se desviassem um pouco devido à incerteza temporal nos pulsos, o que é inevitável mesmo nos sistemas mais sofisticados. Portanto, esse esquema falhará, a menos que tudo seja perfeito, o que é uma impossibilidade prática. E tudo isso decorre do fato de $\text{sinc}(\pi R_b t)$ decair de modo demasiadamente lento (com $1/t$). A solução consiste em encontrar um pulso $p(t)$ que satisfaça a Eq. (7.23), mas decaia mais rapidamente que $1/t$. Nyquist mostrou que um pulso como esse requer uma largura de banda $kR_b/2$, com $1 \leq k \leq 2$.

Isso pode ser provado da seguinte forma: consideremos $p(t) \iff P(f)$, em que a largura de banda de $P(f)$ está no intervalo $(R_b/2, R_b)$ (Fig. 7.12a). O desejado pulso $p(t)$ satisfaz a Eq. (7.23). Se amostrarmos $p(t)$ a cada T_b segundos, multiplicando-o por $\delta_{T_b}(t)$ (um trem de impulsos), devido à propriedade (7.23), todas as amostras, exceto a feita na origem, serão iguais a zero. Assim, o sinal amostrado $\bar{p}(t)$ será

$$\bar{p}(t) = p(t)\delta_{T_b}(t) = \delta(t) \quad (7.25)$$

Pela análise da Eq. (6.4) do Capítulo 6, sabemos que o espectro de um sinal amostrado $\bar{p}(t)$ é ($1/T_b$ vezes) o espectro de $p(t)$ repetido periodicamente à frequência de amostragem R_b . Portanto, a transformada de Fourier dos dois lados da Eq. (7.25) produz

$$\frac{1}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(f - nR_b) = 1 \quad \text{em que} \quad R_b = \frac{1}{T_b} \quad (7.26)$$

ou

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} P(f - nR_b) = T_b \quad (7.27)$$

Assim, a soma dos espectros formados com a repetição de $P(f)$ à frequência R_b é uma constante T_b , como mostrado na Fig. 7.12b.*

Consideremos o espectro na Fig. 7.12b, em um intervalo $0 < f < R_b$. Esse intervalo envolve apenas dois termos, $P(f)$ e $P(f - R_b)$, do somatório na Eq. (7.27). Logo,

$$P(f) + P(f - R_b) = T_b \quad 0 < f < R_b$$

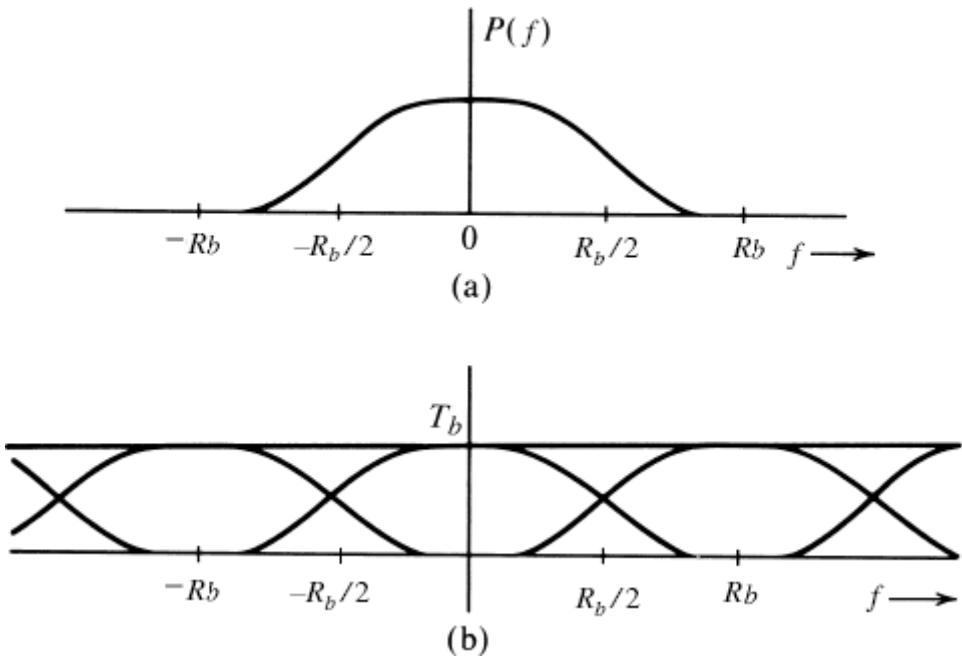


Figura 7.12

Dedução do critério Nyquist para ISI zero.

Seja $x = f - R_b/2$; portanto,

$$P(x + 0,5R_b) + P(x - 0,5R_b) = T_b \quad |x| < 0,5R_b \quad (7.28a)$$

ou

$$P\left(x + \frac{R_b}{2}\right) + P\left(x - \frac{R_b}{2}\right) = T_b \quad |x| < 0,5R_b \quad (7.28b)$$

Usando a propriedade da simetria conjugada [Eq. (3.11)] na Eq. (7.28), temos

$$P\left(\frac{R_b}{2} + x\right) + P^*\left(\frac{R_b}{2} - x\right) = T_b \quad |x| < 0,5R_b \quad (7.29)$$

Se escolhermos $P(f)$ com valores reais e positivos, basta que $|P(f)|$ satisfaça a Eq. (7.29). Como $|P(f)|$ é real, a Eq. (7.29) implica em

$$\left|P\left(\frac{R_b}{2} + x\right)\right| + \left|P\left(\frac{R_b}{2} - x\right)\right| = T_b \quad |x| < 0,5R_b \quad (7.30)$$

Portanto, $|P(f)|$ deve ter a forma mostrada na Fig. 7.13. Essa curva tem simetria ímpar em relação ao conjunto de eixos que se cruzam no ponto α [ponto na curva de $|P(f)|$ em $f = R_b/2$]. Isso requer

$$|P(0,5R_b)| = 0,5|P(0)|$$

A largura de banda de $P(f)$ em hertz é $0,5R_b + f_x$, em que f_x é a largura de banda além da mínima largura de banda $R_b/2$. Seja r a razão entre o excesso de largura de banda f_x e a mínima largura de banda teórica $R_b/2$:

$$\begin{aligned} r &= \frac{\text{excesso de largura de banda}}{\text{mínima largura de banda teórica}} \\ &= \frac{f_x}{0,5R_b} \\ &= 2f_x T_b \end{aligned} \quad (7.31)$$

Observemos que f_x não pode ser maior que $R_b/2$,

$$0 \leq r \leq 1 \quad (7.32)$$

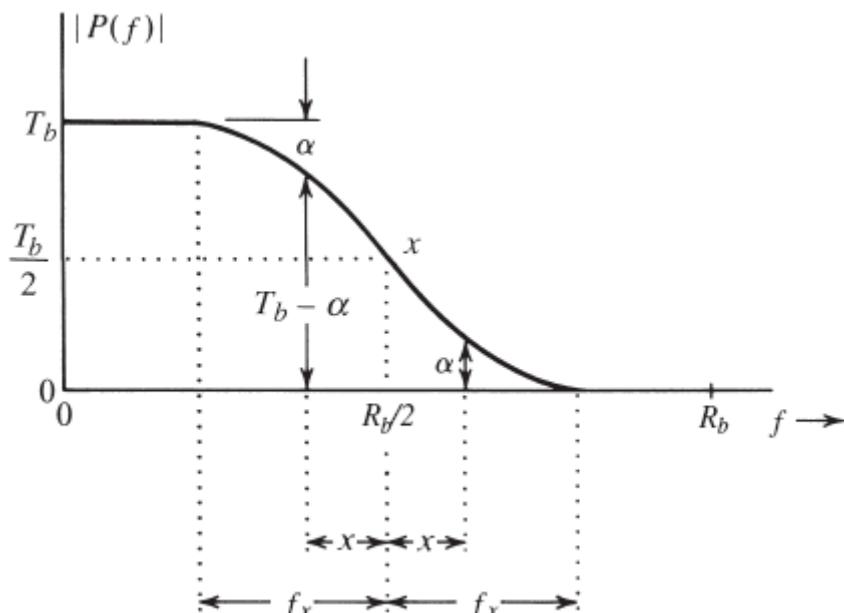


Figura 7.13

Espectro vestigial (cosseno levantado).

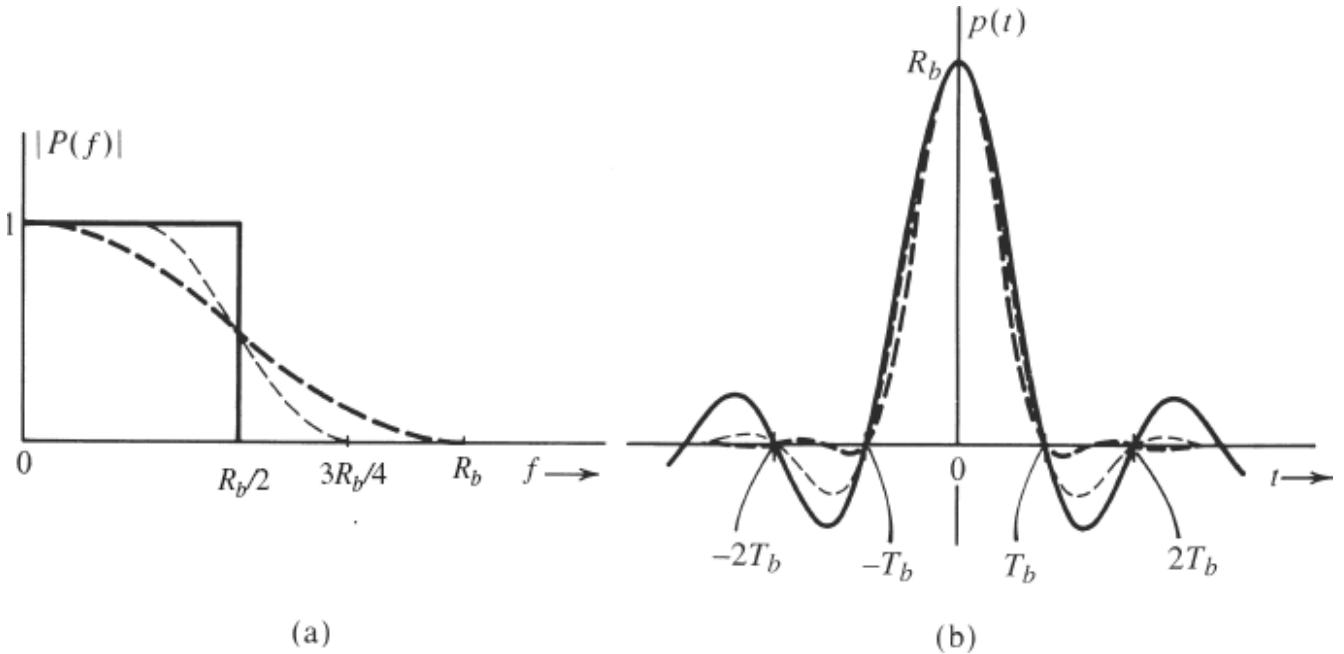


Figura 7.14

Pulsos que satisfazem o primeiro critério de Nyquist: linha cheia, $f_x = 0$ ($r = 0$) ideal; linha tracejada fina, $f_x = R_b/4$; linha tracejada grossa, $f_x = R_b/2$ ($r = 1$).

Em termos da frequência f , mínima largura de banda teórica é $R_b/2$ Hz, e o excesso de largura de banda é $f_x = rR_b/2$. Portanto, a largura de banda de $P(f)$ é

$$B_T = \frac{R_b}{2} + \frac{rR_b}{2} = \frac{(1+r)R_b}{2} \quad (7.33)$$

A constante r é denominada **fator de decaimento (roll-off)**, e é também expressa em porcentagem. Por exemplo, se $P(f)$ for um espectro que segue o primeiro critério de Nyquist e cuja largura de banda seja 50% maior que o mínimo teórico, seu fator de decaimento será $r = 0,5$ ou 50%.

A modulação em banda lateral vestigial discutida na Seção 4.5 [Eq. (4.26)] requer um filtro cuja resposta de amplitude tenha essas mesmas características. Por essa razão, nos referimos ao espectro de $P(f)$ nas Eqs. (7.29) e (7.30) como **espectro vestigial**. O pulso $p(t)$ na Eq. (7.23) tem ISI zero nos centros de todos os outros pulsos transmitidos à taxa de R_b pulsos por segundo. Um pulso $p(t)$ que cause ISI zero nos centros de todos os outros pulsos (ou instantes de sinalização) é o pulso do primeiro critério de Nyquist. Mostramos que um pulso com espectro vestigial [Eq. (7.29) ou Eq. (7.30)] satisfaz o primeiro critério de Nyquist para ISI zero.

Como $0 \leq r < 1$, a largura de banda de $P(f)$ fica restrita ao intervalo entre $R_b/2$ e R_b Hz. O pulso $p(t)$ pode ser gerado como a resposta ao impulso unitário de um filtro com função de transferência $P(f)$. Contudo, como $P(f) = 0$ em uma banda de frequências, o critério de Paley-Wiener é violado e, portanto, o filtro é irrealizável. Todavia, a característica de decaimento vestigial é gradual e pode ser bem aproximada por um filtro prático. Uma família de espectros que satisfazem o primeiro critério de Nyquist é

$$P(f) = \begin{cases} 1, & |f| < \frac{R_b}{2} - f_x \\ \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{sen} \pi \left(\frac{f - R_b/2}{2f_x} \right) \right], & \left| f - \frac{R_b}{2} \right| < f_x \\ 0, & |f| > \frac{R_b}{2} + f_x \end{cases} \quad (7.34)$$

A Fig. 7.14a mostra três curvas dessa família, correspondendo a $f_x = 0$ ($r = 0$), $f_x = R_b/4$ ($r = 0,5$) e $f_x = R_b/2$ ($r = 1$). As respectivas respostas ao impulso são mostradas na Fig. 7.14b. Pode ser visto que o aumento de f_x (ou de r) melhora $p(t)$; ou seja,

um decaimento mais gradual reduz a natureza oscilatória de $p(t)$ e faz com que $p(t)$ decaia mais rapidamente no domínio do tempo. Para o caso do valor máximo $f_x = R_b/2$ ($r = 1$), a Eq. (7.34) se reduz a

$$P(f) = \frac{1}{2} (1 + \cos \pi f T_b) \Pi\left(\frac{f}{2R_b}\right) \quad (7.35a)$$

$$= \cos^2\left(\frac{\pi f T_b}{2}\right) \Pi\left(\frac{f T_b}{2}\right) \quad (7.35b)$$

A característica da Eq. (7.34) é conhecida na literatura como **cosseno levantado**, pois representa um cosseno levantado por sua amplitude de pico. A Eq. (7.35) também é conhecida como característica de **decaimento de cosseno amplo** (*full-cosine roll-off*). A transformada de Fourier inversa desse espectro é prontamente calculada como (Exercício 7.3-8)

$$p(t) = R_b \frac{\cos \pi R_b t}{1 - 4R_b^2 t^2} \operatorname{sinc}(\pi R_b t) \quad (7.36)$$

Esse pulso é mostrado na Fig. 7.14b ($r = 1$). Podemos fazer várias observações importantes sobre o pulso cosseno levantado. Primeira, esse pulso, cuja largura de banda é R_b Hz, tem valor R_b em $t = 0$ e é zero não apenas em todos os outros instantes de amostragens, mas também nos pontos médios entre todos os instantes de sinalização. Segunda, o pulso decai rapidamente, com $1/t^3$. Como resultado, o pulso cosseno levantado é relativamente insensível a desvios de R_b , da taxa de amostragem, incerteza temporal e assim por diante. Além disso, o filtro de geração de pulso com função de transferência $P(f)$ [Eq. (7.35b)] é realizável em boa aproximação. A característica de fase desse filtro é praticamente linear, de modo que nenhuma equalização de fase adicional se faz necessária.

Vale lembrar que os pulsos recebidos na entrada do detector é que devem ter a forma para ISI zero. Na prática, como o canal não é ideal (sem distorção), os pulsos transmitidos devem ser formatados para que, após passarem pelo canal com função de transferência $H_c(f)$, sejam recebidos com a forma adequada (como pulsos cosseno levantado). Portanto, o pulso transmitido $p_i(t)$ deve satisfazer

$$p_i(f) H_c(f) = P(f)$$

em que $P(f)$ tem o espectro vestigial da Eq. (7.30). Por conveniência, a função de transferência $H_c(f)$ como um canal também pode incluir um filtro receptor projetado para rejeitar interferências e outros ruídos fora da banda.

Exemplo 7.1 Determinemos a taxa de transmissão de pulsos em termos da largura de banda de transmissão B_T e do fator de decaimento r . Consideremos um esquema que use o primeiro critério de Nyquist.

Da Eq. (7.33)

$$R_b = \frac{2}{1+r} B_T$$

Como $0 \leq r \leq 1$, a taxa de transmissão de pulsos varia de $2B_T$ a B_T , dependendo da escolha de r . Um menor valor de r produz uma taxa de sinalização mais alta. Contudo, o pulso $p(t)$ decai lentamente, criando o mesmo problema discutido em relação ao pulso sinc. Para o pulso cosseno levantado $r = 1$ e $R_b = B_T$, alcançamos a metade da máxima taxa teórica. Mas, o pulso decai mais rapidamente, com $1/t^3$ e é menos vulnerável à ISI.

7.3.3 ISI Controlada ou Sinalização de Resposta Parcial

Pulsos que seguem o critério de Nyquist requerem uma largura de banda maior que o mínimo teórico. Se desejarmos reduzir a largura de banda do pulso, devemos encontrar uma forma de alargar o pulso $p(t)$ (mais largo o pulso, menor sua largura de banda). O aumento da largura do pulso pode resultar em interferência (ISI) em pulsos vizinhos. No entanto, na transmissão binária com apenas dois símbolos, pode ser possível remover ou cancelar um grau conhecido e controlado de ISI, pois somente uns poucos padrões de interferência são possíveis.

Consideremos um pulso especificado por (Fig. 7.15):

$$p(nT_b) = \begin{cases} 1 & n = 0, 1 \\ 0 & \text{para todos outros valores de } n \end{cases} \quad (7.37)$$

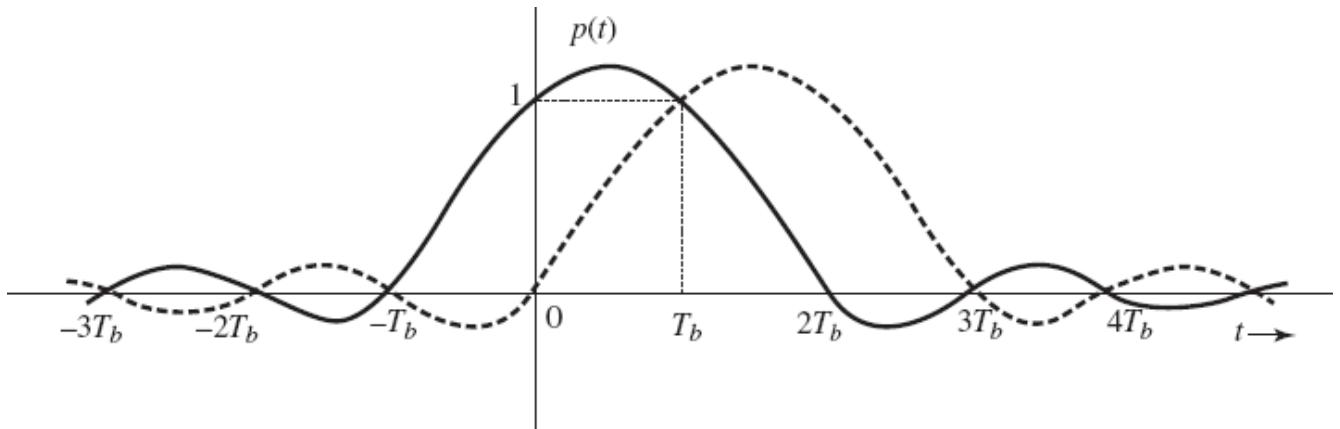


Figura 7.15
Comunicação usando ISI controlada ou o segundo critério de Nyquist.

Isso leva a um grau conhecido e controlado de ISI causada pelo k -ésimo pulso no próximo pulso transmitido. Usemos sinalização polar com esse pulso. Assim, **1** é transmitido por $p(t)$ e **0**, pelo pulso $-p(t)$. O sinal recebido é amostrado em $t = nT_b$, e o pulso $p(t)$ tem valor zero em todos os n , exceto em $n = 0$ e 1 , quando vale 1 (Fig. 7.15). Fica claro que esse pulso causa ISI zero em todos os outros pulsos, exceto o que o sucede. Consideremos dois pulsos sucessivos localizados em 0 e T_b , respectivamente. Se os dois pulsos forem positivos, o valor amostrado do sinal resultante em $t = T_b$ será 2. Se os dois pulsos forem negativos, o valor amostrado será -2 . Contudo, se os dois pulsos tiverem polaridades opostas, o valor amostrado será zero. Como somente esses três valores são possíveis, o valor da amostra do sinal permite que tomemos a decisão correta nos instantes de amostragem. A regra de decisão é a seguinte: se o valor da amostra for positivo, o bit corrente é **1** e o bit anterior também é **1**. Se o valor da amostra for negativo, o bit atual é **0** e o bit anterior também é **0**. Se o valor da amostra for zero, o bit atual é o oposto do anterior. O conhecimento do bit anterior permite a determinação do bit corrente.

A Tabela 7.1 mostra uma sequência de bits transmitidos, os valores das amostras do sinal recebido $x(t)$ (admitindo a ausência de erros devido a ruído do canal) e a decisão do detector. Esse exemplo também indica a propriedade de detecção de erro desse esquema. Um exame das amostras da forma de onda $y(t)$ na Tabela 7.1 revela que sempre há um número par de amostras de valor zero entre duas amostras de valores completos de mesma polaridade, e um número ímpar de amostras de valor zero entre duas amostras de valores completos de polaridades opostas. Assim, o primeiro valor amostrado de $x(t)$ é 2, e o próximo valor completo de amostra (da quarta amostra) é 2. Entre essas duas amostras de valores completos de mesma polaridade, há um número par (ou seja, 2) de amostras de valor zero. Se um dos valores de amostra for detectado erroneamente, essa regra será violada e o erro, detectado.

Tabela 7.1
Bits transmitidos e amostras recebidas na sinalização com ISI controlada

Sequência de informação	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1
Amostra $y(kT_b)$	1	2	0	0	2	0	-2	-2	0	0	0	2	2
Sequência detectada	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1

O pulso $p(t)$ vai a zero em $t = -T_b$ e $2T_b$, resultando em uma largura de pulso (do primeiro lóbulo) 50% maior que a do pulso do primeiro critério. Tal alargamento do pulso no domínio do tempo reduz a largura de banda do mesmo. Esse é o segundo critério proposto por Nyquist. Esse esquema de ISI controlada também é conhecido como esquema de **resposta parcial** ou **correlativa**. Um pulso que satisfaça o segundo critério na Eq. (7.37) também é conhecido como **pulso duobinário**.

7.3.4 Exemplo de Pulso Duobinário

Se restringirmos a largura de pulso a $R_b/2$, seguindo o procedimento do Exemplo 7.1, podemos mostrar que (Exercício 7.3-9) somente o pulso $p(t)$ dado a seguir satisfaz a exigência na Eq. (7.37) para o pulso duobinário:

$$p(t) = \frac{\sin(\pi R_b t)}{\pi R_b t(1 - R_b t)} \quad (7.38)$$

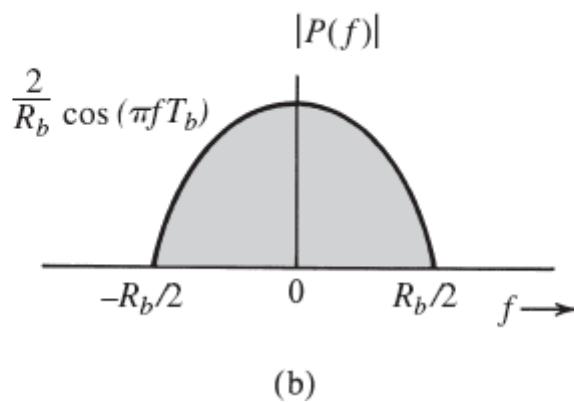
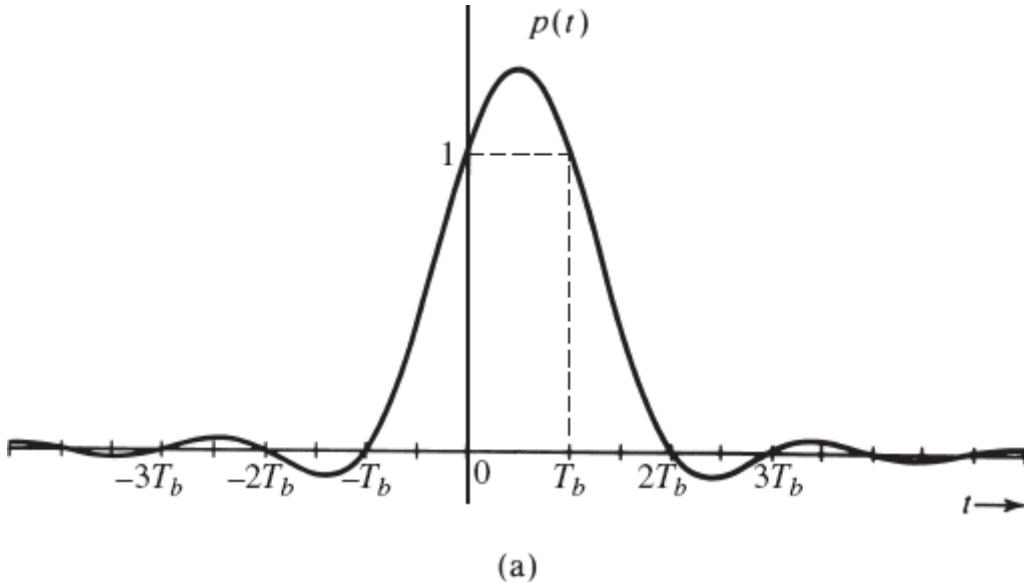


Figura 7.16

(a) Mínima largura de banda de pulso que satisfaz o critério de pulso duobinário e (b) seu espectro de amplitude.

A transformada de Fourier $P(f)$ do pulso $p(t)$ é dada por (Exercício 7.3-9):

$$P(f) = \frac{2}{R_b} \cos\left(\frac{\pi f}{R_b}\right) \Pi\left(\frac{f}{R_b}\right) e^{-j\pi f/R_b} \quad (7.39)$$

O pulso $p(t)$ e seu espectro de amplitude $|P(f)|$ são mostrados na Fig. 7.16.* Esse pulso transmite dados binários à taxa de R_b bit/s e tem a mínima largura de banda teórica de $R_b/2$ Hz. A Eq. (7.38) mostra que esse pulso decai rapidamente com o tempo, com $1/t^2$. Esse pulso não é idealmente realizável, pois $p(t)$ é não causal e tem duração infinita [pois $P(f)$ é limitado em frequência]. Contudo, decai rapidamente (com $1/t^2$) e, portanto, pode ser bem aproximado.

Pode parecer surpreendente que possamos alcançar a taxa teórica com o pulso duobinário. Na verdade, é uma ilusão. A taxa teórica de transmissão é 2 porções independentes de informação por segundo por hertz de largura de banda. Alcançamos essa taxa para informação binária. Aqui está o problema! Uma porção de informação binária não se qualifica como uma porção independente de informação, pois não pode assumir um valor arbitrário: deve ser selecionada de um conjunto finito. O pulso duobinário falharia se os pulsos fossem verdadeiramente porções independentes de informação, ou seja, se os pulsos pudessem assumir amplitudes arbitrárias. O esquema funciona somente porque os pulsos binários assumem valores finitos conhecidos e, portanto, existe apenas um número finito (conhecido) de padrões de interferência entre pulsos, o que permite a determinação correta das amplitudes dos pulsos, apesar da ocorrência de interferência.

7.3.5 Relações de Pulsos entre Sinalizações com ISI Zero, Duobinária e Duobinária Modificada

Agora, podemos estabelecer a relação simples entre um pulso $p_a(t)$ que satisfaz o primeiro critério de Nyquist (ISI zero) e um pulso duobinário $p_b(t)$ (com ISI controlada). Das Eqs. (7.23) e (7.37), fica claro que $p_a(kT_b)$ e $p_b(kT_b)$ diferem somente para $k = 1$. Para todos os outros valores do inteiro k , esses pulsos têm amostras com valores iguais. Portanto, podemos construir um pulso $p_b(t)$ de $p_a(t)$, da seguinte forma

$$p_b(t) = p_a(t) + p_a(t - T_b)$$

Essa adição é a sinalização com ISI “controlada” ou resposta parcial, deliberadamente introduzida para reduzir a exigência de largura de banda. Para determinar o efeito da sinalização “duobinária” na largura de banda espectral, consideremos a relação entre os dois pulsos no domínio da frequência:

$$P_b(f) = P_a(f)[1 + e^{-j2\pi fT_b}] \quad (7.40a)$$

$$|P_b(f)| = |P_a(f)|\sqrt{2(1 + \cos(2\pi fT_b))}2|\cos(\pi fT_b)| \quad (7.40b)$$

Podemos ver que a sinalização de resposta parcial, na verdade, força um nulo de $P(f)$ em $2\pi fT_b = \pi$ ou $f = 0,5/T_b$. Portanto, conceitualmente, podemos ver como a sinalização de resposta parcial oferece uma oportunidade adicional para reformatar a PSD ou largura de banda de transmissão. De fato, a sinalização duobinária, ao forçar um nulo na frequência $0,5/T_b$, faz com que sua largura de banda essencial seja a mínima largura de banda de transmissão necessária para uma taxa de dados de $1/T_b$ (como discutido na Seção 6.1.3).

Na verdade, muitos canais físicos, como uma gravação magnética, têm ganho zero em dc. Por tanto, não faz sentido que o sinal em banda base tenha qualquer componente dc em sua PSD. Uma modificação da sinalização de resposta parcial é comumente adotada para forçar um nulo em dc. Um exemplo notável é a chamada sinalização **duobinária modificada**, que requer

$$p_c(nT_b) = \begin{cases} 1 & n = -1 \\ -1 & n = 1 \\ 0 & \text{para todos outros inteiros } n \end{cases} \quad (7.41)$$

Um raciocínio similar indica que $p_c(t)$ pode ser gerado de qualquer pulso $p_a(t)$ que satisfaça o primeiro critério de Nyquist, via

$$p_c(t) = p_a(t + T_b) - p_a(t - T_b)$$

De modo equivalente, no domínio da frequência, o pulso duobinário é

$$P_c(f) = 2jP_a(f)\sin(2\pi fT_b)$$

que usa $\sin(2\pi fT_b)$ para forçar um nulo em dc e se conformar à limitação física do canal.

7.3.6 Detecção de Sinalização Duobinária e Codificação Diferencial

O diagrama básico do transmissor para o método de ISI controlada da sinalização duobinária é mostrado na Fig. 7.17. Agora, examinemos em mais detalhe a relação entre todos os símbolos de dados na banda base e o procedimento de detecção. Para o bit de mensagem binária $I_k = 0$ ou 1 , símbolos polares são simplesmente

$$a_k = 2I_k - 1$$

Com ISI controlada, as amostras do sinal de transmissão $y(t)$ são

$$y(kT_b) = b_k = a_k + a_{k-1} \quad (7.42)$$

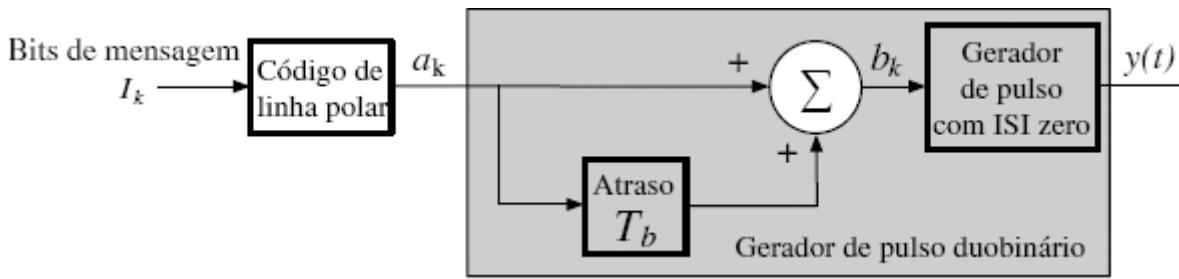


Figura 7.17

Sinalização duobinária equivalente.

Para o receptor, a questão é como detectar I_k de $y(kT_b)$ ou b_k . Essa questão pode ser respondida considerando, primeiro, todos os valores possíveis de b_k ou $y(kT_b)$. Como $a_k = \pm 1$, $b_k = 0, \pm 2$. Da Eq. (7.42), fica evidente que

$$\begin{aligned} b_k = 2 &\Rightarrow a_k = 1 \quad \text{ou} \quad I_k = 1 \\ b_k = -2 &\Rightarrow a_k = -1 \quad \text{ou} \quad I_k = 0 \\ b_k = 0 &\Rightarrow a_k = -a_{k-1} \quad \text{ou} \quad I_k = 1 - I_{k-1} \end{aligned} \quad (7.43)$$

Portanto, um simples detector de sinalização duobinária deve, primeiro, detectar todos os bits I_k correspondentes a $b_k = \pm 2$. Os remanescentes $\{b_k\}$ são amostras de valor zero que implicam transição; ou seja, o dígito corrente é **1**, e o anterior, **0** ou vice-versa. Isso significa que a detecção de dígitos deve ser baseada no dígito anterior. Um exemplo dessa detecção dígito a dígito foi mostrado na Tabela 7.1. A desvantagem do método de detecção na Eq. (7.43) é que, quando $y(kT_b) = 0$, a decisão para o bit corrente depende da decisão para o bit anterior. Se o dígito anterior tiver sido detectado de modo incorreto, o erro tende a se propagar, até que surja um valor de amostra ± 2 . Para mitigar esse problema de propagação de erro, aplicamos um mecanismo eficiente, conhecido como **codificação diferencial**.

A Fig. 7.18 ilustra um gerador de sinal duobinário, no qual há um codificador diferencial adicional antes da geração do pulso de resposta parcial. Como mostrado na Fig. 7.18, a codificação diferencial é uma etapa muito simples que modifica a relação entre o código de linha e os bits de mensagem. A codificação diferencial gera uma nova sequência binária

$$p_k = I_k \oplus p_{k-1} \quad \text{módulo 2}$$

supondo que o estado inicial do pré-codificador seja $p_0 = 0$ ou $p_0 = 1$. A saída do pré-codificador é aplicada à entrada de um codificador de linha polar e gera

$$a_k = 2p_k - 1$$

Devido à sinalização duobinária $b_k = a_k + a_{k-1}$ e ao gerador de pulso com ISI zero, as amostras do sinal recebido $y(t)$ sem ruído se tornam

$$\begin{aligned} y(kT_b) &= b_k = a_k + a_{k-1} \\ &= 2(p_k + p_{k-1}) - 2 \\ &= 2(p_{k-1} \oplus I_k + p_{k-1} - 1) \\ &= \begin{cases} 2(1 - I_k) & p_{k-1} = 1 \\ 2(I_k - 1) & p_{k-1} = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (7.44)$$

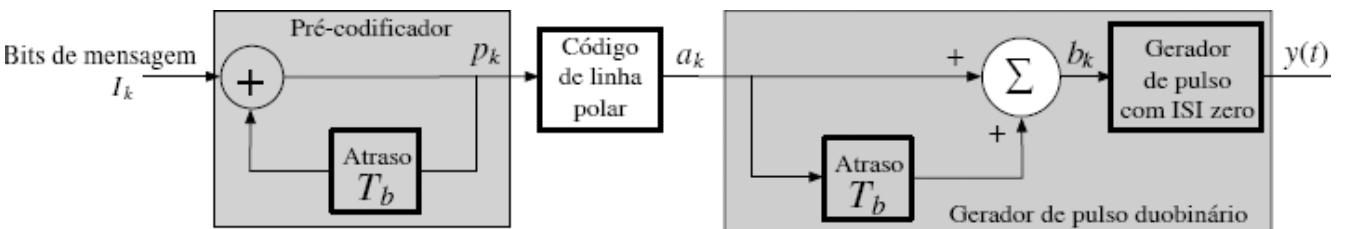


Figura 7.18

Sinalização duobinária com codificação diferencial.

A partir da Eq. (7.44), podemos resumir a relação direta entre os bits de mensagem e os valores de amostras como

$$y(kT_b) = \begin{cases} 0 & I_k = 1 \\ \pm 2 & I_k = 0 \end{cases} \quad (7.45)$$

Essa relação funciona como uma base para um algoritmo de detecção símbolo a símbolo. Em poucas palavras, o algoritmo de decisão se baseia na amostra corrente $y(kT_b)$; quando não há ruído, $y(kT_b) = b_k$ e a decisão do receptor é

$$I_k = \frac{2 - |y(kT_b)|}{2} \quad (7.46)$$

Portanto, a incorporação da codificação diferencial à sinalização duobinária não apenas simplifica a regra de decisão, mas também torna a decisão independente do dígito anterior e elimina a propagação de erro. Na Tabela 7.2, o exemplo da Tabela 7.1 é recalculado com a codificação diferencial. A relação de decodificação da Eq. (7.45) fica clara nesse exemplo.

Tabela 7.2

Sinalização duobinária com codificação diferencial

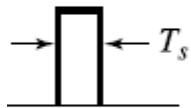
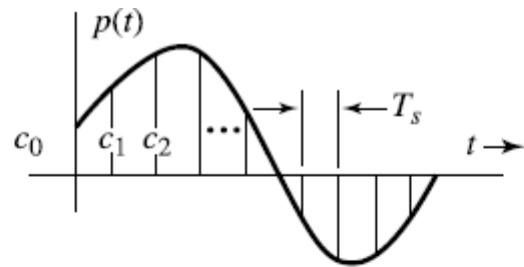
Tempo k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
I_k	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1
p_k	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0
a_k	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1
b_k	0	0	-2	0	0	-2	-2	-2	0	2	0	0	0	0
Bits detectados	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1

A codificação diferencial definida para símbolos de informação binária pode ser convenientemente generalizada para símbolos não binários. Quando os símbolos de informação I_k são M -ários, a única modificação a ser feita no bloco de codificação diferencial é a substituição de “módulo 2” por “módulo M ”. De modo similar, outra sinalização de resposta parcial generalizada, como a duobinária modificada, também está sujeita ao problema de propagação de erro na detecção. Um tipo adequado de codificação diferencial pode ser adotado para evitar a propagação de erro.

7.3.7 Geração de Pulses

Um pulso $p(t)$ que satisfaça um critério de Nyquist pode ser gerado como a resposta ao impulso unitário de um filtro com função de transferência $P(f)$. Isso nem sempre é fácil. Um método melhor consiste em gerar a forma de onda diretamente, com o uso de um filtro transversal (linha de retardo com derivação) discutido a seguir. O pulso $p(t)$ a ser gerado é amostrado com um intervalo de amostragem T_s suficientemente pequeno (Fig. 7.19a), e os ganhos da derivação do filtro são ajustados proporcionalmente aos valores amostrados em sequência, como indicado na Fig. 7.19b. Quando um pulso retangular estreito, de largura T_s (intervalo de amostragem), é aplicado à entrada do filtro transversal, a saída será uma aproximação em degrau de $p(t)$. Essa saída, ao ser aplicada a um filtro passa-baixas, é suavizada. A aproximação pode ser melhorada com a redução do intervalo de amostragem T_s .

Vale ressaltar, mais uma vez, que os pulsos que chegam à entrada do detector no receptor devem atender o desejado critério de Nyquist. Portanto, os pulsos transmitidos devem ser formatados de modo que, após passagem pelo canal, sejam recebidos no formato (de Nyquist) desejado. Na prática, no entanto, não é necessário que pulsos sejam rigidamente formatados no transmissor. A formatação final pode ser efetuada por um equalizador no receptor, como discutido mais adiante (Seção 7.5).



(a)

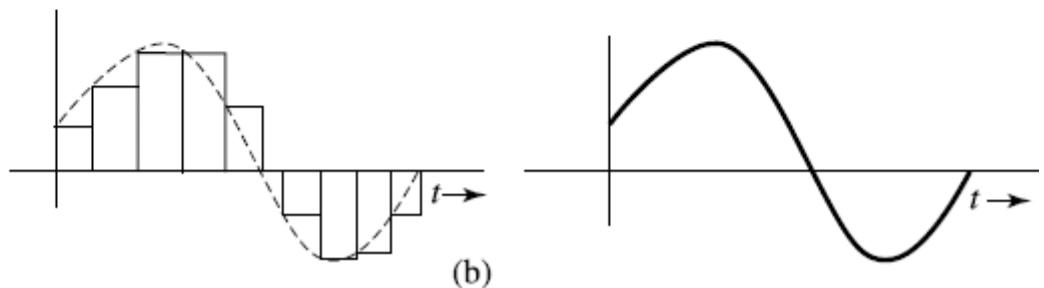
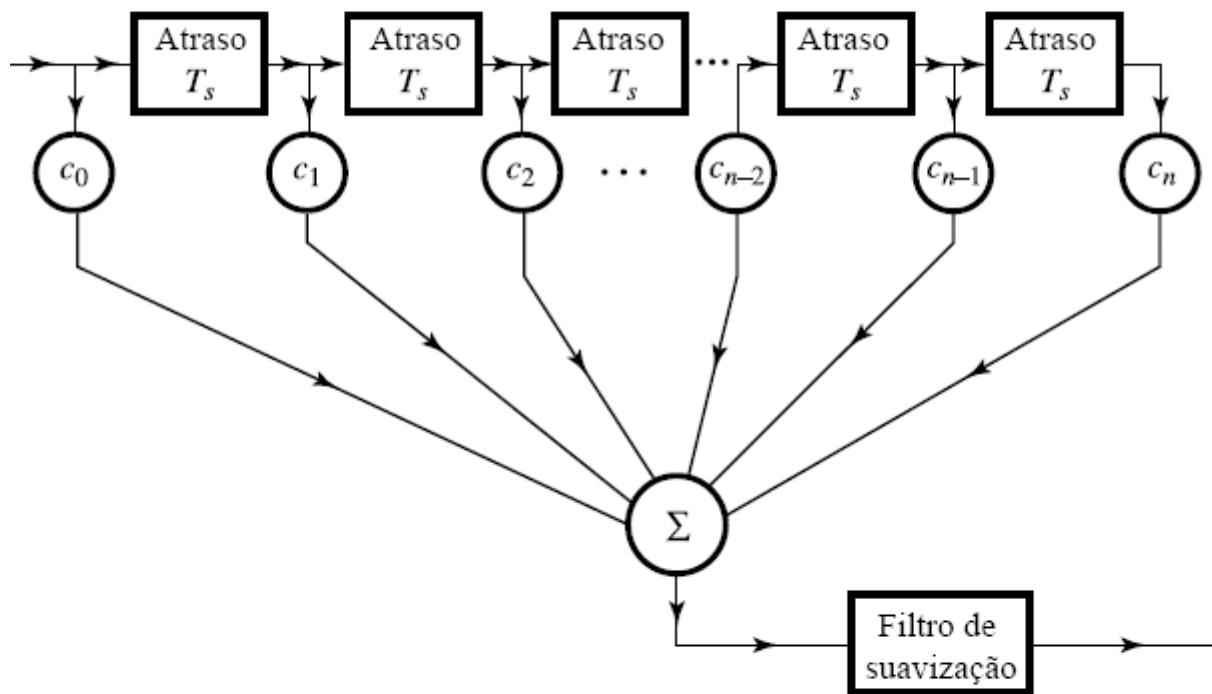


Figura 7.19
Geração de pulso por filtro transversal.

7.4 EMBARALHAMENTO (SCRAMBLING) DE DADOS

Em geral, um embaralhador tende aumentar o caráter aleatório de dados através da remoção de sequências de **1s** ou **0s**. O embaralhamento pode ser útil na extração da temporização, por remover longas sequências de **0s** de dados binários. Contudo, embaralhadores são usados principalmente para evitar acesso não autorizado aos dados, sendo otimizados para esse fim. Essa otimização pode resultar na geração de uma longa sequência de zeros nos dados. A rede digital deve ser capaz de tratar de tais longas sequências de zeros com o emprego de técnicas de substituição discutidas na Seção 7.2.

A Fig. 7.20 mostra típicos embaralhador e desembaralhador. O embaralhador consiste em um registrador de deslocamento com realimentação (*feedback shift register*), e o correspondente desembaralhador tem um registrador de deslocamento com antecipação (*feedforward shift register*), como indicado na Fig. 7.20. Cada estágio do registrador de deslocamento atrasa um bit em uma unidade. Para analisar o embaralhador e o correspondente desembaralhador, consideremos uma sequência de saída T do embaralhador (Fig. 7.20a). Se S for a sequência de entrada do embaralhador,

$$S \oplus D^3T \oplus D^5T = T \quad (7.47)$$

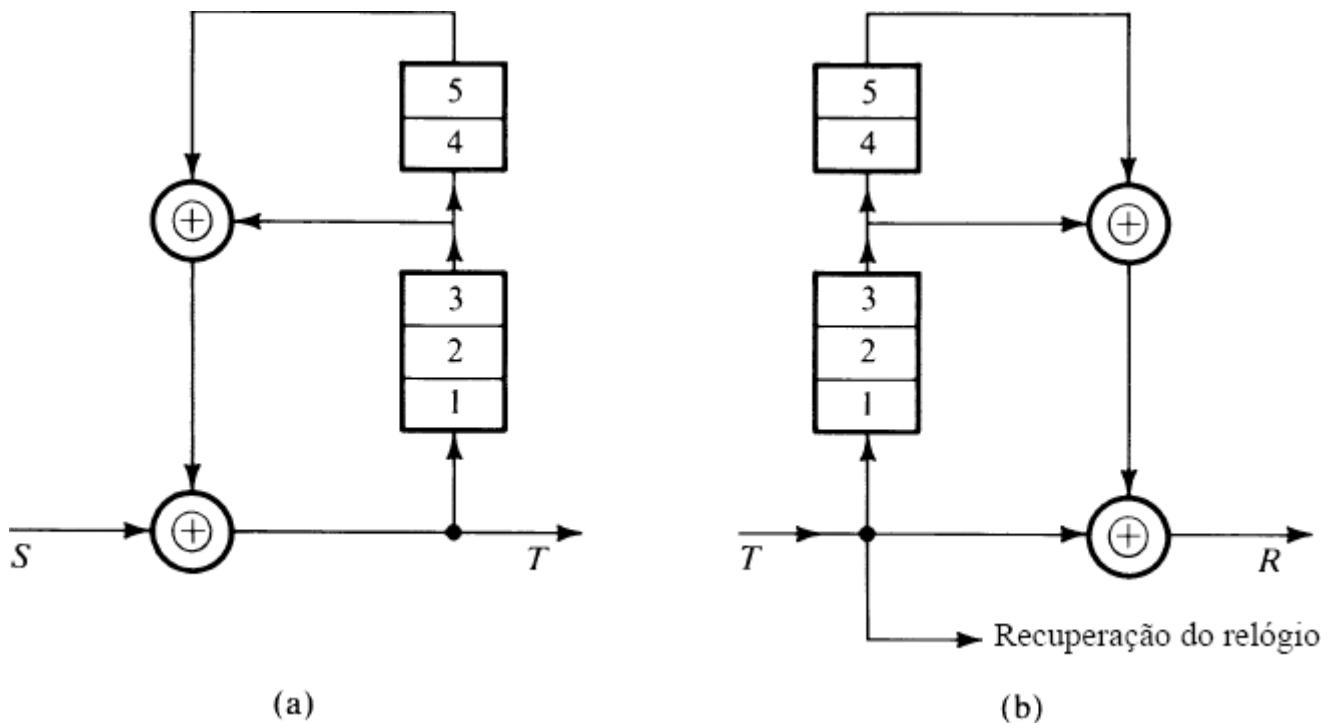


Figura 7.20

(a) Embaralhador. (b) Desembaralhador.

em que D representa o operador de atraso; ou seja, $D^n T$ é a sequência T atrasada por n unidades. Agora, recordando que a soma em módulo 2, de qualquer sequência, com ela própria produz uma sequência toda de 0s. Somando $(D^3 \oplus D^5)$ aos dois lados da Eq. (7.47), obtemos,

$$\begin{aligned} S &= T \oplus (D^3 \oplus D^5)T \\ &= [1 \oplus (D^3 \oplus D^5)]T \\ &= (1 \oplus F)T \end{aligned} \quad (7.48)$$

em que $F = D^3 \oplus D^5$.

Para projetar o desembaralhador no receptor, iniciamos com T , a sequência recebida no desembaralhador. Da Eq. (7.48), temos

$$T \oplus FT = T \oplus (D^3 \oplus D^5)T = S$$

Essa equação, na qual regeneramos a sequência de entrada S a partir da sequência recebida T , é prontamente implementada pelo desembaralhador mostrado na Fig. 7.20b.

Reparemos que um erro de detecção isolado na sequência recebida T afetará três bits de saída em R . Logo, o embaralhamento tem a desvantagem de causar múltiplos erros para um único erro de bit recebido.

Exemplo 7.2 A sequência de dados **101010100000111** é alimentada ao embaralhador na Fig. 7.20a. Determinemos a saída T do embaralhador, admitindo que o conteúdo inicial dos registradores seja zero.

Da Fig. 7.20a, observamos que, inicialmente, $T = S$, a sequência entra no registrador e sai como $(D^3 \oplus D^5)S = FS$ pela rota de realimentação. Essa nova sequência FS entra novamente no registrador e retorna como F^2S , e assim por diante. Portanto,

$$\begin{aligned} T &= S \oplus FS \oplus F^2S \oplus F^3S \oplus \dots \\ &= (1 \oplus F \oplus F^2 \oplus F^3 \oplus \dots)S \end{aligned} \tag{7.49}$$

Reconhecendo

$$F = D^3 \oplus D^5$$

temos

$$F^2 = (D^3 \oplus D^5)(D^3 \oplus D^5) = D^6 \oplus D^{10} \oplus D^8 \oplus D^8$$

Como a soma em módulo 2 de qualquer sequência com ela própria é zero, $D^8 \oplus D^8 = 0$ e

$$F^2 = D^6 \oplus D^{10}$$

Do mesmo modo,

$$F^3 = (D^6 \oplus D^{10})(D^3 \oplus D^5) = D^9 \oplus D^{11} \oplus D^{13} \oplus D^{15}$$

e assim por diante. Logo [Eq. (7.49)],

$$T = (1 \oplus D^3 \oplus D^5 \oplus D^6 \oplus D^9 \oplus D^{10} \oplus D^{11} \oplus D^{12} \oplus D^{13} \oplus D^{15} \dots)S$$

Como D^nS é simplesmente a sequência S atrasada em n bits, vários termos na equação anterior correspondem às seguintes sequências:

$$S = \mathbf{101010100000111}$$

$$D^3S = \mathbf{00010101010000111}$$

$$D^5S = \mathbf{00000101010100000111}$$

$$D^6S = \mathbf{000000101010100000111}$$

$$D^9S = \mathbf{000000000101010100000111}$$

$$D^{10}S = \mathbf{0000000000101010100000111}$$

$$D^{11}S = \mathbf{00000000000101010100000111}$$

$$D^{12}S = \mathbf{00000000000010101010100000111}$$

$$D^{13}S = \mathbf{000000000000010101010100000111}$$

$$D^{15}S = \underline{\mathbf{00000000000000101010100000111}}$$

$$T = \mathbf{101110001101001}$$

Notemos que a sequência de entrada contém a sequência periódica **10101010...**, assim como uma longa sequência de **0s**. A saída do embaralhador remove a componente periódica, assim como a longa sequência de **0s**. A sequência de entrada tem 15 dígitos. A saída do embaralhador é mostrada somente até o 15º dígito, pois todos os outros dígitos além do 15º dependem dos dígitos de entrada além do 15º, que não foram dados.

O leitor pode comprovar que a saída do desembaralhador é, de fato, S , se a sequência T anterior for aplicada à sua entrada.

7.5 RECEPTORES DIGITAIS E REPETIDORES REGENERATIVOS

Basicamente, um receptor ou repetidor regenerativo executa três funções: (1) reformata pulsos recebidos por meio de um equalizador, (2) extrai informação de temporização necessária para amostrar os pulsos recebidos nos instantes ótimos, e (3) decide que símbolo foi detectado, com base em amostras de pulsos. O repetidor mostrado na Fig. 7.21 consiste em um receptor mais um “regenerador”. Um receptor completo pode incluir ainda a provisão para separar potência dc e sinais ac. Isso é normalmente feito por acoplamento ac dos sinais por transformador, e desviando dc do transformador para o circuito de alimentação de potência.*

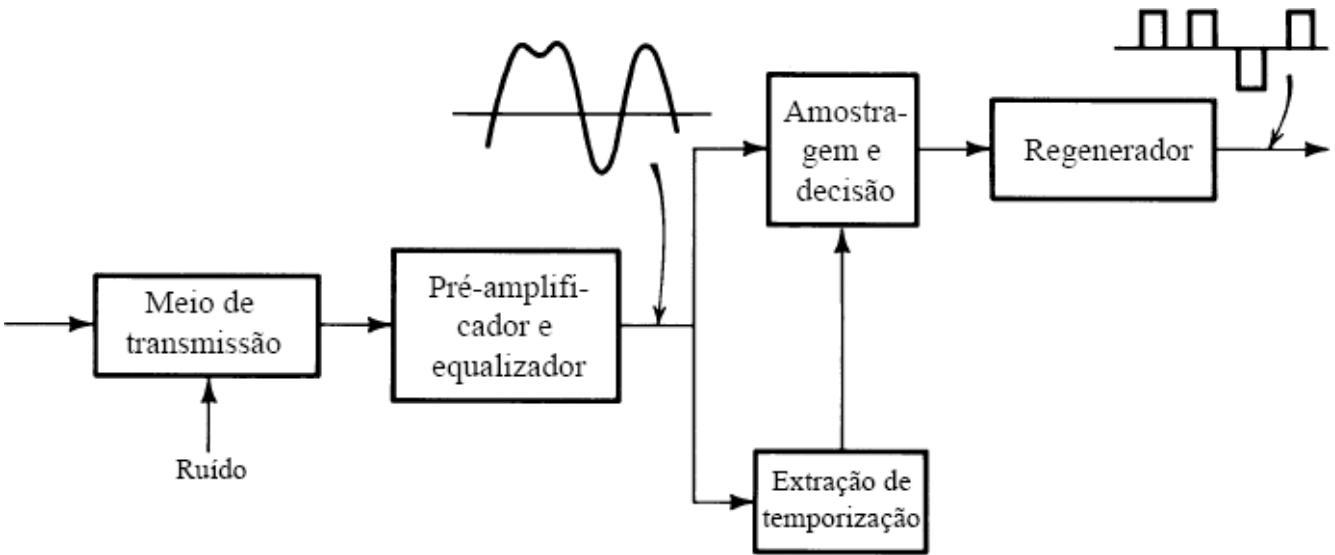


Figura 7.21
Repetidor regenerador.

7.5.1 Equalizadores

Um trem de pulsos é atenuado e distorcido pelo meio de transmissão. A atenuação pode ser compensada pelo pré-amplificador, enquanto a distorção é compensada pelo equalizador. A distorção de canal tem a forma de dispersão, causada pela atenuação de certas *componentes em frequências críticas* do trem de pulsos de dados. Teoricamente, um equalizador deve ter uma característica de frequência igual ao inverso da característica do meio de transmissão. Isso restaurará as componentes em frequências críticas e eliminará a dispersão dos pulsos. Lamentavelmente, isso também realça o ruído de canal recebido, pois amplifica as componentes desse nas frequências críticas. Esse fenômeno indesejável é conhecido como *amplificação de ruído*.

Para sinais digitais, no entanto, a equalização completa não é necessária, pois o detector precisa tomar decisões relativamente simples – como decidir se o pulso é positivo ou negativo (ou se o pulso está presente ou ausente). Portanto, considerável dispersão de pulsos pode ser tolerada. Dispersão de pulsos resulta em ISI e, por conseguinte, em aumento no erro de detecção. O aumento de ruído resultante da equalização (que amplifica as frequências altas) também aumenta a probabilidade de erro de detecção. Por essa razão, o projeto de um equalizador ótimo envolve um inevitável equilíbrio entre redução de ISI e redução de ruído de canal. Uma escolha acertada das características de equalização é uma questão central em todos os sistemas de comunicação digital bem projetados.⁶

Equalizador com Forçamento a Zero

A eliminação ou minimização da ISI (interferência) entre pulsos vizinhos para todo t não é, de fato, necessária. Basta eliminar ou minimizar a interferência entre pulsos vizinhos em seus respectivos *instantes de amostragem*, pois a decisão do receptor é baseada somente em valores de amostras. Esse tipo de equalização (abrandada) pode ser feito com equalizadores que usem a estrutura de filtro transversal discutida anteriormente. Ao contrário de filtros tradicionais, equalizadores a filtros transversais são facilmente ajustáveis para compensar efeitos de canais diferentes ou que variem lentamente no tempo. O objetivo de projeto é forçar que o pulso de saída do equalizador tenha ISI zero nos instantes de amostragem (tomada de decisão). Em outras palavras, os pulsos de saída do equalizador satisfazem o critério de Nyquist ou o de ISI controlada. O atraso temporal T entre derivações sucessivas é escolhido como T_b , o intervalo entre pulsos.

Inicialmente, tomemos os ganhos das derivações $c_0 = 1$ e $c_k = 0$, para todos os valores de k , no filtro transversal na Fig. 7.22a. Com isso, a saída do filtro será igual à entrada atrasada por NT_b . Para um pulso $p_r(t)$ (Fig. 7.22b) na entrada do filtro transversal com essa especificação de derivação, a saída do filtro $p_o(t)$ será exatamente $p_r(t - NT_b)$, ou seja, $p_r(t)$ atrasado por NT_b . Esse atraso não tem efeito prático em nosso sistema de comunicação e não é relevante para nossa discussão. Assim, por conveniência,

ignoraremos esse atraso. Isso significa que $p_r(t)$ na Fig. 7.22b também representa a saída do filtro $p_o(t)$ para essa configuração de derivações ($c_0 = 1$ e $c_k = 0$, $k \neq 0$). Exigimos que esse pulso satisfaça o critério de Nyquist ou o critério de ISI controlada, como for o caso. Da Fig. 7.22b, vemos que as amplitudes de pulso a_1 , a_{-1} , e a_2 em T_b , $-T_b$ e $2T_b$, respectivamente, não são desprezíveis. Ajustando os ganhos das derivações (c_k), geramos pulsos deslocados adicionais de amplitudes apropriadas que forçarão o resultante pulso de saída a ter os valores desejados em $t = 0, \pm T_b, \pm 2T_b, \dots$

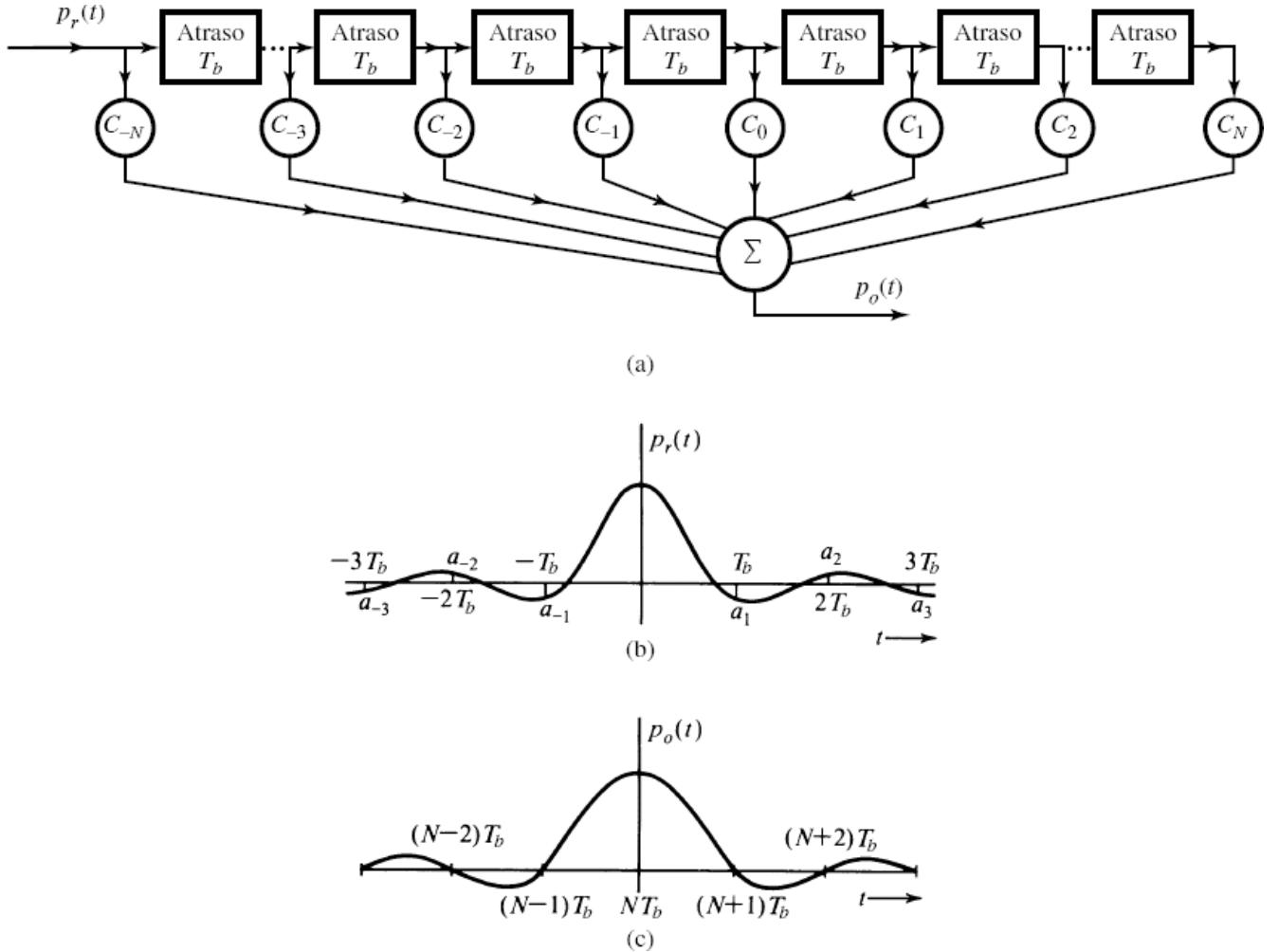


Figura 7.22

Análise de equalizador com forçamento a zero.

A saída $p_o(t)$ (Fig. 7.22c) é a soma de pulsos da forma $c_k p_r(t - kT_b)$ (ignorando o atraso NT_b). Assim,

$$p_o(t) = \sum_{n=-N}^N c_n p_r(t - nT_b) \quad (7.50)$$

As amostras de $p_o(t)$ em $t = kT_b$ são

$$p_o(kT_b) = \sum_{n=-N}^N c_n p_r(kT_b - nT_b) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (7.51a)$$

Usando uma notação mais conveniente $p_r[k]$ para denotar $p_r(kT_b)$, e $p_o[k]$ para denotar $p_o(kT_b)$, a Eq. (7.51a) pode ser expressa como

$$p_o[k] = \sum_{n=-N}^N c_n p_r[k - n] \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (7.51b)$$

O primeiro critério de Nyquist requer amostras $p_o[k] = 0$ para $k \neq 0$ e $p_o[k] = 1$ para $k = 0$. Substituindo esses valores na Eq. (7.51b), obtemos um conjunto de infinitas equações simultâneas em termos de $2N + 1$ variáveis. Obviamente, a solução dessas equações não é possível. Contudo, se especificarmos os valores de $p_o[k]$ somente em $2N + 1$ pontos como

$$p_o[k] = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N \end{cases} \quad (7.52)$$

existirá uma única solução. Isso assegura que um pulso terá interferência zero nos instantes de amostragem de N pulsos anteriores e N pulsos posteriores. Como as amplitudes dos pulsos decaem rapidamente, em geral, interferência além do N -ésimo pulso não é significativa para $N > 2$. A substituição da condição (7.52) na Eq. (7.51b) produz um conjunto de $2N + 1$ equações simultâneas para $2N + 1$ incógnitas. Essas $2N + 1$ equações podem ser reescritas em forma matricial como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}_o} = \underbrace{\begin{bmatrix} p_r[0] & p_r[-1] & \cdots & p_r[-2N+1] & p_r[-2N] \\ p_r[1] & p_r[0] & \cdots & p_r[-2N+2] & p_r[-2N+1] \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_r[2N-1] & p_r[2N-2] & \ddots & p_r[0] & p_r[-1] \\ p_r[2N] & p_r[2N-1] & \cdots & p_r[1] & p_r[0] \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}_r} \underbrace{\begin{bmatrix} c_{-N} \\ c_{-N+1} \\ \vdots \\ c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \\ c_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} \quad (7.53)$$

Nessa expressão compacta, a matriz \mathbf{P}_r de ordem $(2N + 1) \times (2N + 1)$ tem entradas idênticas ao longo de todas as diagonais. Esse tipo de matriz é conhecida como matriz de Toeplitz e é comumente encontrado na descrição de relações convolutivas. Uma matriz de Toeplitz é totalmente determinada pelas primeiras linha e coluna, tem algumas propriedades interessantes e admite algoritmos mais simples para o cálculo de sua inversa (por exemplo, os métodos de Trench⁷). Os ganhos c_k das derivações podem ser obtidos da solução dessa equação, com o cálculo da inversa da matriz \mathbf{P}_r ,

$$\mathbf{c} = \mathbf{P}_r^{-1} \mathbf{p}_o$$

Exemplo 7.3 Para o pulso recebido $p_r(t)$ na Fig. 7.22b, sejam

$$\begin{aligned} p_r[0] &= 1 \\ p_r[1] &= -0,3 & p_r[2] &= 0,1 \\ p_r[-1] &= -0,2 & p_r[-2] &= 0,05 \end{aligned}$$

Projetemos um equalizador de três derivações ($N = 1$).

Substituindo os valores anteriores na Eq. (7.53), obtemos

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0,2 & 0,05 \\ -0,3 & 1 & -0,2 \\ 0,1 & -0,3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} \quad (7.54)$$

A solução desse conjunto de equações produz $c_{-1} = 0,210$, $c_0 = 1,13$ e $c_1 = 0,318$. Essa configuração de derivações assegura $p_0[0] = 1$ e $p_0[-1] = p_0[1] = 0$. O gráfico da saída ideal $p_o(t)$ é mostrado na Fig. 7.22c.

Vale notar que o equalizador determinado da Eq. (7.53) pode garantir somente a condição de ISI zero da Eq. (7.52). Em outras palavras, a ISI é zero somente para $k = 0, \pm 1, \dots, \pm N$. Na verdade, para outros valores de k , é muito comum que as amostras $p_o(kT_b) \neq 0$, indicando ISI residual. Por exemplo, consideremos o problema de equalizador do Exemplo 7.3. As amostras do pulso equalizado têm ISI zero para $k = -1, 0, 1$. Contudo, de

$$p_o[k] = \sum_{n=-N}^N c_n p_r[k-n]$$

podemos ver que os parâmetros do equalizado de três derivações com forçamento a zero resultarão em

$$\begin{aligned} p_o[-3] &= 0,010 & p_o[-2] &= 0,0145 & p_o[2] &= 0,0176 \\ p_o[3] &= 0,0318 & p_o[k] &= 0 & k &= 0, \pm 1, \pm 4, \dots \end{aligned}$$

Fica claro, portanto, que nem toda ISI foi removida, devido a essas quatro amostras não nulas do pulso de saída do equalizador. Na verdade, como temos apenas $2N + 1$ ($N = 1$ no Exemplo 7.3) parâmetros no equalizador, é impossível forçar $p_o[k] = 0$ para todo k , a menos que $N = \infty$. Isso significa que não poderemos projetar um equalizador prático com um número finito de derivações que alcance ISI zero ideal. Todavia, quando N é suficientemente grande, os valores de amostras não nulas residuais serão pequenos, indicando que a maior parte da ISI foi suprimida.

Método do Mínimo Erro Quadrático Médio

Na prática, uma abordagem alternativa consiste em minimizar a diferença quadrática média entre a resposta de saída do equalizador $p_o[k]$ e a resposta desejada com ISI zero. Isso é conhecido como método do mínimo erro quadrático médio (MMSE – *minimum mean square error*) para o projeto de equalizadores com filtros transversais. O método MMSE não tenta forçar que as amostras de pulsos sejam zero em $2N$ pontos, mas busca minimizar o erro quadrático médio considerando um conjunto de amostras de saída. O método envolve mais equações simultâneas. Assim, devemos determinar os valores de derivações do equalizador para minimizar o erro quadrático (médio) em uma janela maior $[-K, K]$:

$$\text{MSE} \triangleq \frac{1}{2K+1} \sum_{k=-K}^K (p_o[k] - \delta[k])^2$$

em que usamos uma função conhecida como delta de Kronecker

$$\delta[k] = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

A solução desse problema de minimização é convenientemente representada em forma matricial como

$$\mathbf{c} = \mathbf{P}_r^\dagger \mathbf{p}_o$$

em que \mathbf{P}_r^\dagger representa a pseudo inversa de Moore-Penrose da matriz não quadrada \mathbf{P}_r , de ordem $(2K + 1) \times (2N + 1)$. O projeto MMSE leva a um equalizador mais robusto para a redução de ISI.

Equalização Adaptativa e Outros Equalizadores Mais Genéricos

A estrutura do filtro equalizador descrita aqui tem a forma mais simples. Sistemas de comunicação digital práticos, muitas vezes, aplicam estruturas equalizadoras mais sofisticadas e algoritmos de equalização mais avançados.⁶ Devido às necessárias ferramentas probabilísticas, adiaremos a discussão desse tema especializado de equalização para o Capítulo 12.

7.5.2 Extração de Temporização

O sinal digital recebido deve ser amostrado em instantes precisos. Isso requer um sinal de relógio no receptor em sincronismo com o sinal do relógio no transmissor (**sincronização de símbolo ou de bit**), atrasado pela resposta do canal. Há três métodos genéricos de sincronização:

1. Derivação de um padrão primário ou secundário (por exemplo, transmissor e receptor escravizados à fonte mestra de temporização).

2. Transmissão de um sinal de sincronização separado (relógio piloto).

3. Autossincronização, em que a informação de temporização é extraída do próprio sinal recebido.

Devido ao alto custo, o primeiro método é adequado a grandes volumes de dados e sistemas de comunicação de alta velocidade. O segundo método, em que parte da capacidade do canal é usada para transmitir a informação de temporização, é adequado a situações em que a capacidade disponível é grande em comparação com a taxa de dados, e quando há disponibilidade de potência de transmissão. O terceiro é um método muito eficiente de extração de temporização ou recuperação de relógio, pois a temporização é extraída do próprio sinal de mensagem recebido. Um exemplo do método de autossincronização será discutido a seguir.

Já mostramos que um sinal digital, como o sinal on-off (Fig. 7.3a), contém uma componente discreta da frequência do relógio (Fig. 7.3c). Portanto, quando o sinal binário on-off é aplicado a um circuito ressonante sintonizado na frequência do relógio, o sinal de saída é o desejado sinal do relógio.

Nem todos os sinais binários contêm uma componente discreta da frequência do relógio. Por exemplo, um sinal bipolar não tem componente discreta de qualquer frequência [Eq. (7.21) ou Fig. 7.9]. Nesses casos, a extração da temporização pode ser possível com o uso de um *dispositivo não linear* para gerar um tom de frequência relacionado ao relógio de temporização. No caso bipolar, por exemplo, uma simples retificação converte um sinal bipolar em um sinal on-off, que pode ser prontamente utilizado para extraer a temporização.

Pequenos desvios aleatórios dos pulsos recebidos em relação à localização ideal (conhecidos como **incerteza temporal**) sempre estão presentes, mesmo nos mais sofisticados sistemas. Embora a fonte emita pulsos nos instantes corretos, operações subsequentes durante a transmissão (como deslocamento Doppler) tendem a forçar os pulsos a se desviarem de suas posições originais. O Q do circuito sintonizado usado para extração da temporização deve ser grande o bastante para prover adequada supressão da incerteza temporal, tornando-a suficientemente pequena para atender os requisitos de estabilidade. Durante os intervalos em que não há pulsos na entrada, a oscilação continua, devido ao efeito de volante (*flywheel effect*) do circuito de alto Q . Não obstante, a saída do oscilador é sensível ao padrão de entrada; por exemplo, durante uma longa sequência de 1s, a amplitude de saída aumentará, ao passo que durante uma longa sequência de 0s, diminuirá. Isso introduz incerteza adicional ao sinal de temporização extraído.

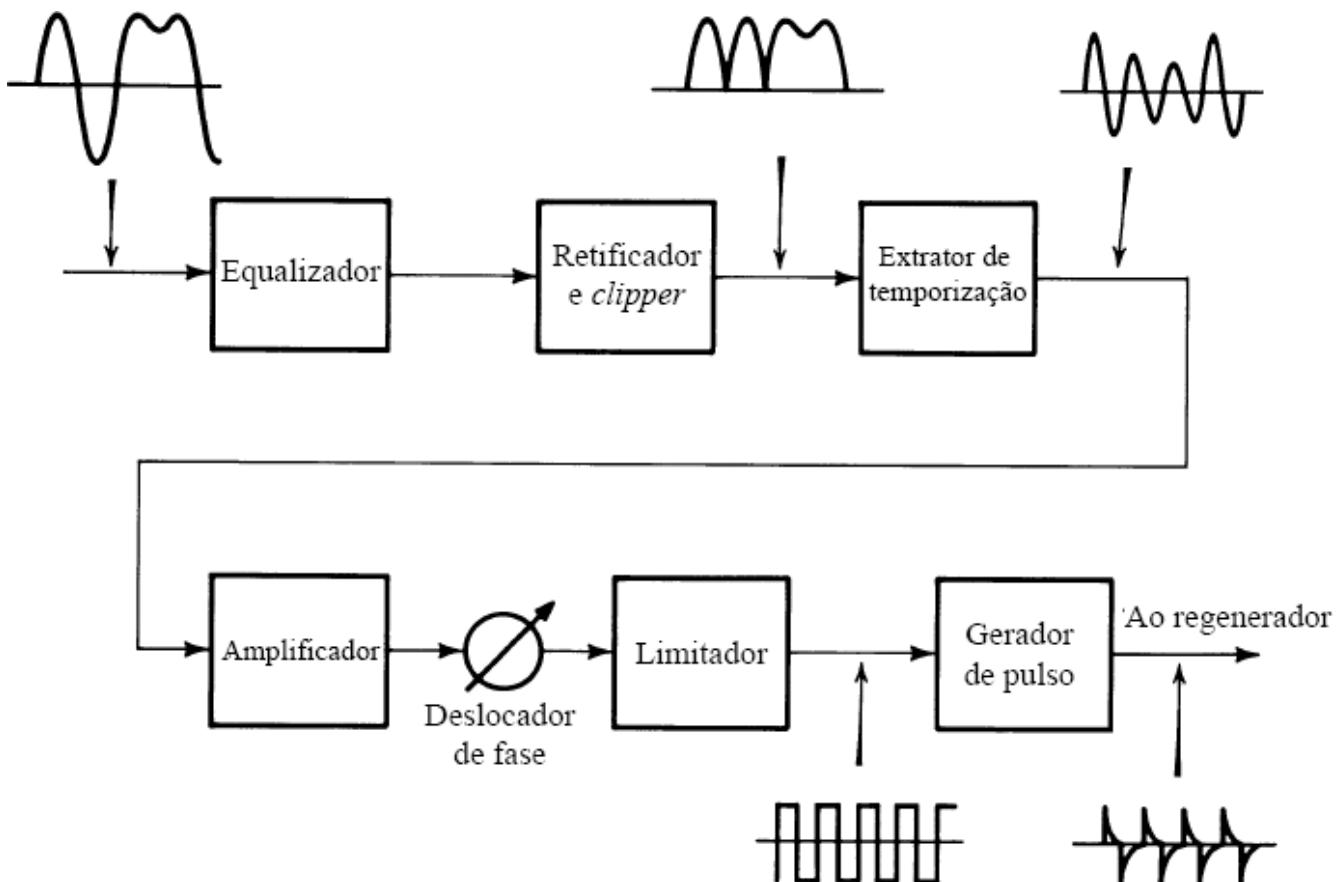


Figura 7.23

Extração de temporização.

O completo extrator de temporização e gerador de pulso de temporização para o caso bipolar são ilustrados na Fig. 7.23. A saída senoidal do oscilador (extração de temporização) é aplicada ao deslocador de fase, que ajusta a fase do sinal de

temporização de modo que os pulsos de temporização ocorram nos pontos máximos. Esse método é usado para recuperar o relógio em cada um dos regeneradores em um sistema PCM. As incertezas introduzidas por sucessivos regeneradores se somam e, após um certo número de regeneradores, se torna necessário o uso de um regenerador com um sistema mais sofisticado de recuperação do relógio, como um sistema de *malha de captura de fase* (PLL – *phase locked loop*).

Incerteza temporal

Variações nas posições dos pulsos ou instantes de amostragem causam incerteza temporal (*timing jitter*). Isso advém de várias causas, algumas das quais dependem do padrão de pulsos sendo transmitido, enquanto outras não. As primeiras são cumulativas ao longo da cadeia de repetidores regenerativos, pois todos os repetidores são afetados da mesma forma. As outras formas de incerteza são aleatórias de regenerador para regenerador e, portanto, tende a haver um cancelamento parcial de efeitos mútuos ao longo de um enlace de grande distância. Formas aleatórias de incerteza temporal são causadas por ruído, interferências e desvio de sintonia de circuitos de relógio. Incerteza dependente de padrão resulta de desvios de relógio, conversão amplitude-fase em circuitos de relógio e ISI, que altera a posição do pico do sinal de entrada segundo o padrão. É possível mostrar que o valor rms da incerteza ao longo de uma cadeia de N repetidores aumenta com \sqrt{N} .

O acúmulo de incerteza em um enlace digital pode ser reduzido com o emprego de armazenagem elástica (*buffer*) e temporização da sequência de dígitos sob o controle de uma malha de captura de fase altamente estável. Em um longo enlace digital, se faz necessária a redução de incertezas a cada 300 km, para manter a incerteza máxima dentro de limites razoáveis.

7.5.3 Detecção de Erro

Uma vez que a transmissão tenha passado pelo equalizador, a detecção pode ser feita no detector que amostra o sinal recebido com base no relógio fornecido pelo extrator de temporização. O sinal recebido no detector consiste no trem de pulsos equalizados mais um ruído de canal aleatório. O ruído pode causar erro na detecção de pulso. Consideremos, por exemplo, o caso da transmissão polar que usa um pulso básico $p(t)$ (Fig. 7.24a). Esse pulso tem uma amplitude de pico A_p . Um típico trem de pulsos recebidos é mostrado na Fig. 7.24b. Os pulsos são amostrados em seus valores de pico. Se o ruído estivesse ausente, a amostra do pulso positivo (correspondendo a **1**) seria A_p e a do pulso negativo (correspondendo a **0**), $-A_p$ ^{*}. Devido ao ruído, os valores dessas amostras passariam a $\pm A_p + n$, em que n é a amplitude do ruído aleatório (Fig. 7.24b). Dada a simetria da situação, o limiar de detecção é zero; ou seja, se o valor da amostra de pulso for positivo, o dígito é detectado como **1**; se o valor da amostra for negativo, o dígito é detectado como **0**.

A decisão do detector em declarar **1** ou **0** poderia ser tomada prontamente a partir da amostra de pulso, não fosse o valor do ruído n aleatório, o que significa que seu valor exato é imprevisível. O valor do ruído pode ser grande ou pequeno, assim como pode ser negativo ou positivo. É possível que **1** seja transmitido e que, no instante de amostragem, n tenha um valor negativo grande. Isso tornaria o valor da amostra $A_p + n$ pequeno ou, até mesmo, negativo. Se, por outro lado, um **0** for transmitido e n tiver um valor positivo grande no instante de amostragem, o valor da amostra $-A_p + n$ pode ser positivo e o dígito, detectado como **1**. Isso fica claro na Fig. 7.24b.

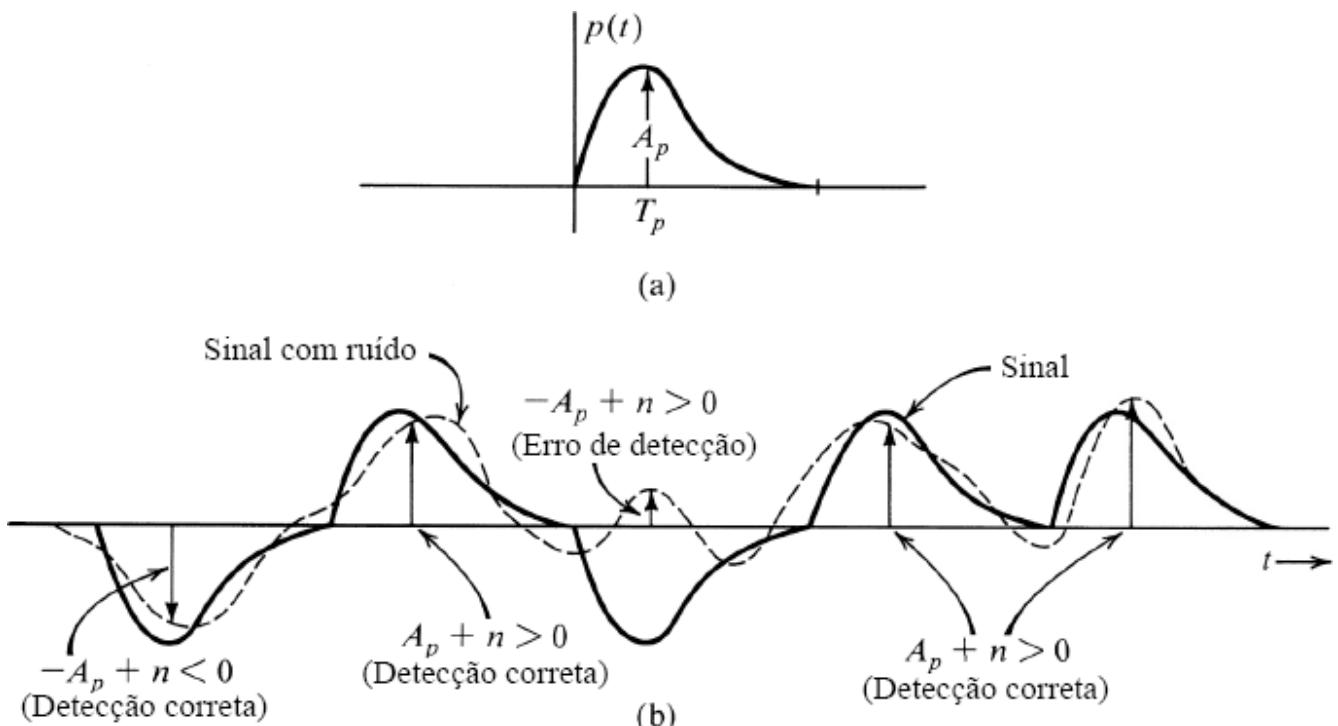


Figura 7.24

Probabilidade de erro na detecção por limiar.

O desempenho de um sistema de comunicação digital é, em geral, especificado pelo número médio de erros de detecção. Por exemplo, se dois telefones celulares (receptores) no mesmo local tentam detectar a mesma transmissão da estação radiobase, o telefone celular com menor erros de detecção será o melhor receptor. É provável que esse telefone tenha menor perda de chamadas e menos dificuldade para receber uma fala clara. Contudo, como o ruído é aleatório, algumas vezes um telefone celular pode ser melhor; outras, o segundo telefone celular pode ter menos erros. A real medida do desempenho do receptor é a razão média entre o número de erros e o número total de dados transmitidos. Assim, a comparação razoável de desempenho é a probabilidade de ocorrência de erro de detecção, ou **probabilidade de erro de detecção**.

Como a análise precisa e o cálculo dessa probabilidade de erro requer conhecimento e ferramentas da teoria da probabilidade, adiaremos a análise de erros até introdução de probabilidade no Capítulo 8. Mais adiante, no Capítulo 10, discutiremos em detalhe a análise de probabilidade de erro de diferentes sistemas de comunicação digital, considerando diversos modelos de ruído, assim como projetos de sistemas para combater ruídos variados. Por exemplo, o ruído gaussiano pode caracterizar o ruído aleatório de canal proveniente de efeitos térmicos e interferência (*cross talk*) intrassistema. Detectores ótimos podem ser projetados para minimizar a probabilidade de erro devido a ruído gaussiano. Contudo, transientes de comutação, descargas elétricas, chaveamento de carga em linhas de alta tensão, e outros eventos singulares causam pulsos de ruído de alta intensidade e curta duração, que contaminam os pares de cabo que transportam sinais digitais. Esses pulsos, denominados coletivamente **ruído impulsional**, são de difícil combate e constituem a prevalecente fonte de erros em ambientes externos aos sistemas digitais. Erros, portanto, praticamente jamais ocorrem de modo isolado, mas em rajadas de até centenas de cada vez. Para corrigir uma rajada de erros, lançamos mão de **códigos especiais para corrigir erros em rajadas**, descritos no Capítulo 14.

7.6 DIAGRAMAS DE OLHO: UMA FERRAMENTA ÚTIL

Na seção anterior, estudamos o efeito de ruído e ISI de canal na detecção de transmissões digitais. Descrevemos, também, o projeto de equalizadores para compensar distorção de canal e explicamos o processo de extração de temporização. A seguir, apresentamos uma prática ferramenta de engenharia conhecida como **diagrama de olho**. O diagrama de olho é de fácil geração, e aplicado por engenheiros a sinais recebidos, pois facilita o exame visual da gravidade da ISI, da precisão da extração de temporização, da imunidade ao ruído e de outros fatores importantes.

Para gerar um diagrama de olho, precisamos apenas de um osciloscópio básico. Dado um sinal em banda base na saída do canal

$$y(t) = \sum a_k p(t - kT_b)$$

o mesmo pode ser aplicado à entrada vertical do osciloscópio. A base de tempo do osciloscópio é disparada à mesma taxa $1/T_b$ de chegada de pulsos, produzindo uma varredura que dura exatamente T_b segundos, a duração de um símbolo de dado transmitido a_k . O osciloscópio mostra a superposição de diversos traços de comprimento T_b da saída do canal $y(t)$. O que aparece no osciloscópio são simplesmente cortes do sinal de entrada (entrada vertical), feitos a cada T_b e superpostos uns aos outros. O padrão resultante no osciloscópio tem a aparência de um olho humano, daí a denominação diagrama de olho. De modo mais genérico, também podemos aplicar uma varredura temporal com duração de m intervalos de símbolos ou mT_b . O padrão no osciloscópio passa, então, a ser composto por cortes do sinal de entrada (entrada vertical), feitos a cada mT_b e superpostos uns aos outros. O osciloscópio exibirá um diagrama de olho com largura mT_b e tem o formato de m olhos em uma linha horizontal.

A seguir, apresentamos um exemplo. Consideremos a transmissão de um sinal binário por pulsos polares NRZ (Fig. 7.25a). Os correspondentes diagramas de olho são mostrados na Fig. 7.25b para bases de dados T_b e $2T_b$, respectivamente. Nesse exemplo, o canal tem largura de banda infinita para passar o pulso NRZ e não há distorção de canal. Assim, obtemos diagramas de olho com olho(s) totalmente aberto(s). Podemos, ainda, considerar uma saída de canal com o mesmo código de linha polar, mas um formato diferente de pulsos (RZ), como mostrado na Fig. 7.25c. Os resultantes diagramas de olho são mostrados na Fig. 7.25d. Nesse caso, o olho está bem aberto apenas no ponto médio do intervalo de duração de cada pulso. Com extração de temporização adequada, para melhor imunidade ao ruído no ponto de decisão (Seção 7.5.3), o receptor deve amostrar o sinal recebido exatamente no ponto médio, em que o olho está totalmente aberto. O ponto médio do olho representa o melhor instante de amostragem para cada pulso, pois a amplitude é máxima, sem interferência de pulsos vizinhos (ISI zero).

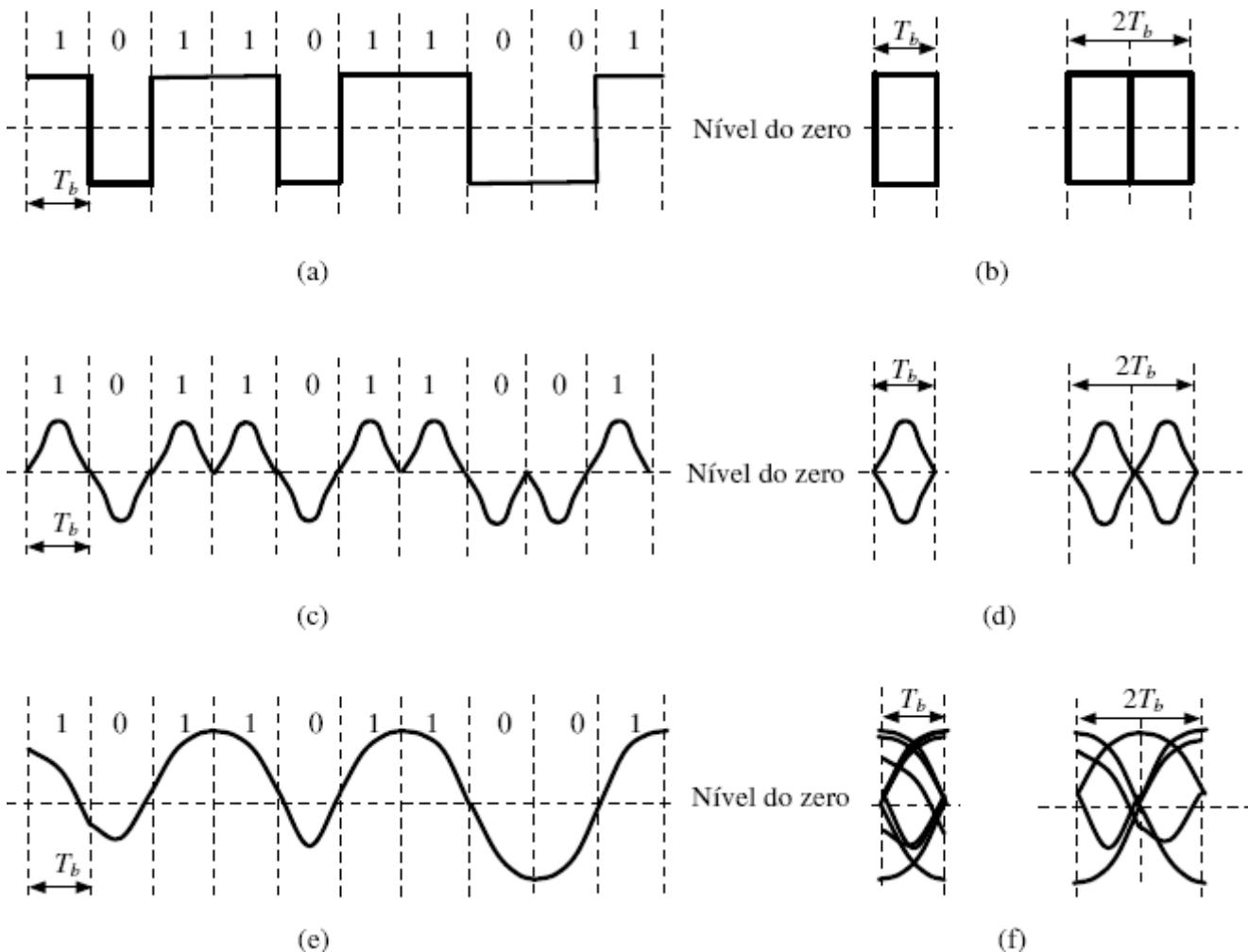


Figura 7.25
Diagrama de olho.

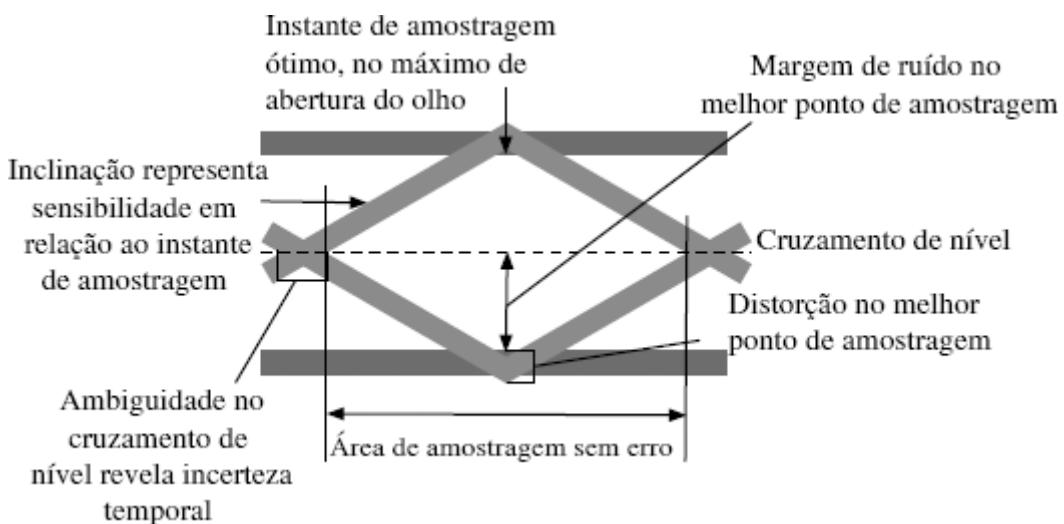


Figura 7.26
Leitura de um diagrama de olho.

Consideremos, agora, um canal com distorção ou com largura de banda finita, ou ambos. Após passagem pelo canal não ideal, o sinal polar NRZ da Fig. 7.25a se torna a forma da onda na Fig. 7.25e. Os pulsos de sinal recebidos não são mais retangulares, mas arredondados, distorcidos e alargados. Os diagramas de olho não são mais totalmente abertos, como mostrado na Fig. 7.25f. Nesse caso, a ISI não é zero. Portanto, em cada traço, os valores do pulso nos respectivos instantes de amostragem se desviaram dos valores ideais por um grau variável, causando um borrão e resultando em um padrão de olho parcialmente fechado.

Na presença de ruído de canal, o olho tenderá a se fechar em todos os casos. Ruído fraco causa um fechamento proporcionalmente pequeno do olho. O limiar de decisão, em relação ao símbolo (1 ou 0) transmitido, é o ponto médio do olho.* Observemos que, para ISI zero, o sistema pode tolerar ruído de até metade da abertura vertical do olho. Qualquer valor de ruído

maior que esse limite pode causar erro de decisão caso seu sinal seja oposto ao do símbolo de dado. Como a ISI reduz a abertura do olho, também reduz a tolerância ao ruído. O diagrama de olho é usado, ainda, para determinar especificação ótima de derivações do equalizador. Derivações são ajustadas para obter o máximo de aberturas vertical e horizontal de olho.

O diagrama de olho é uma ferramenta muito eficaz para análise de sinais em experimentos em tempo real. Não apenas é de operação simples, mas fornece informação rica e importante sobre a qualidade e suscetibilidade do sinal digital recebido. Do típico diagrama de olho ilustrado na Fig. 7.26, podemos extrair diversas medidas importantes relativas à qualidade do sinal:

- *Ponto de máxima abertura*. O grau de abertura no instante de amostragem e decisão indica a quantidade de ruído que o detector pode tolerar sem cometer um erro. Essa quantidade é conhecida como *margem de ruído*. O instante de máxima abertura do olho indica o instante ótimo de amostragem e decisão.
- *Sensibilidade à incerteza temporal*. A largura do olho indica o intervalo de tempo em que uma decisão correta pode ser feita, sendo desejável ter um olho com máxima abertura horizontal. Se o instante de tomada de decisão se desviar do instante em que o olho tem máxima abertura vertical, a margem de tolerância ao ruído fica reduzida. Isso causa maior probabilidade de erro na detecção de pulsos. A inclinação do olho mostra quanto rápido a tolerância ao ruído é reduzida e, em consequência, a sensibilidade da tolerância da decisão ao ruído em relação a variações no instante de amostragem. A inclinação demonstra efeitos da incerteza temporal.
- *Incerteza (temporal) no cruzamento de nível*. Tipicamente, receptores práticos extraem informação de temporização sobre a taxa de pulso e sobre o relógio de amostragem a partir do cruzamento de nível (zero) da forma de onda do sinal recebido. A variação do cruzamento de nível pode ser vista da largura das esquinas do olho. Essa medida fornece informação sobre a incerteza temporal a que o receptor estará sujeito.

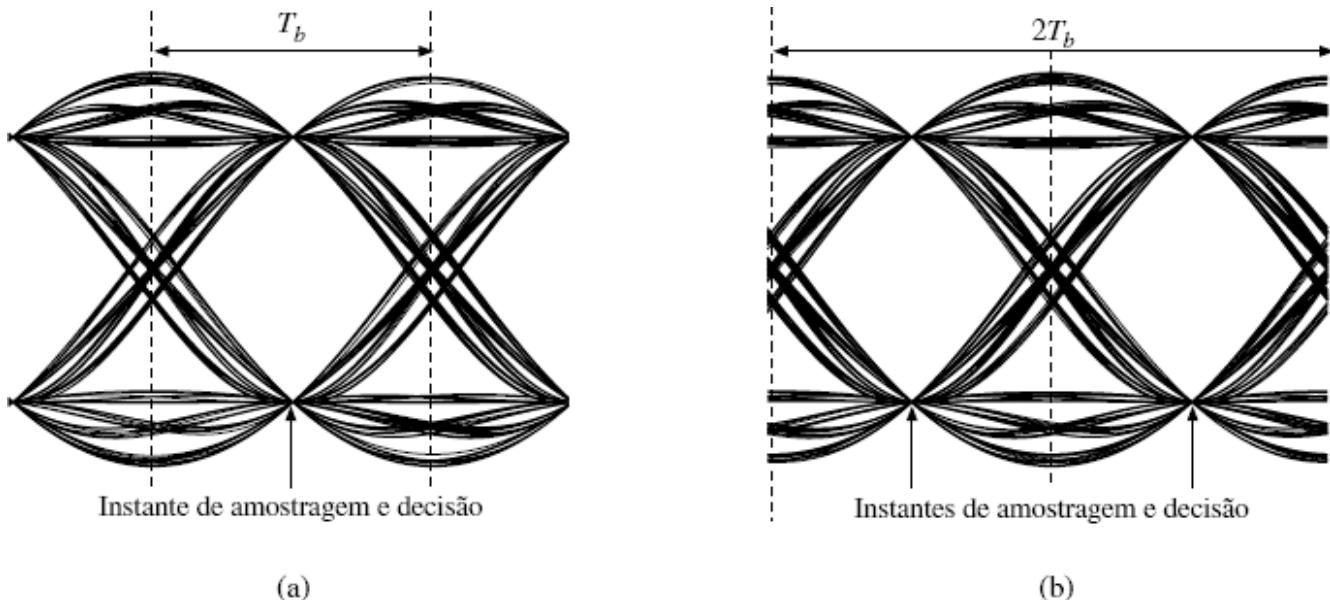


Figura 7.27

Diagramas de olho de um sistema de sinalização polar usando um pulso cosseno levantado, com fator de decaimento $r = 0,5$; (a) largura de $2T_b$, 2 períodos de símbolo, e deslocamento temporal $T_b/2$; (b) sem deslocamento temporal.

Por fim, vejamos um exemplo prático de diagrama de olho para uma forma de onda de sinalização polar. Para esse caso, selecionemos um pulso com decaimento cossoidal que satisfaça o primeiro critério de Nyquist para ISI zero. Escolhamos o fator de decaimento como $r = 0,5$. O diagrama de olho é mostrado na Fig. 7.27, com uma base de tempo $2T_b$. Na verdade, para um mesmo sinal, o diagrama de olho pode adquirir aparências distintas, dependendo dos valores dos deslocamentos temporais aplicados (pontos iniciais). A Fig. 7.27a ilustra o diagrama de olho dessa forma de onda de sinalização polar para um deslocamento temporal $T_b/2$, enquanto a Fig. 7.27b mostra o diagrama de olho sem a aplicação de deslocamento temporal. Uma comparação dos dois diagramas deixa claro que os mesmos guardam uma simples relação de deslocamento circular horizontal. Observando a máxima abertura de olho, vemos que esse sinal em banda base tem ISI zero, confirmando a principal característica do pulso cosseno levantado. Como o primeiro critério de Nyquist não impõe nenhuma condição ao cruzamento do zero do pulso, o diagrama de olho indica a probabilidade de ocorrência de incerteza temporal.

Independentemente do código de linha usado, modulações binárias em banda base têm algo em comum: todas transmitem um bit de informação no intervalo de T_b segundos, ou seja, a uma taxa de $1/T_b$ bits por segundo. Caso o transmissor deseje enviar seus bits a uma taxa muito mais elevada, T_b deve ser reduzido. Por exemplo, para aumentar a taxa de bits por um fator M , T_b deve ser reduzido pelo mesmo fator; contudo, um alto preço será pago em termos de largura de banda. Como demonstramos na Fig. 7.9, a largura de banda de uma modulação em banda base é proporcional à taxa de pulsos $1/T_b$. A redução de T_b por um fator M certamente aumentará a necessária largura de banda de canal pelo mesmo fator M . Afortunadamente, a redução de T_b não é a única forma de aumentar a taxa de dados. Uma solução muito prática consiste em permitir que cada pulso transporte múltiplos bits. A seguir, explicaremos esse conceito.

Para que cada símbolo de transmissão transporte mais bits no intervalo de tempo T_b , devem existir mais de dois símbolos. Aumentando o número de símbolos para M , asseguramos que a informação transmitida por símbolo também aumenta com M . Por exemplo, quando $M = 4$ (sinalização 4-ária ou quaternária), temos quatro símbolos básicos, ou pulsos, disponíveis para comunicação (Fig. 7.28a). Uma sequência de dois dígitos binários pode ser transmitida por apenas um símbolo 4-ário, pois uma sequência de dois bits pode formar apenas quatro possíveis sequências (**11**, **10**, **01** e **00**). Como dispomos de quatro símbolos distintos, podemos alocar um deles a cada uma dessas combinações (Fig. 7.28a). Cada símbolo ocupa um intervalo de tempo T_s . Um exemplo de sinalização para uma sequência curta é dada na Fig. 7.28b e o diagrama de olho 4-ário é mostrado na Fig. 7.28c.

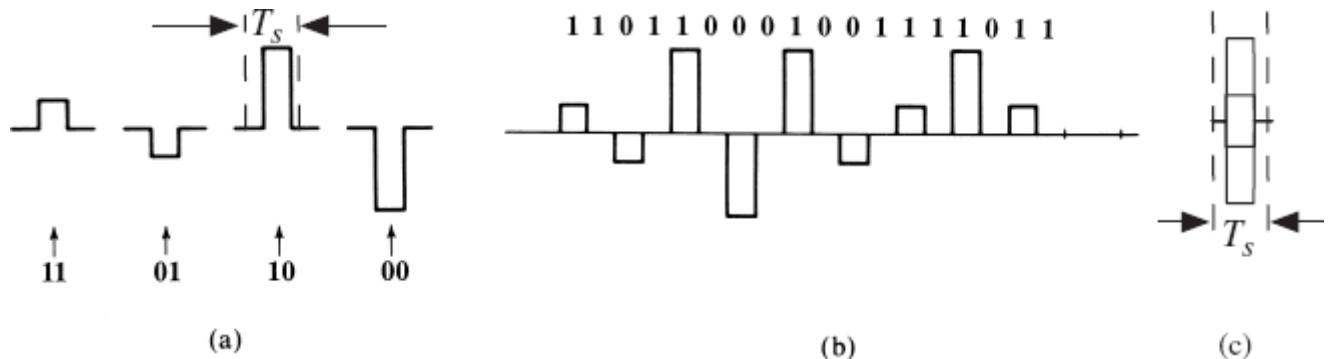


Figura 7.28

Sinalização PAM 4-ária: (a) quatro símbolos RZ; (b) transmissão em banda base; (c) diagrama de olho RZ 4-ário.

Essa sinalização nos permite transmitir cada par de bits por um pulso 4-ário (Fig. 7.28b). Logo, para transmitir n bits, precisamos somente de $(n/2)$ pulsos 4-ários. Isso significa que um símbolo 4-ário pode transmitir a informação de dois dígitos binários. Além disso, como três bits formam $2 \times 2 \times 2 = 8$ combinações, um grupo de três bits pode ser transmitido por um símbolo 8-ário. De modo similar, um grupo de quatro bits podem ser transmitidos por um símbolo 16-ário. Em geral, a informação I_M transmitida por um símbolo M -ário é

$$I_M = \log_2 M \text{ bits} \quad (7.55)$$

Isso significa que podemos aumentar a taxa de transmissão de informação aumentando o valor de M .

Essa sinalização M -ária especial é conhecida como **modulação por amplitude de pulso** (PAM – *pulse amplitude modulation*), pois a informação de dados é transportada pela variação da amplitude do pulso. Vale observar que a modulação por amplitude de pulso é apenas uma das várias possibilidades de sinalização M -ária. Há um número infinito de possibilidades. Todavia, apenas algumas poucas são, de fato, eficazes no combate ao ruído e na redução de largura de banda e consumo de potência. Uma discussão mais detalhada de outros esquemas de sinalização M -ária será apresentada um pouco mais adiante, na Seção 7.9.

Na maioria dos projetos de sistemas, sempre há um preço a ser pago por ganho possível. O preço pago por PAM para aumentar a taxa de dados é o consumo de potência. À medida que M aumenta, a potência transmitida também aumenta com M . Isso se deve ao fato de que, para termos imunidade ao ruído, a mínima separação entre amplitudes de pulsos deve ser comparável à do pulso binário. Portanto, amplitudes de pulso aumentam com M (Fig. 7.28). Podemos mostrar que a potência transmitida aumenta com M^2 (Exercício 7.7-5). Assim, para aumentar a taxa de comunicação por um fator $\log_2 M$, a potência necessária aumenta com M^2 . Como a largura de banda de transmissão depende somente da taxa de pulsos, e não das amplitudes dos pulsos, a largura de banda independe de M . Para ilustrar esse ponto, usemos o exemplo de análise de PSD a seguir.

Exemplo 7.4 Determinemos a PSD da sinalização quaternária (4-ária) em banda base dada na Fig. 7.28, considerando que os bits de mensagem **1** e **0** têm igual probabilidade de ocorrência.

O código de linha 4-ário tem quatro símbolos distintos, correspondentes às quatro combinações de dois bits de mensagem. Um possível mapeamento é

$$a_k = \begin{cases} -3 & \text{bits de mensagem 00} \\ -1 & \text{bits de mensagem 01} \\ +1 & \text{bits de mensagem 10} \\ +3 & \text{bits de mensagem 11} \end{cases} \quad (7.56)$$

Portanto, todos os quatro valores de a_k têm igual probabilidade de ocorrência, cada um com uma chance de 1 em 4. Recordemos que

$$R_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_k a_k^2$$

No somatório, $1/4$ de a_k será ± 1 e ± 3 . Logo,

$$R_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left[\frac{N}{4}(-3)^2 + \frac{N}{4}(-1)^2 + \frac{N}{4}(1)^2 + \frac{N}{4}(3)^2 \right] = 5$$

Para $n > 0$, devemos determinar

$$R_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_k a_k a_{k+n}$$

Para calcular esse valor médio, construamos uma tabela com todos os possíveis valores do produto $a_k a_{k+n}$:

Possíveis valores de $a_k a_{k+n}$

a_k	-3	1	+1	+3	
a_{k+n}	-3	9	3	-3	-9
	-1	3	1	-1	-3
	+1	-3	-1	1	3
	+3	-9	-3	3	9

Da listagem anterior de todos os possíveis produtos $a_k a_{k+n}$, vemos que cada produto no somatório $a_k a_{k+n}$ pode assumir qualquer um dos seguintes seis valores: $\pm 1, \pm 3, \pm 9$. Observamos que $(\pm 1, \pm 9)$ têm igual probabilidade de ocorrência (1 em 8). Por sua vez, ± 3 também têm igual probabilidade de ocorrência (1 em 4). Assim, obtemos

$$R_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left[\frac{N}{8}(-9) + \frac{N}{8}(+9) + \frac{N}{8}(-1) + \frac{N}{8}(+1) + \frac{N}{4}(-3) + \frac{N}{4}(+3) \right] = 0$$

Logo,

$$S_x(f) = \frac{5}{T_s} \implies S_y(f) = \frac{5}{T_s} |P(f)|^2$$

Portanto, o código de linha M -ário gera a mesma forma de PSD que a sinalização polar binária. A única diferença é que utiliza 5 vezes a potência de sinal original.

Embora a maioria da rede terrestre de telefonia digital empregue codificação binária, a porção da malha de assinante da rede digital de serviços integrados (ISDN) usa o código quaternário, 2B1Q, semelhante à Fig. 7.28a. São usados pulsos NRZ para transmitir 160 kbit/s de dados a uma taxa de **baud** (taxa de pulsos ou de símbolos) de 80 kbit/s. Dos vários códigos de linha examinados pelo comitê de padronização de ANSI, 2B1Q é o que provê maior redução da taxa de baud na planta de cabos locais, ambiente ruidoso e sujeito a interferências.

Formatação de Pulso e Diagramas de Olho em PAM: Neste caso, podemos usar pulsos que satisfaçam o critério de Nyquist, pois tais pulsos têm zero ISI nos pontos de amostragem e, portanto, suas amplitudes podem ser detectadas corretamente se forem amostradas nos centros dos pulsos. Também podemos usar ISI controlada (sinalização de resposta parcial) para sinalização *M*-ária.⁸

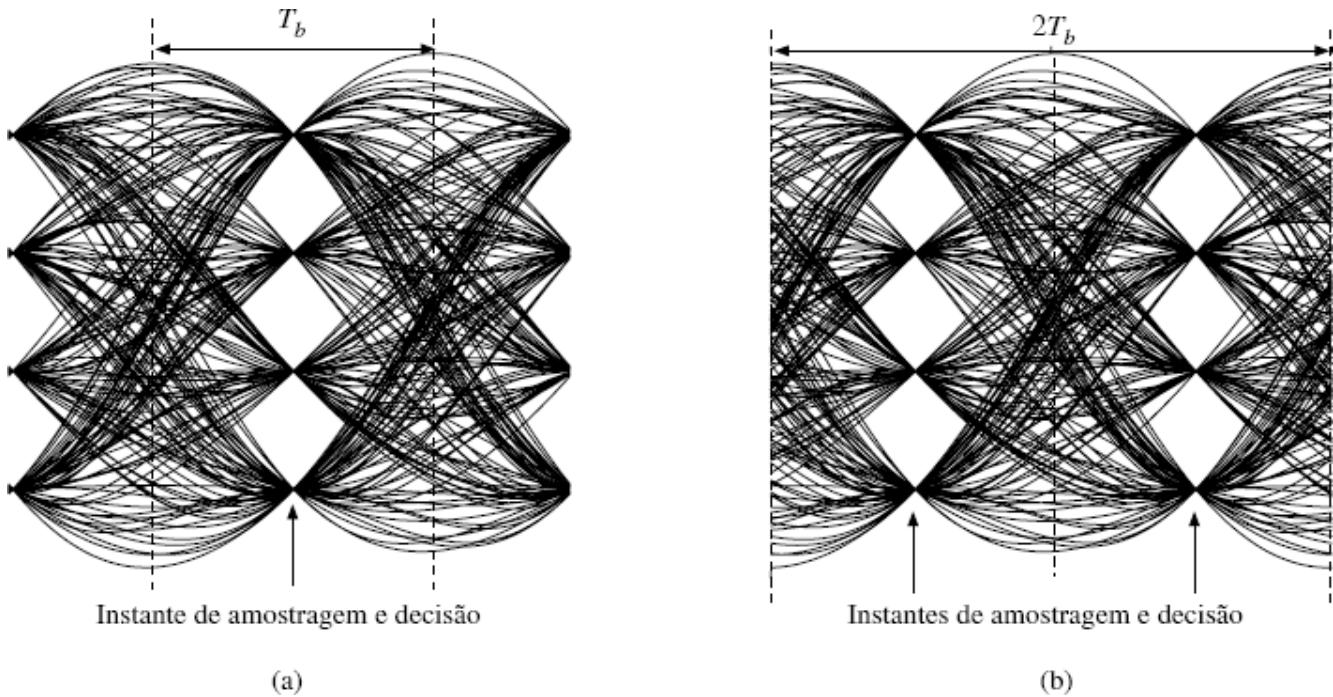


Figura 7.29

Diagramas de olho de um sistema de sinalização PAM 4-ária usando pulso cosseno levantado com fator de decaimento $r = 0,5$: (a) com dois períodos de símbolo $2T_b$ e deslocamento temporal de $T_b/2$; (b) sem deslocamento temporal.

Diagramas de olho também podem ser gerados para PAM *M*-ária usando o mesmo método empregado em modulações binárias. Devido à sinalização em múltiplos níveis, o diagrama de olho deve ter *M* níveis nos instantes de amostragem ótima, mesmo quando a ISI for zero. Aqui, geramos o exemplo prático de diagrama de olho para um sinal PAM de quatro níveis que usa o mesmo pulso cosseno levantado com fator de decaimento $r = 0,5$, como no diagrama de olho na Fig. 7.27. Os correspondentes diagramas de olho com deslocamentos temporais de $T_b/2$ e 0 são dados nas Fig. 7.29 a e b, respectivamente. Mais uma vez, nenhuma ISI é observada nos instantes de amostragem. Os diagramas de olho mostram claramente quatro valores de sinais igualmente separados, sem ISI nos pontos de amostragem ótima.

7.8 SISTEMAS DIGITAIS COM PORTADORA

Até aqui, discutimos sistemas digitais em banda base, em que sinais são transmitidos diretamente, sem nenhum deslocamento em frequência. Como sinais em banda base têm muita potência nas frequências baixas, são adequados à transmissão por um par de fios ou por um cabo coaxial. Uma boa parte da comunicação moderna é conduzida dessa forma. Contudo, sinais em banda base não podem ser transmitidos em enlaces de rádio ou de satélites, pois isso exigiria antenas demasiadamente grandes, e impraticáveis, para irradiar eficientemente o espectro de baixa frequência desses sinais. Portanto, para essas aplicações, o espectro do sinal deve ser deslocado a uma faixa de frequências altas. Um deslocamento do espectro para frequências mais altas também se faz necessário para transmitir várias mensagens simultaneamente, com compartilhamento da grande largura de banda de um meio de transmissão. Como vimos no Capítulo 4, o espectro de um sinal pode ser deslocado para uma frequência mais alta usando o sinal em banda base para modular uma senoide (portadora) de alta frequência.

Na transmissão e recepção de sinais digitais com portadora, precisamos de um modulador e de um demodulador para transmitir e receber dados. Para comunicação em duas direções (duplex), esses dois dispositivos, **modulador** e **demodulador**, são comumente empacotados em uma unidade que recebe o nome de **modem**.

7.8.1 Modulações Binárias Básicas com Portadora

Há duas formas básicas de modulação de portadora: modulação em amplitude e modulação em ângulo. Na modulação em amplitude, a amplitude da portadora é variada em proporção ao sinal modulante (ou seja, o sinal em banda base). Isso é ilustrado na Fig. 7.30. Uma portadora não modulada $\cos \omega_c t$ é mostrada na Fig. 7.30a. O sinal on-off em banda base $m(t)$ (sinal modulante) é mostrado na Fig. 7.30b. Segundo a Eq. (7.1), o sinal modulante pode ser escrito como

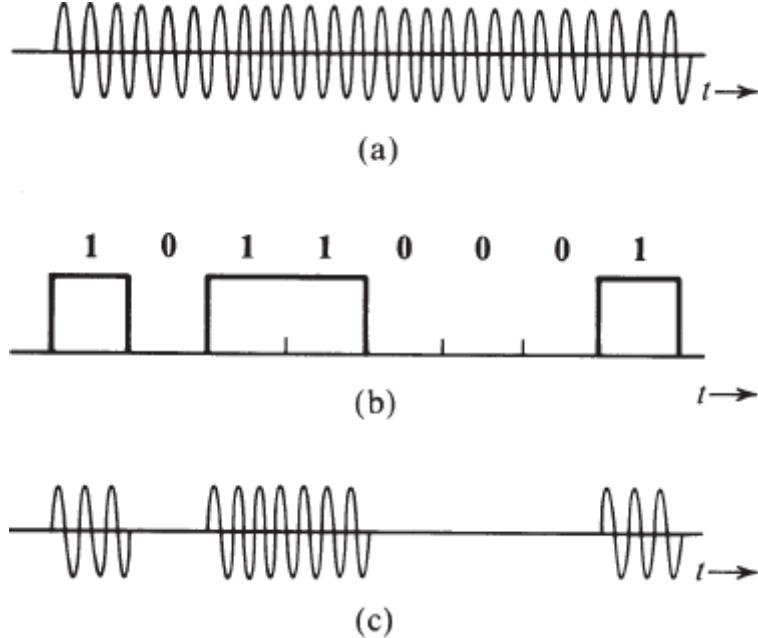


Figura 7.30

(a) Portadora $\cos \omega_c t$. (b) Sinal modulante $m(t)$. (c) ASK: sinal modulado $m(t) \cos \omega_c t$.

$$m(t) = \sum a_k p(t - kT_b), \quad \text{em que} \quad p(t) = \Pi\left(\frac{t - T_b/2}{T_b}\right)$$

O código de linha $a_k = 0, 1$ é on-off. Quando a amplitude da portadora é variada em proporção a $m(t)$, podemos escrever o sinal modulado com portadora como

$$\varphi_{\text{ASK}}(t) = m(t) \cos \omega_c t \quad (7.57)$$

que é mostrado na Fig. 7.30c. Reparemos que o sinal modulado ainda é um sinal on-off. Esse esquema de modulação para transmissão de dados binários é conhecido como **chaveamento on-off (OOK – on-off keying)** ou **modulação por chaveamento de amplitude (ASK – amplitude shift keying)**.

O sinal em banda base $m(t)$ pode, obviamente, usar um pulso $p(t)$ diferente do retangular mostrado no exemplo da Fig. 7.30. Isso gerará um sinal ASK que não tem amplitude constante durante a transmissão de 1 ($a_k = 1$).

Se o sinal em banda base $m(t)$ fosse polar (Fig. 7.31a), o correspondente sinal modulado $m(t) \cos \omega_c t$ teria a aparência ilustrada na Fig. 7.31b. Nesse caso, se $p(t)$ for o pulso básico, transmitimos 1 por um pulso $p(t) \cos \omega_c t$ e 0, por $-p(t) \cos \omega_c t = p(t) \cos(\omega_c t + \pi)$. Os dois pulsos, portanto, estão defasados de π radianos. A informação reside na fase ou no sinal do pulso. Por essa razão, esse esquema é conhecido como **chaveamento por deslocamento de fase (PSK – phase shift keying)**. Reparemos que a transmissão ainda é polar. Na verdade, assim como ASK, o sinal PSK modulado com portadora tem a mesma forma

$$\varphi_{\text{PSK}}(t) = m(t) \cos \omega_c t \quad m(t) = \sum a_k p(t - kT_b) \quad (7.58)$$

com a diferença que o código de linha é polar, $a_k = \pm 1$.

Quando dados são transmitidos por meio da variação da frequência, temos o caso de **chaveamento por deslocamento de frequência (FSK – frequency shift keying)**, como ilustrado na Fig. 7.31c. Um 0 é transmitido por um pulso de frequência ω_{c0} e um 1, por um pulso de frequência ω_{c1} . A informação sobre o dado transmitido reside na frequência portadora. O sinal FSK pode ser visto como a soma de dois sinais ASK entrelaçados, um com frequência portadora ω_{c0} e outro com frequência portadora ω_{c1} . Podemos usar a expressão de ASK binário da Eq. (7.57) e escrever o sinal FSK como

$$\varphi_{\text{FSK}}(t) = \sum a_k p(t - kT_b) \cos \omega_{c_1} t + \sum (1 - a_k) p(t - kT_b) \cos \omega_{c_0} t$$

em que $a_k = 0, 1$ é on-off. Assim, o sinal FSK é uma superposição de dois sinais AM com diferentes frequências portadoras e amplitudes diferentes, mas complementares.

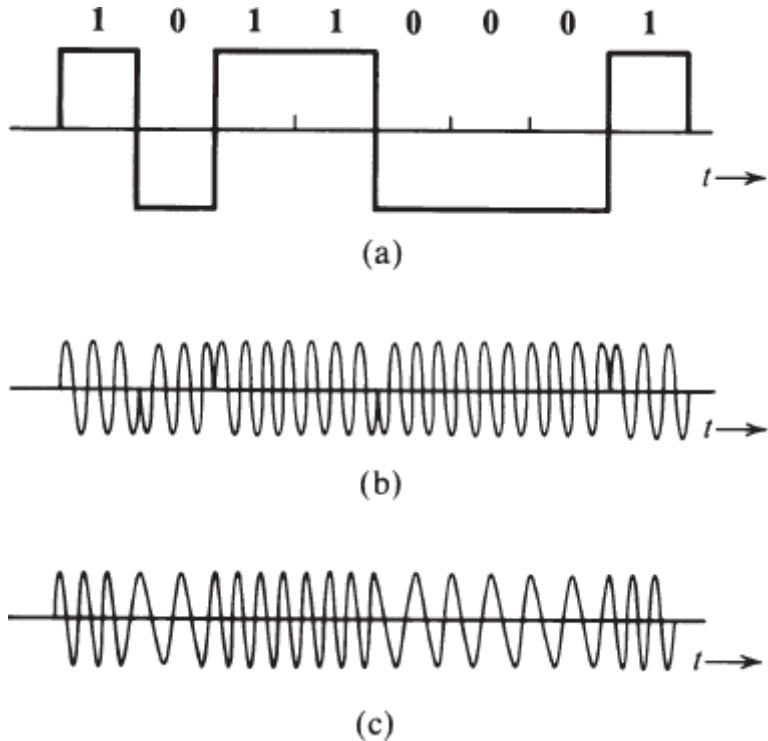


Figura 7.31

(a) Sinal modulante $m(t)$. (b) PSK: sinal modulado $m(t)\cos\omega_c t$. (c) FSK: sinal modulado.

Na prática, a ASK como um esquema on-off é comumente usado em sistemas de comunicação por fibra óptica, na forma de modulação da intensidade do laser. A PSK é comumente utilizado em sistemas de comunicação por satélite e também foi usado nos primeiros modems telefônicos (2400 e 4800 bit/s). Quanto à FSK, em 1962, a AT&T desenvolveu um dos primeiros modems para linha telefônica, chamado 103A, e usava a FSK para transmitir 300 bit/s em duas frequências, 1070 e 1270 Hz; a recepção era FSK em 2025 e 2225 Hz.

7.8.2 PSD de Modulação Digital com Portadora

Acabamos de mostrar que os esquemas de modulação binária com portadora ASK, PSK e FSK podem ser escritos na forma $m(t) \cos \omega_c t$. Para determinar a PSD dos sinais ASK, PSK e FSK, é conveniente que, primeiro, determinemos a relação entre a PSD de $m(t)$ e a PSD do sinal modulado

$$\varphi(t) = m(t) \cos \omega_c t$$

Recordemos, da Eq. (3.80), que a PSD de $\varphi(t)$ é

$$S_\varphi(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\Psi_T(f)|^2}{T}$$

em que Ψ_T é a transformada de Fourier do sinal truncado

$$\begin{aligned} \varphi_T(t) &= \varphi(t)[u(t + T/2) - u(t - T/2)] \\ &= m(t)[u(t + T/2) - u(t - T/2)] \cos \omega_c t \\ &= m_T(t) \cos \omega_c t \end{aligned} \tag{7.59}$$

Aqui, $m_T(t)$ é o sinal em banda base truncado, com transformada de Fourier $M_T(f)$. Aplicando a propriedade de translação em frequência [Eq. (3.36)], temos

$$\Psi_T(f) = \frac{1}{2} [M_T(f - f_c) + M_T(f + f_c)]$$

Por conseguinte, a PSD do sinal modulado com portadora $\varphi(t)$ é

$$S_\varphi(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \frac{|M_T(f + f_c) + M_T(f - f_c)|^2}{T}$$

Como $M(f)$ é um sinal em banda base, $M_T(f + f_c)$ e $M_T(f - f_c)$ têm sobreposição zero à medida que $T \rightarrow \infty$, desde que f_c seja maior que a largura de banda de $M(f)$. Portanto, concluímos que

$$\begin{aligned} S_\varphi(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left[\frac{|M_T(f + f_c)|^2}{T} + \frac{|M_T(f - f_c)|^2}{T} \right] \\ &= \frac{1}{4} S_M(f + f_c) + \frac{1}{4} S_M(f - f_c) \end{aligned} \quad (7.60)$$

Em outras palavras, para uma frequência portadora escolhida de modo apropriado, a modulação causa um deslocamento na PSD do sinal em banda base.

O sinal ASK na Fig. 7.30c se encaixa nesse modelo, com $m(t)$ sendo um sinal on-off (usando um pulso NRZ ou de largura completa). Portanto, a PSD do sinal ASK é igual à de um sinal on-off (Fig. 7.4b) deslocada para $\pm f_c$, como mostrado na Fig. 7.32a. Recordemos que, usando um pulso retangular de largura completa $p(t)$,

$$P\left(\frac{n}{T_b}\right) = 0 \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Nesse caso, a PSD do sinal on-off na Fig. 7.30b não tem componentes discretas, exceto em dc. Em consequência, o espectro ASK tem componentes discretas apenas em ω_c .

O sinal PSK também se encaixa nessa descrição de modulação, em que $m(t)$ é um sinal polar que usa um pulso NRZ de largura completa. Portanto, a PSD de um sinal PSK é igual à do sinal polar em banda base deslocada para $\pm \omega_c$, como mostrado na Fig. 7.32b. Reparemos que essa PSD tem a mesma forma (com diferente fator de escala) que a PSD do sinal ASK, sem suas componentes discretas.

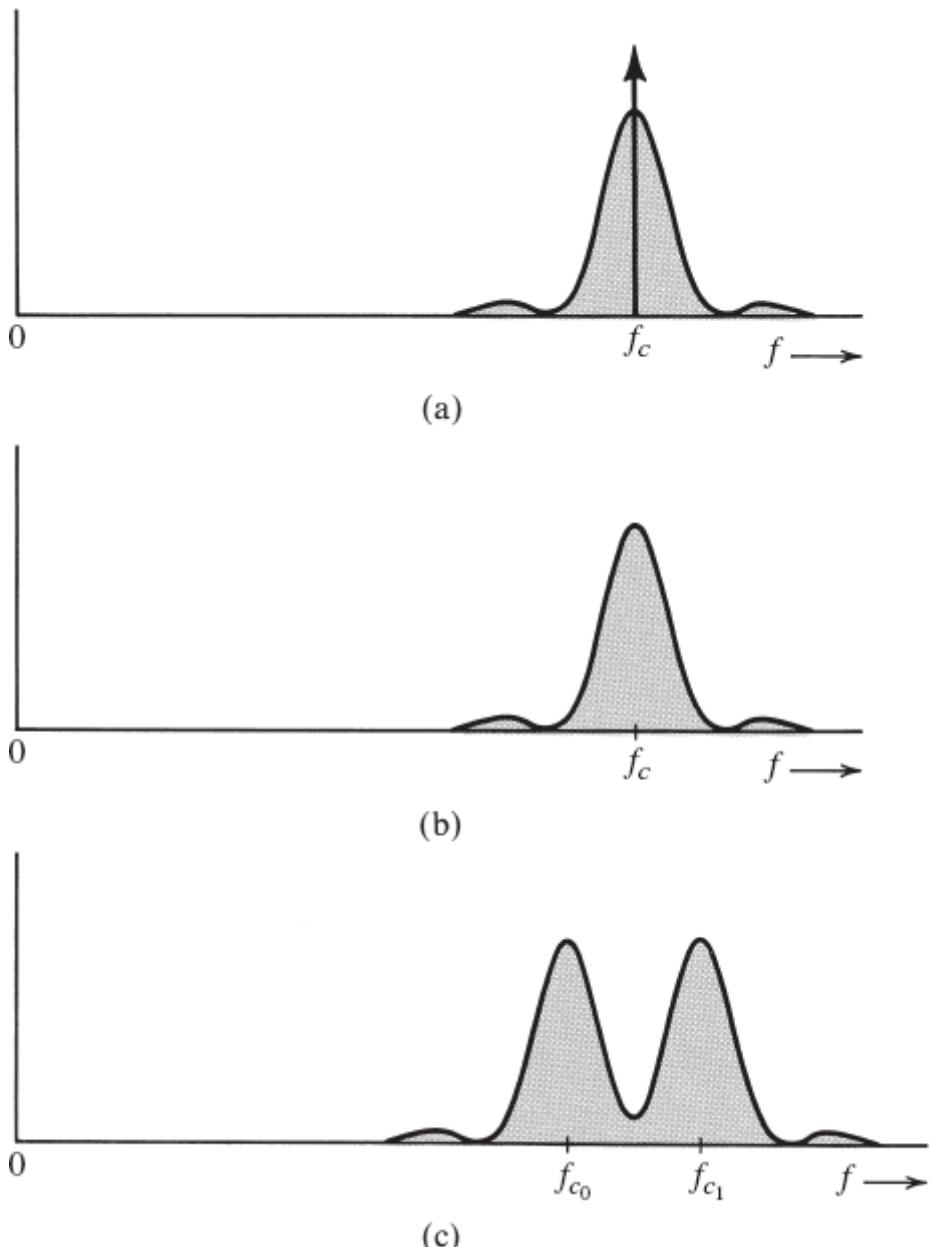


Figura 7.32
PSD de (a) ASK, (b) PSK e (c) FSK.

Por fim, mostramos que o sinal FSK pode ser visto como a soma de dois sinais ASK entrelaçados usando o pulso de largura completa. Portanto, o espectro FSK é a soma de dois espectros ASK nas frequências ω_{c_0} e ω_{c_1} , como mostrado na Fig. 7.32c. Podemos mostrar que, com escolha adequada de ω_{c_0} e ω_{c_1} , e com manutenção da continuidade de fase durante a translação em frequência, as componentes discretas podem ser eliminadas em ω_{c_0} e ω_{c_1} . Com isso, nenhuma componente discreta aparece nesse espectro. É importante ressaltar que a largura de banda de FSK é maior que às de ASK ou PSK.

Como observado anteriormente, a sinalização polar é o esquema mais eficiente do ponto de vista de potência. PSK, por ser polar, requer 3 dB de potência menor que ASK (ou FSK), para uma mesma imunidade ao ruído, ou seja, para uma mesma probabilidade de erro na detecção de pulsos.

É claro que podemos também modular o esquema bipolar ou qualquer outro discutido anteriormente. Reparemos que, na Fig. 7.30 e na Fig. 7.31, usamos pulso retangular NRZ apenas para facilitar a ilustração. Na prática, pulsos em banda base podem ser formatados especificamente para eliminar a ISI.

7.8.3 Relações entre Modulações Analógica e Digital com Portadora

Existe uma relação natural e clara entre ASK e AM, pois a mensagem de informação é diretamente refletida na variação da amplitude do sinal modulado. Devido à sua amplitude não negativa, a ASK é, em essência, um sinal AM com índice de modulação $\mu = 1$. Existe uma conexão similar entre FSK e FM. FSK é simplesmente um sinal FM com um número limitado de frequências instantâneas.

A relação entre PSK e modulação em ângulo é um pouco mais sutil. Para PSK, o sinal modulado pode ser escrito como

$$\varphi_{\text{PSK}}(t) = A \cos(\omega_c t + \theta_k) \quad kT_b \leq t < kT_b + T_b$$

Esse sinal pode, portanto, ser relacionado a PM. Contudo, um exame mais detalhado do sinal PSK revela que, devido à fase constante θ_k , sua frequência instantânea não varia. Na verdade, fazendo $a_k = A \cos \theta_k$ e $b_k = -A \sin \theta_k$, podemos reescrever o sinal PSK como

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{PSK}}(t) &= A \cos \theta_k \cos \omega_c t - A \sin \theta_k \sin \omega_c t \\ &= a_k \cos \omega_c t + b_k \sin \omega_c t \end{aligned} \quad kT_b \leq t < kT_b + T_b \quad (7.61)$$

Da Eq. (7.61), reconhecemos uma forte semelhança com a representação do sinal QAM dada na Seção 4.4. Portanto, uma modulação digital PSK guarda uma relação próxima com o sinal analógico QAM. Em particular, para PSK binário, $\theta = 0, \pi$. Assim, PSK binário pode ser escrito como

$$\pm A \cos \omega_c t$$

Isso é, efetivamente, uma manifestação digital da modulação em amplitude DSB-SC. Na verdade, como veremos mais adiante, se permitirmos que a_k assuma valores em múltiplos níveis e tomarmos $b_k = 0$, podemos gerar outra modulação digital com portadora conhecida como modulação por amplitude de pulso (ou PAM), que pode transportar múltiplos bits durante cada intervalo de tempo T_b de modulação.

Como estudado no Capítulo 4, a modulação em amplitude DSB-SC tem melhor eficiência de potência que AM. Portanto, a PSK binária tem melhor eficiência de potência que a ASK. Em termos de uso de largura de banda, podemos ver, de suas relações com modulações analógicas, que a ASK e a PSK têm idênticas larguras de banda, enquanto a FSK requer maior largura de banda. Essas observações corroboram, de modo intuitivo, os resultados de PSD na Fig. 7.32.

7.8.4 Demodulação

A demodulação de sinais modulados digitais é similar à de sinais modulados analógicos. Devido às relações entre ASK e AM, entre FSK e FM e entre PSK e QAM (ou DSB-SC AM), as diferentes técnicas empregadas para modulações analógicas podem ser diretamente aplicadas aos equivalentes digitais.

Detecção ASK

Assim como a AM, a ASK (Fig. 7.30c) pode ser demodulada de forma coerente (para detecção síncrona) ou incoerente (para detecção de envelope). O detector coerente requer equipamento mais elaborado e tem desempenho superior, especialmente quando a potência de sinal (e, portanto, a SNR) é baixa. Para SNR mais alta, o detector de envelope tem desempenho quase tão bom como o detector coerente. Por conseguinte, a detecção coerente não é muito utilizada para ASK, pois violaria o propósito do esquema (simplicidade de detecção). Se pudermos tirar proveito de um detector síncrono, é preferível o uso de PSK, que tem melhor eficiência de potência que ASK.

Detecção FSK

Novamente, o sinal FSK binário pode ser visto como dois sinais ASK entrelaçados, com frequências portadoras ω_{c_0} e ω_{c_1} (Fig. 7.32c). Portanto, a FSK pode ser detectada de forma coerente ou incoerente. Na detecção incoerente, o sinal que chega é aplicado a um par de filtros sintonizados em ω_{c_0} e ω_{c_1} . Cada filtro é seguido por um detector de envelope (Fig. 7.33a). As saídas dos dois detectores de envelope são amostradas e comparadas. Se um **0** for transmitido por um pulso de frequência ω_{c_0} , esse pulso aparecerá na saída do filtro sintonizado em ω_{c_0} . Praticamente nenhum sinal aparecerá na saída do filtro sintonizado em ω_{c_1} . Assim, a amostra da saída do detector de envelope que segue o filtro ω_{c_0} será maior que a amostra da saída do detector de envelope que segue o filtro ω_{c_1} , e o receptor decide que um **0** foi transmitido. No caso de um **1**, ocorre o oposto.

É óbvio que a FSK também pode ser detectada coerentemente com a geração de duas frequências de referência ω_{c_0} e ω_{c_1} , para os dois demoduladores, para a demodulação do sinal recebido e a subsequente comparação das saídas dos dois demoduladores, como ilustrado na Fig. 7.33b. Assim, o detector FSK coerente deve gerar duas portadoras em sincronia com as portadoras de modulação. Novamente, esse demodulador complexo viola o propósito da FSK, projetado principalmente para detecção mais simples e não coerente. Na prática, a detecção FSK coerente não é utilizada.

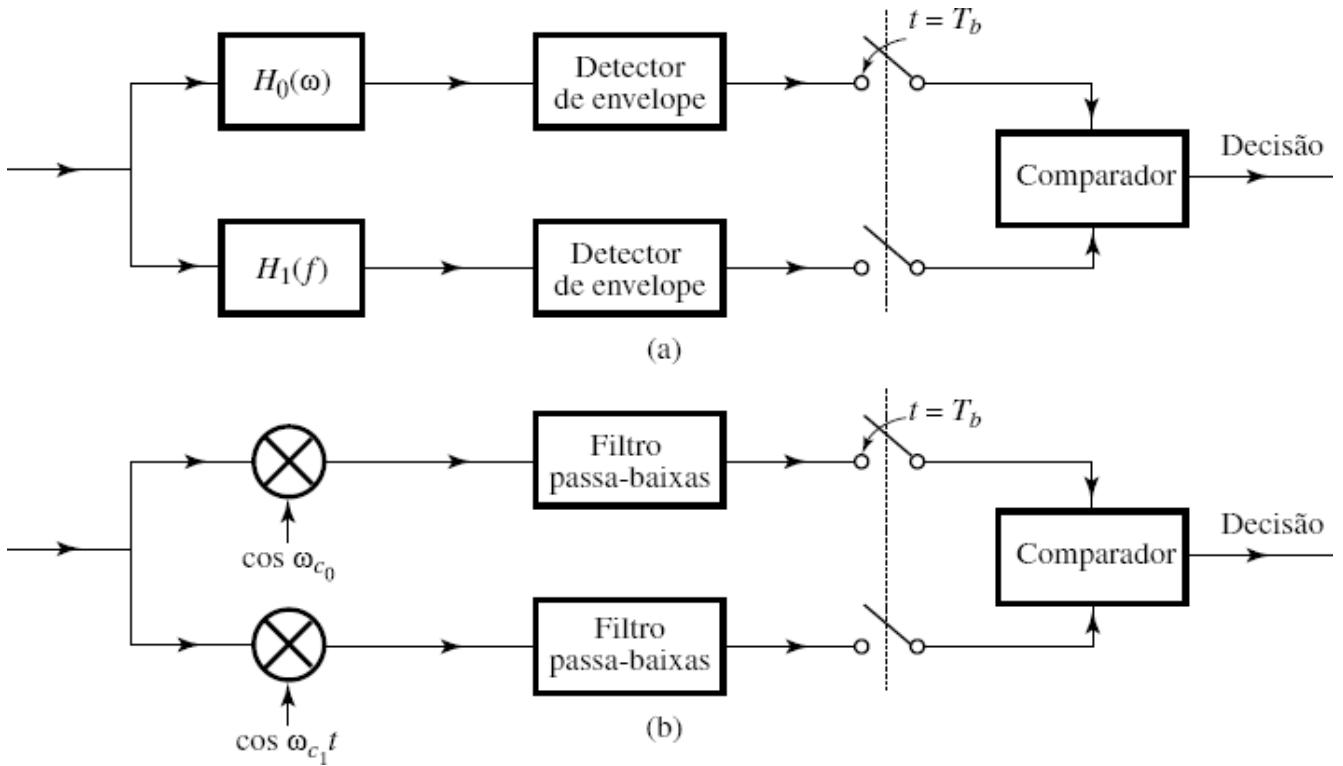


Figura 7.33
(a) Detecção incoerente de FSK. (b) Detecção coerente de FSK.

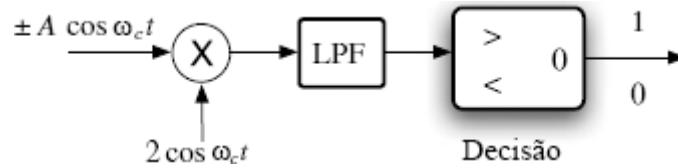


Figura 7.34
Detector PSK binário coerente (similar a um demodulador DSB-SC).

Detecção PSK

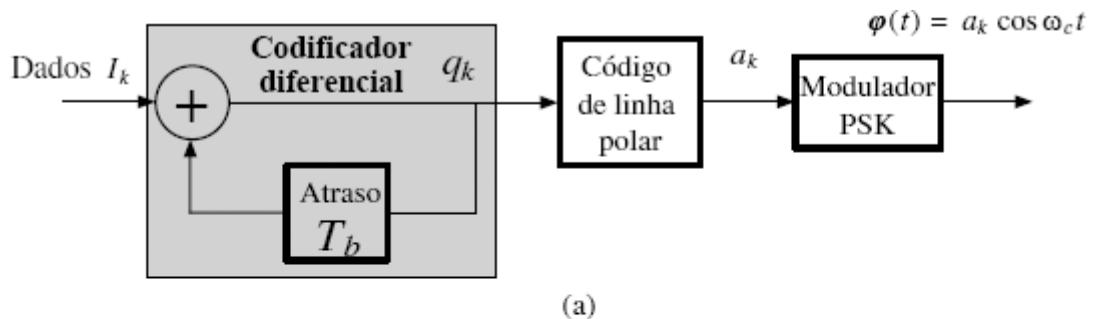
Em PSK binário, um **1** é transmitido por um pulso $A \cos \omega_c t$ e um **0**, por um pulso $-A \cos \omega_c t$ (Fig. 7.31b). A informação em sinais PSK reside na fase da portadora. Assim como em DSB-SC, esses sinais não podem ser demodulados por detecção de envelope, pois o envelope é o mesmo para **1** e **0** (Fig. 7.31b). O detector coerente da modulação PSK binária é mostrado na Fig. 7.34. A detecção coerente é similar à usada para sinais analógicos. Métodos de aquisição de portadora foram discutidos na Seção 4.8.

PSK Diferencial

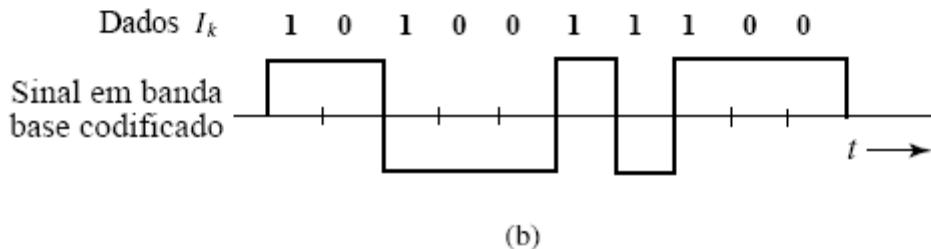
Embora a detecção de envelope não possa ser usada para PSK, ainda é possível explorar o número finito de valores de fase de modulação para detecção incoerente. De fato, sinais PSK podem ser demodulados de forma incoerente por meio de um engenhoso método conhecido como **PSK diferencial** ou DPSK. O princípio da detecção diferencial é que o receptor detecte a mudança de fase relativa entre sucessivas fases moduladas θ_k e θ_{k-1} . Como os valores de fase em PSK são finitos (iguais a 0 e π em PSK binário), o transmissor pode codificar o dado de informação na diferença de fase $\theta_k - \theta_{k-1}$. Por exemplo, uma diferença de fase zero representa **0**, enquanto uma diferença de fase π significa **1**.

Essa técnica é conhecida como **codificação diferencial** (antes da modulação). Em um código diferencial, um **0** é codificado pelo mesmo pulso usado para codificar o bit de dado anterior (sem transição), e **1** é codificado pelo negativo do pulso usado para codificar o bit de dado anterior (transição). A codificação diferencial é de simples implementação, como mostrado na Fig. 7.35b. Reparemos que a adição é em módulo 2. O sinal codificado é mostrado na Fig. 7.35b. Desse modo, uma transição na sequência de pulsos do código de linha indica **1** e nenhuma transição, **0**. O sinal modulado consiste em pulsos

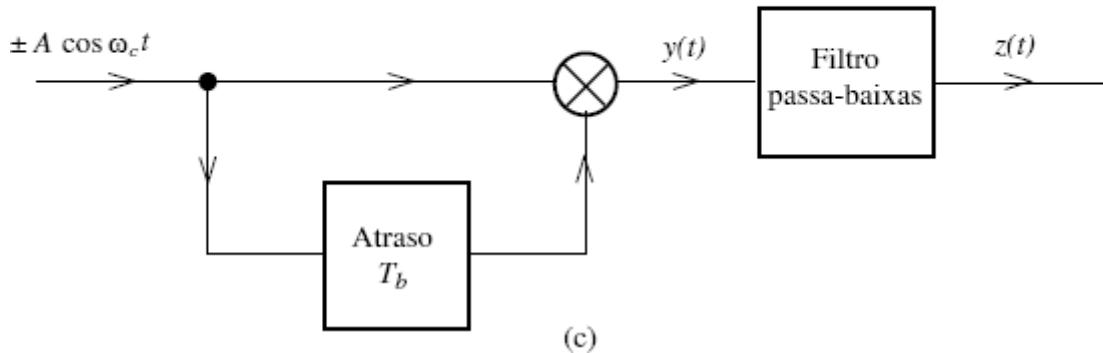
$$A \cos (\omega_c t + \theta_k) = \pm A \cos \omega_c t$$



(a)



(b)



(c)

Figura 7.35

(a) Codificação diferencial; (b) sinal codificado; (c) receptor PSK diferencial.

Se o bit de dado for **0**, o pulso corrente e o anterior têm a mesma polaridade ou fase; os dois pulsos são iguais a $A \cos \omega_c t$ ou iguais a $-A \cos \omega_c t$. Se o bit de dado for **1**, o pulso corrente e o anterior têm polaridades ou fases opostas; se o pulso corrente for $A \cos \omega_c t$, o anterior é $-A \cos \omega_c t$, ou vice-versa.

Na demodulação da DPSK (Fig. 7.35c), evitamos a geração de uma portadora local observando que o próprio sinal modulado recebido é uma portadora ($\pm A \cos \omega_c t$), com uma possível ambiguidade de sinal. Para demodulação, no lugar da portadora, podemos usar o sinal recebido atrasado por T_b (um intervalo de bit). Se o pulso recebido for igual ao anterior, o produto dos dois será $y(t) = A^2 \cos^2 \omega_c t = (A^2/2)(1 + \cos 2\omega_c t)$, e a saída do filtro passa-baixas, $z(t) = A^2/2$. Imediatamente, detectamos o pulso corrente como um **0**. Se o pulso recebido e o anterior tiverem polaridades opostas, $y(t) = -A^2 \cos^2 \omega_c t$ e $z(t) = -A^2/2$, e o bit corrente é detectado como **1**. A Tabela 7.3 ilustra um exemplo específico de codificação e decodificação.

Tabela 7.3

Codificação diferencial e detecção de DPSL binário

Tempo k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I_k		1	0	1	0	0	1	1	1	0	0
q_k	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1
Código de linha a_k	-1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	1
θ_k	π	0	0	π	π	π	0	π	0	0	0
$\theta_k - \theta_{k-1}$		π	π	π		π	π	π	0	0	0

Bits detectados	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0
-----------------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Em termos de complexidade de demodulação, ASK, FSK e DPSK podem ser todos detectados incoerentemente, sem uma portadora síncrona no receptor. A PSK, por sua vez, deve ser detectada coerentemente. Detecção incoerente, no entanto, tem um preço em termos de imunidade ao ruído. Do ponto de vista de imunidade ao ruído, a PSK coerente é superior a todos os outros esquemas. A PSK também requer menor largura de banda do que a FSK (Fig. 7.32). Uma discussão quantitativa sobre esse tema será feita no Capítulo 10.

7.9 MODULAÇÃO DIGITAL M -ÁRIA COM PORTADORA

As modulações digitais binárias ASK, FSK e PSK com portadora transmitem um bit de informação por intervalo de T_b segundos, o que corresponde a uma taxa de bits de $1/T_b$ bit/s. Assim como no caso da transmissão de sinais digitais em banda base, maior taxa de transmissão de bits pode ser alcançada com a redução de T_b ou com aplicação de sinalização M -ária; a primeira opção requer mais largura de banda e a segunda, mais potência. Na maioria dos sistemas de comunicação, largura de banda é estritamente limitada. Assim, para conservar largura de banda, uma forma eficaz de aumentar a taxa de transmissão de dados consiste em generalizar a modulação binária com o emprego de sinalização M -ária. Especificamente, podemos aplicar modulações ASK de M níveis, FSK de M frequências e PSK de M fases.

ASK M -ária e Detecção Incoerente

A ASK M -ária é uma generalização muito simples da modulação ASK binária. Em vez de enviar apenas

$$\varphi(t) = 0 \text{ para } 0 \quad \text{e} \quad \varphi(t) = A \cos \omega_c t \text{ para } 1$$

a modulação ASK M -ária pode enviar $\log_2 M$ bits por vez ao transmitir, por exemplo,

$$\varphi(t) = 0, A \cos \omega_c t, 2A \cos \omega_c t, \dots, (M-1)A \cos \omega_c t$$

Esse ainda é um sinal AM que usa M amplitudes distintas e um índice de modulação $\mu = 1$. A largura de banda é igual à do sinal ASK binário, enquanto a potência cresce proporcionalmente com M^2 . A demodulação pode ser feita por detecção de envelope ou por detecção coerente.

FSK M -ária e Sinalização Ortogonal

A FSK M -ária é gerada com a seleção de uma senoide do conjunto $\{A \cos 2\pi f_i t, i = 1, \dots, M\}$ para transmitir um padrão particular de $\log_2 M$ bits. Em geral, com FSK, podemos projetar um incremento de frequência δf e definir

$$f_m = f_1 + (m-1)\delta f \quad m = 1, 2, \dots, M$$

Para essa modulação FSK com igual separação entre frequências, o desvio de frequência (na análise do sinal FM) é

$$\Delta f = \frac{f_M - f_1}{2} = \frac{1}{2}(M-1)\delta f$$

Fica claro que a seleção do conjunto de frequências $\{f_i\}$ determina o desempenho e a largura de banda da modulação FSK. Se δf for escolhido demasiadamente grande, o sinal FSK M -ário usará excessiva largura de banda. Se, por outro lado, δf for escolhido demasiadamente pequeno, no intervalo de tempo de T_b segundos praticamente não haverá distinção entre diferentes símbolos FSK e o receptor será incapaz de distinguir os símbolos de modo confiável. Assim, grande valor de δf leva a desperdício de largura de banda, enquanto pequeno δf favorece a suscetibilidade a erros de detecção devido ao ruído de transmissão e à interferência.

O projeto da modulação FSK M -ária requer a determinação de um valor suficientemente pequeno de δf , de modo que cada símbolo FSK $A \cos \omega_c t$ seja distingível de todos os outros símbolos FSK. Uma solução para esse problema de projeto de sinais FSK pode ser encontrada na discussão do espaço ortogonal de sinais na Seção 2.6.2. Se pudermos projetar símbolos FSK que sejam ortogonais em T_b com a seleção de um pequeno valor para δf (ou Δf), os sinais FSK serão verdadeiramente distintos no intervalo T_b e o consumo de largura de banda será pequeno.

Para determinar o mínimo valor de δf que leva a um conjunto ortogonal de sinais FSK, a condição de ortogonalidade, segundo a Seção 2.6.2, requer que

$$\int_0^{T_b} A \cos(2\pi f_m t) A \cos(2\pi f_n t) dt = 0 \quad m \neq n \quad (7.62)$$

Podemos usar essa condição para determinar o mínimo δf . Primeiro, calculemos

$$\begin{aligned} \int_0^{T_b} A \cos(2\pi f_m t) A \cos(2\pi f_n t) dt &= \frac{A^2}{2} \int_0^{T_b} [\cos 2\pi(f_m + f_n)t + \cos 2\pi(f_m - f_n)t] dt \\ &= \frac{A^2}{2} T_b \frac{\sin 2\pi(f_m + f_n)T_b}{2\pi(f_m + f_n)T_b} + \frac{A^2}{2} T_b \frac{\sin 2\pi(f_m - f_n)T_b}{2\pi(f_m - f_n)T_b} \end{aligned} \quad (7.63)$$

Como, em modulações práticas, $(f_m + f_n)T_b$ é muito grande (em geral, não menor que 10^3), o primeiro termo na Eq. (7.63) é efetivamente zero e desprezível. Assim, a condição de ortogonalidade se reduz à condição que, para quaisquer inteiros $m \neq n$,

$$\frac{A^2}{2} \frac{\sin 2\pi(f_m - f_n)T_b}{2\pi(f_m - f_n)} = 0$$

Como $f_m = f_1 + (m-1)\delta f$, para mútua ortogonalidade, temos

$$\sin [2\pi(m-n)\delta f T_b] = 0 \quad m \neq n$$

Dessa condição, fica claro que o menor δf que satisfaz a condição de mútua ortogonalidade é

$$\delta f = \frac{1}{2T_b} \text{ Hz}$$

Essa escolha de mínima separação de frequência é conhecida como FSK de *mínimo deslocamento*. Por formar um conjunto ortogonal de símbolos, essa escolha também é conhecida como sinalização ortogonal.

Podemos descrever a modulação FSK de *mínimo deslocamento* geometricamente, aplicando o conceito de funções de base ortogonais da Seção 2.6. Sejam

$$\psi_i(t) = \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cos 2\pi \left(f_1 + \frac{i-1}{2T_b} \right) t \quad i = 1, 2, \dots, M$$

Podemos comprovar com facilidade que

$$\int_0^{T_b} \psi_m(t) \psi_n(t) dt = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

Assim, cada símbolo FSK pode ser escrito como

$$A \cos 2\pi f_m t = A \sqrt{\frac{T_b}{2}} \psi_m(t) \quad m = 1, 2, \dots, M$$

A relação geométrica entre os dois símbolos FSK para $M=2$ é capturada na Fig. 7.36.

A demodulação de sinais FSK M -ários segue os mesmos princípios que a demodulação de sinais FSK binários. Com a generalização dos demoduladores FSK binários na Fig. 7.33, podemos aplicar um banco de M detectores coerentes ou incoerentes para sinais FSK M -ários antes de tomar uma decisão com base no ramo detector mais intenso.

Anteriormente, na análise da PSD de modulações em banda base, mostramos que, no intervalo de símbolo T_b , a largura de banda de um sinal digital em banda base podia ser aproximada por $1/T_b$. Portanto, para FSK de deslocamento mínimo, $\Delta f = (M -$

$1)/(4T_b)$ e, segundo a regra de Carson, a largura de banda é, aproximadamente,

$$2(\Delta f + B) = \frac{M - 3}{2T_b}$$

Na verdade, podemos mostrar que, em geral, a largura de banda de um esquema M -ário ortogonal é M vezes a do esquema binário [Seção 10.7, Eq. (10.123)]. Portanto, em um esquema M -ário ortogonal, a taxa de comunicação aumenta por um fator $\log_2 M$, ao custo de um aumento na largura de banda de transmissão por um fator M . No esquema ortogonal, para uma comparável imunidade ao ruído, a potência de transmissão praticamente independe de M . Por conseguinte, em contraste com a modulação ASK M -ária, a FSK M -ária não requer maior potência de transmissão. Contudo, seu requisito de largura de banda aumenta quase linearmente com M (em comparação com FSK binária ou ASK M -ária).

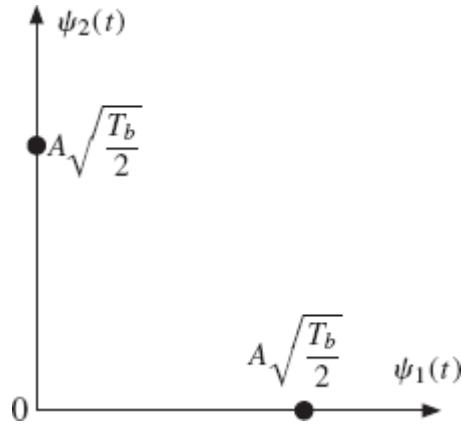


Figura 7.36

Símbolos FSK binários no espaço ortogonal bidimensional de sinais.

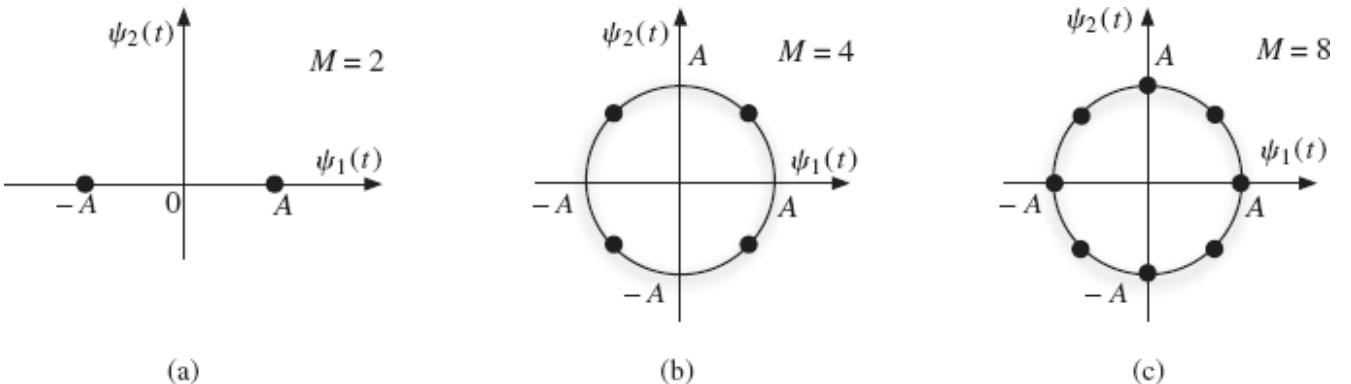


Figura 7.37

Símbolos PSK M -ário no espaço ortogonal de sinais: (a) $M = 2$; (b) $M = 4$; (c) $M = 8$.

PSK, PAM e QAM M -árias

Com uma pequena modificação na Eq. (7.61), sinais PSK genéricos podem ser escritos no formato

$$\varphi_{\text{PSK}}(t) = a_m \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cos \omega_c t + b_m \sqrt{\frac{2}{T_b}} \sin \omega_c t \quad 0 \leq t < T_b \quad (7.64a)$$

em que $a_m = A \cos \theta_m$ e $b_m = -A \sin \theta_m$. Na verdade, com base na análise na Seção 2.6, $\sqrt{2/T_b} \cos \omega_c t$ e $\sqrt{2/T_b} \sin \omega_c t$ são mutuamente ortogonais. Além disso, são normalizados no intervalo $[0, T_b]$. Como resultado, podemos representar todos os símbolos PSK em um sinal bidimensional de sinais com funções de base

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cos \omega_c t \quad \psi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T_b}} \sin \omega_c t$$

tais que

$$\varphi_{\text{PSK}}(t) = a_m \psi_1(t) + b_m \psi_2(t) \quad (7.64\text{b})$$

Podemos ilustrar geometricamente a relação entre símbolos PSK no espaço de sinais (Fig. 7.37). A Eq. (7.64) significa que modulações PSK podem ser representadas como uma modulação QAM. Na verdade, como o sinal é PSK, os pontos de sinal devem satisfazer a condição especial

$$\begin{aligned} a_m^2 + b_m^2 &= A^2 \cos^2 \theta_m + (-A)^2 \sin^2 \theta_m \\ &= A^2 = \text{constante} \end{aligned} \quad (7.64\text{c})$$

Em outras palavras, todos os pontos de sinal devem estar em uma circunferência de raio A . Na prática, todos os pontos de sinal são escolhidos para serem igualmente espaçados, com o propósito de obter melhor imunidade ao ruído. Portanto, para a sinalização PSK M -ária, os ângulos são escolhidos como uniformemente espaçados:

$$\theta_m = \theta_0 + \frac{2\pi}{M}(m-1) \quad m = 1, 2, \dots, M$$

A sinalização PSK especial com $M = 4$ é um formato de modulação digital extremamente popular e poderoso.* Esse sinal é a soma de dois sinais PSK binários de mesma frequência, um com portadora $\cos \omega_c t$ (em fase) e outro com portadora $\sin \omega_c t$ (em quadratura). Por essa razão, este sinal também é conhecido como **PSK em quadratura (QPSK – quadrature PSK)**. Podemos transmitir e receber os dois sinais no mesmo canal, dobrando a taxa de transmissão.

Para generalizar PSK e alcançar taxa de dados ainda mais alta, podemos ver que a representação PSK da Eq. (7.64) é um caso especial da modulação em amplitude em quadratura (QAM) discutida no Capítulo 4 (Fig. 4.19). A única diferença reside na exigência de PSK de que o sinal modulado tenha uma magnitude (módulo) constante A . Na verdade, o formato de modulação QAM, muito mais flexível e geral, também pode ser convenientemente usado para modulação digital. O sinal transmitido por um sistema QAM M -ário pode ser escrito como

$$\begin{aligned} p_i(t) &= a_i p(t) \cos \omega_c t + b_i p(t) \sin \omega_c t \\ &= r_i p(t) \cos(\omega_c t - \theta_i) \quad i = 1, 2, \dots, M \end{aligned}$$

em que

$$r_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \quad \text{e} \quad \theta_i = \tan^{-1} \frac{b_i}{a_i} \quad (7.65)$$

e $p(t)$ é um pulso em banda base adequadamente formatado. A escolha mais simples para $p(t)$ seria um pulso retangular

$$p(t) = \sqrt{\frac{2}{T_b}} [u(t) - u(t - T_b)]$$

Pulsos melhores podem, certamente, ser aplicados para conservar largura de banda.

A Fig. 7.38 mostra o modulador e o demodulador QAM. Cada um dos dois sinais $m_1(t)$ e $m_2(t)$ é uma sequência de pulsos \sqrt{M} -ários em banda base. Os dois sinais são modulados por duas portadoras de mesma frequência, mas em quadratura de fase. O sinal QAM digital $p_i(t)$ pode ser gerado por meio de QAM com $m_1(t) = a_i p(t)$ e $m_2(t) = b_i p(t)$. Os sinais $m_1(t)$ e $m_2(t)$ são sinais PAM em banda base. O diagrama de olho do sinal QAM consiste na componente em fase $m_1(t)$ e na componente em quadratura $m_2(t)$. Ambas exibem o diagrama de olho do sinal PAM M -ário em banda base, como discutido anteriormente na Seção 7.6.

A representação geométrica de sinais QAM M -ários pode ser obtida como extensão do espaço de sinais PSK com a simples remoção da condição de módulo constante na Eq. (7.64c). Uma escolha prática e muito popular de r_i e θ_i para $M = 16$ é ilustrada graficamente na Fig. 7.38b. O pulso transmitido $p_i(t)$ pode assumir 16 formas distintas e, portanto, é um pulso 16-ário. Como $M = 16$, cada pulso pode transmitir a informação de $\log_2 16 = 4$ dígitos binários. Isso pode ser feito da seguinte forma: há 16 possíveis sequências de quatro dígitos binários e há 16 combinações (a_i, b_i) na Fig. 7.38b. Assim, cada possível sequência de quatro bits é transmitida por um particular (a_i, b_i) ou (r_i, θ_i) . Portanto, um pulso de sinal $r_i p(t) \cos(\omega_c t - \theta_i)$ transmite quatro bits. Em comparação com PSK binário (ou BPSK), a taxa de bits do sinal QAM 16-ário é quatro vezes maior, sem aumentar a largura de banda. A taxa de transmissão pode ser aumentada ainda mais com o aumento do valor de M .

Modulação e demodulação podem ser efetuadas com o sistema ilustrado na Fig. 7.38a. As entradas são $m_1(t) = a_i p(t)$ e $m_2(t) = b_i p(t)$. As duas saídas do demodulador são $a_i p(t)$ e $b_i p(t)$. O conhecimento de (a_i, b_i) permite a determinação de quatro bits transmitidos. Uma análise mais detalhada de sinais QAM 16-ários em canal ruidoso é feita na Seção 10.6 [Eq. (10.104)]. O valor prático da sinalização QAM-16 fica evidente quando considerarmos a grande variedade de suas aplicações. Na verdade, a QAM-16 é usada em modems de dados telefônicos/fax V.32 (9600 bit/s), em modems de cabo de alta velocidade e na moderna difusão da televisão digital via satélite.

Reparemos que, se desabilitarmos a sequência de dados que modula $\sin \omega_c t$ em QAM, todos os pontos de sinalização poderão ser reduzidos a uma única dimensão. Fazendo $m_2(t) = 0$, a modulação QAM passa a

$$p_i(t) = a_i p(t) \cos \omega_c t, \quad t \in [0, T_b]$$

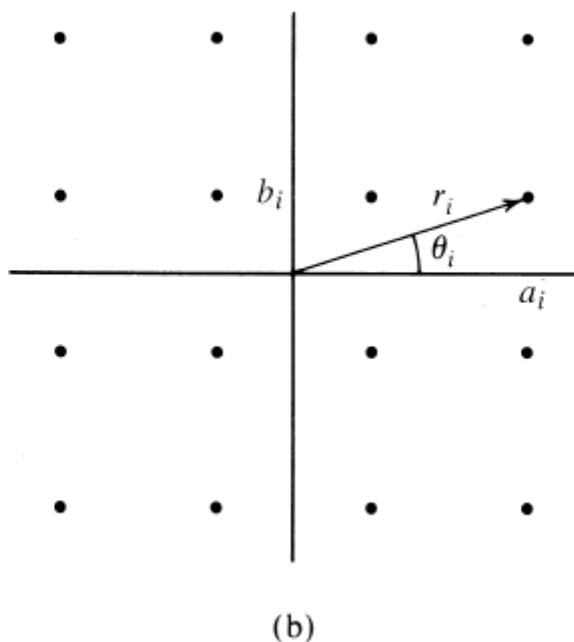
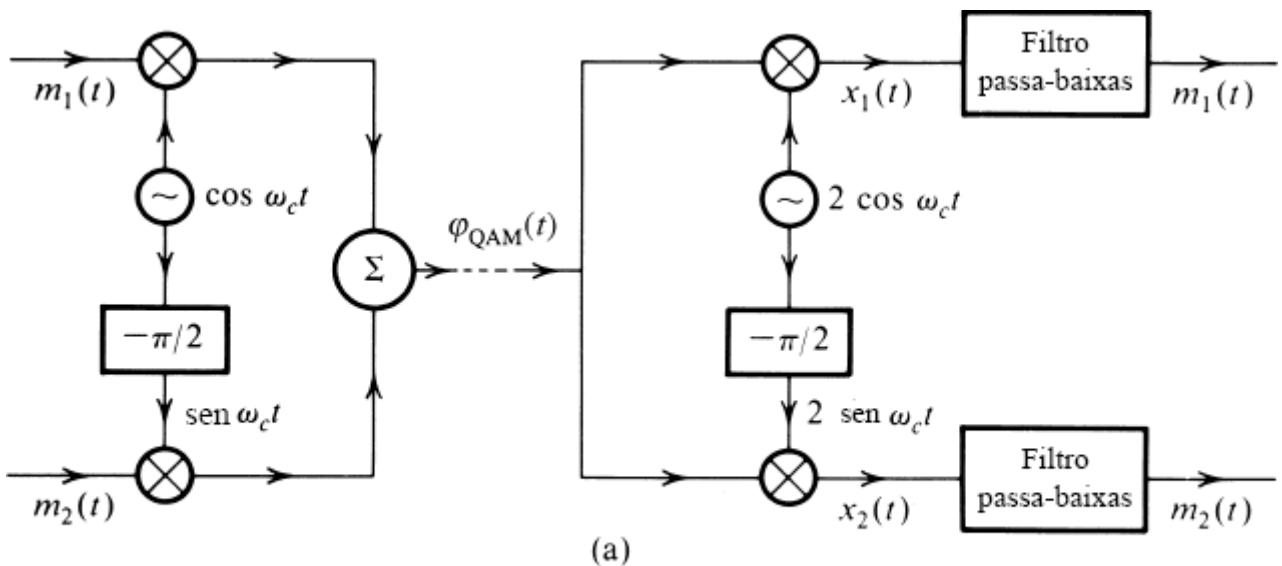


Figura 7.38

(a) QAM ou multiplexação em quadratura e (b) QAM de 16 pontos ($M = 16$).

Que se degenera em modulação por amplitude de pulso ou PAM. Uma comparação da expressão do sinal $p_i(t)$ com a do sinal DSB-SC analógico deixa claro que PAM é a versão digital de DSB-SC. Assim como um sinal QAM analógico é formado pela superposição de dois sinais com modulação em amplitude DSB-SC em quadratura de fase, o sinal QAM digital consiste em dois sinais PAM, cada um com \sqrt{M} níveis de sinalização. Como na relação entre as modulações DSB-SC analógica e QAM, a PAM requer a mesma largura de banda que QAM. No entanto, a PAM é muito menos eficiente, pois necessita de M níveis de sinalização de modulação em uma dimensão, enquanto QAM requer apenas com \sqrt{M} níveis de sinalização em cada uma das duas dimensões QAM ortogonais.

Negociação entre Potência e Largura de Banda

No Capítulo 10, discutiremos outros tipos de sinalização M -ária. A natureza da negociação entre largura de banda de transmissão e potência transmitida (ou SNR) depende da escolha do esquema M -ário. Por exemplo, na sinalização ortogonal, a potência transmitida praticamente independe de M , mas a largura de banda de transmissão aumenta com M . No caso PAM, em contraste, a potência transmitida aumenta aproximadamente com M^2 , enquanto a largura de banda permanece constante. Assim, a sinalização M -ária nos permite grande flexibilidade na negociação entre potência de sinal (ou SNR) e largura de banda de transmissão. A escolha do sistema apropriado depende de circunstâncias particulares. Por exemplo, o uso de sinalização QAM é apropriado se a largura de banda for limitada (como em linhas telefônicas), e o uso de sinalização ortogonal é adequado quando há restrição de potência (como em comunicações espaciais).

7.10 EXERCÍCIOS COM O MATLAB

Nesta seção, apresentamos programas MATLAB para gerar diagramas de olho. O primeiro passo consiste na especificação das formas básicas de pulso em PAM. Os quatro programas curtos dados a seguir são usados para gerar pulsos NRZ, RZ, meia senoide e cosseno levantado.

```
% (pnrz.m)
% gera um pulso retangular de largura T
% Uso function pout=pnrz(T);
function pout=prect(T);
pout=ones(1,T);
end
```

```
% (prz.m)
% gera um pulso retangular de largura T/2
% Uso function pout=prz(T);
function pout=prz(T);
pout=[zeros(1,T/4) ones(1,T/2) zeros(1,T/4)];
end
```

```
% (psine.m)
% gera pulso senoidal de largura T
%
function pout=psine(T);
pout=sin(pi*[0:T-1]/T);
end
```

```
% (prcos.m)
% Uso y=prcos(rollfac,length, T)
function y=prcos(rollfac,length, T)
% rollfac = 0 a 1 é o fator de decaimento
% length é o comprimento unilateral do pulso em termos de T
% length = 2T+1;
% T é a taxa de superamostragem
y=rcosfir(rollfac, length, T,1, 'normal');
end
```

O primeiro programa (`binary_eye.m`) usa quatro diferentes formas de pulso para gerar diagramas de olho de sinalização polar binária.

```
% (binary_eye.m)
% gera e traça diagrama de olho
%
clear;clf;
```

```

data = sign(randn(1,400)); % Gera 400 bits aleatórios
Tau=64; % Define o período de símbolo
dataup=upsample(data, Tau); % Gera trem de impulsos
yrz=conv(dataup,prz(Tau)); % Sinal polar com retorno ao zero
yrz=yrz(1:end-Tau+1);
ynrz=conv(dataup,pnrz(Tau)); % Sinal polar sem retorno ao zero
ynrz=ynrz(1:end-Tau+1);
ysine=conv(dataup,psine(Tau)); % Sinal polar de meia senoide
ysine=ysine(1:end-Tau+1);
Td=4; % trunc a cosseno levantada em 4 períodos
yrcos=conv(dataup,prcos(0.5,Td,Tau)); % fator de decaimento = 0,5
yrcos=yrcos(2*Td*Tau:end-2*Td*Tau+1); % gera trem de pulsos RC
eye1=eyediagram(yrz,2*Tau,Tau,Tau/2);title('Diagrama de olho RZ');
eye2=eyediagram(ynrz,2*Tau,Tau,Tau/2);title('Diagrama de olho NRZ');
eye3=eyediagram(ysine,2*Tau,Tau,Tau/2);title('Diagrama de olho de
meia senoide');
eye4=eyediagram(yrcos,2*Tau,Tau); title('Diagrama de olho de cosseno
levantado');

```

O segundo programa (Mary-eye.m) usa quatro diferentes formas de pulso para gerar diagramas de sinalização PAM de quatro níveis.

```

% (Mary_eye.m)
% gera e traça diagrama de olho
%
%
clear;clf;
data = sign(randn(1,400))+2* sign(randn(1,400)); % Gera 400 simbo-
los PAM
Tau=64; % Define o período de símbolo
dataup=upsample(data, Tau); % Gera trem de impulsos
yrz=conv(dataup,prz(Tau)); % Sinal polar com retorno ao zero
yrz=yrz(1:end-Tau+1);
ynrz=conv(dataup,pnrz(Tau)); % Sinal polar sem retorno ao zero
ynrz=ynrz(1:end-Tau+1);
ysine=conv(dataup,psine(Tau)); % Sinal polar de meia senoide
ysine=ysine(1:end-Tau+1);
Td=4; % trunc a cosseno levantada em 4 períodos
yrcos=conv(dataup,prcos(0.5,Td,Tau)); % fator de decaimento = 0,5
yrcos=yrcos(2*Td*Tau:end-2*Td*Tau+1); % gera trem de pulsos RC
eye1=eyediagram(yrz,2*Tau,Tau,Tau/2);title('Diagrama de olho RZ');
eye2=eyediagram(ynrz,2*Tau,Tau,Tau/2);title('Diagrama de olho NRZ');
eye3=eyediagram(ysine,2*Tau,Tau,Tau/2);title('Diagrama de olho de meia
senoide');
eye4=eyediagram(yrcos,2*Tau,Tau); title('Diagrama de olho de cosseno
levantado');

```

REFERÊNCIAS

1. A. Lender, "Duobinary Technique for High Speed Data Transmission," *IEEE Trans. Commun. Electron.*, vol. CE-82, pp. 214–218, May 1963.
2. A. Lender, "Correlative Level Coding for Binary-Data Transmission," *IEEE Spectrum*, vol. 3, no. 2, pp. 104–115, Feb. 1966.

3. P. Bylanski and D. G. W. Ingram, *Digital Transmission Systems*, Peter Peregrinus Ltd., Hertshire, England, 1976.
4. H. Nyquist, "Certain Topics in Telegraph Transmission Theory," *AIEE Trans.*, vol. 47, p. 817, April 1928.
5. E. D. Sunde, *Communication Systems Engineering Technology*, Wiley, New York, 1969.
6. R.W. Lucky and H. R. Rudin, "Generalized Automatic Equalization for Communication Channels," *IEEE Int. Commun. Conf.*, vol. 22, 1966.
7. W. F. Trench, "An Algorithm for the Inversion of Finite Toeplitz Matrices," *J. SIAM*, vol. 12, pp. 515–522, Sept. 1964.
8. A. Lender, Chapter 7, in *Digital Communications: Microwave Applications*, K. Feher, Ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1981.

EXERCÍCIOS

7.2-1 Considere um pulso retangular de largura completa

$$p(t) = \Pi(t/T_b)$$

- (a) Determine a PSD para as sinalizações polar, on-off e bipolar.
 - (b) Esboce o gráfico de cada PSD e determine sua largura de banda. Para cada sinalização, compare a largura de banda com a do caso em que $p(t)$ é um pulso retangular de meia largura.
- 7.2-2** (a) Uma sequência aleatória de dados binários **110100101...** é transmitida com o uso do código de linha Manchester (bifásico) com o pulso $p(t)$ mostrado na Fig. 7.7a. Esboce o gráfico da forma de onda $y(t)$.
- (b) Calcule $S_y(f)$, a PSD de um sinal Manchester (bifásico) na parte (a), supondo que **1** e **0** têm igual probabilidade de ocorrência. Esboce o gráfico desta PSD e determine sua largura de banda.

7.2-3 Para a forma de pulso

$$p(t) = \Pi\left(\frac{t}{0,5T_b}\right)$$

use o código diferencial (Fig. 7.18) para determinar a PSD para um sinal binário. Determine a PSD $S_y(f)$.

- 7.2-4** O código de linha **duobinário** proposto por Lender também é terciário, como o bipolar, mas requer somente metade da largura de banda de bipolar. Na prática, o código duobinário é realizado indiretamente com o uso de uma forma especial de pulso, como discutido na Seção 7.3 (Fig. 7.18). Nesse código, um **0** é transmitido por ausência de pulso e um **1**, por um pulso $p(t)$ ou $-p(t)$ segundo a regra: um **1** é codificado pelo mesmo pulso usado para o **1** anterior, se houver um número par de **0s** entre eles; um **1** é codificado por um pulso com polaridade oposta à do pulso usado para o **1** anterior, se houver um número ímpar de **0s** entre eles. Um número 0 é considerado um número par. Como o bipolar, esse código também tem uma capacidade de detecção de erro isolado, pois a recepção correta implica que, entre sucessivos pulsos de mesma polaridade, deve ocorrer um número par de **0s**, e entre sucessivos pulsos de polaridades opostas, um número ímpar de **0s**.
- (a) Admitindo um pulso retangular de meia largura, esboce o gráfico do sinal duobinário $y(t)$ para a sequência binária aleatória

1110001101001010...

- (b) Determine R_0 , R_1 e R_2 para este código. Admita (se preferir, prove) que $R_n = 0$ para todo $n > 2$. Determine a PSD para esse código de linha (considerando um pulso de meia largura) e esboce seu gráfico. Mostre que sua largura de banda é $R_b/2$, metade da largura de banda do código bipolar.
- 7.3-1** Dados, a uma taxa de 6 kbit/s, devem ser transmitidos em uma linha privada com largura de banda de 4 kHz, usando pulsos que satisfaçam o critério de Nyquist. Determine o máximo valor do fator de

decaimento r que pode ser usado.

- 7.3-2** Em um certo sistema de telemetria, há oito medidas analógicas, cada uma com largura de banda de 2 kHz. Amostras desses sinais são multiplexadas por divisão no tempo, quantizadas e codificadas em binário. O erro nas amplitudes das amostras não pode ultrapassar 1% da amplitude de pico.
- Determine L , o número de níveis de quantização.
 - Determine a largura de banda de transmissão B_T se forem usados pulsos que satisfaçam o critério de Nyquist, com fator de decaimento $r = 0,2$. A taxa de amostragem deve ser pelo menos 25% acima da taxa de Nyquist.
- 7.3-3** Uma linha privada de telefonia, com largura de banda de 3 kHz, é usada para transmitir dados binários. Calcule da taxa de dados (em bits por segundo) que pode ser transmitida se for usado:
- Sinal polar com pulsos retangulares de meia largura.
 - Sinal polar com pulsos retangulares de largura completa.
 - Sinal polar com pulsos que satisfaçam o critério de Nyquist, com fator de decaimento $r = 0,25$.
 - Sinal bipolar com pulsos retangulares de meia largura.
 - Sinal bipolar com pulsos retangulares de largura completa.
- 7.3-4** A transformada de Fourier $P(f)$ do pulso básico $p(t)$ usado em certos sistemas de comunicação binária é mostrado na Fig. E.7.3-4.
- A partir da forma de $P(f)$, determine a que taxa de pulsos esse pulso satisfaria o critério de Nyquist.
 - Determine $p(t)$ e comprove que esse pulso satisfaz (ou não) o critério de Nyquist.
 - Se o pulso não satisfizer o critério de Nyquist, qual é a taxa de transmissão (em bits por segundo) e qual é o valor do fator de decaimento?

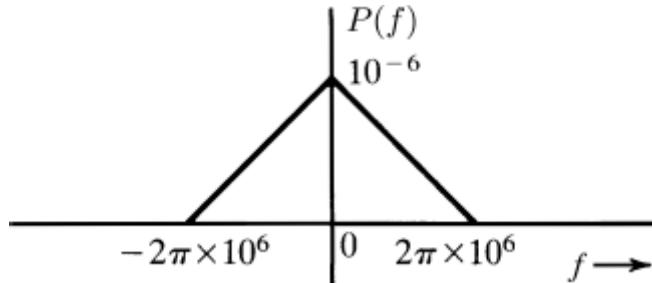


Figura E.7.3-4

- 7.3-5** Um pulso $p(t)$ cujo espectro $P(f)$ é mostrado na Fig. E.7.3-5 satisfaz o critério de Nyquist. Se $f_1 = 0,8$ MHz e $f_2 = 1,2$ MHz, determine a máxima taxa em que dados binários podem ser transmitidos por esse pulso usando o critério de Nyquist. Qual é o valor do fator de decaimento?

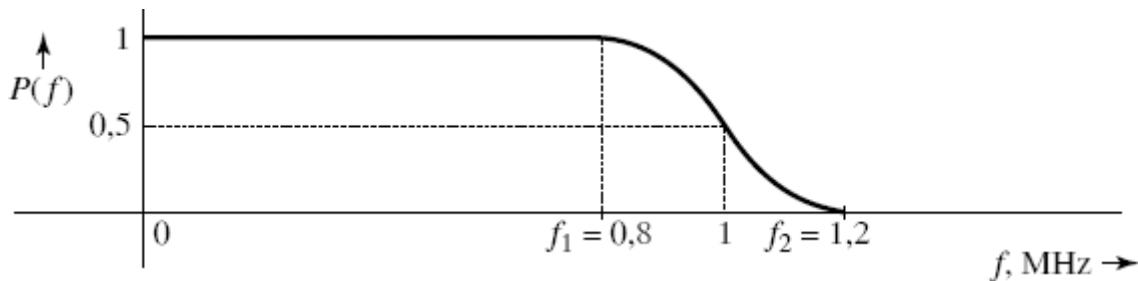


Figura E.7.3-5

- 7.3-6** Dados binários, à taxa de 1 Mbit/s, devem ser transmitidos com uso de pulsos que satisfaçam o critério de Nyquist, sendo $P(f)$ mostrada na Fig. E.7.3-5. As frequências f_1 e f_2 do espectro são ajustáveis. O canal

disponível para transmissão desses dados tem largura de banda de 700 kHz. Determine f_1 e f_2 e o fator de decaimento.

- 7.3-7** Mostre que a transformada de Fourier inversa de $P(f)$ na Eq. (7.39) é, de fato, o pulso $p(t)$ dado na Eq. (7.38), que satisfaz o segundo critério de Nyquist.

Sugestão: Use a Eq. (3.32) para determinar a transformada inversa de Fourier de $P(f)$ na Eq. (7.39) e expresse $\text{sinc}(x)$ na forma $\frac{\sin x}{x}$.

- 7.3-8** Mostre que a transformada de Fourier inversa de $P(f)$ (o espectro do pulso cosseno levantado) na Eq. (7.35) é o pulso $p(t)$ dado na Eq. (7.36).

Sugestão: Use a Eq. (3.32) para determinar a transformada inversa de Fourier de $P(f)$ na Eq. (7.35) e expresse $\text{sinc}(x)$ na forma $\frac{\sin x}{x}$.

- 7.3-9** Mostre que existe um (e somente um) pulso $p(t)$ de largura de banda $R_b/2$ Hz que satisfaz o segundo critério de Nyquist [Eq. (7.37)]. Mostre que esse pulso é dado por

$$p(t) = \{\text{sinc}(\pi R_b t) + \text{sinc}[\pi R_b(t - T_b)]\} = \frac{\sin(\pi R_b t)}{\pi R_b t(1 - R_b t)}$$

e que sua transformada de Fourier é $P(f)$ dada na Eq. (7.39).

Sugestão: Para um pulso de largura de banda $R_b/2$ Hz, o intervalo de Nyquist é $1/R_b = T_b$, e a condição (7.37) dá os valores das amostras de Nyquist em $t = \pm nT_b$. Para construir $p(t)$, use a fórmula de interpolação [Eq. (6.10)] com $B = R_b/2$, $T_s = T_b$. Na determinação de $P(f)$, use $(1 + e^{-j2\pi fT_b}) = e^{-j\pi fT_b} (e^{j\pi fT_b} + e^{-j\pi fT_b})$.

- 7.3-10** Em uma transmissão de dados binários usando pulsos duobinários, valores de amostras foram lidos como:

$$120 \quad -2 \quad -200 \quad -20200 \quad 2000 \quad -2$$

- (a) Determine se há qualquer erro na detecção.
(b) Se não houver erro de detecção, determine a sequência de bits recebida.

- 7.3-11** Em uma transmissão de dados binários usando pulsos duobinários, valores de amostras foram lidos como:

$$12000 \quad -200 \quad -20200 \quad -20220 \quad -2$$

- (a) Determine se há qualquer erro na detecção.
(b) Você é capaz de deduzir a correta sequência de dígitos transmitida? Há mais de uma sequência correta possível. Forneça tantas sequências corretas quanto possível, admitindo que a ocorrência de mais de um erro de detecção é extremamente provável.

- 7.4-1** No Exemplo 7.2, quando a sequência $S = 101010100000111$ foi aplicada à entrada do desembaralhador na Fig. 7.20a, a saída T foi determinada como 101110001101001 . Comprove que, quando essa sequência T é aplicada à entrada do desembaralhador na Fig. 7.20b, a saída é a sequência original de entrada, $S = 101010100000111$.

- 7.4-2** Projete um desembaralhador para o embaralhador da Fig. E.7.4-2. Se uma sequência $S = 101010100000111$ for aplicada à entrada do embaralhador, determine a sequência de saída T . Comprove que, se essa sequência T for aplicada à entrada do desembaralhador, a saída será a sequência S .

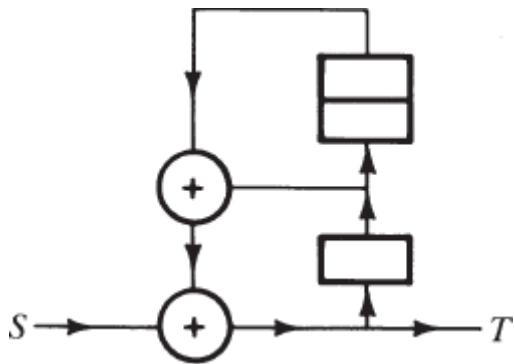


Figura E.7.4-2

- 7.4-3** Repita o Exercício 7.4-2 para o caso em que o desembaralhador mostrado na Fig. E.7.4-3 é concatenado com o embaralhador na Fig. E.7.4-2 para formar um embaralhador composto.

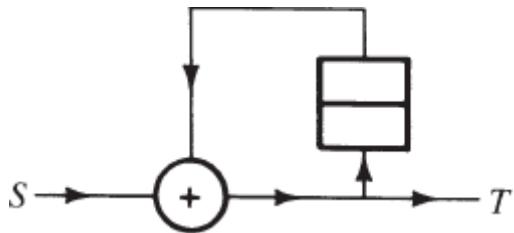


Figura E.7.4-3

- 7.5-1** Em certo sistema de comunicação binária que usa pulsos que satisfazem o critério de Nyquist, um pulso recebido $p_r(t)$ (Fig. 7.22a) tem os seguintes valores de amostras não nulas

$$\begin{aligned} p_r(0) &= 1 \\ p_r(T_b) &= 0,1 \quad p_r(-T_b) = 0,3 \\ p_r(2T_b) &= -0,02 \quad p_r(-2T_b) = -0,07 \end{aligned}$$

- (a) Determine a configuração das derivações de um equalizador de três derivações e forçamento a zero.
- (b) Usando o equalizador na parte (a), determine a ISI residual não nula.

- 7.7-1** Em um esquema PAM com $M = 16$,

- (a) Determine a mínima largura de banda necessária para transmitir dados a uma taxa de 12.000 bits/s com ISI zero.
- (b) Determine a largura de banda de transmissão se pulsos que satisfazem o critério de Nyquist com fator de decaimento $r = 0,2$ forem usados para transmitir os dados.

- 7.7-2** Um sinal de áudio de largura de banda de 4 kHz é amostrado a uma taxa 25% acima da taxa de Nyquist, e quantizado. O erro de quantização não deve exceder 0,1% da amplitude de pico do sinal. As resultantes amostras quantizadas são, então, codificadas e transmitidas por pulsos 4-ários.

- (a) Determine o número mínimo de pulsos 4-ários para codificar cada amostra.
- (b) Determine a largura mínima de banda necessária à transmissão destes dados com ISI zero.
- (c) Se pulsos 4-ários que satisfazem o critério de Nyquist com 25% de decaimento forem usados para transmitir estes dados, determine a largura de banda de transmissão.

- 7.7-3** Dados binários são transmitidos em um certo canal a uma taxa de R_b bit/s. Para reduzir a largura da banda, foi decidido o uso de sinalização PAM 16-ária para a transmissão desses dados.

- (a) Qual é o fator de redução de largura de banda?

- (b)** Qual é o fator de aumento da potência de transmissão, admitindo que a mínima separação entre amplitudes de pulso seja a mesma nos dois casos.

Sugestão: Tome amplitudes de pulso como $\pm A/2, \pm 3A/2, \pm 5A/2, \pm 7A/2, \dots, \pm 15A/2$, de modo que a mínima separação entre os vários níveis de amplitude seja A (como no caso binário, com pulsos $\pm A/2$). Suponha que todos os 16 níveis tenham igual probabilidade de ocorrência. Recorde, ainda, que a multiplicação de um pulso por uma constante k aumenta a energia do mesmo k^2 vezes.

- 7.7-4** Um sinal de áudio de largura de banda de 10 kHz é amostrado à taxa de 24 kHz, quantizado em 256 níveis e codificado por pulsos PAM M -ários que satisfazem o critério de Nyquist com fator de decaimento $r = 0,2$. Uma largura de banda de 30 kHz é disponível para a transmissão dos dados. Determine o melhor valor de M .

- 7.7-5** Considere o caso de transmissão binária via sinalização polar que usa pulsos retangulares de meia largura, de amplitudes $A/2$ e $-A/2$. A taxa de dados é R_b bit/s.

- (a)** Qual é a mínima largura de banda e a potência transmitida.
(b) Esses dados devem ser transmitidos por pulsos retangulares M -ários de meia largura e amplitudes

$$\pm A/2, \pm 3A/2, \pm 5A/2, \dots, \pm [(M-1)/2]A$$

Repare que, para manter a mesma imunidade ao ruído, a mínima separação entre amplitudes de pulso é A . Se todos os pulsos M -ários tiverem igual probabilidade de ocorrência, mostre que a potência transmitida será

$$P = \frac{(M^2 - 1)A^2}{24 \log_2 M}$$

Determine, ainda, a largura de banda.

- 7.8-1** A Fig. E7.8-1 mostra um esquema de transmissão de dados binários. O gerador de sinal em banda base usa pulsos de largura completa e sinalização polar. A taxa de dados é 1 Mbit/s.

- (a)** Se o modulador gerar um sinal PSK, qual é a largura de banda da saída modulada?
(b) Se o modulador gerar FSK com diferença $f_{c1} - f_{c0} = 100$ kHz (Fig. 7.32c), determine a largura de banda do sinal modulado.

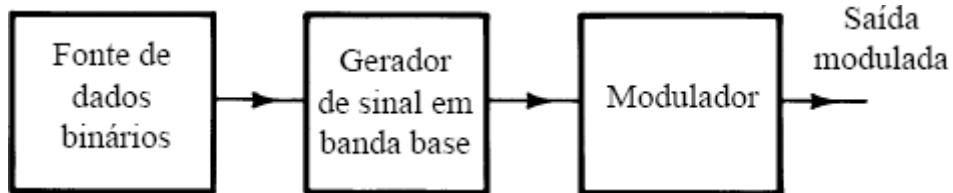


Figura E.7.8-1

- 7.8-2** Refaça o Exercício 7.8-1 com pulsos de largura completa que satisfazem o critério de Nyquist com $r = 0,2$.

- 7.8-3** Refaça o Exercício 7.8-1 para um esquema multiamplitude com $M = 4$ (sinalização PAM com pulsos de largura completa). Em FSK [Exercício 7.8-1, parte (b)], admita que níveis sucessivos de amplitude sejam transmitidos por frequências separadas por 100 kHz.

* Isso admite não mais que um erro em sequência. Múltiplos erros em sequência podem cancelar os respectivos efeitos e, assim, não serem detectados. Contudo, a probabilidade de múltiplos erros é muito menor que a de apenas um erro. Mesmo para um erro, não podemos identificar sua localização exatamente. Portanto, esse código detecta a presença de erros isolados, mas não é capaz de corrigi-los.

* Acoplamento ac é necessário porque as rotas dc providas por pares de cabo entre estações repetidoras são usadas para transmitir a potência necessária à operação dos repetidores.

* A rigor, a primeira frequência de nulo acima de dc nem sempre é uma boa medida da largura de banda de um sinal. A quantidade de sinal contida no lóbulo principal (primeiro) da PSD é que determina se o primeiro nulo dc será uma medida significativa de largura de banda, como veremos mais adiante, ao compararmos a PSD de vários códigos de linha (Fig. 7.9). Na maioria dos casos práticos, essa aproximação é aceitável para os códigos de linha e formas de pulsos usados comumente.

* O esquema que usa pulso de largura completa $p(t) = \Pi(t/T_b)$ é um exemplo de um esquema sem retorno ao zero (NRZ). O esquema de meia largura de pulso, por sua vez, é um exemplo de um esquema com retorno ao zero (RZ).

* O trem de impulsos na Fig. 3.23a do Exemplo 3.11 é $\delta_{T_b}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_b)$. Além disso, a série de Fourier para esse trem de impulsos é obtida da Eq. (2.67) como

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_b) = \frac{1}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn2\pi R_b t} \quad R_b = \frac{1}{T_b}$$

Tomamos a transformada de Fourier dos dois lados dessa equação, e usamos o fato de que $\delta(t - nT_b) \iff e^{-jn2\pi fT_b}$
 $\delta(t - nT_b) \iff e^{-jn2\pi fT_b}$ Isso leva a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn2\pi fT_b} = \frac{1}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_b}\right)$$

* Na verdade, um pulso correspondendo a **0** seria negativo. Contudo, considerar todos os pulsos como positivos não afeta o raciocínio. Mostrar pulsos negativos tornaria a figura desnecessariamente confusa.

* Observemos que, se $R_b > 2B$, em que B é a largura de banda (em hertz) de $P(f)$, as repetições de $P(f)$ não se sobrepõem, e a condição (7.27) não pode ser satisfeita. Para $R_b = 2B$, a condição é satisfeita somente para o caso ideal passa-baixas $P(f)$ [$p(t) = \text{sinc}(\pi R_b t)$], que não é realizable. Logo, devemos ter $B > R_b/2$.

* O espectro de fase é linear: $\theta_p(f) = -\pi f T_b$.

* O repetidor, em geral, inclui circuito para proteger a eletrônica do regenerador de transientes de alta tensão induzidos por surtos de potência ou descargas elétricas. Enrolamentos especiais de transformador podem ser fornecidos para acoplar sinais espúrios a cabos dedicados.

* Assumindo ISI zero.

* Isso se aplica ao caso de decisão em dois níveis [por exemplo, quando $p(t)$ e $-p(t)$ são usados para **1** e **0**, respectivamente]. No caso de decisão em três níveis (por exemplo, sinalização bipolar), haverá dois limiares.

* QPSK tem diversas variações práticas, incluindo QPSK offset.

8 FUNDAMENTOS DA TEORIA DA PROBABILIDADE

Até aqui, estudamos sinais cujos valores em qualquer instante t eram determinados por suas descrições analíticas ou gráficas. Sinais desse tipo são **determinísticos**, implicando certeza absoluta sobre seus valores em qualquer instante de tempo t . Esses sinais, que podem ser especificados com certeza, são incapazes de transportar informação. Veremos no Capítulo 13 que a informação é inherentemente relacionada à incerteza. Quanto maior a incerteza em relação a um sinal (ou mensagem) a ser recebido(a), maior o conteúdo de informação. Se uma mensagem a ser recebida for especificada (ou seja, previamente conhecida), não conterá incerteza e, portanto, não transportará qualquer informação ao receptor. Portanto, sinais que transportam informação devem ser imprevisíveis. Além dos sinais que transportam informação, sinais de ruído que perturbam sinais de informação em um sistema também são imprevisíveis (caso contrário, poderiam ser subtraídos). As formas de onda de sinais de mensagem e de ruído imprevisíveis são exemplos de **processos aleatórios**, que têm papel fundamental em sistemas de comunicação e na análise dos mesmos.

Fenômenos aleatórios têm origem em nossa parcial ignorância dos mecanismos de geração (como nos casos de sinais de mensagem e de ruído) ou no fato de os fenômenos serem governados por leis que são fundamentalmente aleatórias (como em mecânica quântica). Em ainda outra situação, como o resultado da jogada de um dado, é possível prever o resultado desde que saibamos exatamente todas as condições: o ângulo em que o dado foi lançado, a natureza da superfície em que o mesmo é jogado, a força imposta pelo jogador e assim por diante. A grande complexidade e a alta sensibilidade a todas as condições fazem com que a análise exata do problema seja impraticável, o que nos obriga a aceitar a previsão de resultado em termos médios. Aqui, o fenômeno aleatório tem origem em nossa falta de disposição em efetuar a análise completa, uma vez que a coleta precisa de todas as condições é impraticável e não justifica o esforço.

Iniciemos com uma revisão de conceitos fundamentais da teoria da probabilidade, que forma a base para a descrição de processos aleatórios.

8.1 CONCEITO DE PROBABILIDADE

Para iniciar a discussão de probabilidade, precisamos definir alguns elementos básicos e termos importantes. O termo **experimento** é usado na teoria da probabilidade para descrever um processo cujo resultado não pode ser predito completamente, pois as condições em que é executado não podem ser predeterminadas com precisão e completeza suficientes. O lançamento de uma moeda ou dado e a retirada de uma carta de um baralho são exemplos de tais experimentos. Um experimento pode ter vários **resultados** que podem ser identificados separadamente. Por exemplo, o lançamento de um dado tem seis resultados identificáveis possíveis (1, 2, 3, 4, 5, e 6). Um **evento** é um subconjunto de resultados que compartilham algumas características comuns. Um evento ocorre se o resultado do experimento pertencer ao específico subconjunto de resultados que define o evento. No experimento de lançamento de um dado, por exemplo, o evento “número ímpar obtido” admite três resultados (1, 3, e 5). Logo, esse evento é um conjunto que consiste em três resultados (1, 3, e 5). Assim, eventos são agrupamentos de resultados em classes entre as quais decidimos estabelecer uma distinção. Os conceitos de **experimento**, **resultados** e **eventos** formam a base da teoria da probabilidade.

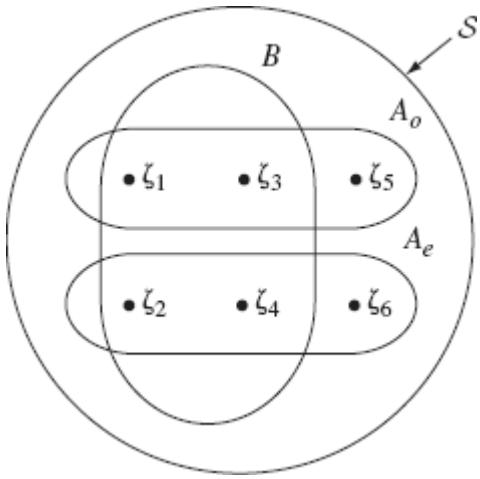


Figura 8.1

Espaço de amostras para o lançamento de um dado.

Definimos o **espaço de amostras** (ou espaço amostral) S como uma coleção de todos os resultados possíveis e identificáveis de um experimento. Em outras palavras, o **espaço de amostras** S especifica o **experimento**. Cada resultado é um **elemento** ou **ponto de amostra** (ou ponto amostral) desse espaço S e pode ser representado por um ponto no espaço de amostras. No experimento de lançamento de um dado, por exemplo, o espaço de amostras consiste em seis elementos representados pelos seis pontos $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5$ e ζ_6 , em que ζ_i representa o resultado “número i é obtido” (Fig. 8.1). O evento, por sua vez, é um subconjunto de S . O evento “número ímpar é obtido”, denotado por A_o , é um subconjunto de S (ou um conjunto dos pontos de amostra ζ_1, ζ_3 e ζ_5). Do mesmo modo, o evento A_e , “número par é obtido”, é outro subconjunto de S (ou um conjunto dos pontos de amostra ζ_2, ζ_4 e ζ_6):

$$A_o = (\zeta_1, \zeta_3, \zeta_5) \quad A_e = (\zeta_2, \zeta_4, \zeta_6)$$

Denotemos o evento “número menor ou igual a 4 é obtido” por B . Assim,

$$B = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$$

Esses eventos são marcados na Fig. 8.1. Reparemos que um resultado também pode ser um evento, pois um resultado é um subconjunto de S com somente um elemento.

O **complemento** de qualquer evento A , denotado por A^c , é o evento que contém todos os pontos que não estão em A . Assim, para o exemplo B na Fig. 8.1, $B^c = (\zeta_5, \zeta_6)$. $A_o^c = A_e$ e $A_e^c = A_o$. Um evento que não tenha pontos de amostra é um **evento nulo**, denotado por 0, e igual a S^c .

A **união** de eventos A e B , denotada por $A \cup B$, é o evento que contém todos os pontos em A e em B . Esse evento é enunciado como tendo “um resultado de A ou de B ”. Para os eventos na Fig. 8.1,

$$A_o \cup B = (\zeta_1, \zeta_3, \zeta_5, \zeta_2, \zeta_4)$$

$$A_e \cup B = (\zeta_2, \zeta_4, \zeta_6, \zeta_1, \zeta_3)$$

Observemos que a operação de união comuta:

$$A \cup B = B \cup A \tag{8.1}$$

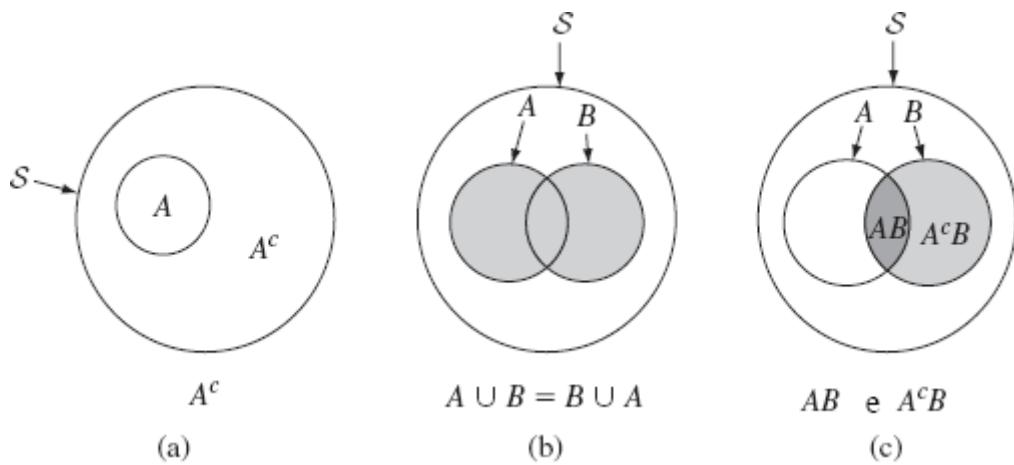


Figura 8.2

Representação de (a) complemento, (b) união e (c) interseção de eventos.

A **interseção** (ou intersecção) de eventos A e B , denotada por $A \cap B$ ou simplesmente AB , é o evento que contém pontos comuns de A e de B . Esse evento é enunciado como tendo “um resultado que é de A e de B ”, também conhecido como **evento conjunto** $A \cap B$. Assim, os eventos $A \cap B$, “número par menor ou igual a 4 para cima”, é o conjunto (ζ_2, ζ_4) ; $A \cup B$ é obtido do mesmo modo:

$$A_e B = (\xi_2, \xi_4) \qquad \qquad A_o B = (\xi_1, \xi_3)$$

Observemos que a interseção também comuta

$$A \cap B = B \cap A \quad (8.2)$$

Todos esses conceitos podem ser demonstrados em um diagrama de Venn (Fig. 8.2). Se os eventos A e B forem tais que

$$A \cap B = \emptyset \quad (8.3)$$

então, dizemos que A e B são eventos **disjuntos** ou **mutuamente exclusivos**. Isso significa que eventos A e B não podem ocorrer simultaneamente. Na Fig. 8.1, os eventos A_e e A_o são mutuamente exclusivos; isso significa que, em qualquer repetição (ou ensaio) do experimento, se A_e ocorrer, A_o não pode ocorrer ao mesmo tempo e vice-versa.

Frequência Relativa e Probabilidade

Embora o resultado de um experimento seja imprevisível, existe uma *regularidade estatística* nos resultados. Por exemplo, se uma moeda for jogada um grande número de vezes, em cerca da metade das vezes o resultado será “cara” e na outra metade, “coroa”. Podemos dizer que a frequência relativa dos dois resultados “cara” e “coroa” é um meio. Essa frequência relativa representa a possibilidade de ocorrência de um evento particular.

Seja A um dos eventos de interesse em um experimento. Se conduzirmos uma sequência de N repetições independentes* desse experimento e se o evento A ocorrer em $N(A)$ das N repetições, a fração

$$f(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(A)}{N} \quad (8.4)$$

é denominada **frequência relativa** do evento A . Observemos que, para N pequeno, o valor da fração $N(A)/N$ pode variar muito com N . À medida que N aumenta, a fração tenderá a um limite, devido à regularidade estatística.

A probabilidade de um evento tem as mesmas conotações que a frequência relativa do evento. Assim, estimamos a probabilidade de cada evento como a frequência relativa do evento.* Portanto, para um evento A , alocamos uma probabilidade $P(A)$

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(A)}{N} \quad (8.5)$$

Da Eq. (8.5), segue que

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (8.6)$$

Exemplo 8.1 Aloquemos probabilidade a cada um dos seis resultados na Fig. 8.1.

Como cada um dos seis resultados tem igual possibilidade de ocorrência em um grande número de repetições independentes, cada resultado aparecerá em um sexto das repetições. Logo,

$$P(\zeta_i) = \frac{1}{6} \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad (8.7)$$

Consideremos, agora, os dois eventos A e B de um experimento. Suponhamos que efetuemos N repetições independentes desses experimentos, e que eventos A e B ocorram em $N(A)$ e $N(B)$ repetições, respectivamente. Se A e B forem mutuamente exclusivos (ou disjuntos), se A ocorrer, B não pode ocorrer, e vice-versa. Portanto, o evento $A \cup B$ ocorre em $N(A) + N(B)$ repetições, e

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(A) + N(B)}{N} \\ &= P(A) + P(B) \quad \text{se } A \cap B = \emptyset \end{aligned} \quad (8.8)$$

Esse resultado pode ser estendido a mais de dois eventos mutuamente exclusivos. Em outras palavras, se eventos $\{A_i\}$ forem mutuamente exclusivos, tais que

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j$$

então

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$$

Exemplo 8.2 Aloquemos probabilidades aos eventos A_e , A_o , B , $A_e B$, e $A_o B$ na Fig. 8.1.

Como $A_e = (\zeta_2 \cup \zeta_4 \cup \zeta_6)$, sendo ζ_2 , ζ_4 e ζ_6 mutuamente exclusivos,

$$P(A_e) = P(\zeta_2) + P(\zeta_4) + P(\zeta_6)$$

Da Eq. (8.7), segue que

$$P(A_e) = \frac{1}{2} \quad (8.9a)$$

Do mesmo modo,

$$P(A_o) = \frac{1}{2} \quad (8.9b)$$

$$P(B) = \frac{2}{3} \quad (8.9c)$$

Da Fig. 8.1, podemos observar que

$$A_e B = \zeta_2 \cup \zeta_4$$

e

$$P(A_e B) = P(\zeta_2) + P(\zeta_4) = \frac{1}{3} \quad (8.10a)$$

Da mesma forma,

$$P(A_o B) = \frac{1}{3} \quad (8.10b)$$

Podemos mostrar que

$$P(S) = 1 \quad (8.11)$$

Esse resultado pode ser provado com o uso de frequência relativa. Seja um experimento repetido N vezes (N grande). Como S é a união de todos os resultados possíveis, S ocorre em cada repetição. Logo, o evento S ocorre em N de N repetições, resultando na Eq. (8.11).

Exemplo 8.3 Dois dados são lançados. Determinemos a probabilidade de que a soma dos números em cada dado seja sete.

Para esse experimento, o espaço de amostras contém 36 pontos de amostra, pois existem 36 resultados possíveis. Todos os resultados têm igual probabilidade de ocorrência. Logo, a probabilidade de cada resultado é $1/36$.

A soma igual a sete pode ser obtida de seis combinações: $(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$ e $(6, 1)$. Logo, o evento “a soma é sete” é a união de seis resultados, cada um com probabilidade $1/36$. Portanto,

$$P(\text{“soma é sete”}) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

Exemplo 8.4 Uma moeda é jogada quatro vezes seguidas. Determinemos a probabilidade de obtermos exatamente duas caras.

Um total de $2^4 = 16$ resultados distintos é possível, e todos têm igual probabilidade de ocorrência, dada a simetria da situação. Portanto, o espaço de amostras consiste em 16 pontos, cada um com probabilidade $1/16$. Os 16 resultados são os seguintes, nos quais H representa “cara” e T , “coroa”:

HHHH	TTTT
HHHT	TTTH
HHTH	TTHT
→ HHTT	→ TTHH
HTHH	THTT
→ HTHT	→ THTH
→ HTTH	→ THHT
HTTT	THHH

Seis dos 16 resultados levam ao evento “ocorrência de duas caras” (marcados com setas). Como todos os seis resultados são disjuntos (mutuamente exclusivos), temos

$$P(\text{de obter exatamente duas casas}) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

No Exemplo 8.4, o método de listar todos os resultados possíveis rapidamente se torna impraticável à medida que o número de jogadas de moeda aumenta. Por exemplo, se uma moeda for jogada apenas 10 vezes, o número total de resultados será 1024. Uma abordagem mais conveniente seria aplicar os resultados de análise combinatória usada em repetições de Bernoulli, a serem discutidas em breve.

Probabilidade Condicional e Eventos Independentes

Probabilidade Condisional: Com frequência, a probabilidade de um evento é influenciada pelo resultado de outro. Como exemplo, consideremos a retirada de duas cartas sucessivas de um baralho. Seja A o evento em que a primeira carta retirada é um ás. A carta tirada na primeira rodada não é devolvida ao baralho. Seja B o evento em que a segunda carta retirada é um ás. É evidente que a probabilidade de tirar um ás na segunda rodada será influenciada pelo resultado da primeira. Se a primeira rodada não resultar em um ás, a probabilidade de obter um ás na segunda rodada é $4/51$. A probabilidade do evento B depende, portanto, da ocorrência do evento A . Agora, introduzimos o conceito de **probabilidade condicional** $P(B|A)$ para denotar a probabilidade do evento B dada a ocorrência do evento A . $P(B|A)$ é lido como “probabilidade de B dado A ”.

Consideremos N repetições de um experimento em que o evento A ocorre n_1 vezes. Dessa n_1 repetições, o evento B ocorre n_2 vezes. É claro que n_2 é o número de vezes em que o evento conjunto $A \cap B$ (Fig. 8.2c) ocorre. Ou seja,

$$P(A \cap B) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{n_2}{N} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{n_1}{N} \right) \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$$

Reparemos que $\lim_{N \rightarrow \infty} (n_1/N) = P(A)$, $\lim_{N \rightarrow \infty} (n_2/n_1) = P(B|A)^*$, pois B ocorre n_2 das n_1 vezes em que A ocorre. Isso representa a probabilidade condicional de B dado A . Portanto,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) \tag{8.12}$$

e

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{desde que } P(A) > 0 \tag{8.13a}$$

Usando um argumento semelhante, obtemos

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{desde que } P(B) > 0 \tag{8.13b}$$

Da Eq. (8.13) segue que

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} \quad (8.14a)$$

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} \quad (8.14b)$$

As Eqs. (8.14) são chamadas **regra de Bayes**. Na regra de Bayes, uma probabilidade condicional é expressa em termos da probabilidade condicional reversa.

Exemplo 8.5 Um experimento consiste em tirar duas cartas de um baralho sucessivamente (sem devolver ao baralho a primeira carta retirada). Aloquemos um valor à probabilidade de obter dois ases vermelhos em duas rodadas.

Sejam A e B os eventos “ás vermelho na primeira rodada” e “ás vermelho na segunda rodada”, respectivamente. Desejamos determinar $P(A \cap B)$,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

e a frequência relativa de A é $2/52 = 1/26$. Logo,

$$P(A) = \frac{1}{26}$$

$P(B|A)$ é a probabilidade de tirar um ás vermelho na segunda rodada, dado que um ás vermelho foi tirado na primeira. A frequência relativa desse evento é $1/51$, de modo que

$$P(B|A) = \frac{1}{51}$$

Logo,

$$P(A \cap B) = \left(\frac{1}{26}\right)\left(\frac{1}{51}\right) = \frac{1}{1326}$$

Eventos Independentes: Na probabilidade condicional, apresentamos um exemplo no qual a ocorrência de um evento era influenciada pela ocorrência de outro. É claro que há muitos exemplos em que dois ou mais eventos são totalmente independentes, isto é, a ocorrência de um evento não influencia de forma alguma a ocorrência do outro evento. Como exemplo, mais uma vez, consideremos a retirada de duas cartas sucessivas de um baralho; mas, agora, a carta tirada na primeira rodada é devolvida e o baralho é embaralhado para a segunda rodada. Nesse caso, o resultado da segunda rodada não é influenciado de modo algum pelo resultado da primeira rodada. Assim, $P(B)$, a probabilidade de tirar um ás na segunda rodada, independe da ocorrência do evento A (tirar um ás na primeira rodada). Portanto, os eventos A e B são independentes. A probabilidade condicional $P(B|A)$ é dada por $P(B)$.

O evento B é **independente** do evento A se e somente se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (8.15a)$$

Reparemos que, se os eventos A e B forem independentes, das Eqs. (8.13a) e (8.15b) segue que

$$P(B|A) = P(B) \quad (8.15b)$$

Essa relação afirma que, se B for independente de A , sua probabilidade não é afetada pelo evento A . Naturalmente, se o evento B for independente do evento A , o evento A também é independente do evento B . Podemos ver da Eq. (8.14) que

$$P(A|B) = P(A) \quad (8.15c)$$

Reparemos que há uma grande diferença entre **eventos independentes** e **eventos mutuamente exclusivos**. Se A e B forem mutuamente exclusivos, $A \cap B$ é vazio e $P(A \cap B) = 0$. Se A e B forem mutuamente exclusivos, A e B não podem ocorrer ao mesmo tempo. Isso significa que NÃO são eventos independentes.

Repetições de Bernoulli

Nas repetições ou ensaios de Bernoulli, se um dado evento A ocorrer, dizemos que é um “sucesso”. Se $P(A) = p$, a probabilidade do sucesso é p . Se q for a probabilidade de falha, $q = 1 - p$. Determinemos a probabilidade de k sucessos em n repetições (de Bernoulli). O resultado de cada ensaio independe dos resultados dos outros ensaios. É claro que, em n ensaios, se sucessos ocorrerem em k deles, falha deve ocorrer em $n - k$ ensaios. Como os resultados das repetições são independentes, a probabilidade desse evento é $p^n(1-p)^{n-k}$, ou seja,

$$P(k \text{ sucessos em uma ordem específica em } n \text{ ensaios}) = p^k(1-p)^{n-k}$$

Contudo, o evento “ k sucessos em n ensaios” pode ocorrer de várias maneiras diferentes (ordens diferentes). Da análise combinatória, é bem conhecido que existem

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (8.16)$$

maneiras em que k posições podem ser tomadas de n posições (o que é igual ao número de maneiras de obter k sucessos em n repetições).

Isso pode ser provado da seguinte forma: consideremos uma urna que contém n bolas distintas, marcadas como 1, 2, ..., n . Suponhamos que k bolas sejam retiradas dessa urna e não devolvidas. A primeira bola pode ser qualquer uma das n bolas; a segunda pode ser qualquer uma das remanescentes ($n - 1$) bolas, e assim por diante. Portanto, o número total de maneiras em que k bolas podem ser retiradas é

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

A seguir, consideremos um conjunto qualquer de k bolas retiradas. Essas bolas podem ser ordenadas de diferentes formas. Poderíamos rotular qualquer uma das k bolas como a de número 1, qualquer uma das $(k-1)$ bolas remanescentes como a de número 2, e assim por diante. Isso produz um total de $k(k-1)(k-2)\dots 1 = k!$ padrões distintos formados por k bolas. O número total de maneiras em que k coisas podem ser tomadas de n coisas é $n!/(n-k)!$. Todavia, muitas dessas formas usarão as mesmas k coisas, ordenadas de formas diferentes. Essas formas em que k coisas podem ser tomadas de n coisas sem considerar a ordem (um subconjunto desordenado k tomado de n coisas) é $n!/(n-k)!$ dividido por $k!$. Isso é precisamente definido pela Eq. (8.16).

Isso significa que a probabilidade de k sucessos em n repetições é

$$\begin{aligned} P(k \text{ sucessos em } n \text{ repetições}) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned} \quad (8.17)$$

Jogar uma moeda e observar o número de caras é um ensaio de Bernoulli com $p = 0,5$. Logo, a probabilidade de observar k caras em n rodadas é

$$P(k \text{ caras em } n \text{ rodadas}) = \binom{n}{k} (0,5)^k (0,5)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} (0,5)^n$$

Exemplo 8.6 Um canal simétrico binário (BSC – *Binary Symmetric Channel*) tem probabilidade de erro P_e (isto é, P_e é a probabilidade de receber **0** quando **1** é transmitido ou vice-versa). Notemos que o comportamento do canal é simétrico em relação a **0** e **1**. Assim,

$$P(\mathbf{0}|\mathbf{1}) = P(\mathbf{1}|\mathbf{0}) = P_e$$

e

$$P(\mathbf{0}|\mathbf{0}) = P(\mathbf{1}|\mathbf{1}) = 1 - P_e$$

em que $P(y|x)$ denota a probabilidade de receber y quando x foi transmitido. Uma sequência de n dígitos binários é transmitida nesse canal. Determinemos a probabilidade de receber exatamente k dígitos em erro.

A recepção de cada dígito independe da recepção dos outros dígitos. Esse é um exemplo de uma repetição de Bernoulli com probabilidade de sucesso $p = P_e$ (“sucesso”, aqui, consiste em receber um dígito com erro). A probabilidade de k sucessos em n repetições (k erros em n dígitos) é

$$P(\text{recepção de } k \text{ dentre } n \text{ dígitos em erro}) = \binom{n}{k} P_e^k (1 - P_e)^{n-k}$$

Por exemplo, se $P_e = 10^{-5}$, a probabilidade de receber dois dígitos com erro em uma sequência de oito dígitos é

$$\binom{8}{2} (10^{-5})^2 (1 - 10^{-5})^6 \simeq \frac{8!}{2! 6!} 10^{-10} = (2,8) 10^{-9}$$

Exemplo 8.7 Probabilidade de Erro em Repetidor PCM

Na modulação por código de pulso, repetidores regenerativos são usados para detectar pulsos (antes que sejam perdidos em ruído) e retransmitir pulsos novos e limpos. Isso combate o acúmulo de ruído e distorção de pulso.

Certo canal PCM consiste em n enlaces idênticos em cascata (Fig. 8.3). Os pulsos são detectados no fim de cada enlace, e pulsos novos e limpos são transmitidos ao próximo enlace. Se P_e for a probabilidade de erro na detecção de um pulso em qualquer enlace, mostremos que P_E , a probabilidade de erro na detecção de um pulso em todo o canal (nos n enlaces em cascata), é

$$P_E \simeq nP_e \quad nP_e \ll 1$$



Figura 8.3
Repetidor PCM.

As probabilidades de detecção de um pulso corretamente em um enlace e em todo o canal (n enlaces em cascata) são $1 - P_e$ e $1 - P_E$, respectivamente. Um pulso pode ser detectado corretamente em todo o canal se o pulso for detectado corretamente em cada enlace ou erros forem feitos somente em um número par de enlaces.

$$\begin{aligned} 1 - P_E &= P(\text{detecção correta em todos os enlaces}) \\ &\quad + P(\text{erro em apenas dois enlaces}) \\ &\quad + P(\text{erro em apenas quatro enlaces}) + \dots \\ &\quad + P(\text{erro em apenas } 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ enlaces}) \end{aligned}$$

em que $\lfloor a \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a a .

Como a detecção de pulsos em cada enlace independe da detecção em outros enlaces (Exemplo 8.6),

$$P(\text{detecção correta em todos os } n \text{ enlaces}) = (1 - P_e)^n$$

e

$$P(\text{erro em apenas } k \text{ enlaces}) = \frac{n!}{k!(n-k)!} P_e^k (1 - P_e)^{n-k}$$

Logo,

$$1 - P_E = (1 - P_e)^n + \sum_{k=2,4,6,\dots}^{\alpha} \frac{n!}{k!(n-k)!} P_e^k (1 - P_e)^{n-k}$$

Na prática, $P_e \ll 1$, de modo que somente os dois primeiros termos no lado direito dessa equação são relevantes. Temos $(1 - P_e)^{n-k} \approx 1$, e

$$\begin{aligned} 1 - P_E &\simeq (1 - P_e)^n + \frac{n!}{2!(n-2)!} P_e^2 \\ &= (1 - P_e)^n + \frac{n(n-1)}{2} P_e^2 \end{aligned}$$

Se $n P_e \ll 1$, o segundo termo também pode ser desprezado, de modo que

$$\begin{aligned} 1 - P_E &\simeq (1 - P_e)^n \\ &\simeq 1 - nP_e \quad nP_e \ll 1 \end{aligned}$$

e

$$P_E \simeq nP_e$$

Podemos explicar esse resultado heuristicamente considerando a transmissão de N ($N \rightarrow \infty$) pulsos. Cada enlace faz $n P_e$ erros, e o número total de erros é aproximadamente nNP_e (aproximadamente, pois alguns pulsos em erro em um enlace estarão em erro em outros enlaces). Assim, a probabilidade total de erro é nP_e .

Exemplo 8.8

Em comunicação binária, uma das técnicas usadas para aumentar a confiabilidade de um canal consiste em repetir uma mensagem diversas vezes. Por exemplo, podemos enviar cada mensagem (**0** ou **1**) três vezes. Portanto, os dígitos transmitidos são **000** (para a mensagem **0**) ou **111** (para a mensagem **1**). devido ao ruído de canal, podemos receber qualquer uma das oito possíveis combinações de três dígitos binários. A decisão para determinar a mensagem transmitida é feita segundo a regra da maioria, ou seja, se pelo menos dois dos três dígitos detectados são **0**, a decisão é **0**, e assim por diante. Esse esquema permite a correta recepção de dados mesmo se um dentre três dígitos estiver em erro. A detecção de erro ocorre somente se pelo menos dois dos três dígitos forem recebidos em erro. Se P_e for a probabilidade de erro de um dígito e $P(\epsilon)$ for a probabilidade de fazer uma decisão errônea nesse esquema, então

$$\begin{aligned} P(\epsilon) &= \sum_{k=2}^3 \binom{3}{k} P_e^k (1 - P_e)^{3-k} \\ &= 3P_e^2(1 - P_e) + P_e^3 \end{aligned}$$

Na prática, $P_e \ll 1$, e

$$P(\epsilon) \simeq 3P_e^2$$

Por exemplo, se $P_e = 10^{-4}$, $P(\epsilon) \simeq 3 \times 10^{-8}$. Assim, a probabilidade de erro é reduzida de 10^{-4} para 3×10^{-8} . Para que esse esquema funcione, podemos usar qualquer número ímpar de repetições.

Nesse exemplo, maior confiabilidade foi alcançada ao custo da redução na taxa de transmissão de informação por um fator de 3. Veremos no Capítulo 14 que existem maneiras mais eficientes, com uso de meio de códigos corretores de erros, para barganhar confiabilidade por taxa de transmissão.

Regra da Multiplicação para Probabilidades Condicionais

Como mostrado na Eq. (8.12), podemos escrever o evento conjunto

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A)$$

Essa regra para eventos conjuntos pode ser generalizada para múltiplos eventos A_1, A_2, \dots, A_n via iterações. Se $A_1 A_2 \dots A_n \neq 0$, temos

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = \frac{P(A_1 A_2 \dots A_n)}{P(A_1 A_2 \dots A_{n-1})} \cdot \frac{P(A_1 A_2 \dots A_{n-1})}{P(A_1 A_2 \dots A_{n-2})} \dots \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_1)} \cdot P(A_1) \quad (8.18a)$$

$$= P(A_n | A_1 A_2 \dots A_{n-1}) \cdot P(A_{n-1} | A_1 A_2 \dots A_{n-2}) \dots P(A_2 | A_1) \cdot P(A_1) \quad (8.18b)$$

Reparemos que, como $A_1 A_2 \dots A_n \neq 0$, cada denominador na Eq. (8.18a) é positivo e bem definido.

Exemplo 8.9 Suponhamos que uma caixa contenha N_g diodos bons e N_b diodos defeituosos. Se cinco diodos forem selecionados aleatoriamente, um de cada vez, e não forem devolvidos à caixa, determinemos a probabilidade de obter a sequência de diodos na ordem *bom, defeituoso, bom, bom, defeituoso*.

Podemos denotar por G_i o evento em que o diodo retirado na i -ésima repetição é um diodo bom. Estamos interessados no evento $G_1 G_2^c G_3 G_4 G_5^c$.

$$\begin{aligned} P(G_1 G_2^c G_3 G_4 G_5^c) &= P(G_1)P(G_2^c|G_1)P(G_3|G_1 G_2^c)P(G_4|G_1 G_2^c G_3)P(G_5^c|G_1 G_2^c G_3 G_4) \\ &= \frac{N_g}{N_g + N_b} \cdot \frac{N_b}{N_g + N_b - 1} \cdot \frac{N_g - 1}{N_b + N_g - 2} \cdot \frac{N_g - 2}{N_g + N_b - 3} \\ &\quad \cdot \frac{N_b - 1}{N_g + N_b - 4} \end{aligned}$$

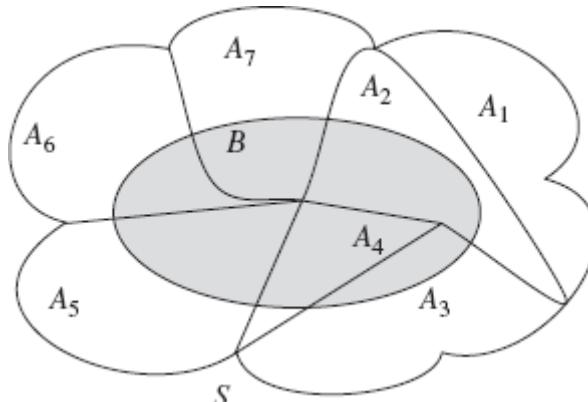


Figura 8.4

Evento de interesse B e a partição de S em $\{A_i\}$.

Dividir para Conquistar: Teorema da Probabilidade Total

Ao analisar um particular evento de interesse, algumas vezes, a adoção de uma abordagem direta na determinação de sua probabilidade pode ser difícil, pois pode haver um número demasiadamente grande de resultados a considerar. Em problemas desse tipo, em geral, é vantajosa a adoção de uma abordagem *dividir para conquistar*, em que são separados todos os casos possíveis que levam ao particular evento de interesse B . O teorema da probabilidade total fornece uma ferramenta perfeita para analisar a probabilidade de tais problemas.

Definimos S como o espaço de amostras do experimento de interesse. Como mostrado na Fig. 8.4, o espaço de amostras inteiro pode ser partido em n eventos disjuntos A_1, \dots, A_n . Agora, podemos enunciar o teorema:

Teorema da Probabilidade Total: Sejam n eventos disjuntos A_1, \dots, A_n , que formam uma partição do espaço de amostras S tal que

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = S \quad \text{e} \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \text{se} \quad i \neq j$$

Então, a probabilidade de um evento B pode ser escrita como

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)$$

Prova: A prova desse teorema é muito simples, com base na Fig. 8.4. Como $\{A_i\}$ forma uma partição de S ,

$$\begin{aligned} B &= B \cap S = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \\ &= (A_1B) \cup (A_2B) \cup \dots \cup (A_nB) \end{aligned}$$

Como os eventos $\{A_i\}$ são disjuntos, os eventos $\{A_iB\}$ também são disjuntos. Logo,

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_iB) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)$$

Com a identificação de todas as diferentes causas A_i para B , esse teorema pode simplificar a análise do evento mais complexo B de interesse. Ao quantificar o efeito de A_i em B por meio de $P(B|A_i)$, o teorema permite que “dividamos para conquistar” um problema complexo (do evento B).

Exemplo 8.10 A decodificação de um pacote de dados pode estar em erro, devido a N distintos padrões de erro E_1, E_2, \dots, E_N que podem ocorrer. Esses padrões de erro são mutuamente exclusivos, cada um com probabilidade $P(E_i) = p_i$. Quando o padrão de erro E_i ocorre, o pacote de dados seria detectado erroneamente com probabilidade q_i . Determinemos a probabilidade de o pacote de dados ser decodificado incorretamente.

Aplicaremos o teorema da probabilidade total para resolver este problema. Primeiro, definimos B como o evento em que o pacote de dados é decodificado incorretamente. Pelo enunciado do problema, sabemos que

$$P(B|E_i) = q_i \quad \text{e} \quad P(E_i) = p_i$$

Além disso, o pacote de dados foi detectado incorretamente. Portanto,

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Aplicando o teorema da probabilidade total, determinamos

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|E_i)P(E_i) = \sum_{i=1}^n q_i p_i$$

Isolação de uma Causa Particular: Teorema de Bayes

O teorema da probabilidade total facilita análise probabilística de um evento complexo por meio de uma abordagem *dividir para conquistar*. Na prática, também pode ser útil determinar a possibilidade de ocorrência de uma causa particular de um evento dentre muitas causas disjuntas possíveis. O teorema de Bayes fornece a solução para esse problema.

Teorema de Bayes: Sejam n eventos disjuntos A_1, \dots, A_n , que formam uma partição de um espaço de amostras S . Seja B um evento com $P(B) > 0$. Então, para $j = 1, \dots, n$,

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{P(B)} = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)}$$

A prova é dada pelo próprio teorema.

O teorema de Bayes fornece um método simples para calcular a probabilidade condicional de A_j dado que B tenha ocorrido. A probabilidade $P(A_j|B)$ é, com frequência, referida como *probabilidade posterior* do evento A_j . $P(A_j|B)$ descreve, dentre n causas possíveis de B , a probabilidade de que B possa ser causado por A_j . Em outras palavras, o teorema de Bayes isola e determina a probabilidade relativa de ocorrência de cada possível causa de um evento de interesse.

Exemplo 8.11 Um sistema de comunicação sempre encontra uma de três formas de onda interferentes: F_1, F_2 ou F_3 . A probabilidade de cada interferência é 0,8, 0,16 e 0,04, respectivamente. O sistema de comunicação falha com probabilidade 0,01, 0,1 e 0,4 quando encontra F_1, F_2 ou F_3 , respectivamente. Dado que o sistema falhou, determinemos a probabilidade de que a falha tenha resultado de F_1, F_2 ou F_3 , respectivamente.

Denotemos por B o evento da falha do sistema. Sabemos, do enunciado, que

$$P(F_1) = 0,8 \quad P(F_2) = 0,16 \quad P(F_3) = 0,04$$

Além disso, o efeito de cada interferência no sistema é dado por

$$P(B|F_1) = 0,01 \quad P(B|F_2) = 0,1 \quad P(B|F_3) = 0,4$$

Agora, segundo o teorema de Bayes, temos

$$P(F_1|B) = \frac{P(B|F_1)P(F_1)}{\sum_{i=1}^3 P(B|F_i)P(F_i)} = \frac{(0,01)(0,8)}{(0,01)(0,8) + (0,1)(0,16) + (0,4)(0,04)} = 0,2$$

$$P(F_2|B) = \frac{P(B|F_2)P(F_2)}{\sum_{i=1}^3 P(B|F_i)P(F_i)} = 0,4$$

$$P(F_3|B) = \frac{P(B|F_3)P(F_3)}{\sum_{i=1}^3 P(B|F_i)P(F_i)} = 0,4$$

O Exemplo 8.11 ilustra a maior diferença entre *probabilidade posterior* $P(F_i|B)$ e *probabilidade anterior* $P(F_i)$. Embora a probabilidade anterior $P(F_3) = 0,04$ seja a menor entre todas as três interferências possíveis, uma vez que o evento de falha B tenha ocorrido, $P(F_3|B) = 0,4$ é um dos eventos de maior possibilidade de ocorrência. O teorema de Bayes é uma ferramenta importante em comunicações para a determinação de possibilidade relativa de ocorrência de uma particular causa de um evento.

Teoria Axiomática da Probabilidade

A definição de frequência relativa é intuitivamente atraente. Infelizmente, há algumas objeções matemáticas contra ela. É lógico que não existe razão para calcularmos uma estimativa da frequência relativa com base em 10.000 ensaios ou em 20. Além disso, na definição de frequência relativa, não fica claro quando e em que sentido matemático existe o limite na Eq. (8.5). Se considerarmos um conjunto de um número infinito de ensaios, podemos partilhar cada conjunto em vários subconjuntos, como ensaios de ordens par e ímpar. Cada um desses subconjuntos (com um número infinito de ensaios) teria sua própria frequência relativa. Até aqui, falharam todas as tentativas no sentido de provar que as frequências relativas de todos os subconjuntos são iguais.¹ Há, ainda, outras dificuldades. Por exemplo, alguns casos, como a visita de Júlio César à Grã-Bretanha, consistem em experimento para o qual não é possível repetir um número infinito de ensaios de um evento. Assim, jamais poderemos determinar a probabilidade de tal evento. Faz-se, portanto, necessário desenvolver uma teoria de probabilidade que não esteja atrelada a qualquer definição particular de probabilidade. Em outras palavras, faz-se necessário separar o problema empírico de probabilidade do problema formal. A alocação de probabilidade a um evento é um aspecto empírico, enquanto o estabelecimento de cálculo puramente formal para tratar de probabilidades (alocadas por qualquer método empírico) é o aspecto formal.

É conveniente considerarmos aqui a diferença básica entre ciências físicas e matemáticas. Ciências físicas baseiam-se na **lógica indutiva**, enquanto a matemática é estritamente uma **lógica dedutiva**. A lógica indutiva consiste em efetuar um grande número de observações e, a partir de tais observações, enunciar leis genéricas que as expliquem. Por exemplo, história e experiência nos dizem que todo ser humano deve morrer um dia. Isso leva a uma lei que estipula que *humanos são mortais*. Este é um exemplo de lógica intuitiva. Com base em uma lei (ou leis) obtida(s) por lógica indutiva, podemos fazer mais deduções. A asserção “João é um ser humano, de modo que deve morrer um dia” exemplifica a lógica dedutiva. A dedução de leis das ciências físicas é basicamente um exercício de lógica indutiva, enquanto matemática é pura lógica dedutiva. Em uma ciência física, fazemos observações em um dado campo e as generalizamos em leis como a de Ohm, equações de Maxwell e mecânica quântica. Não há provas para essas leis obtidas de modo indutivo; tais leis são validadas por observações. Contudo, uma vez que tenhamos leis formuladas de modo indutivo (axiomas ou hipóteses), podemos, por meio de raciocínio, deduzir resultados adicionais com base apenas nessas *leis ou axiomas básicos*. Esse é o domínio próprio da matemática. Todos os resultados deduzidos devem ser provados de forma rigorosa, com base em um conjunto de axiomas. Assim, com base somente nas equações de Maxwell, podemos deduzir as leis de propagação de ondas eletromagnéticas.

Essa discussão mostra que a disciplina de matemática pode ser resumida em um aforismo: “Isso implica aquilo”. Em outras palavras, se tivermos um conjunto de axiomas (hipóteses), com base apenas nesses axiomas, o que mais é verdadeiro? Como disse Bertrand Russell: “A matemática pura consiste inteiramente em asseverações de que, se tal proposição é verdade de qualquer coisa, então essa outra proposição é verdade daquela coisa.” Sob essa luz, pode parecer que a alocação de probabilidade a um evento pode não ser necessariamente a responsabilidade da disciplina matemática de probabilidade. Na disciplina matemática, devemos iniciar com um conjunto de axiomas sobre probabilidade e, então, investigar o que mais pode ser dito sobre probabilidade com base somente nesse conjunto de axiomas. Iniciemos com um conceito (ainda indefinido) de probabilidade e postulemos axiomas. Os axiomas devem ser internamente consistentes e devem se conformar às relações e comportamentos observados de probabilidade nos sentidos prático e intuitivo. A discussão de como esses axiomas são formulados foge do escopo deste livro. A moderna teoria da probabilidade tem início com as Eqs. (8.6), (8.8) e (8.11) como axiomas. Com base apenas nesses três axiomas, o que mais é verdadeiro representa a essência da moderna teoria da probabilidade. A abordagem da frequência relativa usa a Eq. (8.5) para definir probabilidade, e as Eqs. (8.5), (8.8) e (8.11) seguem como uma consequência dessa definição. Na abordagem axiomática, por sua vez, nada dizemos sobre como alocar uma probabilidade $P(A)$ a um evento A ; postulamos que a função probabilidade deva obedecer aos três postulados ou axiomas nas Eqs. (8.6), (8.8) e (8.11). A moderna teoria da probabilidade não se preocupa com o problema de alocar probabilidades a eventos, mas supõe que, de alguma forma, as probabilidades foram alocadas a esses eventos *a priori*.

Para que um modelo matemático se conforme a fenômenos reais, devemos alocar probabilidades de modo consistente com um entendimento empírico e intuitivo de probabilidade. O conceito de frequência relativa é admiravelmente adequado para esse fim. Assim, embora usemos a frequência relativa para alocar (e não para definir) probabilidades, fica tudo sob o tapete, não é uma parte da disciplina matemática de probabilidade.

8.2 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

O resultado de um experimento pode ser um número real (como no caso do lançamento de um dado) ou não numérico, descrito por uma frase (como “cara” ou “coroa” no lançamento de uma moeda). De um ponto de vista matemático, é mais simples ter valores numéricos para todos os resultados. Por essa razão, alocamos um número real a cada ponto de amostra segundo alguma regra. Se houver m pontos de amostra $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m$, com o uso de alguma regra conveniente, alocamos um número real $x(\zeta_i)$ ao ponto de

amostra ζ_i ($i = 1, 2, \dots, m$). No caso do lançamento de uma moeda, por exemplo, podemos alocar o número 1 ao resultado cara e o número -1 ao resultado coroa (Fig. 8.5).

Assim, $x(\cdot)$ é uma função que mapeia os pontos de amostra $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m$ em números reais x_1, x_2, \dots, x_n ^{*}. Agora, temos uma variável aleatória x que assume os valores x_1, x_2, \dots, x_n . Usaremos o tipo romano (x) para denotar uma variável aleatória (VA), e o tipo itálico (por exemplo, x_1, x_2, \dots, x_n) para denotar os valores que a mesma assume. A probabilidade de uma VA x tomar um valor x_i é $P_x(x_i) =$ Probabilidade de “ $x = x_i$.”

Variáveis Aleatórias Discretas

Uma variável aleatória é discreta se existir uma sequência numerável de números distintos x_i tais que

$$\sum_i P_x(x_i) = 1 \quad (8.19)$$

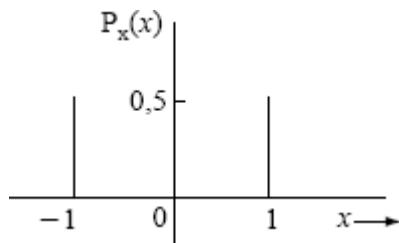


Figura 8.5 Probabilidades em um experimento de lançamento de moeda.

Assim, uma VA discreta assume somente certos valores discretos. Uma VA que pode assumir qualquer valor em um conjunto contínuo é denominada variável aleatória **contínua**.

Exemplo 8.12 Dois dados são lançados. A soma dos pontos que aparecem nos dois dados é uma VA x . Determinemos os valores assumidos por x e as correspondentes probabilidades.

Vemos que x pode assumir todos os valores inteiros de 2 a 12. Várias probabilidades podem ser determinadas pelo método delineado no Exemplo 8.3.

Há 36 pontos de amostra no total, cada um com probabilidade $1/36$. Os resultados para diversos valores de x são listados na Tabela 8.1. Reparemos que, embora existam 36 pontos de amostra, todos são mapeados em 11 valores de x . Isso ocorre porque mais de um ponto de amostra é mapeado em um mesmo valor de x . Por exemplo, seis pontos de amostra são mapeados em $x = 7$.

O leitor pode verificar que $\sum_{i=2}^{12} P_x(x_i) = 1$.

Tabela 8.1

Valor de x_i	Resultados de lançamentos de dados	$P_x(x_i)$
2	(1,1)	$1/36$
3	(1,2), (2,1)	$2/36 = 1/18$
4	(1,3), (2,2), (3,1)	$3/36 = 1/12$
5	(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)	$4/36 = 1/9$
6	(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)	$5/36$
7	(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)	$6/36 = 1/6$
8	(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)	$5/36$

9	$(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)$	$4/36 = 1/9$
10	$(4, 6), (5, 5), (6, 4)$	$3/36 = 1/12$
11	$(5, 6), (6, 5)$	$2/36 = 1/18$
12	$(6, 6)$	$1/36$

A discussão anterior pode ser estendida a duas VAs, x e y . A probabilidade conjunta $P_{xy}(x_i, y_j)$ é a probabilidade “ $x = x_i$ e $y = y_j$ ”. Consideremos, por exemplo, o caso de uma moeda lançada duas vezes sucessivamente. Se o resultado do primeiro e do segundo lançamentos forem mapeados nas VAs x e y , então x e y podem assumir valores 1 e -1. Como os resultados dos dois lançamentos são independentes, x e y são independentes, e

$$P_{xy}(x_i, y_j) = P_x(x_i) P_y(y_j)$$

e

$$P_{xy}(1, 1) = P_{xy}(1, -1) = P_{xy}(-1, 1) = P_{xy}(-1, -1) = \frac{1}{4}$$

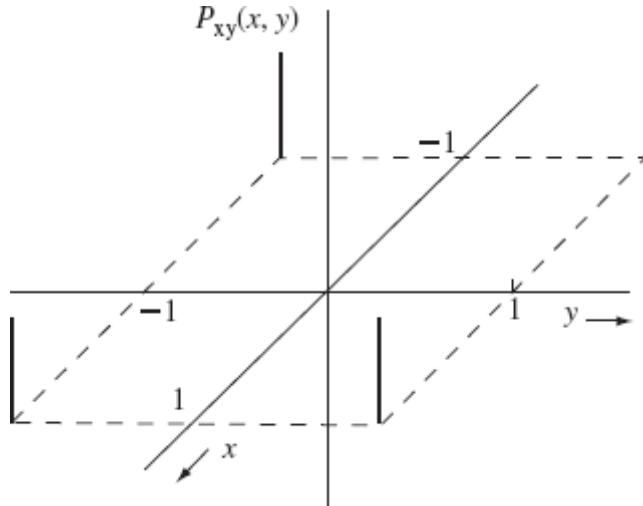


Figura 8.6 Representação de probabilidades conjuntas de duas variáveis aleatórias.

Essas probabilidades são ilustradas na Fig. 8.6

Para um caso genérico, em que a variável x pode assumir valores x_1, x_2, \dots, x_n e a variável y pode assumir valores y_1, y_2, \dots, y_m , temos

$$\sum_i \sum_j P_{xy}(x_i, y_j) = 1 \quad (8.20)$$

Isso segue do fato de o somatório na esquerda ser a probabilidade da união de todos os resultados possíveis e, portanto, deve ser a unidade (um evento certo).

Probabilidades Condicionais

Se x e y forem duas VAs, a probabilidade condicional de $x = x_i$ dado $y = y_j$ é denotada por $P_{x|y}(x_i | y_j)$. Além disso,

$$\sum_i P_{x|y}(x_i | y_j) = \sum_j P_{y|x}(y_j | x_i) = 1 \quad (8.21)$$

Isso pode ser provado observando que probabilidades $P_{x|y}(x_i|y_j)$ são especificadas no espaço de amostras correspondente à condição $y = y_j$. Portanto, $\sum_i P_{x|y}(x_i|y_j)$ é a probabilidade da união de todos os possíveis resultados de x (sob a condição $y = y_j$) e deve ser a unidade (um evento certo). Um argumento semelhante se aplica a $\sum_j P_{y|x}(y_j|x_i)$. Temos, ainda, da Eq. (8.12),

$$P_{xy}(x_i, y_j) = P_{x|y}(x_i|y_j)P_y(y_j) = P_{y|x}(y_j|x_i)P_x(x_i) \quad (8.22)$$

A regra de Bayes segue da Eq. (8.22). Da Eq. (8.22), temos

$$\begin{aligned} \sum_i P_{xy}(x_i, y_j) &= \sum_i P_{x|y}(x_i|y_j)P_y(y_j) \\ &= P_y(y_j) \sum_i P_{x|y}(x_i|y_j) \\ &= P_y(y_j) \end{aligned} \quad (8.23a)$$

Do mesmo modo,

$$P_x(x_i) = \sum_j P_{xy}(x_i, y_j) \quad (8.23b)$$

As probabilidades $P_x(x_i)$ e $P_y(y_j)$ são denominadas **probabilidades marginais**. As Eqs. (8.23) mostram como determinar probabilidades marginais a partir de probabilidades conjuntas. Resultados das Eqs. (8.20) a (8.23) podem ser estendidos a mais de duas VAs.

Exemplo 8.13 A probabilidade de erro de um canal simétrico binário (BSC) é P_e . A probabilidade de transmitir **1** é Q e a de transmitir **0** é $1 - Q$ (Fig. 8.7). Determinemos as probabilidades de receber **1** e **0** no receptor.

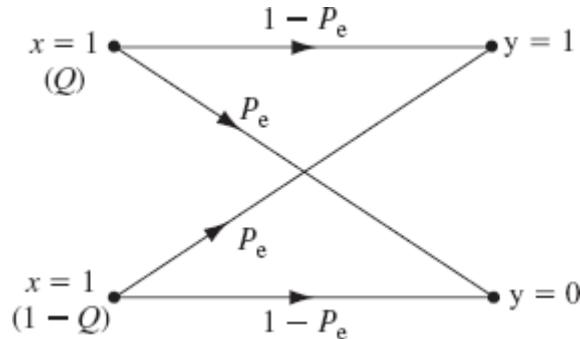


Figura 8.7 Canal simétrico binário (BSC).

Se x e y forem o dígito transmitido e o dígito recebido, respectivamente, para um BSC, temos

$$P_{y|x}(\mathbf{0}|1) = P_{y|x}(1|\mathbf{0}) = P_e$$

$$P_{y|x}(\mathbf{0}|0) = P_{y|x}(0|\mathbf{1}) = 1 - P_e$$

e

$$P_x(1) = Q \quad \text{e} \quad P_x(0) = 1 - Q$$

Precisamos determinar $P_y(1)$ e $P_y(0)$. Do teorema da probabilidade total,

$$P_y(y_j) = \sum_i P_x(x_i) P_{y|x}(y_j|x_i)$$

temos

$$\begin{aligned} P_y(\mathbf{1}) &= P_x(\mathbf{0})P_{y|x}(\mathbf{1}|\mathbf{0}) + P_x(\mathbf{1})P_{y|x}(\mathbf{1}|\mathbf{1}) \\ &= (1 - Q)P_e + Q(1 - P_e) \end{aligned}$$

De modo similar,

$$P_y(\mathbf{0}) = (1 - Q)(1 - P_e) + QP_e$$

Essas respostas quase parecem óbvias, a partir da Fig. 8.7.

Reparemos que, por causa de erros de canal, a probabilidade de receber um dígito $\mathbf{1}$ não é igual à de transmitir $\mathbf{1}$. O mesmo se aplica a $\mathbf{0}$.

Exemplo 8.14 Em certo canal de comunicação binária, os símbolos $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ são transmitidos, respectivamente, com probabilidades 0,4 e 0,6. É dado que $P(\epsilon|x_i=0) = 10^{-6}$ e $P(\epsilon|x_i=1) = 10^{-4}$, em que $P(\epsilon|x_i)$ é a probabilidade de detectar o erro dado que x_i é transmitido. Determinemos $P(\epsilon)$, a probabilidade de erro do canal.

Como $P(\epsilon|x_i)$ é a probabilidade conjunta de x_i ser transmitido e detectado erroneamente, o teorema da probabilidade total fornece

$$\begin{aligned} P(\epsilon) &= \sum_i P(\epsilon|x_i)P(x_i) \\ &= P_x(\mathbf{0})P(\epsilon|\mathbf{0}) + P_x(\mathbf{1})P(\epsilon|\mathbf{1}) \\ &= 0,4(10^{-6}) + 0,6(10^{-4}) \\ &= 0,604(10^{-4}) \end{aligned}$$

Reparemos que $P(\epsilon|\mathbf{0}) = 10^{-6}$ significa que, em média, um em cada 1 milhão de $\mathbf{0}$ s recebidos será detectado erroneamente. Do mesmo modo, $P(\epsilon|\mathbf{1}) = 10^{-4}$, significa que, em média, um de cada 10.000 $\mathbf{1}$ s recebidos estará em erro. Mas, $P(\epsilon) = 0,604(10^{-4})$ indica que, em média, um de cada $1/0,604(10^{-4}) \approx 16.556$ dígitos (seja $\mathbf{0}$ ou $\mathbf{1}$) será recebido em erro.

Função Distribuição Cumulativa

A **função distribuição cumulativa** (*CDF – Cumulative Distribution Function*) $F_x(x)$ de uma VA x é a probabilidade de x assumir um valor menor ou igual a x , ou seja

$$F_x(x) = P(x \leq x) \tag{8.24}$$

Podemos, agora, mostrar que a CDF $F_x(x)$ tem as seguintes quatro propriedades:

$$1. F_x(x) \geq 0 \quad (8.25a)$$

$$2. F_x(\infty) = 1 \quad (8.25b)$$

$$3. F_x(-\infty) = 0 \quad (8.25c)$$

$$4. F_x(x) \text{ é uma função não decrescente, ou seja,} \quad (8.25d)$$

$$F_x(x_1) \leq F_x(x_2) \text{ para } x_1 \leq x_2 \quad (8.25e)$$

A primeira propriedade é óbvia. A segunda e a terceira propriedades são provadas observando que $F_x(\infty) = P(x \leq \infty)$ e $F_x(-\infty) = P(x \leq -\infty)$. Para provar a quarta propriedade, da Eq. (8.24), temos

$$\begin{aligned} F_x(x_2) &= P(x \leq x_2) \\ &= P[(x \leq x_1) \cup (x_1 < x \leq x_2)] \end{aligned}$$

Como $x \leq x_1$ e $x_1 < x \leq x_2$ são disjuntos, temos

$$\begin{aligned} F_x(x_2) &= P(x \leq x_1) + P(x_1 < x \leq x_2) \\ &= F_x(x_1) + P(x_1 < x \leq x_2) \end{aligned} \quad (8.26)$$

Como $P(x_1 < x \leq x_2)$ é não negativa, o resultado segue.

Exemplo 8.15 Em um experimento, um ensaio consiste em quatro lançamentos sucessivos de uma moeda. Se definirmos uma VA x como o número de caras que aparece em um ensaio, determinemos $P_x(x)$ e $F_x(x)$.

Um total de 16 resultados disjuntos e equiprováveis é listado no Exemplo 8.4. Várias probabilidades podem ser prontamente determinadas ao contarmos os resultados que pertencem a um dado valor de x . Por exemplo, somente um resultado é mapeado em $x = 0$, enquanto seis resultados são mapeados em $x = 2$. Logo, $P_x(0) = 1/16$ e $P_x(2) = 6/16$. Da mesma forma, obtemos

$$P_x(0) = P_x(4) = 1/16$$

$$P_x(1) = P_x(3) = 4/16 = 1/4$$

$$P_x(2) = 6/16 = 3/8$$

As probabilidades $P_x(x_i)$ e a correspondente CDF $F_x(x)$ são mostradas na Fig. 8.8.

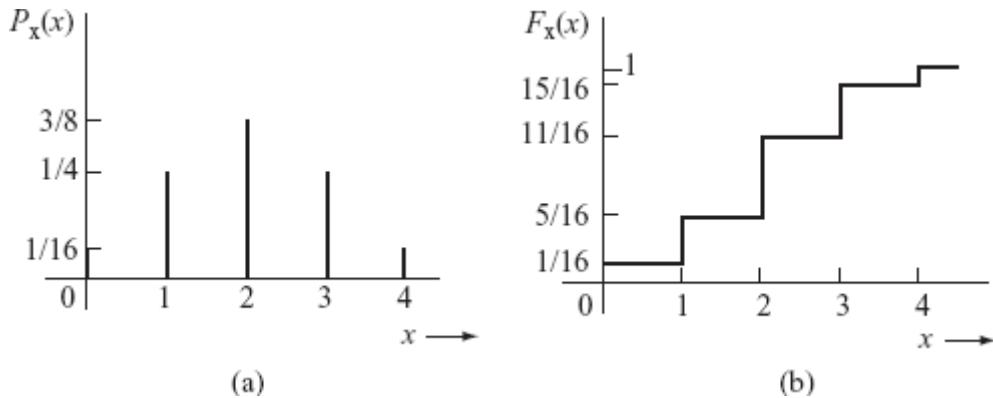


Figura 8.8 (a) Probabilidades $P_x(x_i)$ e (b) a função distribuição cumulativa (CDF).

Variável Aleatória Contínua

Uma VA contínua x pode assumir qualquer valor em certo intervalo. Em um contínuo de qualquer tamanho, existe um número infinito, incontável de valores possíveis; nesse caso, $P_x(x_i)$, a probabilidade de $x = x_i$, como um de infinitos e incontáveis valores, é zero. Consideremos o caso de uma temperatura T em certo local. Podemos supor que essa temperatura assuma qualquer valor em um intervalo. Assim, pode prevalecer um número infinito de possíveis valores de temperatura, e a probabilidade de a variável aleatória T assumir um dado valor T_i é zero. A situação é um pouco semelhante àquela descrita na Seção 3.1 em conexão com uma viga carregada continuamente (Fig. 3.5b). Há uma carga em cada ponto ao longo da viga, mas, em qualquer ponto, a carga é zero. No caso da viga, a medida significativa foi a carga (ou peso) não em um ponto, mas em um intervalo finito. Do mesmo modo, para uma VA contínua, a quantidade significativa não é a probabilidade de $x = x_i$, mas a probabilidade de $x < x \leq x + \Delta x$. A CDF é uma medida adequada para esse caso, pois a referida probabilidade é apenas $F_x(x + \Delta x) - F_x(x)$ [Eq. (8.26)]. Portanto, iniciamos o estudo de VAs com a CDF.

As propriedades da CDF [Eqs. (8.25) e (8.26)] deduzidas anteriormente são genéricas e válidas para VAs contínuas e discretas.

Função Densidade de Probabilidade: Da Eq. (8.26), temos

$$F_x(x + \Delta x) = F_x(x) + P(x < x \leq x + \Delta x) \quad (8.27a)$$

Se $\Delta x \rightarrow 0$, podemos expressar $F_x(x + \Delta x)$ por meio de uma expansão em série de Taylor, como

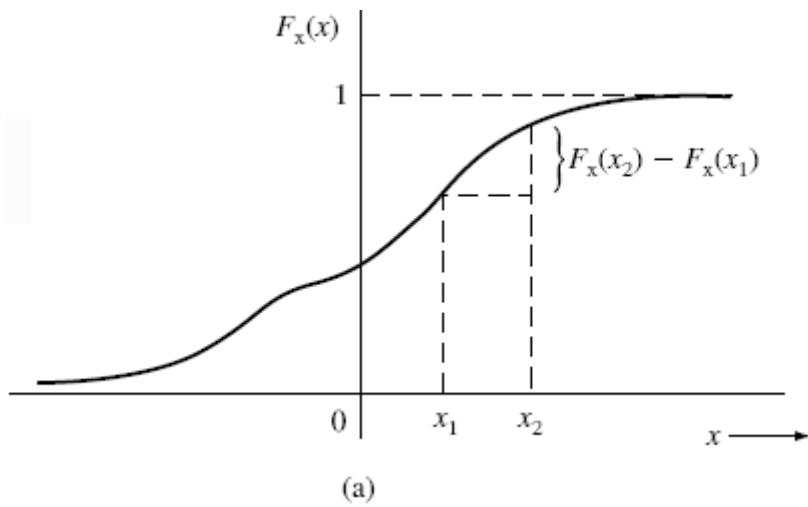
$$F_x(x + \Delta x) \simeq F_x(x) + \frac{dF_x(x)}{dx} \Delta x \quad (8.27b)$$

Das Eqs. (8.27), segue que, à medida que $\Delta x \rightarrow 0$,

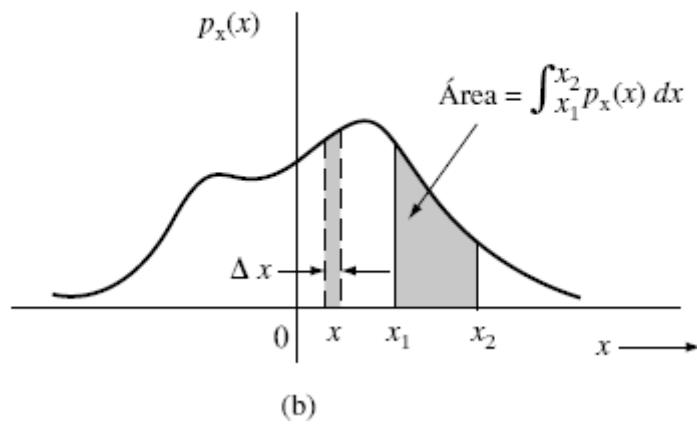
$$\frac{dF_x(x)}{dx} \Delta x = P(x < x \leq x + \Delta x) \quad (8.28)$$

Denotemos a derivada de $F_x(x)$ em relação a x por $p_x(x)$ (Fig. 8.9),

$$\frac{dF_x(x)}{dx} = p_x(x) \quad (8.29)$$



(a)



(b)

Figura 8.9 (a) Função distribuição cumulativa (CDF). (b) Função densidade de probabilidade (PDF).

A função $p_x(x)$ é denominada **função densidade de probabilidade (PDF –Probability Density Function)** da VA x. Da Eq. (8.28), segue que a probabilidade de observar a VA x no intervalo $(x, x + \Delta x)$ é $p_x(x) \Delta x$ ($\Delta x \rightarrow 0$). Isso é a área sob a PDF $p_x(x)$ no intervalo Δx , como mostrado na Fig. 8.9b.

Da Eq. (8.29), podemos ver que

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x p_x(u) du \quad (8.30)$$

Aqui, usamos o fato de que $F_x(-\infty) = 0$. Da Eq. (8.26), também temos

$$\begin{aligned} P(x_1 < x \leq x_2) &= F_x(x_2) - F_x(x_1) \\ &= \int_{-\infty}^{x_2} p_x(x) dx - \int_{-\infty}^{x_1} p_x(x) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} p_x(x) dx \end{aligned} \quad (8.31)$$

Assim, a probabilidade de observar x em qualquer intervalo (x_1, x_2) é dada pela área sob a PDF $p_x(x)$ no intervalo (x_1, x_2) , como mostrado na Fig. 8.9b. Comparemos isso com a barra carregada continuamente (Fig. 3.5b), em que o peso em qualquer intervalo era dado pela integral da densidade de carga no intervalo.

Como $F_x(\infty) = 1$, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_x(x) dx = 1 \quad (8.32)$$

Isso também resulta do fato de que o intervalo da Eq. (8.32) representa a probabilidade de observar x no intervalo $(-\infty, \infty)$. Toda PDF deve satisfazer a condição na Eq. (8.32). Também fica evidente que a PDF não deve ser negativa, ou seja,

$$p_x(x) \geq 0$$

Embora seja verdadeiro que a probabilidade de um evento impossível é **0** e que a de um evento certo é **1**, as recíprocas não são verdadeiras. Um evento cuja probabilidade seja **0** não é necessariamente um evento impossível, e um evento com probabilidade **1** não é necessariamente um evento certo. Isso pode ser ilustrado pelo exemplo a seguir. A temperatura T em uma cidade, em um dia de verão, é uma VA que assume qualquer valor no intervalo de 5 a 50°C. Como a PDF $p_T(T)$ é contínua, a probabilidade de que $T = 34,56$, por exemplo, é zero. Contudo, esse não é um evento impossível. Do mesmo modo, a probabilidade de que T assuma qualquer valor diferente de 34,56 é **1**, embora esse não seja um evento certo. Na verdade, uma VA contínua assume qualquer valor em certo intervalo. Todavia, $p_x(x)$, a probabilidade de que $x = x$, é zero para cada x no intervalo.

Podemos, também, determinar a PDF $p_x(x)$ para uma variável aleatória discreta. Como a CDF $F_x(x)$ para o caso discreto é sempre uma sequência de funções do tipo degrau (Fig. 8.8), a PDF (a derivada da CDF) consistirá em um trem de impulsos positivos. Se uma VA x assumir valores x_1, x_2, \dots, x_n com probabilidades a_1, a_2, \dots, a_n , respectivamente, então

$$F_x(x) = a_1 u(x - x_1) + a_2 u(x - x_2) + \dots + a_n u(x - x_n) \quad (8.33a)$$

Isso pode ser facilmente comprovado do Exemplo 8.15 (Fig. 8.8). Logo,

$$\begin{aligned} p_x(x) &= a_1 \delta(x - x_1) + a_2 \delta(x - x_2) + \dots + a_n \delta(x - x_n) \\ &= \sum_{r=1}^n a_r \delta(x - x_r) \end{aligned} \quad (8.33b)$$

É possível ter um caso misto, no qual a PDF pode ter uma parte contínua e uma parte impulsiva (Exercício 8.2-4).

Variável Aleatória Gaussiana

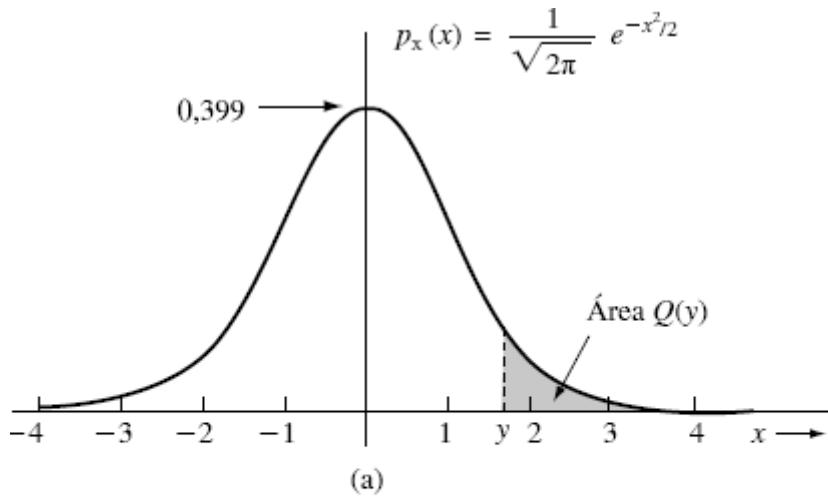
Consideremos a PDF (Fig. 8.10)

$$p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad (8.34)$$

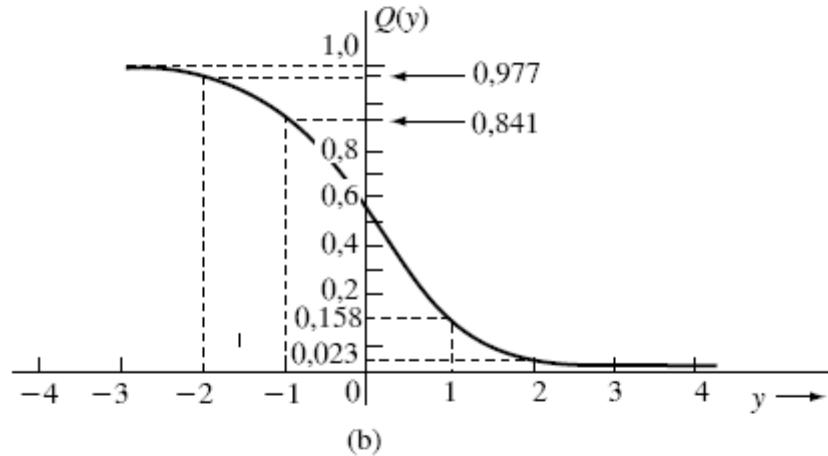
Esse é um caso da bem conhecida densidade de probabilidade **gaussiana** ou **normal**, que tem média zero e variância unitária. O nome dessa função é uma homenagem ao matemático Carl Friedrich Gauss.

A CDF $F_x(x)$, nesse caso, é

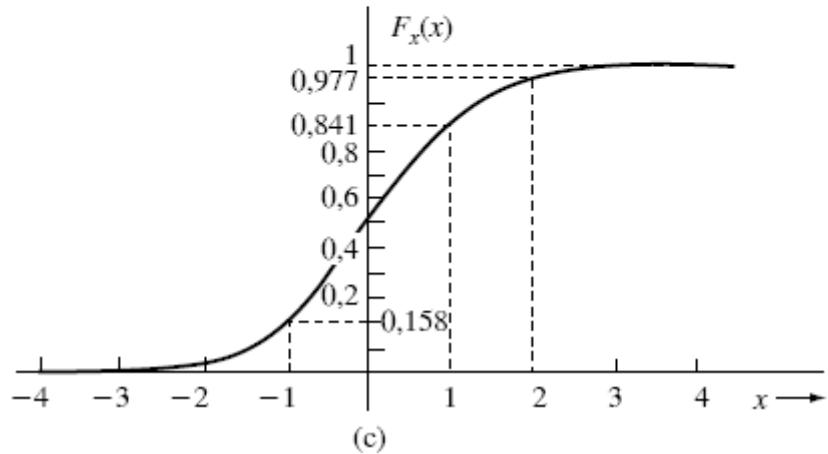
$$F_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-x^2/2} dx$$



(a)



(b)



(c)

Figura 8.10 (a) PDF gaussiana. (b) Função $Q(y)$. (c) CDF da PDF gaussiana.

O valor dessa integral não pode ser dado em uma forma fechada, devendo ser calculado numericamente. É conveniente usar a função $Q(\cdot)$ definida como²

$$Q(y) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_y^\infty e^{-x^2/2} dx \quad (8.35)$$

A área sob $p_x(x)$ de y a ∞ (sombreada na Fig. 8.10a) é * $Q(y)$. Da simetria de $p_x(x)$ em relação à origem e do fato de que a área total sob $p_x(x) = 1$, temos

$$Q(-y) = 1 - Q(y) \quad (8.36)$$

Observemos que, para a PDF na Fig. 8.10a, a CDF é dada por (Fig. 8.10c)

$$F_x(x) = 1 - Q(x) \quad (8.37)$$

A função $Q(x)$ é tabelada na Tabela 8.2 (Fig. 8.12d mais adiante). A função é largamente tabelada e pode ser encontrada na maioria dos livros de tabelas matemáticas.^{2,3} Pode ser mostrado que⁴

$$Q(x) \simeq \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad \text{para } x \gg 1 \quad (8.38a)$$

Por exemplo, quando $x = 2$, o erro nessa aproximação é 18,7%. Contudo, para $x = 4$, é 10,4% e para $x = 6$, é 2,3%.

Uma melhor aproximação de $Q(x)$ é

$$Q(x) \simeq \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{0,7}{x^2}\right) e^{-x^2/2} \quad x > 2 \quad (8.38b)$$

O erro nessa aproximação é de apenas 1% para $x > 2,15$. Para maiores valores de x , o erro tende a 0.

Uma função de densidade gaussiana mais geral tem dois parâmetros (m, σ), sendo dada por (Fig. 8.11)

$$p_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} \quad (8.39)$$

Para este caso,

$$F_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} dx$$

Tabela 8.2³

$Q(x)$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0000	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1000	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2000	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3000	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4000	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5000	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
0,6000	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7000	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8000	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9000	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,000	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
1,100	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170

1,200	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,9853E-01
1,300	0,9680E-01	0,9510E-01	0,9342E-01	0,9176E-01	0,9012E-01	0,8851E-01	0,8691E-01	0,8534E-01	0,8379E-01	0,8226E-01
1,400	0,8076E-01	0,7927E-01	0,7780E-01	0,7636E-01	0,7493E-01	0,7353E-01	0,7215E-01	0,7078E-01	0,6944E-01	0,6811E-01
1,500	0,6681E-01	0,6552E-01	0,6426E-01	0,6301E-01	0,6178E-01	0,6057E-01	0,5938E-01	0,5821E-01	0,5705E-01	0,5592E-01
1,600	0,5480E-01	0,5370E-01	0,5262E-01	0,5155E-01	0,5050E-01	0,4947E-01	0,4846E-01	0,4746E-01	0,4648E-01	0,4551E-01
1,700	0,4457E-01	0,4363E-01	0,4272E-01	0,4182E-01	0,4093E-01	0,4006E-01	0,3920E-01	0,3836E-01	0,3754E-01	0,3673E-01
1,800	0,3593E-01	0,3515E-01	0,3438E-01	0,3362E-01	0,3288E-01	0,3216E-01	0,3144E-01	0,3074E-01	0,3005E-01	0,2938E-01
1,900	0,2872E-01	0,2807E-01	0,2743E-01	0,2680E-01	0,2619E-01	0,2559E-01	0,2500E-01	0,2442E-01	0,2385E-01	0,2330E-01
2,000	0,2275E-01	0,2222E-01	0,2169E-01	0,2118E-01	0,2068E-01	0,2018E-01	0,1970E-01	0,1923E-01	0,1876E-01	0,1831E-01
2,100	0,1786E-01	0,1743E-01	0,1700E-01	0,1659E-01	0,1618E-01	0,1578E-01	0,1539E-01	0,1500E-01	0,1463E-01	0,1426E-01
2,200	0,1390E-01	0,1355E-01	0,1321E-01	0,1287E-01	0,1255E-01	0,1222E-01	0,1191E-01	0,1160E-01	0,1130E-01	0,1101E-01
2,300	0,1072E-01	0,1044E-01	0,1017E-01	0,9903E-02	0,9642E-02	0,9387E-02	0,9137E-02	0,8894E-02	0,8656E-02	0,8424E-02
2,400	0,8198E-02	0,7976E-02	0,7760E-02	0,7549E-02	0,7344E-02	0,7143E-02	0,6947E-02	0,6756E-02	0,6569E-02	0,6387E-02
2,500	0,6210E-02	0,6037E-02	0,5868E-02	0,5703E-02	0,5543E-02	0,5386E-02	0,5234E-02	0,5085E-02	0,4940E-02	0,4799E-02
2,600	0,4661E-02	0,4527E-02	0,4396E-02	0,4269E-02	0,4145E-02	0,4025E-02	0,3907E-02	0,3793E-02	0,3681E-02	0,3573E-02
2,700	0,3467E-02	0,3364E-02	0,3264E-02	0,3167E-02	0,3072E-02	0,2980E-02	0,2890E-02	0,2803E-02	0,2718E-02	0,2635E-02
2,800	0,2555E-02	0,2477E-02	0,2401E-02	0,2327E-02	0,2256E-02	0,2186E-02	0,2118E-02	0,2052E-02	0,1988E-02	0,1926E-02
2,900	0,1866E-02	0,1807E-02	0,1750E-02	0,1695E-02	0,1641E-02	0,1589E-02	0,1538E-02	0,1489E-02	0,1441E-02	0,1395E-02

3,000	0,1350E- 02	0,1306E- 02	0,1264E- 02	0,1223E- 02	0,1183E- 02	0,1144E- 02	0,1107E- 02	0,1070E- 02	0,1035E- 02	0,1001E- 02
3,100	0,9676E- 03	0,9354E- 03	0,9043E- 03	0,8740E- 03	0,8447E- 03	0,8164E- 03	0,7888E- 03	0,7622E- 03	0,7364E- 03	0,7114E- 03
3,200	0,6871E- 03	0,6637E- 03	0,6410E- 03	0,6190E- 03	0,5976E- 03	0,5770E- 03	0,5571E- 03	0,5377E- 03	0,5190E- 03	0,5009E- 03
3,300	0,4834E- 03	0,4665E- 03	0,4501E- 03	0,4342E- 03	0,4189E- 03	0,4041E- 03	0,3897E- 03	0,3758E- 03	0,3624E- 03	0,3495E- 03
3,400	0,3369E- 03	0,3248E- 03	0,3131E- 03	0,3018E- 03	0,2909E- 03	0,2802E- 03	0,2701E- 03	0,2602E- 03	0,2507E- 03	0,2415E- 03
3,500	0,2326E- 03	0,2241E- 03	0,2158E- 03	0,2078E- 03	0,2001E- 03	0,1926E- 03	0,1854E- 03	0,1785E- 03	0,1718E- 03	0,1653E- 03
3,600	0,1591E- 03	0,1531E- 03	0,1473E- 03	0,1417E- 03	0,1363E- 03	0,1311E- 03	0,1261E- 03	0,1213E- 03	0,1166E- 03	0,1121E- 03
3,700	0,1078E- 03	0,1036E- 03	0,9961E- 04	0,9574E- 04	0,9201E- 04	0,8842E- 04	0,8496E- 04	0,8162E- 04	0,7841E- 04	0,7532E- 04
3,800	0,7235E- 04	0,6948E- 04	0,6673E- 04	0,6407E- 04	0,6152E- 04	0,5906E- 04	0,5669E- 04	0,5442E- 04	0,5223E- 04	0,5012E- 04
3,900	0,4810E- 04	0,4615E- 04	0,4427E- 04	0,4247E- 04	0,4074E- 04	0,3908E- 04	0,3747E- 04	0,3594E- 04	0,3446E- 04	0,3304E- 04
4,000	0,3167E- 04	0,3036E- 04	0,2910E- 04	0,2789E- 04	0,2673E- 04	0,2561E- 04	0,2454E- 04	0,2351E- 04	0,2252E- 04	0,2157E- 04
4,100	0,2066E- 04	0,1978E- 04	0,1894E- 04	0,1814E- 04	0,1737E- 04	0,1662E- 04	0,1591E- 04	0,1523E- 04	0,1458E- 04	0,1395E- 04
4,200	0,1335E- 04	0,1277E- 04	0,1222E- 04	0,1168E- 04	0,1118E- 04	0,1069E- 04	0,1022E- 04	0,9774E- 05	0,9345E- 05	0,8934E- 05
4,300	0,8540E- 05	0,8163E- 05	0,7801E- 05	0,7455E- 05	0,7124E- 05	0,6807E- 05	0,6503E- 05	0,6212E- 05	0,5934E- 05	0,5668E- 05
4,400	0,5413E- 05	0,5169E- 05	0,4935E- 05	0,4712E- 05	0,4498E- 05	0,4294E- 05	0,4098E- 05	0,3911E- 05	0,3732E- 05	0,3561E- 05
4,500	0,3398E- 05	0,3241E- 05	0,3092E- 05	0,2949E- 05	0,2813E- 05	0,2682E- 05	0,2558E- 05	0,2439E- 05	0,2325E- 05	0,2216E- 05
4,600	0,2112E- 05	0,2013E- 05	0,1919E- 05	0,1828E- 05	0,1742E- 05	0,1660E- 05	0,1581E- 05	0,1506E- 05	0,1434E- 05	0,1366E- 05

4,700	0,1301E- 05	0,1239E- 05	0,1179E- 05	0,1123E- 05	0,1069E- 05	0,1017E- 05	0,9680E- 06	0,9211E- 06	0,8765E- 06	0,8339E- 06
4,800	0,7933E- 06	0,7547E- 06	0,7178E- 06	0,6827E- 06	0,6492E- 06	0,6173E- 06	0,5869E- 06	0,5580E- 06	0,5304E- 06	0,5042E- 06
4,900	0,4792E- 06	0,4554E- 06	0,4327E- 06	0,4111E- 06	0,3906E- 06	0,3711E- 06	0,3525E- 06	0,3448E- 06	0,3179E- 06	0,3019E- 06
5,000	0,2867E- 06	0,2722E- 06	0,2584E- 06	0,2452E- 06	0,2328E- 06	0,2209E- 06	0,2096E- 06	0,1989E- 06	0,1887E- 06	0,1790E- 06
5,100	0,1698E- 06	0,1611E- 06	0,1528E- 06	0,1449E- 06	0,1374E- 06	0,1302E- 06	0,1235E- 06	0,1170E- 06	0,1109E- 06	0,1051E- 06
5,200	0,9964E- 07	0,9442E- 07	0,8946E- 07	0,8476E- 07	0,8029E- 07	0,7605E- 07	0,7203E- 07	0,6821E- 07	0,6459E- 07	0,6116E- 07
5,300	0,5790E- 07	0,5481E- 07	0,5188E- 07	0,4911E- 07	0,4647E- 07	0,4398E- 07	0,4161E- 07	0,3937E- 07	0,3724E- 07	0,3523E- 07
5,400	0,3332E- 07	0,3151E- 07	0,2980E- 07	0,2818E- 07	0,2664E- 07	0,2518E- 07	0,2381E- 07	0,2250E- 07	0,2127E- 07	0,2010E- 07
5,500	0,1899E- 07	0,1794E- 07	0,1695E- 07	0,1601E- 07	0,1512E- 07	0,1428E- 07	0,1349E- 07	0,1274E- 07	0,1203E- 07	0,1135E- 07
5,600	0,1072E- 07	0,1012E- 07	0,9548E- 08	0,9010E- 08	0,8503E- 08	0,8022E- 08	0,7569E- 08	0,7140E- 08	0,6735E- 08	0,6352E- 08
5,700	0,5990E- 08	0,5649E- 08	0,5326E- 08	0,5022E- 08	0,4734E- 08	0,4462E- 08	0,4206E- 08	0,3964E- 08	0,3735E- 08	0,3519E- 08
5,800	0,3316E- 08	0,3124E- 08	0,2942E- 08	0,2771E- 08	0,2610E- 08	0,2458E- 08	0,2314E- 08	0,2179E- 08	0,2051E- 08	0,1931E- 08
5,900	0,1818E- 08	0,1711E- 08	0,1610E- 08	0,1515E- 08	0,1425E- 08	0,1341E- 08	0,1261E- 08	0,1186E- 08	0,1116E- 08	0,1049E- 08
6,000	0,9866E- 09	0,9276E- 09	0,8721E- 09	0,8198E- 09	0,7706E- 09	0,7242E- 09	0,6806E- 09	0,6396E- 09	0,6009E- 09	0,5646E- 09
6,100	0,5303E- 09	0,4982E- 09	0,4679E- 09	0,4394E- 09	0,4126E- 09	0,3874E- 09	0,3637E- 09	0,3414E- 09	0,3205E- 09	0,3008E- 09
6,200	0,2823E- 09	0,2649E- 09	0,2486E- 09	0,2332E- 09	0,2188E- 09	0,2052E- 09	0,1925E- 09	0,1805E- 09	0,1692E- 09	0,1587E- 09
6,300	0,1488E- 09	0,1395E- 09	0,1308E- 09	0,1226E- 09	0,1149E- 09	0,1077E- 09	0,1009E- 09	0,9451E- 10	0,8854E- 10	0,8294E- 10
6,400	0,7769E- 10	0,7276E- 10	0,6814E- 10	0,6380E- 10	0,5974E- 10	0,5593E- 10	0,5235E- 10	0,4900E- 10	0,4586E- 10	0,4292E- 10

8,200	0,1202E- 15	0,1106E- 15	0,1018E- 15	0,9361E- 16	0,8611E- 16	0,7920E- 16	0,7284E- 16	0,6698E- 16	0,6159E- 16	0,5662E- 16
8,300	0,5206E- 16	0,4785E- 16	0,4398E- 16	0,4042E- 16	0,3715E- 16	0,3413E- 16	0,3136E- 16	0,2881E- 16	0,2646E- 16	0,2431E- 16
8,400	0,2232E- 16	0,2050E- 16	0,1882E- 16	0,1728E- 16	0,1587E- 16	0,1457E- 16	0,1337E- 16	0,1227E- 16	0,1126E- 16	0,1033E- 16
8,500	0,9480E- 17	0,8697E- 17	0,7978E- 17	0,7317E- 17	0,6711E- 17	0,6154E- 17	0,5643E- 17	0,5174E- 17	0,4744E- 17	0,4348E- 17
8,600	0,3986E- 17	0,3653E- 17	0,3348E- 17	0,3068E- 17	0,2811E- 17	0,2575E- 17	0,2359E- 17	0,2161E- 17	0,1979E- 17	0,1812E- 17
8,700	0,1659E- 17	0,1519E- 17	0,1391E- 17	0,1273E- 17	0,1166E- 17	0,1067E- 17	0,9763E- 18	0,8933E- 18	0,8174E- 18	0,7478E- 18
8,800	0,6841E- 18	0,6257E- 18	0,5723E- 18	0,5234E- 18	0,4786E- 18	0,4376E- 18	0,4001E- 18	0,3657E- 18	0,3343E- 18	0,3055E- 18
8,900	0,2792E- 18	0,2552E- 18	0,2331E- 18	0,2130E- 18	0,1946E- 18	0,1777E- 18	0,1623E- 18	0,1483E- 18	0,1354E- 18	0,1236E- 18
9,000	0,1129E- 18	0,1030E- 18	0,9404E- 19	0,8584E- 19	0,7834E- 19	0,7148E- 19	0,6523E- 19	0,5951E- 19	0,5429E- 19	0,4952E- 19
9,100	0,4517E- 19	0,4119E- 19	0,3756E- 19	0,3425E- 19	0,3123E- 19	0,2847E- 19	0,2595E- 19	0,2365E- 19	0,2155E- 19	0,1964E- 19
9,200	0,1790E- 19	0,1631E- 19	0,1486E- 19	0,1353E- 19	0,1232E- 19	0,1122E- 19	0,1022E- 19	0,9307E- 20	0,8474E- 20	0,7714E- 20
9,300	0,7022E- 20	0,6392E- 20	0,5817E- 20	0,5294E- 20	0,4817E- 20	0,4382E- 20	0,3987E- 20	0,3627E- 20	0,3299E- 20	0,3000E- 20
9,400	0,2728E- 20	0,2481E- 20	0,2255E- 20	0,2050E- 20	0,1864E- 20	0,1694E- 20	0,1540E- 20	0,1399E- 20	0,1271E- 20	0,1155E- 20
9,500	0,1049E- 20	0,9533E- 21	0,8659E- 21	0,7864E- 21	0,7142E- 21	0,6485E- 21	0,5888E- 21	0,5345E- 21	0,4852E- 21	0,4404E- 21
9,600	0,3997E- 21	0,3627E- 21	0,3292E- 21	0,2986E- 21	0,2709E- 21	0,2458E- 21	0,2229E- 21	0,2022E- 21	0,1834E- 21	0,1663E- 21
9,700	0,1507E- 21	0,1367E- 21	0,1239E- 21	0,1123E- 21	0,1018E- 21	0,9223E- 22	0,8358E- 22	0,7573E- 22	0,6861E- 22	0,6215E- 22
9,800	0,5629E- 22	0,5098E- 22	0,4617E- 22	0,4181E- 22	0,3786E- 22	0,3427E- 22	0,3102E- 22	0,2808E- 22	0,2542E- 22	0,2300E- 22
9,900	0,2081E- 22	0,1883E- 22	0,1704E- 22	0,1541E- 22	0,1394E- 22	0,1261E- 22	0,1140E- 22	0,1031E- 22	0,9323E- 23	0,8429E- 23

10,00	0,7620E- 23	0,6888E- 23	0,6225E- 23	0,5626E- 23	0,5084E- 23	0,4593E- 23	0,4150E- 23	0,3749E- 23	0,3386E- 23	0,3058E- 23
-------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------

Notas:

- (1) E-01 deve ser lido como $\times 10^{-1}$, E-02 deve ser lido como $\times 10^{-2}$, e assim por diante.
- (2) Esta tabela lista $Q(x)$ para x no intervalo de 0 a 10, em incrementos de 0,01. Para obter o valor de $Q(5,36)$, por exemplo, procuramos a linha que começa com $x = 5,3$. A sexta entrada nessa linha (na coluna 0,06) é o valor desejado $0,4161 \times 10^{-7}$.

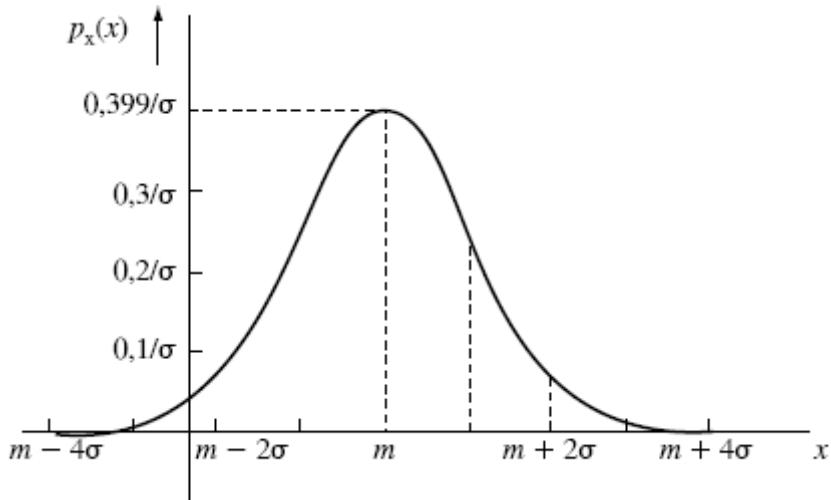


Figura 8.11 PDF gaussiana com média m e variância σ^2 .

Fazendo $(x - m)/\sigma = z$,

$$\begin{aligned} F_x(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(x-m)/\sigma} e^{-z^2/2} dz \\ &= 1 - Q\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \end{aligned} \quad (8.40a)$$

Portanto,

$$P(x \leq x) = 1 - Q\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \quad (8.40b)$$

e

$$P(x > x) = Q\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \quad (8.40c)$$

A PDF gaussiana é, talvez, a mais importante PDF no campo de comunicações. A maioria dos processos de ruído observados na prática é gaussiana. A amplitude n de um sinal de ruído gaussiano é uma VA com PDF gaussiana. Isso significa que a probabilidade de observar n em um intervalo $(n, n + \Delta n)$ é $p_n(n)\Delta n$, em que $p_n(n)$ tem a forma na Eq. (8.39) [com $m = 0$].

Exemplo 8.16 Detecção por Limiar

Em certo canal binário, mensagens **0** e **1** são transmitidas com igual probabilidade por pulsos positivo e negativo, respectivamente. O pulso recebido correspondente a **1** é $p(t)$, mostrado na Fig. 8.12a, e o pulso recebido correspondente a **0** é $-p(t)$. Denotemos a amplitude de pico de $p(t)$ em $t = T_p$ por A_p . Devido ao ruído de canal $n(t)$, o pulso recebido será (Fig. 8.12c)

$$\pm p(t) + n(t)$$

Para detectar os pulsos no receptor, cada pulso é amostrado em sua amplitude de pico. Na ausência de ruído, a saída do amostrador é A_p (para $m=1$) ou $-A_p$ (para $m=0$). Devido ao ruído de canal, a saída do amostrador é $\pm A_p + n$, sendo n , amplitude do ruído no instante de amostragem (Fig. 8.12b), uma VA. Para ruído gaussiano, a PDF de n é (Fig. 8.12b)

$$p_n(n) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} e^{-n^2/2\sigma_n^2} \quad (8.41)$$

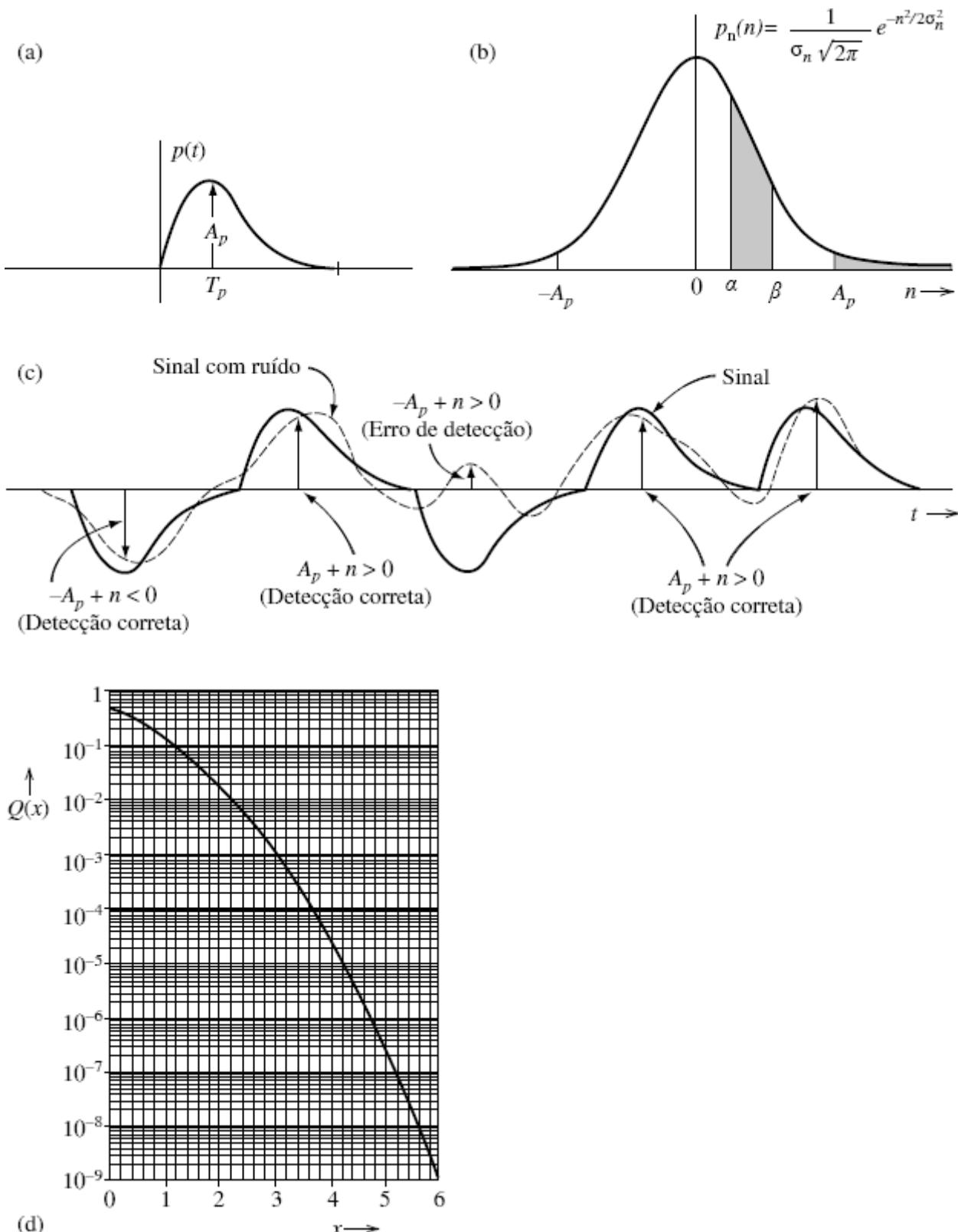


Figura 8.12 Probabilidade de erro na detecção por limiar: (a) pulso transmitido; (b) PDF do ruído; (c) pulsos recebidos com ruído; (d) probabilidade de erro de detecção.

Devido à simetria da situação, o limiar de detecção ótima é zero; ou seja, o pulso recebido é detectado como **1** ou **0** dependendo se o valor da amostra é positivo ou negativo.

Como as amplitudes de ruído variam de $-\infty$ a ∞ , o valor de amostra $-A_p + n$ pode, ocasionalmente, ser positivo, fazendo com que **0** seja lido como **1** (Fig. 8.12b). Do mesmo modo, $A_p + n$ pode, ocasionalmente, ser negativo, fazendo com que o **1** recebido seja lido como **0**. Se **0** for transmitido, será detectado como **1** se $-A_p + n > 0$, ou seja, se $n > A_p$.

Se $P(\epsilon|\mathbf{0})$ for a probabilidade de erro dado que **0** foi transmitido,

$$P(\epsilon|\mathbf{0}) = P(n > A_p)$$

Como $P(n > A_p)$ é a área sombreada na Fig. (8.12b) à direita de A_p , da Eq. (8.40c) [com $m=0$], vem

$$P(\epsilon|\mathbf{0}) = Q\left(\frac{A_p}{\sigma_n}\right) \quad (8.42a)$$

Do mesmo modo,

$$\begin{aligned} P(\epsilon|\mathbf{1}) &= P(n < -A_p) \\ &= Q\left(\frac{-A_p}{\sigma_n}\right) = P(\epsilon|\mathbf{0}) \end{aligned} \quad (8.42b)$$

e

$$\begin{aligned} P_e &= \sum_i P(\epsilon, m_i) \\ &= \sum_i P(m_i)P(\epsilon|m_i) \\ &= Q\left(\frac{A_p}{\sigma_n}\right) \sum_i P(m_i) \\ &= Q\left(\frac{A_p}{\sigma_n}\right) \end{aligned} \quad (8.42c)$$

A probabilidade de erro P_e pode ser obtida da Fig. 8.12d.

Distribuição Conjunta

Para duas VAs x e y , podemos definir uma CDF $F_{xy}(x, y)$ como:

$$F_{xy}(x, y) \triangleq P(x \leq x \text{ e } y \leq y) \quad (8.43)$$

e a PDF conjunta $p_{xy}(x, y)$, como

$$p_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{xy}(x, y) \quad (8.44)$$

Raciocinando como no caso de uma variável, podemos mostrar que, à medida que $\Delta x \rightarrow 0$ e $\Delta y \rightarrow 0$,

$$p_{xy}(x, y) \Delta x \Delta y = P(x < x \leq x + \Delta x, y < y \leq y + \Delta y) \quad (8.45)$$

Portanto, a probabilidade de observarmos a variável x no intervalo $(x, x + \Delta x)$ e a variável y no intervalo $(y, y + \Delta y)$ conjuntamente é dada pelo volume sob a PDF conjunta $p_{xy}(x, y)$, na região limitada por $(x, x + \Delta x)$ e $(y, y + \Delta y)$, como mostrado na Fig. 8.13a.

Da Eq. (8.45), segue que

$$P(x_1 < x \leq x_2, y_1 < y \leq y_2) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} p_{xy}(x, y) dx dy \quad (8.46)$$

Assim, a probabilidade de observarmos x no intervalo (x_1, x_2) e y no intervalo (y_1, y_2) é o volume sob a PDF na região limitada por (x_1, x_2) e (y_1, y_2) .

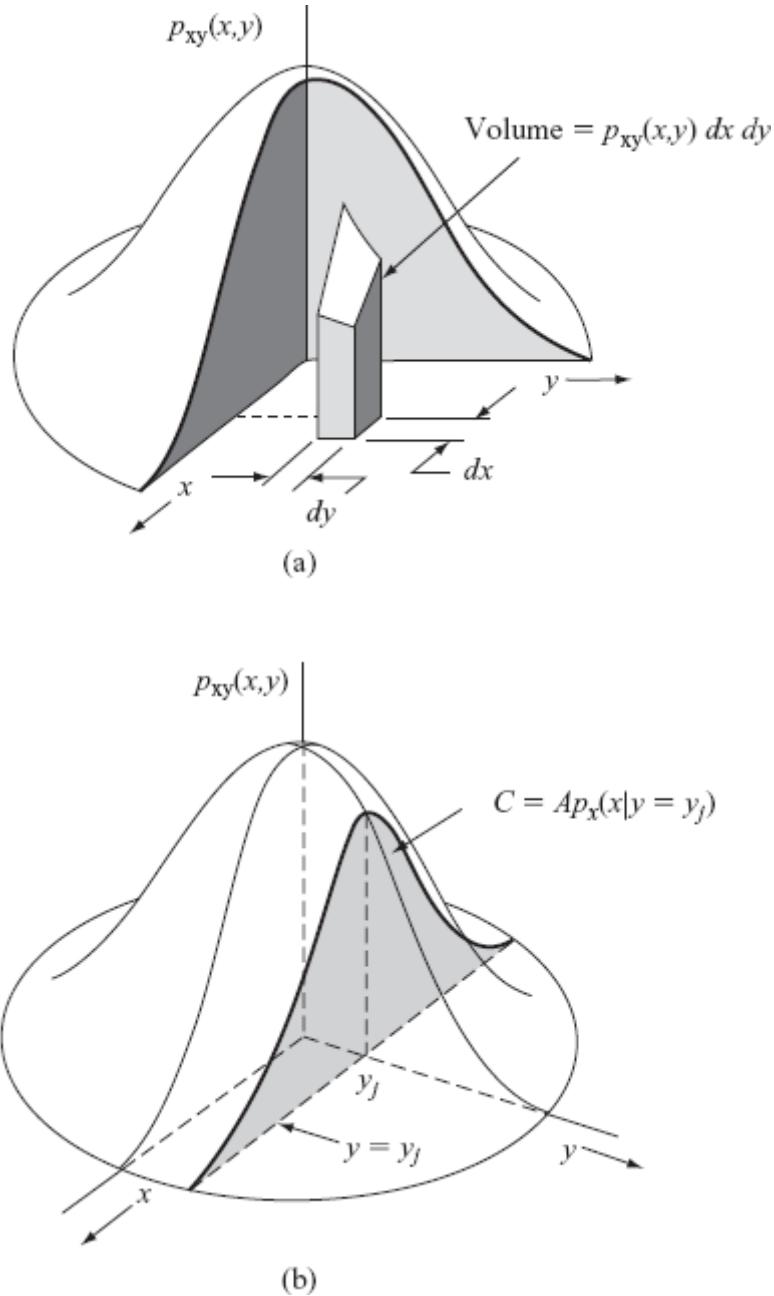


Figura 8.13 (a) PDF conjunta. (b) PDF condicional.

O evento da observação de x no intervalo $(-\infty, \infty)$ e da observação de y no intervalo $(-\infty, \infty)$ é certo. Logo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(x, y) dx dy = 1 \quad (8.47)$$

Portanto, o volume total sob a PDF conjunta deve ser unitário.

Quando tratamos com duas VAs x e y , as densidades de probabilidades individuais $p_x(x)$ e $p_y(y)$ podem ser obtidas da densidade conjunta $p_{xy}(x, y)$. Essas densidades individuais também são conhecidas como **densidades marginais**. Para obtê-las, notamos que $p_x(x)\Delta x$ é a probabilidade de observar x no intervalo $(x, x + \Delta x)$. O valor de y pode estar em qualquer lugar no intervalo $(\infty, -\infty)$. Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} p_x(x)\Delta x &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \text{Probabilidade } (x < x \leq x + \Delta x, -\infty < y \leq \infty) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_x^{x+\Delta x} \int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(x, y) dx dy \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(x, y) dy \int_x^{x+\Delta x} dx \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(x, y) dy \end{aligned}$$

Os dois últimos passos advieram do fato de $p_{xy}(x, y)$ ser constante em $(x, x + \Delta x)$, pois $\Delta x \rightarrow 0$. Portanto,

$$p_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(x, y) dy \quad (8.48a)$$

Da mesma forma,

$$p_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(x, y) dx \quad (8.48b)$$

Em termos da CDF, temos

$$F_y(y) = F_{xy}(\infty, y) \quad (8.49a)$$

$$F_x(x) = F_{xy}(x, \infty) \quad (8.49b)$$

Esses resultados podem ser generalizados para múltiplas VAs x_1, x_2, \dots, x_n .

Densidades Condicionais

O conceito de probabilidades condicionais pode ser estendido ao caso de VAs contínuas. Definimos a PDF condicional $p_{x|y}(x|y_j)$ como a PDF de x dado que y tem valor y_j . Isso é equivalente a dizer que $p_{x|y}(x|y_j)\Delta x$ é a probabilidade de observar x no intervalo $(x, x + \Delta x)$, dado que $y = y_j$. A densidade de probabilidade $p_{x|y}(x|y_j)$ é a interseção do plano $y = y_j$ com a PDF conjunta $p_{xy}(x, y)$ (Fig. 8.13b). Como toda PDF deve ter área unitária, devemos normalizar a área sob a curva de interseção C para ser unitária e obter a desejada PDF. Assim, C é $A p_{x|y}(x|y)$, em que A é a área sob C . Uma extensão dos resultados deduzidos para o caso discreto fornece

$$p_{x|y}(x|y)p_y(y) = p_{xy}(x, y) \quad (8.50a)$$

$$p_{y|x}(y|x)p_x(x) = p_{xy}(x, y) \quad (8.50b)$$

e

$$p_{x|y}(x|y) = \frac{p_{y|x}(y|x)p_x(x)}{p_y(y)} \quad (8.51a)$$

A Eq. (8.51a) é a regra de Bayes para VAs contínuas. No caso de variáveis mistas (discretas e contínuas), a forma mista da regra de Bayes é

$$P_{x|y}(x|y)p_y(y) = P_x(x)p_{y|x}(y|x) \quad (8.51b)$$

em que x é uma VA discreta e y , uma VA contínua. *

Reparemos que, acima de tudo, $p_{x|y}(x|y)$ ainda é uma função densidade de probabilidade. Assim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_{x|y}(x|y) dx = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(x, y) dx}{p_y(y)} = \frac{p_y(y)}{p_y(y)} = 1 \quad (8.52)$$

Variáveis Aleatórias Independentes

As VAs contínuas x e y são independentes se

$$p_{x|y}(x|y) = p_x(x) \quad (8.53a)$$

Nesse caso, das Eqs. (8.53a) e (8.51), segue que

$$p_{y|x}(y|x) = p_y(y) \quad (8.53b)$$

Isso implica que, para VAs independentes x e y ,

$$p_{xy}(x, y) = p_x(x)p_y(y) \quad (8.53c)$$

Com base na Eq. (8.53c), a CDF conjunta também é separável:

$$\begin{aligned} F_{xy}(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p_{xy}(v, w) dw dv \\ &= \int_{-\infty}^x p_x(v) dv \cdot \int_{-\infty}^y p_y(w) dw \\ &= F_x(x) \cdot F_y(y) \end{aligned} \quad (8.54)$$

Exemplo 8.17 Densidade de Rayleigh

A densidade de Rayleigh é caracterizada pela PDF (Fig. 8.14b)

$$p_r(r) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2} & r \geq 0 \\ 0 & r < 0 \end{cases} \quad (8.55)$$

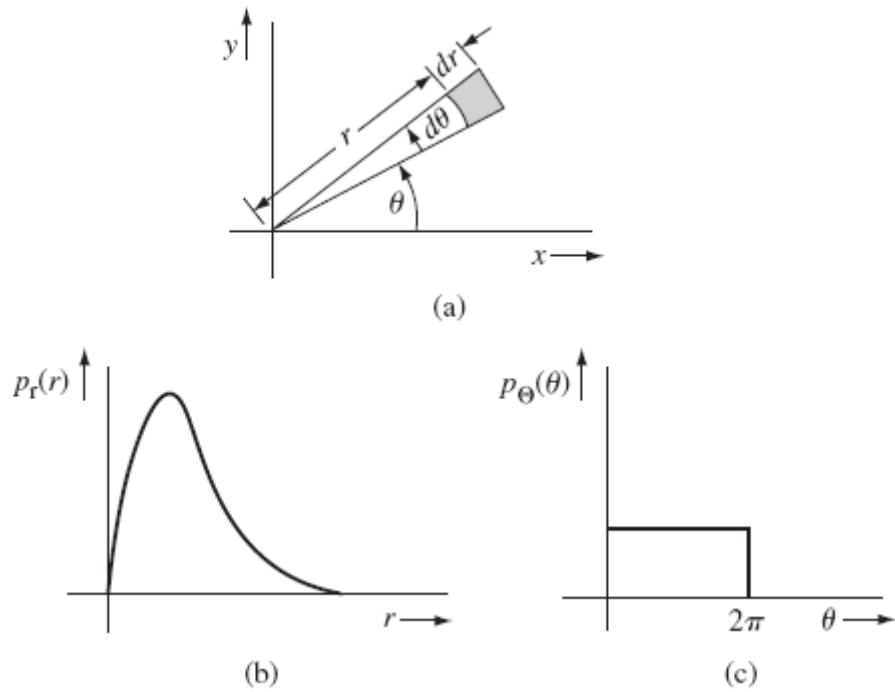


Figura 8.14 Dedução da densidade de Rayleigh.

Uma VA de Rayleigh pode ser deduzida de duas VAs gaussianas independentes como mostrado a seguir. Sejam x e y variáveis gaussianas independentes com mesma PDF:

$$p_x(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

$$p_y(y) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2\sigma^2}$$

Então,

$$p_{xy}(x, y) = p_x(x)p_y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2} \quad (8.56)$$

A densidade conjunta tem a aparência da superfície em formato de sino mostrada na Fig. 8.13. Os pontos no plano (x, y) também podem ser descritos por coordenadas polares (r, θ) , em que (Fig. 8.14a)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

Na Fig. 8.14a, a região sombreada representa $r < r \leq r + dr$ e $\theta < \Theta \leq \theta + d\theta$ (em que tanto dr como $d\theta \rightarrow 0$). Portanto, se $p_{r\Theta}(r, \theta)$ for a PDF conjunta de r e Θ , por definição [Eq. (8.45)], a probabilidade de observar r e Θ nessa região é $p_{r\Theta}(r, \theta)drd\theta$. Contudo, também sabemos que essa probabilidade é $p_{xy}(x, y)$ vezes a área $r dr d\theta$ da região sombreada.

Portanto, [Eq. (8.56)],

$$\frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2} r dr d\theta = p_{r\Theta}(r, \theta) dr d\theta$$

$$\begin{aligned}
p_{r\Theta}(r, \theta) &= \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2} \\
&= \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2}
\end{aligned} \tag{8.57}$$

e [Eq. (8.48a)]

$$p_r(r) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{r\Theta}(r, \theta) d\theta$$

Como Θ existe somente na região $(0, 2\pi)$,

$$\begin{aligned}
p_r(r) &= \int_0^{2\pi} \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2} d\theta \\
&= \frac{r}{\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2} u(r)
\end{aligned} \tag{8.58a}$$

Reparemos que r é sempre maior que 0. Do mesmo modo, obtemos

$$p_\Theta(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & 0 \leq \Theta < 2\pi \\ 0 & \text{em caso contrário} \end{cases} \tag{8.58b}$$

As VAs r e Θ são independentes, pois $p_{r\Theta}(r, \theta) = p_r(r)p_\Theta(\theta)$. A PDF $p_r(r)$ é a **função densidade de Rayleigh**. Mais adiante, mostraremos que o envelope do ruído gaussiano de banda estreita tem densidade de Rayleigh. $p_r(r)$ e $p_\Theta(\theta)$ são mostradas nas Fig. 8.14b e c.

8.3 MÉDIAS (VALORES MÉDIOS) ESTATÍSTICAS (OS)

Médias são extremamente importantes no estudo de VAs. Para uma definição apropriada da média de uma variável aleatória x , consideremos o problema de determinar a altura média da população de um país. Admitamos que temos suficientes recursos para colher dados da altura de cada cidadão. Se os dados forem registrados com precisão de um centímetro, a altura x de cada pessoa será aproximada por um de n números x_1, x_2, \dots, x_n . Se existirem N_i pessoas de altura x_i , a altura média será dada por

$$\bar{x} = \frac{N_1 x_1 + N_2 x_2 + \cdots + N_n x_n}{N}$$

em que o número total de pessoas é $N = \sum_i N_i$. Portanto,

$$\bar{x} = \frac{N_1}{N} x_1 + \frac{N_2}{N} x_2 + \cdots + \frac{N_n}{N} x_n$$

No limite $N \rightarrow \infty$, a razão N_i/N tende a $P_x(x_i)$, segundo a definição de probabilidade baseada na frequência relativa. Logo,

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i P_x(x_i)$$

O valor da média também é denominado **valor médio** ou **valor esperado** da VA x , sendo denotado por $E[x]$. Assim,

$$\bar{x} = E[x] = \sum_i x_i P_x(x_i) \quad (8.59a)$$

Usaremos essas duas notações, determinando a escolha entre uma ou outra determinada pelas circunstâncias e conveniência.

Se a VA x for contínua, um argumento semelhante ao usado na obtenção da Eq. (8.59a) fornece

$$\bar{x} = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_x(x) dx \quad (8.59b)$$

Esse resultado pode ser deduzido aproximando a variável contínua x por uma variável discreta quantizada em degraus Δx e, então, fazendo $\Delta x \rightarrow 0$.

A Eq. (8.59b) é mais geral e inclui a Eq. (8.59a), pois a VA discreta pode ser considerada como uma VA contínua com densidade impulsional. Nesse caso, a Eq. (8.59b) se reduz à Eq. (8.59a).

Como um exemplo, consideremos a PDF gaussiana genérica dada por (Fig. 8.11)

$$p_x(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} \quad (8.60a)$$

Da Eq. (8.59b), temos

$$\bar{x} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} dx$$

Mudando a variável para $x = y + m$, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (y + m) e^{-y^2/2\sigma^2} dy \\ &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-y^2/2\sigma^2} dy + m \left[\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2\sigma^2} dy \right] \end{aligned}$$

A primeira integral entre parênteses é zero, pois o integrando é uma função ímpar de y . O termo entre colchetes é a integração da PDF gaussiana, e é igual a 1. Portanto,

$$\bar{x} = m \quad (8.60b)$$

Média de uma Função de uma Variável Aleatória

Muitas vezes, é necessário determinar o valor médio de uma função de uma VA. Por exemplo, na prática, é comum estarmos interessados na amplitude quadrática média de um sinal. A amplitude quadrática média é a média do quadrado da amplitude x , ou seja, $\bar{x^2}$.

Em geral, podemos buscar o valor médio de uma VA y que é função de uma VA x ; isto é, desejamos determinar \bar{y} , em que $y = g(x)$. Seja x uma VA discreta que assume valores x_1, x_2, \dots, x_n , com probabilidades $P_x(x_1), P_x(x_2), \dots, P_x(x_n)$, respectivamente. Contudo, como $y = g(x)$, y assume valores $g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_n)$, com probabilidades $P_x(x_1), P_x(x_2), \dots, P_x(x_n)$, respectivamente. Portanto, da Eq. (8.59a), temos

$$\bar{y} = \overline{g(x)} = \sum_{i=1}^n g(x_i) P_x(x_i) \quad (8.61a)$$

Se x for uma VA contínua, um raciocínio semelhante leva a

$$\overline{g(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_x(x) dx \quad (8.61b)$$

Exemplo 8.18 A tensão de saída de um gerador de onda senoidal é $A \cos \omega t$. Esta saída é amostrada aleatoriamente (Fig. 8.15a). A saída amostrada é uma VA x que pode assumir qualquer valor no intervalo $(-A, A)$. Determinemos o valor médio (\bar{x}) e o valor quadrático médio (\bar{x}^2) da saída amostrada x .

Se a saída for amostrada em um instante aleatório t , a saída x é uma função da VA t :

$$x(t) = A \cos \omega t$$

Se definirmos $\omega t = \Theta$, Θ também será uma VA e, se considerarmos somente valores de Θ em módulo 2π , a VA Θ residirá no intervalo $(0, 2\pi)$. Como t é escolhido de modo aleatório, Θ pode assumir qualquer valor no intervalo $(0, 2\pi)$ com probabilidade uniforme. Como a área sob a PDF deve ser unitária, $p_\Theta(\theta)$ é como mostrado na Fig. 8.15b.

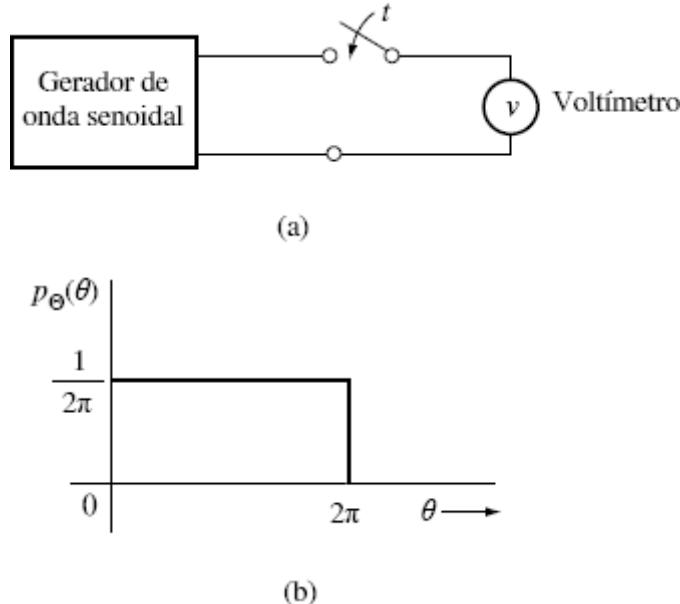


Figura 8.15 Amostragem aleatória da saída de um gerador de onda senoidal.

A VA x é, portanto, uma função de outra VA, Θ ,

$$x = A \cos \Theta$$

Portanto, da Eq. (8.61b), temos

$$\bar{x} = \int_0^{2\pi} x p_\Theta(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A \cos \theta d\theta = 0$$

e

$$\begin{aligned} \bar{x}^2 &= \int_0^{2\pi} x^2 p_\Theta(\theta) d\theta = \frac{A^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

Da mesma forma, para o caso de duas variáveis x e y , temos

$$\overline{g(x, y)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) p_{xy}(x, y) dx dy \quad (8.62)$$

Média da Soma

Se $g_1(x, y), g_2(x, y), \dots, g_n(x, y)$ forem funções de duas VAs x e y , então,

$$\overline{g_1(x, y) + g_2(x, y) + \dots + g_n(x, y)} = \overline{g_1(x, y)} + \overline{g_2(x, y)} + \dots + \overline{g_n(x, y)} \quad (8.63a)$$

A prova é trivial e segue diretamente da Eq. (8.62).

Portanto, a média (valor esperado) da soma é igual à soma das médias. Um importante caso especial é

$$\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y} \quad (8.63b)$$

A Eq. (8.63a) pode ser estendida a funções de um número qualquer de VAs.

Média do Produto de Duas Funções

Infelizmente, não há um resultado simples [como a Eq. (8.63)] para o produto de duas funções. Para o caso especial em que

$$g(x, y) = g_1(x)g_2(y)$$

$$\overline{g_1(x)g_2(y)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)g_2(y) p_{xy}(x, y) dx dy \quad (8.64a)$$

Se x e y forem independentes, então [Eq. (8.53c)],

$$p_{xy}(x, y) = p_x(x)p_y(y)$$

e

$$\begin{aligned} \overline{g_1(x)g_2(y)} &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)p_x(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} g_2(y)p_y(y) dy \\ &= \overline{g_1(x)} \overline{g_2(y)} \quad \text{se } x \text{ e } y \text{ forem independentes} \end{aligned} \quad (8.64b)$$

Um caso especial é

$$\overline{xy} = \bar{x} \bar{y} \quad \text{se } x \text{ e } y \text{ forem independentes} \quad (8.64c)$$

Momentos

O n -ésimo **momento** de uma VA x é definido como o valor médio de x^n . Assim, o n -ésimo momento de x é

$$\overline{x^n} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_x(x) dx \quad (8.65a)$$

O n -ésimo **momento central** de uma VA x é definido como

$$\overline{(x - \bar{x})^n} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^n p_x(x) dx \quad (8.65b)$$

O segundo momento central de uma VA x é de especial importância, e recebe o nome de **variância** de x , sendo denotado por σ_x^2 , sendo σ_x conhecido como **desvio-padrão (DP)** da VA x . Por definição,

$$\begin{aligned}
\sigma_x^2 &= \overline{(x - \bar{x})^2} \\
&= \overline{x^2} - 2\bar{x}\overline{x} + \bar{x}^2 = \overline{x^2} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 \\
&= \overline{x^2} - \bar{x}^2
\end{aligned} \tag{8.66}$$

Assim, a variância de x é igual ao valor quadrático médio menos o quadrado da média. Quando a média é zero, a variância é o valor quadrático médio, ou seja, $\overline{x^2} = \sigma_x^2$.

Exemplo 8.19 Determinemos o valor quadrático médio e a variância da VA gaussiana com a PDF na Eq. (8.39) (ver Fig. 8.11).

Temos

$$\overline{x^2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} dx$$

Mudando a variável para $y = (x - m)/\sigma$ e integrando, obtemos

$$\overline{x^2} = \sigma^2 + m^2 \tag{8-67a}$$

E, das Eqs. (8.66) e (8.60b),

$$\begin{aligned}
\sigma_x^2 &= \overline{x^2} - \bar{x}^2 \\
&= (\sigma^2 + m^2) - (m)^2 \\
&= \sigma^2
\end{aligned} \tag{8-67b}$$

Portanto, uma VA gaussiana descrita pela densidade na Eq. (8.60a) tem média m e variância σ^2 . Em outras palavras, a função densidade gaussiana é completamente especificada pelos primeiro (\bar{x}) e segundo ($\overline{x^2}$) momentos.

Exemplo 8.20 Valor Quadrático Médio do Erro de Quantização Uniforme em PCM

No esquema PCM discutido no Capítulo 6, um sinal limitado em banda a B Hz é amostrado a uma taxa de $2B$ amostras por segundo. Todo o intervalo $(-m_p, m_p)$ das amplitudes do sinal é partido em L intervalos uniformes, cada um de tamanho $2m_p/L$ (Fig. 8.16a). Cada amostra é aproximada pelo ponto médio do intervalo em que cai. Assim, a amostra m na Fig. 8.16a é aproximada por um valor o ponto médio do intervalo que contém a amostra. Cada amostra é, dessa forma, aproximada (quantizada) por um dos L números.

A diferença $q = m - \bar{x}$ é o erro de quantização e é uma VA. Determinemos $\overline{q^2}$, o valor médio quadrático do erro de quantização. Da Fig. 8.16a, podemos verificar que q é uma VA contínua que existe no intervalo $(-m_p/L, m_p/L)$ e é zero fora dele. Suponhamos que há igual possibilidade de a amostra cair em qualquer ponto no intervalo de quantização; * assim, a PDF de q é uniforme

$$p_q(q) = L/2m_p \quad q \in (-m_p/L, m_p/L)$$

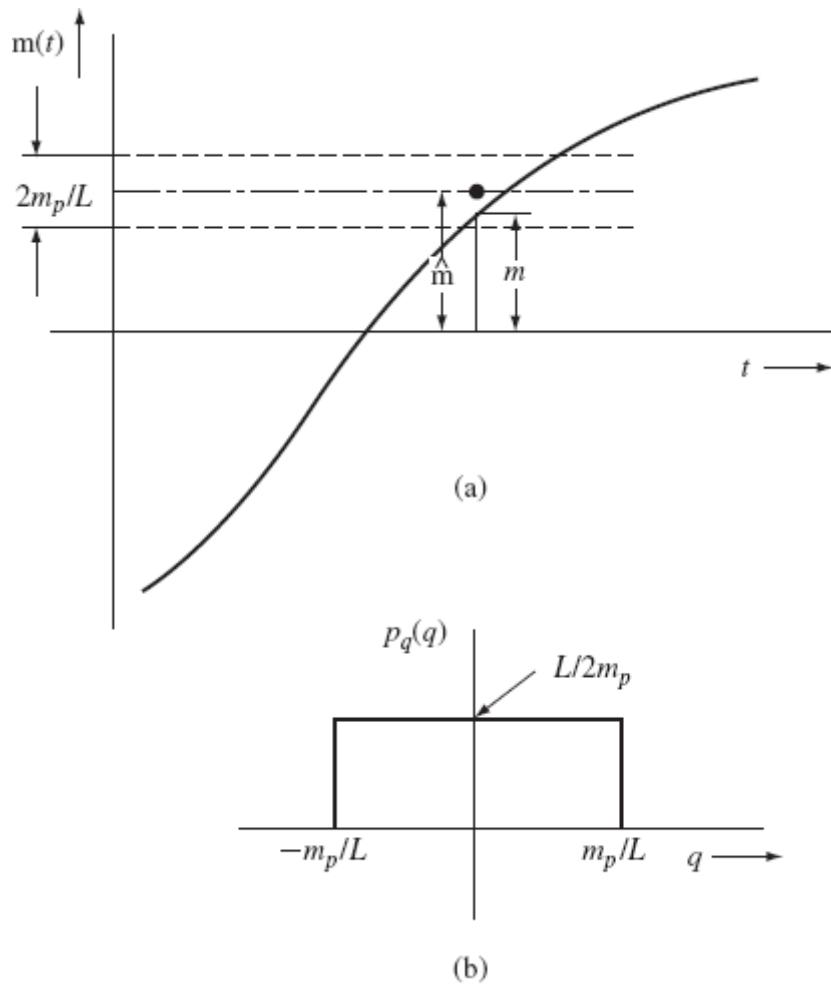


Figura 8.16 (a) Erro de quantização em PCM e (b) sua PDF.

como mostrado na Fig. 8.16b, e

$$\begin{aligned}
 \bar{q^2} &= \int_{-m_p/L}^{m_p/L} q^2 p_q(q) dq \\
 &= \frac{L}{2m_p} \frac{q^3}{3} \Big|_{-m_p/L}^{m_p/L} \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{m_p}{L} \right)^2
 \end{aligned} \tag{8-68a}$$

Da Fig. 8.16b, podemos verificar que $= 0$. Logo,

$$\sigma_q^2 = \bar{q^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{m_p}{L} \right)^2 \tag{8-68b}$$

Exemplo 8.21 Valor Quadrático Médio do Erro Causado por Ruído de Canal em PCM

Ruído de quantização é uma das fontes de erro em PCM. A outra fonte de erro é ruído de canal. Cada amostra quantizada é codificada por um grupo de n pulsos binários. Devido ao ruído de canal, alguns desses pulsos são detectados incorretamente no receptor. Portanto, o valor de amostra decodificado no receptor diferirá do valor de amostra quantizado transmitido. O erro $\epsilon = \hat{m} - \tilde{m}$ é uma variável aleatória. Calculemos $\bar{\epsilon^2}$ o valor quadrático médio do erro causado no valor da amostra pelo ruído de canal.

Iniciemos determinando os valores que pode assumir e as correspondentes probabilidades. Cada amostra é transmitida por n pulsos binários. O valor de ϵ depende da posição do pulso detectado incorretamente. Consideremos, por exemplo, o caso $L = 16$, transmitido por quatro pulsos binários ($n = 4$), como mostrado na Fig. 1.5. Aqui, o código transmitido **1101** representa o valor 13. Um erro de detecção no primeiro dígito muda o código recebido para **0101**, que é o valor 5. Isso causa um erro $\epsilon = 8$. Da mesma forma, um erro no segundo dígito leva a $\epsilon = 4$. Erros no terceiro e no quarto dígitos produzem $\epsilon = 2$ e $\epsilon = 1$, respectivamente. Em geral, o erro no i -ésimo dígito causa um erro $\epsilon_i = (2^{-i})16$. Para o caso geral, o erro é $\epsilon_i = (2^{-i})F$, em que F é o tamanho total da escala, ou seja, em PCM, $2m_p$. Assim,

$$\epsilon_i = (2^{-i})(2m_p) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Reparemos que o erro ϵ é uma VA discreta. Portanto,^{*}

$$\overline{\epsilon^2} = \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 P_e(\epsilon_i) \quad (8.69)$$

Como $P_e(\epsilon_i)$ é a probabilidade de $\epsilon = \epsilon_i$, $P_e(\epsilon_i)$ é a probabilidade de erro de detecção no i -ésimo dígito. Como a probabilidade do erro de detecção de um dígito é a mesma à de qualquer outro, ou seja, P_e ,

$$\begin{aligned} \overline{\epsilon^2} &= P_e \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 \\ &= P_e \sum_{i=1}^n 4m_p^2(2^{-2i}) \\ &= 4m_p^2 P_e \sum_{i=1}^n 2^{-2i} \end{aligned}$$

Essa hipótese é uma progressão geométrica com razão comum $r = 2^{-2}$, com o primeiro termo $a_1 = 2^{-2}$ e o último, $a_n = 2^{-2n}$. Portanto (Apêndice E.4),

$$\begin{aligned} \overline{\epsilon^2} &= 4m_p^2 P_e \left[\frac{(2^{-2})2^{-2n} - 2^{-2}}{2^{-2} - 1} \right] \\ &= \frac{4m_p^2 P_e (2^{2n} - 1)}{3(2^{2n})} \end{aligned} \quad (8.70a)$$

Reparemos que a magnitude do erro varia de $2^{-1}(2m_p)$ a $2^{-n}(2m_p)$. O erro pode ser positivo ou negativo. Por exemplo, $\epsilon = 8$ devido a um erro no primeiro dígito de **1101**. Mas, o erro seria -8 se o código transmitido fosse **0101**. É claro que o sinal de ϵ não importa na Eq. (8.69). Devemos recordar, todavia, que varia de $-2^{-n}(2m_p)$ a $2^{-n}(2m_p)$ e suas probabilidades são simétricas em relação a $\epsilon = 0$. Portanto, $\overline{\epsilon} = 0$ e

$$\sigma_\epsilon^2 = \overline{\epsilon^2} = \frac{4m_p^2 P_e (2^{2n} - 1)}{3(2^{2n})} \quad (8.70b)$$

Variância de uma Soma de Variáveis Aleatórias Independentes

A variância de uma soma de VAs independentes é igual à soma de suas variâncias. Assim, se x e y forem VAs independentes e

$$z = x + y$$

então,

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \quad (8.71)$$

Isso pode ser mostrado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= \overline{(z - \bar{z})^2} = \overline{[x + y - (\bar{x} + \bar{y})]^2} \\ &= \overline{[(x - \bar{x}) + (y - \bar{y})]^2} \\ &= \overline{(x - \bar{x})^2} + \overline{(y - \bar{y})^2} + \overline{2(x - \bar{x})(y - \bar{y})} \\ &= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \overline{2(x - \bar{x})(y - \bar{y})} \end{aligned}$$

Como x e y são VAs independentes, $(x - \bar{x})$ e $(y - \bar{y})$ também são VAs independentes. Logo, da Eq. (8.64b), temos

$$\overline{(x - \bar{x})(y - \bar{y})} = \overline{(x - \bar{x})} \cdot \overline{(y - \bar{y})}$$

Mas,

$$\overline{(x - \bar{x})} = \bar{x} - \bar{x} = \bar{x} - \bar{x} = 0$$

De modo similar,

$$\overline{(y - \bar{y})} = 0$$

e

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

Esse resultado pode ser estendido a um número qualquer de variáveis. Se as VAs x e y tiverem média zero (ou seja, $\bar{x} = \bar{y} = 0$), então, $\bar{z} = \bar{x} + \bar{y} = 0$. Além disso, quando a média é zero, a variância iguala o valor quadrático médio; portanto,

$$\overline{z^2} = \overline{(x + y)^2} = \overline{x^2} + \overline{y^2} \quad (8.72)$$

desde que $\bar{x} = \bar{y} = 0$, e desde que x e y sejam VAs independentes.

Exemplo 8.22 Erro Quadrático Médio Total em PCM

Em PCM, como visto nos Exemplos 8.20 e 8.21, uma amostra de sinal m é transmitida como uma amostra quantizada \hat{m} , causando um erro de quantização $q = m - \hat{m}$. Devido ao ruído de canal, a amostra quantizada \hat{m} é lida como \tilde{m} , causando um erro de detecção $\epsilon = \hat{m} - \tilde{m}$. Portanto, a amostra de sinal m é recebida como \tilde{m} , com um erro total

$$m - \tilde{m} = (m - \hat{m}) + (\hat{m} - \tilde{m}) = q + \epsilon$$

em que q e ϵ são VAs de média zero. Como o erro de quantização q e o erro devido ao ruído de canal ϵ são independentes, o valor quadrático médio da soma [Eq. (8.72)] é

$$\begin{aligned}\overline{(m - \tilde{m})^2} &= \overline{(q + \epsilon)^2} = \overline{q^2} + \overline{\epsilon^2} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{m_p}{L} \right)^2 + \frac{4m_p^2 P_\epsilon (2^{2n} - 1)}{3(2^{2n})}\end{aligned}$$

E, como $L = 2^n$.

$$\overline{(m - \tilde{m})^2} = \overline{q^2} + \overline{\epsilon^2} = \frac{m_p^2}{3(2^{2n})} [1 + 4P_\epsilon (2^{2n} - 1)] \quad (8.73)$$

Desigualdade de Chebyshev

O desvio-padrão σ_x de uma VA x é uma medida da largura de sua PDF. Quanto maior σ_x , mais larga é a PDF. A Fig. 8.17 ilustra esse efeito para uma PDF gaussiana. A desigualdade de Chebyshev é uma asserção desse fato, e afirma que, para uma VA x de média zero,

$$P(|x| \leq k\sigma_x) \geq 1 - \frac{1}{k^2} \quad (8.74)$$

Isso significa que a probabilidade de observarmos x em uns poucos desvios-padrão é muito alta. Por exemplo, a probabilidade de encontrar $|x|$ em $3\sigma_x$ é igual ou maior que 0,88. Assim, para uma PDF com $\sigma_x = 1$, $P(|x| \leq 3) \geq 0,88$, enquanto para uma PDF com $\sigma_x = 3$, $P(|x| \leq 9) \geq 0,88$. Fica claro que a PDF com $\sigma_x = 3$ se espalha mais que a PDF com $\sigma_x = 1$. Portanto, σ_x ou é usado, com frequência, como uma medida da largura de uma PDF. No Capítulo 10, usaremos essa medida para estimar a largura de banda do espectro de um sinal. A prova da Eq. (8.74) é dada a seguir:

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_x(x) dx$$

Como o integrando é positivo,

$$\sigma_x^2 \geq \int_{|x| \geq k\sigma_x} x^2 p_x(x) dx$$

Se substituirmos x por seu menor valor $k\sigma_x$, a desigualdade permanece válida,

$$\sigma_x^2 \geq k^2 \sigma_x^2 \int_{|x| \geq k\sigma_x} p_x(x) dx = k^2 \sigma_x^2 P(|x| \geq k\sigma_x)$$

ou

$$P(|x| \geq k\sigma_x) \leq \frac{1}{k^2}$$

Logo,

$$P(|x| \leq k\sigma_x) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Essa desigualdade pode ser generalizada para uma VA de média não nula como:

$$P(|x - \bar{x}| \leq k\sigma_x) \geq 1 - \frac{1}{k^2} \quad (8.75)$$

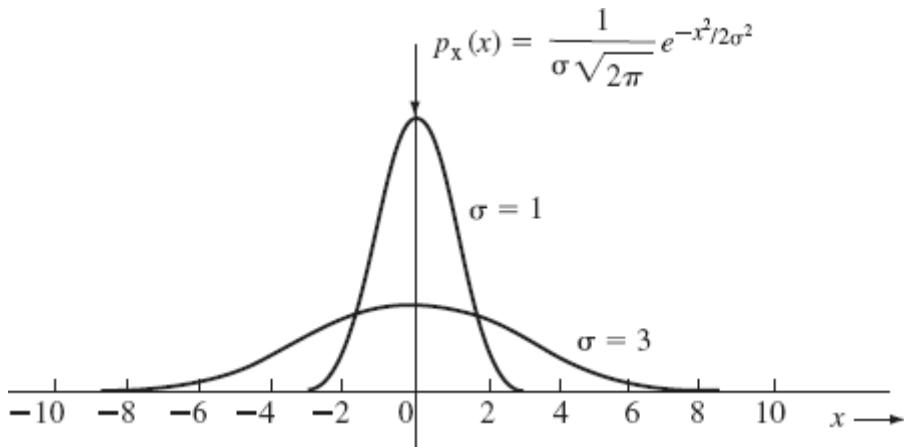


Figura 8.17 PDF gaussiana com desvios-padrão $\sigma = 1$ e $\sigma = 3$.

Exemplo 8.23 Estimemos a largura, ou espalhamento, de uma PDF gaussiana [Eq. (8.60a)].

Para uma VA gaussiana [Eqs. (8.35) e (8.40b)],

$$P(|x - \bar{x}| < \sigma) = 1 - 2Q(1) = 0,6826$$

$$P(|x - \bar{x}| < 2\sigma) = 1 - 2Q(2) = 0,9546$$

$$P(|x - \bar{x}| < 3\sigma) = 1 - 2Q(3) = 0,9974$$

Isso significa que a área sob a PDF no intervalo $(\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma)$ é 99,74% da área total. Uma fração desprezível (0,26%) da área está fora desse intervalo. Portanto, a largura, ou espalhamento, da PDF gaussiana pode ser considerada(o) grosseiramente como $\pm 3\sigma$ em torno de sua média, perfazendo uma largura total de cerca de 6σ .

8.4 CORRELAÇÃO

Muitas vezes, estamos interessados em determinar a natureza da dependência entre duas entidades, como entre o hábito de fumar e câncer do pulmão. Consideraremos um experimento aleatório com dois resultados descritos pelas VAs x e y . Conduzimos vários ensaios desse experimento e registramos os valores de x e y em cada ensaio. A partir desses dados, pode ser possível determinar a natureza da dependência entre x e y . A covariância das VAs x e y é uma medida de cálculo simples e que pode fornecer informação útil a respeito da dependência entre x e y .

A covariância σ_{xy} de duas VAs é definida como

$$\sigma_{xy} \triangleq \overline{(x - \bar{x})(y - \bar{y})} \quad (8.76)$$

Notemos que o conceito de covariância é uma extensão natural do conceito de variância, definida como

$$\sigma_x^2 = \overline{(x - \bar{x})(x - \bar{x})}$$

Consideremos um caso de duas variáveis dependentes x e y , que tendem a variar em harmonia; ou seja, se x aumentar, y aumenta; se x diminuir, y também diminui. Por exemplo, x pode ser a temperatura média em uma cidade e y , o volume de vendas de refrigerantes na cidade, nesse dia. É razoável esperar que as duas quantidades variem em harmonia, na maioria dos casos. Consideremos o seguinte experimento: escolher um dia arbitrário e registrar a temperatura média nesse dia como o valor de x e o volume de vendas de refrigerantes nesse dia como o valor y . Efetuamos tal medida ao longo de vários dias (vários ensaios do experimento) e registramos os valores x e y em cada ensaio. Agora, representemos em um gráfico os pontos (x, y) para todos os ensaios. Esse gráfico, conhecido como **diagrama de espalhamento**, pode ter a aparência ilustrada na Fig. 8.18a. O gráfico mostra que, quando x é grande, é provável que y seja grande. Notemos o uso da palavra *provável*. Não é *sempre* verdade que y será grande se x for grande, mas é verdade na maior parte do tempo. Em outras palavras, em alguns poucos casos, uma baixa

temperatura média será associada a um maior volume de vendas de refrigerantes devido a alguma situação atípica, como uma decisão de campeonato de futebol. Isso fica bastante claro no diagrama de espalhamento na Fig. 8.18a.

Para dar prosseguimento a esse exemplo, a variável $x - \bar{x}$ representa a diferença entre os valores real e médio de x , e $y - \bar{y}$ representa a diferença entre os valores real e médio de y . É mais ilustrativo fazer o gráfico de $(y - \bar{y})$ em função de $(x - \bar{x})$. Isto é o mesmo que o diagrama de espalhamento na Fig. 8.18a, mas com a origem deslocada para (\bar{x}, \bar{y}) , como na Fig. 8.18b, que mostra ser provável que um dia com temperatura acima da média produza venda de refrigerantes abaixo da média. Ou seja, se $x - \bar{x}$ for positivo, é provável que $y - \bar{y}$ seja positivo, e se $x - \bar{x}$ for negativo, é mais provável que $y - \bar{y}$ seja negativo. Assim, a quantidade $(x - \bar{x})(y - \bar{y})$ será positiva na maioria dos ensaios. Calculemos esse produto para cada par, somemos esses produtos e, então, dividamos a soma pelo número de ensaios. O resultado é o valor médio de $(x - \bar{x})(y - \bar{y})$, ou seja, a covariância $\sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})$. No exemplo em consideração, a covariância será positiva. Em casos como esse, dizemos que existe uma correlação positiva entre as variáveis x e y . Podemos concluir que uma correlação positiva implica variação das duas variáveis em harmonia (na mesma direção, para cima ou para baixo).

A seguir, consideremos o caso das duas variáveis: x , a temperatura média diária, e z , o volume diário de vendas de agasalhos. É razoável acreditar que, à medida que x (temperatura média) aumente, z (volume de venda de agasalhos) tenda a diminuir. Um hipotético diagrama de espalhamento para esse experimento é ilustrado na Fig. 8.18c. Assim, se $x - \bar{x}$ for positivo (temperatura acima da média), é provável que $z - \bar{z}$ seja negativo (volume de vendas abaixo da média). Do mesmo modo, quando $x - \bar{x}$ for negativo, é provável que $z - \bar{z}$ seja positivo. O produto $(x - \bar{x})(z - \bar{z})$ será negativo para a maioria dos ensaios, e a média $\frac{1}{n} \sum (x - \bar{x})(z - \bar{z}) = \sigma_{xz}$ será negativa. Neste caso, dizemos que existe uma correlação negativa entre x e z . Vale ressaltar que a correlação negativa não significa que não exista relação entre x e z ; significa que x e z são dependentes, mas quando um aumenta, o outro diminui e vice-versa.

Por fim, consideremos as variáveis x (temperatura média diária) e w (número de nascimentos). É razoável esperar que a temperatura média diária tenha pouco efeito no número de crianças que nascem. Um hipotético diagrama de espalhamento para esse caso terá a aparência ilustrada na Fig. 8.18d. Se $x - \bar{x}$ for positivo, é provável que $w - \bar{w}$ seja positivo ou negativo. É igualmente provável que o produto $(x - \bar{x})(w - \bar{w})$ seja positivo ou negativo, de forma que a média $\frac{1}{n} \sum (x - \bar{x})(w - \bar{w}) = \sigma_{xw}$ será zero. Nesse caso, dizemos que as VAs x e w são **descorrelacionadas**.

Para reiterar, se σ_{xy} for positiva (ou negativa), dizemos que x e y guardam uma correlação positiva (ou negativa); se $\sigma_{xy} = 0$, dizemos que as variáveis x e y são descorrelacionadas.

Dessa discussão, parece que, em condições adequadas, a covariância pode servir como uma medida da dependência entre as duas variáveis. Com frequência, a covariância fornece *alguma* informação sobre a interdependência entre duas VAs, e se mostra útil em diversas aplicações.

A covariância σ_{xy} pode ser expressa de várias maneiras, como mostrado a seguir. Por definição,

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xy} &= \overline{(x - \bar{x})(y - \bar{y})} \\
 &= \overline{xy} - \bar{x}\bar{y} - \bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{y} \\
 &= \overline{xy} - \bar{x}\bar{y} - \bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{y} \\
 &= \overline{xy} - \bar{x}\bar{y}
 \end{aligned} \tag{8.77}$$

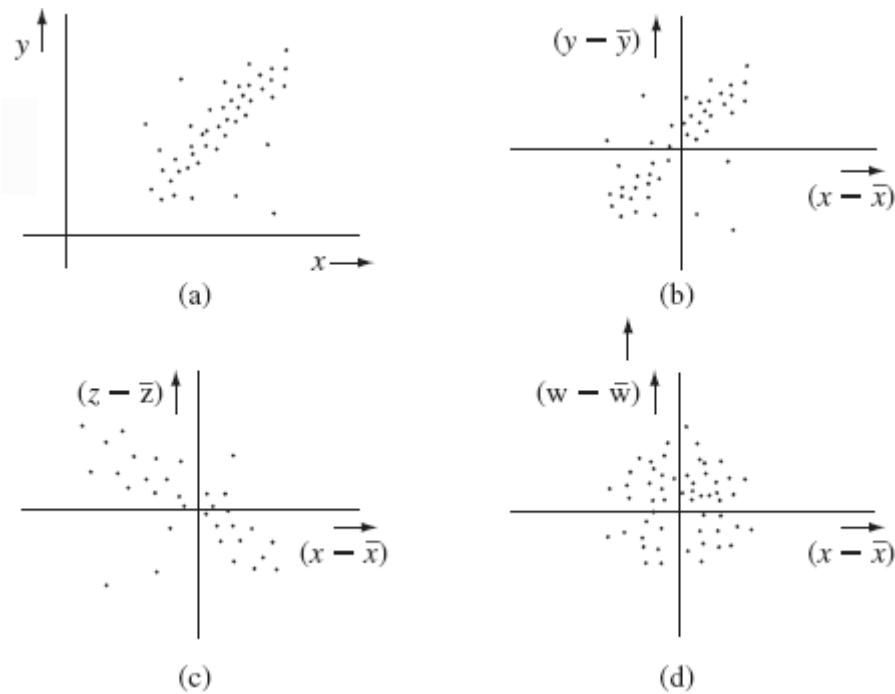


Figura 8.18 Diagramas de espalhamento: (a), (b) correlação positiva; (c) correlação negativa; (d) correlação zero.

Da Eq. (8.77), segue que as variáveis x e y são descorrelatadas ($\sigma_{xy} = 0$) se

$$\bar{xy} = \bar{x}\bar{y} \quad (8.78)$$

A correlação entre x e y não pode ser comparada diretamente com a correlação entre z e w , pois diferentes VAs podem diferir em intensidade. Para ser razoável, o valor da covariância deve ser adequadamente normalizado. Por essa razão, a definição de **coeficiente de correlação** é particularmente útil. O **coeficiente de correlação** ρ_{xy} é σ_{xy} normalizada por $\sigma_x \sigma_y$,

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (8.79)$$

Desta forma, se x e y forem descorrelatadas, $\rho_{xy} = 0$. Além disso, podemos mostrar que (Exercício 8.5-5)

$$-1 \leq \rho_{xy} \leq 1 \quad (8.80)$$

Independência versus Descorrelação

Reparemos que, para VAs independentes, [Eq. (8.64c)]

$$\bar{xy} = \bar{x}\bar{y} \quad \text{e} \quad \sigma_{xy} = 0$$

Portanto, VAs independentes são descorrelacionadas. Isso está em acordo com o argumento heurístico apresentado anteriormente. Devemos notar que, embora variáveis independentes sejam descorrelacionadas, a recíproca não é necessariamente verdadeira — variáveis descorrelacionadas em geral não são independentes (Exercício E.8.5-3). Independência, geralmente, é uma condição mais forte e restritiva que descorrelação. Para variáveis independentes, mostramos [Eq. (8.64b)] que, quando existem expectativas,

$$\overline{g_1(x)g_2(y)} = \overline{g_1(x)} \overline{g_2(y)}$$

para quaisquer funções $g_1(\cdot)$ e $g_2(\cdot)$, enquanto, para descorrelação, a única exigência é que

$$\bar{xy} = \bar{x}\bar{y}$$

Existe apenas um caso *especial* para o qual independência e descorrelação são equivalentes — quando as variáveis x e y são conjuntamente gaussianas. Reparemos que, quando x e y são conjuntamente gaussianas, x e y são individualmente gaussianas.

Valor Quadrático Médio da Soma de Variáveis Descorrelacionadas

Se x e y forem descorrelacionadas, para z = x + y, mostramos que

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \quad (8.81)$$

Ou seja, para VAs descorrelacionadas, a variância da soma é soma das variâncias. Provamos esse resultado anteriormente para variáveis independentes x e y. Seguindo o desenvolvimento após a Eq. (8.71), obtemos

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= \overline{[(x - \bar{x}) + (y - \bar{y})]^2} \\ &= \overline{(x - \bar{x})^2} + \overline{(y - \bar{y})^2} + 2\overline{(x - \bar{x})(y - \bar{y})} \\ &= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\sigma_{xy} \end{aligned}$$

Como x e y são descorrelacionadas, $\sigma_{xy} = 0$ e a Eq. (8.81) resulta. Se x e y tiverem média zero, z também terá média zero, e o valor quadrático médio dessas variáveis será igual às suas variâncias. Portanto,

$$\overline{(x + y)^2} = \overline{x^2} + \overline{y^2} \quad (8.82)$$

se x e y forem descorrelacionadas e tiverem médias zero. Assim, as Eqs. (8.81) e (8.82) são válidas não apenas quando x e y são independentes, mas também sob a condição menos restritiva de que x e y sejam descorrelacionadas.

8.5 ESTIMAÇÃO QUADRÁTICA MÉDIA LINEAR

Quando duas variáveis aleatórias x e y são relacionadas (ou dependentes), o conhecimento de uma dá certa informação sobre a outra. Assim, é possível estimar o valor de y (um parâmetro ou sinal) a partir do conhecimento do valor de x. O valor estimado de y será outra variável aleatória \hat{y} . Em geral, a variável aleatória estimada \hat{y} diferirá do verdadeiro y. Podemos escolher vários critérios de qualidade para estimação. O mínimo erro quadrático médio é um critério possível. Nesse caso, o valor estimado ótimo minimiza o erro quadrático médio $\overline{\epsilon^2}$ dado por

$$\overline{\epsilon^2} = \overline{(y - \hat{y})^2}$$

Em geral, o valor estimado ótimo \hat{y} é uma função não linear de x.^{*} Simplificamos o problema limitando o valor estimado \hat{y} a ser uma função linear de x da forma

$$\hat{y} = ax$$

admitindo que $\bar{x} = 0$.^{**} Nesse caso,

$$\begin{aligned} \overline{\epsilon^2} &= \overline{(y - \hat{y})^2} = \overline{(y - ax)^2} \\ &= \overline{y^2} + a^2\overline{x^2} - 2a\overline{xy} \end{aligned}$$

Para minimizar $\overline{\epsilon^2}$, temos

$$\frac{\partial \overline{\epsilon^2}}{\partial a} = 2a\overline{x^2} - 2\overline{xy} = 0$$

Logo,

$$a = \frac{\overline{xy}}{\overline{x^2}} = \frac{R_{xy}}{R_{xx}} \quad (8.83)$$

em que $R_{xy} = \overline{xy}$, $R_{xx} = \overline{x^2}$, $R_{yy} = \overline{y^2}$. Reparemos que, para essa escolha constante de a ,

$$\epsilon = y - ax = y - \frac{R_{xy}}{R_{xx}}x$$

Portanto,

$$\overline{x\epsilon} = \overline{x} \left(y - \frac{R_{xy}}{R_{xx}}x \right) = \overline{xy} - \frac{R_{xy}}{R_{xx}}\overline{x^2}$$

Como, por definição, $\overline{xy} = R_{xy}$ e $\overline{x^2} = R_{xx}$, temos

$$\overline{x\epsilon} = R_{xy} - R_{xy} = 0 \quad (8.84)$$

A condição na Eq. (8.84) é conhecida como princípio de ortogonalidade. A interpretação física é que o dado (x) usado na estimativa e o erro (mínimo) (ϵ) são ortogonais (o que, nesse caso, implica descorrelação) quando o erro quadrático médio é mínimo.

Dado o princípio de ortogonalidade, o mínimo erro quadrático médio é dado por

$$\begin{aligned} \overline{\epsilon^2} &= \overline{(y - ax)^2} \\ &= \overline{(y - ax)y} - a \cdot \overline{xy} \\ &= \overline{(y - ax)y} \\ &= \overline{y^2} - a \cdot \overline{yx} \\ &= R_{yy} - aR_{xy} \end{aligned} \quad (8.85)$$

Uso de n Variáveis Aleatórias para Estimar uma Variável Aleatória

Se uma variável aleatória x_0 for relacionada a n VAs x_1, x_2, \dots, x_n , podemos estimar o valor de x_0 usando uma combinação linear* de x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\hat{x}_0 = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \sum_{i=1}^n a_i x_i \quad (8.86)$$

O erro quadrático médio é dado por

$$\overline{\epsilon^2} = \overline{[x_0 - (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)]^2}$$

Para minimizar $\overline{\epsilon^2}$, devemos tomar

$$\frac{\partial \overline{\epsilon^2}}{\partial a_1} = \frac{\partial \overline{\epsilon^2}}{\partial a_2} = \cdots = \frac{\partial \overline{\epsilon^2}}{\partial a_n} = 0$$

ou seja,

$$\frac{\partial \overline{\epsilon^2}}{\partial a_i} = \frac{\partial}{\partial a_i} \overline{[x_0 - (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)]^2} = 0$$

Trocando a ordem da diferenciação e tomado a média, obtemos

$$\frac{\partial \overline{\epsilon^2}}{\partial a_i} = -2\overline{[x_0 - (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n)]x_i} = 0 \quad (8.87a)$$

A Eq. (8.87a) pode ser escrita como

$$\overline{\epsilon \cdot x_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8.87b)$$

O último resultado pode ser reescrito na forma de equações de Yule-Walker

$$R_{0i} = a_1R_{i1} + a_2R_{i2} + \dots + a_nR_{in} \quad (8.88)$$

em que,

$$R_{ij} = \overline{x_i x_j}$$

Diferenciando em $\overline{\epsilon^2}$ relação a a_1, a_2, \dots, a_n e igualando a zero, obtemos n equações simultâneas da forma mostrada na Eq. (8.88). As desejadas constantes a_1, a_2, \dots, a_n podem ser determinadas dessas equações via inversão de matriz

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R_{01} \\ R_{02} \\ \vdots \\ R_{0n} \end{bmatrix} \quad (8.89)$$

A Eq. (8.87) mostra que, para estimação ótima, (o erro) é ortogonal aos dados (x_1, x_2, \dots, x_n) . Isso dá a forma mais geral para o princípio de ortogonalidade na estimação quadrática média. Em consequência, o erro quadrático médio (em condições ótimas) é

$$\overline{\epsilon^2} = \overline{\epsilon \epsilon} = \overline{\epsilon [x_0 - (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n)]}$$

Como $\overline{\epsilon X_i} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$),

$$\begin{aligned} \overline{\epsilon^2} &= \overline{\epsilon x_0} \\ &= \overline{x_0[x_0 - (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n)]} \\ &= R_{00} - (a_1R_{01} + a_2R_{02} + \dots + a_nR_{0n}) \end{aligned} \quad (8.90)$$

Exemplo 8.24 Na modulação por código de pulso diferencial (DPCM), em vez de transmitir valores de amostras diretamente, estimamos (predizemos) o valor de cada amostra a partir do conhecimento de n amostras anteriores. O erro de estimação ϵ_k , diferença entre o valor real e o valor estimado da k -ésima amostra, é quantizado e transmitido (Fig. 8.19). Como o erro de estimação ϵ_k é menor que o valor da amostra m_k , para o mesmo número de níveis de quantização (mesmo número de bits de código PCM), a SNR aumenta. Foi mostrado na Seção 6.5 que a melhora na SNR é igual a $\overline{m^2}/\overline{\epsilon^2}$, em que $\overline{m^2}$ e $\overline{\epsilon^2}$ são os valores quadráticos médios do sinal de voz e do erro de estimação ϵ , respectivamente. Neste exemplo, determinemos o preditor de segunda ordem linear ótimo e a correspondente melhora na SNR.

A equação do estimador (preditor) de segunda ordem, mostrado na Fig. 8.19, é

$$\hat{m}_k = a_1m_{k-1} + a_2m_{k-2}$$

em que \hat{m}_k é o melhor valor estimado linear de m_k . O erro de estimação ϵ_k é dado por

$$\epsilon_k = \hat{m}_k - m_k = a_1m_{k-1} + a_2m_{k-2} - m_k$$

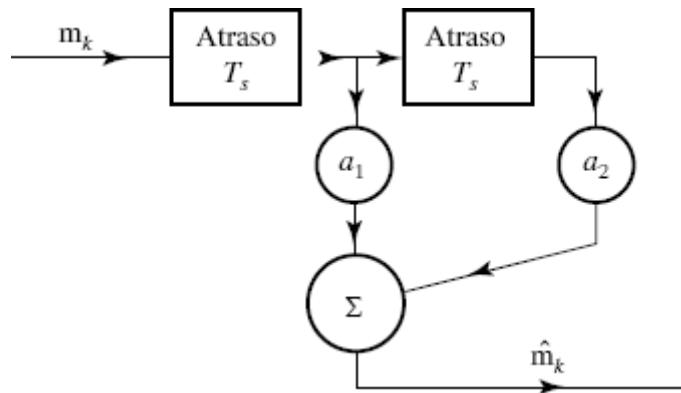


Figura 8.19 Preditor de segunda ordem no Exemplo 8.24.

Para sinais de voz, Jayant e Noll⁵ fornecem os valores de correlações de várias amostras:

$$\begin{aligned}\overline{m_k m_k} &= \overline{m^2}, \quad \overline{m_k m_{k-1}} = 0,825\overline{m^2}, \quad \overline{m_k m_{k-2}} = 0,562\overline{m^2}, \\ \overline{m_k m_{k-3}} &= 0,308\overline{m^2}, \quad \overline{m_k m_{k-4}} = 0,004\overline{m^2}, \quad \overline{m_k m_{k-5}} = -0,243\overline{m^2}\end{aligned}$$

Reparemos que $R_{ij} = \overline{m_k m_{k-(j-i)}}$. Logo,

$$\begin{aligned}R_{11} &= R_{22} = \overline{m^2} \\ R_{12} &= R_{21} = R_{01} = 0,825\overline{m^2} \\ R_{02} &= 0,562\overline{m^2}\end{aligned}$$

Os valores ótimos de a_1 e a_2 são determinados da Eq. (8.89) como $a_1 = 1,1314$ e $a_2 = -0,3714$, e o erro quadrático médio na estimativa é dado pela Eq. (8.90) como

$$\overline{\epsilon^2} = [1 - (0,825a_1 + 0,562a_2)]\overline{m^2} = 0,2753\overline{m^2} \quad (8.91)$$

A melhora na SNR é $10\log_{10} \frac{\overline{m^2}}{0,2752 \overline{m^2}} = 5,6 \text{ dB}$

8.6 SOMA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Em muitas aplicações, é útil caracterizar uma VA z que é a soma de duas VAs x e y:

$$z = x + y$$

Como $z = x + y$, $y = z - x$, qualquer que seja o valor de x. Portanto, o evento $z \leq z$ é o evento conjunto $[y \leq z - x \text{ e } x \text{ tem qualquer valor no intervalo } (-\infty, \infty)]$. Logo,

$$F_z(z) = P(z \leq z) = P(x \leq \infty, y \leq z - x)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} p_{xy}(x, y) dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} p_{xy}(x, y) dy \end{aligned}$$

e

$$p_z(z) = \frac{dF_z(z)}{dz} = \int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(x, z-x) dx$$

Se x e y forem VAs independentes,

$$p_{xy}(x, z-x) = p_x(x)p_y(z-x)$$

e

$$p_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_x(x)p_y(z-x) dx \quad (8.92)$$

A PDF $p_z(z)$ é, então, a convolução das PDFs $p_x(z)$ e $p_y(z)$. Podemos estender esse resultado à soma de n VAs independentes x_1, x_2, \dots, x_n . Se

$$z = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

a PDF $p_z(z)$ será a convolução das PDFs $p_{x_1}(x), p_{x_2}(x), \dots, p_{x_n}(x)$, ou seja,

$$p_z(z) = p_{x_1}(x) * p_{x_2}(x) * \dots * p_{x_n}(x) \quad (8.93)$$

Soma de Variáveis Aleatórias Gaussianas

Variáveis aleatórias gaussianas têm várias propriedades muito importantes. Por exemplo, uma variável aleatória gaussiana x e sua função densidade de probabilidade $p_x(x)$ são completamente descritas pela média μ_x e variância σ_x^2 . Além disso, a soma de um número qualquer de variáveis aleatórias gaussianas disjuntas também é uma variável aleatória gaussiana, quaisquer que sejam as relações entre as mesmas (como dependência). Novamente, notemos que, quando os membros de um conjunto de variáveis aleatórias $\{x_i\}$ são conjuntamente gaussianos, cada variável aleatória individual x_i também tem distribuição gaussiana.

Como exemplo, mostremos que a soma de duas variáveis aleatórias gaussianas independentes, de média zero, é gaussiana. Sejam x_1 e x_2 duas variáveis aleatórias gaussianas independentes, de média zero, com funções densidade de probabilidade

$$p_{x_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-x^2/(2\sigma_1^2)} \quad \text{e} \quad p_{x_2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-x^2/(2\sigma_2^2)}$$

Seja

$$y = x_1 + x_2$$

Portanto, a função densidade de probabilidade de y é

$$p_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{x_1}(x)p_{x_2}(y-x) dx$$

Efetuando a convolução (integração), obtemos

$$\begin{aligned}
p_y(y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(y-x)^2}{2\sigma_2^2}\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} e^{-\frac{y^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \left[x - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}y\right]^2\right) dx \quad (8.94)
\end{aligned}$$

Com uma simples mudança de variável,

$$w = \frac{\left[x - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}y\right]}{\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}}$$

podemos escrever a integral na Eq. (8.94) como

$$p_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} e^{-\frac{y^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}w^2} dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} e^{-\frac{y^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \quad (8.95)$$

Um exame da Eq. (8.95) nos mostra que y é uma VA gaussiana com média zero e variância

$$\sigma_y^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

Na verdade, como x_1 e x_2 são independentes, devem ser descorrelacionadas. Essa relação pode ser obtida da Eq. (8.81).

De modo mais geral,⁵ se x_1 e x_2 forem conjuntamente gaussianas, mas não necessariamente independentes, então, $y = x_1 + x_2$ é uma VA gaussiana com média

$$\bar{y} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$$

e variância

$$\sigma_y^2 = \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + 2\sigma_{x_1x_2}$$

Com base na indução, a soma de um número qualquer de VAs conjuntamente gaussianas distribuídas ainda é gaussiana. Mais importante, para quaisquer constantes fixas $\{a_i, i = 1, \dots, m\}$ e VAs conjuntamente gaussianas $\{x_i, i = 1, \dots, m\}$,

$$\sum_{i=1}^m a_i x_i$$

permanece gaussiana. Esse resultado tem importantes implicações práticas. Por exemplo, se x_k for uma sequência de amostras de sinal conjuntamente gaussianas que passam por um filtro em tempo discreto com resposta ao impulso $\{h_i\}$, a saída do filtro

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} h_i x_{k-i} \quad (8.96)$$

continuará gaussiana. O fato de que a saída do filtro linear com um sinal de entrada gaussiano será um sinal gaussiano é altamente significativo, e é um dos mais úteis resultados na análise de comunicações.

8.7 TEOREMA DO LIMITE CENTRAL

Em certas condições, a soma de um grande número de VAs independentes tende a ser uma variável aleatória gaussiana, não importando as formas das densidades de probabilidade das variáveis sendo somadas.* A afirmação rigorosa dessa tendência é conhecida como **teorema do limite central**.** A prova desse teorema pode ser encontrada nas Refs. 6 e 7. Aqui, apresentaremos tão somente um argumento simples plausível.

A Fig. 8.20 ilustra a tendência à distribuição gaussiana quando da convolução de um grande número de funções. Para simplificar, supomos que todas as PDFs sejam idênticas, isto é, uma função retangular $0,5\pi(x/2)$. A Fig. 8.20 mostra as sucessivas convoluções de funções retangulares. A tendência à forma de sino é evidente.

Esse importante resultado de que a **distribuição** da soma de n variáveis aleatórias independentes de Bernoulli, quando adequadamente normalizadas, converge a distribuições gaussianas foi estabe-

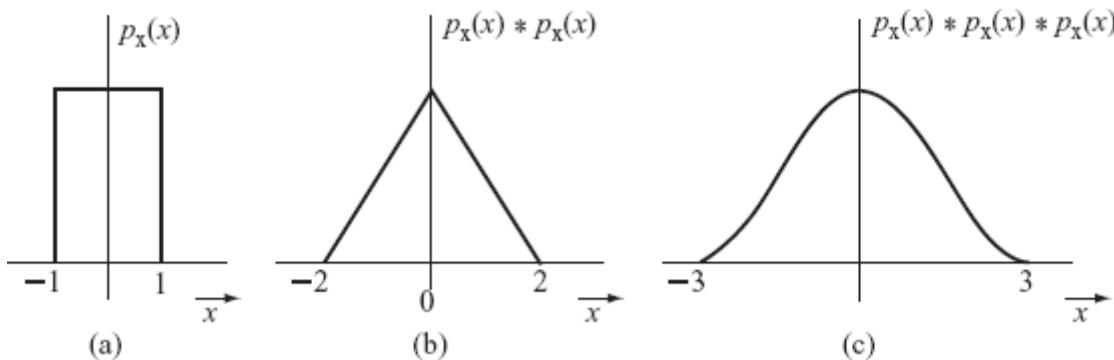


Figura 8.20 Demonstração do teorema do limite central.

leido por A. de Moivre no início do século XVIII. A prova mais geral para distribuição arbitrária é creditada a J. W. Lindenber e P. Lévy, em 1920. Vale notar que “soma normalizada” é o valor médio de amostras (ou média de amostras) de n variáveis aleatórias.

Teorema do limite central (para a média de amostras):

Sejam x_1, \dots, x_n amostras aleatórias independentes de uma dada distribuição com média μ e variância σ^2 , com $0 < \sigma^2 < \infty$. Então, para qualquer valor x , temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu}{\sigma} \leq x \right] = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2} dv \quad (8.97)$$

ou, de modo equivalente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\frac{\bar{x}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > x \right] = Q(x) \quad (8.98)$$

Notemos que

$$\bar{x}_n = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

é conhecido como média de amostras. A interpretação é que a média de amostras de qualquer distribuição com variância finita não nula converge à distribuição gaussiana com média fixa μ e variância decrescente σ^2/n . Em outras palavras, independentemente da real distribuição de x_i , pode ser aproximado por uma distribuição gaussiana com média $n\mu$ e variância $n\sigma^2$.

Exemplo 8.25 Consideremos um sistema de comunicação que transmite um pacote de dados de 1024 bits. Cada bit pode estar em erro com probabilidade de 10^{-2} . Determinemos a probabilidade (aproximada) de que mais de 30 dos 1024 bits estejam em erro.

Definamos uma variável aleatória x_i tal que $x_i = 1$ se o i -ésimo bit estiver em erro, e $x_i = 0$ se não estiver em erro. Assim,

$$v = \sum_{i=1}^{1024} x_i$$

é o número de erros no pacote de dados. Desejamos determinar $P(v > 30)$.

Como $P(x_i = 1) = 10^{-2}$ e $P(x_i = 0) = 1 - 10^{-2}$, a rigor, deveríamos calcular

$$P(v > 30) = \sum_{m=31}^{1024} \binom{1024}{m} (10^{-2})^m (1 - 10^{-2})^{1024-m}$$

Esse cálculo é demorado. Agora, apliquemos o teorema do limite central para resolver este problema de modo aproximado.

Primeiro, determinemos

$$\bar{x}_i = 10^{-2} \times (1) + (1 - 10^{-2}) \times (0) = 10^{-2}$$

$$\bar{x}_i^2 = 10^{-2} \times (1)^2 + (1 - 10^{-2}) \times (0) = 10^{-2}$$

Em consequência,

$$\sigma_i^2 = \bar{x}_i^2 - (\bar{x}_i)^2 = 0,0099$$

Com base no teorema do limite central, $v = \sum_i x_i$ é aproximadamente gaussiana, com média $1024 \cdot 10^{-2} = 10,24$ e variância $1024 \times 0,0099 = 10,1376$. Já que

$$y = \frac{v - 10,24}{\sqrt{10,1376}}$$

é uma variável gaussiana padrão com média zero e variância unitária,

$$\begin{aligned} P(v > 30) &= P\left(y > \frac{30 - 10,24}{\sqrt{10,1376}}\right) \\ &= P(y > 6,20611) \\ &= Q(6,20611) \\ &\simeq 1,925 \times 10^{-10} \end{aligned}$$

Essa é uma boa ocasião para relaxar as condições no teorema do limite central para a média de amostras. Essa importante generalização foi feita pelo famoso matemático russo A. Lyapunov em 1901.

Teorema do Limite Central (para a soma de variáveis aleatórias independentes):

Sejam x_1, \dots, x_n variáveis aleatórias independentes, mas não necessariamente com distribuições idênticas. Cada variável aleatória x_i tem média μ_i e variância não nula $< \infty$. Além disso, suponhamos que cada momento central de terceira ordem

$$\overline{|x_i - \mu_i|^3} < \infty, \quad i = 1, \dots, n$$

e suponhamos, ainda,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{|\mathbf{x}_i - \mu_i|^3}{\sigma_i^3} \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \right)^{3/2} = 0$$

Então, a variável aleatória

$$y(n) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i - \sum_{i=1}^n \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}}$$

converge a uma densidade gaussiana padrão à medida que $n \rightarrow \infty$, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[y(n) > x] = Q(x) \quad (8.99)$$

O teorema do limite central fornece uma explicação plausível para o bem conhecido fato de que, em experimentos práticos, muitas variáveis aleatórias são aproximadamente gaussianas. Por exemplo, ruído de canal de comunicação é o efeito da soma de distintas fontes de perturbações aleatórias (por exemplo, centelhas, descargas elétricas, eletricidade estática). Com base no teorema do limite central, ruído como a soma de todas essas distribuições aleatórias deve ser aproximadamente gaussiano.

REFERÊNCIAS

1. J. Singh, *Great Ideas of Modern Mathematics*, Dover, Boston, 1959.
2. M. Abramowitz and I. A. Stegun, Eds., *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standards, Washington, DC, 1964, sec. 26.
3. The Chemical Rubber Co., *CRC Standard Mathematical Tables*, 26th ed., 1980.
4. J. M. Wozencraft and I. M. Jacobs, *Principles of Communication Engineering*, Wiley, New York, 1965, p. 83.
5. N. S. Jayant and P. Noll, *Digital Coding of Waveforms: Principles and Applications to Speech and Video*, Prentice-Hall, 1984.
6. A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1995.
7. M. H. DeGroot, *Probabilities and Statistics*, 2nd ed., AddisonWesley, Reading, MA, 1987.

EXERCÍCIOS

- 8.1-1** Uma carta é tirada de um baralho comum. Alope probabilidade ao evento em que a carta tirada é: **(a)** uma carta vermelha; **(b)** uma rainha preta; **(c)** uma com figura (conte ás como carta com figura); **(d)** uma carta com o número 7; **(e)** uma carta com número ≤ 5 .
- 8.1-2** Três dados comuns são lançados. Alope probabilidade aos seguintes eventos: a soma dos pontos que aparecem nos três dados é **(a)** 4; **(b)** 9; **(c)** 15.
- 8.1-3** A probabilidade de que o número i apareça no lançamento de certo dado carregado é k_i ($i = 1, 2, \dots, 6$). Alope probabilidade aos seis resultados.
- 8.1-4** Uma caixa contém três osciladores em microchip, marcados O_1 , O_2 e O_3 , e dois microchips de PLL, marcados P_1 , P_2 . Dois microchips são retirados sucessivamente da caixa, de modo aleatório, e não são a ela devolvidos.
- (a)** Quantos são os resultados possíveis (ou seja, quantos pontos estão no espaço de amostras)? Liste todos os resultados e aloque probabilidade a cada um deles.
 - (b)** Expresse os seguintes eventos como uniões dos resultados na parte **(a)**: **(i)** um dos chips retirados é oscilador e o outro, PLL; **(ii)** os dois chips são PLL; **(iii)** os dois chips são osciladores e **(iv)** os dois chips são de mesma natureza. Alope probabilidade a cada um desses eventos.

- 8.1-5** Use a Eq. (8.12) para determinar as probabilidades no Exercício 8.1-4, parte **(b)**.
- 8.1-6** No Exercício 8.1-4, determine a probabilidade de:
- A segunda escolha ser um chip oscilador, dado que a primeira foi um chip PLL.
 - A segunda escolha ser um chip oscilador, dado que a primeira também foi um chip oscilador.
- 8.1-7** Uma fonte binária gera dígitos **1** e **0** de modo aleatório, com igual probabilidade. Aloque probabilidades aos seguintes eventos, considerando 10 bits gerados pela fonte: **(a)** há exatamente dois **1s** e oito **0s**; **(b)** há pelo menos quatro **0s**.
- 8.1-8** Na loteria da Califórnia (Lotto), um jogador escolhe quaisquer 6 números de um total de 49 (de 1 a 49). Seis bolas são escolhidas aleatoriamente (e não são devolvidas) de 49 bolas numeradas de 1 a 49.
- Determine a probabilidade de que as 6 bolas casem os 6 números escolhidos pelo jogador.
 - Determine a probabilidade de casar exatamente 5 bolas.
 - Determine a probabilidade de casar exatamente 4 bolas.
 - Determine a probabilidade de casar exatamente 3 bolas.

- 8.1-9** Uma rede consiste em 10 enlaces s_1, s_2, \dots, s_{10} em cascata (Fig. E.8.1-9). Se um dos enlaces falhar, todo o sistema falha. Todos os enlaces são independentes, com igual probabilidade de falha $p = 0,01$.
- Qual é a probabilidade de falha da rede?
- Sugestão:* Considere a probabilidade de que nenhum dos enlaces falhe.
- A confiabilidade de uma rede é a probabilidade de a mesma não falhar. Se a requerida confiabilidade do sistema for 0,99, qual deve ser a probabilidade de falha de cada enlace?

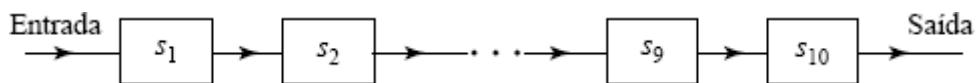


Figura E.8.1-9

- 8.1-10** A confiabilidade de uma rede melhora quando são usados enlaces redundantes. A confiabilidade da rede no Exercício 8.1-9 (Fig. E.8.1-9) pode ser melhorada com a construção de duas sub-redes em paralelo (Fig. E.8.1-10). Assim, se uma sub-rede falhar, a outra ainda proverá conexão.
- Usando os dados do Exercício E.8.1-9, determine a confiabilidade da rede na Fig. E.8.1-10.
 - Se a requerida confiabilidade dessa nova rede for 0,999, qual deve ser a probabilidade de falha de cada enlace?

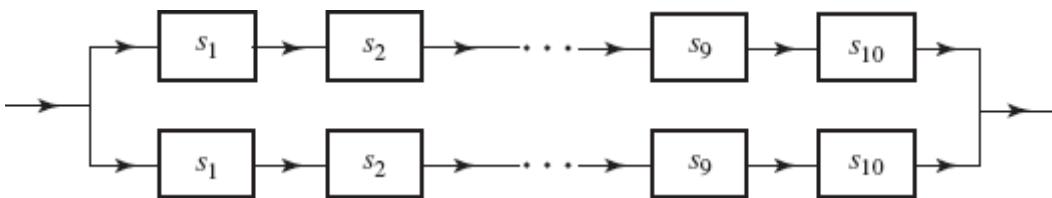


Figura E.8.1-10

- 8.1-11** Compare as confiabilidades das duas redes na Fig. E.8.1-11, dado que a probabilidade de falha de cada um dos enlaces s_1 e s_2 seja p .

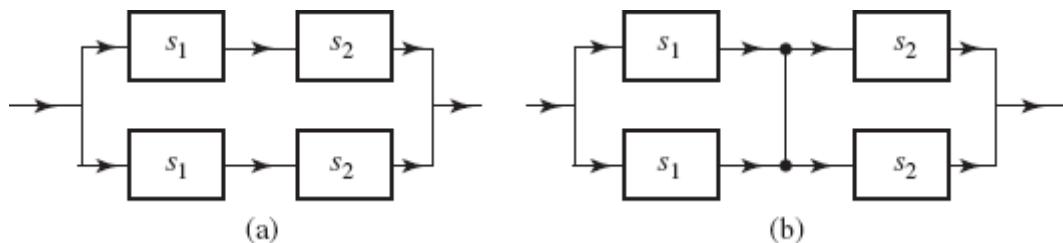


Figura E.8.1-11

- 8.1-12** Em um jogo de pôquer, cada jogador recebe cinco cartas de um baralho comum de 52 cartas. Qual é a probabilidade de que um jogador obtenha um *flush* (todas as cinco cartas de um mesmo naipe)?
- 8.1-13** Dois dados são lançados. Um dado é comum e o outro, polarizado com as seguintes probabilidades

$$P(1) = P(6) = \frac{1}{6}, \quad P(2) = P(4) = 0, \quad P(3) = P(5) = \frac{1}{3}$$

Determine a probabilidade de obter a soma: **(a)** 4; **(b)** 5.

- 8.1-14** Na Seção 8.1, Exemplo 8.5, determine
- (a)** $P(B)$, a probabilidade de tirar um ás na segunda rodada.
 - (b)** $P(A|B)$, a probabilidade de um ás vermelho ser tirado na primeira rodada, dado que um ás foi tirado na segunda rodada.

Sugestão: O evento B pode ocorrer de duas maneiras: a primeira rodada é um ás vermelho e a segunda, um ás; ou a primeira rodada não é um ás vermelho e a segunda, um ás. Isso é $A \cap B \cup A^c B$ (ver Fig. 8.2).

- 8.1-15** Uma fonte binária gera dígitos **1** e **0** de modo aleatório, com probabilidades $P(1) = 0,8$ e $P(0) = 0,2$.
- (a)** Qual é a probabilidade de que exatamente dois **1s** ocorram em uma sequência de n dígitos?
 - (b)** Qual é a probabilidade de que pelo menos três **1s** ocorram em uma sequência de n dígitos?
- 8.1-16** Em um canal de comunicação binária, o receptor detecta pulsos binários com probabilidade de erro P_e . Qual é a probabilidade de que, entre 100 dígitos recebidos, não mais que quatro dígitos estejam em erro?
- 8.1-17** Um canal PCM consiste em 10 enlaces, com um repetidor regenerativo no final de cada enlace. Se as probabilidades de erro de detecção dos 15 detectores forem p_1, p_2, \dots, p_{15} , determine a probabilidade de erro de detecção de todo o canal se $p_i \ll 1$.
- 8.1-18** O Exemplo 8.8 considera a possibilidade de melhorar a confiabilidade com a repetição de um dígito três vezes. Refaça a análise do exemplo para cinco repetições.
- 8.1-19** Uma caixa contém nove microchips defeituosos. Um microchip bom é jogado na caixa por engano. Alguém tenta recuperar o microchip bom. Um chip é tirado da caixa aleatoriamente e testado. Se o chip for defeituoso, é descartado e outro chip é tirado da caixa de modo aleatório. O processo é repetido até que o chip bom seja encontrado.
- (a)** Qual é a probabilidade de encontrar o chip bom na primeira tentativa?
 - (b)** Qual é a probabilidade de encontrar o chip bom em cinco tentativas?
- 8.1-20** Uma pessoa de um grupo de 10 é selecionada para uma missão suicida por meio da escolha de um palito. Há 10 palitos: nove são do mesmo tamanho e o décimo é mais curto que os outros. Cada pessoa, sucessivamente, tira um palito. A pessoa que tirar o palito mais curto é selecionada para a missão. Determine as posições na sequência que são, respectivamente, a mais favorável e a menos favorável para tirar o palito curto.

- 8.2-1** Para certo canal binário não simétrico, é dado que

$$P_{y|x}(0|1) = 0,1 \quad \text{e} \quad P_{y|x}(1|0) = 0,2$$

em que x é o dígito transmitido e y , o dígito recebido. Se $P_x(0) = 0,4$, determine $P_y(0)$ e $P_y(1)$.

- 8.2-2** Um canal binário simétrico (Exemplo 8.13) tem probabilidade de erro P_e . A probabilidade de transmitir **1** é Q . Se o receptor detectar um dígito como **1**, qual é a probabilidade de que o dígito originalmente

transmitido tenha sido: (a) 1; (b) 0?

Sugestão: Se x for o dígito transmitido e y , o dígito recebido, use $P_{y|x}(0|1) = P_{y|x}(1|0) = P_e$. Use a regra de Bayes e determine $P_{x|y}(1|1)$ e $P_{x|y}(0|1)$.

- 8.2-3** A PDF de amplitude x de certo sinal $x(t)$ é dada por $p_x(x) = 0,5|x|e^{-|x|}$.

- (a) Determine a probabilidade de que $x \geq 1$.
- (b) Determine a probabilidade de que $-1 < x \leq 2$.
- (c) Determine a probabilidade de que $x \leq -2$.

- 8.2-4** A PDF de uma amplitude x de um sinal gaussiano $x(t)$ é dada por

$$p_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2\sigma^2}$$

Esse sinal é aplicado à entrada de um circuito retificador de meia-onda (Fig. E.8.2-4).

Admitindo um diodo ideal, determine $F_y(y)$ e $p_y(y)$ da amplitude do sinal de saída $y = x \cdot u(x)$. Repare que a probabilidade de $x = 0$ não é zero.

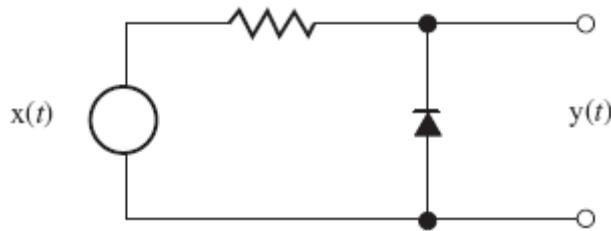


Figura E.8.2-4

- 8.2-5** A PDF de uma variável gaussiana x é dada por

$$p_x(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-(x-4)^2/18}$$

Determine: (a) $P(x \geq 4)$; (b) $P(x \leq 0)$; (c) $P(x \geq -2)$.

- 8.2-6** Para uma VA x com PDF

$$p_x(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/32}u(x)$$

- (a) Esboce o gráfico de $p_x(x)$ e determine (justificando) se esta é uma VA gaussiana.
- (b) Determine: (i) $P(x \geq 1)$, (ii) $P(1 < x \leq 2)$.
- (c) Como a VA x pode ser gerada a partir de outra VA gaussiana? Mostre um diagrama em blocos e justifique.

- 8.2-7** A PDF conjunta de VAs x e y é mostrada na Fig. E.8.2-7.

- (a) Determine: (i) A ; (ii) $p_x(x)$; (iii) $p_y(y)$; (iv) $P_{x|y}(x|y)$; (v) $P_{y|x}(y|x)$.
- (b) x e y são independentes? Justifique sua resposta.

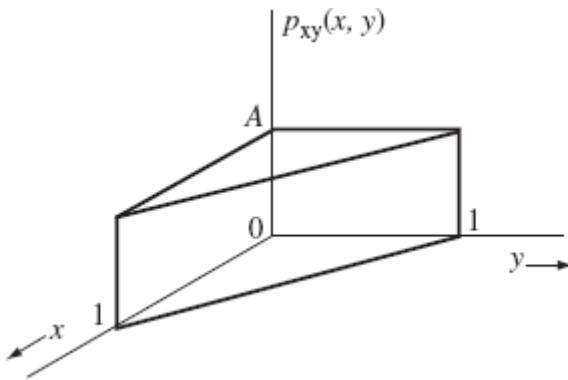


Figura E.8.2-7

8.2-8 A PDF conjunta $p_{xy}(x, y)$ de duas VAs contínuas é dada por

$$p_{xy}(x, y) = xy e^{-(x^2)} e^{-y^2/2} u(x)u(y)$$

- (a) Determine $p_x(x)$, $p_y(y)$, $p_{x|y}(x|y)$ e $p_{y|x}(y|x)$.
- (b) x e y são independentes?

8.2-9 As VAs x e y são ditas conjuntamente gaussianas se sua PDF conjunta for dada por

$$p_{xy}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{M}} e^{-(ax^2+by^2-2cxy)/2M}$$

em que $M = ab - c^2$. Mostre que $p_x(x)$, $p_y(y)$, $p_{x|y}(x|y)$ e $p_{y|x}(y|x)$ são todas gaussianas e que $\overline{x^2} = b$, $\overline{y^2} = a$ e $\overline{xy} = c$.

Sugestão: Use

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-px^2+qx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{q^2/4p}$$

8.2-10 A PDF conjunta das VAs x e y é dada por

$$p_{xy}(x, y) = ke^{-(x^2+xy+y^2)}$$

Determine: (a) a constante k ; (b) $p_x(x)$; (c) $p_y(y)$; (d) $p_{x|y}(x|y)$; (e) $p_{y|x}(y|x)$. As VAs x e y são independentes?

8.2-11 No exemplo de detecção por limiar (Exemplo 8.16), foi admitido que os dígitos **1** e **0** eram transmitidos com igual probabilidade. Se $P_x(1) = P_x(0)$, as probabilidades de transmitir **1** e **0**, respectivamente, não forem iguais, mostre que o limiar ótimo não é 0, mas a , com

$$a = \frac{\sigma_n^2}{2A_p} \ln \frac{P_x(0)}{P_x(1)}$$

Sugestão: Suponha que o limiar ótimo seja a , e escreva P_e em termos de funções Q . Para o caso ótimo, $dP_e/da = 0$. Use o fato de que

$$Q(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy$$

e

$$\frac{dQ(x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

- 8.3-1** Se uma amplitude x de um sinal gaussiano $x(t)$ tiver um valor médio igual a 2 e um valor RMS de 3, determine sua PDF.
- 8.3-2** Determine a média, o valor médio quadrático e a variância da VA x no Exercício 8.2-3.
- 8.3-3** Determine a média, o valor médio quadrático da VA x no Exercício 8.2-4.
- 8.3-4** Determine a média, o valor médio quadrático da VA x no Exercício 8.2-6.
- 8.3-5** Determine a média, o valor médio quadrático e a variância da VA x na Fig. 8.3-5.

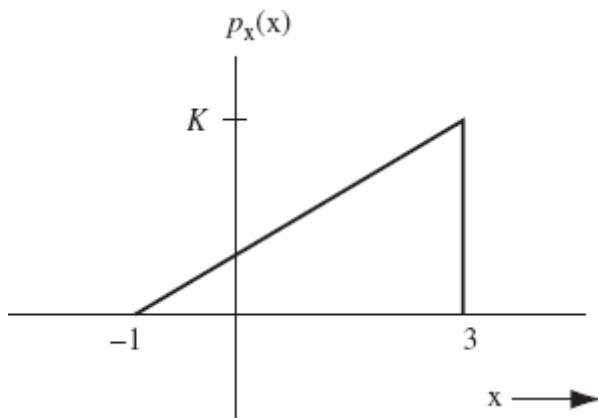


Figura E.8.3-5

- 8.3-6** A soma dos pontos em dois dados que são lançados é uma VA x discreta, como analisado no Exemplo 8.12. Determine a média, o valor quadrático médio e a variância da VA x.
- 8.3-7** Para uma PDF gaussiana $p_x(x) = (1/\sigma_x \sqrt{2\pi}) e^{-x^2/2\sigma_x^2}$, mostre que

$$\overline{x^n} = \begin{cases} (1)(3)(5)\cdots(n-1)\sigma_x^n & n \text{ par} \\ 0 & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Sugestão: Busque, em uma tabela matemática, integrais definidas apropriadas.

- 8.3-8** Dez dados comuns são lançados. A soma dos números que aparecem nesses 10 dados é uma VA x. Determine \bar{x} , $\overline{x^2}$ e σ_x^2 .

Sugestão: Lembre-se de que o resultado de cada dado é independente.

- 8.5-1** Mostre que $|\rho_{xy}| \leq 1$, em que ρ_{xy} é o coeficiente de correlação [Eq. (8.79)] das VAs x e y.

Sugestão: Mostre que, para qualquer número real a,

$$\overline{[a(x - \bar{x}) - (y - \bar{y})]^2} \geq 0$$

O discriminante desse quadrático em a é não positivo.

- 8.5-2** Mostre que, se duas VAs x e y forem relacionadas por

$$y = k_1 x + k_2$$

em que k_1 e k_2 são constantes arbitrárias, o coeficiente de correlação $\rho_{xy} = 1$ se k_1 é positivo, e $\rho_{xy} = -1$ se k_1 é negativo.

- 8.5-3** Dado $x = \cos \Theta$ e $y = \sin \Theta$, em que Θ é uma VA uniformemente distribuída no intervalo $(0, 2\pi)$, mostre que x e y são descorrelacionadas, mas não são independentes.

- 8.6-1** O sinal binário aleatório $x(t)$, mostrado na Fig. E.8.6-1a, pode assumir somente dois valores, 3 e 0, com igual probabilidade. Um ruído de canal exponencial $n(t)$, mostrado na Fig. E.8.6-1b, é adicionado a esse sinal, produzindo um sinal recebido $y(t)$. A PDF da amplitude de ruído n é exponencial, com média zero e variância 2. Determine a PDF da amplitude y e esboce seu gráfico.

Sugestão: A Eq. (8.92) fornece $p_y(y) = p_x(x) * p_n(n)$.

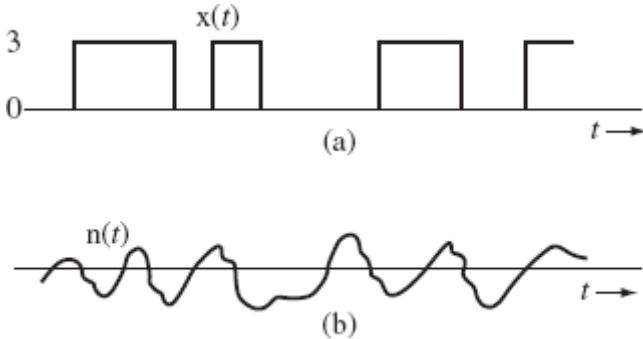


Figura E.8.6-1

- 8.6-2** Repita o Exercício 8.6-1 para o caso de as amplitudes 3 e 0 de $x(t)$ não serem equiprováveis, mas com $P_x(3) = 0,6$ e $P_x(0) = 0,4$.

- 8.6-3** Se $x(t)$ e $y(t)$ forem dois sinais binários independentes, cada um assumindo somente os valores -1 e 1 , com

$$P_x(1) = Q = 1 - P_x(-1)$$

$$P_y(1) = P = 1 - P_y(-1)$$

determine $P_z(z_i)$, em que $z = x + y$.

- 8.6-4** Se $z = x + y$, em que x e y são VAs gaussianas independentes, com

$$p_x(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma_x^2} \quad \text{e} \quad p_y(y) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-(y-\bar{y})^2/2\sigma_y^2}$$

mostre que z também é gaussiana, com

$$\bar{z} = \bar{x} + \bar{y} \quad \text{e} \quad \sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

Sugestão: Convolva $p_x(x)$ e $p_y(y)$. Veja o par 22 na Tabela 3.1.

- 8.6-5** No Exemplo 8.24, projete o processador preditor de terceira ordem ótimo para sinais de voz e determine a melhora na SNR. Valores de vários coeficientes de correlação para sinais de voz são dados no Exemplo 8.24.

* Repetições conduzidas em condições discerníveis semelhantes.

* Vale observar que não definimos probabilidade pela frequência relativa. Para um dado evento, a frequência relativa é uma estimativa próxima da probabilidade do evento, quando o experimento é repetido muitas vezes. A teoria moderna da probabilidade, por ser um ramo da matemática, se inicia com certos axiomas a respeito da probabilidade [Eqs. (8.6), (8.8) e (8.11)] e supõe que, de alguma forma, essas probabilidades sejam alocadas pela natureza. Por ser razoável, no sentido de representar uma aproximação muito boa de experiência e expectativas de “probabilidade”, usamos a frequência relativa para estimar a probabilidade.

* Aqui, usamos implicitamente o fato de que $n_1 \rightarrow \infty$ quando $N \rightarrow \infty$. Isto é verdadeiro, desde que o limite da razão $\lim_{N \rightarrow \infty} (n_1/N) \neq 0$, ou seja, $P(A) \neq 0$.

* O número m não é necessariamente igual a n . Mais de um ponto de amostra pode ser mapeado em um valor de x .

* A função $Q(x)$ tem uma relação próxima com as funções $\text{erf}(x)$ e $\text{erfc}(x)$,

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-y^2} dy = 2Q(x\sqrt{2})$$

Logo,

$$Q(x) = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \left[1 - \text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

* Vale a pena ressaltar que $P_{xy}(x|y)$ é condicionada a um evento $y = y$ que tem probabilidade zero.

* Como o intervalo de quantização, em geral, é muito pequeno, variações na PDF das amplitudes do sinal no intervalo são pequenas, de modo que essa hipótese é razoável.

* Aqui, admitimos que o erro pode ocorrer somente em um dos n dígitos. Contudo, o erro pode ocorrer em mais de um dígito. No entanto, como a probabilidade do erro de dígito $P_e << 1$ (da ordem de 10^{-5}), a probabilidade de mais de um dígito em erro é extremamente pequena (Exemplo 8.6) e sua contribuição $\epsilon_i^2 P(\epsilon_i)$ é desprezível.

* Pode ser mostrado que⁵ o valor estimado ótimo \hat{y} é a média condicional de y quando $x = x$, ou seja,

$$\hat{y} = E[y | x = x]$$

Geralmente, essa é uma função não linear de x .

** Em toda a discussão, admitiremos que a cada uma das variáveis x, y, \dots terá média zero. Isto pode ser feito sem perda de generalidade. Se as variáveis tiverem médias não zero, podemos formar novas variáveis $x' = x - \bar{x}, y' = y - \bar{y}$, e assim por diante. As novas variáveis têm, obviamente, médias nulas.

* Ao longo desta seção, como antes, admitimos que todas as variáveis aleatórias têm média zero. Isso pode ser feito sem perda de generalidade.

* Se as variáveis forem gaussianas, isso é verdade mesmo que as variáveis não sejam independentes.

** Na verdade, um grupo de teoremas, coletivamente denominado teorema do limite central.

9 PROCESSOS ALEATÓRIOS E ANÁLISE ESPECTRAL

A noção de processo aleatório é uma extensão natural do conceito de variável aleatória (VA). Consideremos, por exemplo, a temperatura x em certa cidade ao meio-dia. A temperatura x é uma VA e assume diferentes valores a cada dia. Para obter uma completa estatística de x , devemos registrar valores de x ao meio-dia ao longo de muitos dias (um grande número de ensaios). A partir desses dados, podemos determinar $p_x(x)$, a PDF da VA x (temperatura ao meio-dia).

A temperatura, contudo, é também uma função do tempo. À uma da tarde, por exemplo, a temperatura pode ter uma distribuição totalmente distinta da temperatura ao meio-dia. No entanto, as duas temperaturas podem estar relacionadas por meio de uma função densidade de probabilidade conjunta. Assim, essa temperatura aleatória x é uma função do tempo e pode ser expressa como $x(t)$. Se a variável aleatória for definida em um intervalo de tempo $t \in [t_a, t_b]$, então $x(t)$ será uma função do tempo e aleatória para cada instante $t \in [t_a, t_b]$. Uma VA que é função do tempo* é denominada **processo aleatório ou estocástico**. Assim, um processo aleatório é uma coleção de um número infinito de VAs. Sinais de comunicação e ruídos, que, em geral, são aleatórios e variam com o tempo, são bem caracterizados por processos aleatórios. Por essa razão, processos aleatórios são o tema deste capítulo, para que possamos, posteriormente, analisar o desempenho de diferentes sistemas de comunicação.

9.1 DE VARIÁVEL ALEATÓRIA A PROCESSO ALEATÓRIO

Para especificar uma VA, efetuamos numerosos ensaios de um experimento e, dos resultados, estimamos $p_x(x)$. Do mesmo modo, para especificar um processo aleatório, fazemos isso a cada instante de tempo t . Para dar prosseguimento ao exemplo do processo aleatório $x(t)$, a temperatura na cidade, precisamos registrar temperaturas diárias para cada valor de t (para cada hora do dia). Isso pode ser feito registrando temperaturas em cada instante do dia, o que produz uma forma de onda $x(t, \zeta_i)$, em que ζ_i indica o dia em que o registro foi feito. Precisamos repetir esse procedimento todos os dias, por um grande número de dias. A coleção de todas as possíveis formas de onda é conhecida como **ensemble** (conjunto ou família) do processo aleatório $x(t)$ (e corresponde ao espaço de amostras). Uma forma de onda nessa coleção é uma **função de amostra** (ou função amostral, em vez de ponto de amostra) do processo aleatório (Fig. 9.1). Em um dado instante de tempo $t = t_1$, amplitudes de funções de amostras são os valores assumidos pela VA $x(t_1)$ nos diferentes ensaios.

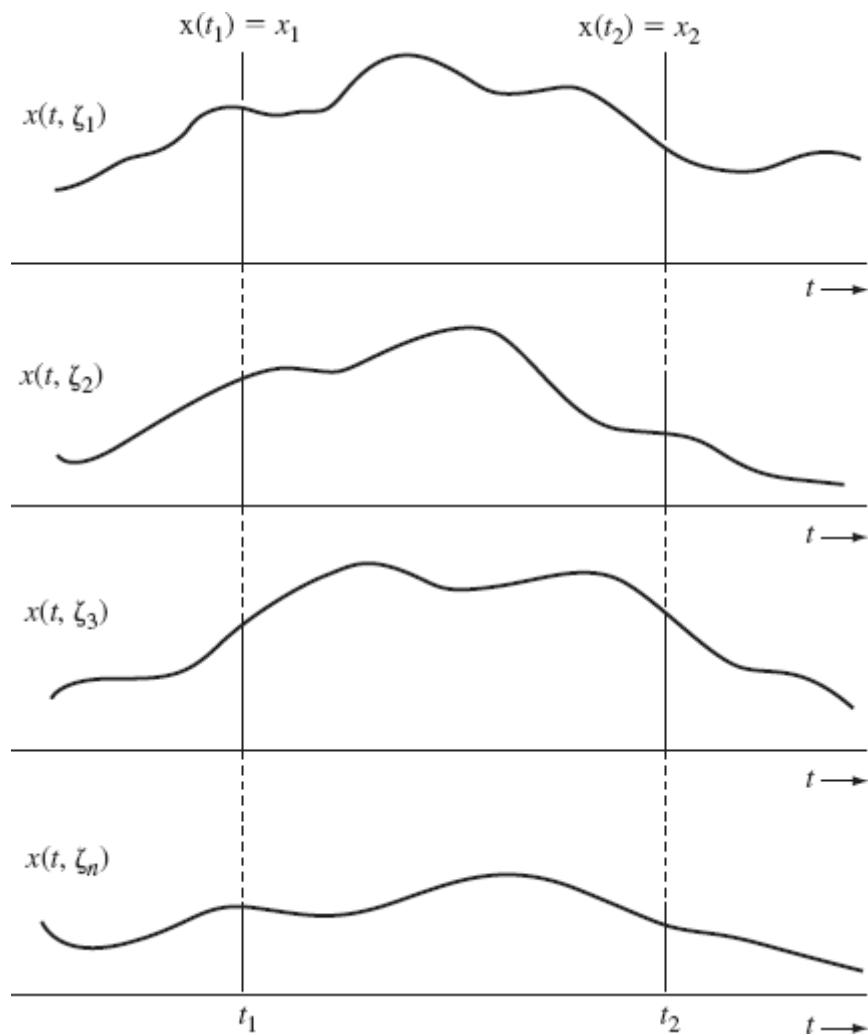


Figura 9.1 Processo aleatório para representar a temperatura em uma cidade.

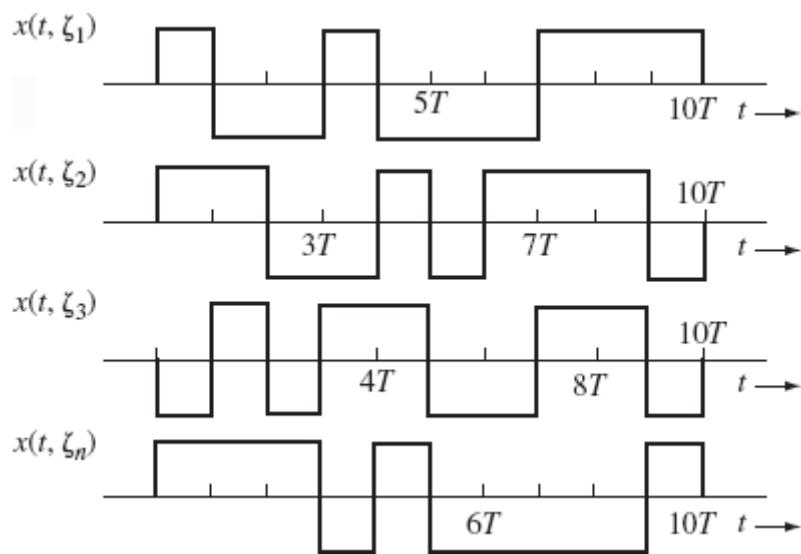


Figura 9.2 Ensemble com um número finito de funções de amostras.

Podemos ver um processo aleatório de outra forma. No caso de uma VA, o resultado de cada ensaio do experimento é um número. Também podemos ver um processo aleatório como o resultado de um experimento, em que o resultado de cada ensaio é uma forma de onda (uma função de amostra), que é uma função de t . O número de formas de onda em um ensemble pode ser finito ou infinito. No caso do processo aleatório $x(t)$ (temperatura em uma cidade), o ensemble tem infinitas formas de onda. Contudo, se considerarmos a saída de um gerador de sinal binário (no intervalo de 0 a $10T$), haverá, no máximo, 2^{10} formas de onda no ensemble (Fig. 9.2).

Um ponto importante que requer esclarecimento é que as formas de onda (ou funções de amostras) no ensemble não são aleatórias. Como ocorreram, são determinísticas. Nessa situação, aleatoriedade não está associada à forma de onda, mas à

incerteza da ocorrência da forma de onda em um dado ensaio. Isso é completamente análogo ao caso de uma VA. Por exemplo, no experimento do lançamento de uma moeda quatro vezes seguidas (Exemplo 8.4), existem 16 resultados possíveis, todos conhecidos. A aleatoriedade não está associada aos resultados, mas à incerteza quanto a qual dos 16 resultados ocorrerá em um dado ensaio. Na verdade, o processo aleatório é, basicamente, um vetor, de comprimento infinito, de variáveis aleatórias. Uma vez que um experimento tenha sido completado, o vetor amostrado é determinístico. Contudo, como cada elemento no vetor é aleatório, o resultado do experimento também é aleatório, originando incerteza com relação a que vetor (ou função) será produzido em cada experimento.

Caracterização de um Processo Aleatório

A próxima questão importante é como caracterizar (descrever) um processo aleatório. Em alguns casos, pode ser possível descrever o processo aleatório analiticamente. Consideremos, por exemplo, um processo aleatório descrito por $x(t) = A \cos(\omega_c t + \Theta)$, em que Θ é uma VA uniformemente distribuída no intervalo $(0, 2\pi)$. Essa expressão analítica descreve completamente o processo aleatório (e seu ensemble). Cada função de amostra é uma senoide de amplitude A e frequência ω_c . Contudo, a fase é aleatória (Fig. 9.5 mais adiante) e pode assumir qualquer valor no intervalo $(0, 2\pi)$ com igual probabilidade. Uma descrição analítica como essa requer modelos bem definidos, de modo que o processo aleatório possa ser caracterizado por parâmetros específicos, que são variáveis aleatórias.

Lamentavelmente, nem sempre a descrição analítica de um processo aleatório é possível. Sem um modelo específico, tudo o que nos resta pode ser apenas um ensemble obtido de experimentos. O ensemble contém toda a informação sobre o processo aleatório. Do ensemble, podemos determinar alguma medida quantitativa que especificará ou caracterizará o processo aleatório. Nesse caso, consideraremos o processo aleatório como uma VA, que é função do tempo. Assim, um processo aleatório é uma coleção de um número infinito de VAs, em geral, dependentes. Sabemos que informação completa sobre VAs dependentes é fornecida pela PDF conjunta das variáveis. Seja x_i a VA $x(t_i)$ gerada pelas amplitudes do processo aleatório no instante $t = t_i$. Assim, x_1 é a VA gerada pelas amplitudes em $t = t_1$, x_2 é a VA gerada pelas amplitudes em $t = t_2$, e assim por diante, como mostrado na Fig. 9.1. As n VAs $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ geradas pelas amplitudes em $t = t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$, respectivamente, são, em geral, dependentes. Para as n amostras, as VAs são completamente caracterizadas pela função densidade de probabilidade conjunta de n -ésima ordem ou função de distribuição cumulativa conjunta de n -ésima ordem (CDF – *Cumulative Distribution Function*)

$$F_x(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P[x(t) \leq x_1; x(t) \leq x_2; \dots; x(t_n) \leq x_n]$$

A definição da CDF conjunta de n amostras aleatórias leva à PDF conjunta

$$p_x(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} F_x(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \quad (9.1)$$

Essa discussão ajuda na compreensão. Pode ser mostrado que o processo aleatório é completamente descrito pela PDF conjunta de n -ésima ordem (9.1) para todo n (até ∞) e qualquer escolha de t_1, t_2, \dots, t_n . A determinação dessa PDF (de ordem infinita) é uma tarefa colossal. Por sorte, veremos, mais adiante, que na análise de sinais e ruídos aleatórios associados a sistemas lineares, muitas vezes nos basta a especificação das estatísticas de primeira e segunda ordens.

Uma PDF de ordem superior é a PDF conjunta do processo aleatório em diferentes instantes de tempo. Portanto, por uma simples integração, sempre podemos deduzir uma PDF de ordem inferior a partir de uma PDF de ordem mais elevada. Por exemplo,

$$p_x(x_1; t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p_x(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_2$$

Portanto, quando a PDF de n -ésima ordem for disponível, não é necessária a especificação de PDFs de ordens inferiores a n .

A média $\bar{x}(t)$ de um processo aleatório $x(t)$ pode ser determinada da PDF de primeira ordem

$$\bar{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_x(x; t) dx \quad (9.2)$$

que, tipicamente, é uma função determinística do tempo t .

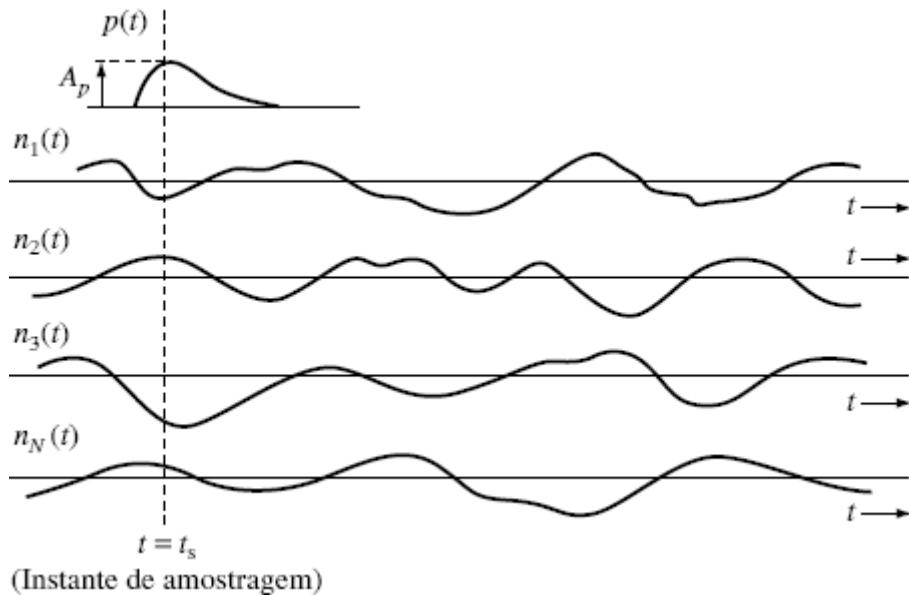


Figura 9.3 Processo aleatório representando um ruído de canal.

Por que Precisamos de Estatística de Ensemble?

A discussão anterior mostra que, para a especificação de um processo aleatório, precisamos de estatística de ensemble. Por exemplo, para determinar a PDF $p_{x1}(x_1)$, precisamos calcular os valores de todas as funções de amostras em $t = t_1$. Isso é estatística de ensemble. Da mesma forma, a inclusão de todas as estatísticas possíveis na especificação de um processo aleatório requer algum tipo de estatística de ensemble. No caso de sinais determinísticos, estamos acostumados a estudar os dados de uma forma de onda (ou formas de onda) como uma função do tempo. Assim, a ideia de investigar a estatística de ensemble pode, a princípio, nos parecer um pouco desconfortável. Podemos aceitá-la como uma teoria, mas será que tem alguma significância prática? Qual é a utilidade prática desse conceito? A seguir, responderemos a essa pergunta.

Para entender a necessidade da estatística de ensemble, consideremos o problema de detecção de limiar do Exemplo 8.16. Um **1** é transmitido por $p(t)$, e um **0**, por $-p(t)$ (sinalização polar). A amplitude de pico do pulso é A_p . Quando **1** é transmitido, o valor da amostra recebida é $A_p + n$, em que n é o ruído. Cometeremos um erro de decisão se o valor do ruído no instante de amostragem t_s for menor que $-A_p$, fazendo com que a soma do sinal e ruído fique abaixo do limiar. Para calcular essa probabilidade de erro, repetimos o experimento N vezes ($N \rightarrow \infty$) e verificamos quantas vezes o ruído em $t = t_s$ é menor que $-A_p$ (Fig. 9.3). Essa informação é, precisamente, uma das estatísticas de ensemble do processo de ruído $n(t)$ no instante t_s .

Esse exemplo deixa clara a importância da estatística de ensemble. Quando tratamos com processo ou processos aleatórios, não sabemos que função amostral ocorrerá em um dado ensaio. Portanto, para qualquer caracterização e especificação estatística de um processo aleatório, precisamos calcular a média em todo o ensemble. Essa é a razão física básica para o uso de estatística de ensemble em processos aleatórios.

Função de Autocorrelação de um Processo Aleatório

Para fins de análise de sinais, uma das mais importantes características (estatísticas) de um processo aleatório é a **função de autocorrelação**, que leva à informação espectral do processo aleatório. O conteúdo espectral de um processo aleatório depende da rapidez da variação de amplitude com o tempo. Isso pode ser medido com a correlação de amplitudes em t_1 e $t_1 + \tau$. Em média, o processo aleatório $x(t)$ na Fig. 9.4a é um processo aleatório de variação lenta em comparação com o processo $y(t)$ na Fig. 9.4b. Para $x(t)$, as amplitudes em t_1 e $t_1 + \tau$ são similares (Fig. 9.4a), ou seja, têm correlação mais forte. Para $y(t)$, por sua vez, as amplitudes em t_1 e $t_1 + \tau$ guardam pouca semelhança (Fig. 9.4b), isto é, têm correlação mais fraca. Vale recordar que correlação é uma medida da similaridade de duas VAs. Por conseguinte, podemos usar correlação para medir a similaridade das amplitudes em t_1 e t_2 =

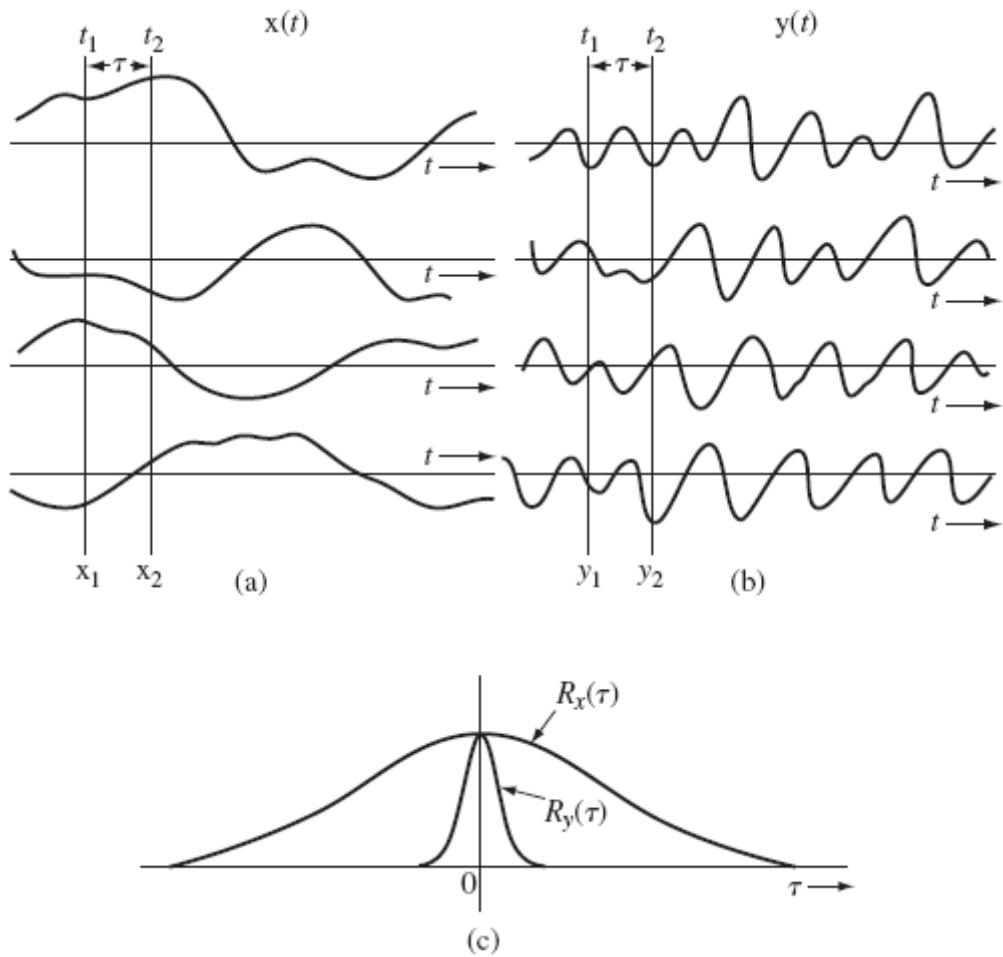


Figura 9.4 Funções de autocorrelação para processos aleatórios de variações (a) lenta e (b) rápida.

$t_1 + \tau$. Se as VAs $x(t_1)$ e $x(t_2)$ forem denotadas por x_1 e x_2 , respectivamente, para um processo aleatório real,^{*} a função de autocorrelação $R_x(t_1, t_2)$ é definida como

$$R_x(t_1, t_2) = \overline{x(t_1)x(t_2)} = \overline{x_1x_2} \quad (9.3a)$$

Essa é a correlação das VAs $x(t_1)$ e $x(t_2)$, indicando a similaridade entre as VAs $x(t_1)$ e $x(t_2)$. Essa função é calculada com a multiplicação das amplitudes de uma função amostral em t_1 e t_2 e com o cálculo da média desse produto em todo o ensemble. Podemos observar que, para um pequeno valor de τ , o produto x_1x_2 será positivo para a maioria das funções amostrais de $x(t)$, enquanto o produto y_1y_2 tem igual possibilidade de ser positivo ou negativo. Portanto, $\overline{x_1x_2}$ será maior que $\overline{y_1y_2}$. Além disso, x_1 e x_2 exibirão correlação para valores consideravelmente maiores de τ , enquanto y_1 e y_2 perderão correlação rapidamente, mesmo para pequenos valores de τ , como mostrado na Fig. 9.4c. Assim, $R_x(t_1, t_2)$, a função de autocorrelação de $x(t)$, fornece informação valiosa a respeito do conteúdo espectral do processo. Na verdade, mostraremos que a PSD de $x(t)$ é a transformada de Fourier de sua função de autocorrelação, dada por (para processos reais)

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= \overline{x_1x_2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2 p_x(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (9.3b)$$

Logo, $R_x(t_1, t_2)$ pode ser obtida de PDF conjunta de x_1 e x_2 , que é a PDF de segunda ordem.

9.2 CLASSIFICAÇÃO DE PROCESSOS ALEATÓRIOS

Processos aleatórios podem ser classificados nas seguintes grandes categorias:

Processos Aleatórios Estacionários e Não Estacionários

Um processo aleatório cujas características estatísticas não se alteram com o tempo é classificado como um **processo aleatório estacionário**. Para um processo estacionário, podemos dizer que é impossível detectar qualquer deslocamento da origem do tempo: o processo será sempre o mesmo. Suponhamos que $p_x(x; t_1)$ tenha sido calculada; se a origem for deslocada por t_0 , $p_x(x; t_1)$ será obtida novamente. O instante t_1 no novo sistema de referência corresponde a $t_2 = t_1 + t_0$ no sistema de referência original. Portanto, as PDFs de x em t_1 e $t_2 = t_1 + t_0$ devem ser iguais; ou seja, no caso de um processo estacionário, $p_x(x; t_1)$ e $p_x(x; t_2)$ devem ser idênticas. Isso é possível somente se $p_x(x; t)$ independe de t . Assim, a densidade de primeira ordem de um processo aleatório estacionário pode ser expressa como

$$p_x(x; t) = p_x(x)$$

Do mesmo modo, para um processo aleatório, a função de autocorrelação $R_x(t_1, t_2)$ deve depender de t_1 e t_2 somente pela diferença $t_2 - t_1$. Caso contrário, poderíamos determinar uma única origem do tempo. Portanto, para um processo estacionário real,

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(t_2 - t_1)$$

Por conseguinte,

$$R_x(\tau) = \overline{x(t)x(t + \tau)} \quad (9.4)$$

Para um processo estacionário, a PDF conjunta para x_1 e x_2 também deve depender somente de $t_2 - t_1$. Da mesma forma, PDFs de ordens superiores devem independe da escolha da origem, ou seja,

$$\begin{aligned} p_x(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) &= p_x(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 - t, t_2 - t, \dots, t_n - t) \\ &= p_x(x_1, x_2, \dots, x_n; 0, t_2 - t_1, \dots, t_n - t_1) \end{aligned} \quad (9.5)$$

O processo aleatório $x(t)$ que representa a temperatura em uma cidade é um exemplo de um processo aleatório não estacionário, pois as estatísticas da temperatura (valor médio, por exemplo) dependem da hora do dia. Contudo, podemos dizer que o processo de ruído na Fig. 9.3 é estacionário, pois suas estatísticas (valor médio e valor quadrático médio, por exemplo) não variam com o tempo. Em geral, não é fácil determinar se um processo é estacionário ou não, pois, para isso, a estatística de ordem n ($n = 1, 2, \dots, \infty$) deve ser investigada. Na prática, podemos assegurar estacionariedade se não houver alteração no mecanismo de geração do sinal. Esse é o caso do processo de ruído na Fig. 9.3.

Processos Estacionários no Sentido Amplo (ou Fracamente Estacionários)

É possível que um processo que não seja estacionário no sentido estrito, como discutido na subseção anterior, tenha valor médio e função de autocorrelação que independam do deslocamento da origem do tempo. Isso significa que

$$\overline{x(t)} = \text{constante}$$

e

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau) \quad \tau = t_2 - t_1 \quad (9.6)$$

Um processo desse tipo é conhecido como **processo estacionário no sentido amplo** ou **processo fracamente estacionário**. Reparemos que estacionariedade é uma condição mais forte que estacionariedade no sentido amplo. Processos estacionários com funções de autocorrelação bem definidas são estacionários no sentido amplo; contudo, excetuando processos gaussianos, a recíproca não é necessariamente verdadeira.

Assim como, na prática, não existe um sinal senoidal, nenhum processo verdadeiramente estacionário ocorre na vida real. Na prática, todos os processos são não estacionários, pois devem ter início em algum tempo finito e devem terminar em algum tempo finito. Um processo verdadeiramente estacionário deve iniciar em $t = -\infty$ e durar eternamente. Todavia, muitos processos podem ser considerados estacionários para o intervalo de tempo de interesse, e a hipótese de estacionariedade possibilita um modelo matemático maneável. O uso de um modelo estacionário é análogo ao uso de um modelo senoidal na análise determinística.

$$x(t) = A \cos (\omega_c t + \Theta)$$

em que Θ é uma VA uniformemente distribuída no intervalo $(0, 2\pi)$, é um processo estacionário no sentido amplo.

O ensemble (Fig. 9.5) consiste em senoides de amplitude constante A , frequência constante ω_c e fase aleatória Θ . Para qualquer função de amostra, é igualmente possível que a fase tenha qualquer valor no intervalo $(0, 2\pi)$. Como Θ é uma VA uniformemente distribuída no intervalo $(0, 2\pi)$, podemos determinar¹ $p_x(x, t)$ e, por conseguinte, $x(t)$, como na Eq. (9.2). Contudo, nesse caso particular, $x(t)$ pode ser determinada diretamente como uma função da variável aleatória Θ :

$$\overline{x(t)} = \overline{A \cos (\omega_c t + \Theta)} = A \overline{\cos (\omega_c t + \Theta)}$$

Como $\cos (\omega_c t + \Theta)$ é uma função de uma VA Θ , temos [Eq. (8.61b)]

$$\overline{\cos (\omega_c t + \Theta)} = \int_0^{2\pi} \cos (\omega_c t + \theta) p_\Theta(\theta) d\theta$$

Como $p_\Theta(\theta) = 1/2\pi$ no intervalo $(0, 2\pi)$ e 0 fora desse intervalo,

$$\overline{\cos (\omega_c t + \Theta)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos (\omega_c t + \theta) d\theta = 0$$

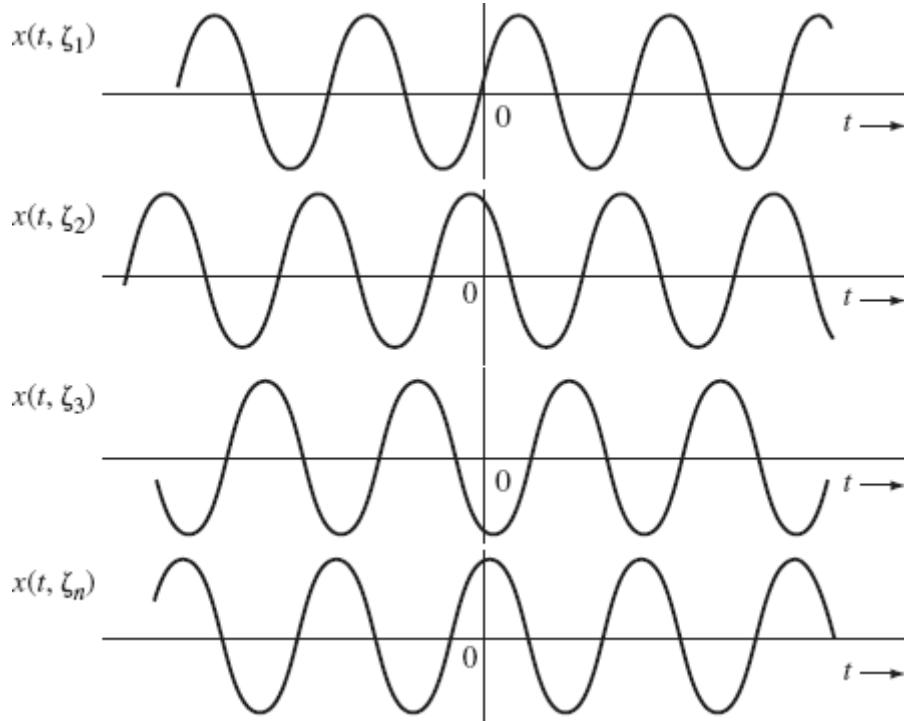


Figura 9.5 Ensemble para o processo aleatório $A \cos (\omega_c t + \Theta)$.

Logo,

$$\overline{x(t)} = 0 \quad (9.7a)$$

Portanto, a média de ensemble de amplitudes de funções de amostra em qualquer instante t é zero.

A função de autocorrelação $R_x(t_1, t_2)$ para esse processo também pode ser calculada diretamente da Eq. (9.3a),

$$\begin{aligned}
R_x(t_1, t_2) &= \overline{A^2 \cos(\omega_c t_1 + \Theta) \cos(\omega_c t_2 + \Theta)} \\
&= A^2 \overline{\cos(\omega_c t_1 + \Theta) \cos(\omega_c t_2 + \Theta)} \\
&= \frac{A^2}{2} \left\{ \overline{\cos[\omega_c(t_2 - t_1)]} + \overline{\cos[\omega_c(t_2 + t_1) + 2\Theta]} \right\}
\end{aligned}$$

O primeiro termo no lado direito não contém qualquer VA. Assim, $\overline{\cos[\omega_c(t_2 - t_1)]}$ é $\cos[\omega_c(t_2 - t_1)]$. O segundo termo é função da VA uniforme Θ , e sua média é

$$\overline{\cos[\omega_c(t_2 + t_1) + 2\Theta]} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos[\omega_c(t_2 + t_1) + 2\theta] d\theta = 0$$

Logo,

$$R_x(t_1, t_2) = \frac{A^2}{2} \cos[\omega_c(t_2 - t_1)] \quad (9.7b)$$

ou

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_c \tau \quad \tau = t_2 - t_1 \quad (9.7c)$$

Das Eqs. (9.7a) e (9.7b), fica claro que $x(t)$ é um processo estacionário no sentido amplo.

Processos Estacionários no Sentido Amplo Ergódicos

Estudamos a média e a função de autocorrelação de um processo aleatório. Essas são médias de ensemble. Por exemplo, $\overline{x(t)}$ é a média de ensemble de amplitudes de funções de amostra em t , e $R_x(t_1, t_2) = \overline{x_1 x_2}$ é a média de ensemble do produto de amplitudes de funções de amostra $x(t_1)$ e $x(t_2)$.

Podemos, também, definir médias temporais para cada função de amostra. Por exemplo, uma média temporal $\tilde{x}(t)$ de uma função de amostra $x(t)$ é*

$$\tilde{x}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (9.8a)$$

Do mesmo modo, a função de autocorrelação temporal definida na Eq. (3.82b) é

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \tilde{x}(t)\tilde{x}(t+\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau) dt \quad (9.8b)$$

Para **processos estacionários (no sentido amplo) ergódicos**, médias de ensemble são iguais às médias temporais de qualquer função de amostra. Assim, para um processo ergódico $x(t)$

$$\overline{\tilde{x}(t)} = \tilde{x}(t) \quad (9.9a)$$

$$R_x(\tau) = \mathcal{R}_x(\tau) \quad (9.9b)$$



Figura 9.6 Classificação de processos aleatórios.

Essas são as duas médias para processos estacionários no sentido amplo ergódigos. Para a definição mais geral de um processo ergódigo, todas as possíveis médias de ensemble são iguais às correspondentes médias temporais de uma de suas funções de amostra. A Fig. 9.6 ilustra a relação entre diferentes classes de processos (ergódigos). Neste livro, o foco reside na classe de processos estacionários no sentido amplo ergódigos.

A determinação se um processo é ergódigo ou não é difícil, pois devemos testar todas as possíveis ordens de médias temporais e de ensemble. Todavia, na prática, muitos dos processos estacionários são ergódicos com relação às estatísticas de mais baixas ordens, como a média e a função de autocorrelação. Para o processo no Exemplo 9.1 (Fig. 9.5), podemos mostrar que $x(t) = 0$ e $R_x(\tau) = (A^2/2) \cos \omega_c \tau$ (Exercício 3.8-1). Portanto, esse processo é ergódico, pelo menos com relação às médias de primeira e segunda ordens.

O conceito de ergodicidade pode ser explicado por um simples exemplo de sinais de trânsito em uma cidade. Suponhamos que uma cidade seja bem planejada, com ruas apenas nas direções leste-oeste (L-O) e norte-sul (N-S) e com semáforos em cada cruzamento. Suponhamos que cada semáforo fique verde por 0,75 segundo na direção L-O e 0,25 segundo na direção N-S, e que a mudança de cor da luz de qualquer semáforo independa de todos os outros semáforos. Para simplificar, ignoremos a luz amarela.

Se considerarmos que uma pessoa dirigindo um carro se aproxime de qualquer semáforo aleatoriamente na direção L-O, a probabilidade de que essa pessoa veja a luz verde é 0,75; ou seja, em média, a pessoa observará a luz verde em 75% do tempo. Se considerarmos que um grande número de motoristas se aproxime de um semáforo na direção L-O em algum instante de tempo t , então, 75% dos motoristas verão a luz verde, e os outros 25%, uma luz vermelha. Assim, a experiência de um motorista que se aproxime aleatoriamente de um semáforo muitas vezes conterá a mesma informação estatística (estatística de função de amostra) que no caso em que um grande número de motoristas se aproxima simultaneamente de vários semáforos (estatística de ensemble) em um dado instante de tempo.

A noção de ergodicidade é de extrema importância, pois, na prática, não dispomos de um grande número de funções de amostra para o cálculo de médias de ensemble. Caso saibamos que um processo seja ergódico, precisamos apenas de uma função de amostra para o cálculo de médias de ensemble. Como mencionado, muitos dos processos estacionários encontrados na prática são ergódicos com relação, pelo menos, às médias de segunda ordem. Como veremos no estudo de processos estacionários associados a sistemas lineares, precisamos somente de médias de primeira e segunda ordens. Isso significa que, na maioria dos casos práticos, nos basta uma função de amostra.

9.3 DENSIDADE ESPECTRAL DE POTÊNCIA

Um engenheiro eletricista pensa, de modo intuitivo, em sinais e sistemas lineares em termos de suas descrições no domínio da frequência. Sistemas lineares são caracterizados por suas respostas de frequência (função de transferência); sinais são expressos em termos das amplitudes e fases relativas de suas componentes de frequência (transformada de Fourier). Conhecidos o espectro de entrada e a função de transferência, a resposta de um sistema linear a um dado sinal pode ser obtida em termos do conteúdo espectral do sinal. Esse é um importante procedimento analítico para sinais determinísticos. Será que métodos similares podem ser encontrados para processos aleatórios? Idealmente, admitimos que todas as funções de amostra de um processo aleatório existam em todo o intervalo de tempo $(-\infty, \infty)$ e, portanto, sejam sinais de potência.* Devemos, portanto, investigar a existência de uma densidade espectral de potência (PSD – Power Spectral Density). À primeira vista, o conceito de um processo aleatório ter uma PSD pode parecer ridículo pelas seguintes razões: primeira, a descrição analítica de uma função de amostra pode não ser possível; segunda, para um dado processo, cada função de amostra pode ser diferente de outra. Portanto, mesmo que uma PSD exista para cada função de amostra, pode ser diferente para distintas funções de amostra. Afortunadamente, os dois problemas podem ser resolvidos com destreza, permitindo a definição de uma PSD que faça sentido para um processo aleatório estacionário (pelo menos no sentido amplo). Para processos não estacionários, a PSD pode não existir.

Sempre que aleatoriedade estiver envolvida, nossas buscas podem, na melhor das hipóteses, fornecer respostas em termos de médias. No lançamento de uma moeda, por exemplo, o máximo que podemos dizer sobre o resultado é que, em média, obteremos cara na metade dos ensaios e coroa nos ensaios restantes. No caso de sinais aleatórios ou VAs, não dispomos de informação suficiente para predizer o resultado com certeza, de modo que devemos aceitar respostas em termos de médias. Não é possível transcender esse limite de conhecimento devido à nossa fundamental ignorância do processo. Parece razoável definir a PSD de

um processo aleatório como uma média ponderada das PSDs de todas as funções de amostras. Essa é a única solução sensata, pois não sabemos exatamente que função de amostra pode ocorrer em um dado ensaio. Devemos estar preparados para qualquer função de amostra. Consideremos, por exemplo, o problema de filtrar certo processo aleatório. Não devemos projetar um filtro tendo em vista uma particular função de amostra, pois qualquer uma das funções de amostra do ensemble pode estar presente na entrada. Uma abordagem sensata consiste em projetar o filtro com base nos parâmetros médios do processo de entrada. No projeto de um sistema para efetuar dadas operações, devemos projetá-lo tendo em mente todo o ensemble. Temos, portanto, justificativas para definir a PSD $S_x(f)$ de um processo aleatório $x(t)$ como a média de ensemble das PSDs de todas as funções de amostra. Assim [Eq. (3.80)],

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\overline{\frac{|X_T(f)|^2}{T}} \right] \quad \text{W/Hz} \quad (9.10a)$$

em que $X_T(f)$ é a transformada de Fourier do processo aleatório truncado no tempo

$$x_T(t) = x(t) \Pi(t/T)$$

e a barra significa média de ensemble. Reparemos que a média de ensemble é tomada antes da operação de limite. Mostraremos, a seguir, que a PSD definida na Eq. (9.10a) é a transformada de Fourier da função de autocorrelação $R_x(\tau)$ do processo $x(t)$; ou seja,

$$R_x(\tau) \iff S_x(f) \quad (9.10b)$$

Isso pode ser provado da seguinte forma:

$$X_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (9.11)$$

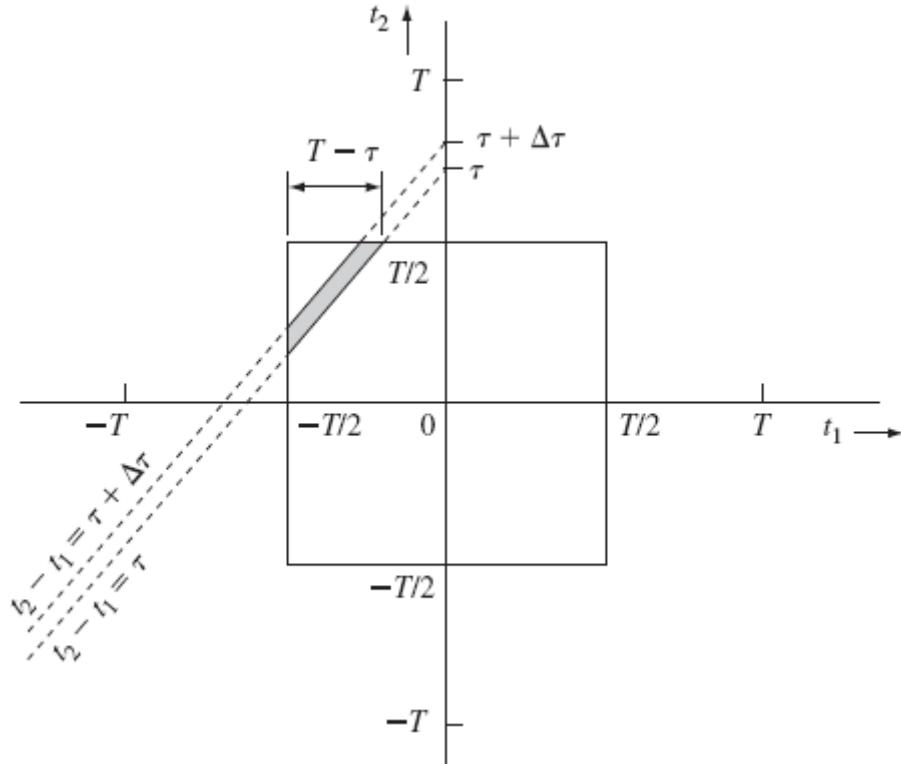


Figura 9.7 Dedução do teorema de Wiener-Khintchine.

Assim, para $x(t)$ real,

$$\begin{aligned}
|\mathbf{X}_T(f)|^2 &= \mathbf{X}_T(-f)\mathbf{X}_T(f) \\
&= \int_{-T/2}^{T/2} \mathbf{x}(t_1)e^{j2\pi f t_1} dt_1 \int_{-T/2}^{T/2} \mathbf{x}(t_2)e^{-j2\pi f t_2} dt_2 \\
&= \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} \mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)e^{-j2\pi f(t_2-t_1)} dt_1 dt_2
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
S_x(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \overline{\left[\frac{|\mathbf{X}_T(f)|^2}{T} \right]} \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \overline{\left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} \mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)e^{-j2\pi f(t_2-t_1)} dt_1 dt_2 \right]} \quad (9.12)
\end{aligned}$$

Trocando a ordem das operações de integração e de média de ensemble,^{*} obtemos

$$\begin{aligned}
S_x(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} \overline{\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)} e^{-j2\pi f(t_2-t_1)} dt_1 dt_2 \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} R_x(t_2 - t_1) e^{-j2\pi f(t_2-t_1)} dt_1 dt_2
\end{aligned}$$

Aqui, admitimos que o processo $\mathbf{x}(t)$ seja estacionário pelo menos no sentido amplo, de modo que $\overline{\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)} = R_x(t_2 - t_1)$. Por conveniência, seja

$$R_x(t_2 - t_1) e^{-j2\pi f(t_2-t_1)} = \varphi(t_2 - t_1) \quad (9.13)$$

Logo,

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} \varphi(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 \quad (9.14)$$

A integral no lado direito é uma integral dupla no intervalo $(-T/2, T/2)$, para cada uma das variáveis t_1 e t_2 . A região quadrada de integração no plano $t_1 - t_2$ é mostrada na Fig. 9.7. A integral na Eq. (9.14) é um volume sob a superfície $\varphi(t_1 - t_2)$, na região quadrada na Fig. 9.7. A integral dupla na Eq. (9.14) pode ser convertida em integral simples observando que $\varphi(t_2 - t_1)$ é constante ao longo da reta $t_2 - t_1 = \tau$ (uma constante) no plano $t_1 - t_2$ (Fig. 9.7).

Consideremos duas dessas retas, $t_2 - t_1 = \tau$ e $t_2 - t_1 = \tau + \Delta\tau$. Se $\Delta\tau \rightarrow 0$, $\varphi(t_2 - t_1) \sim \varphi(\tau)$ na região sombreada, cuja área é $(T - \tau)\Delta\tau$. Assim, o volume sob a superfície $\varphi(t_2 - t_1)$ é $\varphi(\tau)(T - \tau)\Delta\tau$. Se τ for negativo, o volume será $\varphi(\tau)(T + \tau)\Delta\tau$. Portanto, em geral, o volume sobre a região sombreada é $\varphi(\tau)(T - |\tau|)\Delta\tau$. O desejado volume sobre a região quadrada na Fig. 9.7 é a soma dos volumes sobre as fitas sombreadas e é obtido integrando $\varphi(\tau)(T - |\tau|)$ no intervalo de variação de τ , que é $(-T, T)$ (Fig. 9.7). Logo,

$$\begin{aligned}
S_x(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T \varphi(\tau)(T - |\tau|) d\tau \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} \varphi(\tau) \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

desde que $\int_{-\infty}^{\infty} |\tau| \varphi(\tau) d\tau$ seja limitada. A substituição da Eq. (9.13) nessa equação leva a

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (9.15)$$

desde que $\int_{-\infty}^{\infty} |\tau| R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$ seja limitada. Portanto, a PSD de um processo aleatório estacionário no sentido amplo é a transformada de Fourier de sua função de autocorrelação,^{*}

$$R_x(\tau) \iff S_x(f) \quad (9.16)$$

Esse é o famoso **teorema de Wiener-Khintchine**, introduzido inicialmente no Capítulo 3.

A função de autocorrelação emerge dessa discussão como uma das entidades mais significativas na análise espectral de um processo aleatório. Anteriormente, havíamos mostrado, de forma heurística, a conexão entre a função de autocorrelação e o conteúdo espectral de um processo aleatório.

A função de autocorrelação $R_x(\tau)$ para um processo real é uma função par de τ . Isso pode ser provado de duas maneiras. Primeira, como $|X_T(f)|^2 = |X_T(f)X_T(-f)|$ é uma função par de f , $S_x(f)$ também é uma função par de f e $R_x(\tau)$, sua transformada inversa, também é uma função par de τ (Exercício 3.1-1). Alternativamente, temos

$$R_x(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} \quad \text{e} \quad R_x(-\tau) = \overline{x(t)x(t-\tau)}$$

Fazendo $t - \tau = \sigma$, obtemos

$$R_x(-\tau) = \overline{x(\sigma)x(\sigma+\tau)} = R_x(\tau) \quad (9.17)$$

A PSD $S_x(f)$ também é uma função real e par de f .

O valor quadrático médio $\overline{x^2(t)}$ do processo aleatório $x(t)$ é $R_x(0)$,

$$R_x(0) = \overline{x(t)x(t)} = \overline{x^2(t)} = \overline{x^2} \quad (9.18)$$

O valor quadrático médio $\overline{x^2}$ não é o valor quadrático médio temporal de uma função de amostra, mas a média de ensemble dos quadrados de todas as amplitudes de funções de amostra em qualquer instante t .

Potência de um Processo Aleatório

A potência P_x (potência média) de um processo aleatório estacionário no sentido amplo $x(t)$ é seu valor quadrático médio $\overline{x^2}$. Da Eq. (9.16),

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

Assim, da Eq. (9.18),

$$P_x = \overline{x^2} = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df \quad (9.19a)$$

Como $S_x(f)$ é uma função par de f , temos

$$P_x = \overline{x^2} = 2 \int_0^{\infty} S_x(f) df \quad (9.19b)$$

em que f é a frequência em hertz. Essa é a mesma relação deduzida para sinais determinísticos no Capítulo 3 [Eq. (3.81)]. A potência P_x é a área sob a PSD. Adicionalmente, $P_x = \overline{x^2}$ é a média de ensemble dos quadrados das amplitudes de funções de amostra em qualquer instante.

Vale repetir que a PSD pode não existir para processos que não sejam estacionários no sentido amplo. Portanto, em nossa discussão futura, consideraremos que processos aleatórios sejam pelo menos estacionários no sentido amplo, exceto quando especificado de outro modo.

Exemplo 9.2 Determinemos a função de autocorrelação $R_x(\tau)$ e a potência P_x de um processo aleatório passa-baixas com uma PSD de ruído branco $S_x(f) = N/2$ (Fig. 9.8a).

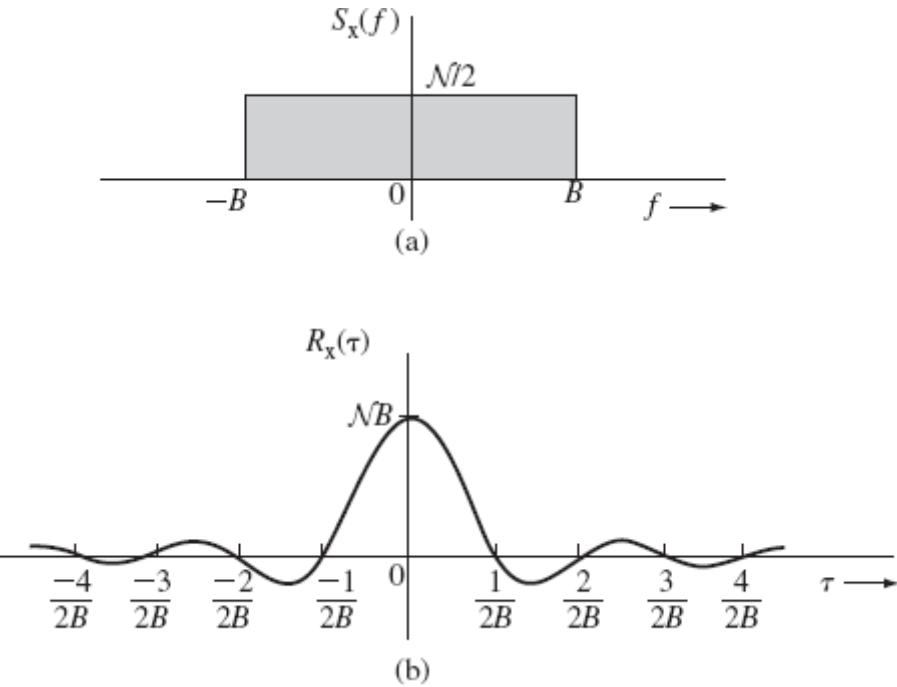


Figura 9.8 PSD de ruído branco passa-faixa e sua função de autocorrelação.

Temos

$$S_x(f) = \frac{N}{2} \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \quad (9.20a)$$

Portanto, da Tabela 3.1 (par 18),

$$R_x(\tau) = N B \operatorname{sinc}(2\pi B\tau) \quad (9.20b)$$

Isso é mostrado na Fig. 9.8b. Temos, ainda,

$$P_x = \overline{x^2} = R_x(0) = N B \quad (9.20c)$$

Ou

$$\begin{aligned} P_x &= 2 \int_0^\infty S_x(f) df \\ &= 2 \int_0^B \frac{N}{2} df \\ &= N B \end{aligned} \quad (9.20d)$$

Exemplo 9.3 Determinemos a PSD e o valor quadrático médio de um processo aleatório

$$x(t) = A \cos(\omega_c t + \Theta) \quad (9.21a)$$

em que Θ é uma VA uniformemente distribuída em $(0, 2\pi)$.

Para esse caso, $R_x(\tau)$ já foi determinada [Eq. (9.7c)],

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_c \tau \quad (9.21b)$$

Logo,

$$S_x(f) = \frac{A^2}{4} [\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)] \quad (9.21c)$$

$$P_x = \overline{x^2} = R_x(0) = \frac{A^2}{2} \quad (9.21d)$$

Assim, a potência, ou valor quadrático médio, do processo $x(t) = A \cos(\omega_c t + \Theta)$ é $A^2/2$. A potência P_x também pode ser obtida integrando $S_x(f)$ com relação a f .

Exemplo 9.4 Modulação em Amplitude

Determinemos a função de autocorrelação e a PSD do processo modulado DSB-SC $m(t) \cos(\omega_c t + \Theta)$, em que $m(t)$ é um processo aleatório estacionário no sentido amplo, e Θ é uma VA uniformemente distribuída em $(0, 2\pi)$ e independente de $m(t)$.

Seja

$$\varphi(t) = m(t) \cos(\omega_c t + \Theta)$$

Então,

$$R_\varphi(\tau) = \overline{m(t) \cos(\omega_c t + \Theta) \cdot m(t + \tau) \cos[\omega_c(t + \tau) + \Theta]}$$

Como $m(t)$ e Θ são independentes, podemos escrever [Eq. (8.64b) e (9.7c)]

$$\begin{aligned} R_\varphi(\tau) &= \overline{m(t)m(t + \tau)} \overline{\cos(\omega_c t + \Theta) \cos[\omega_c(t + \tau) + \Theta]} \\ &= \frac{1}{2} R_m(\tau) \cos \omega_c \tau \end{aligned} \quad (9.22a)$$

Por conseguinte,^{*}

$$S_\varphi(f) = \frac{1}{4} [S_m(f + f_c) + S_m(f - f_c)] \quad (9.22b)$$

Da Eq. (9.22a), temos

$$\overline{\varphi^2(t)} = R_\varphi(0) = \frac{1}{2}R_m(0) = \frac{1}{2}\overline{m^2(t)} \quad (9.22c)$$

Portanto, a potência do sinal modulado DSB-SC é a metade da potência do sinal modulante. Esse resultado havia sido deduzido anteriormente [Eq. (3.93)] para sinais determinísticos.

Reparemos que, sem a fase aleatória Θ , um sinal modulado em amplitude DSB-SC $m(t) \cos(\omega_c t)$ não é, na verdade, estacionário no sentido amplo. Para determinar sua PSD, podemos recorrer ao conceito de autocorrelação temporal do Capítulo 3.

Exemplo 9.5 Processo Binário Aleatório

Neste exemplo, consideremos um processo binário aleatório, para o qual uma típica função de amostra é ilustrada na Fig. 9.9a. O sinal pode assumir apenas dois estados (valores), 1 ou -1 , com igual probabilidade. A transição de um estado a outro pode se dar somente em pontos de nó, que ocorrem a cada T_b segundos. A probabilidade de uma transição de um estado a outro é 0,5. O primeiro nó tem igual probabilidade de ocorrência em qualquer instante no intervalo de tempo de 0 a T_b . Analiticamente, podemos representar $x(t)$ como

$$x(t) = \sum_n a_n p(t - nT_b - \alpha)$$

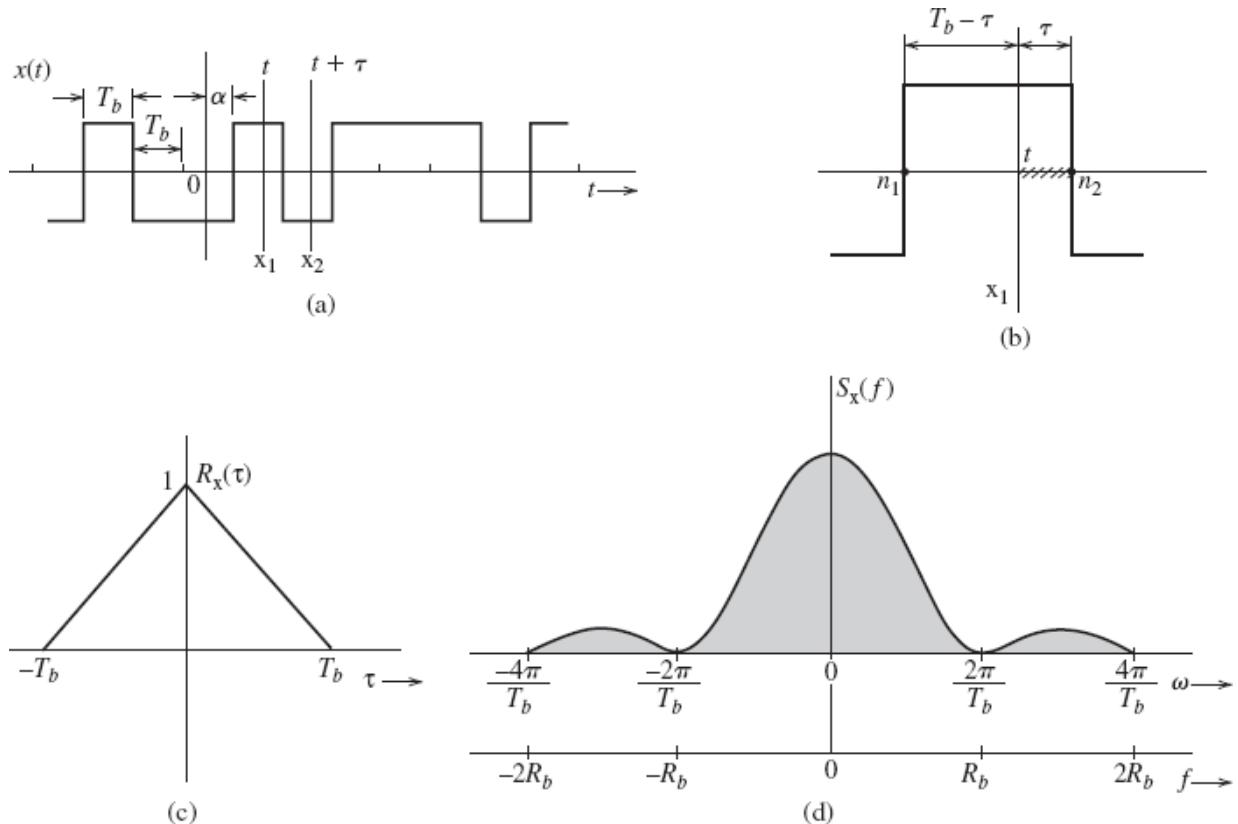


Figura 9.9 Dedução da função de autocorrelação e da PSD de um processo binário aleatório.

em que α é uma VA uniformemente distribuída no intervalo $(0, T_b)$ e $p(t)$ é o pulso básico (nesse caso, $\Pi[(t - T_b/2)/T_b]$). Reparemos que α é a distância entre a origem e o primeiro nó e varia aleatoriamente de função de amostra para função de amostra. Além disso, a_n é aleatório e assume os valores 1 ou -1 com igual probabilidade. As amplitudes em t representam a VA x_1 , enquanto as amplitudes em $t + \tau$ representam x_2 . Notemos que x_1 e x_2 são discretas e cada uma assume somente dois valores, 1 e -1 . Logo,

$$R_x(\tau) = \overline{x_1 x_2} = \sum_{x_1} \sum_{x_2} x_1 x_2 P_{x_1 x_2}(x_1, x_2) \\ = P_{x_1 x_2}(1, 1) + P_{x_1 x_2}(-1, -1) - P_{x_1 x_2}(-1, 1) - P_{x_1 x_2}(1, -1) \quad (9.23a)$$

Por simetria, os dois primeiros termos e os últimos dois termos no lado direito são iguais. Portanto,

$$R_x(\tau) = 2[P_{x_1 x_2}(1, 1) - P_{x_1 x_2}(1, -1)] \quad (9.23b)$$

Da regra de Bayes, temos

$$R_x(\tau) = 2P_{x_1}(1)[P_{x_2|x_1}(1|1) - P_{x_2|x_1}(-1|1)] \\ = P_{x_2|x_1}(1|1) - P_{x_2|x_1}(-1|1) \quad (9.23c)$$

Além do mais,

$$P_{x_2|x_1}(1|1) = 1 - P_{x_2|x_1}(-1|1)$$

Logo,

$$R_x(\tau) = 1 - 2P_{x_2|x_1}(-1|1)$$

É conveniente que, primeiro, calculemos $R_x(\tau)$ para pequenos valores de τ . Consideremos o caso $\tau < T_b$, em que, no máximo, um nó está no intervalo t a $t + \tau$. Nesse caso, o evento $x_2 = -1$ dado $x_1 = 1$ é um evento conjunto $A \cap B$, em que o evento A é “um nó no intervalo $(t, t + \tau)$ ” e o evento B , “mudança de estado nesse nó”. Como A e B são eventos independentes,

$$P_{x_2|x_1}(-1|1) = (\text{um nó no intervalo } t \text{ a } t + \tau) P(\text{mudança de estado}) \\ = \frac{1}{2} P(\text{um nó no intervalo } t \text{ a } t + \tau)$$

A Fig. 9.9b mostra nós adjacentes n_1 e n_2 , entre os quais está t . Marquemos o intervalo τ a partir do nó n_2 . Se t estiver em qualquer ponto nesse intervalo (linha serrilhada), o nó n_2 está entre t e $t + \tau$. Contudo, por ser escolhido arbitrariamente entre os nós n_1 e n_2 , o instante t tem igual probabilidade de ocorrer em qualquer ponto no intervalo de T_b segundos entre n_1 e n_2 , de modo que a probabilidade de t ocorrer na região sombreada é τ/T_b . Portanto,

$$P_{x_2|x_1}(-1|1) = \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{T_b} \right) \quad (9.24)$$

e

$$R_x(\tau) = 1 - \frac{\tau}{T_b} \quad \tau < T_b \quad (9.25)$$

Como $R_x(\tau)$ é uma função par de τ , temos

$$R_x(\tau) = 1 - \frac{|\tau|}{T_b} \quad |\tau| < T_b \quad (9.26)$$

A seguir, consideremos o intervalo $\tau > T_b$. Nesse caso, pelo menos um nó está no intervalo entre t e $t + \tau$. Com isso, x_1 e x_2 se tornam independentes, e

$$R_x(\tau) = \overline{x_1 x_2} = \overline{x_1} \overline{x_2} = 0 \quad \tau > T_b$$

em que, por inspeção, observamos que $\overline{x_1} = \overline{x_2} = 0$ (Fig. 9.9a). Esse resultado também pode ser obtido observando que, para $|\tau| > T_b$, x_1 e x_2 são independentes, e é igualmente possível que $x_2 = 1$ ou -1 dado que $x_1 = 1$ (ou -1). Portanto, as quatro probabilidades na Eq. (9.23a) são iguais a $1/4$, e

$$R_x(\tau) = 0 \quad \tau > T_b$$

Portanto,

$$R_x(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|/T_b & |\tau| < T_b \\ 0 & |\tau| > T_b \end{cases} \quad (9.27a)$$

e

$$S_x(f) = T_b \operatorname{sinc}^2(\pi f T_b) \quad (9.27b)$$

A função de autocorrelação e a PSD desse processo são mostradas nas Figs. 9.9c e d. Observemos que $\overline{x^2} = R_x(0) = 1$, como esperado.

O processo binário aleatório descrito no Exemplo 9.5 às vezes é referido como sinal telegráfico. Esse processo também coincide com a sinalização polar da Seção 7.2.2, quando o pulso for um pulso NRZ retangular (Fig. 7.2). Para estacionariedade no sentido amplo, o ponto de partida α do sinal é aleatoriamente distribuído.

Consideremos, agora, o caso mais geral do trem de pulsos $y(t)$ discutido na Seção 7.2 (Fig. 7.4). Conhecida a PSD do trem de pulsos, podemos deduzir a PSD de sinais on-off, polar, bipolar, duobinário, bifásico e outros formatos digitais importantes.

Exemplo 9.6 Trem de Pulsos PAM Aleatório

Dados digitais são transmitidos com o uso de um pulso básico $p(t)$, como mostrado na Fig. 9.10a. Pulsos sucessivos são separados por T_b segundos, e o k -ésimo pulso é $a_k p(t)$, em que a_k é uma VA. A distância α do primeiro pulso (correspondente a $k = 0$) a partir da origem tem igual probabilidade de ser um valor qualquer no intervalo $(0, T_b)$. Determinemos a função de autocorrelação e a PSD de um desses trens de pulsos aleatórios $y(t)$ cuja função de amostra é representada na Fig. 9.10b. O processo aleatório $y(t)$ pode ser descrito como

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k p(t - kT_b - \alpha)$$

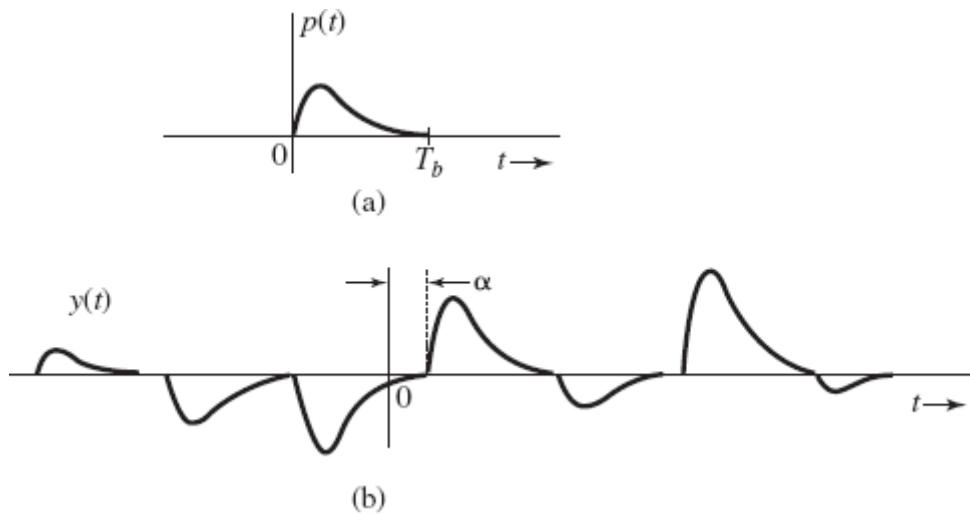


Figura 9.10 Processo PAM aleatório.

em que α é uma VA uniformemente distribuída no intervalo $(0, T_b)$. Assim, α é diferente para cada função de amostra. Reparemos que $p(\alpha) = 1/T_b$ no intervalo $(0, T_b)$ e zero em qualquer outro ponto.* Pode ser mostrado que

$\overline{y(t)} = (\overline{a_k}/T_b) \int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt$ é uma constante. **

Temos a expressão

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \overline{y(t)y(t+\tau)} \\ &= \overline{\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k p(t - kT_b - \alpha) \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m p(t + \tau - mT_b - \alpha)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{a_k a_m p(t - kT_b - \alpha) p(t + \tau - mT_b - \alpha)} \end{aligned}$$

Como a_k e a_m independem de α ,

$$R_y(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{a_k a_m} \cdot \overline{p(t - kT_b - \alpha) \cdot p(t + \tau - mT_b - \alpha)}$$

k e m são inteiros. Fazendo $m = k + n$, essa expressão pode ser escrita como

$$R_y(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{a_k a_{k+n}} \cdot \overline{p(t - kT_b - \alpha) \cdot p(t + \tau - [k+n]T_b - \alpha)}$$

O primeiro termo do duplo somatório é a correlação das VAs a_k e a_{k+n} , e será denotado por R_n . O segundo termo, por ser uma média com relação à VA α , pode ser expresso como uma integral. Assim,

$$R_y(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{T_b} p(t - kT_b - \alpha) p(t + \tau - [k+n]T_b - \alpha) p(\alpha) d\alpha$$

Recordemos que α é uniformemente distribuída no intervalo $(0, T_b)$. Portanto, $p(\alpha) = 1/T_b$ nesse intervalo $(0, T_b)$ e zero em qualquer outro ponto. Com isso,

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} p(t - kT_b - \alpha) p(t + \tau - [k+n]T_b - \alpha) d\alpha \\ &= \frac{1}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{t-(k+1)T_b}^{t-kT_b} p(\beta) p(\beta + \tau - nT_b) d\beta \\ &= \frac{1}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \int_{-\infty}^{\infty} p(\beta) p(\beta + \tau - nT_b) d\beta \end{aligned}$$

A integral no lado direito é a função de autocorrelação do pulso $p(t)$ com argumento $\tau - nT_b$. Logo,

$$R_y(\tau) = \frac{1}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \psi_p(\tau - nT_b) \quad (9.28)$$

em que

$$\mathcal{R}_n = \overline{\mathbf{a}_k \mathbf{a}_{k+n}} \quad (9.29)$$

e

$$\psi_p(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)p(t + \tau) dt \quad (9.30)$$

Como visto na Eq. (3.74), se $p(t) \Leftrightarrow P(f)$, então $\psi_p(\tau) \Leftrightarrow |P(f)|^2$. Portanto, a PSD de $y(t)$, que é a transformada de Fourier de $R_y(\tau)$, é dada por

$$\begin{aligned} S_y(f) &= \frac{1}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_n |P(f)|^2 e^{-jn2\pi f T_b} \\ &= \frac{|P(f)|^2}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_n e^{-jn2\pi f T_b} \end{aligned} \quad (9.31)$$

Esse resultado é semelhante ao encontrado na Eq. (7.11b). A única diferença é o uso da média de ensemble na definição de neste capítulo: no Capítulo 7, R_n é a média temporal.

Exemplo 9.7 Determinemos a PSD para um sinal aleatório bipolar, em que **1** é transmitido por um pulso $p(t)$ (Fig. 9.11), cuja transformada de Fourier é $P(f)$, e **0** é transmitido por $-p(t)$. Os dígitos **1** e **0** têm igual probabilidade de ocorrência, e um dígito é transmitido a cada T_b segundos. Cada dígito independe de todos os outros.

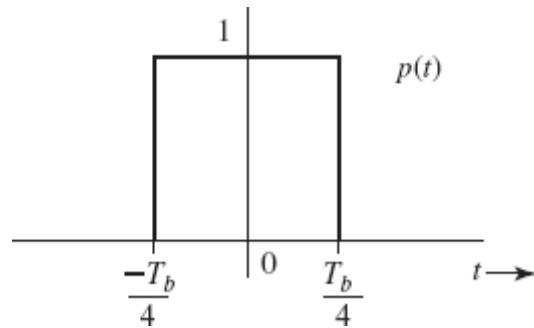


Figura 9.11 Pulso básico para um sinal polar binário aleatório.

Nesse caso, a_k pode assumir valores 1 e -1 com igual probabilidade de 1/2. Logo,

$$\begin{aligned} \overline{a_k} &= \sum_{k=1, -1} a_k P(a_k) = (1)P_{a_k}(1) + (-1)P_{a_k}(-1) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \\ \mathcal{R}_0 &= \overline{a_k^2} = \sum_{k=1, -1} a_k^2 P(a_k) = (1)^2 P_{a_k}(1) + (-1)^2 P_{a_k}(-1) \\ &= \frac{1}{2}(1)^2 + \frac{1}{2}(-1)^2 = 1 \end{aligned}$$

e, como cada dígito independe de todos os outros,

$$\mathcal{R}_n = \overline{\mathbf{a}_k \mathbf{a}_{k+n}} = \overline{\mathbf{a}_k} \overline{\mathbf{a}_{k+n}} = 0 \quad n \geq 1$$

Portanto, da Eq. (9.31),

$$S_y(f) = \frac{|P(f)|^2}{T_b}$$

Já havíamos calculado esse resultado na Eq. (7.13), na qual usamos a média temporal em vez da média de ensemble. Quando um processo é ergódico de segunda ordem (ou de ordem superior), as médias de ensemble e temporal fornecem o mesmo resultado. Vale notar que o Exemplo 9.5 é um caso especial desse resultado, em que $p(t)$ é um pulso retangular de largura completa $\Pi(t/T_b)$, com $P(f) = T_b \operatorname{sinc}(\pi f T_b)$, e

$$S_y(f) = \frac{|P(f)|^2}{T_b} = T_b \operatorname{sinc}^2(\pi f T_b)$$

Exemplo 9.8 Determinemos a PSD $S_y(f)$ para sinais aleatórios on-off e bipolares que usam um pulso básico para $p(t)$, como ilustrado na Fig. 9.11. Os dígitos **1** e **0** têm igual probabilidade de ocorrência e são transmitidos a cada T_b segundos. Cada dígito independe de todos os outros. Todos esses códigos de linha são descritos na Seção 7.2.

Em cada caso, primeiro, determinemos $R_0, R_1, R_2, \dots, R_n$.

(a) Sinalização on-off: Neste caso, a_k pode assumir valores 1 e 0, cada um com probabilidade 1/2. Logo,

$$\begin{aligned} \overline{a_k} &= (1)P_{a_k}(1) + (0)P_{a_k}(0) = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(0) = \frac{1}{2} \\ \mathcal{R}_0 &= \overline{a_k^2} = (1)^2 P_{a_k}(1) + (0)^2 P_{a_k}(0) = \frac{1}{2}(1)^2 + \frac{1}{2}(0)^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

e como cada dígito independe dos dígitos remanescentes,

$$\mathcal{R}_n = \overline{\mathbf{a}_k \mathbf{a}_{k+n}} = \overline{\mathbf{a}_k} \overline{\mathbf{a}_{k+n}} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \quad n \geq 1$$

Assim, da Eq. (9.31),

$$S_y(f) = \frac{|P(f)|^2}{T_b} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} e^{-jn2\pi f T_b} \right] \quad (9.32a)$$

$$= \frac{|P(f)|^2}{T_b} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn2\pi f T_b} \right] \quad (9.32b)$$

A Eq. (9.32b) é obtida da Eq. (9.32a) separando o termo 1/2 que corresponde a $n=0$ em dois: 1/4 fora do somatório e 1/4 no interior do somatório (correspondente a $n=0$). Esse resultado é idêntico à Eq. (7.18b) obtida anteriormente com o uso de médias temporais.

Agora, podemos lançar mão de uma fórmula de soma de Poisson,^{*}

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn2\pi fT_b} = \frac{1}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_b}\right)$$

A substituição desse resultado na Eq. (9.32b) fornece

$$S_y(f) = \frac{|P(f)|^2}{4T_b} \left[1 + \frac{1}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_b}\right) \right] \quad (9.32c)$$

Reparemos que o espectro $S_y(f)$ consiste em partes discreta e contínua. Uma componente discreta da frequência do relógio ($R_b = 1/T_b$) está presente no espectro. A componente contínua do espectro é $|P(f)|^2/4T_b$, e é idêntica (a menos do fator multiplicativo 1/4) ao espectro do sinal polar no Exemplo 9.7. Esse é um resultado lógico, pois, como mostra a Fig. 7.3, um sinal on-off pode ser expresso como a soma de uma componente polar com uma componente periódica. A componente polar é exatamente a metade do sinal polar discutido anteriormente. Portanto, a PSD desse componente é um quarto da PSD do sinal polar. A componente periódica é a frequência do relógio R_b e consiste em componentes discretas de frequências R_b e seus harmônicos.

(b) Sinalização polar: Neste caso, a_k pode assumir os valores 0, 1 e -1 com probabilidades 1/2, 1/4 e 1/4, respectivamente. Logo,

$$\begin{aligned} \bar{a}_k &= (0)P_{a_k}(0) + (1)P_{a_k}(1) + (-1)P_{a_k}(-1) \\ &= \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{4}(1) + \frac{1}{4}(-1) = 0 \\ \mathcal{R}_0 &= \bar{a}_k^2 = (0)^2 P_{a_k}(0) + (1)^2 P_{a_k}(1) + (-1)^2 P_{a_k}(-1) \\ &= \frac{1}{2}(0)^2 + \frac{1}{4}(1)^2 + \frac{1}{4}(-1)^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Além disso,

$$\mathcal{R}_1 = \bar{a}_k \bar{a}_{k+1} = \sum_k \sum_{k+1} a_k a_{k+1} P_{a_k a_{k+1}}(a_k a_{k+1})$$

Como a_k pode assumir três valores, assim como a_{k+1} , a soma no lado direito tem nove termos, dos quais apenas quatro (que correspondem aos valores ± 1 para a_k e a_{k+1}) são diferentes de zero. Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= (1)(1)P_{a_k a_{k+1}}(1, 1) + (-1)(1)P_{a_k a_{k+1}}(-1, 1) \\ &\quad + (1)(-1)P_{a_k a_{k+1}}(1, -1) + (-1)(-1)P_{a_k a_{k+1}}(-1, -1) \end{aligned}$$

Devido à regra bipolar,

$$P_{a_k a_{k+1}}(1, 1) = P_{a_k a_{k+1}}(-1, -1) = 0$$

e

$$P_{a_k a_{k+1}}(-1, 1) = P_{a_k}(-1)P_{a_{k+1}|a_k}(1| -1) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

Da mesma forma, calculamos $P_{a_k a_{k+1}}(1, -1) = 1/8$. A substituição desses valores em \mathcal{R}_1 fornece

$$\mathcal{R}_1 = -\frac{1}{4}$$

Para $n \geq 2$, as intensidades de pulso a_k e a_{k+1} se tornam independentes. Portanto,

$$\mathcal{R}_n = \overline{\overline{a_k} \overline{a_{k+n}}} = \overline{a_k} \overline{a_{k+n}} = (0)(0) = 0 \quad n \geq 2$$

Substituindo esses valores na Eq. (9.31) e observando que R_n é uma função par de n , obtemos

$$S_y(f) = \frac{|P(f)|^2}{T_b} \operatorname{sen}^2(\pi f T_b)$$

Esse resultado é idêntico à Eq. (7.21b) encontrado anteriormente com o uso de médias temporais.

9.4 PROCESSOS ALEATÓRIOS MÚLTIPLOS

Para dois processos aleatórios reais $x(t)$ e $y(t)$, definimos a **função de correlação cruzada**^{*} $R_{xy}(t_1, t_2)$ como

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \overline{x(t_1)y(t_2)} \quad (9.33a)$$

Os dois processos são **conjuntamente estacionários** (no sentido amplo) se cada um for individualmente estacionário no sentido amplo e se

$$\begin{aligned} R_{xy}(t_1, t_2) &= R_{xy}(t_2 - t_1) \\ &= R_{xy}(\tau) \end{aligned} \quad (9.33b)$$

Processos Descorrelacionados, Ortogonais (Incoerentes) e Independentes

Dois processos $x(t)$ e $y(t)$ são **descorrelacionados** se sua função de correlação cruzada for igual ao produto de suas médias, ou seja,

$$R_{xy}(\tau) = \overline{x(t)y(t + \tau)} = \bar{x}\bar{y} \quad (9.34)$$

Isso implica que as VAs $x(t)$ e $y(t + \tau)$ são descorrelacionadas para todos t e τ .

Os processos $x(t)$ e $y(t)$ são **incoerentes** ou **ortogonais** se

$$R_{xy}(\tau) = 0 \quad (9.35)$$

Processos incoerentes, ou ortogonais, são processos descorrelatados com \bar{x} e/ou $\bar{y} = 0$.

Os processos $x(t)$ e $y(t)$ são processos aleatórios **independentes** se as variáveis aleatórias $x(t_1)$ e $y(t_2)$ forem independentes para todas as escolhas possíveis de t_1 e t_2 .

Densidade Espectral de Potência Cruzada

Definimos a **densidade espectral de potência cruzada** $S_{xy}(f)$ para dois processos $x(t)$ e $y(t)$ como

$$S_{xy}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\overline{X_T^*(f)Y_T(f)}}{T} \quad (9.36)$$

em que $X_T(f)$ e $Y_T(f)$ são as transformadas de Fourier dos processos truncados $x(t)\Pi(t/T)$ e $y(t)\Pi(t/T)$, respectivamente. Seguindo as mesmas linhas da dedução da Eq. (9.16), podemos mostrar que*

$$R_{xy}(\tau) \iff S_{xy}(f) \quad (9.37a)$$

Podemos ver da Eq. (9.33) que, para processos reais $x(t)$ e $y(t)$,

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau) \quad (9.37b)$$

Portanto,

$$S_{xy}(f) = S_{yx}(-f) \quad (9.37c)$$

9.5 TRANSMISSÃO DE PROCESSOS ALEATÓRIOS POR MEIO DE SISTEMAS LINEARES

Se um processo aleatório $x(t)$ for aplicado à entrada de um sistema linear invariante no tempo e *estável* (Fig. 9.12), com função de transferência $H(f)$, podemos determinar a função de autocorrelação e a PSD do processo de saída $y(t)$. A seguir, mostremos que

$$R_y(\tau) = h(\tau) * h(-\tau) * R_x(\tau) \quad (9.38)$$

e

$$S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f) \quad (9.39)$$

Para provar isso, observemos que

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)x(t - \alpha) d\alpha$$

e

$$y(t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)x(t + \tau - \alpha) d\alpha$$

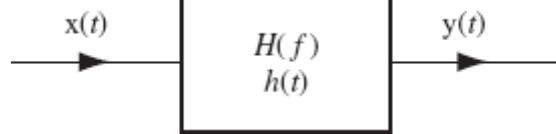


Figura 9.12 Transmissão de um processo aleatório por meio de um sistema linear invariante no tempo.

Logo,*

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \overline{y(t)y(t + \tau)} = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)x(t - \alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta)x(t + \tau - \beta) d\beta} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)h(\beta)\overline{x(t - \alpha)x(t + \tau - \beta)} d\alpha d\beta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)h(\beta)R_x(\tau + \alpha - \beta) d\alpha d\beta \end{aligned}$$

Essa integral dupla é, justamente, a convolução dupla $h(\tau)*h(-\tau)*R_x(\tau)$. Com isso, as Eqs. (9.38) e (9.39) resultam.

Exemplo 9.9 Ruído Térmico

O movimento térmico aleatório de elétrons em um resistor R causa uma tensão aleatória nos terminais do mesmo. Essa tensão $n(t)$ é conhecida como **ruído térmico**. Sua PSD $S_n(f)$ é praticamente plana em uma larga banda de frequências (até 1000 GHZ, em temperatura ambiente) e é dada por¹

$$S_n(f) = 2kTR$$

$$S_n(f) = 2kTR$$

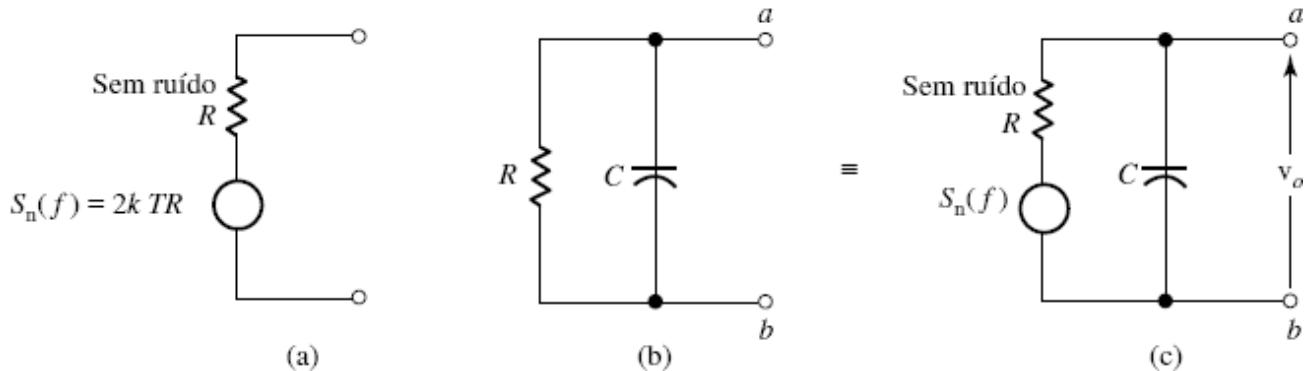


Figura 9.13 Representação de ruído térmico em um resistor.

em que k é a constante de Boltzmann ($1,38 \times 10^{-23}$) e T é a temperatura ambiente em graus kelvins. Um resistor R a uma temperatura ambiente de T graus kelvins pode ser representado por um resistor R sem ruído em série com uma fonte de tensão de ruído branco aleatório (ruído térmico) com PSD de $2kTR$ (Fig. 9.13a). Observemos que a potência de ruído térmico em uma banda Δf é $(2kTR)2\Delta f = 4kTR\Delta f$.

Calculemos a tensão de ruído térmico (valor rms) no simples circuito RC na Fig. 9.13b. O resistor R é substituído por um resistor equivalente sem ruído em série com a fonte de tensão de ruído térmico. A função de transferência $H(f)$ que relaciona a tensão v_o nos terminais $a-b$ à tensão de ruído térmico é dada por

$$H(f) = \frac{1/j2\pi fC}{R + 1/j2\pi fC} = \frac{1}{1 + j2\pi fRC}$$

Seja $S_0(f)$ a PSD da tensão v_o , da Eq. (9.39); então, temos

$$\begin{aligned} S_0(f) &= \left| \frac{1}{1 + j2\pi fRC} \right|^2 2kTR \\ &= \frac{2kTR}{1 + 4\pi^2 f^2 R^2 C^2} \end{aligned}$$

O valor quadrático médio $\overline{v_o^2}$ é dado por

$$\begin{aligned} \overline{v_o^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2kTR}{1 + 4\pi^2 f^2 R^2 C^2} df \\ &= \frac{kT}{C} \end{aligned} \tag{9.41}$$

Portanto, a tensão rms de ruído térmico pelo capacitor é $\sqrt{kT/C}$.

Soma de Processos Aleatórios

Se dois processos estacionários (pelo mesmo no sentido amplo) $x(t)$ e $y(t)$ forem somados para formar um processo $z(t)$, as estatísticas de $z(t)$ podem ser determinadas em termos das estatísticas de $x(t)$ e $y(t)$. Se

$$z(t) = x(t) + y(t) \quad (9.42a)$$

então

$$\begin{aligned} R_z(\tau) &= \overline{z(t)z(t+\tau)} = \overline{[x(t)+y(t)][x(t+\tau)+y(t+\tau)]} \\ &= R_x(\tau) + R_y(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau) \end{aligned} \quad (9.42b)$$

Se $x(t)$ e $y(t)$ forem descorrelacionados, da Eq. (9.34), temos

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(\tau) = \bar{x}\bar{y}$$

e

$$R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau) + 2\bar{x}\bar{y} \quad (9.43)$$

A maioria dos processos de interesse em problemas de comunicações tem média zero. Se os processos $x(t)$ e $y(t)$ forem descorrelacionados com \bar{x} ou $\bar{y} = 0$ [isto é, se $x(t)$ e $y(t)$ forem incoerentes], então

$$R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau) \quad (9.44a)$$

e

$$S_z(f) = S_x(f) + S_y(f) \quad (9.44b)$$

Das Eqs. (9.44a) e (9.19), temos

$$\overline{z^2} = \overline{x^2} + \overline{y^2} \quad (9.44c)$$

Portanto, o valor quadrático médio da soma de processos incoerentes (ou ortogonais) é igual à soma dos valores quadráticos médios dos processos.

Exemplo 9.10 Dois processos aleatórios de tensão $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são aplicados a um circuito RC , como mostrado na Fig. 9.14. Dado que

$$S_{x_1}(f) = K \quad S_{x_2}(f) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$$

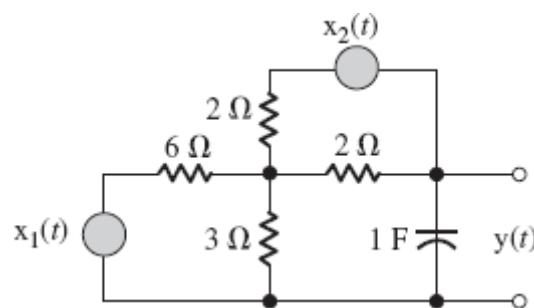


Figura 9.14 Cálculo de ruído em um circuito resistivo.

Determinemos a PSD e a potência P_y do processo aleatório de saída $y(t)$. Suponhamos que a contribuição de ruído térmico dos resistores no circuito seja desprezível (isto é, que os resistores sejam sem ruído).

Como o circuito é linear, a tensão de saída $y(t)$ pode ser expressa como

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

em que $y_1(t)$ é a saída para a entrada $x_1(t)$ [admitindo $x_2(t) = 0$] e $y_2(t)$ é a saída para a entrada $x_2(t)$ [admitindo $x_1(t) = 0$]. As funções de transferência que relacionam $y(t)$ a $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são, respectivamente, $H_1(f)$ e $H_2(f)$ e dadas por

$$H_1(f) = \frac{1}{3(3 \cdot j2\pi f + 1)}, \quad H_2(f) = \frac{1}{2(3 \cdot j2\pi f + 1)}$$

Logo,

$$S_{y_1}(f) = |H_1(f)|^2 S_{x_1}(f) = \frac{K}{9[9(2\pi f)^2 + 1]}$$

e

$$S_{y_2}(f) = |H_2(f)|^2 S_{x_2}(f) = \frac{\alpha}{2[9(2\pi f)^2 + 1][\alpha^2 + (2\pi f)^2]}$$

Como os processos de entrada $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são independentes, as saídas $y_1(t)$ e $y_2(t)$ geradas por eles também são independentes. Além disso, as PSDs de $y_1(t)$ e $y_2(t)$ não têm impulsos em $f = 0$, implicando que não têm componente dc [isto é, $\overline{y_1(t)} = \overline{y_2(t)} = 0$]. Por conseguinte, $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são incoerentes e

$$\begin{aligned} S_y(f) &= S_{y_1}(f) + S_{y_2}(f) \\ &= \frac{2K[\alpha^2 + (2\pi f)^2] + 9\alpha}{18[9(2\pi f)^2 + 1][\alpha^2 + (2\pi f)^2]} \end{aligned}$$

A potência P_y (ou o valor quadrático médio $\overline{y^2}$) pode ser calculada de duas maneiras. Podemos determinar $R_y(\tau)$ calculando as transformadas inversas e $S_{y_1}(f)$ e $S_{y_2}(f)$, como

$$R_y(\tau) = \underbrace{\frac{K}{54} e^{-|\tau|/3}}_{R_{y_1}(\tau)} + \underbrace{\frac{3\alpha - e^{-\alpha|\tau|}}{4(9\alpha^2 - 1)}}_{R_{y_2}(\tau)}$$

e

$$P_y = \overline{y^2} = R_y(0) = \frac{K}{54} + \frac{3\alpha - 1}{4(9\alpha^2 - 1)}$$

De modo alternativo, podemos determinar $\overline{y^2}$ integrando $S_y(f)$ com relação a f [Eq. (9.19)].

9.6 APLICAÇÃO: FILTRAGEM ÓTIMA (FILTRO DE WIENER-HOPF)

Quando um sinal desejado é misturado com ruído, a SNR pode ser melhorada com a aplicação do sinal a um filtro que suprime as componentes de frequência em que o sinal seja fraco e o ruído, forte. A melhora na SNR pode, nesse caso, ser explicada de forma qualitativa se considerarmos a questão de ruído branco misturado com um sinal $m(t)$ cuja PSD cai nas frequências altas. Se o filtro atenuar mais as frequências altas, o sinal será reduzido – na verdade, distorcido. A componente de distorção $m_e(t)$ pode ser considerada tão perniciosa como ruído adicionado. Assim, a atenuação das frequências altas causará ruído adicional (por distorção do sinal), mas, em compensação, reduzirá o ruído do canal, que é forte nas frequências altas. Como, nas frequências altas, o sinal tem pouco conteúdo de potência, a componente de distorção será pequena em comparação com a redução no ruído do canal, de modo que a distorção total pode ser menor que antes.

Seja $H_{\text{ot}}(f)$ o filtro ótimo (Fig. 9.15a). Esse filtro, não sendo ideal, causará distorção do sinal. O sinal de distorção $m_\epsilon(t)$ pode ser determinado da Fig. 9.15b. A potência do sinal de distorção N_D que aparece na saída é dada por

$$N_D = \int_{-\infty}^{\infty} S_m(f) |H_{\text{ot}}(f) - 1|^2 df$$

em que $S_m(f)$ é a PSD do sinal na entrada do filtro receptor. A potência do ruído do canal N_{ch} que aparece na saída do filtro é dada por

$$N_{\text{ch}} = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) |H_{\text{ot}}(f)|^2 df$$

em que $S_n(f)$ é a PSD de ruído que aparece na entrada do filtro receptor. A componente de distorção atua como um ruído. Como o sinal e o ruído do canal são incoerentes, o ruído total N_o na saída do filtro é a soma do ruído do canal N_{ch} com o ruído de distorção N_D ,

$$\begin{aligned} N_o &= N_{\text{ch}} + N_D \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[|H_{\text{ot}}(f)|^2 S_n(f) + |H_{\text{ot}}(f) - 1|^2 S_m(f) \right] df \end{aligned} \quad (9.45a)$$

Usando o fato de que $|A + B|^2 = (A + B)(A^* + B^*)$ e observando que $S_m(f)$ e $S_n(f)$ são reais, podemos reescrever a Eq. (9.45a) como

$$N_o = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left| H_{\text{ot}}(f) - \frac{S_m(f)}{S_r(f)} \right|^2 S_r(f) + \frac{S_m(f) S_n(f)}{S_r(f)} \right] df \quad (9.45b)$$

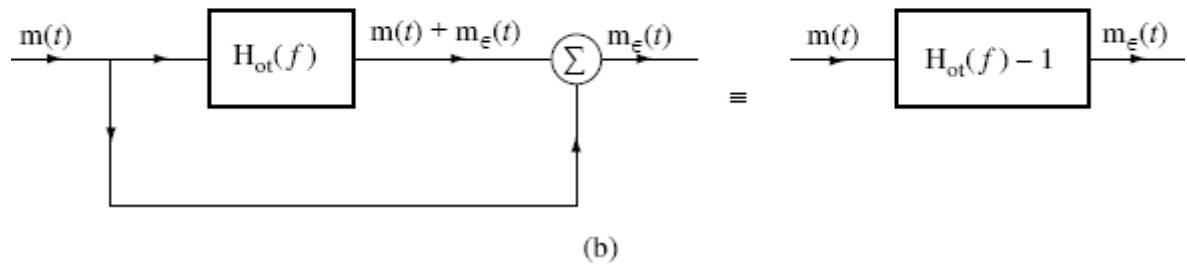
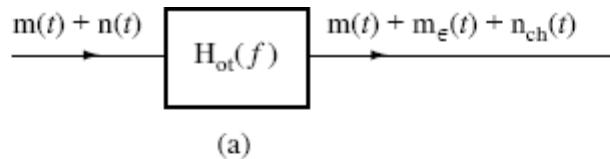


Figura 9.15 Cálculo com filtro de Wiener-Hopf.

em que $S_r(f) = S_m(f) + S_n(f)$. O integrando no lado direito da Eq. (9.45b) é não negativo. Além disso, é a soma de dois termos. Portanto, para minimizar N_o , devemos minimizar cada termo. Como o segundo termo $S_m(f) S_n(f) / S_r(f)$ independe de $H_{\text{ot}}(f)$, somente o primeiro termo pode ser minimizado. Da Eq. (9.45b), fica claro que o valor mínimo desse termo é zero e ocorre quando

$$\begin{aligned} H_{\text{ot}}(f) &= \frac{S_m(f)}{S_r(f)} \\ &= \frac{S_m(f)}{S_m(f) + S_n(f)} \end{aligned} \quad (9.46a)$$

Para essa escolha ótima, a potência de ruído de saída N_o é dada por

$$\begin{aligned}
N_o &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_m(f)S_n(f)}{S_r(f)} df \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_m(f)S_n(f)}{S_m(f) + S_n(f)} df
\end{aligned} \tag{9.46b}$$

O filtro ótimo é conhecido na literatura como **filtro de Wiener-Hopf**. A Eq. (9.46a) mostra que $H_{ot}(f) \approx 1$ (nenhuma atenuação) quando $S_m(f) \gg S_n(f)$. Contudo, quando $S_m(f) \ll S_n(f)$, o filtro tem alta atenuação. Em outras palavras, o filtro ótimo atenua fortemente a banda em que o ruído é relativamente mais intenso. Isso causa alguma distorção do sinal, mas, ao mesmo tempo, atenua mais fortemente o ruído, melhorando a SNR total.

Comentários Sobre o Filtro Ótimo

Caso a SNR na entrada do filtro seja razoavelmente alta – por exemplo, $S_m(f) > 100S_n(f)$ (SNR de 20 dB) – o filtro ótimo [Eq. (9.46a)] é praticamente um filtro ideal, e N_o [Eq. (9.46b)] é dada por

$$N_o \simeq \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) df$$

Por conseguinte, para uma alta SNR de entrada, a otimização produz melhora insignificante. O filtro de Wiener-Hopf, portanto, é prático somente quando a SNR de entrada for baixa (caso de ruído intenso).

Outra questão é a possibilidade de realizar o filtro ótimo na Eq. (9.46a). Como $S_m(f)$ e $S_n(f)$ são funções pares de f , o filtro ótimo $H_{ot}(f)$ é uma função par de f . Logo, a resposta ao impulso unitário $h_{ot}(t)$ é uma função par de t (Exercício 3.1-1). Isso torna $h_{ot}(t)$ não causal e o filtro irrealizável. Como já mencionado, um filtro desse tipo pode ser realizado aproximadamente se pudermos tolerar algum atraso na saída. Se um atraso não puder ser tolerado, a dedução de $H_{ot}(f)$ deve ser refeita com a condição de que o filtro seja realizável. Reparemos que o filtro ótimo realizável jamais pode ser superior ao filtro ótimo irrealizável [Eq. (9.46a)]. Assim, o filtro na Eq. (9.46a) representa um limite superior para o desempenho (SNR de saída). Uma discussão sobre filtros ótimos realizáveis pode ser encontrada na literatura.^{1, 2}

Exemplo 9.11 Um processo aleatório $m(t)$ (o sinal) é misturado com um ruído branco de canal $n(t)$. Dados

$$S_m(2f) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \quad \text{e} \quad S_n(f) = \frac{\mathcal{N}}{2}$$

determinemos o filtro de Wiener-Hopf para maximizar a SNR. Determinemos, ainda, a potência de ruído de saída N_o .

Da Eq. (9.46a),

$$\begin{aligned}
H_{ot}(f) &= \frac{4\alpha}{4\alpha + \mathcal{N}[\alpha^2 + (2\pi f)^2]} \\
&= \frac{4\alpha}{\mathcal{N}[\beta^2 + (2\pi f)^2]} \quad \beta^2 = \frac{4\alpha}{\mathcal{N}} + \alpha^2
\end{aligned} \tag{9.47a}$$

Logo,

$$h_{ot}(t) = \frac{2\alpha}{\mathcal{N}\beta} e^{-\beta|t|} \tag{9.47b}$$

A Fig. 9.16a mostra $h_{ot}(t)$. Fica evidente que esse é um filtro irrealizável. Todavia, uma versão atrasada (Fig. 9.16b) desse filtro, ou seja, $h_{ot}(t - t_0)$, é aproximadamente realizável se escolhermos $t_0 \geq 3/\beta$ e eliminarmos a cauda para $t < 0$ (Fig. 9.16c).

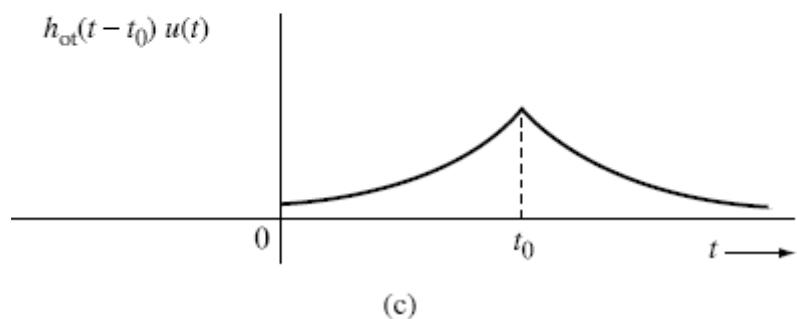
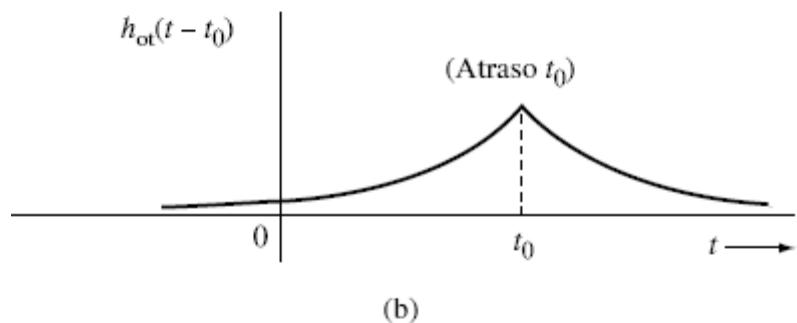
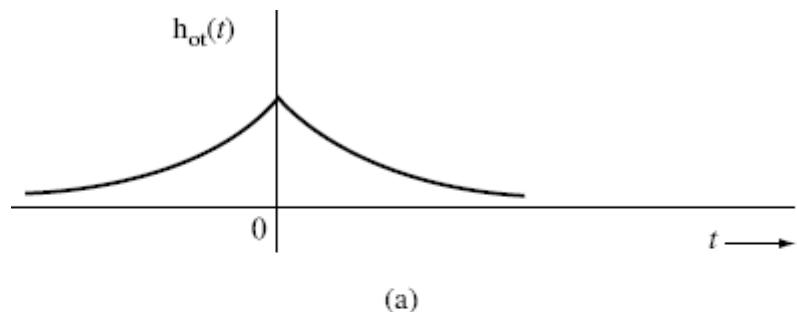


Figura 9.16 Realização aproximada de um filtro irrealizável usando atraso temporal.

A potência de ruído de saída N_o é [Eq. (9.46b)]

$$N_o = \int_0^{\infty} \frac{2\alpha}{\beta^2 + (2\pi f)^2} df = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + (4\alpha/\mathcal{N})}} \quad (9.48)$$

9.7 APLICAÇÃO: ANÁLISE DE DESEMPENHO DE SISTEMAS ANALÓGICOS EM BANDA-BASE

Apliquemos, agora, o conceito de densidade espectral de potência (PSD) para analisar o desempenho de sistemas de comunicação em banda-base. No caso de sinais analógicos, a SNR é básica para a especificação da qualidade de sinal. Para sinais de voz, uma SNR de 5 a 10 dB no receptor implica um sinal que praticamente não é inteligível. Sinais com qualidade telefônica têm SNR de 25 a 35 dB; televisão exige SNR de 45 a 55 dB.

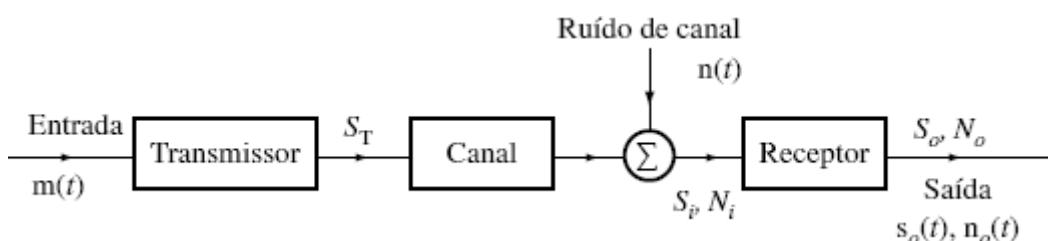


Figura 9.17 Modelo de sistema de comunicação.

A Fig. 9.17 mostra um simples sistema de comunicação em que um sinal analógico $m(t)$ é transmitido com potência S_T por meio de um canal (que representa o meio de transmissão). O sinal é corrompido por ruído aditivo de canal durante a transmissão. O canal também atenua (e pode distorcer) o sinal. Na entrada do receptor, temos um sinal misturado com ruído. As potências de sinal e de ruído na entrada do receptor são S_o e N_o , respectivamente.

O receptor processa (filtra) o sinal para produzir a saída $s_o(t) + n_o(t)$. A componente de ruído $n_o(t)$ advém do processamento de $n(t)$ pelo receptor, enquanto a componente de sinal $s_o(t)$ advém da mensagem $m(t)$. As potências de sinal e de ruído na saída são S_o e N_o , respectivamente. No caso de sistemas analógicos, a qualidade do sinal recebido é determinada pela razão S_o/N_o , a SNR de saída. Portanto, foquemos a atenção nessa figura de mérito, tanto para uma potência de transmissão fixa S_T como para uma dada S_i .

Em sistemas de banda-base, o sinal é transmitido diretamente sem qualquer modulação. Esse modo de comunicação é adequado para transmissão por par trancado ou cabo coaxial e é utilizado, principalmente, para enlaces de curta distância. Para um sistema de banda-base, o transmissor e o receptor são filtros ideais de banda-base. O transmissor ideal passa-baixas limita o espectro do sinal de entrada a uma dada largura de banda, enquanto o receptor passa-baixas elimina o ruído e outras interferências de canal fora da banda. (Filtros transmissor e receptor mais elaborados podem, como será mostrado na próxima seção.)

Admitimos que o sinal em banda-base $m(t)$ seja um processo estacionário no sentido amplo, com média zero e largura de banda limitada a B Hz. Consideremos o caso de filtros ideais passa-baixas (ou passa-faixa) com largura de banda B no transmissor e no receptor (Fig. 9.17). Suponhamos que o canal seja sem distorção. A potência, ou valor quadrático médio, de $m(t)$ é $\overline{m^2}$, dada por

$$S_i = \overline{m^2} = 2 \int_0^B S_m(f) df \quad (9.49)$$

Para este caso,

$$S_o = S_i \quad (9.50a)$$

e

$$N_o = 2 \int_0^B S_n(f) df \quad (9.50b)$$

em que $S_n(f)$ é a PSD do ruído do canal. Para o caso de ruído branco, $S_n(f) = N/2$, e

$$N_o = 2 \int_0^B \frac{N}{2} df = NB \quad (9.50c)$$

e

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{S_i}{NB} \quad (9.50d)$$

Definamos um parâmetro γ como

$$\gamma = \frac{S_i}{NB} \quad (9.51)$$

Das Eqs. (9.50d) e (9.51), temos

$$\frac{S_o}{N_o} = \gamma \quad (9.52)$$

O parâmetro γ é diretamente proporcional a S_i e, portanto, diretamente proporcional a S_T . Assim, uma dada S_T implica em um dado γ . A Eq. (9.52) é precisamente o resultado que buscamos e fornece a SNR de saída do receptor para uma dada S_T (ou S_i).

O valor da SNR na Eq. (9.52), muitas vezes, funciona como uma referência na medida de SNRs de saída de outros sistemas de modulação.

9.8 APLICAÇÃO: SISTEMAS ÓTIMOS DE PRÉ-ÊNFASE/DEÊNFASE

É possível aumentar a SNR de saída por meio de distorção deliberada do sinal transmitido (pré-ênfase) e correspondente compensação (deênfase) no receptor. Para um entendimento intuitivo desse processo, consideremos o caso de ruído branco de canal e um sinal $m(t)$ cuja PSD decai com a frequência. Nesse caso, podemos amplificar as componentes de alta frequência de $m(t)$ no transmissor (pré-ênfase). Como o sinal tem relativamente menos potência nas frequências altas, essa pré-ênfase requererá apenas um pequeno aumento na potência transmitida.* No receptor, as componentes de alta frequência são atenuadas (ou deenfatizadas) para desfazer a pré-ênfase no transmissor. Isso restaurará o sinal útil à forma original. O ruído de canal recebe um tratamento completamente distinto. Como o ruído é adicionado após o transmissor, não passa pela pré-ênfase. Contudo, no receptor, o ruído de canal passa pela deênfase (isto é, atenuação das componentes de frequência alta). Assim, na saída do receptor, a potência de sinal é restaurada, e a potência de ruído, reduzida. A SNR de saída, portanto, é aumentada.

Nesta seção, consideramos um sistema em banda-base. A extensão de pré-ênfase e deênfase a sistemas modulados é simples. A Fig. 9.18 mostra um sistema em banda-base com filtro de pré-ênfase $H_p(f)$ no transmissor e correspondente filtro de deênfase complementar $H_d(f)$ no receptor. A função de transferência do canal é $H_c(f)$, e a PSD do sinal de entrada $m(t)$, $S_m(f)$. Determinemos os filtros ótimos de pré-ênfase e deênfase (filtros PDE) $H_p(f)$ e $H_d(f)$, respectivamente, necessários à transmissão sem distorção do sinal $m(t)$.

Para transmissão sem distorção,

$$|H_p(f)H_c(f)H_d(f)| = G \text{ (uma constante)} \quad (9.53a)$$

e

$$\theta_p(f) + \theta_c(f) + \theta_d(f) = -2\pi f t_d \quad (9.53b)$$

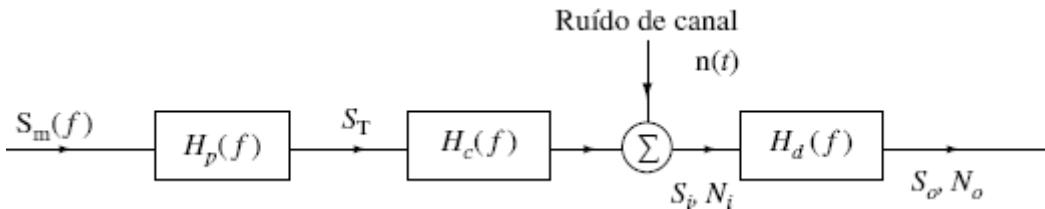


Figura 9.18 Filtros de pré-ênfase e deênfase em sistemas de banda-base.

Desejamos maximizar a SNR de saída, S_o/N_o , para uma dada potência transmitida S_T .

Com referência à Fig. 9.18, temos

$$S_T = \int_{-\infty}^{\infty} S_m(f) |H_p(f)|^2 df \quad (9.54a)$$

Como $H_p(f)H_c(f)H_d(f) = G \exp(-j2\pi f t_d)$, a potência de sinal S_o na saída do receptor é

$$S_o = G^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_m(f) df \quad (9.54b)$$

A potência de ruído N_o na saída do receptor é

$$N_o = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) |H_d(f)|^2 df \quad (9.54c)$$

Logo,

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{G^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_m(f) df}{\int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) |H_d(f)|^2 df} \quad (9.55)$$

Desejamos maximizar essa razão, sujeita à condição na Eq. (9.54a), tendo S_T como uma constante conhecida. A aplicação dessa limitação de potência torna o projeto de $H_p(f)$ um problema bem colocado, pois, de outra forma, filtros com ganhos maiores sempre serão melhores. Podemos incluir essa restrição multiplicando o numerador e o denominador do lado direito da Eq. (9.55) pelos lados esquerdo e direito, respectivamente, da Eq. (9.54a). Isso resulta em

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{G^2 S_T \int_{-\infty}^{\infty} S_m(f) df}{\int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) |H_d(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} S_m(f) |H_p(f)|^2 df} \quad (9.56)$$

O numerador do lado direito da Eq. (9.56) é fixo e *inalterado* pelos filtros PDE. Assim, para maximizar S_o/N_o , basta que minimizemos o denominador do lado direito da Eq. (9.56). Para isso, usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz (Apêndice B),

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} S_m(f) |H_p(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) |H_d(f)|^2 df \\ & \geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} [S_m(f) S_n(f)]^{1/2} |H_p(f) H_d(f)| df \right|^2 \end{aligned} \quad (9.57)$$

A igualdade vale se, e somente se,

$$S_m(f) |H_p(f)|^2 = K^2 S_n(f) |H_d(f)|^2 \quad (9.58)$$

em que K é uma constante arbitrária. Dessa forma, para maximizar S_o/N_o , a Eq. (9.58) deve ser satisfeita. Substituindo a Eq. (9.53a) na Eq. (9.58), obtemos

$$|H_p(f)|_{\text{ot}}^2 = GK \frac{\sqrt{S_n(f)/S_m(f)}}{|H_c(f)|} \quad (9.59a)$$

$$|H_d(f)|_{\text{ot}}^2 = \frac{G}{K} \frac{\sqrt{S_m(f)/S_n(f)}}{|H_c(f)|} \quad (9.59b)$$

A constante K é determinada com a substituição da Eq. (9.59a) na restrição de potência na Eq. (9.54a) como

$$K = \frac{S_T}{G \int_{-\infty}^{\infty} [\sqrt{S_m(f) S_n(f)} / |H_c(f)|] df}$$

Substituindo esse valor de K nas Eqs. (9.59a) e (9.59b), obtemos

$$|H_p(f)|_{\text{ot}}^2 = \frac{S_T \sqrt{S_n(f)/S_m(f)}}{|H_c(f)| \int_{-\infty}^{\infty} [\sqrt{S_m(f) S_n(f)} / |H_c(f)|] df} \quad (9.60a)$$

$$|H_d(f)|_{\text{ot}}^2 = \frac{G^2 \int_{-\infty}^{\infty} [\sqrt{S_m(f) S_n(f)} / |H_c(f)|] df}{S_T |H_c(f)| \sqrt{S_n(f)/S_m(f)}} \quad (9.60b)$$

A SNR de saída sob condições ótimas é dada pela Eq. (9.56), com o denominador substituído pelo lado direito da Eq. (9.57). Por fim, substituindo $|H_p(f) H_d(f)| = G/|H_c(f)|$, obtemos

$$\left(\frac{S_o}{N_o}\right)_{\text{ot}} = \frac{S_T \int_{-\infty}^{\infty} S_m(f) df}{\left(\int_{-\infty}^{\infty} [\sqrt{S_m(f)S_n(f)} / |H_c(f)|] df\right)^2} \quad (9.60c)$$

As Eqs. (9.60a) e (9.60b) fornecem as magnitudes dos filtros ótimos $H_p(f)$ e $H_d(f)$. As funções de fase devem ser escolhidas de modo a satisfazerem a condição de transmissão sem distorção [Eq. (9.53b)].

Observemos que o filtro de pré-ênfase na Eq. (9.59a) amplifica componentes de frequência em que o sinal é fraco e suprime componentes de frequência em que o sinal é forte. O filtro de deênfase na Eq. (9.59b) faz exatamente o oposto. Assim, o sinal é inalterado, mas o ruído é reduzido.

Exemplo 9.12 Consideremos o caso de $\alpha = 1400\pi$,

$$S_m(f) = \begin{cases} \frac{C}{(2\pi f)^2 + \alpha^2} & |f| \leq 4000 \\ 0 & |f| \geq 4000 \end{cases} \quad (9.61a)$$

O ruído de canal é branco, com PSD

$$S_n(f) = \frac{\mathcal{N}}{2} \quad (9.61b)$$

Suponhamos que o canal seja ideal [$H_c(f) = 1$ e $G = 1$] na banda de interesse (0 – 4000 Hz).

Sem pré-ênfase e deênfase, teríamos

$$\begin{aligned} S_o &= \int_{-4000}^{4000} S_m(f) df \\ &= 2 \int_0^{4000} \frac{C}{(2\pi f)^2 + \alpha^2} df \quad \alpha = 1400\pi \\ &= 10^{-4} C \end{aligned}$$

Como $G = 1$, a potência transmitida $S_T = S_o$,

$$S_o = S_T = 10^{-4} C$$

e a potência de ruído sem pré-ênfase e deênfase é

$$N_o = \mathcal{N}B = 4000\mathcal{N}$$

Portanto,

$$\frac{S_o}{N_o} = 2,5 \times 10^{-8} \frac{C}{\mathcal{N}} \quad (9.62)$$

Os filtros ótimos de transmissão e de recepção são dados por [Eq. (9.60a) e (9.60b)]

$$|H_p(f)|^2 = \frac{10^{-4} \sqrt{(2\pi f)^2 + \alpha^2}}{\int_{-\infty}^{\infty} \left(1/\sqrt{(2\pi f)^2 + \alpha^2}\right) df} = \frac{1,286 \sqrt{(2\pi f)^2 + \alpha^2}}{10^4} \quad |f| \leq 4000 \quad (9.63a)$$

$$|H_d(f)|^2 = \frac{10^4 \int_{-\infty}^{\infty} \left(1/\sqrt{(2\pi f)^2 + \alpha^2}\right) df}{\sqrt{(2\pi f)^2 + \alpha^2}} = \frac{0,778 \times 10^4}{\sqrt{(2\pi f)^2 + \alpha^2}} \quad |f| \leq 4000 \quad (9.63b)$$

A SNR de saída com uso de pré-ênfase e deênfase ótimas é obtida da Eq. (9.60c) como

$$\begin{aligned} \left(\frac{S_o}{N_o}\right)_{ot} &= \frac{(10^{-4}C)^2}{(\mathcal{N}C/2) \left[\int_{-4000}^{4000} \left[1/\sqrt{4\pi^2 f^2 + (1400\pi)^2} \right] df \right]^2} \\ &= 3,3 \times 10^{-8} \frac{C}{\mathcal{N}} \end{aligned} \quad (9.64)$$

Uma comparação entre a Eq. (9.62) e a Eq. (9.64) mostra que o uso de pré-ênfase e deênfase aumentou a SNR de saída por um fator de 1,32.

9.9 PROCESSOS ALEATÓRIOS PASSA-FAIXA

Caso a PSD de um processo aleatório seja confinada a certa banda passante (Fig. 9.19), o processo é aleatório **passa-faixa**. Processos aleatórios passa-faixa podem ser usados na modelagem de sinais de comunicação modulados e ruídos passa-faixa. Assim como um sinal passa-faixa pode ser representado em termos de componentes de quadratura [Eq. (3.39)], podemos expressar um processo aleatório passa-faixa $x(t)$ em termos de componentes de quadratura da seguinte forma

$$x(t) = x_c(t) \cos \omega_c t + x_s(t) \sin \omega_c t \quad (9.65)$$

Nessa representação, $x_c(t)$ é conhecido como a componente **em fase** e $x_s(t)$, como a componente **em quadratura** do processo aleatório passa-faixa.

Para provar isso, consideremos o sistema na Fig. 9.20a, em que $H_0(f)$ é um filtro passa-baixas ideal (Fig. 9.20b), com resposta ao impulso unitário $h_0(t)$. Primeiro, mostremos que o sistema na Fig. 9.20a é um filtro passa-baixas ideal com a função de transferência $H(f)$ representada na Fig. 9.20c. Podemos mostrar isso, de modo conveniente, calculando a resposta $h(t)$ ao impulso unitário $\delta(t)$. Como o sistema contém multiplicadores invariantes no tempo, devemos testar se o sistema é invariante ou variante no tempo. Portanto, podemos considerar a resposta do sistema a uma entrada $\delta(t - \alpha)$, ou seja, um impulso em $t = \alpha$. Usando [Eq. (2.10b)] $f(t) \delta(t - \alpha) = f(\alpha) \delta(t - \alpha)$, podemos expressar os sinais em vários pontos:

- Sinais em $a_1 : \cos(\omega_c \alpha + \theta) \delta(t - \alpha)$
- $a_2 : \sin(\omega_c \alpha + \theta) \delta(t - \alpha)$
- $b_1 : \cos(\omega_c \alpha + \theta) h_0(t - \alpha)$
- $b_2 : \sin(\omega_c \alpha + \theta) h_0(t - \alpha)$
- $c_1 : \cos(\omega_c \alpha + \theta) \cos(\omega_c t + \theta) h_0(t - \alpha)$
- $c_2 : \sin(\omega_c \alpha + \theta) \sin(\omega_c t + \theta) h_0(t - \alpha)$
- $d : h_0(t - \alpha) [\cos(\omega_c \alpha + \theta) \cos(\omega_c t + \theta) + \sin(\omega_c \alpha + \theta) \sin(\omega_c t + \theta)]$
- $= 2h_0(t - \alpha) \cos[\omega_c(t - \alpha)]$

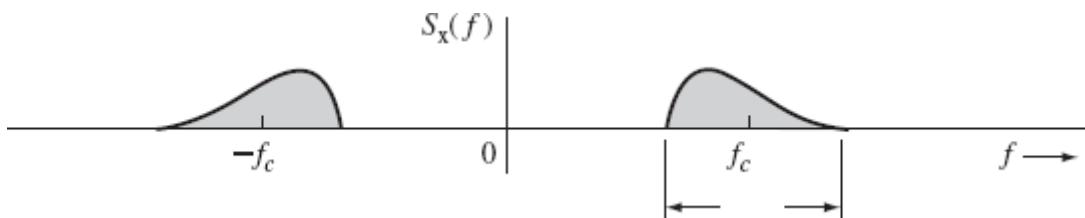


Figura 9.19 PSD de um processo aleatório passa-faixa.

Portanto, a resposta do sistema à entrada $\delta(t - \alpha)$ é $2h_0(t - \alpha) \cos[\omega_c(t - \alpha)]$. Obviamente, isso significa que o sistema em questão é linear e invariante no tempo, com resposta ao impulso

$$h(t) = 2h_0(t) \cos \omega_c t$$

e função de transferência

$$|H(f)|^2 S_x(f) = S_x(f)$$

A função de transferência $H(f)$ (Fig. 9.20c) representa um filtro passa-faixa ideal.

Se aplicarmos o processo passa-faixa $x(t)$ (Fig. 9.19) à entrada desse sistema, a saída $y(t)$ em d será igual a $x(t)$. Assim, a PSD de saída será igual à de entrada

$$|H(f)|^2 S_x(f) = S_x(f)$$

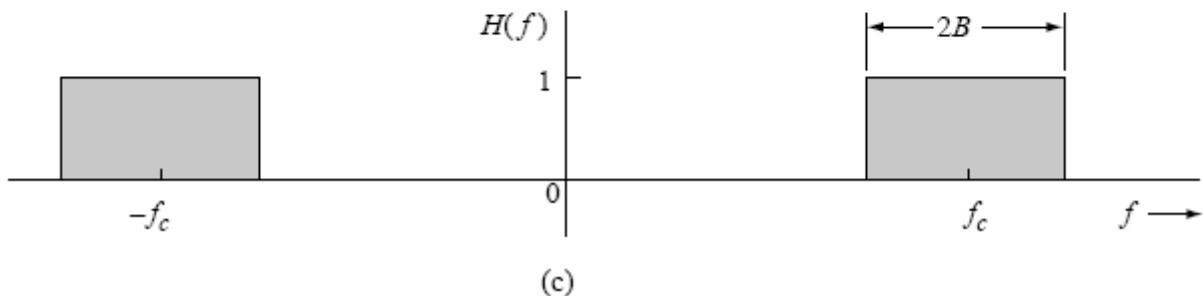
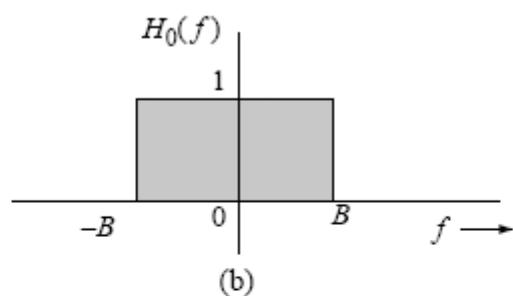
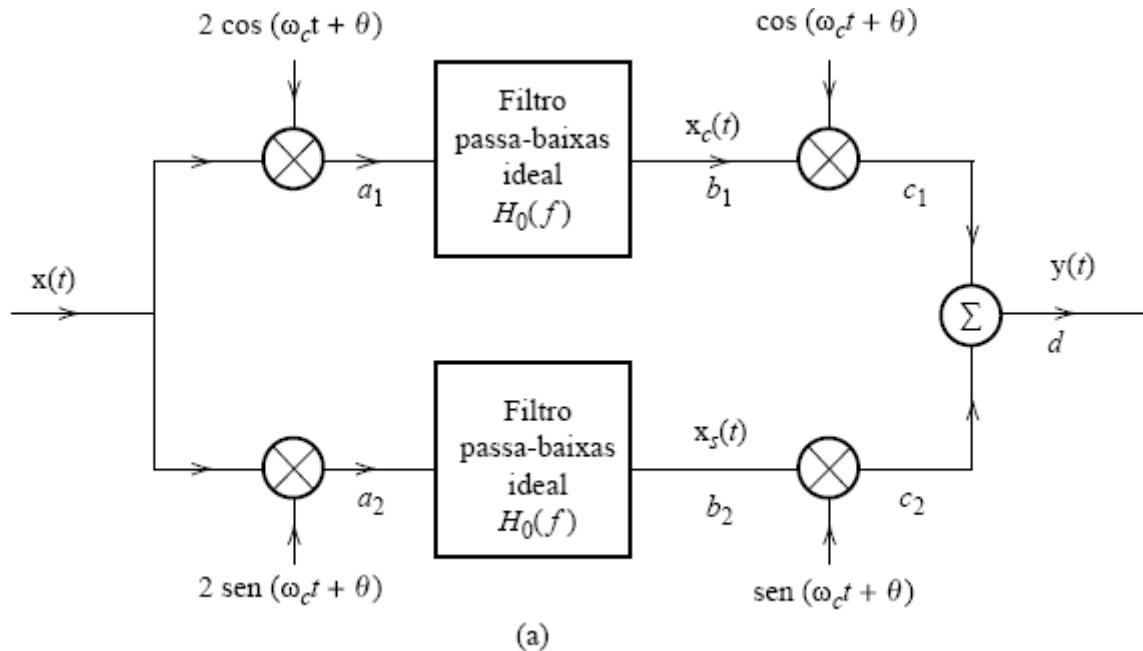


Figura 9.20 (a) Circuito equivalente de um filtro passa-faixa ideal. (b) Resposta de frequência de um filtro passa-baixas ideal. (c) Resposta de frequência de um filtro passa-faixa ideal.

Se os processos nos pontos b_1 e b_2 (saídas dos filtros passa-baixas) forem denotados por $x_c(t)$ e $x_s(t)$, respectivamente, a saída $x(t)$ poderá ser escrita como

$$x(t) = x_c(t) \cos(\omega_c t + \theta) + x_s(t) \sin(\omega_c t + \theta) \quad (9.66)$$

em que $x_c(t)$ e $x_s(t)$ são processos aleatórios passa-baixas, limitados em banda a B Hz (pois são as saídas de filtros passa-baixas de largura de banda B). Como a Eq. (9.66) é válida para qualquer valor de θ , substituindo $\theta = 0$, obtemos a desejada representação na Eq. (9.65).

Para caracterizar $x_c(t)$ e $x_s(t)$, consideremos, mais uma vez, a Fig. 9.20a com entrada $x(t)$. Seja θ uma VA uniformemente distribuída no intervalo $(0, 2\pi)$; ou seja, para uma função de amostra, θ tem igual probabilidade de assumir qualquer valor no intervalo $(0, 2\pi)$. Nesse caso, $x(t)$ é representado como na Eq. (9.66). Observemos que $x_c(t)$ é obtido multiplicando $x(t)$ por $2 \cos(\omega_c t + \theta)$ e aplicando o resultado a um filtro passa-baixas. A PSD de $2x(t) \cos(\omega_c t + \theta)$ é [Eq. (9.22b)]

$$4 \times \frac{1}{4} [S_x(f + f_c) + S_x(f - f_c)]$$

Esta PSD é $S_x(f)$ deslocada para a esquerda e para a direita por f_c , como mostrado na Fig. 9.21a. Quando aplicada a um filtro passa-baixas, a resultante PSD de $x_c(t)$ é como mostrado na Fig. 9.21b. Fica claro que

$$S_{x_c}(f) = \begin{cases} S_x(f + f_c) + S_x(f - f_c) & |f| \leq B \\ 0 & |f| > B \end{cases} \quad (9.67a)$$

Podemos obter (f) da mesma forma. No que diz respeito à PSD, não faz diferença se multiplicarmos por $\cos(\omega_c t + \theta)$ ou por $\sin(\omega_c t + \theta)$ [ver nota de rodapé após a Eq. (9.22a)], de modo que obtemos

$$S_{x_c}(f) = S_{x_s}(f) = \begin{cases} S_x(f + f_c) + S_x(f - f_c), & |f| \leq B \\ 0, & |f| > B \end{cases} \quad (9.67b)$$

Das Figs. 9.19 e 9.21b, fazemos a interessante observação de que áreas sob as PSDs $S_x(f)$, $S_{x_c}(f)$ e $S_{x_s}(f)$ são iguais. Portanto,

$$\overline{x_c^2(t)} = \overline{x_s^2(t)} = \overline{x^2(t)} \quad (9.67c)$$

Assim, os valores quadráticos médios (ou potências) de $x_c(t)$ e $x_s(t)$ são idênticos ao de $x(t)$.

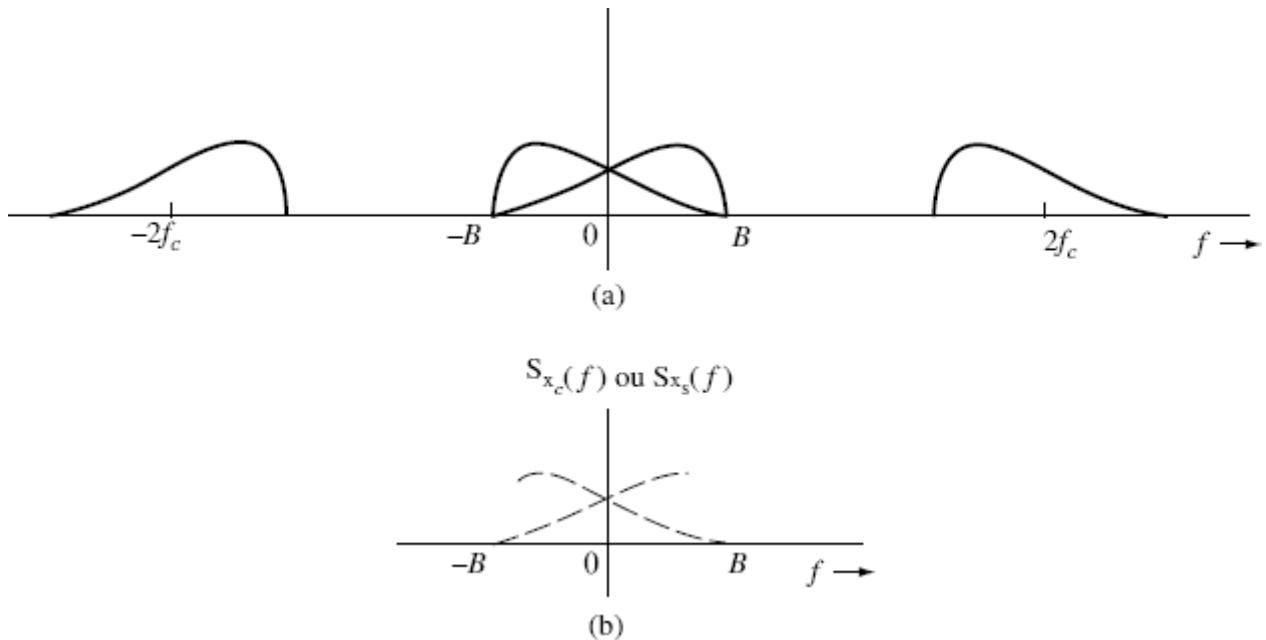


Figura 9.21 Dedução das PSDs das componentes em quadratura de um processo aleatório passa-faixa.

Esses resultados foram deduzidos admitindo que Θ seja uma VA. Para a representação na Eq. (9.65), $\Theta = 0$, de modo que as Eqs. (9.67b) e (9.67c) podem não ser válidas. Por sorte, essas equações permanecem válidas mesmo para o caso $\Theta = 0$. A prova é um tanto longa e trabalhosa, e não será dada aqui.^{1 - 3} Também pode ser mostrado^{1 - 3} que

$$\overline{x_c(t)x_s(t)} = R_{x_c x_s}(0) = 0 \quad (9.68)$$

Ou seja, as amplitudes x_c e x_s , em qualquer dado instante, são descorrelacionadas. Além disso, caso $S_x(f)$ seja simétrica com relação a ω_c (e, também, com relação a $-\omega_c$), então

$$R_{x_c x_s}(\tau) = 0 \quad (9.69)$$

Exemplo 9.13 A PSD de um ruído branco passa-faixa $n(t)$ é $/2$ (Fig. 9.22a). Representemos esse processo em termos de componentes em quadratura. Deduzamos (f) e (f) e comprovemos que $\overline{n_c}^2 = \overline{n_s}^2 = \overline{n}^2$.

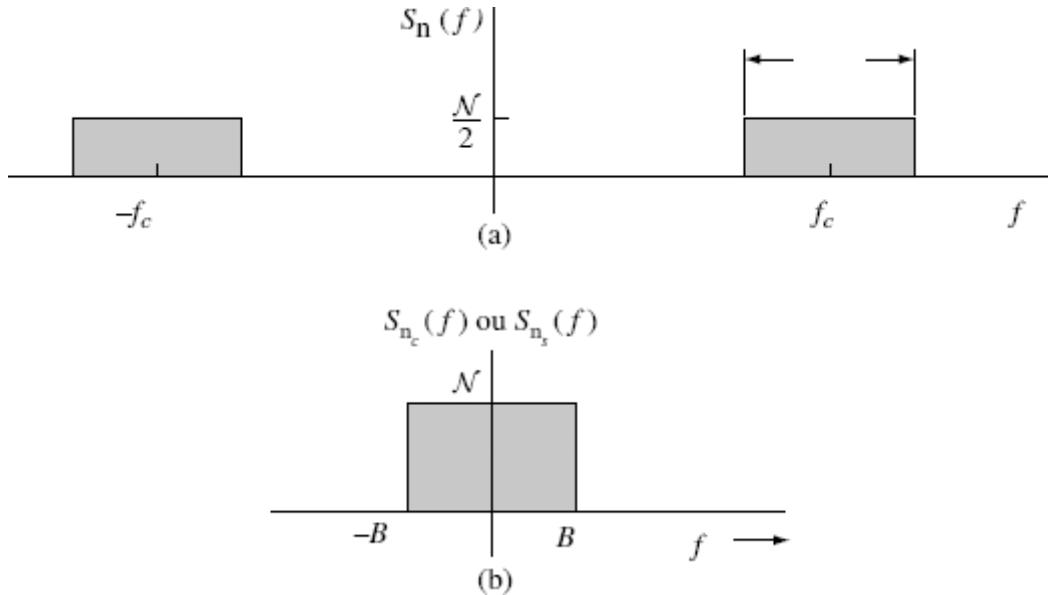


Figura 9.22 (a) PSD de um processo de ruído branco passa-faixa. (b) PSD de suas componentes em quadratura.

Temos a expressão

$$n(t) = n_c(t) \cos \omega_c t + n_s(t) \sin \omega_c t \quad (9.70)$$

em que

$$S_{n_c}(f) = S_{n_s}(f) = \begin{cases} S_n(f + f_c) + S_n(f - f_c) & |f| \leq B \\ 0 & |f| > B \end{cases}$$

Dessa última equação e da Fig. 9.22, segue que

$$S_{n_c}(f) = S_{n_s}(f) = \begin{cases} N & |f| \leq B \\ 0 & |f| > B \end{cases} \quad (9.71)$$

E, ainda,

$$\overline{n^2} = 2 \int_{f_c-B}^{f_c+B} \frac{N}{2} df = 2NB \quad (9.72a)$$

Da Fig. 9.22b, temos

$$\overline{n_c^2} = \overline{n_s^2} = 2 \int_0^B \mathcal{N} df = 2\mathcal{N}B \quad (9.72b)$$

Logo,

$$\overline{n_c^2} = \overline{n_s^2} = \overline{n^2} = 2\mathcal{N}B \quad (9.72c)$$

Não Unicidade da Representação em Quadratura

Não existe uma única frequência central para um sinal passa-faixa. Para o espectro na Fig. 9.23a, por exemplo, podemos considerar que o espectro tenha largura de banda $2B$, centrada em ω_c . Podemos igualmente considerar que esse mesmo espectro tenha largura de banda $2B'$, centrada em ω_1 , como mostrado na Fig. 9.23a. A representação por componentes em quadratura [Eq. (9.65)] também é possível para a frequência central ω_1 :

$$x(t) = x_{c_1}(t) \cos \omega_1 t + x_{s_1}(t) \sin \omega_1 t$$

em que

$$S_{x_{c_1}}(f) = S_{x_{s_1}}(f) = \begin{cases} S_x(f + f_1) + S_x(f - f_1) & |f| \leq B' \\ 0 & |f| > B' \end{cases} \quad (9.73)$$

Isso é mostrado na Fig. 9.23b. Assim, a representação de um processo passa-faixa por componentes em quadratura não é única. Existe um número infinito de escolhas possíveis para a frequência central, e a **cada frequência central corresponde uma diferente representação por componentes em quadratura**.

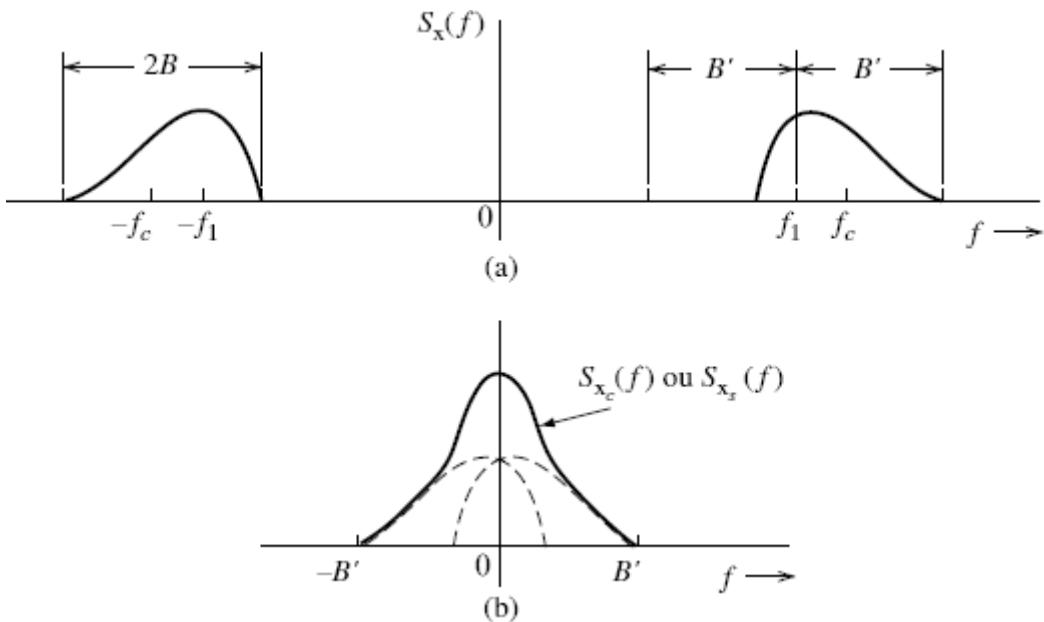


Figura 9.23 Natureza não única da representação de um processo passa-faixa por componentes em quadratura.

Exemplo 9.14 A PSD de ruído branco passa-faixa de um canal SSB (banda lateral inferior) é mostrada na Fig. 9.24a. Representemos esse sinal em termos de componentes em quadratura com a frequência central ω_c .

A verdadeira frequência central desta PSD não é ω_c ; todavia, ainda podemos usar ω_c como frequência central, como discutido anteriormente,

$$n(t) = n_c(t) \cos \omega_c t + n_s(t) \sin \omega_c t \quad (9.74)$$

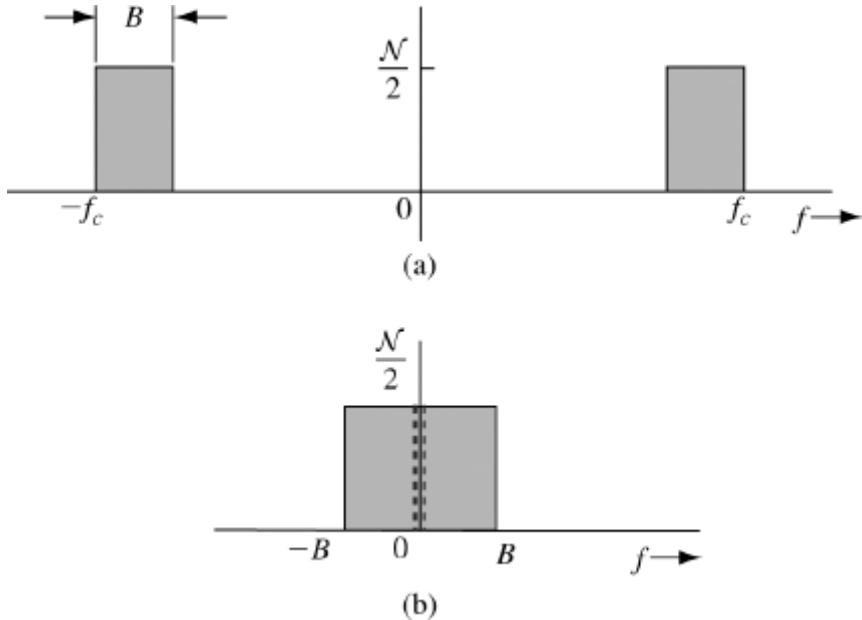


Figura 9.24 Possível forma de representação de ruído em SSB por componentes em quadratura.

A PSD $S_{n_c}(f)$ ou $S_{n_s}(f)$ obtida com o deslocamento de $S_n(f)$ para a esquerda e para a direita por f_c [ver Eq. (9.73)] é mostrada na Fig. 9.24b,

$$S_{n_c}(f) = S_{n_s}(f) = \begin{cases} \frac{N}{2} & |f| \leq B \\ 0 & |f| > B \end{cases} \quad (9.75)$$

Da Fig. 9.24a, temos

$$\overline{n^2} = NB \quad (9.76a)$$

Do mesmo modo, da Fig. 9.24b, temos

$$\overline{n_c^2} = \overline{n_s^2} = NB \quad (9.76b)$$

Logo,

$$\overline{n_c^2} = \overline{n_s^2} = \overline{n^2} = NB \quad (9.76c)$$

Processo Aleatório Gaussiano “Branco” Passa-Faixa

Até aqui, evitamos a definição de um processo aleatório gaussiano. O processo aleatório gaussiano talvez seja o processo aleatório mais importante na área de comunicação. Contudo, uma discussão cuidadosa e sem pressa está além do escopo deste livro. Tudo o que precisamos saber é que uma VA $x(t)$ formada por amplitudes de função de amostra no instante t de um processo gaussiano é gaussiana, com PSD da forma da Eq. (8.39).

Um processo gaussiano com PSD uniforme é denominado processo aleatório gaussiano branco. O termo *processo gaussiano “branco” passa-faixa* é, na verdade, errôneo. Todavia, é uma noção popular para representar um processo aleatório $n(t)$ com PSD

uniforme $N/2$, centrada em ω_c e com largura de banda $2B$ (Fig. 9.22a). Utilizando a representação por componentes em quadratura, $n(t)$ pode ser expresso como

$$n(t) = n_c(t) \cos \omega_c t + n_s(t) \sin \omega_c t \quad (9.77)$$

em que, da Eq. (9.71), temos

$$S_{n_c}(f) = S_{n_s}(f) = \begin{cases} \mathcal{N} & |f| \leq B \\ 0 & |f| > B \end{cases}$$

E, da Eq. (9.72c),

$$\overline{n_c^2} = \overline{n_s^2} = \overline{n^2} = 2\mathcal{N}B \quad (9.78)$$

O sinal passa-faixa também pode ser expresso na forma polar [Eq. (3.40)]:

$$n(t) = E(t) \cos(\omega_c t + \Theta) \quad (9.79a)$$

em que o envelope aleatório e a fase aleatória são definidos por

$$E(t) = \sqrt{n_c^2(t) + n_s^2(t)} \quad (9.79b)$$

$$\Theta(t) = -\tan^{-1} \frac{n_s(t)}{n_c(t)} \quad (9.79c)$$

As VAs $n_c(t)$ e $n_s(t)$ são VAs gaussianas descorrelacionadas [Eq. (9.68)] com médias zero e variância $2NB$ [Eq. (9.78)]. Logo, suas PSDs são idênticas:

$$p_{n_c}(\alpha) = p_{n_s}(\alpha) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\alpha^2/2\sigma^2} \quad (9.80a)$$

em que

$$\sigma^2 = 2\mathcal{N}B \quad (9.80b)$$

Foi mostrado no Exercício 8.2-10 que, se duas VAs gaussianas forem descorrelacionadas, também são independentes. Nesse caso, como mostrado no Exemplo 8.17, $E(t)$ tem uma densidade de Rayleigh

$$p_E(E) = \frac{E}{\sigma^2} e^{-E^2/2\sigma^2} u(E), \quad \sigma^2 = 2\mathcal{N}B \quad (9.81)$$

e Θ na Eq. (9.79a) é uniformemente distribuída em $(0, 2\pi)$.

Ruído em Sinal Senoidal

Outro caso de interesse é o de uma senoide somada a um ruído gaussiano de banda estreita. Se a senoide $A \cos(\omega_c t + \varphi)$ for misturada com $n(t)$, um ruído gaussiano passa-faixa centrado em ω_c , a soma $y(t)$ é dada por

$$y(t) = A \cos(\omega_c t + \varphi) + n(t)$$

Usando a Eq. (9.66) para representar o ruído passa-faixa, temos

$$y(t) = [A + n_c(t)] \cos(\omega_c t + \varphi) + n_s(t) \sin(\omega_c t + \varphi) \quad (9.82a)$$

$$= E(t) \cos[\omega_c t + \Theta(t) + \varphi] \quad (9.82c)$$

em que $E(t)$ é o envelope [$E(t) > 0$] e $\Theta(t)$ é o ângulo mostrado na Fig. 9.25,

$$E(t) = \sqrt{[A + n_c(t)]^2 + n_s^2(t)} \quad (9.83a)$$

$$\Theta(t) = -\tan^{-1} \frac{n_s(t)}{A + n_c(t)} \quad (9.83b)$$

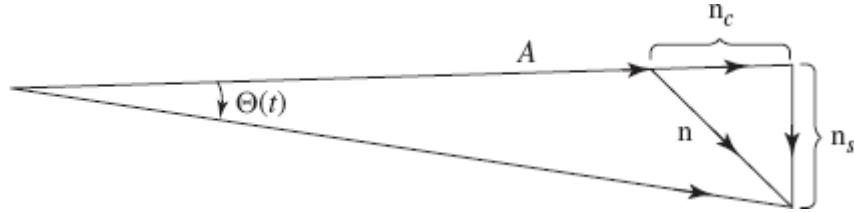


Figura 9.25 Representação fasorial de uma senoide e de um ruído gaussiano de banda estreita.

$n_c(t)$ e $n_s(t)$ são ambos gaussianos, com variância σ^2 . Para ruído gaussiano branco, $\sigma^2 = 2NB$ [Eq. (9.80b)]. Raciocinando de forma análoga à usada na dedução da Eq. (8.57) e observando que

$$\begin{aligned} n_c^2 + n_s^2 &= E^2 - A^2 - 2An_c \\ &= E^2 - 2A(A + n_c) + A^2 \\ &= E^2 - 2AE \cos \Theta(t) + A^2 \end{aligned}$$

temos

$$p_{E_\Theta}(E, \theta) = \frac{E}{2\pi\sigma^2} e^{-(E^2 - 2AE \cos \theta + A^2)/2\sigma^2} \quad (9.84)$$

em que σ^2 é a variância de n_c (ou n_s) e, para o ruído branco, é igual a $2NB$. Da Eq. (9.84), temos

$$\begin{aligned} p_E(E) &= \int_{-\pi}^{\pi} p_{E_\Theta}(E, \theta) d\theta \\ &= \frac{E}{\sigma^2} e^{-(E^2 + A^2)/2\sigma^2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(AE/\sigma^2) \cos \theta} d\theta \right] \end{aligned} \quad (9.85)$$

O termo entre colchetes no lado direito da Eq. (9.85) define $I_0(AE/\sigma^2)$, em que I_0 é a **função de Bessel modificada de ordem zero** de primeira espécie. Assim,

$$p_E(E) = \frac{E}{\sigma^2} e^{-(E^2 + A^2)/2\sigma^2} I_0 \left(\frac{AE}{\sigma^2} \right) \quad (9.86a)$$

Esta é conhecida como **densidade de Rice** ou **densidade riceana**. Para um sinal senoidal intenso ($A \gg \sigma$), pode ser mostrado que⁴

$$I_0\left(\frac{AE}{\sigma^2}\right) \simeq \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\pi AE}} e^{AE/\sigma^2}$$

e

$$P_E(E) \simeq \sqrt{\frac{E}{2\pi A\sigma^2}} e^{-(E-A)^2/2\sigma^2} \quad (9.86b)$$

Como $A \gg \sigma$, $E \approx A$, e $p_E(E)$ na Eq. (9.86b) é aproximadamente uma densidade gaussiana com média A e variância σ^2 ,

$$p_E(E) \simeq \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(E-A)^2/2\sigma^2} \quad (9.86c)$$

A Fig. 9.26 mostra a PDF da VA normalizada E/σ . Notemos que, para $A/\sigma = 0$, obtemos a densidade de Rayleigh.

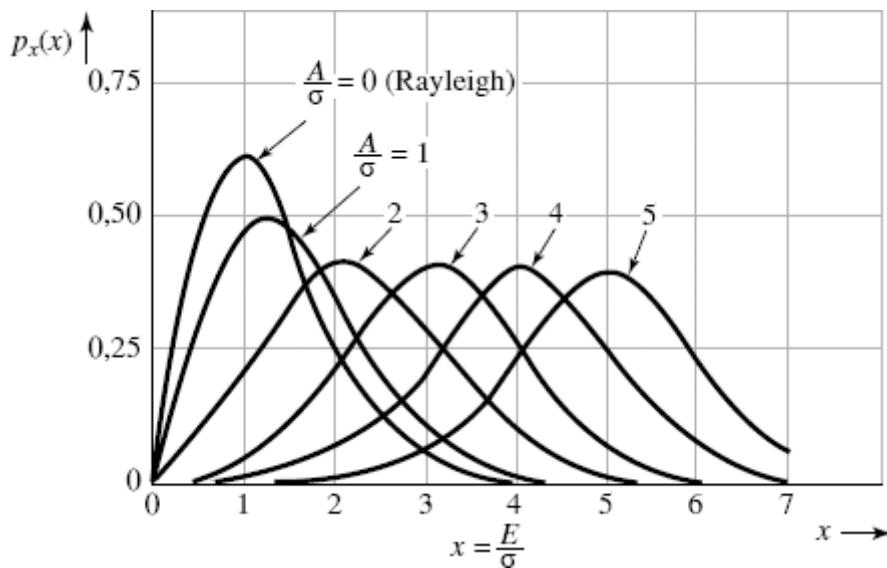


Figura 9.26 PDF riceana.

Da PDF conjunta $p_{E\Theta}(E, \theta)$, também podemos obter $p_\Theta(\theta)$, a PDF da fase Θ , integrando a PDF conjunta com relação a E ,

$$p_\Theta(\theta) = \int_0^\infty p_{E\Theta}(E, \theta) dE$$

Embora a integração seja simples, há numerosos passos e, por esse motivo, não será repetida aqui. O resultado final é

$$p_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi} e^{-A^2/2\sigma^2} \left\{ 1 + \frac{A}{\sigma} \sqrt{2\pi} \cos \theta e^{A^2 \cos^2 \theta / 2\sigma^2} \left[1 - Q\left(\frac{A \cos \theta}{\sigma}\right) \right] \right\} \quad (9.86d)$$

REFERÊNCIAS

1. B. P. Lathi, *An Introduction to Random Signals and Communication Theory*, International Textbook Co., Scranton, PA, 1968.
2. J. M. Wozencraft and I. M. Jacobs, *Principles of Communication Engineering*, Wiley, New York, 1965.
3. A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1984.
4. S. O. Rice, "Mathematical Analysis of Random Noise," *Bell. Syst. Tech. J.*, vol. 23, pp. 282–332, July 1944; vol. 24, pp. 46–156, Jan. 1945.

EXERCÍCIOS

- (a) Esboce gráficos para o ensemble do processo aleatório

$$x(t) = a \cos(\omega_c t + \Theta)$$

em que ω_c e Θ são constantes e a é uma VA uniformemente distribuída no intervalo $(-A, A)$.

- (b) Apenas por observação do ensemble, determine se esse é um processo estacionário ou não estacionário. Justifique sua resposta.

- 9.1-2** Refaça a parte (a) do Exercício 9.1-1 para o caso em que a e Θ são constantes e ω_c é uma VA uniformemente distribuída no intervalo $(0, 100)$.

- (a) Esboce gráficos para o ensemble do processo aleatório

$$x(t) = at + b$$

em que b é uma constante e a é uma VA uniformemente distribuída no intervalo $(-2, 2)$.

- (b) Apenas por observação do ensemble, determine se esse é um processo estacionário ou não estacionário.

- 9.1-4** Determine e $\overline{x(t)}$ e $R_x(t_1, t_2)$ para o processo aleatório no Exercício 9.1-1 e determine se esse processo é estacionário no sentido amplo.

- 9.1-5** Refaça o Exercício 9.1-4 para o processo $x(t)$ no Exercício 9.1-2.

- 9.1-6** Refaça o Exercício 9.1-4 para o processo $x(t)$ no Exercício 9.1-3.

- 9.1-7** Dado um processo aleatório $x(t) = kt$, em que k é uma VA uniformemente distribuída no intervalo $(-1, 1)$,

- (a) Esboce gráficos para o ensemble desse processo.

- (b) Calcule $\overline{x(t)}$.

- (c) Calcule $R_x(t_1, t_2)$.

- (d) O processo é estacionário no sentido amplo?

- (e) O processo é ergódico?

- (f) Caso o processo seja estacionário no sentido amplo, qual é sua potência P_s [ou seja, o valor quadrático médio $\overline{x^2(t)}$]?

- 9.1-8** Refaça o Exercício 9.1-7 para o processo aleatório

$$x(t) = a \cos(\omega_c t + \Theta)$$

em que ω_c é uma constante, a e Θ são VAs independentes, uniformemente distribuídas nos intervalos $(-1, 1)$ e $(0, 2\pi)$, respectivamente.

- 9.2-1** Determine se cada uma funções dadas a seguir pode ser uma PSD válida de um processo aleatório real.

(a) $\frac{(2\pi f)^2}{(2\pi f)^2 + 16}$ (e) $\delta[2\pi(f + f_0)] - \delta[2\pi(f - f_0)]$

(b) $\frac{1}{(2\pi f)^2 - 16}$ (f) $j[\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]$

(c) $\frac{(2\pi f)}{(2\pi f)^2 + 16}$ (g) $\frac{j(2\pi f)^2}{(2\pi f)^2 + 16}$

(d) $\delta(2\pi f) + \frac{1}{(2\pi f)^2 + 16}$

9.2-2 Mostre que, para um processo aleatório estacionário no sentido amplo $x(t)$,

(a) $R_x(0) \geq |R_x(\tau)| \quad \tau \neq 0$

Sugestão: $(x_1 \pm x_2)^2 = \overline{x_1^2} + \overline{x_2^2} \pm 2\overline{x_1 x_2} \geq 0$. Sejam $x_1 = x(t_1)$ e $x_2 = x(t_2)$.

(b) $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_x(\tau) = \bar{x}^2$

Sugestão: À medida que $\tau \rightarrow \infty$, x_1 e x_2 tendem a se tornar independentes.

9.2-3 Mostre que, se a PSD de um processo aleatório $x(t)$ for limitado em banda, e se

$$R_x\left(\frac{n}{2B}\right) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{cases}$$

então o processo de mínima largura de banda $x(t)$ que pode exibir essa função de autocorrelação é um processo branco limitado em banda; ou seja, $S_x(f) = k \Pi(f/2W)$

Sugestão: Use o teorema da amostragem para reconstruir $R_x(\tau)$.

9.2-4 Para o processo binário aleatório no Exemplo 9.5 (Fig. 9.9a), determine $R_x(\tau)$ e $S_x(f)$, caso a probabilidade de transição (de 1 a -1 ou vice-versa) em cada nó seja p em vez de 0,5.

9.2-5 Um processo branco estacionário no sentido amplo $m(t)$ limitado em banda a B Hz é amostrado à taxa de Nyquist. Cada amostra é transmitida por um pulso básico $p(t)$ multiplicado pelo valor da amostra. Esse é um sinal PAM. Mostre que a PSD do sinal PAM é $2BR_m(0)|P(f)|^2$.

Sugestão: Use a Eq. (9.31). Mostre que as amostras de Nyquist a_k e a_{k+n} ($n \geq 1$) são descorrelacionadas.

9.2-6 Um código de linha duobinário proposto por Lender é um esquema terciário similar ao bipolar que requer somente a metade da largura de banda deste. Nesse código, **0** é transmitido por ausência de pulso, e **1** é transmitido pelo pulso $p(t)$ ou $-p(t)$, segundo a regra: um **1** é codificado pelo mesmo pulso usado para codificar o **1** anterior, caso esses dois **1**s sejam separados por um número par de **0**s; um **1** é codificado pelo negativo do pulso usado para codificar o **1** anterior, caso esses dois **1**s sejam separados por um número ímpar de **0**s. Dígitos binários aleatórios são transmitidos a cada T_b segundos. Admitindo $P(\mathbf{0}) = P(\mathbf{1}) = 0,5$, mostre que

$$S_y(f) = \frac{|P(f)|^2}{T_b} \cos^2(\pi f T_b)$$

Determine $S_y(f)$ caso $p(t)$, o pulso básico usado, seja um pulso retangular de meia largura $\Pi(2t/T_b)$.

9.2-7 Determine $S_y(f)$ para a sinalização polar, caso $P(\mathbf{1}) = Q$ e $P(\mathbf{0}) = 1 - Q$.

9.2-8 Um ruído impulsional $x(t)$ pode ser modelado por uma sequência de impulsos unitários localizados em instantes aleatórios (Fig. E.9.2-8). Há uma média de α impulsos por segundo, e a localização de um impulso independe da localização de qualquer outro impulso. Mostre que $R_x(\tau) = \alpha \delta(\tau) + \alpha^2$.

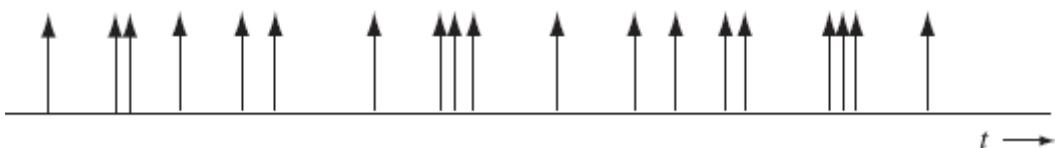


Figura E.9.2-8

9.2-9 Refaça o Exercício 9.2-8 para o caso em que os impulsos tenham igual probabilidade de serem positivos ou negativos.

- 9.2-10** Uma função de amostra de um processo aleatório $x(t)$ é representada na Fig. E.9.2-10. O sinal $x(t)$ sofre alterações bruscas de amplitude em instantes aleatórios. Há uma média de β mudanças de amplitude (ou chaveamentos) por segundo. A probabilidade de que não haja chaveamento de amplitude em τ segundos é dada por $P_0(\tau) = e^{-\beta\tau}$. Após um chaveamento, a amplitude independe da amplitude anterior. As amplitudes são aleatoriamente distribuídas, com uma PDF $p_x(x)$. Mostre que

$$R_x(\tau) = \overline{x^2} e^{-\beta|\tau|} \quad \text{e} \quad S_x(f) = \frac{2\beta\overline{x^2}}{\beta^2 + (2\pi f)^2}$$

Esse processo representa um modelo para ruído térmico.¹

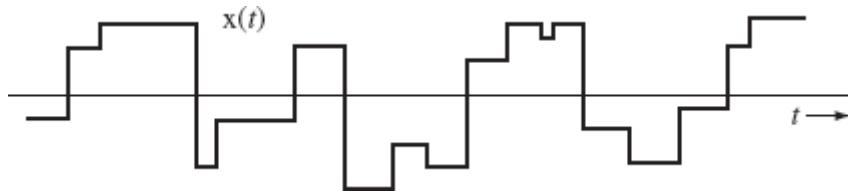


Figura E.9.2-10

- 9.3-1** Mostre que, para processos aleatórios reais, conjuntamente estacionários no sentido amplo $x(t)$ e $y(t)$,

$$|R_{xy}(\tau)| \leq [R_x(0)R_y(0)]^{1/2}$$

Sugestão: Para qualquer número real a , $\overline{(ax - y)^2} \geq 0$.

- 9.3-2** Se $x(t)$ e $y(t)$ forem dois processos aleatórios independentes, e dois novos processos $u(t)$ e $v(t)$ forem formados da seguinte maneira:

$$u(t) = 2x(t) - y(t) \quad v(t) = x(t) + 3y(t)$$

Determine $R_u(\tau)$, $R_v(\tau)$, $R_{uv}(\tau)$ e $R_{vu}(\tau)$ em termos de $R_x(\tau)$ e $R_y(\tau)$.

- 9.3-3** Dois processos aleatórios $x(t)$ e $y(t)$ são

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{e} \quad y(t) = B \sin(n\omega_0 t + n\varphi + \psi)$$

em que $n = \text{íntero} \neq 0$ e A , B , ψ e ω_0 são constantes, e φ é uma VA uniformemente distribuída no intervalo $(0, 2\pi)$. Mostre que os dois processos são incoerentes.

- 9.3-4** Um sinal de amostra é um processo aleatório periódico $x(t)$ representado na Fig. E.9.3-4. O atraso inicial b em que o primeiro pulso tem início é uma VA uniformemente distribuída no intervalo $(0, T_b)$.

- (a)** Mostre que o sinal de amostra pode ser escrito como

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos[n\omega_0(t - b) + \theta_n]$$

determinando, primeiro, sua série de Fourier trigonométrica quando $b = 0$.

- (b)** Mostre que

$$R_x(\tau) = C_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \cos n\omega_0 \tau \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

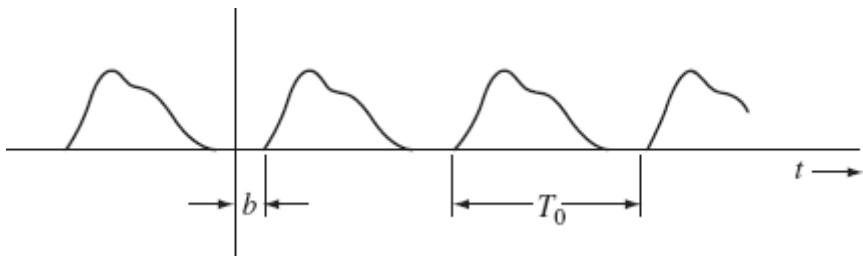


Figura E.9.3-4

9.4-1 Um simples circuito RC tem dois resistores R_1 e R_2 em paralelo (Fig. E.9.4-1a). Calcule o valor rms da tensão de ruído térmico v_o nos terminais do capacitor, de duas maneiras:

- (a) Considere os resistores R_1 e R_2 como resistores separados, com respectivas tensões de ruído térmico com PSD $2kTR_1$ e $2kTR_2$ (Fig. E.9.4-1b). Note que as duas fontes são independentes.
- (b) Considere a combinação de R_1 e R_2 em paralelo como um único resistor de valor $R_1R_2/(R_1 + R_2)$, com sua fonte de tensão de ruído térmico de PSD $2kTR_1R_2/(R_1 + R_2)$ (Fig. E.9.4.1c). Comente.

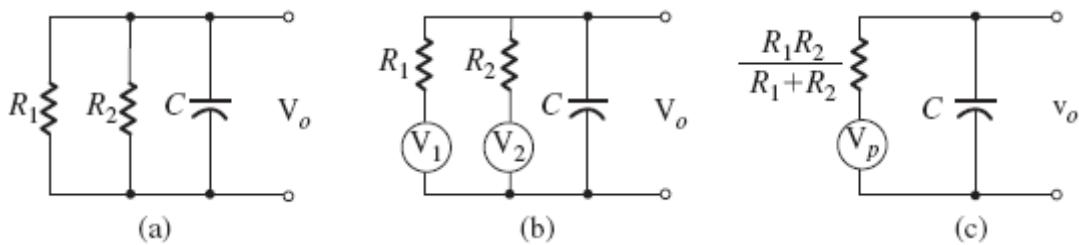


Figura E.9.4-1

9.4-2 Mostre que $R_{xy}(\tau)$, a função de correlação cruzada dos processos de entrada $x(t)$ e de saída $y(t)$ na Fig. 9.12, é

$$R_{xy}(\tau) = h(\tau) * R_x(\tau) \quad \text{e} \quad S_{xy}(f) = H(f)S_x(f)$$

A seguir, mostre que, para o ruído térmico $n(t)$ e a saída $v_o(t)$ na Fig. 9.13 (Exemplo 9.9),

$$S_{nv_o}(f) = \frac{2kTR}{1 + j2\pi fRC} \quad \text{e} \quad R_{nv_o}(\tau) = \frac{2kT}{C} e^{-\tau/RC} u(\tau)$$

9.4-3 Um ruído de disparo (ou ruído balístico) é similar ao ruído impulsional descrito no Exercício 9.2-8, exceto que, em vez de impulsos aleatórios, temos pulsos de largura finita. Se substituirmos cada impulso na Fig. E.9.2-8 por um pulso $h(t)$ cuja largura seja grande em comparação com $1/\alpha$, de modo que haja considerável sobreposição de pulso, obtemos ruído de disparo. O resultado da sobreposição de pulsos é que o sinal tem a aparência de um sinal aleatório contínuo, como mostrado na Fig. E.9.4-3.

- (a) Calcule a função de autocorrelação e a PSD desse processo aleatório.

Sugestão: Ruído de disparo resulta da passagem de ruído impulsional por um filtro adequado. Primeiro, calcule a PSD do ruído de disparo e, depois, obtenha a função de autocorrelação da PSD. As respostas serão em termos de α , $h(t)$ ou $H(f)$.

- (b) O ruído de disparo em transistores pode ser modelado por

$$h(t) = \frac{q}{T} e^{-t/T} u(t)$$

em que q é a carga em um elétron e T , o tempo de trânsito do elétron. Determine a função de autocorrelação e a PSD do transistor e esboce seus gráficos.



Figura E.9.4-3

9.6-1 Um processo de sinal $m(t)$ é misturado a um ruído de canal $n(t)$. As respectivas PSD são

$$S_m(f) = \frac{6}{9 + (2\pi f)^2} \quad \text{e} \quad S_n(f) = 6$$

- (a) Determine o filtro ótimo de Wiener-Hopf.
- (b) Esboce o gráfico da resposta ao impulso unitário.
- (c) Estime o valor do atraso necessário para que o filtro seja aproximadamente realizável (causal).
- (d) Calcule a potência de ruído na entrada e na saída do filtro.

9.6-2 Refaça o Exercício 9.6-1 se

$$S_m(f) = \frac{4}{4 + (2\pi f)^2} \quad \text{e} \quad S_n(f) = \frac{32}{64 + (2\pi f)^2}$$

9.7-1 Um sinal de mensagem $m(t)$ com

$$S_m(f) = \left[\frac{\alpha^2}{(2\pi f)^2 + \alpha^2} \right]^2 \quad (\alpha = 3000\pi)$$

é usado no esquema DSB-SC para modular uma portadora de 100 kHz. Admita um canal ideal com $H_c(f) = 10^{-3}$ e PSD de ruído de canal $S_n(f) = 2 \times 10^{-9}$. A potência transmitida deve ser 1 kW e $G = 10^{-2}$.

- (a) Determine as funções de transferência de filtros ótimos de pré-ênfase e de ênfase.
- (b) Determine a potência do sinal de saída, a potência de ruído e a SNR de saída.
- (c) Determine γ na saída do demodulador.

9.7-2 Refaça o Exercício 9.7-1 para o caso SSB (USB).

9.7-3 Foi mostrado no texto que, para um sinal em banda-base $m(t)$ limitado em banda com PSD uniforme, PM e FM têm desempenhos idênticos no que diz respeito à SNR. Para $m(t)$ desse tipo, mostre que, em modulação em ângulo, os filtros PDE ótimos podem melhorar a SNR de saída por um fator de apenas 4/3 (ou 1,3 dB). Determine as funções de transferência dos filtros PDE ótimos.

9.8-1 Um processo branco de PSD $N/2$ é transmitido por um filtro passa-faixa $H(f)$ (Fig. E9.8-1). Represente a saída do filtro $n(t)$ em termos de componentes em quadratura e determine $S_{n_c}(f)$, $S_{n_s}(f)$, n_c^2 , n_s^2 e n^2 quando a frequência central usada nessa representação for 100 kHz (isto é, $f_c = 100 \times 10^3$).

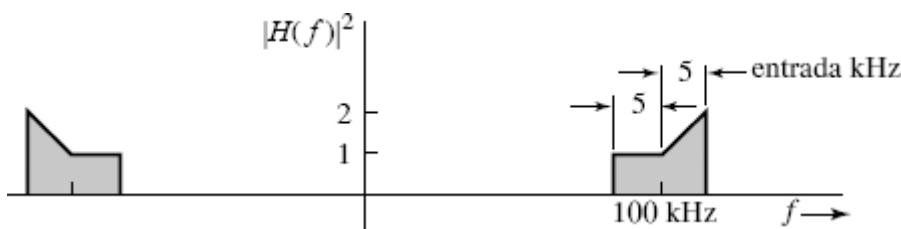


Figura E.9.8-1

- 9.8-2** Refaça o Exercício 9.8-1 quando a frequência central f_c usada na representação não for a verdadeira frequência central. Considere três casos: **(a)** $f_c = 105$ kHz; **(b)** $f_c = 95$ kHz; **(c)** $f_c = 120$ kHz.
- 9.8-3** Um processo aleatório $x(t)$ com a PSD mostrada na Fig. E.9.8-3a é aplicado a um filtro passa-faixa (Fig. E.9.8-3b). Determine a PSD e os valores quadráticos médios das componentes em quadratura do processo de saída. Admita que a frequência central na representação seja 0,5 MHz.

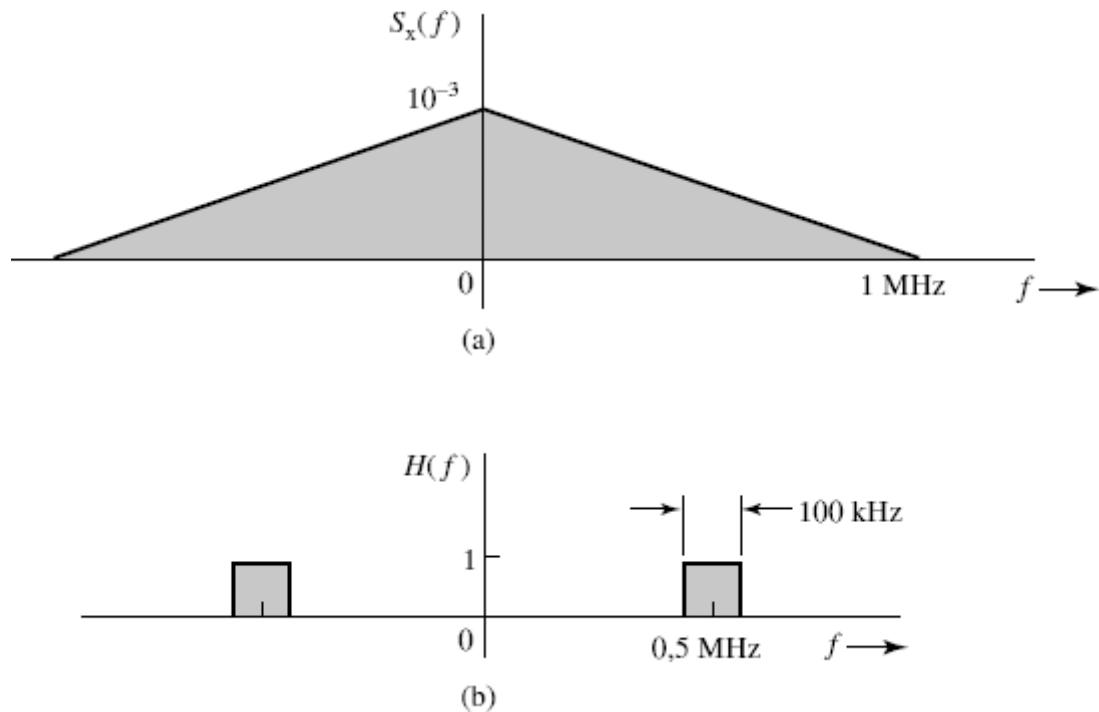


Figura E.9.8-3

* Na verdade, para ser qualificada como processo aleatório, x poderia ser função de uma variável prática qualquer, como a distância. Um processo aleatório também pode ser função de mais de uma variável.

* Para um processo aleatório complexo $x(t)$, a função de autocorrelação é definida como

$$R_x(t_1, t_2) = \overline{x^*(t_1)x(t_2)}$$

* Aqui, uma função de amostra $x(t, \zeta_i)$ é representada por $x(t)$ por conveniência.

* Como veremos em breve, para que a PSD exista, o processo deve ser estacionário (pelo menos no sentido amplo). Processos estacionários são sinais de potência, pois suas estatísticas não variam com o tempo.

* A operação de média de ensemble também é uma operação de integração. Assim, a permuta de integração e média de ensemble é equivalente à troca da ordem de integração.

* Pode ser mostrado que a Eq. (9.15) também vale para processos aleatórios complexos, para os quais definimos $R_x(\tau) = \overline{x^*(t)x(t+\tau)}$.

* Obteríamos o mesmo resultado com $\phi(t) = m(t) \operatorname{sen}(\omega_c t + \Theta)$.

* Se $\alpha = 0$, o processo pode ser representado como $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k p(t - kT_b)$. Nesse caso, $\overline{y(t)} = \overline{a_k} \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(t - kT_b)$ não é constante, mas periódico, com período T_b . Do mesmo modo, podemos mostrar que a função de autocorrelação é periódica, com o mesmo período T_b . Esse é um exemplo de um processo **cicloestacionário** ou periodicamente estacionário (um processo cujas estatísticas são invariantes sob uma translação da origem do tempo por múltiplos inteiros de uma constante T_b). Processos cicloestacionários, como visto aqui, claramente não são estacionários no sentido amplo. Todavia, podem ser feitos estacionários no sentido amplo com uma pequena modificação: a adição da VA α à expressão de $y(t)$, como nesse exemplo.

** Usando exatamente a mesma abordagem empregada na dedução da Eq. (9.28), podemos mostrar que $\overline{y(t)} = (\overline{a_k}/T_b) \int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt$.

* O trem de impulsos na Fig. 3.23a é $\delta_{T_b}(t)$ e pode ser expresso como $\delta_{T_b}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_b)$. E, ainda, $\delta(t - nT_b) \Leftrightarrow e^{-jn2\pi f T_b}$. Logo, a transformada de Fourier desse trem de impulsos é $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn2\pi f T_b}$. Contudo, calculamos uma forma alternativa para a transformada de Fourier desse trem na Eq. (3.11). Assim,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn2\pi f T_b} = \frac{1}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_b}\right)$$

* Para processos complexos, a função de correlação cruzada é definida como

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \overline{x^*(t_1)y(t_2)}$$

* A Eq. (9.37a) também é válida para processos complexos.

* Neste desenvolvimento, intercambiamos as operações de cálculo da média e integração. Como o cálculo da média é, no fundo, uma operação de integração, o que fazemos é trocar a ordem das integrações, assumindo que tal mudança seja permitida.

* Na verdade, a potência transmitida é mantida constante com uma pequena atenuação do sinal pré-enfatizado.

10 ANÁLISE DE DESEMPENHO DE SISTEMAS DE COMUNICAÇÕES DIGITAIS

Em comunicação analógica, o objetivo do usuário consiste em alcançar alta fidelidade na reprodução da forma de onda. Assim, o critério apropriado de avaliação de desempenho é a relação sinal-ruído de saída. A escolha desse critério indica que a razão sinal-ruído reflete a qualidade da mensagem e está relacionada à capacidade de um ouvinte interpretar uma mensagem.

Em sistemas de comunicação digital, a entrada do transmissor é escolhida de um conjunto finito de símbolos possíveis. O objetivo no receptor não é a reprodução fiel da forma de onda que transporta o símbolo; o receptor visa à identificação precisa, dentre o conjunto de símbolos possíveis, do símbolo específico que foi transmitido. Como no transmissor, cada símbolo é representado por uma dada forma de onda, o objetivo é, a partir do sinal ruidoso recebido, decidir que particular forma de onda foi transmitida originalmente. Assim, para um sistema de comunicação digital, a apropriada figura de mérito é a probabilidade de erro nessa decisão no receptor. Em especial, a probabilidade de erro de bit, também conhecida como taxa de erro de bit (BER – *bit error rate*), é uma medida direta da qualidade do sistema de comunicação. A BER não é apenas importante para fontes de sinais digitais, mas também é diretamente relacionada à qualidade de reprodução de sinais para fontes de sinais analógicos.

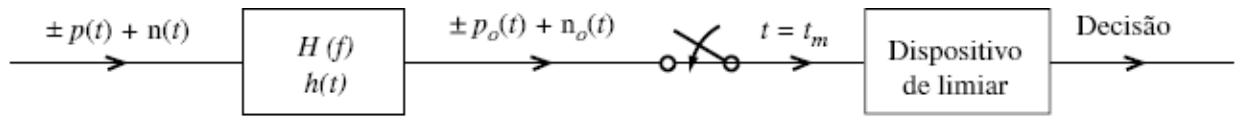
Neste capítulo, apresentamos dois importantes aspectos na análise de desempenho de sistemas de comunicação digital. O primeiro foca a análise de erro de vários receptores de decisão binária. Aqui, o objetivo é que estudantes aprendam como aplicar as ferramentas básicas da teoria de probabilidade e de processos aleatórios para a análise de desempenho da BER. Nossa segundo foco é a ilustração detalhada da dedução de *receptores de detecção ótima* para sistemas de comunicação digital genéricos, de modo que a BER no receptor possa ser minimizada.

10.1 DETECTOR LINEAR ÓTIMO PARA SINALIZAÇÃO POLAR BINÁRIA

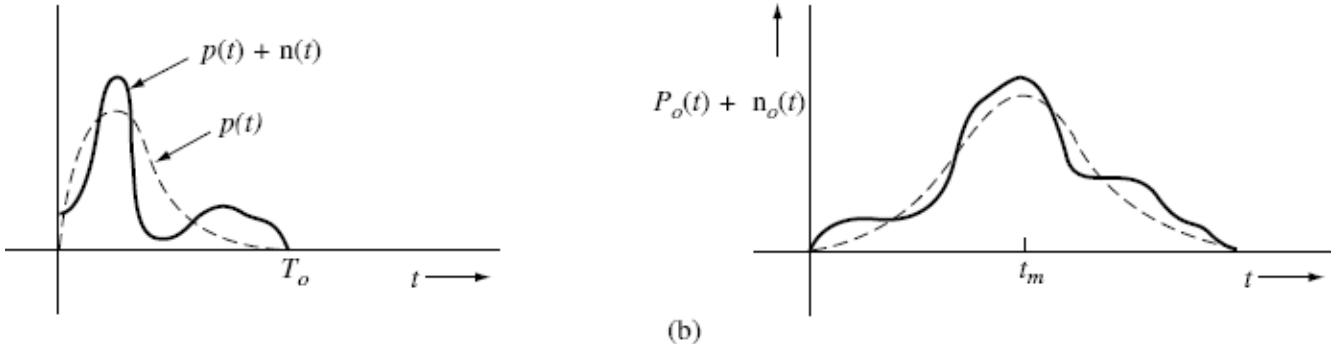
Em sistemas de comunicação digital, a informação é transmitida como **0** ou **1** a cada intervalo de tempo T_o . Consideremos, inicialmente, o sistema de sinalização polar da Fig. 10.1a, em que os bits **1** e **0** do sinal-fonte são representados por $\pm p(t)$, respectivamente. Após passagem por um canal sem distorção, mas ruidoso, a forma de onda do sinal recebido é

$$y(t) = \pm p(t) + n(t) \quad 0 \leq t \leq T_0 \quad (10.1)$$

em que $n(t)$ é um ruído de canal gaussiano.



(a)



(b)

Figura 10.1 Sinalização polar típica e receptor linear.

10.1.1 Limiar de Detecção Binária

Dada a forma de onda recebida da Eq. (10.1), o receptor binário deve decidir se a transmissão original representava um **1** ou um **0**. Assim, o sinal recebido $y(t)$ deve ser processado para produzir uma variável de decisão para cada símbolo. O receptor linear para sinalização binária, como ilustrado na Fig. 10.1a, tem uma arquitetura genérica que pode ser ótima (a ser mostrada posteriormente, na Seção 10.6). Dado o filtro receptor $H(f)$ ou $h(t)$, seu sinal de saída para $0 \leq t \leq T_o$ é simplesmente

$$y(t) = \underbrace{\pm p(t) * h(t)}_{p_o(t)} + \underbrace{n(t) * h(t)}_{n_o(t)} = \pm p_o(t) + n_o(t) \quad (10.2)$$

A variável de decisão para esse receptor binário linear é a amostra da saída do filtro receptor em $t = t_m$:

$$r(t_m) = \pm p_o(t_m) + n_o(t_m) \quad (10.3)$$

Com base nas propriedades de variáveis gaussianas discutidas na Seção 8.6,

$$n_o(t) = \int_0^t n(\tau)h(t-\tau) d\tau$$

é gaussiana com média zero, desde que $n(t)$ seja um ruído gaussiano de média zero. Se definirmos

$$A_p = p_o(t_m) \quad (10.4a)$$

$$\sigma_n^2 = E\{n_o(t_m)^2\} \quad (10.4b)$$

esse problema de decisão binária se torna exatamente igual ao problema de decisão de limiar do Exemplo 8.16. Mostramos no Exemplo 8.16 que, se os dados binários tiverem igual probabilidade de serem **0** ou **1**, a decisão de limiar ótima é

$$\text{dec}\{r(t_m)\} = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } r(t_m) \geq 0 \\ \mathbf{0} & \text{se } r(t_m) < 0 \end{cases} \quad (10.5a)$$

enquanto a probabilidade de erro (de bit) é

$$P_e = Q(\rho) \quad (10.5b)$$

com

$$\rho = \frac{A_p}{\sigma_n} \quad (10.5c)$$

Para minimizar P_e , devemos maximizar ρ , pois $Q(\rho)$ decai monotonamente com ρ .

10.1.2 Filtro Receptor Ótimo – Filtro Casado

Consideremos que o pulso recebido $p(t)$ seja limitado no tempo a T_o (Fig. 10.1). Aqui, manteremos a discussão tão geral quanto possível. Para minimizar a BER ou P_e , devemos determinar o melhor filtro receptor $H(f)$ e o correspondente instante de amostragem t_m , de modo que $Q(\rho)$ seja minimizado. Em outras palavras, devemos buscar um filtro com uma função $H(f)$ de transferência que maximize

$$\rho^2 = \frac{p_o^2(t_m)}{\sigma_n^2} \quad (10.6)$$

que, coincidentemente, também é a relação sinal-ruído no instante de tempo $t = t_m$.

Primeiro, denotemos a transformada de Fourier de $p(t)$ por $P(f)$ e a PSD do ruído de canal $n(t)$ por $S_n(f)$. Determinemos, então, o filtro receptor ótimo no domínio da frequência. Iniciando com

$$\begin{aligned} p_o(t) &= \mathcal{F}^{-1}[P(f)H(f)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P(f)H(f)e^{j2\pi ft} df \end{aligned}$$

temos o valor da amostra em $t = t_m$

$$p_o(t_m) = \int_{-\infty}^{\infty} P(f)H(f)e^{j2\pi ft_m} df \quad (10.7)$$

O ruído filtrado tem média zero

$$\overline{n_o(t)} = \overline{\int_0^t n(\tau)h(t-\tau) d\tau} = \int_0^t \overline{n(\tau)}h(t-\tau) d\tau = 0$$

e sua variância é dada por

$$\sigma_n^2 = \overline{n_o^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f)|H(f)|^2 df \quad (10.8)$$

Portanto, no domínio da frequência, a relação sinal-ruído é dada por

$$\rho^2 = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f)P(f)e^{j2\pi ft_m} df \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} S_n(f)|H(f)|^2 df} \quad (10.9)$$

A desigualdade de Cauchy-Schwarz (Apêndice B) é uma ferramenta muito poderosa para a determinação do filtro ótimo $H(f)$. Definindo

$$X(f) = H(f)\sqrt{S_n(f)} \quad Y(f) = \frac{P(f)e^{j2\pi ft_m}}{\sqrt{S_n(f)}}$$

podemos aplicar a desigualdade de Cauchy-Schwarz ao numerador da Eq. (10.9), obtendo

$$\begin{aligned}
\rho^2 &= \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y(f) df \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df} \\
&\leq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|P(f)|^2}{S_n(f)} df
\end{aligned} \tag{10.10a}$$

A igualdade ocorre se e somente se $X(f) = k[Y(f)]^*$ ou

$$H(f)\sqrt{S_n(f)} = k \left[\frac{P(f)e^{j2\pi ft_m}}{\sqrt{S_n(f)}} \right]^* = \frac{kP(-f)e^{-j2\pi ft_m}}{\sqrt{S_n(f)}}$$

Com isso, a SNR é maximizada se e somente se

$$H(f) = k \frac{P(-f)e^{-j2\pi ft_m}}{S_n(f)} \tag{10.10b}$$

em que k é uma constante arbitrária. Esse filtro receptor ótimo é conhecido como **filtro casado**. Esse resultado ótimo afirma que o **melhor filtro** no receptor linear binário depende de vários fatores importantes: (1) a PSD de ruído $S_n(f)$, (2) o instante de amostragem t_m e (3) a forma do pulso $P(f)$. O resultado independe do ganho k no receptor, pois o mesmo ganho será aplicado ao sinal e ao ruído, sem afetar a SNR.

Para ruído de canal branco, $S_n(f) = N/2$, e a Eq. (10.10a) passa a

$$\rho^2 \leq \rho_{\max}^2 = \frac{2}{N} \int_{-\infty}^{\infty} |P(f)|^2 df = \frac{2E_p}{N} \tag{10.11a}$$

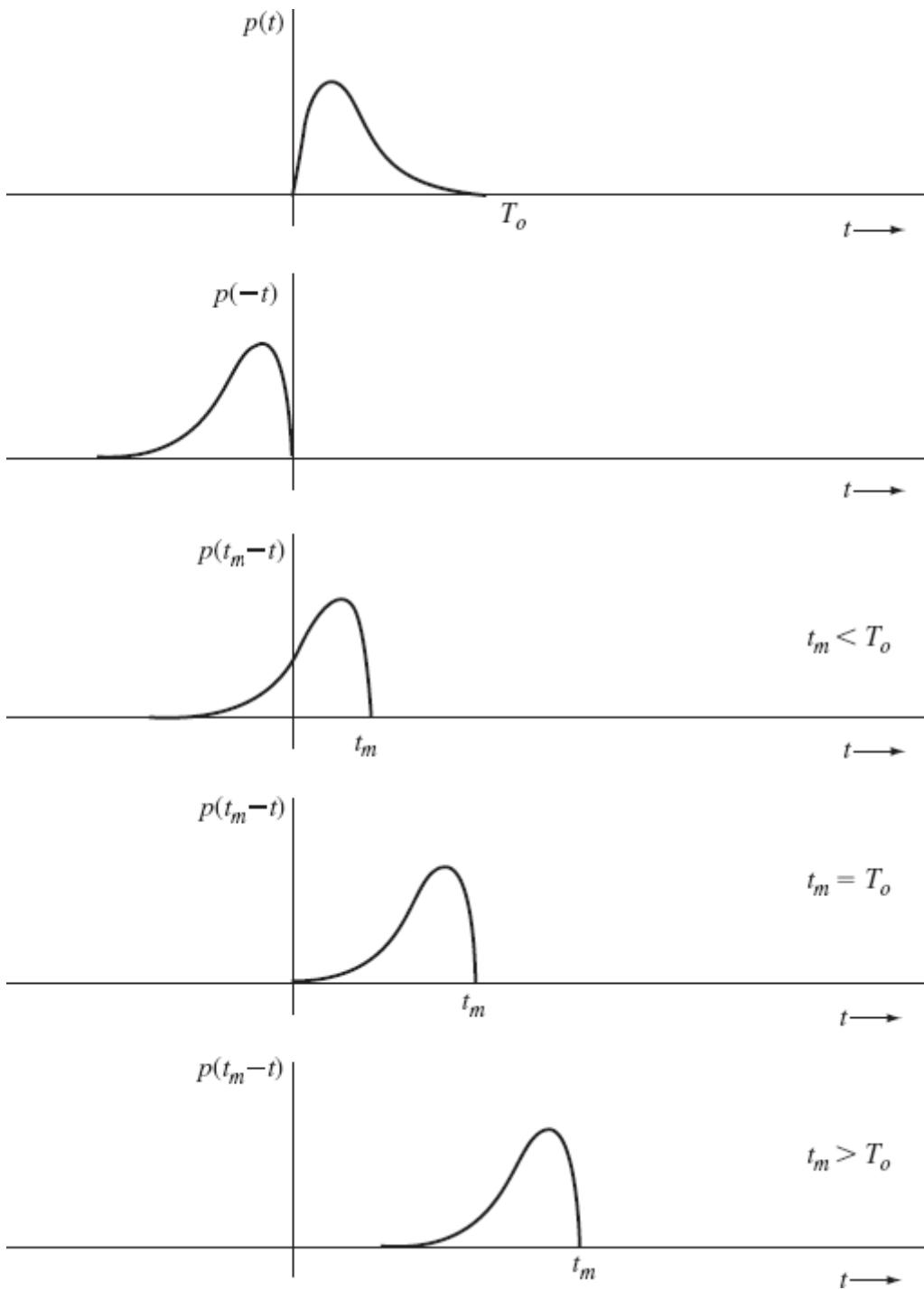


Figura 10.2 Escolha óptima do instante de amostragem.

em que E_p é a energia de $p(t)$; o filtro casado é simplesmente

$$H(f) = k' P(-f) e^{-j2\pi f t_m} \quad (10.11b)$$

em que $k' = 2k/N$ é uma constante arbitrária.

A resposta ao impulso unitário $h(t)$ do filtro ótimo é obtida da transformada de Fourier inversa

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[k' P(-f) e^{-j2\pi f t_m}]$$

Notemos que $p(-t) \iff P(-f)$ e $e^{-j2\pi f t_m}$ representa o atraso temporal de t_m segundos. Assim,

$$h(t) = k' p(t_m - t) \quad (10.11c)$$

A resposta $p(t_m - t)$ é o pulso de sinal $p(-t)$ atrasado por t_m . Três casos, $t_m < T_o$, $t_m = T_o$ e $t_m > T_o$, são mostrados na Fig. 10.2. O primeiro caso, $t_m < T_o$, produz uma resposta impulsional não causal, que é irrealizável.* Embora os outros dois casos produzam filtros fisicamente realizáveis, o último, $t_m > T_o$, atrasa o instante de tomada de decisão t_m desnecessariamente. O caso $t_m = T_o$ produz o mínimo atraso para a tomada de decisão com um filtro realizável. Em nossa discussão, admitiremos $t_m = T_o$, a menos que especifiquemos de outra forma.

Observemos que $p(t)$ e $h(t)$ têm largura de T_o segundos. Portanto, $p_o(t)$, que é uma convolução de $p(t)$ e $h(t)$, tem largura de $2T_o$ segundos e pico que ocorre em $t = T_o$, em que a amostra de decisão é colhida. Como $P_o(f) = P(f)H(f) = k'|P(f)|^2 e^{-j2\pi fT_o}$, $p_o(t)$ é simétrica em relação a $t = T_o$ **.

Como o ganho k' não afeta a SNR ρ , escolhemos $k' = 1$. Isso resulta no seguinte filtro casado sob ruído branco

$$h(t) = p(T_o - t) \quad (10.12a)$$

ou

$$H(f) = P(-f)e^{-j2\pi fT_o} \quad (10.12b)$$

para o qual a relação sinal-ruído é máxima no instante de tomada de decisão $t = T_o$.

O filtro casado é ótimo no sentido de maximizar a relação sinal-ruído no instante de tomada de decisão. Embora seja razoável supor que a maximização dessa particular relação sinal-ruído minimizará a probabilidade de erro de detecção, não provamos que a estrutura original do receptor linear com detecção de limiar (amostrar e decidir) é a estrutura ótima. Mais adiante (Seção 10.6), mostraremos a otimalidade do receptor de filtro casado sob ruído gaussiano branco.

Dado o filtro casado sob ruído gaussiano branco, o receptor de filtro casado leva a ρ_{\max} da Eq. (10.11a), assim como à mínima BER

$$P_e = Q(\rho_{\max}) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_p}{N}}\right) \quad (10.13)$$

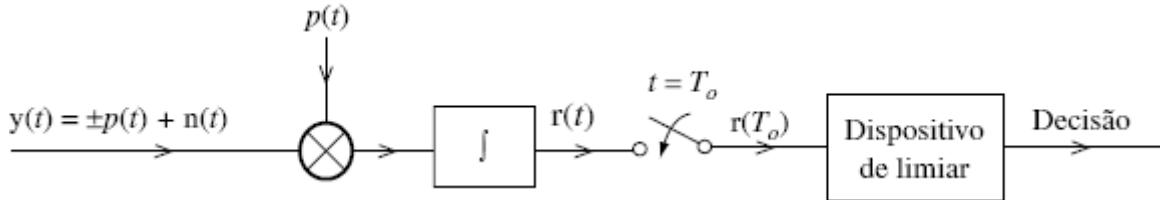


Figura 10.3 Detector de correlação.

A Eq. (10.13) é notável. Essa equação mostra que, no que diz respeito ao desempenho do sistema, quando é usado o receptor de filtro casado, várias formas de onda utilizadas para $p(t)$ são equivalentes, desde que tenham a mesma energia

$$E_p = \int_{-\infty}^{\infty} |P(f)|^2 df = \int_0^{T_o} |p(t)|^2 dt$$

O filtro casado também pode ser implementado pelo arranjo alternativo mostrado na Fig. 10.3. Se a entrada do filtro casado for $y(t)$, a saída $r(t)$ será dada por

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(x)h(t-x) dx \quad (10.14)$$

em que $h(t) = p(T_o - t)$ e

$$h(t-x) = p[T_o - (t-x)] = p(x + T_o - t) \quad (10.15)$$

Logo,

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(x)p(x + T_o - t) dx \quad (10.16a)$$

No instante de tomada de decisão $t = T_o$, temos

$$r(T_o) = \int_{-\infty}^{\infty} y(x)p(x) dx \quad (10.16b)$$

Como admitimos que a entrada $y(x)$ tem início em $x = 0$ e $p(x) = 0$ para $x > T_o$, temos a variável de decisão

$$r(T_o) = \int_0^{T_o} y(x)p(x) dx \quad (10.16c)$$

Podemos implementar as Eq. (10.16) como mostrado na Fig. 10.3. Esse tipo de arranjo, conhecido como receptor de correlação, é equivalente ao receptor de filtro casado.

O lado direito da Eq. (10.16c) é a correlação cruzada do pulso recebido com $p(t)$. Recordemos que a correlação, basicamente, mede a similaridade entre sinais (Seção 2.7). Assim, o detector ótimo mede a similaridade entre o sinal recebido e o pulso $p(t)$. Como base nesta medida de similaridade, o sinal da correlação decide se $p(t)$ ou $-p(t)$ foi transmitido.

Até aqui, discutimos a sinalização polar, que usa pulsos básicos $p(t)$ de sinais opostos. Em geral, em comunicação binária, usamos dois pulsos distintos $p(t)$ e $q(t)$ para representar os dois símbolos. O receptor ótimo para esse caso será discutido a seguir.

10.2 SINALIZAÇÃO BINÁRIA GENÉRICA

10.2.1 Análise de Receptor Linear Ótimo

No esquema binário em que símbolos são transmitidos a cada T_b segundos, o esquema de transmissão mais geral pode usar dois pulsos $p(t)$ e $q(t)$ para transmitir **1** e **0**. A estrutura do receptor linear ótimo em consideração é mostrada na Fig. 10.4a. O sinal recebido é

$$y(t) = \begin{cases} p(t) + n(t) & 0 \leq t \leq T_b \\ q(t) + n(t) & 0 \leq t \leq T_b \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{para símbolo de dado } \mathbf{1} \\ \text{para símbolo de dado } \mathbf{0} \end{array}$$

O sinal que chega, $y(t)$, é transmitido por um filtro $H(f)$, e a saída $r(t)$ é amostrada em T_b . A decisão se **0** ou **1** estava presente na entrada depende se $r(T_b)$ é ou não menor do que a_o , em que a_o é o limiar ótimo.

Sejam $p_o(t)$ e $q_o(t)$ as respostas de $H(f)$ às entradas $p(t)$ e $q(t)$, respectivamente. Da Eq. (10.7), temos

$$p_o(T_b) = \int_{-\infty}^{\infty} P(f)H(f)e^{j2\pi fT_b} df \quad (10.17a)$$

$$q_o(T_b) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(f)H(f)e^{j2\pi fT_b} df \quad (10.17b)$$

e σ_n^2 , a variância ou potência do ruído na saída do filtro, é

$$\sigma_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f)|H(f)|^2 df \quad (10.17c)$$

Sem perda de generalidade, consideremos $P_o(T_b) > P_o(T_b)$. Denotemos o ruído de saída em T_b por n . Assim, a saída do amostrador será $r(T_b) = q_o(T_b) + n$ ou $p_o(T_b) + n$, dependendo se $m = \mathbf{0}$ ou $m = \mathbf{1}$ for recebido. Portanto, r é uma VA gaussiana de variância σ_n^2 com média $q_o(T_b)$ ou $p_o(T_b)$, dependendo se $m = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{1}$. Logo, as PDFs condicionais da saída amostrada $r(T_b)$ são

$$p_{r|m}(r|\mathbf{0}) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{[r - q_o(T_b)]^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$$p_{r|m}(r|\mathbf{1}) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{[r - p_o(T_b)]^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

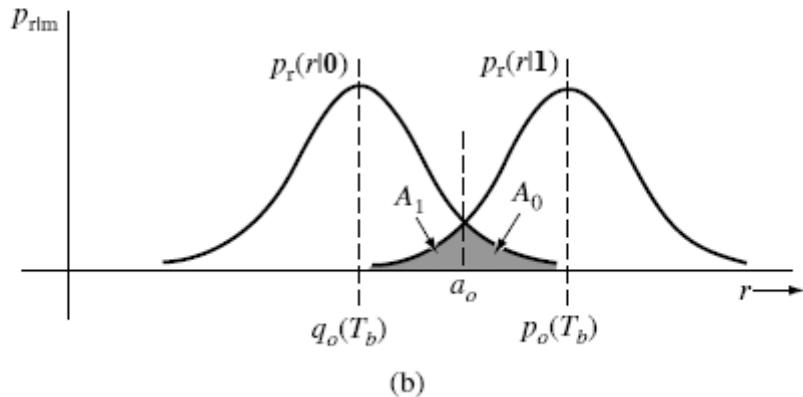
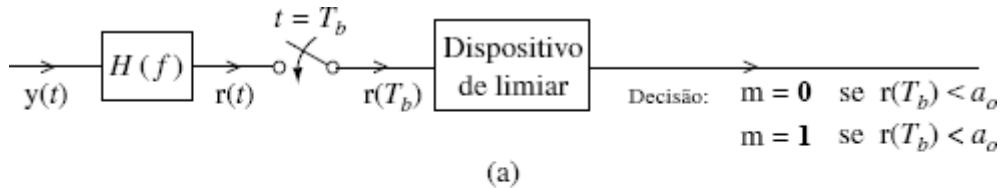


Figura 10.4 Detecção de limiar binária óptima.

Limiar Ótimo

As duas PDFs são ilustradas na Fig. 10.4b. Se a_o for o limiar ótimo para detecção, a regra de decisão será

$$m = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{se } r < a_o \\ \mathbf{1} & \text{se } r > a_o \end{cases}$$

A probabilidade de erro condicional $P(\epsilon|m=0)$ é a probabilidade de tomar decisão errada quando $m = \mathbf{0}$. Isso é simplesmente a área A_0 sob $p_{r|m}(r|\mathbf{0})$ de a_o a ∞ . Do mesmo modo, $P(\epsilon|m=1)$ é a área A_1 sob $p_{r|m}(r|\mathbf{1})$ de $-\infty$ a a_o (Fig. 10.4b), e

$$\begin{aligned} P_e &= \sum_i P(\epsilon|m_i)P(m_i) = \frac{1}{2}(A_0 + A_1) \\ &= \frac{1}{2} \left[Q\left(\frac{a_o - q_o(T_o)}{\sigma_n}\right) + Q\left(\frac{p_o(T_o) - a_o}{\sigma_n}\right) \right] \end{aligned} \quad (10.18)$$

admitindo $P_m(0) = P_m(1) = 0.5$. Da Fig. 10.4b, podemos ver que a soma $A_0 + A_1$ das áreas sombreadas é minimizada com a escolha de a_o na interseção das duas PDFs. Esse limiar ótimo também pode ser determinado diretamente forçando, na Eq. (10.18), que derivada de P_e em relação a a_o seja zero, de modo que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_e}{\partial a_o} &= \frac{1}{2} \left[Q' \left(\frac{a_o - q_o(T_o)}{\sigma_n} \right) \frac{1}{\sigma_n} - Q' \left(\frac{p_o(T_o) - a_o}{\sigma_n} \right) \frac{1}{\sigma_n} \right] \\
&= \frac{1}{2\sigma_n} \left[\frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{[a_o - q_o(T_b)]^2}{2\sigma_n^2} \right] - \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{[p_o(T_b) - a_o]^2}{2\sigma_n^2} \right) \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Assim, o a_o ótimo é

$$a_o = \frac{p_o(T_b) + q_o(T_b)}{2} \quad (10.19a)$$

e o valor correspondente de P_e é

$$\begin{aligned}
P_e &= P(\epsilon | \mathbf{0}) = P(\epsilon | \mathbf{1}) \\
&= \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \int_{a_o}^{\infty} \exp \left(-\frac{[r - q_o(T_b)]^2}{2\sigma_n^2} \right) dr \\
&= Q \left[\frac{a_o - q_o(T_b)}{\sigma_n} \right] \\
&= Q \left[\frac{p_o(T_b) - q_o(T_b)}{2\sigma_n} \right] \quad (10.19b)
\end{aligned}$$

$$= Q \left(\frac{\beta}{2} \right) \quad (10.19c)$$

em que definimos

$$\beta = \frac{p_o(T_b) - q_o(T_b)}{\sigma_n} \quad (10.20)$$

Substituindo a Eq. (10.17) na Eq. (10.20), obtemos

$$\beta^2 = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} [P(f) - Q(f)] H(f) e^{j2\pi f T_b} df \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) |H(f)|^2 df}$$

Essa equação tem a mesma forma das Eq. (10.9) com $P(f)$ substituído por $P(f) - Q(f)$. Portanto, a desigualdade de Cauchy-Schwarz pode ser aplicada novamente para mostrar

$$\beta_{\max}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|P(f) - Q(f)|^2}{S_n(f)} df \quad (10.21a)$$

e o filtro ótimo $H(f)$ é dado por

$$H(f) = k \frac{[P(-f) - Q(-f)] e^{-j2\pi f T_b}}{S_n(f)} \quad (10.21b)$$

em que k é uma constante arbitrária.

Caso Especial de Ruído Gaussiano Branco

Para ruído branco, $S_n(f) = N/2$, de modo que o filtro ótimo é dado por *

$$H(f) = [P(-f) - Q(-f)]e^{-j2\pi fT_b} \quad (10.22a)$$

e

$$h(t) = p(T_b - t) - q(T_b - t) \quad (10.22b)$$

Esse é um filtro casado ao pulso $p(t) - q(t)$. O correspondente β é [Eq. (10.21a)]

$$\beta_{\max}^2 = \frac{2}{N} \int_{-\infty}^{\infty} |P(f) - Q(f)|^2 df \quad (10.23a)$$

$$= \frac{2}{N} \int_0^{T_b} [p(t) - q(t)]^2 dt \quad (10.23b)$$

$$= \frac{E_p + E_q - 2E_{pq}}{N/2} \quad (10.23c)$$

em que E_p e E_q são as energias de $p(t)$ e $q(t)$, respectivamente, e

$$E_{pq} = \int_0^{T_b} p(t)q(t) dt \quad (10.24)$$

Até aqui, usamos a notação P_e para denotar a probabilidade de erro. No caso binário, essa probabilidade de erro é a **probabilidade de erro de bit ou taxa de erro de bit (BER)**, e a denotaremos por P_b (em vez de P_e). Assim, das Eqs. (10.19c) e (10.23c),

$$P_b = Q\left(\frac{\beta_{\max}}{2}\right) \quad (10.25a)$$

$$= Q\left(\sqrt{\frac{E_p + E_q - 2E_{pq}}{2N}}\right) \quad (10.25b)$$

O limiar ótimo a_o é obtido com a substituição das Eqs. (10.17a, b) e (10.22a) na Eq. (10.19a) e o cálculo de (via substituição de variável)

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(f)Q(-f) df = \int_{-\infty}^{\infty} P(-f)Q(f) df = E_{pq} \quad (10.26)$$

Isso resulta em

$$a_o = \frac{1}{2}(E_p - E_q) \quad (10.27)$$

Na dedução do receptor binário ótimo, admitimos certa estrutura de receptor (o receptor de detecção por limiar na Fig. 10.4). Ainda não está claro se existe outra estrutura que possa ter desempenho melhor que o da estrutura na Fig. 10.4. Mostraremos mais adiante (Seção 10.6) que, para ruído gaussiano, o receptor deduzido aqui é, de fato, o ótimo. A Eq. (10.25b) fornece P_b para o receptor ótimo quando o ruído do canal é gaussiano branco. Para o caso de ruído não branco, P_b é obtida com a substituição de β_{\max} da Eq. (10.21a) na Eq. (10.25a).

Receptores Binários Ótimos Equivalentes

Para o receptor ótimo na Fig. 10.4a,

$$H(f) = P(-f)e^{-j2\pi fT_b} - Q(-f)e^{-j2\pi fT_b}$$

Esse filtro pode ser realizado como uma combinação paralela de dois filtros casados a $p(t)$ e $q(t)$, respectivamente, como mostrado na Fig. 10.5a. Outra forma equivalente é mostrada na Fig. 10.5b. Como o limiar é $(E_p - E_q)/2$, subtraímos $E_p/2$ e $E_q/2$, respectivamente, das saídas dos dois filtros casados. Isso equivale a deslocar o limiar para 0. No caso $E_p = E_q$, não é preciso subtrair $E_p/2$ e $E_q/2$ das duas saídas, e o receptor fica simplificado ao mostrado na Fig. 10.5c.

10.2.2 Análise de Desempenho de Sistemas Binários Genéricos

Nesta seção, aplicando as técnicas desenvolvidas na seção anterior para receptores binários genéricos, analisaremos o desempenho de vários sistemas de comunicação digital binária.

Sinalização Polar

Para o caso de sinalização polar, $q(t) = -p(t)$. Logo,

$$E_p = E_q \quad \text{e} \quad E_{pq} = - \int_{-\infty}^{\infty} p^2(t) dt = -E_p \quad (10.28)$$

A substituição desses resultados na Eq. (10.25b) fornece

$$P_b = Q \left(\sqrt{\frac{2E_p}{\mathcal{N}}} \right) \quad (10.29)$$

E, da Eq. (10.22b),

$$h(t) = 2p(T_b - t) \quad (10.30)$$

Recordemos que a multiplicação de $h(t)$ por qualquer constante amplifica o sinal e o ruído pelo mesmo fator, de modo que não afeta o desempenho. Por conveniência, multipliquemos $h(t)$ por 0,5 para obter

$$h(t) = p(T_b - t) \quad (10.31)$$

Da Eq. (10.27), o limiar a_o é

$$a_o = 0 \quad (10.32)$$

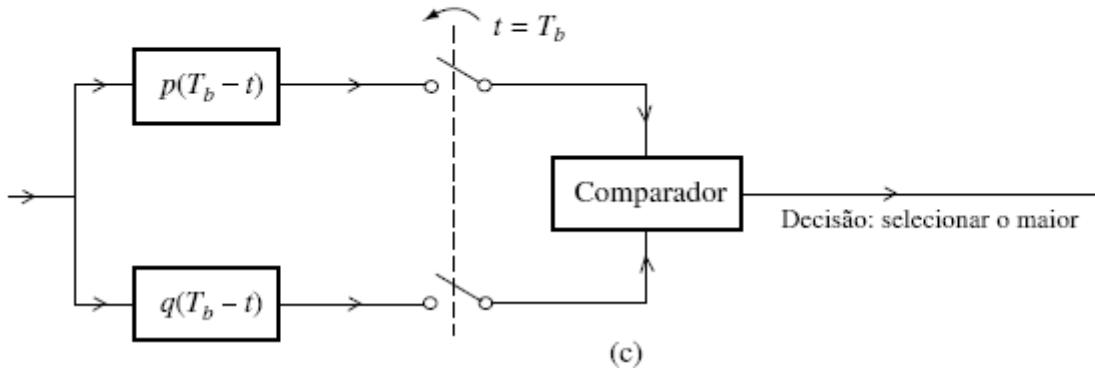
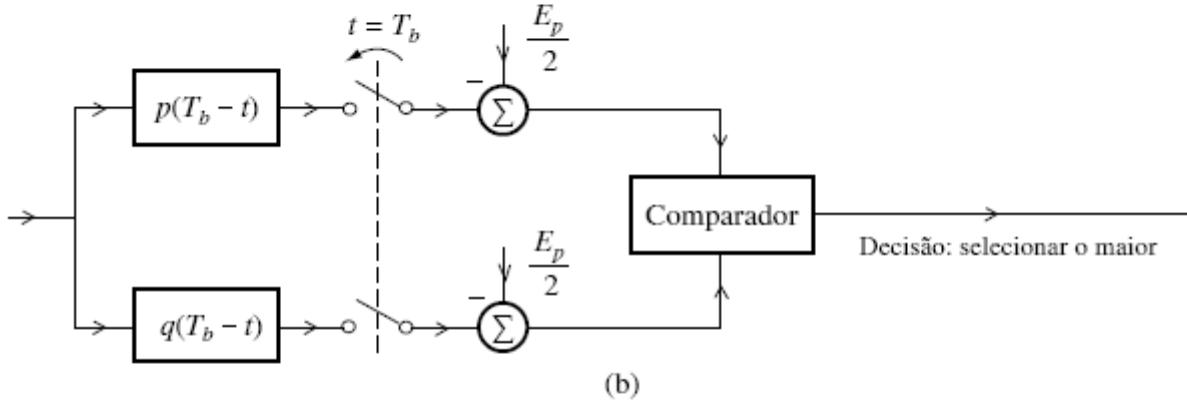
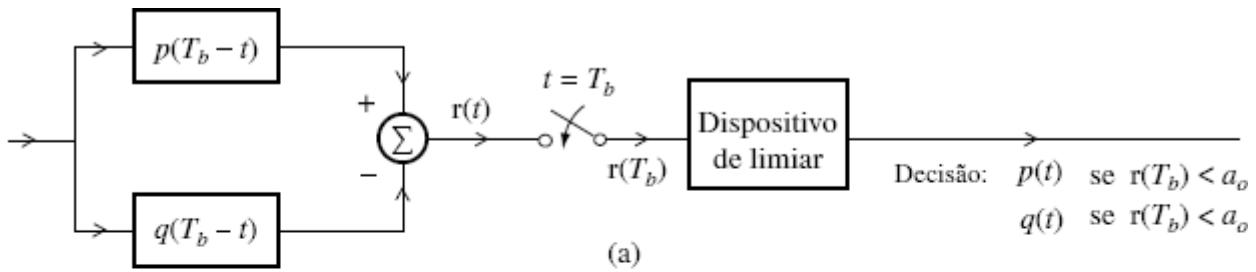


Figura 10.5 Realização do detector de limiar binário ótimo.

Portanto, para o caso polar, o receptor na Fig. 10.5a fica reduzido ao mostrado na Fig. 10.6a, com limiar 0. Esse filtro é equivalente ao da Fig. 10.3.

A probabilidade de erro pode ser expressa em termos de um parâmetro mais básico E_b , a energia por bit:

$$E_b = \text{energia por bit}$$

No caso polar, $E_p = E_q$ e a energia do bit E_b é

$$\begin{aligned} E_b &= E_p P(\mathbf{m} = \mathbf{1}) + E_q P(\mathbf{m} = \mathbf{0}) \\ &= E_p P(\mathbf{m} = \mathbf{1}) + E_p [1 - P(\mathbf{m} = \mathbf{1})] \\ &= E_p \end{aligned}$$

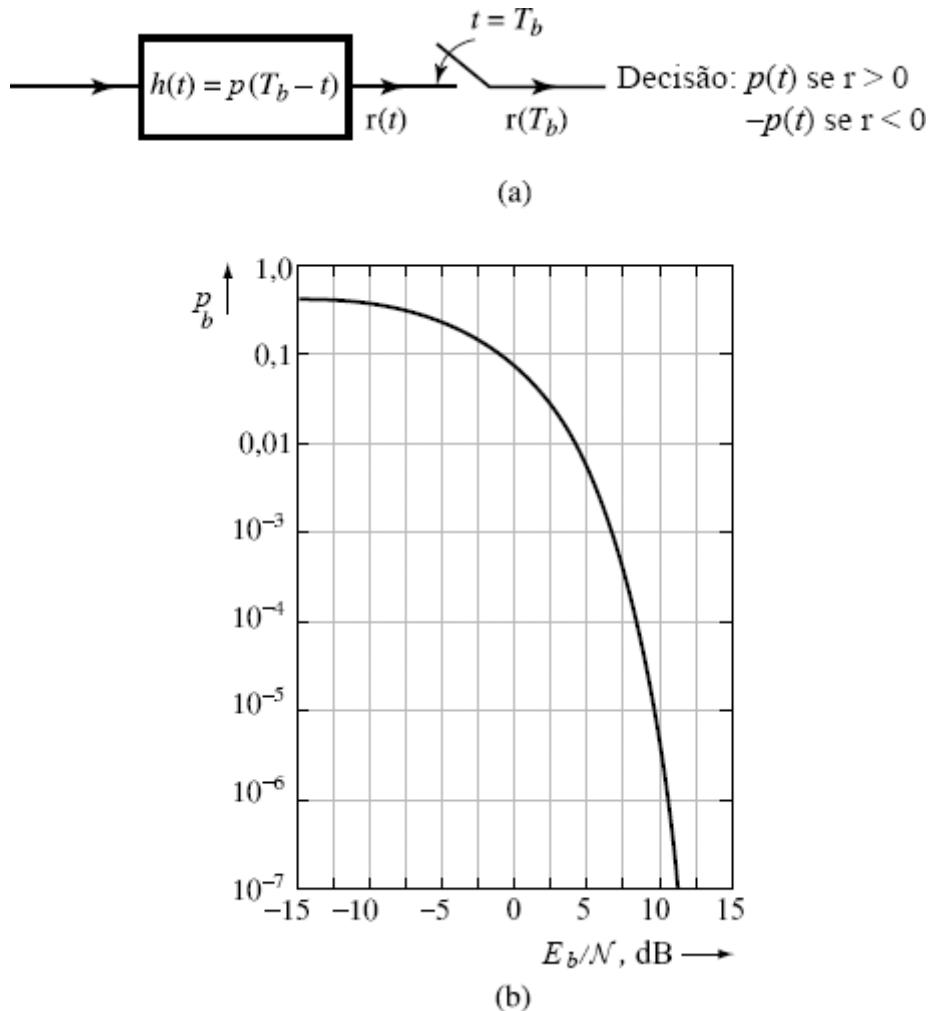
e da Eq. (10.29),

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N}}\right) \quad (10.33)$$

O parâmetro E_b/N é a energia por bit normalizada; veremos que, em comunicações digitais, esse é um parâmetro fundamental e funciona como uma figura de mérito.* Como a potência de sinal é igual a E_b vezes a taxa de bits, uma dada E_b equivale a uma

dada potência (para uma dada taxa de bit). Logo, a comparação entre sistemas para um dado valor de E_b equivale à comparação para uma dada potência de sinal.

Figura 10.6 (a) Limiar de decisão ótimo e (b) sua probabilidade de erro para sinalização polar.



A Fig. 10.6b mostra o gráfico de P_b em função de E_b/\mathcal{N} (em decibéis). A Eq. (10.33) indica que, para detecção de limiar ótima, o desempenho do sistema polar não depende da forma de onda do pulso, mas da energia do pulso.

Sinalização On-Off

No caso da sinalização on-off, $q(t) = 0$ e o receptor da Fig. 10.5a pode remover o filtro do ramo inferior de $q(T_b - t)$. Com base na Eq. (10.27), o limiar ótimo para o receptor de sinalização on-off é

$$a_o = E_p/2$$

A substituição de $q(t) = 0$ nas Eq. (10.24) e (10.25) leva a

$$E_q = 0, \quad E_{pq} = 0, \quad \text{e} \quad P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_p}{2\mathcal{N}}}\right) \quad (10.34)$$

Se os dois símbolos $m = 0$ e $m = 1$ tiverem igual probabilidade de ocorrência 0,5, a energia média do bit é dada por

$$E_b = \frac{E_p + E_q}{2} = \frac{E_p}{2}$$

Portanto, a BER pode ser escrita como

$$P_b = Q \left(\sqrt{\frac{E_b}{\mathcal{N}}} \right) \quad (10.35)$$

Uma comparação entre as Eqs. (10.35) e (10.33) mostra que a sinalização on-off requer *exatamente* duas vezes mais potência por bit (mais 3 dB de potência) para alcançar o mesmo desempenho (isto é, a mesma P_e) do que a sinalização polar.

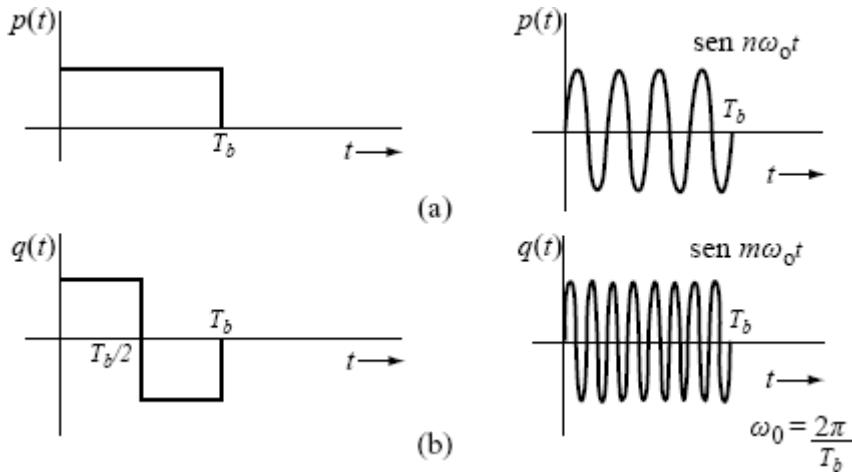


Figura 10.7 Exemplos de sinais ortogonais.

Sinalização Ortogonal

Na sinalização ortogonal, $p(t)$ e $q(t)$ são selecionados para serem ortogonais no intervalo $(0, T_b)$. Isso fornece

$$E_{pq} = \int_0^{T_b} p(t)q(t) dt = 0 \quad (10.36)$$

A sinalização on-off, na verdade, é um caso especial da sinalização ortogonal. Dois exemplos adicionais de pulsos ortogonais binários são mostrados na Fig. 10.7. Da Eq. (10.25),

$$P_b = Q \left(\sqrt{\frac{E_p + E_q}{2\mathcal{N}}} \right) \quad (10.37)$$

Supondo que **1** e **0** são equiprováveis.

$$E_b = \frac{E_p + E_q}{2}$$

e

$$P_b = Q \left(\sqrt{\frac{E_b}{\mathcal{N}}} \right) \quad (10.38)$$

Isso mostra que o desempenho de qualquer sinalização binária ortogonal é 3 dB inferior ao da sinalização polar. Isso, naturalmente, inclui a sinalização on-off.

10.3 RECEPTORES COERENTES PARA MODULAÇÕES DIGITAIS COM PORTADORA

As modulações por chaveamento por deslocamento de amplitude (ASK), chaveamento por deslocamento de frequência (FSK) e chaveamento por deslocamento de fase (PSK) foram introduzidas na Seção 7.9. A Fig. 10.8 usa um pulso em banda-base retangular para ilustrar os três esquemas binários. O pulso em banda-base pode ser formatado especialmente (por exemplo, um cosseno levantado) para eliminar interferência intersimbólica e permanecer em uma largura de banda finita.

BPSK

Em particular, a modulação PSK binária (BPSK) transmite símbolos binários via

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &: \sqrt{2}p'(t) \cos \omega_c t \\ \mathbf{0} &: -\sqrt{2}p'(t) \cos \omega_c t \end{aligned}$$

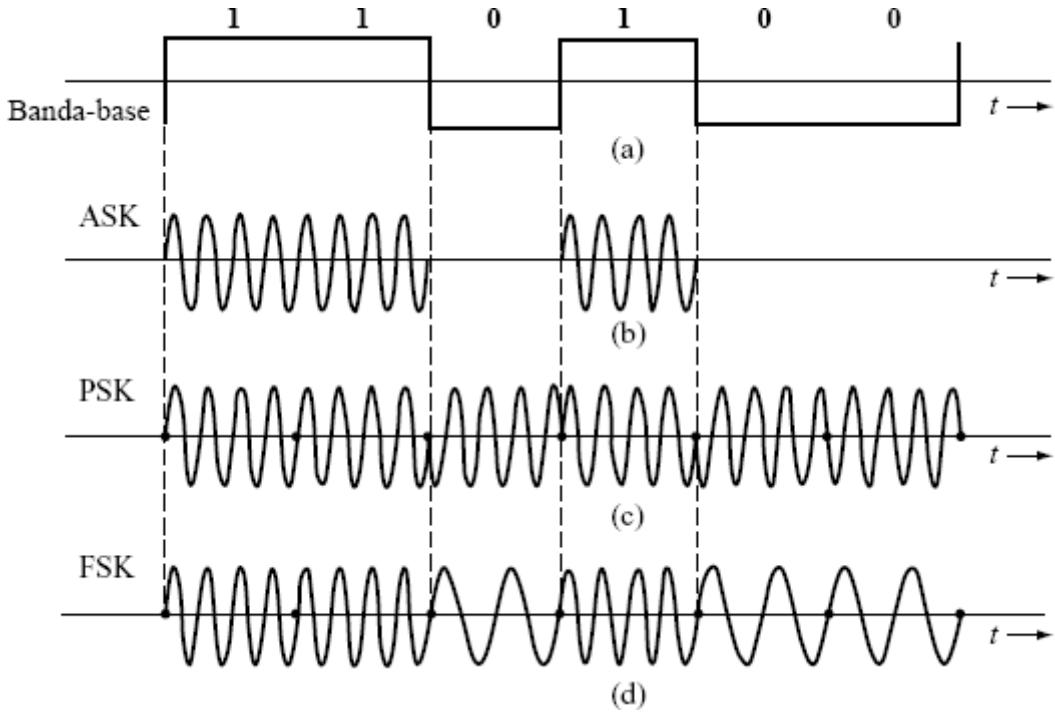


Figura 10.8 Formas de onda moduladas digitais.

Aqui, $p'(t)$ denota a forma do pulso em banda-base. Quando $p(t) = \sqrt{2}p'(t) \cos \omega_c t$, a forma de sinalização é exatamente a mesma da sinalização polar em banda-base. Assim, o receptor binário ótimo também toma a forma da Fig. 10.5a. Em consequência, para dados binários equiprováveis, o limiar ótimo é $a_o = 0$ e a mínima probabilidade de erro de detecção,

$$P_b = Q \left(\sqrt{\frac{2E_b}{N}} \right) = Q \left(\sqrt{\frac{2E_p}{N}} \right) \quad (10.39)$$

em que a energia do pulso é simplesmente

$$\begin{aligned} E_p &= \int_0^{T_b} p^2(t) dt \\ &= 2 \int_0^{T_b} [p'(t)]^2 \cos^2 \omega_c t dt \\ &= \int_0^{T_b} [p'(t)]^2 dt \\ &= E_{p'} \end{aligned}$$

Esse resultado requer uma frequência portadora suficientemente alta, de modo que $f_c T_b \gg 1$.

ASK Binária

Do mesmo modo, para modulação ASK binária, a transmissão é

$$\begin{aligned} \mathbf{1} : & \quad \sqrt{2}p'(t) \cos \omega_c t \\ \mathbf{0} : & \quad 0 \end{aligned}$$

Isso coincide com a sinalização on-off analisada anteriormente, de modo que o limiar ótimo deve ser $a_0 = E_p/2$, e a mínima BER para ASK binária é

$$P_b = Q \left(\sqrt{\frac{E_b}{N}} \right) \quad (10.40)$$

em que

$$E_b = \frac{E_p}{2} = \frac{E_{p'}}{2}$$

Uma comparação da Eq. (10.39) com a Eq. (10.40) mostra que, para o mesmo desempenho, a energia do pulso em ASK deve ser o dobro da energia em PSK. Portanto, ASK requer 3 dB a mais de potência do que PSK. Assim, na detecção (coerente) ótima, PSK sempre é preferível a ASK. Por essa razão, ASK não tem importância prática em detecção ótima. Todavia, ASK pode ser útil em sistemas não coerentes (por exemplo, comunicações ópticas). A detecção de envelope, por exemplo, pode ser aplicada a ASK. Em PSK, a informação reside na fase e, portanto, não pode ser detectada de modo não coerente.

Os pulsos em banda-base $p(t)$ usado em sistemas com portadora devem ser formatados para minimizar a ISI. A largura de banda dos sinais PSK ou ASK é o dobro da largura de banda dos correspondentes sinais em banda-base, devido à modulação.*

Filtro Casado Passa-Faixa como Receptor Coerente

Para as modulações PSK e ASK, o receptor de filtro casado ótimo da Fig. 10.5a pode ser implementado. Como mostrado na Fig. 10.9a, o pulso de RF recebido pode ser detectado por um filtro casado ao pulso de RF $p(t)$, seguido por um amostrador antes de um detector de limiar.

O mesmo receptor de filtro casado pode ser modificado como na Fig. 10.9b sem alterar as amostras de sinal para decisão. A implementação alternativa, primeiro, demodula coerentemente o sinal de RF que chega; para isto, o sinal é multiplicado por $\sqrt{2} \cos \omega_c t$. O produto é o pulso em banda-base ** $p'(t)$ mais um ruído em banda-base com PSD $N/2$ (Exemplo 9.13); esse produto é aplicado a um filtro casado ao pulso em banda-base $p'(t)$. Os dois esquemas de receptor são equivalentes e também podem ser implementados como receptores de correlação.

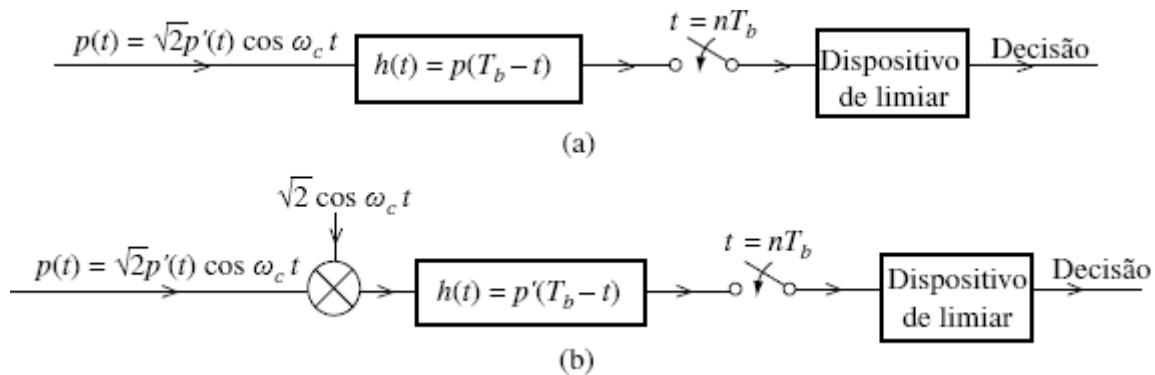


Figura 10.9 Detecção coerente de sinais modulados digitais.

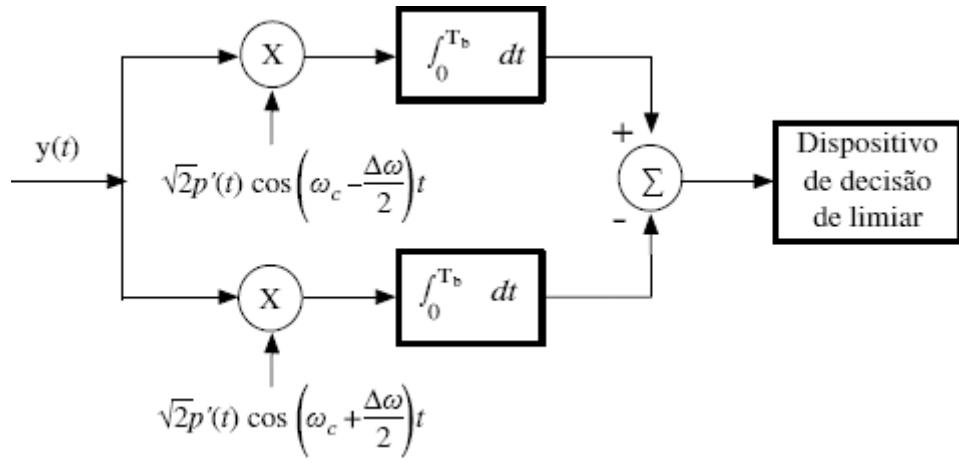


Figura 10.10 Detecção coerente óptima de sinais FSK binários.

Chaveamento por Deslocamento de Frequência

Em FSK, sinais binários de RF são transmitidos como

$$\begin{aligned} \mathbf{0} : & \sqrt{2}p'(t) \cos [\omega_c - (\Delta\omega/2)]t \\ \mathbf{1} : & \sqrt{2}p'(t) \cos [\omega_c + (\Delta\omega/2)]t \end{aligned}$$

Essas formas de onda podem ser consideradas duas ondas ASK entrelaçadas. Portanto, a PSD consistirá em duas PSDs, centradas em $[f_c - (\Delta f/2)]$ e $[f_c + (\Delta f/2)]$. Para grande valor de $\Delta f/f_c$, a PSD consistirá em duas PSDs que não se sobrepõem. Para pequenos valores de $\Delta f/f_c$, os dois espectros se fundirão e a largura de banda diminuirá. Contudo, em nenhum dos casos a largura de banda será menor que a de ASK ou PSK.

O receptor de correlação óptimo para FSK binária é dado na Fig. 10.10. Como os pulsos têm mesma energia, o limiar ótimo, quando os símbolos são equiprováveis, é $a_o = 0$.

Consideremos o caso comum de pulso retangular $p'(t) = A$, ou seja, nenhuma formatação de pulso em FSK.

$$\begin{aligned} q(t) &= \sqrt{2}A \cos \left(\omega_c - \frac{\Delta\omega}{2} \right) t \\ p(t) &= \sqrt{2}A \cos \left(\omega_c + \frac{\Delta\omega}{2} \right) t \end{aligned}$$

Para o cálculo de P_b da Eq. (10.25b), precisamos de E_{pq} ,

$$\begin{aligned} E_{pq} &= \int_0^{T_b} p(t)q(t) dt \\ &= 2A^2 \int_0^{T_b} \cos \left(\omega_c - \frac{\Delta\omega}{2} \right) t \cos \left(\omega_c + \frac{\Delta\omega}{2} \right) t dt \\ &= A^2 \left[\int_0^{T_b} \cos(\Delta\omega)t dt + \int_0^{T_b} \cos 2\omega_c t dt \right] \\ &= A^2 T_b \left[\frac{\sin(\Delta\omega)T_b}{(\Delta\omega)T_b} + \frac{\sin 2\omega_c T_b}{2\omega_c T_b} \right] \end{aligned}$$

Na prática, $\omega_c T_b \gg 1$, de modo que o segundo termo no lado direito pode ser ignorado. Com isso,

$$E_{pq} = A^2 T_b \operatorname{sinc}(\Delta\omega T_b)$$

Da mesma forma,

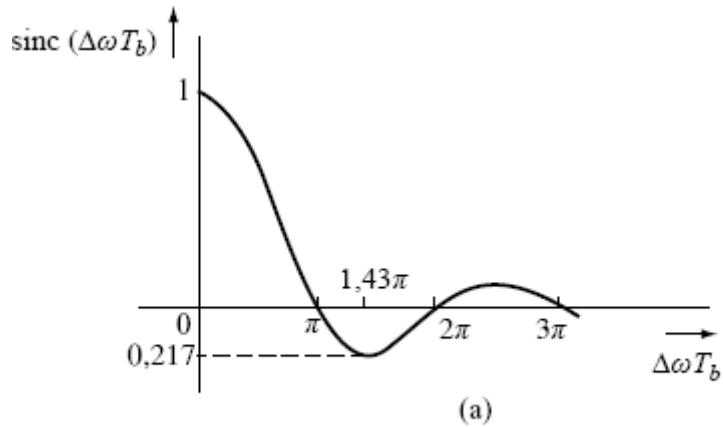
$$E_b = E_p = E_q = \int_0^{T_b} [p(t)]^2 dt = A^2 T_b$$

A análise da BER na Eq. (10.25b) para símbolos binários equiprováveis **1** e **0** se torna

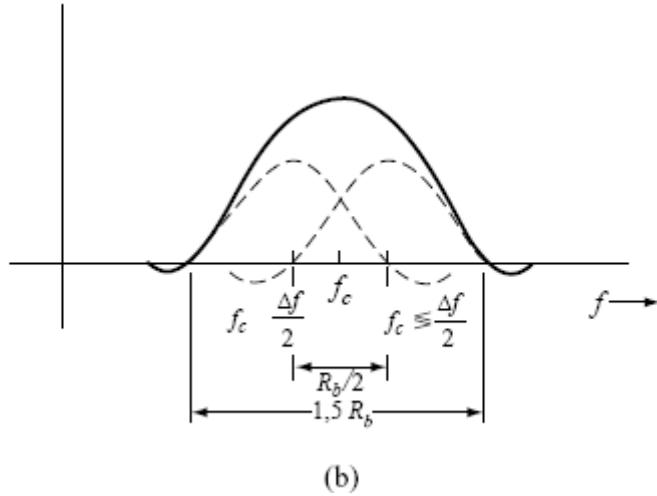
$$P_b = Q \left(\sqrt{\frac{E_b - E_b \operatorname{sinc}(\Delta\omega T_b)}{\mathcal{N}}} \right)$$

Portanto, fica claro que, para minimizar P_b , devemos selecionar $\Delta\omega$ para FSK binário tal que $\operatorname{sinc}(\Delta\omega T_b)$ seja mínimo. A Fig. 10.11a mostra $\operatorname{sinc}(\Delta\omega T_b)$ em função de (ΔT_b) . O valor mínimo de E_{pq} é $-0,217A^2 T_b$ em $\Delta\omega \times T_b = 1,43\pi$ ou quando

$$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{0,715}{T_b} = 0,715 R_b$$



(a)



(b)

Figura 10.11 (a) Mínimo da função sinc e (b) espectro MSK.

Isso leva à mínima BER para FSK binária:

$$P_b = Q \left(\sqrt{\frac{1,217 E_b}{\mathcal{N}}} \right) \quad (10.41a)$$

Quando $E_{pq} = 0$, temos o caso de sinalização ortogonal. Da Eq. 10.11a, fica claro que $E_{pq} = 0$ para $\Delta f = n/2T_b$, em que n é um inteiro qualquer. Embora pareça que FSK binária possa usar qualquer inteiro n na seleção de Δf , maior valor para Δf significa maior separação entre frequências de sinalização $\omega_c - (\Delta\omega/2)$ e $\omega_c + (\Delta\omega/2)$ e, consequentemente, maior largura de banda de

transmissão. Para minimizar a largura de banda, Δf deve ser o menor possível. Com base na Fig. 10.11a, o mínimo valor de Δf que pode ser usado para sinalização ortogonal é $1/2T_b$. FSK que use esse valor de Δf é conhecida como **chaveamento por deslocamento mínimo (MSK – minimum shift keying)**.

Chaveamento por Deslocamento Mínimo

No MSK, não apenas selecionamos duas frequências separadas por $1/2T_b$, mas devemos também cuidar para preservar a continuidade de fase no chaveamento entre $f \pm \Delta f$ no transmissor, pois, mudanças abruptas de fase nos instantes de transição de bits, quando se dá o chaveamento de frequências, aumentariam significativamente a largura de banda do sinal. Esquemas FSK que mantêm continuidade de fase são conhecidos como FSK de fase contínua (CPFSK – *continuous phase FSK*), dos quais MSK é um caso especial. Esses esquemas têm decaimento espectral rápido e melhor eficiência espectral.

Para manter continuidade de fase em CPFSK (ou MSK), a fase em cada transição de bit é forçada a depender da sequência anterior de dados. Consideremos, por exemplo, a sequência **1001...**, com início em $t = 0$. O primeiro pulso corresponde ao primeiro bit **1** é $\cos[\omega_c + (\Delta\omega/2)]t$ no intervalo de 0 a T_b segundos. Em $t = T_b$, esse pulso termina com uma fase $[\omega_c + (\Delta\omega/2)]T_b$. O próximo pulso, correspondente ao segundo bit de dado **0**, é $\cos[\omega_c - (\Delta\omega/2)]t$. Para manter continuidade de fase no instante de transição, a esse pulso é dada a fase adicional $[\omega_c + (\Delta\omega/2)]T_b$. Essa continuidade é forçada em cada instante de transição kT_b .

Como o MSK é um esquema ortogonal, sua probabilidade de erro é dada por

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N}}\right) \quad (10.41b)$$

Embora esse desempenho pareça inferior ao do caso ótimo na Eq. (10.41a), um exame mais detalhado mostra uma história diferente. Na verdade, esse resultado vale **somente se o MSK for detectado coerentemente como FSK comum**, usando um intervalo de observação T_b . Contudo, recordemos que MSK é CPFSK, em que a fase de cada pulso depende da sequência de dados anterior. Logo, melhor desempenho pode ser obtido observando a forma de onda recebida **em um intervalo de tempo maior que T_b** . De fato, pode ser mostrado que, se um sinal MSK for detectado com observação em um intervalo de $2T_b$, o desempenho do MSK é idêntico ao da PSK ótima, ou seja,

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N}}\right) \quad (10.41c)$$

O MSK também tem outras propriedades úteis. Esse esquema tem capacidades de autossincronismo e sua largura de banda é de apenas $1,5R_b$, como mostrado na Fig. 10.11b. Isso é somente 50% maior que a largura de banda da sinalização duobinária. Além disso, o espectro de MSK decai mais rapidamente, com $1/f^4$, em contraste com o espectro de PSK (ou bipolar), que decai com $1/f^2$ [Eq. (7.15) e (7.22)]. Devido a essas propriedades, o MSK tem recebido muita atenção prática. As Refs. 1 e 2 apresentam discussão mais detalhada sobre esse tema.

10.4 ANÁLISE DE DETECÇÃO ÓTIMA NO ESPAÇO DE SINAIS

Até aqui, nossa discussão sobre otimização de receptores digitais ficou limitada ao caso simples de detecção de limiar linear para transmissão binária sob ruído de canal gaussiano. Tais receptores são restringidos por sua estrutura linear. Para determinar os receptores verdadeiramente ótimos, precisamos responder à pergunta: dada uma transmissão M -ária, com ruído de canal $n(t)$ e saída de canal

$$y(t) = p_i(t) + n(t) \quad 0 \leq t \leq T_o \quad i = 1, \dots, M$$

qual receptor é *ótimo* no sentido de levar à minimização da probabilidade de erro?

Para responder a essa pergunta, devemos analisar o problema de detecção de sinal digital sob um ponto de vista mais fundamental. Notemos que a saída do canal é um processo aleatório $y(t)$, $0 \leq t \leq T_o$. Assim, para tomar uma decisão, o receptor deve transformar $y(t)$ em um espaço de decisão de dimensionalidade finita. A análise é muito simplificada se usarmos uma representação geométrica de sinais e ruídos.

Comentário sobre Notação: Para evitar confusão, esclareçamos as notações usadas aqui. Como antes, usaremos tipos romanos para denotar uma VA ou um processo aleatório [por exemplo, x ou $x(t)$]. Um valor particular assumido pela VA em certo ensaio é denotado por tipo itálico. Assim, x representa o valor assumido por x . Do mesmo modo, $x(t)$ representa uma particular função de amostra do processo aleatório $x(t)$. Para vetores aleatórios, seguiremos a mesma convenção: um vetor aleatório será

representado por tipo romano em negrito e um particular valor assumido pelo vetor em dado ensaio, por tipo itálico em negrito. Assim, \mathbf{r} denota um vetor aleatório e \mathbf{r}_i , um valor particular de \mathbf{r} .

10.4.1 Espaço Geométrico de Sinais

A seguir, mostremos formalmente que um sinal em um sistema de transmissão M -ário é, na verdade, um vetor de n dimensões e pode ser representado por um ponto em um hiperespaço de n dimensões ($n \leq M$). Os fundamentos desse ponto de vista foram estabelecidos na Seção 2.6, quando introduzimos o espaço de sinais.

Uma n -upla ordenada (x_1, x_2, \dots, x_n) é um vetor \mathbf{x} de n dimensões. O espaço vetorial (de sinais) de n dimensões é varrido por n vetores unitários $\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \dots, \boldsymbol{\varphi}_n$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0) \\ \boldsymbol{\varphi}_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\ &\quad \cdots \\ \boldsymbol{\varphi}_n &= (0, 0, 0, \dots, 1)\end{aligned}\tag{10.42}$$

Qualquer vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ pode ser expresso como uma combinação linear de n vetores unitários,

$$\mathbf{x} = x_1 \boldsymbol{\varphi}_1 + x_2 \boldsymbol{\varphi}_2 + \cdots + x_n \boldsymbol{\varphi}_n\tag{10.43a}$$

$$= \sum_{k=1}^n x_k \boldsymbol{\varphi}_k\tag{10.43b}$$

Esse espaço vetorial é caracterizado pelas definições de produto interno entre dois vetores

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k\tag{10.44}$$

e de norma de vetor

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{k=1}^n x_k^2\tag{10.45}$$

A norma $\|\mathbf{x}\|$ é o **comprimento** do vetor. Vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} são **ortogonais** se o produto interno dos mesmos for zero

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0\tag{10.46}$$

Um conjunto de vetores de n dimensões é independente se nenhum dos vetores no conjunto puder ser representado por uma combinação linear dos vetores remanescentes do conjunto. Assim, se $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_m$ for um conjunto independente, a igualdade

$$a_1 \mathbf{y}_1 + a_2 \mathbf{y}_2 + \cdots + a_m \mathbf{y}_m = 0\tag{10.47}$$

requer $a_i = 0$, $i = 1, \dots, m$. Um subconjunto de vetores em um dado espaço de n dimensões pode ter dimensionalidade menor que n . Por exemplo, em um espaço tridimensional, todos os vetores em um plano podem ser especificados por duas dimensões, e todos os vetores em uma linha podem ser especificados por uma dimensão.

Um espaço de n dimensões pode ter no máximo n vetores independentes. Se um espaço tiver um máximo de n vetores independentes, todo vetor \mathbf{x} nesse espaço pode ser expresso como uma combinação linear desses n vetores independentes. Assim, qualquer vetor nesse espaço pode ser especificado por n -uplas. Por essa razão, um conjunto de n vetores independentes em um espaço de n dimensões pode ser visto como os **vetores de base** (ou base vetorial) do espaço.

Os membros de um conjunto de vetores de base formam eixos coordenados e não são únicos. Os n vetores na Eq. (10.42) são independentes e servem como vetores de base. Esses vetores têm a propriedade adicional de serem (mutuamente) **ortogonais** e terem comprimento **normalizado**, ou seja,

$$\langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases} \quad (10.48)$$

Um conjunto de vetores desse tipo é um conjunto **ortonormal** de vetores e representa um espaço vetorial ortogonal. Qualquer vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ pode ser representado como

$$\mathbf{x} = x_1 \varphi_1 + x_2 \varphi_2 + \cdots + x_n \varphi_n$$

em que x_k é a projeção de \mathbf{x} sobre o vetor de base φ_k e representa a k -ésima coordenada de \mathbf{x} . Com uso da Eq. (10.48), a k -ésima coordenada pode ser obtida de

$$\langle \mathbf{x}, \varphi_k \rangle = x_k \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (10.49)$$

Como qualquer vetor em um espaço de n dimensões pode ser representado por esse conjunto de n vetores de base, esse conjunto forma um conjunto ortonormal **completo** (CON).

10.4.2 Espaço de Sinais e Base de Sinais

Os conceitos de espaço vetorial e de vetores de base podem ser generalizados para caracterizar sinais em tempo contínuo definidos em um intervalo de tempo Θ . Como descrito na Seção 2.6, um conjunto ortonormal de sinais $\{\varphi_i(t)\}$ pode ser definido para se

$$\int_{t \in \Theta} \varphi_j(t) \varphi_k(t) dt = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases} \quad (10.50)$$

Se $\{\varphi_i(t)\}$ formar um conjunto completo de funções de base ortonormais de um espaço de sinais definidos em Θ , todo sinal $x(t)$ nesse espaço de sinais pode ser expresso como

$$x(t) = \sum_k x_k \varphi_k(t) \quad t \in \Theta \quad (10.51)$$

em que a componente de sinal na direção de $\varphi_k(t)$ é *

$$x_k = \int_{t \in \Theta} x(t) \varphi_k(t) dt \quad (10.52)$$

Um exemplo é $\Theta = (-\infty, \infty)$. Com base no teorema da amostragem, todos os sinais passa-baixos com largura de banda de B Hz podem ser representados por

$$x(t) = \sum_k x_k \underbrace{\sqrt{2B} \operatorname{sinc}(2\pi Bt - k\pi)}_{\varphi_k(t)} \quad (10.53a)$$

com

$$x_k = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sqrt{2B} \operatorname{sinc}(2\pi Bt - k\pi) dt = \frac{1}{\sqrt{2B}} x\left(\frac{k}{2B}\right) \quad (10.53b)$$

Assim como há um número infinito de possíveis conjuntos de vetores de base para um espaço vetorial, há um número infinito de possíveis conjuntos de sinais de base para um dado espaço de sinais. Para um espaço de sinais limitado em banda, $\{\sqrt{2B} \cdot \operatorname{sinc}(2\pi Bt - k\pi)\}$ é um dos possíveis conjuntos de sinais de base.

Notemos que $x(k/2B)$ são amostras do sinal original limitado em banda tomadas à taxa de Nyquist. Como um sinal limitado em banda não pode ser limitado no tempo, o número total de amostras de Nyquist será infinito. Contudo, amostras correspondentes a grandes valores de k podem ser ignoradas, pois a contribuição das mesmas é insignificante. Um

desenvolvimento rigoroso desse resultado, assim como uma estimativa do erro ao ignorar dimensões superiores, pode ser encontrado em Landau e Pollak.³

Produto Escalar e Energia de Sinal

Em um dado espaço de sinais, sejam $x(t)$ e $y(t)$ dois sinais. Se $\{\varphi_k(t)\}$ for uma base ortonormal de sinais, então

$$x(t) = \sum_i x_i \varphi_i(t)$$

$$y(t) = \sum_j y_j \varphi_j(t)$$

Logo,

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{t \in \Theta} x(t)y(t) dt = \int_{t \in \Theta} \left[\sum_i x_i \varphi_i(t) \right] \left[\sum_j y_j \varphi_j(t) \right] dt$$

Como a base de sinais é ortonormal, temos

$$\int_{t \in \Theta} x(t)y(t) dt = \sum_k x_k y_k \quad (10.54a)$$

O lado direito da Eq. (10.54a), no entanto, é o produto interno dos vetores x e y . Portanto, chegamos, novamente, no teorema de Parseval

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{t \in \Theta} x(t)y(t) dt = \sum_k x_k y_k = \langle x, y \rangle \quad (10.54b)$$

A energia de sinal para um sinal $x(t)$ é um caso especial. A energia E_x é dada por

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{t \in \Theta} x^2(t) dt \\ &= \langle x, x \rangle = \|x\|^2 \end{aligned} \quad (10.55)$$

Assim, a energia do sinal é igual ao quadrado do comprimento do vetor correspondente.

Exemplo 10.1 Um espaço de sinais consiste em quatro sinais $s_1(t)$, $s_2(t)$, $s_3(t)$ e $s_4(t)$, como mostrado na Fig. 10.12. Determinemos um adequado conjunto de vetores de base e a dimensionalidade dos sinais. Representemos esses sinais geometricamente no espaço vetorial.

Os dois pulsos retangulares $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ na Fig. 10.12b são um adequado conjunto de sinais de base. Em termos desse conjunto, os vetores s_1 , s_2 , s_3 e s_4 correspondentes aos sinais $s_1(t)$, $s_2(t)$, $s_3(t)$ e $s_4(t)$ são $s_1 = (1, -0,5)$, $s_2 = (-0,5, 1)$, $s_3 = (0, -1, 0)$ e $s_4 = (0, 1, 0)$. Esses pontos são marcados na Fig. 10.12c. Observemos que o produto interno de s_1 e s_4 é

$$\langle s_1, s_4 \rangle = 0,5 - 0,5 = 0$$

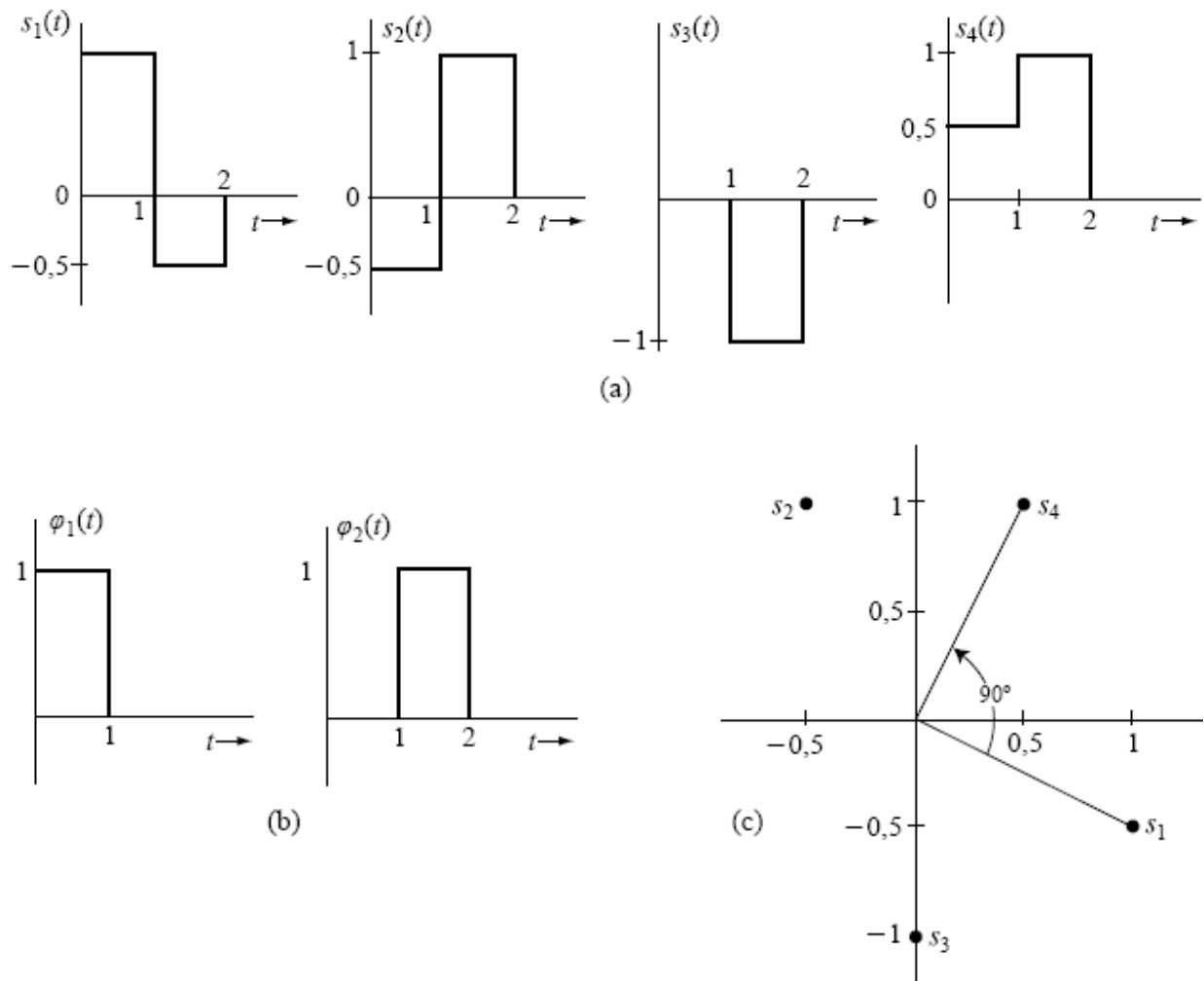


Figura 10.12 Sinais e sua representação no espaço de sinais.

Portanto, \$s_1\$ e \$s_4\$ são ortogonais. Esse resultado pode ser comprovado de

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_4(t) dt = 0$$

Reparemos que cada ponto no espaço de sinais na Fig. 10.12c corresponde a alguma forma de onda.

Determinação de um Conjunto de Base Ortonormal

Se houver um número finito de sinais \$x_i(t)\$ em um dado conjunto de sinais de interesse, a base ortonormal de sinais pode ser selecionada de modo heurístico ou sistemático. Uma abordagem heurística requer um bom entendimento da relação entre os diferentes sinais *assim como* uma certa dose de sorte. A **ortogonalização de Gram-Schmidt**, em contraste, é uma abordagem sistemática para a extração de sinais de base a partir de um conjunto de sinais conhecido. Os detalhes dessa abordagem são apresentados no Apêndice C.

10.5 DECOMPOSIÇÃO VETORIAL DE PROCESSOS ALEATÓRIOS DE RUÍDO BRANCO

Em comunicação digital, um sinal de mensagem sempre é uma dentre \$M\$ possíveis formas de onda. Assim, não é difícil representar todas as \$M\$ formas de onda em termos de um CON de funções de base. O verdadeiro *desafio*, na verdade, reside na decomposição vetorial do ruído aleatório \$n(t)\$ no receptor. Um sinal determinístico pode ser representado por um vetor, um ponto no espaço de sinais. Será possível representar um processo aleatório como um vetor de variáveis aleatórias? Caso a resposta seja positiva, o problema de detecção poderá ser grandemente simplificado.

Consideremos um conjunto completo ortonormal (CON) de funções de base \$\{\varphi_k(t)\}\$ para um espaço de sinais definido em \$[0, T_o]\$. Qualquer sinal determinístico \$s(t)\$ nesse espaço de sinais satisfará a seguinte condição:

$$\int_0^{T_o} |s(t) - \sum_k s_k \varphi_k(t)|^2 dt = 0 \quad (10.56a)$$

Isso implica que, para $t \in [0, T_o]$, temos a igualdade ^{*}

$$s(t) = \sum_k s_k \varphi_k(t)$$

Contudo, para processos aleatórios definidos em $[0, T_o]$, essa assertão, em geral, **não é verdadeira**. Certas modificações se fazem necessárias.

10.5.1 Determinação de Funções de Base para um Processo Aleatório

Antes de qualquer coisa, um processo aleatório genérico $x(t)$ não pode, a rigor, satisfazer a Eq. (10.56a). Assim, um requisito de convergência é aplicado no sentido quadrático médio, ou seja,

$$E \left\{ \int_0^{T_o} \left| x(t) - \sum_k x_k \varphi_k(t) \right|^2 dt \right\} = 0 \quad (10.56b)$$

Esta igualdade pode ser denotada como ^{**}

$$x(t) \stackrel{\text{m.s.}}{=} \sum_k x_k \varphi_k(t) \quad (10.56c)$$

Se $x(t)$ e $y(t)$ forem iguais no sentido quadrático médio, fisicamente, a diferença entre esses dois processos aleatórios tem energia zero. No que diz respeito a comunicações, sinais (ou diferenças entre sinais) com energia zero não têm efeito físico e podem ser vistos como 0.

No caso de um conjunto de sinais determinísticos, os sinais de base podem ser determinados com o **procedimento de ortogonalização de Gram-Schmidt**. Todavia, a ortogonalização de Gram-Schmidt não vale para processos aleatórios. Um processo aleatório $x(t)$ é, de fato, um ensemble de sinais. Assim, os sinais de base $\{\varphi_k(t)\}$ também devem depender das características do processo aleatório.

A descrição completa e rigorosa da decomposição de um processo aleatório pode ser encontrada em algumas referências clássicas⁴. Aqui, basta afirmar que as funções de base ortonormais devem ser solução da seguinte equação integral

$$\lambda_i \cdot \varphi_i(t) = \int_0^{T_o} R_x(t, t_1) \cdot \varphi_i(t_1) dt_1 \quad 0 \leq t \leq T_o \quad (10.57)$$

A solução da Eq. (10.57) é conhecida como expansão de *Karhunen-Löeve*. A função de autocorrelação $R_x(t, t_1)$ é conhecida como função-núcleo (ou função-kernel) dessa expansão. De fato, a Eq. (10.57) lembra a equação de álgebra linear que relaciona um autovalor λ ao autovetor φ :

$$\lambda \varphi = R_x \varphi$$

em que φ é um vetor-coluna e R_x , uma matriz positiva semidefinida; λ_i são conhecidos como autovalores, e as funções de base $\varphi_i(t)$ são as correspondentes autofunções.

A expansão de *Karhunen-Löeve* estabelece, de forma clara, que as funções de base de um processo aleatório $x(t)$ depende de sua função de autocorrelação $R_x(t, t_1)$. Não podemos selecionar arbitrariamente um conjunto CON de funções. Na verdade, a solução da expansão de *Karhunen-Löeve* pode se revelar uma tarefa nada trivial.

10.5.2 Representação Geométrica de Processos de Ruído Branco

Para um processo de ruído branco estacionário $x(t)$, a função de autocorrelação é

$$R_x(t, t_1) = \frac{\mathcal{N}}{2} \delta(t - t_1)$$

Para esse *núcleo (kernel)* especial, a equação integral Eq. (10.57) se reduz à forma simples

$$\lambda_i \cdot \varphi_i(t) = \int_0^{T_o} \frac{\mathcal{N}}{2} \delta(t - t_1) \cdot \varphi_i(t_1) dt_1 = \frac{\mathcal{N}}{2} \varphi_i(t) \quad t \in (0, T_o) \quad (10.58)$$

Esse resultado implica que **qualquer** conjunto CON de funções de base pode ser usado para representar processos de **ruído branco estacionário**. Além disso, os autovalores são todos iguais, $\lambda_i = N/2$.

Esse resultado particular é da maior importância para nós. Na maioria das aplicações de comunicação digital, focamos o projeto do receptor ótimo e análise de desempenho tendo em mente canais de **ruído branco**. No caso de transmissões M -árias, temos um conjunto ortonormal de funções de base $\{\varphi_k(t)\}$ para representar as M formas de onda $\{s_i(t)\}$, de modo que

$$s_i(t) = \sum_k s_{i,k} \varphi_k(t) \quad i = 1, \dots, M \quad (10.59a)$$

Com base na Eq. (10.58), essas funções de base **também** são adequadas à representação do ruído branco do canal $n_w(t)$:

$$n_w(t) \stackrel{\text{m.s.}}{=} \sum_k n_k \varphi_k(t) \quad 0 \leq t \leq T_o \quad (10.59b)$$

Em consequência, quando o transmissor envia $s_i(t)$, o sinal recebido pode ser decomposto em

$$\begin{aligned} y(t) &= s_i(t) + n_w(t) \\ &\stackrel{\text{m.s.}}{=} \sum_k s_{i,k} \varphi_k(t) + \sum_k n_k \varphi_k(t) \\ &\stackrel{\text{m.s.}}{=} \sum_k y_k \varphi_k(t) \end{aligned} \quad (10.59c)$$

com

$$y_k = \int_0^{T_o} y(t) \varphi_k^*(t) dt = s_{i,k} + n_k \quad \text{se } s_i(t) \text{ for enviado} \quad (10.59d)$$

Em consequência, quando o ruído do canal for branco, o sinal de saída recebido do canal pode ser representado por uma sequência de variáveis aleatórias $\{y_k\}$ da Eq. (10.59d). Em outras palavras, o receptor ótimo para canais de ruído branco pode ser deduzido da informação contida em

$$(y_1, y_2, \dots, y_k, \dots).$$

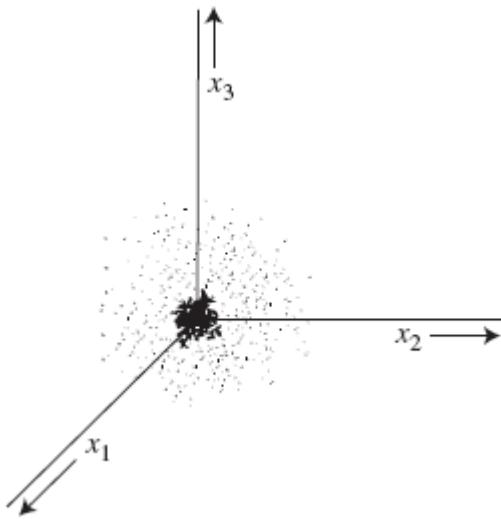


Figura 10.13 Representação geométrica de um processo aleatório gaussiano.

Reparemos que o ruído branco $x(t)$ consiste em um ensemble de funções de amostra. Os coeficientes

$$x_k = \int_0^{T_o} x(t) \varphi_k^*(t) dt \quad k = 1, 2, \dots$$

na decomposição da Eq. (10.59b) serão diferentes para cada função de amostra. Por conseguinte, os coeficientes são VAs. Cada função de amostra terá um vetor específico (x_1, x_2, \dots, x_n) e será mapeada em um ponto no espaço de sinais. Isso significa que o ensemble de funções de amostra para o processo aleatório $x(t)$ será mapeado em um ensemble de pontos no espaço de sinais, como mostrado na Fig. 10.13. Embora mostre apenas um gráfico tridimensional (pois não é possível mostrar um gráfico de dimensão maior), essa figura basta para ilustrar a ideia.

Para cada ensaio do experimento, o resultado (função de amostra) é certo ponto \mathbf{x} . O ensemble de pontos no espaço de sinais tem a aparência de uma bola de pó, com densidade de pontos diretamente proporcional à probabilidade de observar \mathbf{x} na região em consideração. Se denotarmos a PDF conjunta de x_1, x_2, \dots, x_n por $p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$, temos

$$p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = p_{x_1 x_2 \dots x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (10.60)$$

Assim, $p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ tem certo valor em cada ponto no espaço de sinais, e representa a probabilidade relativa (densidade de pó) de observar $\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

10.5.3 Ruído Gaussiano Branco

Se o ruído do canal $n_w(t)$ for branco e gaussiano, a discussão na Seção 8.6 mostra que os coeficientes de expansão

$$n_k = \int_0^{T_o} n_w(t) \varphi_k(t) dt \quad (10.61)$$

também serão gaussianos. De fato, (n_1, n_2, \dots, n_k) são conjuntamente gaussianos.

A seguir, provaremos algumas propriedades básicas de variáveis aleatórias gaussianas. Primeiro, definimos um vetor-coluna de n variáveis aleatórias como

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Notemos que \mathbf{x}^T denota o transposto de \mathbf{x} , e $\bar{\mathbf{x}}$ o valor médio de \mathbf{x} . Variáveis aleatórias (VAs) x_1, x_2, \dots, x_n são conjuntamente gaussianas se sua PDF conjunta for dada por

$$p_{x_1 x_2 \dots x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det(K_x)}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T K_x^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \right] \quad (10.62)$$

em que K_x é a matriz de covariância $n \times n$

$$K_x = \overline{(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \quad (10.63a)$$

sendo a covariância de x_i e x_j dada por

$$\sigma_{ij} = \overline{(x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)} \quad (10.63b)$$

Aqui, usamos a notação convencional $\det(K_x)$, K_x^{-1} e para denotar o determinante e a inversa da matriz K_x , respectivamente.

Variáveis gaussianas são importantes não apenas por serem observadas com frequência, mas também por terem certas propriedades que simplificam muitas operações matemáticas que, de outra forma, seriam muito difíceis ou impossíveis. A seguir, resumimos estas propriedades:

P-1: A densidade gaussiana é completamente especificada pelas estatísticas de primeira e segunda ordens $\bar{\mathbf{x}}$ e K_x . Isso segue da Eq. (10.62).

P-2: Se n variáveis conjuntamente gaussianas x_1, x_2, \dots, x_n forem descorrelacionadas, serão independentes.

Se as n variáveis forem descorrelacionadas, $\sigma_{ij} = 0$ ($i \neq j$), e K_x se reduz a uma matriz diagonal. Assim, A Eq. (10.62) se torna

$$p_{x_1 x_2 \dots x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp \left[\frac{-(x_i - \bar{x}_i)^2}{2\sigma_i^2} \right] \quad (10.64a)$$

$$= p_{x_1}(x_1)p_{x_2}(x_2) \dots p_{x_n}(x_n) \quad (10.64b)$$

Como já observado, variáveis independentes sempre são descorrelacionadas, mas variáveis descorrelacionadas não são necessariamente independentes. Contudo, no caso de VAs conjuntamente gaussianas, descorrelação implica independência.

P-3: Quando x_1, x_2, \dots, x_n são conjuntamente gaussianas, todas as densidades marginais, como $p_{x_i}(x_i)$ e todas as densidades condicionais, como $p_{x_i x_j | x_k x_l \dots x_p}(x_i, x_j | x_k, x_l, \dots, x_p)$ são gaussianas. Essa propriedade pode ser prontamente comprovada (Exercício 8.2-9).

P-4: Combinações lineares de variáveis conjuntamente gaussianas também são conjuntamente gaussianas. Assim, se formarmos m variáveis y_1, y_2, \dots, y_m ($m \leq n$) a partir de

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \quad (10.65)$$

então y_1, y_2, \dots, y_m também serão variáveis conjuntamente gaussianas.

10.5.4 Propriedades de Processos Aleatórios Gaussianos

Um processo aleatório $x(t)$ é gaussiano se as VAs $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)$ forem conjuntamente gaussianas [Eq. (10.62)] para todo n e para todo conjunto (t_1, t_2, \dots, t_n) . Logo, a PDF conjunta das VAs $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)$ de um processo aleatório gaussiano é dada pela Eq. (10.62), na qual o valor médio e a matriz de covariância K_x são especificadas por

$$\overline{x(t_i)} \quad \text{e} \quad \sigma_{ij} = R_x(t_i, t_j) - \overline{x(t_i)} \cdot \overline{x(t_j)} \quad (10.66)$$

Isso mostra que um processo aleatório gaussiano é completamente especificado por sua função de autocorrelação $R_x(t_i, t_j)$ e seu valor médio por $\overline{x(t)}$.

Como discutido no Capítulo 9, se o **processo aleatório gaussiano** satisfizer as duas condições adicionais:

$$R_x(t_i, t_j) = R_x(t_i - t_j) \quad (10.67a)$$

e

$$\overline{x(t)} = \text{constante pra todo } t \quad (10.67b)$$

então, será um processo estacionário no sentido amplo. Além disso, as Eqs. (10.67) significam que a PDF conjunta das VAs gaussianas $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)$ também é invariante sob uma translação da origem do tempo. Portanto, podemos concluir que um *processo aleatório gaussiano estacionário no sentido amplo também é estacionário no sentido estrito*.

Outra propriedade relevante de processos gaussianos é que a resposta de um sistema linear a um processo gaussiano também é um processo gaussiano. Isso advém da propriedade P-4 das VAs gaussianas. Seja $x(t)$ um processo gaussiano aplicado à entrada de um sistema linear cuja resposta ao impulso unitário é $h(t)$. Seja $y(t)$ o processo de saída (resposta); então,

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) h(\tau) d\tau \\ &= \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - k\Delta\tau) h(k\Delta\tau) \Delta\tau \end{aligned}$$

é uma soma ponderada de VAs gaussianas. Como $x(t)$ é um processo gaussiano, todas as variáveis $x(t - k\Delta\tau)$ são conjuntamente gaussianas (por definição). Portanto, as variáveis $y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_n)$ devem ser conjuntamente gaussianas, como discutido anteriormente. Isso implica que o processo $y(t)$ é um processo gaussiano.

Resumindo, o processo gaussiano tem as seguintes propriedades:

1. Um processo aleatório gaussiano é completamente especificado por suas funções de autocorrelação e valor médio.
2. Se um processo aleatório gaussiano for estacionário no sentido amplo, também é estacionário no sentido estrito.
3. A resposta de um sistema linear a um processo aleatório gaussiano também é um processo aleatório gaussiano.

Consideremos o processo de ruído branco $n_w(t)$ com PSD $N/2$. Qualquer conjunto completo de sinais de base ortonormais $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots$ pode decompor $n_w(t)$ em

$$\begin{aligned} n_w(t) &= n_1 \varphi_1(t) + n_2 \varphi_2(t) + \dots \\ &= \sum_k n_k \varphi_k(t) \end{aligned}$$

Ruído branco tem largura de banda infinita. Em consequência, a dimensionalidade do espaço de sinais é infinita.

A seguir, mostraremos que as VAs n_1, n_2, \dots são independentes, cada uma com variância $N/2$. Primeiro, temos

$$\begin{aligned}
\overline{n_j n_k} &= \overline{\int_0^{T_o} n_w(\alpha) \varphi_j(\alpha) d\alpha \int_0^{T_o} n_w(\beta) \varphi_k(\beta) d\beta} \\
&= \int_0^{T_o} \int_0^{T_o} \overline{n_w(\alpha) n_w(\beta)} \varphi_j(\alpha) \varphi_k(\beta) d\alpha d\beta \\
&= \int_0^{T_o} \int_0^{T_o} R_{n_w}(\beta - \alpha) \varphi_j(\alpha) \varphi_k(\beta) d\alpha d\beta
\end{aligned}$$

Como $R_{n_w}(\tau) = (\mathcal{N}/2)\delta(\tau)$,

$$\begin{aligned}
\overline{n_j n_k} &= \int_0^{T_o} \int_0^{T_o} \frac{\mathcal{N}}{2} \delta(\beta - \alpha) \varphi_j(\alpha) \varphi_k(\beta) d\alpha d\beta \\
&= \frac{\mathcal{N}}{2} \int_0^{T_o} \varphi_j(\alpha) \varphi_k(\alpha) d\alpha \\
&= \begin{cases} 0 & j \neq k \\ \frac{\mathcal{N}}{2} & j = k \end{cases}
\end{aligned} \tag{10.68}$$

Aqui, n_j e n_k são VAs gaussianas descorrelatadas, cada uma com variância $N/2$. Como são gaussianas, descorrelação implica independência. Isso prova o resultado.

Por ora, consideremos um caso de N dimensões. A PDF conjunta das VAs conjuntamente gaussianas independentes n_1, n_2, \dots, n_N , cada uma com média zero e variância $N/2$, é [Eq. (10.64)]

$$\begin{aligned}
p_{\mathbf{n}}(\mathbf{n}) &= \prod_{j=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi N/2}} e^{-n_j^2/(N/2)} \\
&= \frac{1}{(\pi N)^{N/2}} e^{-(n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_N^2)/N} \\
&= \frac{1}{(\pi N)^{N/2}} e^{-||\mathbf{n}||^2/N}
\end{aligned} \tag{10.69a}$$

$$\tag{10.69b}$$

Isso mostra que a PDF $p_{\mathbf{n}}(\mathbf{n})$ depende apenas da norma $||\mathbf{n}||$, que é o comprimento amostrado do vetor de ruído \mathbf{n} no hiperespaço e, portanto, esfericamente simétrico se representado no hiperespaço de N dimensões.

10.6 RECEPTOR ÓTIMO PARA CANAIS COM RUÍDO GAUSSIANO BRANCO

10.6.1 Representações Geométricas

A seguir, consideremos, sob um ponto de vista mais fundamental, o problema de comunicação M -ária na presença de ruído gaussiano branco aditivo (AWGN – *additive white Gaussian noise*). Esse tipo de canal é conhecido como canal AWGN. Aqui, diferentemente dos receptores lineares estudados nas Seções 10.1 a 10.3, nenhuma restrição é imposta à estrutura ótima. Devemos responder à pergunta básica: Que receptor produzirá a mínima probabilidade de erro?

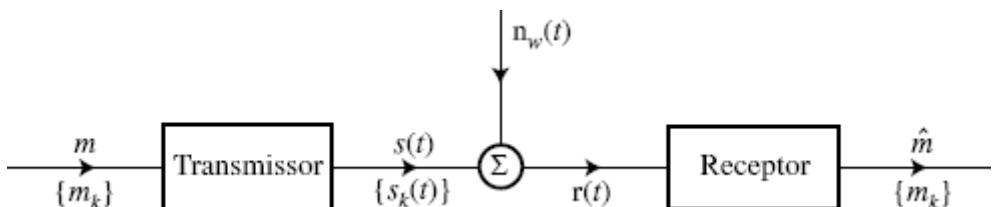


Figura 10.14 Sistema de comunicação M -ário.

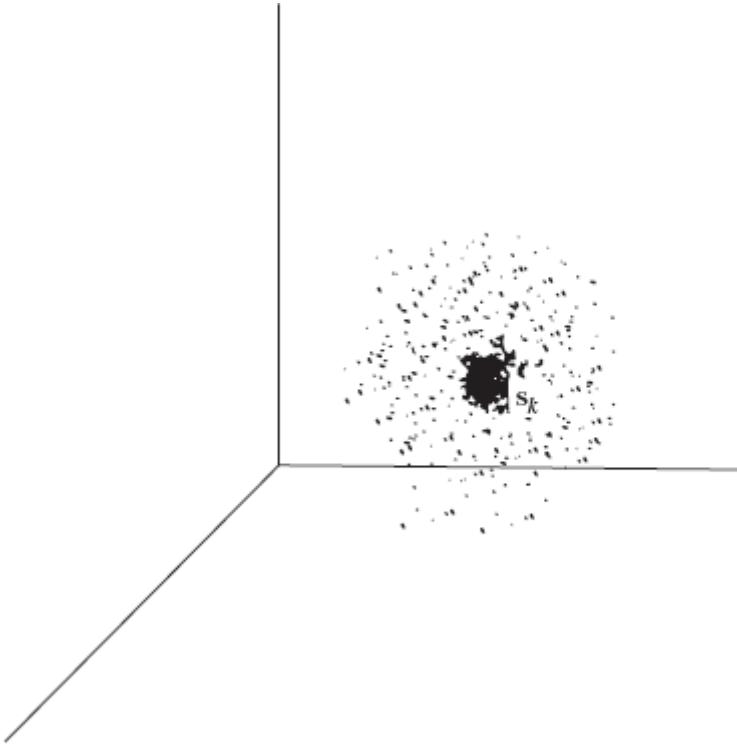


Figura 10.15 Efeito de ruído de canal gaussiano sobre o sinal recebido.

A compreensão do problema de detecção de sinal é grandemente simplificada com a representação geométrica de sinais. Em um espaço de sinais, podemos representar um sinal por um ponto fixo (ou um vetor). Um processo aleatório pode ser representado por um ponto aleatório (ou vetor aleatório). Na representação, a região na qual o ponto aleatório pode cair será sombreada e a intensidade de sombreamento, proporcional à probabilidade de observar o sinal na dada região. No esquema M -ário, usamos M símbolos, ou mensagens, m_1, m_2, \dots, m_M . Cada um desses símbolos é representado por uma forma de onda específica. Sejam $s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)$ as correspondentes formas de onda. Assim, o símbolo (ou mensagem) m_k é enviado com a transmissão de $s_k(t)$. Essas formas de onda são corrompidas por AWGN $n_w(t)$ (Fig. 10.14), com PSD

$$S_{n_w}(\omega) = \frac{N}{2}$$

No receptor, o sinal recebido $r(t)$ consiste em uma das M formas de onda de mensagens $s_k(t)$ mais o ruído de canal,

$$r(t) = s_k(t) + n_w(t) \quad (10.70a)$$

Como o ruído $n_w(t)$ é branco, podemos usar as mesmas funções de base para decompor $s_k(t)$ e $n_w(t)$. Assim, podemos representar $r(t)$ em um espaço de sinais se usarmos \mathbf{r}, s_k e \mathbf{n}_w para denotar os vetores correspondentes a $r(t), s_k(t)$ e $n_w(t)$, respectivamente. Com isso, é evidente que

$$\mathbf{r} = s_k + \mathbf{n}_w \quad (10.70b)$$

O vetor de sinal s_k é um vetor fixo, pois a forma de onda $s_k(t)$ é não aleatória, enquanto o vetor de ruído \mathbf{n}_w é aleatório. Portanto, o vetor \mathbf{r} também é aleatório. Como $n_w(t)$ é um ruído gaussiano branco, a distribuição de probabilidade de \mathbf{n}_w tem simetria esférica no espaço de sinais (como mostrado na seção anterior). Assim, a distribuição de \mathbf{r} é uma distribuição esférica centrada em um ponto fixo s_k , como mostrado na Fig. 10.15. Sempre que a mensagem m_k é transmitida, a probabilidade de observar o sinal recebido $r(t)$ em uma dada região é indicada pela intensidade do sombreamento na Fig. 10.15. Na verdade, como o ruído é branco, o espaço tem um número infinito de dimensões. No entanto, por simplicidade, mostramos o espaço como tridimensional. Isso basta para indicar nossa linha de raciocínio. Podemos desenhar regiões de espalhamento similares para vários pontos s_1, s_2, \dots, s_M . A Fig. 10.16a mostra as regiões de espalhamento para duas mensagens m_j e m_k quando s_j e s_k guardam grande separação no espaço de sinais. Nesse caso, praticamente não há sobreposição entre as duas regiões de espalhamento. Se m_j ou m_k for transmitido, o sinal recebido residirá em uma das duas regiões de espalhamento. A partir da posição do sinal recebido, é possível decidir, com pequena probabilidade de erro, se m_j ou m_k foi transmitido. Na Fig. 10.16a, o sinal recebido \mathbf{r} é muito mais próximo de s_k do que de s_j . Portanto, é mais provável que m_k tenha sido transmitido. Reparemos que, teoricamente, cada região de espalhamento se estende ao infinito, embora a probabilidade de observar o sinal recebido diminua rapidamente à medida que o

ponto é espalhado para longe do centro. Portanto, sempre haverá alguma sobreposição entre dois conjuntos de espalhamento, resultando em probabilidade de erro não nula. Assim, mesmo que, na Fig. 10.16a, o sinal recebido r seja mais próximo de s_k , pode ter sido gerado por s_j mais o ruído de canal.

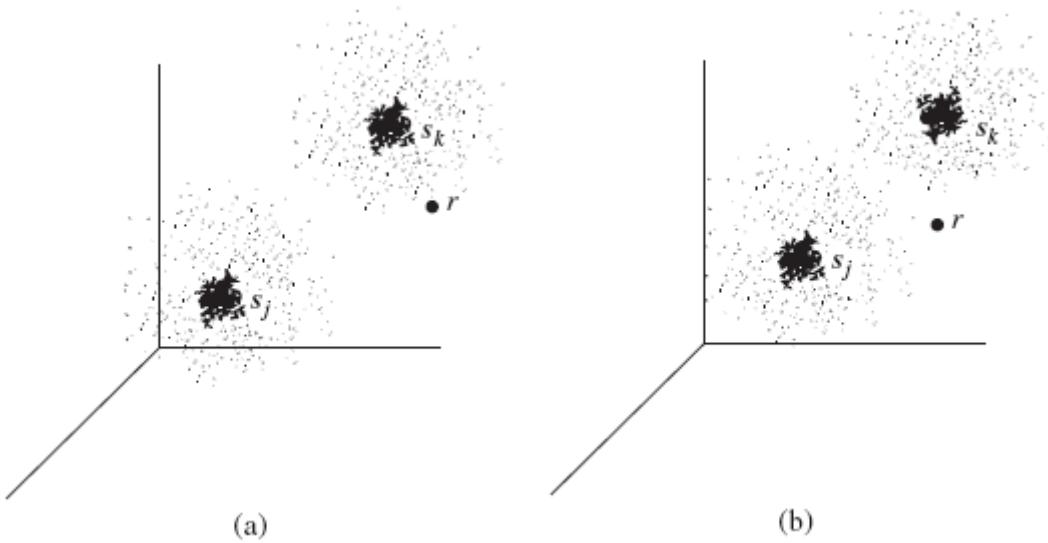


Figura 10.16 Comunicação binária na presença de ruído.

A Fig. 10.16b ilustra o caso de ruído mais intenso, em que há considerável sobreposição entre as duas regiões de espalhamento. Como o sinal recebido r é mais próximo de s_j que de s_k , é mais provável que m_j tenha sido transmitido. Contudo, nesse caso, também há considerável probabilidade de que m_k tenha sido transmitido. Portanto, nessa situação, haverá maior probabilidade de erro em qualquer esquema de detecção.

O receptor ótimo deve decidir, a partir do conhecimento de r , que mensagem foi transmitida. O espaço de sinais deve ser dividido em M regiões de decisão que não se sobrepõem, ou regiões disjuntas, R_1, R_2, \dots, R_M , correspondendo às M mensagens m_1, m_2, \dots, m_M . Se r cair na região R_k , a decisão é m_k . O problema do projeto do receptor se reduz, então, à escolha de fronteiras para estas **regiões de decisão** R_1, R_2, \dots, R_M , de modo a minimizar a probabilidade de erro na tomada de decisão.

Recapitulando: Um transmissor envia uma sequência de mensagens a partir de um conjunto de M mensagens m_1, m_2, \dots, m_M . Essas mensagens são representadas por formas de onda de energia finita $s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)$. Uma forma de onda é transmitida a cada $T_o = T_M$ segundos. Admitimos que o receptor guarda sincronismo temporal com o transmissor. As formas de onda são corrompidas durante a transmissão por AWGN de PSD $N/2$. Conhecida a forma de onda recebida, o receptor deve decidir que forma de onda foi transmitida. O critério de mérito do receptor é a mínima probabilidade de erro na tomada desta decisão.

10.6.2 Dimensionalidade do Espaço de Sinais de Detecção

Discutamos, agora, a dimensionalidade do espaço de sinais no problema de detecção. Se não houvesse ruído, trataríamos apenas das M formas de onda $s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)$. Nesse caso, um espaço de sinais de, no máximo, N dimensões bastaria. Isso porque a dimensionalidade do espaço de sinais sempre é igual ou menor que o número de sinais independentes no espaço (Seção 10.4). Por questão de generalidade, admitiremos que o espaço tem N dimensões ($N \leq M$). Considere $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t)$ o conjunto de base ortonormal para esse espaço. Esse conjunto pode ser construído com aplicação do procedimento de Gram-Schmidt discutido no Apêndice C. Podemos, então, representar a forma de onda de sinal $s_k(t)$ como

$$s_k(t) = s_{k,1}\varphi_1(t) + s_{k,2}\varphi_2(t) + \cdots + s_{k,N}\varphi_N(t) \quad (10.71a)$$

$$= \sum_{k=1}^N s_{j,k}\varphi_k(t) \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (10.71b)$$

em que

$$s_{j,k} = \int_{T_M} s_j(t)\varphi_k(t) dt \quad (10.71c)$$

Agora, consideremos o ruído de canal gaussiano branco $n_w(t)$. Esse sinal tem largura de banda infinita ($B = \infty$), um número infinito de dimensões e, obviamente, não pode ser *totalmente* representado em um espaço de sinais de N dimensões. Podemos, contudo, dividir $n_w(t)$ em duas componentes: (1) a porção de $n_w(t)$ no interior do espaço de sinais de N dimensões, e (2) a restante componente ortogonal ao espaço de sinais de N dimensões. Denotemos as duas componentes por $n(t)$ e $n_0(t)$, respectivamente. Assim

$$n_w(t) = n(t) + n_0(t) \quad (10.72)$$

em que

$$n(t) = \sum_{k=1}^N n_j \varphi_j(t) \quad (10.73a)$$

e

$$n_0(t) = \sum_{k=N+1}^{\infty} n_j \varphi_j(t) \quad (10.73b)$$

em que

$$n_j = \int_{T_M} n(t) \varphi_j(t) dt \quad (10.73c)$$

Por ser ortogonal ao espaço de sinais de N dimensões, $n_0(t)$ é ortogonal a cada sinal neste espaço. Logo,

$$\int_{T_M} n_0(t) \varphi_j(t) dt = 0 \quad j = 1, 2, \dots, N$$

Portanto,

$$\begin{aligned} n_j &= \int_{T_M} [n(t) + n_0(t)] \varphi_j(t) dt \\ &= \int_{T_M} n_w(t) \varphi_j(t) dt \quad j = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (10.74)$$

Das Eqs. (10.73a) e (10.74), fica evidente que podemos filtrar a componente $n_0(t)$ de $n_w(t)$. Isso pode ser visto do fato de o sinal recebido, $r(t)$, poder ser expresso como

$$\begin{aligned} r(t) &= s_k(t) + n_w(t) \\ &= s_k(t) + n(t) + n_0(t) \\ &= q(t) + n_0(t) \end{aligned} \quad (10.75)$$

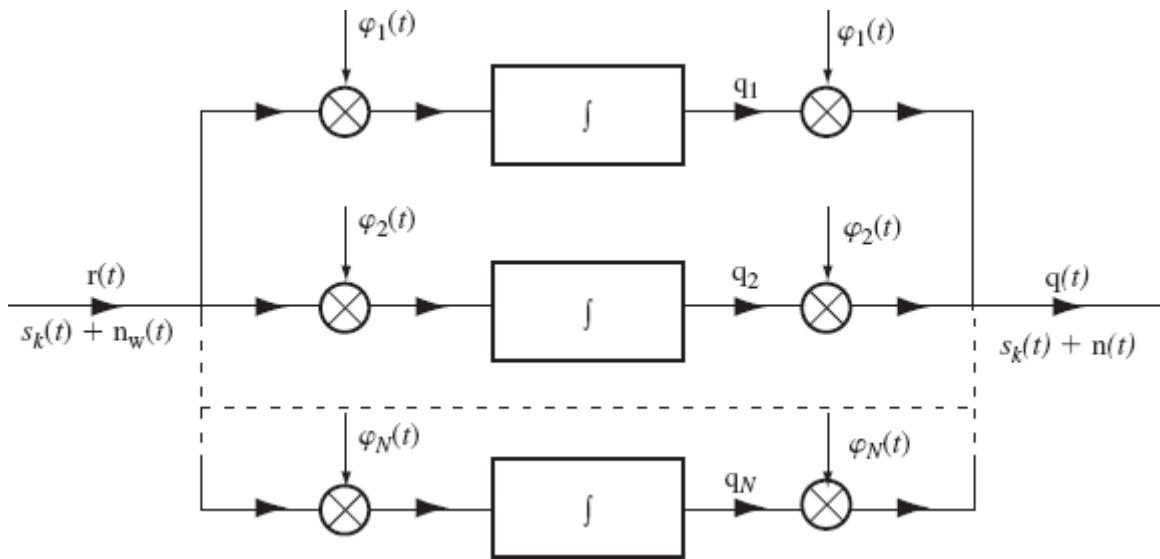


Figura 10.17 Eliminação do ruído ortogonal ao espaço de sinais.

em que $q(t)$ é a projeção de $r(t)$ no espaço de N dimensões:

$$q(t) = s_k(t) + n(t) \quad (10.76)$$

Podemos obter a projeção $q(t)$ de $r(t)$ observando que [Eqs. (10.71b) e (10.73a)]

$$q(t) = \sum_{j=1}^N (s_{kj} + n_j) \varphi_j(t) \quad (10.77)$$

Das Eqs. (10.71c), (10.74) e (10.77), segue que, se alimentarmos o sinal recebido $r(t)$ ao sistema mostrado na Fig. 10.17, a saída correspondente será $q(t)$. Dessa forma, a componente ortogonal de ruído pode ser eliminada na filtragem sem distorcer o sinal de mensagem.

A questão aqui é: essa filtragem ajuda a tomada de decisão? Podemos mostrar prontamente que a mesma não nos prejudica. O ruído $n_w(t)$ independe da forma de onda de sinal $s_k(t)$. Portanto, sua componente $n_0(t)$ também independe de $s_k(t)$. Assim, $n_0(t)$ não contém informação sobre o sinal transmitido, e o descarte dessa componente do sinal recebido $r(t)$ não causará qualquer perda de informação a respeito da forma de onda de sinal $s_k(t)$. Isso, no entanto, não basta. Devemos, ainda, assegurar que o ruído descartado [$n_0(t)$] não seja, de alguma forma, relacionado à componente remanescente de ruído $n(t)$. Se $n_0(t)$ e $n(t)$ forem relacionadas de alguma forma, será possível obter alguma informação sobre $n(t)$ de $n_0(t)$, o que nos permitirá detectar esse sinal com menor probabilidade de erro. Se as componentes $n_0(t)$ e $n(t)$ forem processos aleatórios independentes, a componente $n_0(t)$ não transportará qualquer informação sobre $n(t)$ e poderá ser descartada. Nessas condições, $n_0(t)$ será **irrelevante** à tomada de decisão no receptor.

O processo $n(t)$ é representado pelas componentes n_1, n_2, \dots, n_N ao longo de $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t)$, e $n_0(t)$ é representado pelas componentes remanescentes (número infinito) ao longo dos sinais de base remanescentes no conjunto completo $\{\varphi_k(t)\}$. Como o ruído de canal é gaussiano branco, da Eq. (10.68), observamos que todas as componentes são independentes. Portanto, as componentes que representam $n_0(t)$ independem das componentes que representam $n(t)$. Por conseguinte, $n_0(t)$ independe de $n(t)$ e contém somente dados irrelevantes.

O sinal recebido $r(t)$ é, agora, reduzido ao sinal $q(t)$, que contém a forma de onda de sinal desejada e a projeção do ruído de canal no espaço de sinais de N dimensões. Assim, o sinal $q(t)$ pode ser completamente representado no espaço de sinais. Denotemos os vetores que representam $n(t)$ e $q(t)$ por \mathbf{n} e \mathbf{q} , respectivamente. Logo,

$$\mathbf{q} = \mathbf{s} + \mathbf{n}$$

em que \mathbf{s} pode ser qualquer um dos vetores $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_M$.

O vetor aleatório $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N)$ é representado por N variáveis gaussianas independentes, cada um com média zero e variância $\sigma_n^2 = N/2$. Nesse caso, a PDF conjunta do vetor \mathbf{n} tem simetria esférica, como mostrado na Eq. (10.69b),

$$p_{\mathbf{n}}(\mathbf{n}) = \frac{1}{(\pi \mathcal{N})^{N/2}} e^{-||\mathbf{n}||^2/\mathcal{N}} \quad (10.78a)$$

Reparemos que esta é, na verdade, uma notação compacta para

$$p_{n_1, n_2, \dots, n_N}(n_1, n_2, \dots, n_N) = \frac{1}{(\pi \mathcal{N})^{N/2}} e^{-(n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_N^2)/\mathcal{N}} \quad (10.78b)$$

10.6.3 Espaço de Sinais e Procedimento de Decisão (Simplificados)

Agora, nosso problema é consideravelmente mais simples. A componente irrelevantre de ruído foi suprimida por filtragem. O sinal residual $q(t)$ pode ser representado em um espaço de sinais de N dimensões. A seguir, determinemos, nesse espaço, as M regiões de decisão R_1, R_2, \dots, R_M . As regiões devem ser escolhidas de modo a minimizar a probabilidade de erro na tomada de decisão.

Suponhamos que o vetor recebido $\mathbf{q} = q$. Se o receptor decidir $= m_k$, a probabilidade condicional de cometer um erro de decisão, dado que $\mathbf{q} = q$, é

$$P(C|\mathbf{q} = q) = P(m_k|\mathbf{q} = q) \quad (10.79)$$

em que $P(C|\mathbf{q} = q)$ é a probabilidade condicional de cometer um erro de decisão, dado $\mathbf{q} = q$, e $P(m_k|\mathbf{q} = q)$ é a probabilidade condicional de m_k haver sido transmitido, dado $\mathbf{q} = q$. A probabilidade incondicional $P(C)$ é dada por

$$P(C) = \int_{\mathbf{q}} P(C|\mathbf{q} = q) p_{\mathbf{q}}(q) dq \quad (10.80)$$

em que a integração é efetuada em toda a região ocupada por \mathbf{q} . Reparemos que essa é uma integral de ordem N em relação às variáveis q_1, q_2, \dots, q_N , na duração da forma de onda de sinal. Como $p_{\mathbf{q}}(q) \geq 0$, esta integral será máxima quando $P(C|\mathbf{q} = q)$ for máxima. Da Eq. (10.79), temos que, se for feita uma decisão $= m_k$, a probabilidade de erro será minimizada se a probabilidade

$$P(C) = \int_{\mathbf{q}} P(C|\mathbf{q} = q) p_{\mathbf{q}}(q) dq$$

for maximizada. A probabilidade $P(m_k|\mathbf{q} = q)$ é chamada de **probabilidade a posteriori** de m_k , pois representa a probabilidade de m_k ter sido transmitido quando \mathbf{q} foi recebido.

O procedimento de decisão para maximizar a probabilidade de decisão correta $P(C)$ e, portanto, minimizar a probabilidade de erro, fica claro. Uma vez que recebemos $\mathbf{q} = q$, calculamos todas as M as funções de probabilidade a posteriori $\{P(m_j|\mathbf{q} = q)\}$ e tomamos uma decisão a favor da mensagem para a qual a probabilidade a posterior for a maior – ou seja, o receptor decidirá que $= m_k$ se

$$P(m_k|\mathbf{q} = q) > P(m_j|\mathbf{q} = q) \text{ para todo } j \neq k \quad (10.81)$$

Assim, o detector que minimiza a probabilidade de erro é o **detector de máxima probabilidade a posteriori (MAP)**.

Podemos usar a regra de Bayes (Capítulo 8) para determinar as probabilidades a posteriori. Temos

$$P(m_k|\mathbf{q} = q) = \frac{P(m_k)p_{\mathbf{q}}(q|m_k)}{p_{\mathbf{q}}(q)} \quad (10.82)$$

Logo, o receptor decidirá $\hat{m} = m_k$ se a função de decisão

$$\frac{P(m_i)p_{\mathbf{q}}(q|m_i)}{p_{\mathbf{q}}(q)} \quad i = 1, 2, \dots, M$$

for máxima para $i = k$.

Reparemos que o denominador $p_{\mathbf{q}}(\mathbf{q})$ é comum a todas as funções de decisão e não é afetado pela decisão. Portanto, pode ser ignorado durante a decisão. Assim, o receptor decidirá $= m_k$ se a função de decisão

$$P(m_i)p_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}|m_i) \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (10.83)$$

for máxima para $i = k$. Portanto, uma vez que \mathbf{q} tenha sido obtido, calculamos a função de decisão [Eq. (10.83)] para todas as mensagens m_1, m_2, \dots, m_M e decidimos que a mensagem para a qual a função é máxima é aquela com maior possibilidade de ter sido transmitida.

Agora, voltemos a nossa atenção à determinação das funções de decisão. A probabilidade *a priori* $P(m_i)$ representa a probabilidade de a mensagem m_i ser transmitida. Essas probabilidades devem ser conhecidas para que o critério discutido possa ser usado.* O termo $p_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}|m_i)$ representa a PDF de \mathbf{q} quando o transmissor envia $s(t) = s_i(t)$. Sob essa condição,

$$\mathbf{q} = \mathbf{s}_i + \mathbf{n}$$

e

$$\mathbf{n} = \mathbf{q} - \mathbf{s}_i$$

O ponto \mathbf{s}_i é constante, e \mathbf{n} é um ponto aleatório. Obviamente, \mathbf{q} é um ponto aleatório com a mesma distribuição de \mathbf{n} , mas centrado no ponto \mathbf{s}_i .

Alternativamente, a densidade de probabilidade em $\mathbf{q} = \mathbf{q}$ (dado $\mathbf{m} = m_i$) é a mesma da probabilidade $\mathbf{n} = \mathbf{q} - \mathbf{s}_i$. Logo, [Eq. (10.78a)],

$$p_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}|m_i) = p_{\mathbf{n}}(\mathbf{q} - \mathbf{s}_i) = \frac{1}{(\pi N)^{N/2}} e^{-||\mathbf{q} - \mathbf{s}_i||^2/N} \quad (10.84)$$

A função de decisão na Eq. (10.83) passa a

$$\frac{P(m_i)}{(\pi N)^{N/2}} e^{-||\mathbf{q} - \mathbf{s}_i||^2/N} \quad (10.85)$$

Notemos que a função de decisão é sempre não negativa para todos os valores de i . Portanto, comparar essas funções equivale a comparar seus logaritmos, pois o logaritmo é uma função monótona para argumentos positivos. Assim, por conveniência, a função de decisão será escolhida como o logaritmo da Eq. (10.85). Além disso, o fator $(\pi N)^{N/2}$ é comum para todo i e pode ser deixado de lado. Com isto, a função de decisão a ser maximizada é

$$\ln P(m_i) - \frac{1}{N} ||\mathbf{q} - \mathbf{s}_i||^2 \quad (10.86)$$

Reparemos que $||\mathbf{q} - \mathbf{s}_i||^2$ é o quadrado do comprimento do vetor $\mathbf{q} - \mathbf{s}_i$. Logo,

$$\begin{aligned} ||\mathbf{q} - \mathbf{s}_i||^2 &= \langle \mathbf{q} - \mathbf{s}_i, \mathbf{q} - \mathbf{s}_i \rangle \\ &= ||\mathbf{q}||^2 + ||\mathbf{s}_i||^2 - 2\langle \mathbf{q}, \mathbf{s}_i \rangle \end{aligned} \quad (10.87)$$

A função de decisão na Eq. (10.86), então, passa a (após multiplicação por $N/2$)

$$\frac{N}{2} \ln P(m_i) - \frac{1}{2} (||\mathbf{q}||^2 + ||\mathbf{s}_i||^2 - 2\langle \mathbf{q}, \mathbf{s}_i \rangle) \quad (10.88)$$

O termo $||\mathbf{s}_i||^2$ é o quadrado do comprimento de \mathbf{s}_i e representa E_i , a energia do sinal $s_i(t)$. Os termos $\ln P(m_i)$ e E_i são constantes na função de decisão. Seja

$$a_i = \frac{1}{2} [N \ln P(m_i) - E_i] \quad (10.89)$$

Com isso, a função de decisão na Eq. (10.88) se torna

$$a_i + \langle \mathbf{q}, \mathbf{s}_i \rangle - \frac{\|\mathbf{q}\|^2}{2}$$

O termo $\|\mathbf{q}\|^2/2$ é comum a todas as M funções de decisão e pode ser omitido na comparação. Assim, a nova função de decisão b_i é

$$b_i = a_i + \langle \mathbf{q}, \mathbf{s}_i \rangle \quad (10.90)$$

Calculamos essa função b_i para $i = 1, 2, \dots, N$, e o receptor decidirá que $\hat{m} = m_k$ se a mesma for a maior para $i = k$. Se o sinal $q(t)$ for aplicado aos terminais de entrada de um sistema cuja resposta ao impulso seja $h(t)$, a saída em $t = T_M$ será dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(\tau) h(T_M - \tau) d\tau$$

Se escolhermos um filtro casado a $s_i(t)$, ou seja, $h(t) = s_i(T_M - t)$,

$$h(T_M - \tau) = s_i(\tau)$$

e, com base no teorema de Parseval, a saída será

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(\tau) s_i(\tau) d\tau = \langle \mathbf{q}, \mathbf{s}_i \rangle$$

Aqui, $\langle \mathbf{q}, \mathbf{s}_i \rangle$ é a saída em $t = T_M$ de um filtro casado a $s_i(t)$, quando $q(t)$ é aplicado às entradas do mesmo.

Na verdade, não temos $q(t)$. O sinal que chega ao receptor, $r(t)$, é dado por

$$\begin{aligned} r(t) &= s_i(t) + n_w(t) \\ &= \underbrace{s_i(t)}_{q(t)} + \underbrace{n(t)}_{\text{irrelevante}} + \underbrace{n_0(t)}_{\text{irrelevante}} \end{aligned}$$

em que $n_0(t)$ é a componente (irrelevante) de $n_w(t)$ ortogonal ao espaço de sinais de N dimensões. Por ser ortogonal a esse espaço, $n_0(t)$ é ortogonal a cada sinal no espaço. Logo, é ortogonal ao sinal $s_i(t)$, e

$$\int_{-\infty}^{\infty} n_0(t) s_i(t) dt = 0$$

e

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}, \mathbf{s}_i \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} q(t) s_i(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} n_0(t) s_i(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [q(t) + n_0(t)] s_i(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} r(t) s_i(t) dt \end{aligned} \quad (10.91)$$

Portanto, não faz diferença se usarmos $q(t)$ ou $r(t)$ na entrada. Aplicamos, então, o sinal que chega $r(t)$ a um banco de filtros casados em paralelo, e a saída do filtro é amostrada em $t = T_M$. Uma constante a_i é, então, adicionada à amostra da saída do i -ésimo filtro e as saídas resultantes são comparadas. Uma decisão é tomada a favor do sinal para o qual esta saída for a maior. A implementação do receptor para esse procedimento de decisão é mostrada na Fig. 10.18a. Na Seção 10.1, foi estabelecido que um filtro casado equivale a um correlator. Podemos, portanto, usar correlatores no lugar de filtros casados. Essa solução é mostrada na Fig. 10.18b.

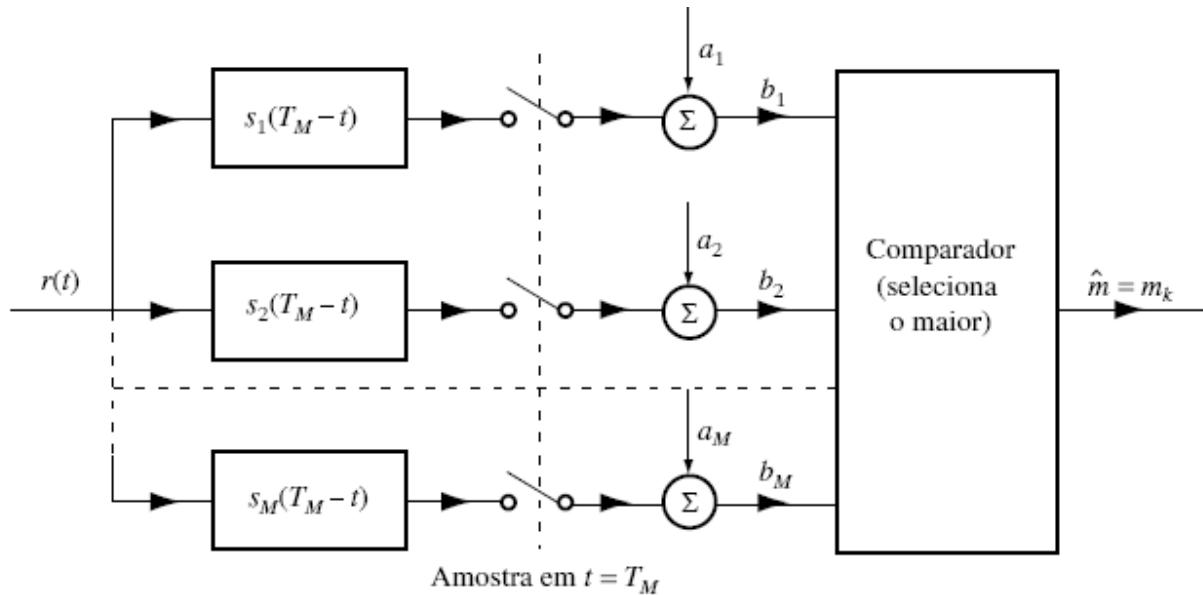
Mostramos que, na presença de AWGN, o receptor de filtro casado é o receptor ótimo quando o critério de mérito for a mínima probabilidade de erro. Reparemos que o sistema ótimo é linear, embora essa condição não tenha sido forçada. Portanto, para ruído gaussiano branco, o receptor ótimo é linear. O filtro casado e o procedimento de decisão discutidos nas Seções 10.1 e 10.2 são idênticos aos que acabamos de deduzir.

O receptor ótimo pode ser implementado de outra forma. Da Eq. (10.91), temos

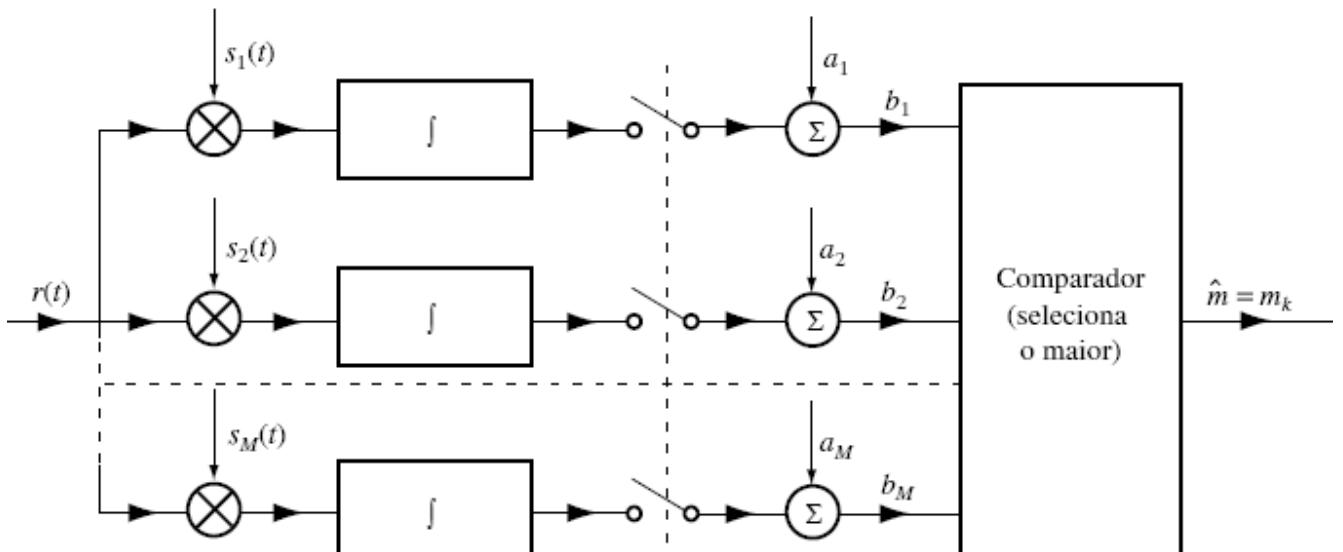
$$\langle \mathbf{q}, \mathbf{s}_i \rangle = \langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_i \rangle$$

Da Eq. (10.44), podemos escrever

$$\langle \mathbf{q}, \mathbf{s}_i \rangle = \sum_{j=1}^N r_j s_{ij}$$



(a)



(b)

Figura 10.18 Receptor M-ário ótimo: (a) detector de filtro casado; (b) detector de correlação.

Para calcular o termo $\langle \mathbf{q}, \mathbf{s}_i \rangle$ por essa equação, primeiro, r_j é gerado e, depois, é calculada a soma dos termos $r_j s_{ij}$ (recordemos que os s_{ij} são conhecidos), como mostrado na Fig. 10.19a. Os M detectores correlatores na Fig. 10.19b podem ser substituídos por filtros casados $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t)$, como indicado na Fig. 10.19b. Estes receptores ótimos (Figs. 10.18 e 10.19) têm

desempenhos idênticos. A escolha de um ou do outro tipo dependerá do custo. Por exemplo, se $N < M$ e a geração dos sinais $\{\varphi_j(t)\}$ for mais fácil do que a dos sinais $\{s_j(t)\}$, a configuração da Fig. 10.19 deve ser escolhida.

10.6.4 Regiões de Decisão e Probabilidade de Erro

Para calcular a probabilidade de erro do receptor ótimo, primeiro, devemos determinar as regiões de decisão no espaço de sinais. Como já mencionado, o espaço de sinais é dividido em M regiões de decisões que não se sobrepõem, ou regiões disjuntas, R_1, R_2, \dots, R_M , correspondentes às M mensagens. Se r cair na região R_k , a decisão é que m_k foi transmitido. As regiões de decisão são escolhidas para minimizar a probabilidade de erro no receptor. Com essa representação geométrica em mente, analisemos como o receptor ótimo estabelece tais regiões de decisões.

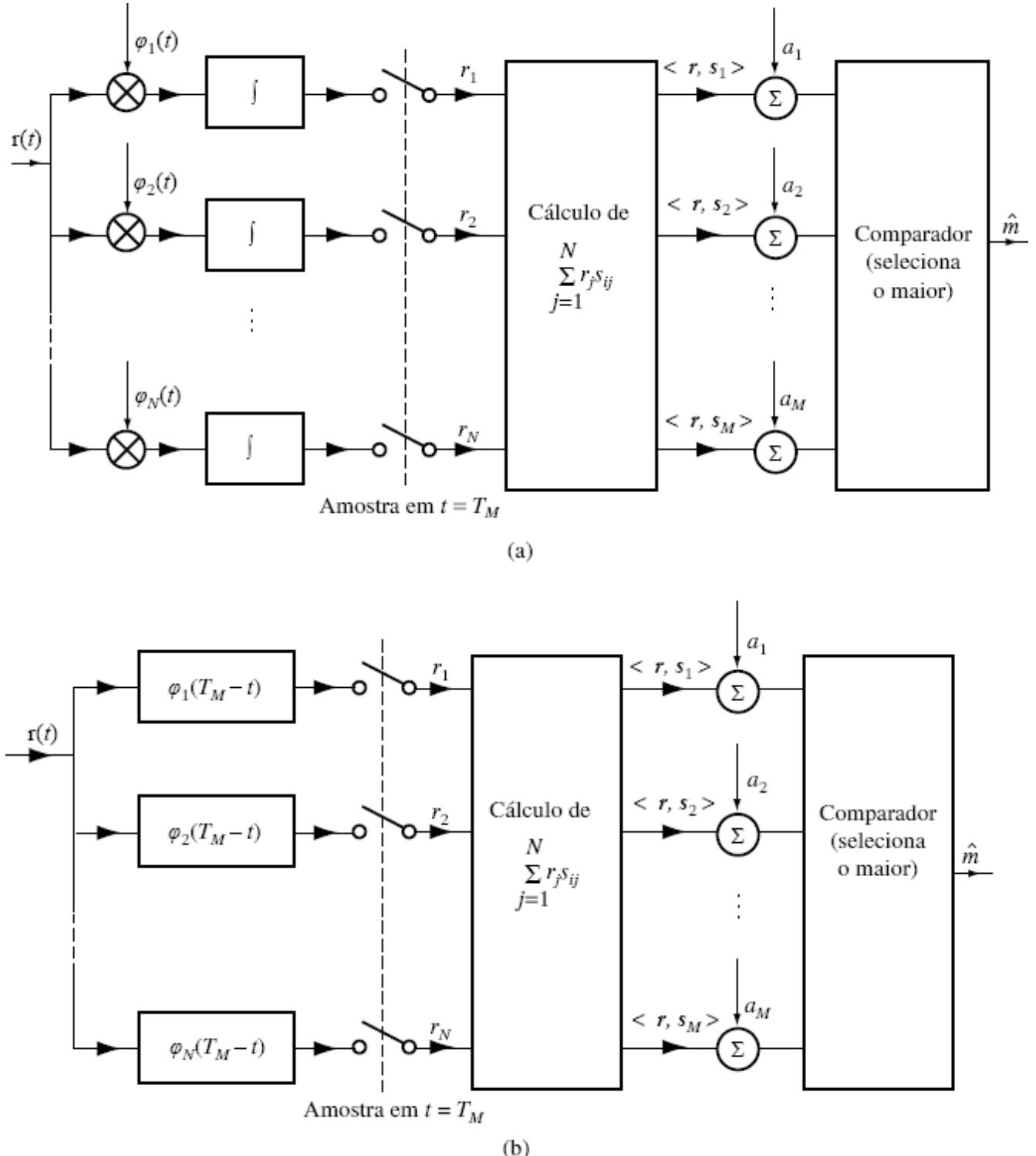


Figura 10.19 Outra forma de receptor M -ário ótimo: (a) correlator; (b) filtro casado.

A função de decisão é dada pela Eq. (10.86). O receptor ótimo estabelece $\hat{m} = m_k$ se a função de decisão

$$\mathcal{N} \ln P(m_i) - \|\mathbf{q} - \mathbf{s}_i\|^2$$

for máxima para $i = k$. Essa equação define as regiões de decisão.

Interpretação Geométrica no Espaço de Sinais

Por simplicidade, consideremos, primeiro, o caso de mensagens equiprováveis, ou seja, $P(m_i) = 1/M$ para todo i . Nesse caso, o primeiro termo na função de decisão é o mesmo para todo i e, portanto, pode ser ignorado. Assim, o receptor decide $\hat{m} = m_k$ se o termo $-\|\mathbf{q} - \mathbf{s}_i\|^2$ for máximo (numericamente, o menor) para $i = k$. Alternativamente, isso pode ser colocado da seguinte forma: o receptor decide $\hat{m} = m_k$ se a função de decisão $\|\mathbf{q} - \mathbf{s}_i\|^2$ for mínima para $i = k$. Reparemos que $\|\mathbf{q} - \mathbf{s}_i\|^2$ é a distância entre os pontos \mathbf{q} e \mathbf{s}_i . Logo, o procedimento de decisão tem uma interpretação simples no espaço geométrico. A decisão é tomada a favor do sinal mais próximo de \mathbf{q} , que é a projeção de \mathbf{r} [componente de $r(t)$] no espaço de sinais.

Qualitativamente, esse resultado era esperado para ruído gaussiano, pois ruído gaussiano tem simetria esférica. Contudo, se as mensagens não forem equiprováveis, não podemos ir tão longe somente em bases qualitativas. Todavia, podemos tirar certas conclusões gerais. Se uma particular mensagem m_i for mais provável que outras, será mais seguro decidir a favor de m_i com mais frequência que a favor de outras mensagens. Em situações como essa, as regiões de decisão serão polarizadas, ou ponderadas, a favor de m_i . Isso é mostrado pela presença do termo $\ln P(m_i)$ na função de decisão. Para um melhor entendimento desse ponto, consideremos um espaço de sinais bidimensional e dois sinais \mathbf{s}_1 e \mathbf{s}_2 , como ilustrado na Fig. 10.20a. Nessa figura, as regiões de decisão R_1 e R_2 são mostradas para mensagens equiprováveis: $P(m_1) = P(m_2) = 0,5$. A fronteira das regiões de decisão é o bissetor perpendicular da reta que une os pontos \mathbf{s}_1 e \mathbf{s}_2 . Notemos que qualquer ponto na fronteira equidista de \mathbf{s}_1 e de \mathbf{s}_2 . Caso \mathbf{q} caia na fronteira, “lançamos uma moeda” para decidir se selecionamos m_1 ou m_2 . A Fig. 10.20b mostra a situação em que duas mensagens não são equiprováveis. Para delinear a fronteira das regiões de decisão, usamos a Eq. (10.86). A decisão é m_1 se

$$\|\mathbf{q} - \mathbf{s}_1\|^2 - \mathcal{N} \ln P(m_1) < \|\mathbf{q} - \mathbf{s}_2\|^2 - \mathcal{N} \ln P(m_2)$$

Caso contrário, a decisão é m_2 .

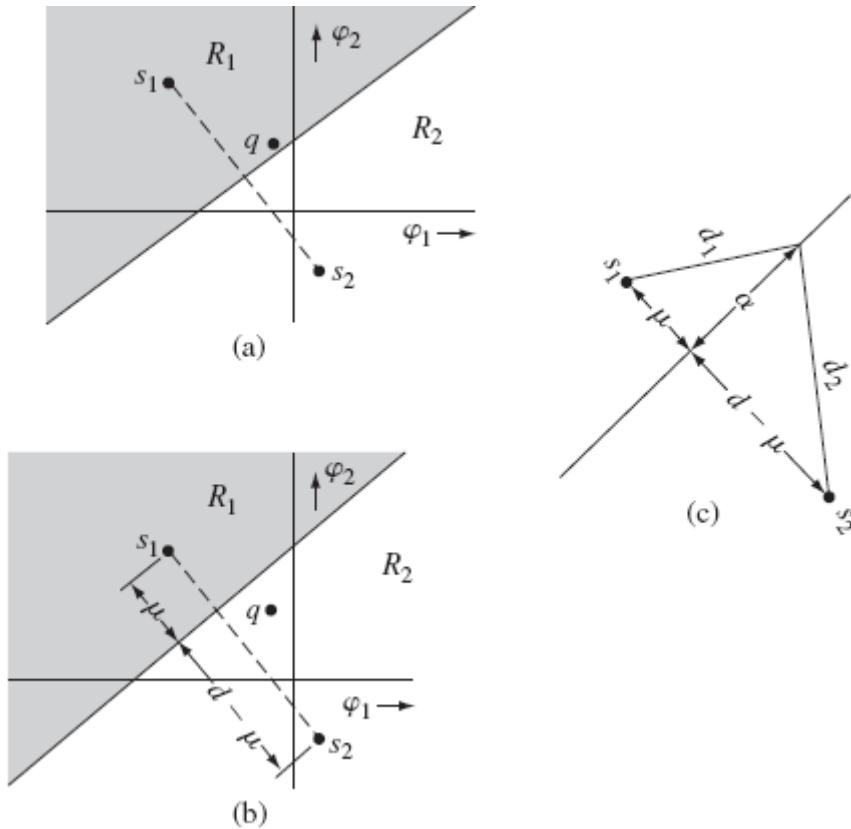


Figura 10.20 Determinação das regiões de decisão ótimas em um caso binário.

Reparemos que $\|\mathbf{q} - \mathbf{s}_1\|$ e $\|\mathbf{q} - \mathbf{s}_2\|$ representam as distâncias d_1 e d_2 entre \mathbf{q} e \mathbf{s}_1 e entre \mathbf{q} e \mathbf{s}_2 , respectivamente. Assim, a decisão é m_1 se

$$d_1^2 - d_2^2 < \mathcal{N} \ln \frac{P(m_1)}{P(m_2)}$$

O lado direito dessa desigualdade é uma constante c :

$$c = \mathcal{N} \ln \frac{P(m_1)}{P(m_2)}$$

Assim, a regra de decisão é

$$\text{Decisão } (\mathbf{q}) = \begin{cases} m_1 & \text{se } d_1^2 - d_2^2 < c \\ m_2 & \text{se } d_1^2 - d_2^2 > c \\ \text{aleatoriamente } m_1 \text{ ou } m_2 & \text{se } d_1^2 - d_2^2 = c \end{cases}$$

A fronteira das regiões de decisão é dada por $d_1^2 - d_2^2 = c$. Agora, mostremos que essa fronteira é uma reta perpendicular à reta $\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2$ e passa por essa a uma distância μ de \mathbf{s}_1 , em que

$$\mu = \frac{c + d^2}{2d} = \frac{\mathcal{N}}{2d} \ln \left[\frac{P(m_1)}{P(m_2)} \right] + \frac{d}{2} \quad (10.92)$$

e d é a distância entre \mathbf{s}_1 e \mathbf{s}_2 . Para provar isso, redesenhemos a parte de interesse da Fig. 10.20b como na Fig. 10.20c, da qual fica evidente que

$$\begin{aligned} d_1^2 &= \alpha^2 + \mu^2 \\ d_2^2 &= \alpha^2 + (d - \mu)^2 \end{aligned}$$

Logo,

$$d_1^2 - d_2^2 = 2d\mu - d^2 = c$$

Portanto,

$$\mu = \frac{c + d^2}{2d}$$

Esse é o resultado desejado. Assim, ao longo da fronteira de decisão, $d_1^2 - d_2^2$ é constante e igual a c . Para $M > 2$, as fronteiras das regiões de decisão podem ser determinadas com uso de argumento similar. Para o caso de três sinais bidimensionais equiprováveis, as regiões de decisão são mostradas na Fig. 10.21. As fronteiras das regiões de decisão são bissetores perpendiculares das retas que unem os sinais originalmente transmitidos. Se os sinais não forem equiprováveis, as fronteiras serão afastadas dos sinais com maiores probabilidades de ocorrência.

Para sinais em um espaço de N dimensões, as regiões de decisão serão hipercones de N dimensões. Caso haja M mensagens m_1, m_2, \dots, m_M com regiões de decisão R_1, R_2, \dots, R_M , respectivamente, então, $P(C|m_i)$, a probabilidade de uma decisão correta quando m_i tiver sido transmitido, é dada por

$$P(C|m_i) = P(\mathbf{q} \text{ estar em } R_i) \quad (10.93)$$

$P(C)$, a probabilidade de uma decisão correta, é dada por

$$P(C) = \sum_{i=1}^M P(m_i)P(C|m_i) \quad (10.94)$$

e P_{eM} , a probabilidade de erro, por

$$P_{eM} = 1 - P(C) \quad (10.95)$$

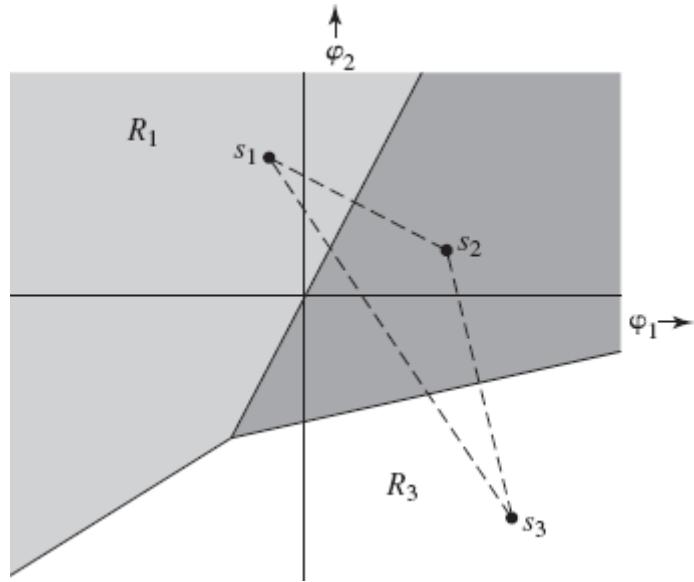


Figura 10.21 Determinação de regiões de decisão ótimas.

Exemplo 10.2 Dados binários são transmitidos por sinalização polar em um canal AWGN com PSD de ruído $N/2$. Dois sinais são usados

$$s_1(t) = -s_2(t) = \sqrt{E}\varphi(t) \quad (10.96)$$

As probabilidades dos símbolos, $P(m_1)$ e $P(m_2)$, não são iguais. Projetemos o receptor ótimo e determinemos a correspondente probabilidade de erro.

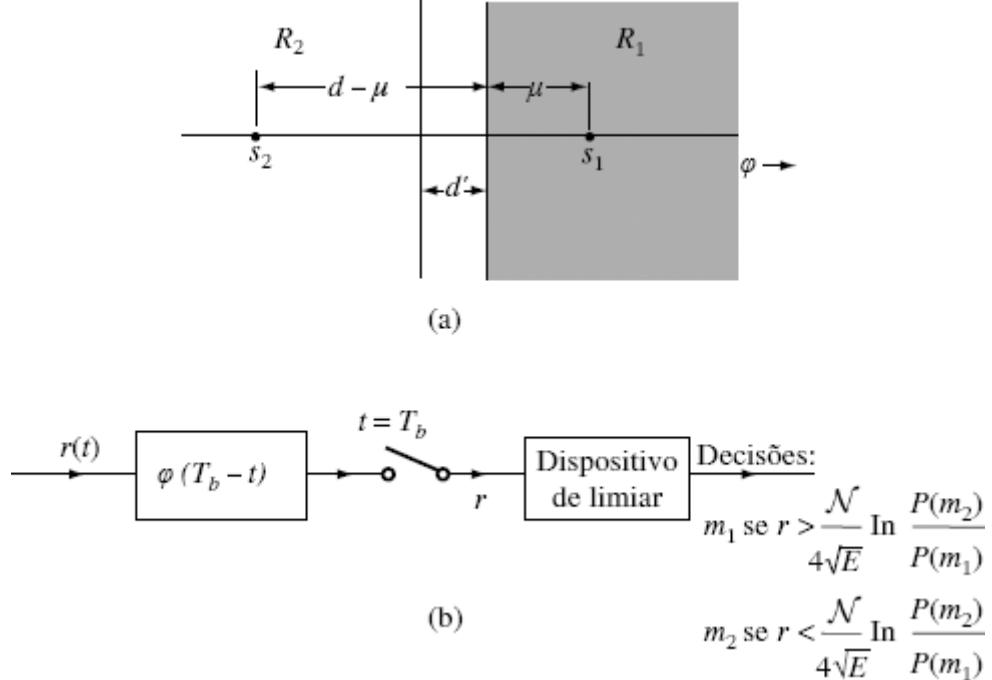


Figura 10.22 Regiões de decisão para o caso binário no Exemplo 10.2.

Os dois sinais são representados graficamente na Fig. 10.22a. Se a energia de cada sinal for E , a distância entre cada sinal e a origem será \sqrt{E} , e a distância d entre os dois sinais,

$$d = 2\sqrt{E}$$

As regiões de decisão R_1 e R_2 são mostradas na Fig. 10.22a. A distância μ é dada pela Eq. (10.92). A probabilidade condicional de decisão correta é

$$\begin{aligned} P(C|m = m_1) &= P(\text{vetor de ruído originado em } s_1 \text{ permanecer em } R_1) \\ &= P(n > -\mu) \\ &= 1 - Q\left(\frac{\mu}{\sigma_n}\right) \\ &= 1 - Q\left(\frac{\mu}{\sqrt{N/2}}\right) \end{aligned}$$

Do mesmo modo,

$$P(C|m = m_2) = 1 - Q\left(\frac{d - \mu}{\sqrt{N/2}}\right)$$

Com isso, a probabilidade de decisão correta é

$$\begin{aligned} P(C) &= P(m_1)\left[1 - Q\left(\frac{\mu}{\sqrt{N/2}}\right)\right] + P(m_2)\left[1 - Q\left(\frac{d - \mu}{\sqrt{N/2}}\right)\right] \\ &= 1 - P(m_1)Q\left(\frac{\mu}{\sqrt{N/2}}\right) - P(m_2)Q\left(\frac{d - \mu}{\sqrt{N/2}}\right) \\ \text{e} \\ P_e &= 1 - P(C) = P(m_1)Q\left(\frac{\mu}{\sqrt{N/2}}\right) + P(m_2)Q\left(\frac{d - \mu}{\sqrt{N/2}}\right) \end{aligned} \quad (10.97a)$$

em que

$$d = 2\sqrt{E} \quad (10.97b)$$

e

$$\mu = \frac{N}{4\sqrt{E}} \ln \frac{P(m_1)}{P(m_2)} + \sqrt{E} \quad (10.97c)$$

Quando $P(m_1) = P(m_2) = 0,5$, $\mu = \sqrt{E} = d/2$, e a Eq. (10.97a) se reduz a

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N}}\right) \quad (10.97d)$$

Nesse problema, como $N = 1$ e $M = 2$, o receptor na Fig. 10.19 é preferível ao da Fig. 10.18. Para esse caso, o receptor da forma na Fig. 10.19b se reduz ao na Fig. 10.22b. O limiar de decisão d' , como visto na Fig. 10.22a, é

$$d' = \sqrt{E} - \mu = \frac{\mathcal{N}}{4\sqrt{E}} \ln \frac{P(m_2)}{P(m_1)}$$

Notemos que d' é o limiar de decisão. Assim, na Fig. 10.22b, se a saída do receptor for $r > d'$, a decisão será m_1 . Caso contrário, a decisão será m_2 .

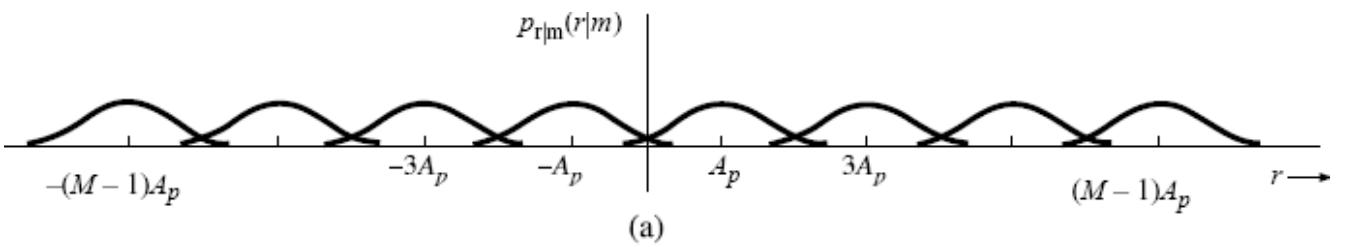
Quando $P(m_1) = P(m_2) = 0,5$, o limiar de decisão é zero. Este é, precisamente, o resultado deduzido na Seção 10.1 para sinalização polar.

10.6.5 Sinalização Multiampitude (PAM)

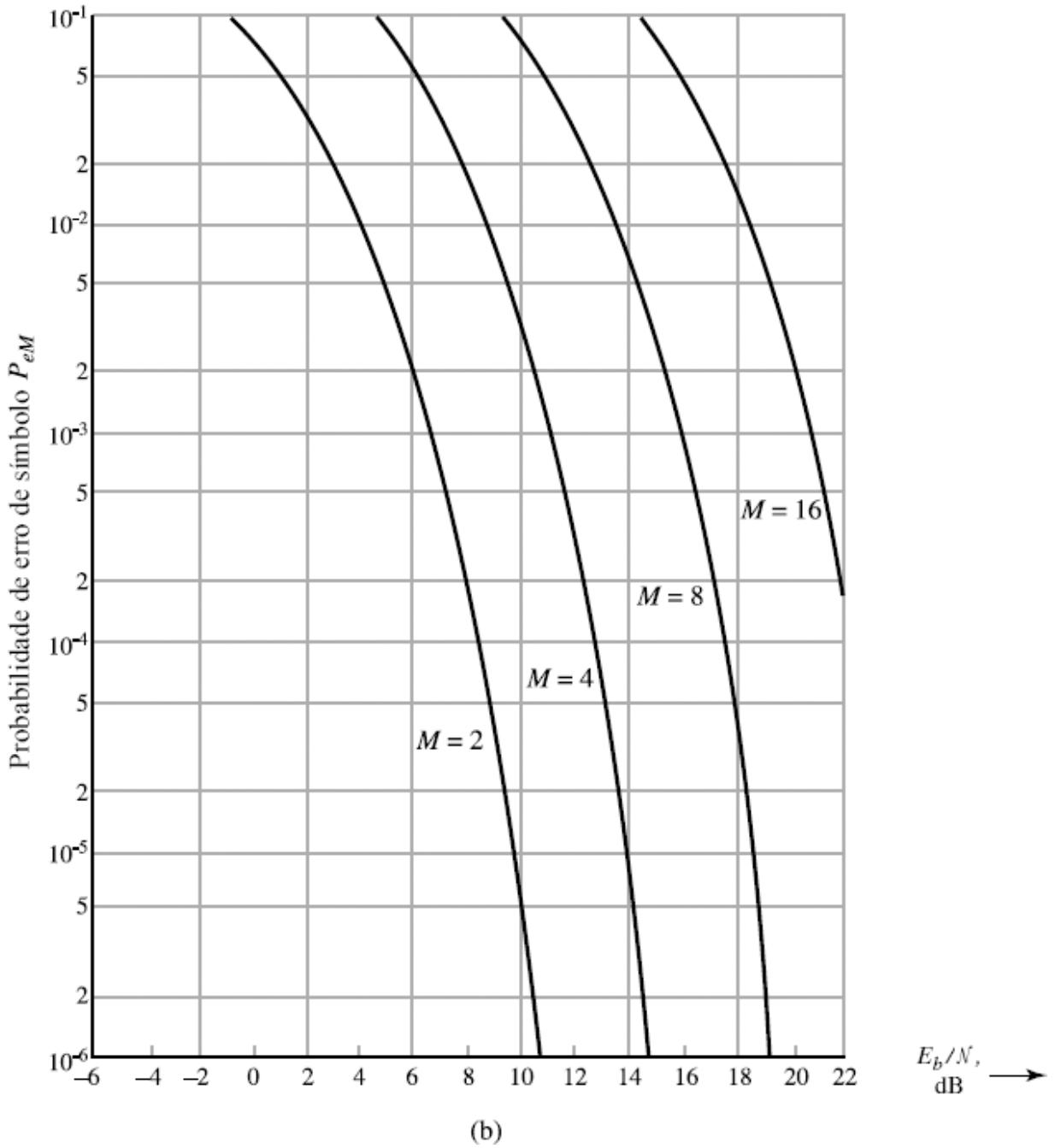
Consideremos, agora, a generalização da sinalização polar para o caso M -ário, muitas vezes referido como modulação em amplitude de pulso (PAM). No caso binário, transmitimos dois símbolos, que consistem nos pulsos $p(t)$ e $-p(t)$, em que $p(t)$ pode ser um pulso em banda-base ou uma portadora modulada por um pulso em banda-base. No caso de múltiplas amplitudes (PAM), os M símbolos são transmitidos por M pulsos $\pm p(t), \pm 3p(t), \pm 5p(t), \dots, \pm(M-1)p(t)$. Assim, para transmitir R_M dígitos M -ários por segundo, devemos transmitir R_M pulsos da forma $kp(t)$ por segundo. Pulsos são transmitidos a cada T_M segundos, com $T_M = 1/R_M$. Se E_p for a energia do pulso $p(t)$, e supondo que os pulsos $\pm p(t), \pm 3p(t), \pm 5p(t), \dots, \pm(M-1)p(t)$ sejam equiprováveis, a energia de pulso média E_{pM} será dada por

$$\begin{aligned} E_{pM} &= \frac{2}{M} [E_p + 9E_p + 25E_p + \dots + (M-1)^2 E_p] \\ &= \frac{2E_p}{M} \sum_{k=0}^{\frac{M-2}{2}} (2k+1)^2 \\ &= \frac{M^2 - 1}{3} E_p \end{aligned} \tag{10.98a}$$

$$\simeq \frac{M^2}{3} E_p \quad M \gg 1 \tag{10.98b}$$



(a)



(b)

Figura 10.23 (a) PDFs condicionais em PAM. (b) Probabilidade de erro em PAM.

Recordemos que símbolos M -ários transportam uma informação de $\log_2 M$ bits. Assim, a energia de bit será

$$E_b = \frac{E_{pM}}{\log_2 M} = \frac{M^2 - 1}{3 \log_2 M} E_p \quad (10.98c)$$

Como a largura de banda de transmissão independe da amplitude do pulso, a largura de banda M -ária é igual à do caso binário, para a dada taxa de pulsos, embora transporte mais informação. Isso significa que, para uma dada taxa de transmissão, a largura de banda PAM é menor que a do caso binário, por um fator $\log_2 M$.

Para calcular a probabilidade de erro, observemos que, como temos o mesmo pulso básico $p(t)$, o receptor ótimo M -ário é um filtro casado a $p(t)$. Se o pulso de entrada for $kp(t)$, a saída no instante de amostragem será

$$r(T_M) = kA_p + n_o(T_M)$$

Notemos que $A_p = E_p$, energia de $p(t)$, e que σ_n^2 , a variância de $n_o(t)$, é igual a $N E_p/2$. Assim, o receptor ótimo para o caso de sinalização M -ária de múltiplas amplitudes é idêntico ao do caso polar binário (Fig. 10.3 ou Fig. 10.6a). O amostrador tem M saídas possíveis

$$\pm kA_p + n_o(T_M) \quad k = 1, 3, 5, \dots, M - 1$$

que desejamos detectar. As PDFs condicionais $p(r|m_i)$ são gaussianas com média $\pm kA_p$ e variância σ_n^2 , como mostrado na Fig. 10.23a. Seja P_{eM} a probabilidade de detectar um símbolo e $P(\epsilon|m)$, a probabilidade de erro, dado que o símbolo m foi transmitido.

Para calcular P_{eM} , observemos que o caso dos dois símbolos extremos [representados por $\pm(M-1)p(t)$] é similar ao do caso binário, pois é necessário tomar cuidado apenas com um vizinho. Para os outros símbolos, é necessário tomar cuidado com vizinhos nos dois lados; em consequência, para esses símbolos, $P(\epsilon|m_i)$ é o dobro do correspondente aos símbolos extremos. Da Fig. 10.23a, fica evidente que $P(\epsilon|m_i)$ é $Q(A_p/\sigma_n)$ para os símbolos extremos, e $2Q(A_p/\sigma_n)$ para os $(M-2)$ símbolos remanescentes. Logo,

$$P_{eM} = \sum_{i=1}^M P(m_i)P(\epsilon|m_i) \quad (10.99a)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M P(\epsilon|m_i) \\ &= \frac{1}{M} \left[Q\left(\frac{A_p}{\sigma_n}\right) + Q\left(\frac{A_p}{\sigma_n}\right) + (M-2)2Q\left(\frac{A_p}{\sigma_n}\right) \right] \\ &= \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\frac{A_p}{\sigma_n}\right) \end{aligned} \quad (10.99b)$$

Para um receptor de filtro casado, $(A_p/\sigma_n)^2 = 2E_p/N$, e

$$P_{eM} = 2\left(\frac{M-1}{M}\right)Q\left(\sqrt{\frac{2E_p}{N}}\right) \quad (10.99c)$$

$$= 2\left(\frac{M-1}{M}\right)Q\left[\sqrt{\frac{6 \log_2 M}{M^2 - 1}}\left(\frac{E_b}{N}\right)\right] \quad (10.99d)$$

Taxa de Erro de Bit (BER)

É um tanto quanto injusto avaliar a sinalização M -ária com base em P_{eM} , a probabilidade de erro de um símbolo M -ário, que transporta a informação de $k = \log_2 M$ bits. Quando um símbolo M -ário está errado, nem todos os bits estão errados, de modo que há uma ponderação injusta para maiores valores de M . Para uma avaliação justa, devemos comparar vários esquemas em termos da probabilidade de erro de bit P_b , e não de P_{eM} , a probabilidade de erro de símbolo (taxa de erro de símbolo). A seguir, mostraremos que, para a sinalização de múltiplas amplitudes, $P_b \approx P_{eM}/\log_2 M$.

Como o tipo de erro que predomina é aquele em que um símbolo é confundido com seus vizinhos imediatos (Fig. 10.23a), seria lógico alocar a símbolos M -ários vizinhos palavras de código binário que difiram no menor número possível de dígitos. O código Gray* é adequado para esse fim, pois, nesse código, combinações binárias adjacentes diferem apenas por um dígito. Assim, um erro na detecção de um símbolo M -ário causará, no máximo, um erro em um grupo de $\log_2 M$ dígitos binários transmitidos pelo símbolo M -ário. Portanto, a taxa de erro de bit $P_b = P_{eM}/\log_2 M$. A Fig. 10.23b mostra P_{eM} em função de E_b/N para diversos

valores de M . Notemos que a relação $P_b = P_{eM}/\log_2 M$, válida para PAM, não é necessariamente válida para outros esquemas, para a específica estrutura de código. Devemos, então, recalcular a relação entre P_b e P_{eM} para cada esquema.

Barganha entre Potência e Largura de Banda

Para manter uma dada taxa de informação, no caso M -ário, a taxa de transmissão de pulsos é reduzida por um fator $k = \log_2 M$. Isso significa que, no caso M -ário, a largura de banda é reduzida pelo mesmo fator $k = \log_2 M$. Contudo, para manter a mesma P_{eM} , as Eq. (10.99) mostram que a potência transmitida por bit (que é proporcional a E_b) aumenta, aproximadamente, com

$$M^2 / \log_2 M = 2^{2k} / k$$

Se, no entanto, mantivermos uma dada largura de banda, a taxa de informação no caso M -ário aumenta pelo fator $k = \log_2 M$. A potência transmitida é igual a E_b vezes a taxa de bit. Logo, um aumento na taxa de dados também aumenta a potência transmitida por um fator

$$(M^2 / \log_2 M)(\log_2 M) = 2^{2k}$$

Assim, a potência aumenta exponencialmente com o aumento da taxa de informação, por um fator k . Em sistema de rádio de alta potência, tal aumento de potência pode não ser tolerável. Sistemas multiamplitude são atraentes quando a largura de banda for muito cara. Portanto, vemos como trocar potência por largura de banda. Como os canais de voz de uma rede de telefonia têm largura de banda fixa, sinalização multiamplitude (ou multifase ou uma combinação dos dois) é um método mais atraente de aumentar a taxa de informação. Essa é a forma em que modems de computadores na banda de voz alcançam altas taxas de dados.

Todos os resultados deduzidos aqui se aplicam tanto a sistema em banda-base como a sistemas digitais modulados com detecção coerente. Para detecção não coerente, existem relações similares entre sistemas binário e M -ário. **

10.6.6 Análise QAM M -ária

Na QAM M -ária, o sinal transmitido é representado por

$$s_i(t) = \underbrace{a_i \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos \omega_c t}_{\varphi_1(t)} + \underbrace{b_i \sqrt{\frac{2}{T_s}} \sin \omega_c t}_{\varphi_2(t)} \quad (10.100)$$

em que

$$\begin{aligned} a_i &= \pm \frac{d}{2}, \pm \frac{3d}{2}, \dots \pm \frac{(\sqrt{M}-1)d}{2} \\ b_i &= \pm \frac{d}{2}, \pm \frac{3d}{2}, \dots \pm \frac{(\sqrt{M}-1)d}{2} \end{aligned}$$

Podemos observar com facilidade que o espaço de sinais QAM é bidimensional, com funções de base $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$. Em vez de determinarmos o receptor ótimo e a correspondente probabilidade de erro para uma constelação QAM arbitrária, ilustremos a abordagem básica por meio da análise da configuração QAM de 16 pontos ilustrada na Fig. 10.24a. Consideraremos que todos os sinais sejam equiprováveis em um canal AWGN.

Primeiro, calculemos a probabilidade de erro. O primeiro quadrante do espaço de sinais é reproduzido na Fig. 10.24b. Como todos os sinais são equiprováveis, as fronteiras das regiões de decisão serão bissetores perpendiculares envolvendo vários sinais, como indicado na Fig. 10.24b.

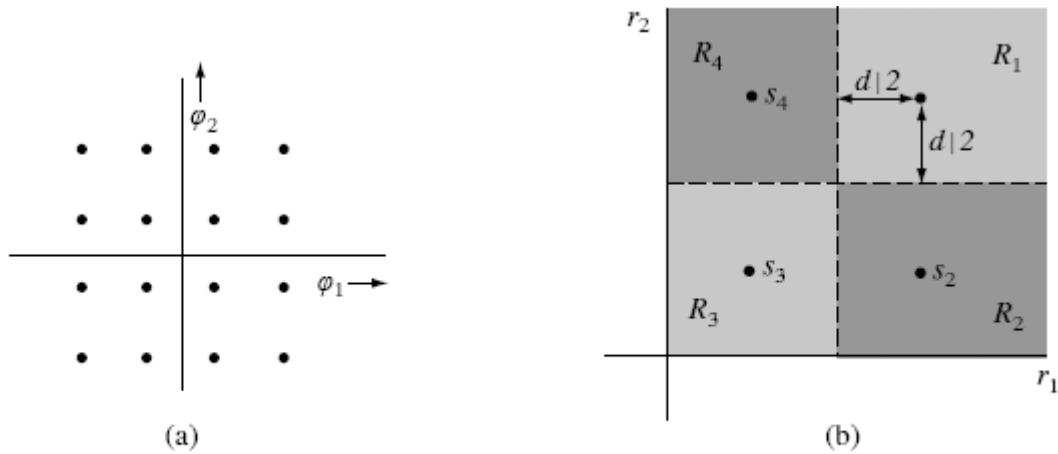


Figura 10.24 QAM 16-ária.

Da Fig. 10.24b, temos

$$P(C|m_1) = P(\text{vetor de ruído originado em } s_1 \text{ estar em } R_1)$$

$$\begin{aligned} &= P\left(n_1 > -\frac{d}{2}, n_2 > -\frac{d}{2}\right) \\ &= P\left(n_1 > -\frac{d}{2}\right) P\left(n_2 > -\frac{d}{2}\right) \\ &= \left[1 - Q\left(\frac{d/2}{\sigma_n}\right)\right]^2 \\ &= \left[1 - Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N}}\right)\right]^2 \end{aligned}$$

Por conveniência, definamos

$$p = 1 - Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N}}\right) \quad (10.101)$$

Logo,

$$P(C|m_1) = p^2$$

Usando argumentos semelhantes, obtemos

$$\begin{aligned} P(C|m_2) &= P(C|m_4) = \left[1 - Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N}}\right)\right] \left[1 - 2Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N}}\right)\right] \\ &= p(2p - 1) \end{aligned}$$

e

$$P(C|m_3) = (2p - 1)^2$$

Devido à simetria dos sinais nos quatro quadrantes, obtemos probabilidades semelhantes para os quatro sinais em cada quadrante. Assim, a probabilidade de decisão correta é

$$\begin{aligned} P(C) &= \sum_{i=1}^{16} P(C|m_i)P(m_i) \\ &= \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} P(C|m_i) \\ &= \frac{1}{16} [4p^2 + 4p(2p - 1) + 4p(2p - 1) + 4(2p - 1)^2] \\ &= \frac{1}{4} [9p^2 - 6p + 1] \\ &= \left(\frac{3p - 1}{2}\right)^2 \end{aligned} \tag{10.102}$$

e

$$P_{eM} = 1 - P(C) = \frac{9}{4} \left(p + \frac{1}{3}\right) (1 - p)$$

Na prática, $P_{eM} \rightarrow 0$ se a SNR for alta e, portanto, $P(C) \rightarrow 1$. Isso significa $p \simeq 1$ e $p + \frac{1}{3} \simeq 1 \frac{1}{3}$ [Eq. (10.102)], e

$$P_{eM} \simeq 3(1 - p) = 3Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N}}\right) \tag{10.103}$$

Para expressar esse termo da potência recebida S_i , devemos determinar \overline{E} , a energia média do conjunto de sinais na Fig. 10.24. Como E_k , a energia de s_k , é o quadrado da distância entre s_k e a origem,

$$\begin{aligned} E_1 &= \left(\frac{3d}{2}\right)^2 + \left(\frac{3d}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}d^2 \\ E_2 &= \left(\frac{3d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}d^2 \end{aligned}$$

De modo similar,

$$E_3 = \frac{d^2}{2} \quad \text{e} \quad E_4 = \frac{5}{2}d^2$$

Logo,

$$\bar{E} = \frac{1}{4} \left[\frac{9}{2}d^2 + \frac{5}{2}d^2 + \frac{d^2}{2} + \frac{5}{2}d^2 \right] = \frac{5}{2}d^2$$

e $d^2 = 0,4\bar{E}$. Além disso, para $M = 16$, cada símbolo transporta a informação de $\log_2 16 = 4$ bits. Portanto, a energia por bit, E_b , é

$$E_b = \frac{\bar{E}}{4}$$

e

$$\frac{E_b}{N} = \frac{\bar{E}}{4N} = \frac{5d^2}{8N}$$

Logo, para grandes valores de E_b/N ,

$$\begin{aligned} P_{eM} &= 3Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N}}\right) \\ &= 3Q\left(\sqrt{\frac{4E_b}{5N}}\right) \end{aligned} \tag{10.104}$$

Uma comparação desse resultado com o obtido no caso PSK binária [Eq. (10.33)] mostra que QAM de 16 pontos requer quase 2,5 vezes mais potência do que PSK binária; contudo, a taxa de transmissão é aumentada por um fator $\log_2 M = 4$. Essa comparação não leva em conta o fato de P_b , a BER, ser um pouco menor que P_{eM} .

Em termos da implementação do receptor, como $N = 2$ e $M = 16$, o receptor na Fig. 10.19 é preferível. Esse receptor é mostrado na Fig. 10.24c. Reparemos que, como todos os sinais são equiprováveis,

$$a_i = -\frac{E_i}{2}$$

A PSK é um caso especial da QAM em que todos os pontos de sinal residem em uma circunferência. Portanto, a mesma abordagem analítica pode ser aplicada. No entanto, a análise pode ser mais simples com o uso de coordenadas polares. Usemos o próximo exemplo para ilustrar as duas abordagens.

Exemplo 10.3 MPSK

Determinemos a probabilidade de erro do receptor ótimo para sinais MPSK equiprováveis, cada um com energia E .

A Fig. 10.25a mostra a configuração de sinais MPSK para $M = 8$. Como todos os sinais são equiprováveis, as regiões de decisão são cônicas, como mostrado. A mensagem m_1 é transmitida por um sinal $s_1(t)$ representado pelo vetor $s_1 = (s_1, 0)$. Sejam $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ a projeção do sinal recebido \mathbf{r} no espaço de sinais e $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$, o ruído; então,

$$\mathbf{q} = (s_1 + n_1, n_2) = (\underbrace{\sqrt{E} + n_1}_{q_1}, \underbrace{n_2}_{q_2})$$

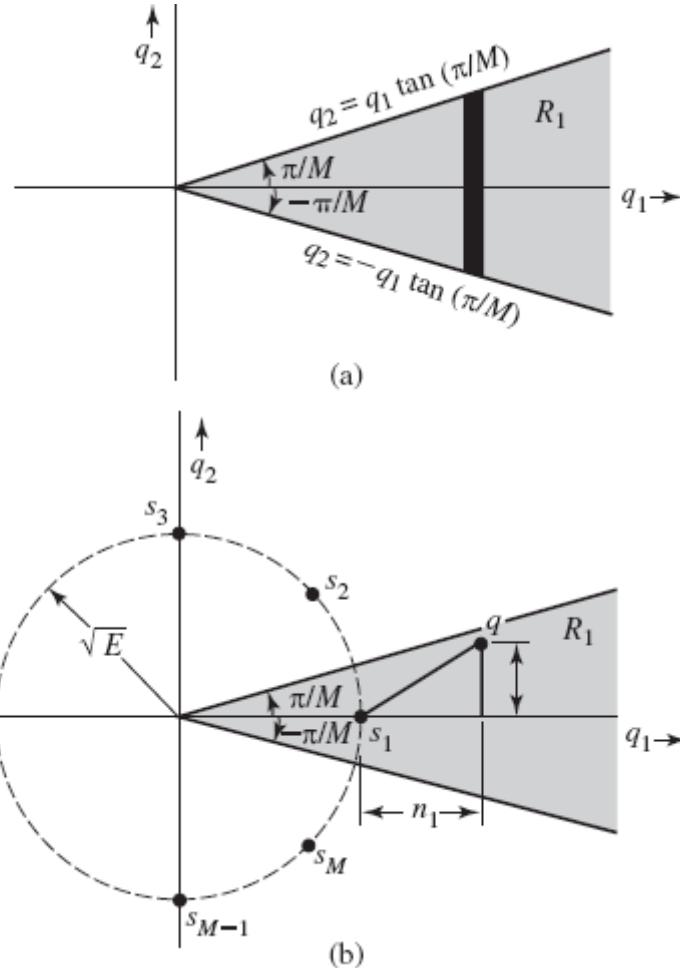


Figura 10.25 Sinais MSK.

E

$$P(C|m_1) = P(\mathbf{q} \text{ estar em } R_1)$$

que é o volume sob a região cônica da PDF conjunta de q_1 e q_2 . Como n_1 e n_2 são VAs gaussianas independentes com variância $N/2$, q_1 e q_2 são VAs gaussianas independentes com médias \sqrt{E} e 0, respectivamente, cada uma com variância $N/2$. Logo,

$$p_{q_1 q_2}(q_1, q_2) = \left[\frac{1}{\sqrt{\pi N}} e^{-(q_1 - \sqrt{E})^2/N} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{\pi N}} e^{-q_2^2/N} \right]$$

e

$$P(C|m_1) = \frac{1}{\pi N} \int_{R_1} e^{-[(q_1 - \sqrt{E})^2 + q_2^2]/N} dq_1 dq_2 \quad (10.105a)$$

$$= \frac{1}{\pi N} \int_{q_1} \left(\int_{q_2} e^{-q_2^2/N} dq_2 \right) e^{-(q_1 - \sqrt{E})^2/N} dq_1 \quad (10.105b)$$

Para calcular a integral em R_1 , primeiro, calculamos a integral na fita vertical sólida na Fig. 10.25b. Ao longo da fronteira de R_1 ,

$$q_2 = \pm \left(\tan \frac{\pi}{M} \right) q_1$$

Logo,

$$\begin{aligned} P(C|m_1) &= \frac{1}{\pi \mathcal{N}} \int_0^\infty \left(\int_{-q_1 \tan(\pi/M)}^{q_1 \tan(\pi/M)} e^{-q_2^2/\mathcal{N}} dq_2 \right) e^{-\left(q_1 - \sqrt{E}\right)^2/\mathcal{N}} dq_1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi \mathcal{N}}} \int_0^\infty \left[1 - 2Q\left(\frac{q_1 \tan(\pi/M)}{\sqrt{\mathcal{N}/2}}\right) \right] e^{-\left(q_1 - \sqrt{E}\right)^2/\mathcal{N}} dq_1 \end{aligned}$$

Mudando a variável para $x = (2/\mathcal{N})^{1/2} q_1$, obtemos

$$P(C|m_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \left[1 - 2Q\left(x \tan \frac{\pi}{M}\right) \right] e^{-\left(x - \sqrt{2E/\mathcal{N}}\right)^2/2} dx \quad (10.106a)$$

Como E_b , a energia por bit, é $E/\log_2 M$, temos

$$P(C|m_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \left[1 - 2Q\left(x \tan \frac{\pi}{M}\right) \right] e^{-\left[x - \sqrt{(2 \log_2 M)(E_b/\mathcal{N})}\right]^2/2} dx \quad (10.106b)$$

A integração também pode ser efetuada em coordenadas cilíndricas, com uso da transformação $q_1 = \rho(N/2)^{1/2} \cos \theta$ e $q_2 = \rho(N/2)^{1/2} \sin \theta$. Os limites em ρ são $(0, \infty)$ e os limites em θ , $-\pi/M$ e π/M . Assim,

$$P(C|m_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/M}^{\pi/M} d\theta \int_0^\infty \rho e^{-(\rho^2 - 2\rho \sqrt{2E/\mathcal{N}} \cos \theta + 2E/\mathcal{N})/2} d\rho \quad (10.107a)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/M}^{\pi/M} d\theta \int_0^\infty \rho e^{-[\rho^2 - 2\rho \sqrt{(2 \log_2 M)(E_b/\mathcal{N})} \cos \theta + (2 \log_2 M)(E_b/\mathcal{N})]/2} d\rho \quad (10.107b)$$

Devido à simetria da configuração de sinais, $P(C|m_i)$ é a mesma para todo i . Logo,

$$P(C) = P(C|m_1)$$

e

$$P_{eM} = 1 - P(C|m_1)$$

Como, no entanto, $s_i(t) = \sqrt{2E/T_M} \cos(\omega_o t + \theta_i)$, com $\omega_o = 2\pi/T_M$, $\theta_i = 2\pi i/M$, o receptor ótimo é apenas um detector de fase similar ao mostrado na Fig. 10.24 (Exercício 10.6-10). Com base nessa observação, podemos obter uma expressão alternativa para P_{eM} . Como $p_\Theta(\theta)$ da fase Θ de uma senoide acrescida de ruído gaussiano passa-faixa é dada na Eq. (9.86d),

$$P_{eM} = 1 - \int_{-\pi/M}^{\pi/M} p_\Theta(\theta) d\theta$$

A PDF $p_\Theta(\theta)$ na Eq. (9.86d) envolve A (a amplitude da senoide) σ_n^2 e (a variância do ruído). Admitindo um filtro casado e ruído branco [Eq. (10.11a)],

$$\frac{A^2}{\sigma_n^2} = \frac{2E_p}{\mathcal{N}} = \frac{2E_b \log_2 M}{\mathcal{N}}$$

Logo,

$$P_{eM} = 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/M}^{\pi/M} e^{-(E_b \log_2 M / \mathcal{N})} \left\{ 1 + \sqrt{\frac{4\pi E_b \log_2 M}{\mathcal{N}}} \cos \theta e^{(E_b \cos^2 \theta \log_2 M / \mathcal{N})} \right. \\ \times \left. \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{2E_b \log_2 M}{\mathcal{N}}} \cos \theta\right) \right] \right\} d\theta \quad (10.108)$$

A Fig. 10.26 mostra um gráfico de P_{eM} em função de E_b/N . Para $E_b/N \gg 1$ (ruído fraco) e $M \gg 2$, a Eq. (10.108) pode ser aproximada por

$$P_{eM} \simeq 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b \log_2 M}{\mathcal{N}}} \cdot e^{-\frac{\pi}{M}}\right) \quad (10.109a)$$

$$\simeq 2Q\left(\sqrt{\frac{2\pi^2 E_b \log_2 M}{M^2 \mathcal{N}}}\right) \quad (10.109b)$$

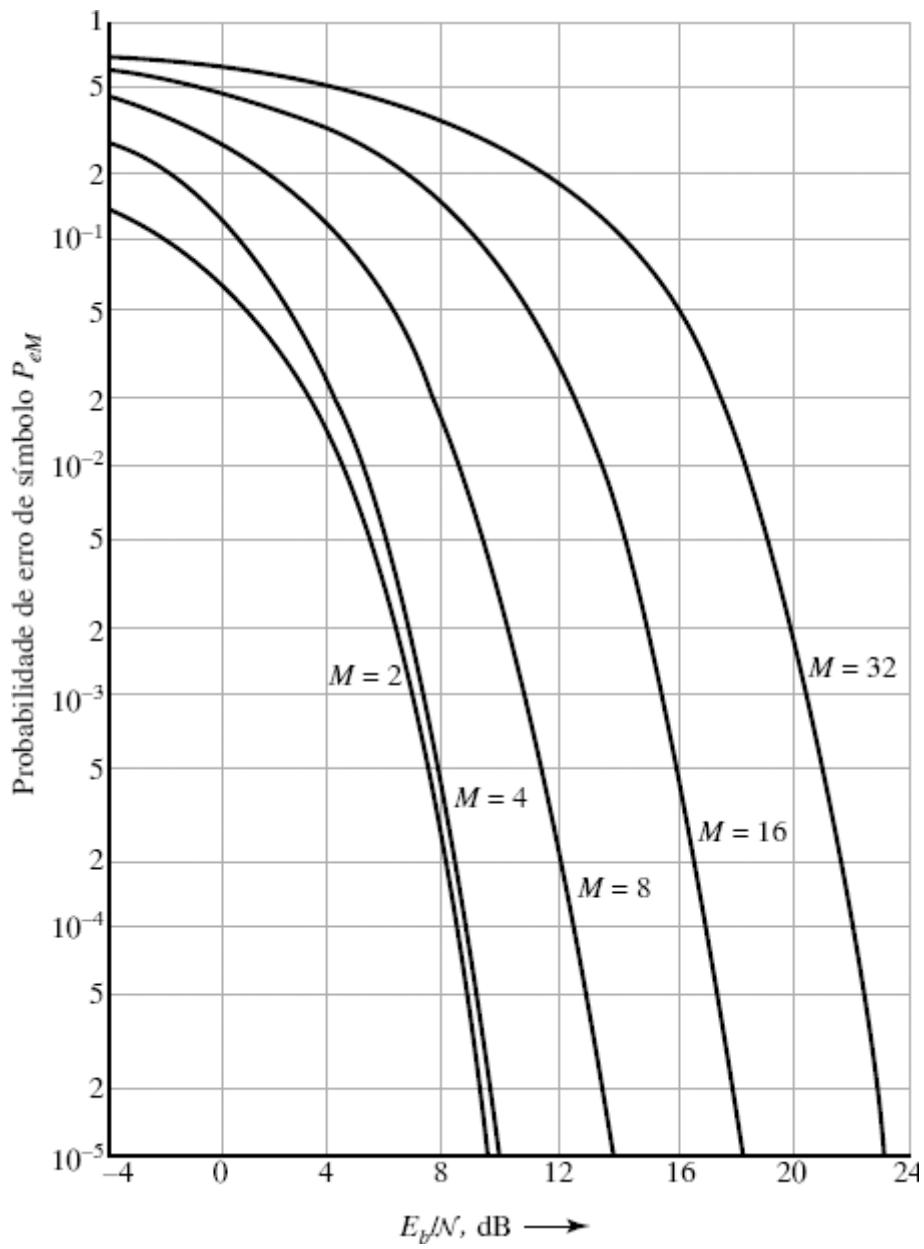


Figura 10.26 Probabilidade de erro do MSK.

10.7 EXPRESSÃO GERAL PARA A PROBABILIDADE DE ERRO DE RECEPTORES ÓTIMOS

Até aqui, consideramos esquemas simples, nos quais as regiões de decisão podem ser encontradas com facilidade. O método de cálculo de probabilidades de erro a partir do conhecimento das regiões de decisão também foi discutido. Quando o número de dimensões do espaço de sinais aumenta, fica mais difícil visualizar as regiões de decisão graficamente e, em consequência, o método perde poder. Desenvolvemos, agora, uma expressão analítica para o cálculo da probabilidade de erro para um esquema geral M -ário.

Da estrutura do receptor ótimo na Fig. 10.18, observamos que, se m_1 for transmitido, uma decisão correta será feita somente se

$$b_1 > b_2, b_3, \dots, b_M$$

Em outras palavras,

$$P(C|m_1) = \text{probabilidade } (b_1 > b_2, b_3, \dots, b_M | m_1) \quad (10.110)$$

Se m_1 for transmitido, então (Fig. 10.18),

$$b_k = \int_0^{T_M} [s_1(t) + n(t)] s_k(t) dt + a_k \quad (10.111)$$

Seja

$$\rho_{ij} = \int_0^{T_M} s_i(t) s_j(t) dt \quad i, j = 1, 2, \dots, M \quad (10.112)$$

em que os termos ρ_{ij} são conhecidos com **correlações cruzadas**. Assim, (se m_1 for transmitido)

$$b_k = \rho_{1k} + \int_0^{T_M} n(t) s_k(t) dt + a_k \quad (10.113a)$$

$$= \rho_{1k} + a_k + \sum_{j=1}^N s_{kj} n_j \quad (10.113b)$$

em que n_j é a componente de $n(t)$ ao longo de $\varphi_j(t)$. Notemos que $\rho_{1k} + a_k$ é uma constante, e que as variáveis n_j ($j = 1, 2, \dots, N$) são variáveis conjuntamente gaussianas, cada uma com média zero e variância $N/2$. Assim, as variáveis b_k são combinações lineares de variáveis conjuntamente gaussianas. Por conseguinte, as variáveis b_1, b_2, \dots, b_M também são conjuntamente gaussianas. A probabilidade de tomar uma decisão correta quando m_1 for transmitido pode ser calculada da Eq. (10.110). Reparemos que b_1 pode cair em qualquer lugar no intervalo $(-\infty, \infty)$. Mais precisamente, seja $p(b_1, b_2, \dots, b_M | m_1)$ a PDF conjunta de b_1, b_2, \dots, b_M ; então, a Eq. (10.110) pode ser expressa por

$$P(C|m_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{b_1} \cdots \int_{-\infty}^{b_1} p(b_1, b_2, \dots, b_M | m_1) db_1, db_2, \dots, db_M \quad (10.114a)$$

em que os limites de integração de b_1 são $(-\infty, \infty)$ e, para as variáveis restantes, os limites são $(-\infty, b_1)$. Assim,

$$P(C|m_1) = \int_{-\infty}^{\infty} db_1 \int_{-\infty}^{b_1} db_2 \cdots \int_{-\infty}^{b_1} p(b_1, b_2, \dots, b_M | m_1) db_M \quad (10.114b)$$

$P(C|m_2), \dots, P(C|m_M)$ podem ser calculadas de modo similar, e

$$P(C) = \sum_{j=1}^M P(C|m_j) P(m_j)$$

e

$$P_{eM} = 1 - P(C)$$

Exemplo 10.4 Conjunto Ortogonal de Sinais

Nesse conjunto, todos os M sinais $s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)$ têm mesma energia e são mutuamente ortogonais. Como exemplo, a Fig. 10.27 mostra um conjunto de sinais ortogonais para $M = 3$.

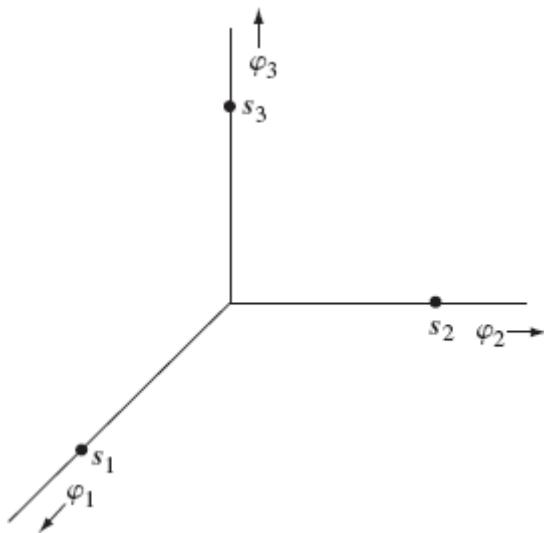


Figura 10.27 Sinais ortogonais.

O conjunto ortogonal $\{s_k(t)\}$ é caracterizado por

$$\langle s_j, s_k \rangle = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ E & j = k \end{cases} \quad (10.115)$$

Logo,

$$\rho_{ij} = \langle s_i, s_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ E & i = j \end{cases} \quad (10.116)$$

Devemos, ainda, supor que todos os sinais são equiprováveis, o que leva a

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2} \left[\mathcal{N} \ln \left(\frac{1}{M} \right) - E_k \right] \\ &= -\frac{1}{2} (\mathcal{N} \ln M + E) \end{aligned}$$

em que $E_k = E$ é a energia de cada sinal. Reparemos que a_k tem o mesmo valor para todos os sinais. Como as constantes a_k entram na expressão apenas para fins de comparação (Fig. 10.19b), quanto são iguais, podem ser desprezadas (podemos fazer $a_k = 0$). Para um conjunto ortogonal, temos, ainda,

$$s_k(t) = \sqrt{E} \varphi_k(t) \quad (10.117)$$

Portanto,

$$s_{kj} = \begin{cases} \sqrt{E} & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases} \quad (10.118)$$

Assim, das Eqs. (10.113b), (10.116) e (10.118), temos (quando m_1 for transmitido)

$$b_k = \begin{cases} E + \sqrt{E} n_1 & k = 1 \\ \sqrt{E} n_k & k = 2, 3, \dots, M \end{cases} \quad (10.119)$$

Reparemos que n_1, n_2, \dots, n_M são variáveis gaussianas independentes com média zero e variância $N/2$. As variáveis b_k , que são da forma $(\alpha n_k + \beta)$, também são variáveis gaussianas independentes. A Eq. (10.119) mostra que as variáveis b_1 tem média E e variância $(\sqrt{E})^2(N/2) = NE/2$. Logo,

$$p_{b_1}(b_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi NE}} e^{-(b_1-E)^2/NE}$$

$$p_{b_k}(b_k) = \frac{1}{\sqrt{\pi NE}} e^{-b_k^2/NE} \quad k = 2, 3, \dots, M$$

Como b_1, b_2, \dots, b_M são independentes, a densidade de probabilidade conjunta é o produto das densidades individuais:

$$p(b_1, b_2, \dots, b_M | m_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi NE}} e^{-(b_1-E)^2/NE} \prod_{k=2}^M \left(\frac{1}{\sqrt{\pi NE}} e^{-b_k^2/NE} \right)$$

e

$$\begin{aligned} P(C|m_1) &= \frac{1}{\sqrt{\pi NE}} \int_{-\infty}^{\infty} db_1 [e^{-(b_1-E)^2/NE}] \times \prod_{k=2}^M \left(\int_{-\infty}^{b_1} \frac{1}{\sqrt{\pi NE}} e^{-b_k^2/NE} db_k \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi NE}} \int_{-\infty}^{\infty} db_1 [e^{-(b_1-E)^2/NE}] \times \left(\int_{-\infty}^{b_1} \frac{1}{\sqrt{\pi NE}} e^{-x^2/NE} dx \right)^{M-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi NE}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - Q\left(\frac{b_1}{\sqrt{NE/2}}\right) \right]^{M-1} \times e^{-(b_1-E)^2/NE} db_1 \end{aligned} \quad (10.120a)$$

Mudando a variável de integração para $y = b_1/\sqrt{NE/2}$ e observando que $E/NE = (\log_2 M)E_b/NE$, e observando que obtemos

$$P(C|m_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(y-\sqrt{2E/NE}\right)^2/2} [1 - Q(y)]^{M-1} dy \quad (10.120b)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[y-\sqrt{(2\log_2 M)E_b/NE}\right]^2/2} [1 - Q(y)]^{M-1} dy \quad (10.120c)$$

Notemos que o conjunto de sinais é ortogonal e simétrico, ou seja, cada sinal tem a mesma relação com qualquer outro sinal no conjunto. Assim,

$$P(C|m_1) = P(C|m_2) = \dots = P(C|m_M)$$

Logo,

$$P(C) = P(C|m_1)$$

e

$$P_{eM} = 1 - P(C)$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[y-\sqrt{(2\log_2 M)E_b/NE}\right]^2/2} [1 - Q(y)]^{M-1} dy \quad (10.120d)$$

A Fig. 10.28 mostra gráficos de P_{eM} em função de E_b/N . Essa figura mostra um comportamento interessante para o caso $M = \infty$. À medida que M aumenta, o desempenho melhora, mas à custa de maior largura de banda. Portanto, esse é o caso típico da troca de largura de banda por desempenho.

Sinalização Multitom (MFSK)

No caso da sinalização multitom, M símbolos são transmitidos por M pulsos ortogonais de frequências $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_M$, cada um com duração T_M . Assim, os M pulsos transmitidos são da forma

$$\sqrt{2}p'(t) \cos \omega_k t \quad \omega_k = \frac{2\pi(N+k)}{T_M}$$

O receptor (Fig. 10.29) é uma simples extensão do receptor binário. O pulso de entrada é multiplicado pelas correspondentes referências $\sqrt{2} \cos \omega_i t$ ($i = 1, 2, \dots, M$). O filtro $H(f)$ é casado ao pulso passa-faixa $p(t)$, de modo que

$$h(t) = p'(T_M - t)$$

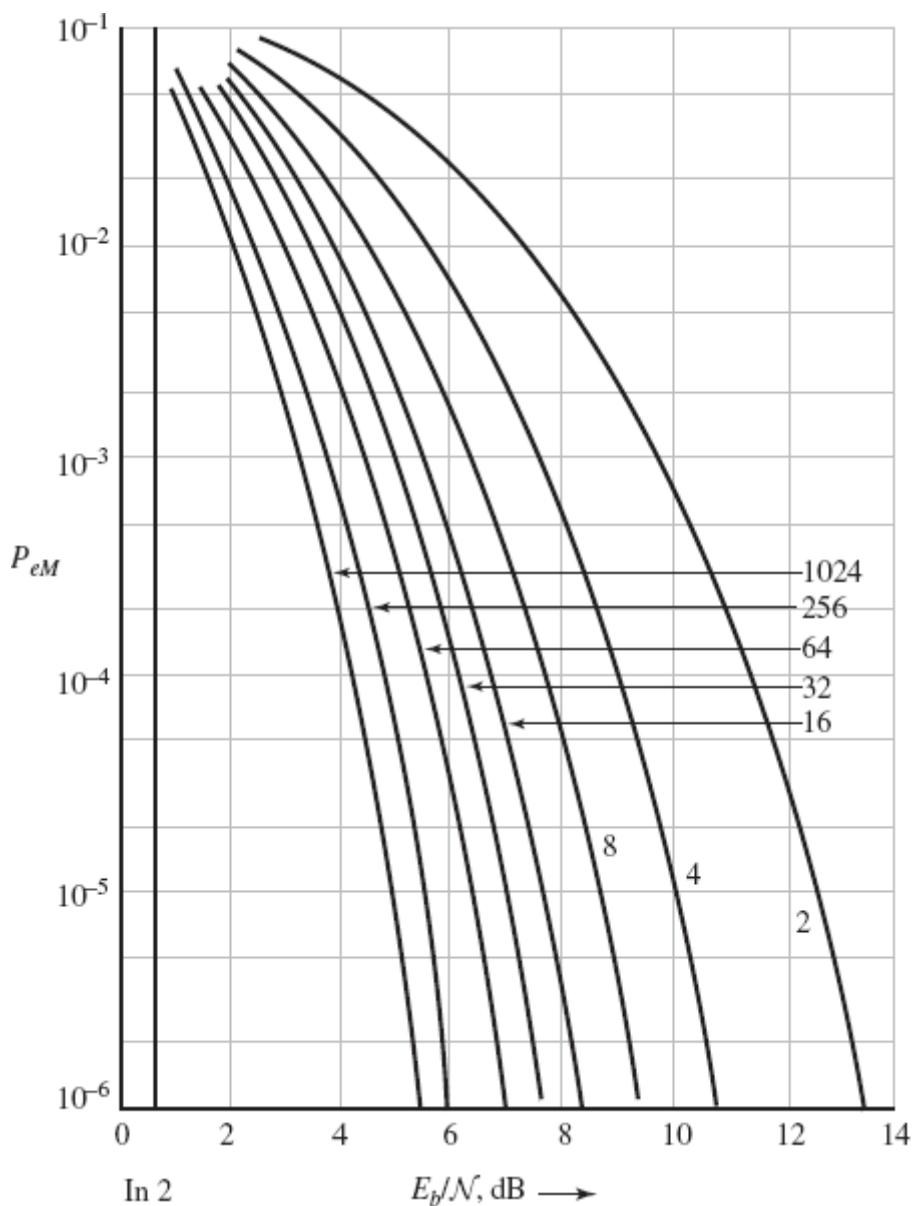


Figura 10.28 Probabilidade de erro de sinalização ortogonal e MFSK coerente.

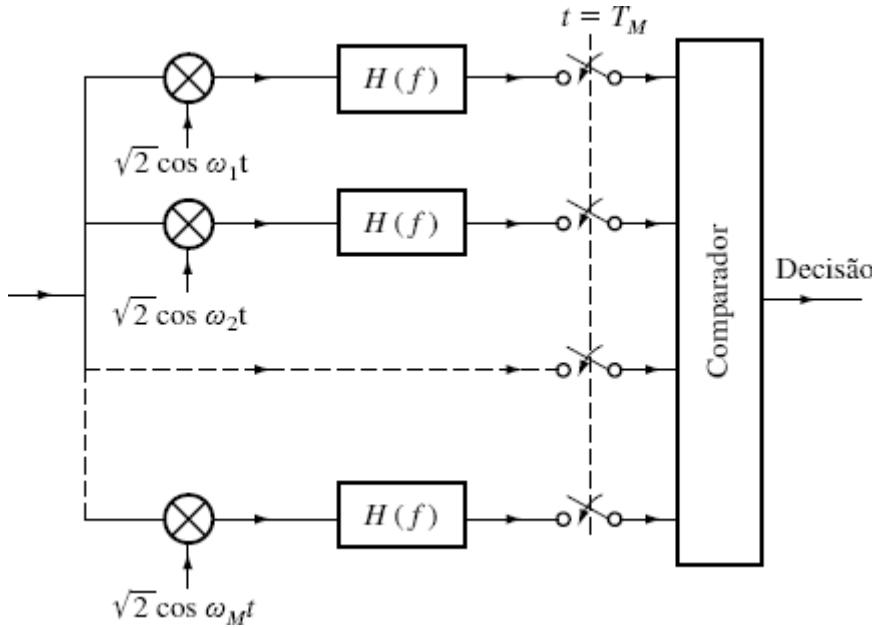


Figura 10.29 Receptor MFSK coerente.

O mesmo resultado é obtido se, no i -ésimo banco, em vez de usarmos um multiplicador e $H(f)$, usarmos um filtro casado ao pulso de RF $(t) \cos \omega_i t$. As amostras das M saídas em $t = T_M$ são b_1, b_2, \dots, b_M .

Como os M pulsos de sinal são ortogonais, a análise no Exemplo 10.4 é prontamente aplicável, com probabilidade de erro

$$P_{eM} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(y - \sqrt{2E_b \log_2 M/\mathcal{N}}\right)^2/2} [1 - Q(y)]^{M-1} dy \quad (10.121)$$

Os resultados M -ários são mostrados na Fig. 10.28.

A integral que aparece no lado direito da Eq. (10.121) é calculada, e o resultado é mostrado nos gráficos da Fig. 10.28 (P_{eM} em função de E_b/\mathcal{N}). Essa figura mostra um interessante comportamento para o caso $M = \infty$. Tomando o limite de P_{eM} na Eq. (10.121) quando $M \rightarrow \infty$, pode ser mostrado que⁵

$$\lim_{M \rightarrow \infty} P_{eM} = \begin{cases} 1 & E_b/\mathcal{N} < \log_e 2 \\ 0 & E_b/\mathcal{N} \geq \log_e 2 \end{cases}$$

Como a potência de sinal $S_i = E_b R_b$, em que R_b é a taxa de bits, temos que, para comunicação sem erro,

$$\frac{E_b}{\mathcal{N}} \geq \log_e 2 = \frac{1}{1,44} \quad \text{ou} \quad \frac{S_i}{\mathcal{N} R_b} \geq \frac{1}{1,44}$$

Logo,

$$R_b \leq 1,44 \frac{S_i}{\mathcal{N}} \text{ bit/s} \quad (10.122)$$

Isso mostra que a sinalização M -ária ortogonal pode transmitir dados sem erro a uma taxa de até $1,44 S_i / \mathcal{N}$ bits/s, à medida que $M \rightarrow \infty$ (Fig. 10.28).

Taxa de Erro de Bit (BER) de Sinalização Ortogonal

Nos casos de PAM e MPSK, mostramos que, com aplicação do código de Gray, $P_b = P_{eM} / \log_2 M$. Esse resultado não vale para MFSK, pois os erros que predominam em PAM e MPSK são aqueles em que um símbolo é confundido com o vizinho imediato. Podemos usar o código de Gray para alocar a símbolos vizinhos códigos que difiram somente por um dígito. Em MFSK, no entanto, um símbolo tem igual probabilidade de ser confundido com qualquer dos $M - 1$ símbolos remanescentes. Portanto, $P(\in)$, a probabilidade de confundir um particular símbolo M -ário por outro, é dada por

$$P(\epsilon) = \frac{P_{eM}}{M - 1} = \frac{P_{eM}}{2^k - 1}$$

Caso um símbolo M -ário difira por 1 bit de N_1 símbolos, por 2 bits de N_2 símbolos, e assim por diante, então \bar{N}_ϵ , o número médio de bits em erro na recepção de um símbolo M -ário, é

$$\begin{aligned}\bar{N}_\epsilon &= \sum_{n=1}^k n N_n P(\epsilon) \\ &= \sum_{n=1}^k n N_n \frac{P_{eM}}{2^k - 1} \\ &= \frac{P_{eM}}{2^k - 1} \sum_{n=1}^k n \binom{k}{n} \\ &= k 2^{k-1} \frac{P_{eM}}{2^k - 1}\end{aligned}$$

Esse é o número médio de bits em erro em uma sequência de k bits (um símbolo M -ário). Em consequência, a BER, P_b , é igual a essa figura de mérito dividida por k ,

$$P_b = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} P_{eM} \approx \frac{P_{eM}}{2} \quad k \gg 1$$

Dessa discussão emerge um fato muito interessante: sempre que o receptor ótimo for usado, a probabilidade de erro não depende de formas de onda específicas de sinal, mas somente de suas configurações no espaço de sinais.

Barganha entre Largura de Banda e Potência em Sinais M -ários Ortogonais

Como ilustrado por Landau e Pollak,³ a dimensionalidade de um sinal é $2BT_M + 1$, em que T_M é a duração do sinal e B , sua largura de banda essencial. Para um espaço de sinais de N dimensões ($N \leq M$), a largura de banda é $B = (N - 1)/2T_M$. Assim, a redução da dimensionalidade N reduz a largura de banda.

Para comprovar que sinais de N dimensões podem ser transmitidos em $(N - 1)/2T_M$ Hz, construamos um conjunto específico de sinais. Escolhamos os seguintes sinais ortogonais:

$$\begin{aligned}
\varphi_0(t) &= \frac{1}{\sqrt{T_M}} \\
\varphi_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{T_M}} \operatorname{sen} \omega_o t \\
\varphi_2(t) &= \sqrt{\frac{2}{T_M}} \cos \omega_o t \quad \omega_o = \frac{2\pi}{T_M} \\
\varphi_3(t) &= \sqrt{\frac{2}{T_M}} \operatorname{sen} 2\omega_o t \quad 0 \leq t \leq T_M \\
\varphi_4(t) &= \sqrt{\frac{2}{T_M}} \cos 2\omega_o t \\
&\vdots \\
\varphi_{k-1}(t) &= \sqrt{\frac{2}{T_M}} \operatorname{sen}\left(\frac{k}{2} \omega_o t\right) \\
\varphi_k(t) &= \sqrt{\frac{2}{T_M}} \cos\left(\frac{k}{2} \omega_o t\right)
\end{aligned} \tag{10.123}$$

Esses $k + 1$ pulsos ortogonais têm largura de banda total de $(k/2)(\omega_o/2\pi) = k/2T_M$ Hz. Logo, quando $k + 1 = N$, a largura de banda * é $(N - 1)/2T_M$. Assim, $N = 2T_M B + 1$.

Para alcançar uma dada probabilidade de erro, existe um equilíbrio entre a energia média do conjunto de sinais e sua largura de banda. Se reduzirmos a dimensionalidade do espaço de sinais, a largura de banda de transmissão também será reduzida. No entanto, com isso, as distâncias entre sinais se tornam menores, devido à dimensionalidade reduzida. Isso aumentará P_{eM} . Portanto, para manter uma dada P_{eM} baixa, devemos separar os sinais; ou seja, devemos aumentar a energia. Assim, o custo de uma reduzida largura de banda é pago em termos de aumento na energia. A barganha entre SNR e largura de banda também pode ser descrita de uma perspectiva da teoria da informação (Seção 13.6).

A sinalização M -ária provê meios adicionais de barganha, ou troca, entre taxa de transmissão, largura de banda de transmissão e potência de transmissão. Isso nos permite mais flexibilidade no projeto de um sistema de comunicação adequado. Assim, para uma dada taxa de transmissão, podemos barganhar largura de banda de transmissão por potência de transmissão. Podemos, também, aumentar a taxa de informação por um fator k ($k = \log_2 M$) pagando um preço apropriado em termos de largura de banda de transmissão ou potência de transmissão. A Fig. 10.28 mostrou que, na sinalização multitem, a potência transmitida decai com M . No entanto, a largura de banda de transmissão aumenta linearmente com M , ou exponencialmente com o fator de aumento de taxa k ($M = 2^k$). Assim, sinalização multitem difere radicalmente das sinalizações com múltiplas amplitudes ou múltiplas fases. No caso da última, a largura de banda independe de M , mas a potência transmitida aumenta com $M^2/\log_2 M = 2^{2k}/k$; ou seja, a potência aumenta exponencialmente com o fator de aumento de taxa k . Portanto, na sinalização multitem, a largura de banda aumenta exponencialmente com k , enquanto na sinalização multiamplitude ou multifase, a potência aumenta exponencialmente com k .

A implicação prática disso é que devemos usar sinalização multiamplitude ou multifase se a largura de banda for limitada (como em linhas telefônicas) e sinalização multitem quando a potência de transmissão for limitada (como em comunicação espacial). Existe um equilíbrio entre esses dois extremos. Investiguemos a possibilidade de aumentar a taxa de informação por um fator k simplesmente aumentando o número de pulsos binários transmitidos por um fator k . Nesse caso, a potência transmitida aumenta linearmente com k . Além disso, como a largura de banda é proporcional à taxa de pulso, a largura de banda aumenta linearmente com k . Portanto, nesse caso, podemos aumentar a taxa de informação por um fator k aumentando a largura de banda de transmissão e a potência de transmissão linearmente com k , evitando, assim, o fantasma de aumento exponencial exigido em um sistema M -ário. No entanto, agora, devemos aumentar tanto a largura de banda como a potência, enquanto, anteriormente, o aumento na taxa de informação poderia ser alcançado com o aumento da largura de banda ou da potência. Isso mostra que temos grande flexibilidade na barganha entre vários parâmetros e, portanto, em nossa capacidade de casar recursos e requisitos.

Exemplo 10.5 Devemos transmitir $2,08 \times 10^6$ dígitos binários por segundo com $P_b \leq 10^{-6}$. Três esquemas possíveis são considerados:

- (a) Binário
- (b) ASK 16-ário
- (c) PSK 16-ário

A PSD do ruído de canal é $S_n(\omega) = 10^{-8}$. Determinemos, em cada caso, a largura de banda de transmissão e a potência de sinal necessária na entrada do receptor.

(a) Binário: Consideremos a sinalização polar (o esquema mais eficiente),

$$P_b = P_e = 10^{-6} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N}}\right)$$

Isso fornece $E_b/N = 11,35$. A potência de sinal é $S_i = E_b R_b$. Logo,

$$S_i = 11,35 N R_b = 11,35(2 \times 10^{-8})(2,08 \times 10^6) = 0,47 \text{ W}$$

Admitindo pulsos passa-faixa cosseno levantado com fator de decaimento 1, a largura de banda B_T é

$$B_T = R_b = 2,08 \text{ MHz}$$

(b) ASK 16-ário: Como cada símbolo 16-ário transporta informação equivalente a $\log_2 16 = 4$ dígitos binários, precisamos transmitir apenas $R_M = (2,08 \times 10^6)/4 = 0,52 \times 10^6$ pulsos 16-ários por segundo. Isso requer uma largura de banda B_T de 520 kHz para pulsos em banda-base, e 1,04 MHz para pulsos modulados (admitindo pulsos cosseno levantado). Temos, ainda,

$$P_b = 10^{-6} = \frac{P_{eM}}{\log_2 16}$$

Portanto,

$$P_{eM} = 4 \times 10^{-6} = 2\left(\frac{M-1}{M}\right)Q\left[\sqrt{\frac{6E_b \log_2 16}{N(M^2-1)}}\right]$$

Para $M = 16$, isso fornece $E_b = 0,499 \times 10^{-5}$. Seja R_M a taxa de pulsos M -ários; então,

$$\begin{aligned} S_i &= E_p M R_M = E_b \log_2 M \cdot R_M \\ &= 0,499 \times 10^{-5} \times 4 \times (0,52 \times 10^6) = 9,34 \text{ W} \end{aligned}$$

(c) PSK 16-ário: Precisamos transmitir apenas $R_M = 0,52 \times 10^6$ pulsos por segundo. Para pulsos em banda-base, isso requer uma largura de banda de 520 kHz. Contudo, PSK é um sinal modulado, de modo que a necessária largura de banda é $2(0,52 \times 10^6) = 1,04 \text{ MHz}$. E,

$$P_{eM} = 4P_b = 4 \times 10^{-6} \simeq 2Q \left[\sqrt{\frac{2\pi^2 E_b \log_2 16}{256N}} \right]$$

Isso fornece $E_b = 137,8 \times 10^{-8}$ e

$$\begin{aligned} S_i &= E_b \log_2 16R_M \\ &= (137,8 \times 10^{-8}) \times 4 \times (0,52 \times 10^6) = 2,86 \text{ W} \end{aligned}$$

10.8 CONJUNTOS EQUIVALENTES DE SINAIS

O cálculo de probabilidades de erro é grandemente facilitado por meio de translação e rotação dos eixos coordenados. A seguir, mostraremos que tais operações são permitidas.

Consideremos um conjunto de sinais e suas correspondentes regiões de detecção, como mostrado na Fig. 10.30a. A probabilidade condicional $P(C|m_1)$ é a probabilidade de que o vetor de ruído desenhado a partir de s_1 esteja em R_1 . Reparemos que essa probabilidade não depende da origem do sistema de coordenadas. Podemos trasladar o sistema de coordenadas de forma que desejarmos. Isso equivale a trasladar o conjunto de sinais e as correspondentes regiões de decisão. Assim, $P(C|m_i)$ para o sistema trasladado mostrado na Fig. 10.30b é idêntica à do sistema na Fig. 10.30a.

No caso de ruído gaussiano, fazemos outra observação importante. A rotação do sistema de coordenadas não afeta a probabilidade de erro, pois a densidade de probabilidade do vetor de ruído tem simetria esférica. Para mostrar isso, consideremos a Fig. 10.30c, que representa o conjunto de sinais na Fig. 10.30a após translação e rotação. Reparemos que uma rotação do sistema de coordenadas equivale à rotação do conjunto de sinais no sentido oposto. Aqui, por conveniência, aplicamos uma rotação ao conjunto de sinais e não ao sistema de coordenadas. Pode ser visto que a probabilidade de que o vetor de ruído \mathbf{n} desenhado a partir de s_1 esteja em R_1 é a mesma nas Figs. 10.30a e c, pois essa probabilidade é dada pela integral da densidade de probabilidade de ruído $p_{\mathbf{n}}(\mathbf{n})$ na região R_1 . Como, para ruído gaussiano, $p_{\mathbf{n}}(\mathbf{n})$ tem simetria esférica, a probabilidade não será afetada por uma rotação da região R_1 . Fica claro que, para ruído de canal gaussiano aditivo, translação e rotação do sistema de coordenadas (ou translação e rotação do conjunto de sinais) não afetam a probabilidade de erro. Notemos que, quando aplicamos rotação ou translação a um conjunto de sinais, o conjunto resultante representa um conjunto de sinais totalmente diferente. Mesmo assim, os dois conjuntos têm idênticas probabilidades de erro. Tais conjuntos são denominados **conjuntos equivalentes**.

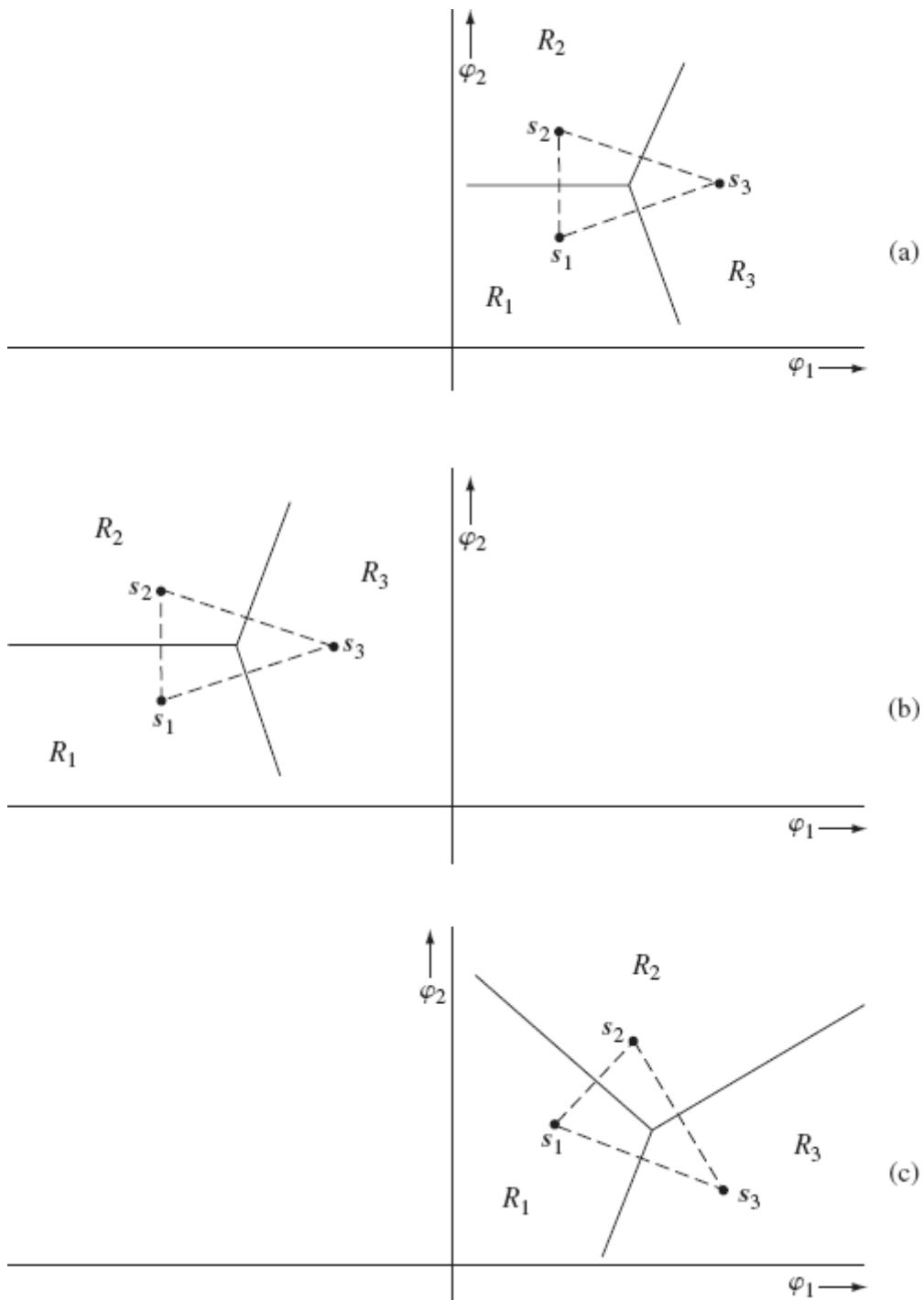


Figura 10.30 Translação e rotação dos eixos coordenados.

O exemplo a seguir ilustra a utilidade de translação e rotação de um conjunto de sinais no cálculo da probabilidade de erro.

Exemplo 10.6 Um conjunto de sinais PSK quaternários (QAM) é mostrado na Fig. 10.31a:

$$s_1 = -s_2 = \sqrt{E} \varphi_1$$

$$s_3 = -s_4 = \sqrt{E} \varphi_2$$

Admitindo que todos os símbolos sejam equiprováveis, determinemos P_{eM} para um canal AWGN com PSD de ruído $N/2$.

Esse problema já foi resolvido no Exemplo 10.4 para um valor genérico de M . Aqui, o resolveremos para $M = 4$, para demonstrar o poder da rotação de eixos.

Como todos os símbolos são equiprováveis, as fronteiras das regiões de decisão serão bissetores perpendiculares às retas que unem vários pontos de sinal (Fig. 10.31a). Agora,

$$P(C|m_1) = P(\text{vetor de ruído originado em } s_1 \text{ permanecer em } R_1) \quad (10.124)$$

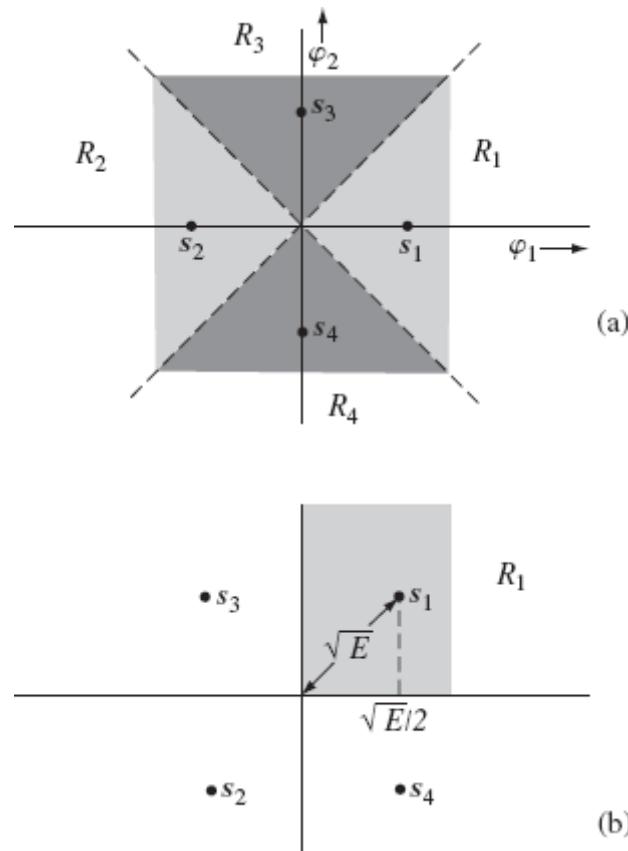


Figura 10.31 Análise de QPSK.

Isso pode ser calculado via integração da PDF conjunta das componentes n_1 e n_2 (originadas em s_1) na região R_1 . Essa integral dupla pode ser calculada com o emprego de limites adequados, como na Eq. (10.106). Contudo, o problema é grandemente simplificado se aplicarmos uma rotação de 45° ao conjunto de sinais, como mostrado na Fig. 10.31b. As regiões de decisão são retangulares; representando as componentes de ruído ao longo de φ_1 e φ_2 por n_1 e n_2 , respectivamente, a Eq. (10.124) pode ser expressa como

$$\begin{aligned} P(C|m_1) &= P\left(n_1 > -\sqrt{\frac{E}{2}}, n_2 > -\sqrt{\frac{E}{2}}\right) \\ &= P\left(n_1 > -\sqrt{\frac{E}{2}}\right) P\left(n_2 > -\sqrt{\frac{E}{2}}\right) \\ &= \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{E}{2\sigma_n^2}}\right)\right]^2 \\ &= \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{E}{N}}\right)\right]^2 \end{aligned} \quad (10.125a)$$

$$= \left[1 - Q \left(\sqrt{\frac{2E_b}{\mathcal{N}}} \right) \right]^2 \quad (10.125b)$$

10.8.1 Conjunto de Sinais de Mínima Energia

Como observado anteriormente, existe um número infinito de conjuntos de sinais equivalentes. Como a energia do sinal depende da distância entre o mesmo e a origem, conjuntos equivalentes não têm necessariamente a mesma energia média. Assim, entre os infinitos conjuntos equivalentes possíveis, aquele em que os sinais estão mais próximos da origem tem mínima energia média de sinal (ou potência transmitida).

Sejam M mensagens m_1, m_2, \dots, m_M com formas de onda $s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)$, representadas pelos pontos s_1, s_2, \dots, s_M , respectivamente, no espaço de sinais. A energia média desses sinais, \bar{E} , é dada por

$$\bar{E} = \sum_{i=1}^M P(m_i) \|s_i\|^2$$

Uma translação desse conjunto equivale à subtração de algum vetor \mathbf{a} de cada sinal. Agora, usemos esta simples operação para produzir um conjunto de mínima energia. Basicamente, desejamos determinar o vetor \mathbf{a} tal que a nova energia média

$$\bar{E}' = \sum_{i=1}^M P(m_i) \|s_i - \mathbf{a}\|^2 \quad (10.126)$$

seja mínima. Podemos mostrar que \mathbf{a} deve ser um centro de gravidade dos M pontos localizados em s_1, s_2, \dots, s_M , com massas $P(m_1), P(m_2), \dots, P(m_M)$, respectivamente,

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^M P(m_i) s_i = \bar{s}_i \quad (10.127)$$

Para provar isso, suponhamos que a energia seja mínima para alguma translação \mathbf{b} . Então,

$$\begin{aligned} \bar{E}' &= \sum_{i=1}^M P(m_i) \|s_i - \mathbf{b}\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^M P(m_i) \|(s_i - \mathbf{a}) + (\mathbf{a} - \mathbf{b})\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^M P(m_i) \|s_i - \mathbf{a}\|^2 + 2\langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \sum_{i=1}^M P(m_i)(s_i - \mathbf{a}) \rangle + \sum_{i=1}^M P(m_i) \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 \end{aligned}$$

Observemos que o segundo termo na expressão anterior se anula, segundo a Eq. (10.127), pois

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M P(m_i)(s_i - \mathbf{a}) &= \sum_{i=1}^M P(m_i)s_i - \mathbf{a} \sum_{i=1}^M P(m_i) \\ &= \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Logo,

$$\bar{E}' = \sum_{i=1}^M P(m_i) \|s_i - \mathbf{a}\|^2 + \sum_{i=1}^M P(m_i) \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2$$

O valor dessa expressão é mínimo quando $\mathbf{b} = \mathbf{a}$. Notemos que a rotação das coordenadas não altera a energia e, portanto, não há necessidade de aplicar rotação ao conjunto de sinais para minimizar a energia após a translação.

Exemplo 10.7

Para o conjunto de sinais ortogonais binários na Fig. 10.32a, determinemos o conjunto equivalente de sinais de mínima energia.

O conjunto de mínima energia para esse caso é mostrado na Fig. 10.32b. A origem está no centro de gravidade dos sinais. Por conveniência, aplicamos uma rotação aos sinais. As distâncias k_1 e k_2 devem ser tais que

$$k_1 + k_2 = d$$

e

$$k_1 P(m_1) = k_2 P(m_2)$$

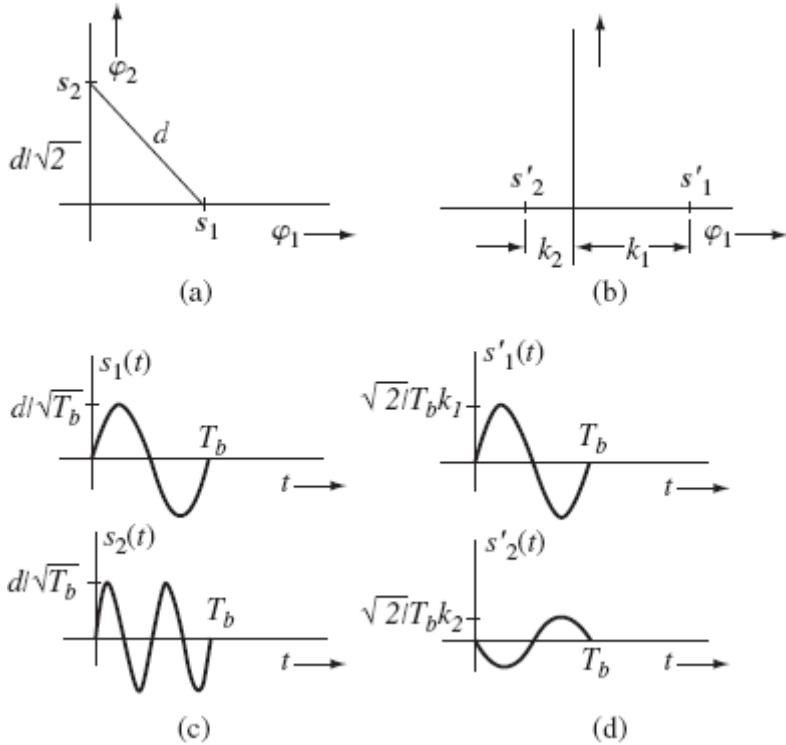


Figura 10.32 Conjuntos de sinais equivalentes.

A solução dessas duas equações fornece

$$k_1 = P(m_2)d$$

e

$$k_2 = P(m_1)d$$

Os dois conjuntos de sinais (Fig. 10.32a e b) têm a mesma probabilidade de erro, mas o último tem menor energia média. Sejam \bar{E} e \bar{E}' as respectivas energias médias dos dois conjuntos; então,

$$\bar{E} = P(m_1) \frac{d^2}{2} + P(m_2) \frac{d^2}{2} = \frac{d^2}{2}$$

e

$$\begin{aligned}\bar{E}' &= P(m_1)k_1^2 + P(m_2)k_2^2 \\ &= P(m_1)P^2(m_2)d^2 + P(m_2)P^2(m_1)d^2 \\ &= P(m_1)P(m_2)d^2\end{aligned}$$

Reparemos que, para $P(m_1) + P(m_2) = 1$, o produto $P(m_1)P(m_2)$ é máximo quando $P(m_1) = P(m_2) = 1/2$; neste caso,

$$P(m_1)P(m_2) = \frac{1}{4}$$

e, consequentemente,

$$\bar{E}' \leq \frac{d^2}{4}$$

Portanto,

$$\bar{E}' \leq \frac{\bar{E}}{2}$$

e, para o caso de sinais equiprováveis,

$$\bar{E}' = \frac{\bar{E}}{2}$$

Nesse caso,

$$\begin{aligned}k_1 = k_2 &= \frac{d}{2} \\ \bar{E} &= \frac{d^2}{2} \quad \text{e} \quad \bar{E}' = \frac{d^2}{4}\end{aligned}$$

Quando $k_1 = k_2$, os sinais na Fig. 10.32b são chamados **sinais antipodais**. A probabilidade de erro do conjunto de sinais na Fig. 10.32a (e Fig. 10.32b) é igual à do conjunto na Fig. 10.22a, e pode ser calculada da Eq. (10.97a).

Como um exemplo concreto, escolhamos os sinais de base como senoides de frequência $\omega_o = 2\pi/T_M$:

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{T_M}} \sin \omega_o t \\ 0 \leq t < T_M\end{aligned}$$

$$\varphi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T_M}} \sin 2\omega_o t$$

Logo,

$$s_1(t) = \frac{d}{\sqrt{2}} \varphi_1(t) = \frac{d}{\sqrt{T_M}} \sin \omega_o t$$

$$0 \leq t < T_M$$

$$s_2(t) = \frac{d}{\sqrt{2}} \varphi_2(t) = \frac{d}{\sqrt{T_M}} \sin 2\omega_o t$$

Os sinais $s_1(t)$ e $s_2(t)$ são mostrados na Fig. 10.32c e a representação geométrica, na Fig. 20.32a. Os dois sinais se localizam a uma distância $d/\sqrt{2}$ da origem, e a distância entre os sinais é d .

Para esse conjunto, os sinais de energia mínima $s'_1(t)$ e $s'_2(t)$ são dados por

$$s'_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T_M}} P(m_2) d \sin \omega_o t$$

$$0 \leq t < T_M$$

$$s'_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{T_M}} P(m_1) d \sin \omega_o t$$

Gráficos desses sinais são mostrados na Fig. 10.32d.

10.8.2 Conjunto de Sinais Simplex

Um conjunto de energia mínima equivalente a um conjunto equiprovável é denominado **conjunto de sinais simplex** ou **transortogonais**. Um conjunto simplex pode ser deduzido como um conjunto equivalente ao conjunto ortogonal na Eq. (10.115).

Para obter o conjunto de energia mínima, a origem deve ser deslocada para o centro de gravidade do conjunto de sinais. Para o caso bidimensional (Fig. 10.33a), o conjunto simplex é mostrado na Fig. 10.33c; para o caso tridimensional (Fig. 10.33b), o conjunto simplex é mostrado na Fig. 10.33d. Notemos que a dimensionalidade do conjunto de sinais simplex é menor que a do conjunto ortogonal, sendo a diferença igual a 1. Isso é verdadeiro para qualquer valor de M . Pode ser mostrado que, no caso em que energia é uma limitação, o conjunto de sinais simplex é ótimo (mínima probabilidade de erro) para sinais equiprováveis envolvidos por ruído gaussiano branco.^{4 , 8}

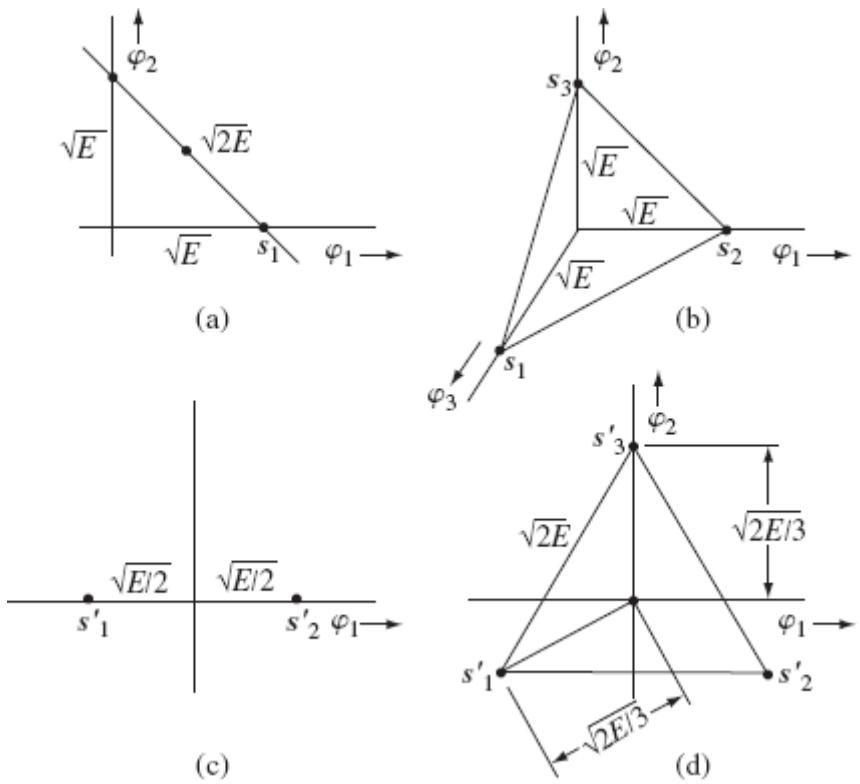


Figura 10.33 Sinais simplex.

Podemos calcular a energia média de um conjunto simplex observando que o mesmo é obtido por translação do conjunto ortogonal por um vetor \mathbf{a} , dado na Eq. (10.127),

$$\mathbf{a} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{s}_i$$

Para sinais ortogonais,

$$\mathbf{s}_i = \sqrt{E} \boldsymbol{\varphi}_i$$

Portanto,

$$\mathbf{a} = \frac{\sqrt{E}}{M} \sum_{i=1}^M \boldsymbol{\varphi}_i$$

em que E é a energia de cada sinal no conjunto ortogonal e $\boldsymbol{\varphi}_i$ é o vetor unitário ao longo do i -ésimo eixo coordenado. Os sinais no conjunto simplex são dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{s}'_k &= \mathbf{s}_k - \mathbf{a} \\ &= \sqrt{E} \boldsymbol{\varphi}_k - \frac{\sqrt{E}}{M} \sum_{i=1}^M \boldsymbol{\varphi}_i \end{aligned} \tag{10.128}$$

A energia E' do sinal \mathbf{s}'_k é dada por $|\mathbf{s}'_k|^2$,

$$E' = \langle \mathbf{s}'_k, \mathbf{s}'_k \rangle \tag{10.129}$$

Substituindo a Eq. (10.128) na Eq. (10.129) e observando que o conjunto $\boldsymbol{\varphi}_i$ é ortogonal, temos

$$\begin{aligned}
E' &= E - \frac{E}{M} \\
&= E \left(1 - \frac{1}{M}\right)
\end{aligned} \tag{10.130}$$

Portanto, para o mesmo desempenho (probabilidade de erro), a energia média do conjunto de sinais simplex é $1 - 1/M$ vezes a do conjunto de sinais ortogonais. Para $M \gg 1$, a diferença não é significativa. Por isso e por conta da facilidade de geração, sinais ortogonais, e não sinais simplex, são usados na prática, sempre que M seja maior do que 4 ou 5.

Na Seção 13.6, mostraremos que, no limite $M \rightarrow \infty$, os sinais ortogonais (assim como os simplex) alcançam o limite superior de desempenho previsto pelo teorema de Shannon.

10.9 RUÍDO DE CANAL NÃO BRANCO (COLORIDO)

Até aqui, restringimos nossa análise ao ruído de canal gaussiano branco. Essa análise pode ser estendida para o caso de ruído de canal não branco, ou colorido, gaussiano. Para que possamos seguir adiante, a expansão de Karhunen-Löeve da Eq. (10.57) deve ser resolvida para ruído colorido com função de autocorrelação $R_x(t, t_1)$. Essa solução geral pode, no entanto, ser muito complexa para ser implementada.⁴

Por sorte, para uma grande classe de ruídos gaussianos coloridos, a densidade espectral de potência $S_n(f)$ é não zero na largura de banda B do sinal de mensagem. Essa propriedade fornece uma alternativa eficaz de cálculo. Usemos um filtro branqueador de ruído $H(f)$ na entrada do receptor, em que

$$H(f) = \frac{1}{\sqrt{S_n(f)}} e^{-j2\pi f t_d}$$

O atraso t_d introduzido para assegurar que o filtro branqueador seja causal (realizável).

Consideremos um conjunto de sinais $\{s_i(t)\}$ e um ruído de canal $n(t)$ que não seja branco [$S_n(f)$ não é constante]. Na entrada do receptor, usemos um filtro branqueador de ruído $H(f)$ que transforme o ruído colorido em ruído branco (Fig. 10.34). Contudo, o filtro também altera o conjunto de sinais $\{s_i(t)\}$ para $\{s'_i(t)\}$, com

$$s'_i(t) = s_i(t) * h(t)$$

Agora, temos um novo conjunto de sinais $\{s'_i(t)\}$ misturado com ruído gaussiano branco, para o qual o receptor ótimo e correspondente probabilidade de erro podem ser determinados pelo método discutido anteriormente.

10.10 OUTROS CRITÉRIOS ÚTEIS DE DESEMPENHOS

O receptor ótimo usa a estratégia de decisão que faz melhor uso possível dos dados observados e de qualquer informação disponível *a priori*. A estratégia também dependerá dos pesos alocados aos vários tipos de erro. Neste capítulo, até aqui, admitimos que todos os erros tenham o mesmo peso (ou mesmo custo). Essa hipótese não se justifica em todos os casos e, portanto, podemos ser forçados a alterar a regra de decisão.

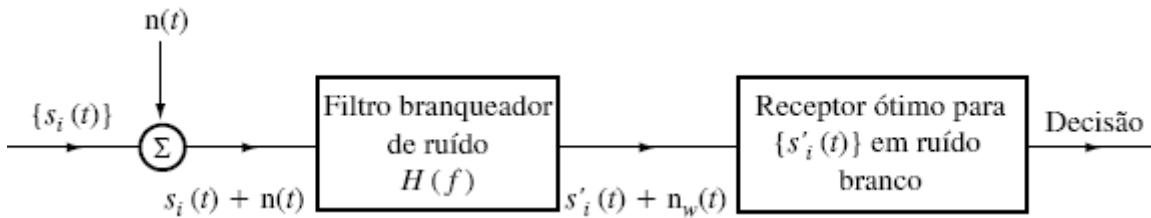


Figura 10.34 Receptor M -ário ótimo para ruído de canal não branco.

Receptor de Bayes Generalizado

Caso conheçamos as probabilidades *a priori* e as funções de custo de erros de vários tipos, o receptor que minimiza o custo médio de decisão recebe a denominação de **receptor de Bayes** e a regra de decisão, **regra de decisão de Bayes**. Reparemos que o

receptor discutido até aqui é o receptor de Bayes sob a hipótese de que todos os erros têm custo igual (pesos iguais). Para generalizar essa regra, consideremos

$$C_{kj} = \text{custo de decidir } \hat{m} = m_k \text{ quando } m_j \text{ foi transmitido} \quad (10.131)$$

e,

$$P(m_i | q) = \text{probabilidade condicional de que } m_i \text{ tenha sido transmitido quando } q \text{ foi recebido}$$

Se q foi recebido, a probabilidade de que m_j tenha sido transmitido é $P(m_j | q)$, para todo $j = 1, 2, \dots, M$. Assim, o custo médio de decidir $\hat{m} = m_k$ é β_k , dado por

$$\begin{aligned} \beta_k &= C_{k1}P(m_1 | q) + C_{k2}P(m_2 | q) + \dots + C_{kM}(m_M | q) \\ &= \sum_{j=1}^M C_{kj}P(m_j | q) \end{aligned} \quad (10.132)$$

Logo, se q foi recebido, o receptor ótimo decide $= m_k$ se

$$C_{12}P(m_2 | q) < C_{21}P(m_1 | q)$$

ou

$$\sum_{j=1}^M C_{kj}P(m_j | q) < \sum_{j=1}^M C_{ij}P(m_j | q) \text{ para todo } i \neq k \quad (10.133)$$

O uso da regra de Bayes mista na Eq. (10.133) leva a

$$\sum_{j=1}^M C_{kj}P(m_j | q) < \sum_{j=1}^M C_{ij}P(m_j | q) \text{ para todo } i \neq k \quad (10.134)$$

Reparemos que C_{kk} é o custo de decidir $\hat{m} = m_k$ quando m_k foi transmitido. Esse custo é, em geral, zero. Se admitirmos pesos iguais a todos os outros erros,

$$C_{kj} = \begin{cases} 0 & k = j \\ 1 & k \neq j \end{cases} \quad (10.135)$$

e a regra de decisão na Eq. (10.134) se reduz à regra na Eq. (10.83), como esperado. O receptor de Bayes generalizado para $M = 2$, admitindo $C_{11} = C_{22} = 0$, decide $\hat{m} = m_1$ se

$$C_{12}P(m_2 | q) < C_{21}P(m_1 | q)$$

Caso contrário, o receptor decide $\hat{m} = m_2$.

Receptor de Máxima Verossimilhança

A estratégia usada no receptor de Bayes discutido na subseção anterior é geral, exceto que pode ser implementada somente quando as probabilidades *a priori* $P(m_1), P(m_2), \dots, P(m_M)$ forem conhecidas. Com frequência, essa informação não é conhecida. Se for esse o caso, diversas possibilidades existem, dependendo das hipóteses feitas. Quando, por exemplo, não houver razão para esperar que qualquer um sinal seja mais provável que qualquer outro, podemos admitir iguais probabilidades para todas as mensagens:

$$P(m_1) = P(m_2) = \dots = P(m_M) = \frac{1}{M}$$

Para esse caso, a regra de Bayes [Eq. (10.83)] se torna: decidir $= m_k$ se

$$p_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}|m_k) > p_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}|m_i) \text{ para todo } i \neq k \quad (10.136)$$

Observemos que $p_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}|m_k)$ representa a probabilidade de observar \mathbf{q} quando m_k foi transmitido. Assim, o receptor escolhe o sinal que, quando transmitido, maximizará a possibilidade (probabilidade) de observar o \mathbf{q} recebido. Esse receptor é denominado **receptor de máxima verossimilhança** (*maximum likelihood receiver*). Notemos que o receptor de máxima verossimilhança é um receptor de Bayes para o custo na Eq. (10.135), sob a hipótese de que as probabilidades *a priori* das mensagens são iguais. Em termos de conceitos geométricos, o receptor de máxima verossimilhança decide a favor do sinal que for mais próximo do dado \mathbf{q} recebido. A implementação prática do receptor de máxima verossimilhança é a mesma do receptor de Bayes (Fig. 10.18 e Fig. 10.19) sob a hipótese de que todas as probabilidades *a priori* sejam iguais a $1/M$.

Se o conjunto de sinais for geometricamente simétrico e se todas as probabilidades *a priori* forem iguais (receptor de máxima verossimilhança), as regiões de decisão para os vários sinais serão congruentes. Nesse caso, devido à simetria, a probabilidade condicional de uma decisão correta é a mesma, independentemente do sinal transmitido, ou seja,

$$P(C|m_i) = \text{constante para todo } i$$

Como

$$P(C) = \sum_{i=1}^M P(m_i)P(C|m_i)$$

neste caso,

$$P(C) = P(C|m_i) \quad (10.137)$$

Assim, no caso de conjuntos simétricos de sinais, a probabilidade de erro do receptor de máxima verossimilhança independe da estatística da fonte $P(m_i)$. Devemos, no entanto, perceber que, se a estatística da fonte fosse conhecida *a priori*, poderíamos usar a regra de decisão de Bayes para projetar um receptor melhor.

Fica claro que, se a estatística da fonte não for conhecida, o receptor de máxima verossimilhança se mostra muito atraente para um conjunto simétrico de sinais. Nesse tipo de receptor, podemos especificar a probabilidade de erro independentemente da estatística da fonte.

Receptor Minimax

O projeto de um receptor com uma dada regra de decisão especifica completamente as probabilidades condicionais $P(C|m_i)$. A probabilidade de erro é dada por

$$\begin{aligned} P_{eM} &= 1 - P(C) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^M P(m_i)P(C|m_i) \end{aligned}$$

Assim, em geral, para um dado receptor (associado a uma regra de decisão) a probabilidade de erro depende da estatística da fonte $P(m_i)$. A probabilidade de erro é maior para certas estatísticas de fonte. Seja $[P_{eM}]_{\max}$ a probabilidade de erro no pior caso possível; esse valor representa um limite superior para a probabilidade de erro de um dado receptor. Esse limite superior $[P_{eM}]_{\max}$ funciona como uma indicação da qualidade do receptor. Cada receptor (com uma dada regra de decisão) terá certa $[P_{eM}]_{\max}$. O receptor que tiver menor limite superior para a probabilidade de erro, ou seja $[P_{eM}]_{\max}$ mínima, é denominado **receptor minimax**.

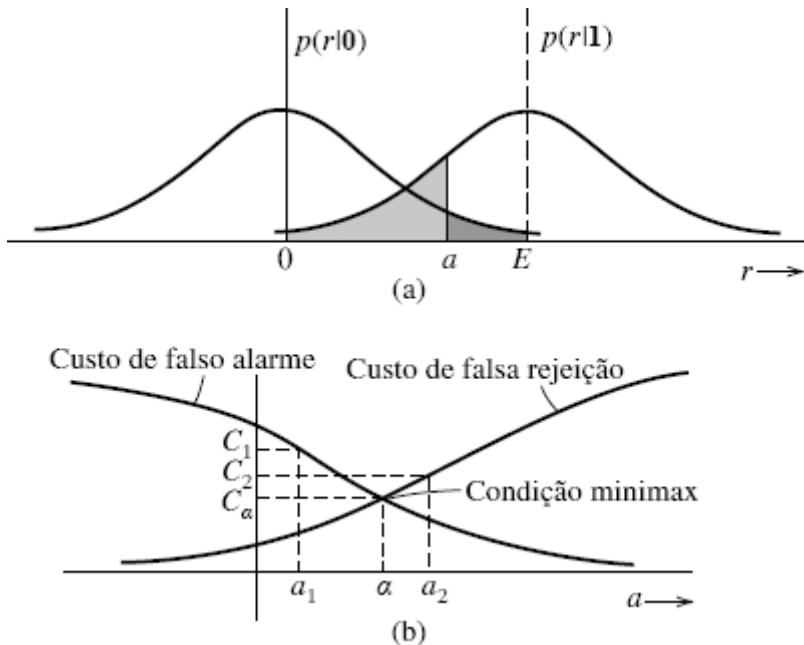


Figura 10.35 Explicação do conceito minimax.

Ilustremos o conceito minimax para um receptor binário com sinalização on-off. As PDFs condicionais da amostra da saída r do filtro receptor em $t = T_b$ são $p(r|1)$ e $p(r|0)$. Essas são as PDFs de r para os pulsos “on” e “off” (ou seja, ausência de pulso), respectivamente. A Fig. 10.35a mostra essas PDFs com um dado limiar a . Se recebermos $r \geq a$, escolhemos a hipótese “sinal presente” (1), e a área sombreada à direita de a é a probabilidade de **falso alarme** (decidir “sinal presente” quando, na verdade, o sinal não está presente). Se $r < a$, escolhemos a hipótese “sinal ausente” (0), e a área sombreada à esquerda de a é a probabilidade de **falsa rejeição** (decidir “sinal ausente” quando, na verdade, o sinal está presente). É óbvio que, quanto maior o limiar a , maior é o erro de falsa rejeição e menor o erro de falso alarme (Fig. 10.35b).

A seguir, determinaremos a condição minimax para esse receptor. Para o receptor minimax, consideremos todos os possíveis receptores (no caso em consideração, todos os possíveis valores de a) e determinemos a mínima probabilidade de erro (ou custo) que ocorre sob a pior distribuição de probabilidade *a priori* possível. Escolhamos $a = a_1$, como mostrado na Fig. 10.35b. Com isso, o pior caso possível ocorre quando $P(0) = 1$ e $P(1) = 0$, ou seja, quando o sinal $s(t)$ estiver sempre ausente. Nessa situação, o tipo de erro é falso alarme. Esses erros têm custo C_1 . Se, no entanto, escolhermos $a = a_2$, o pior caso possível ocorre quando $P(1) = 1$ e $P(0) = 0$, ou seja, quando o sinal $s(t)$ estiver sempre presente, causando apenas o erro de falsa rejeição. Esses erros têm custo C_2 . Fica evidente que, com a escolha $a = \alpha$, os custos de falso alarme e falsa rejeição são iguais, com valor C_α . Portanto, para todas as possíveis estatísticas de fonte, o custo é C_α . Como $C_\alpha < C_1$ e C_2 , esse custo é o **mínimo** do máximo custo possível (pois consideramos os piores casos) que resultará para todos os valores de a . Portanto, $a = \alpha$ representa a especificação minimax.

Dessa discussão, segue que o receptor minimax é bastante conservativo. Esse receptor é projetado sob a hipótese pessimista de que as estatísticas de fonte são as piores possíveis. O receptor de máxima verossimilhança, por sua vez, é projetado sob a hipótese de que todas as mensagens são equiprováveis. Pode ser mostrado que, para um conjunto simétrico de sinais, o receptor de máxima verossimilhança é, na verdade, o receptor minimax. Isso pode ser provado com a observação de que, para um conjunto simétrico, a probabilidade de erro de um receptor de máxima verossimilhança (iguais probabilidades *a priori*) independe da estatística de fonte [Eq. (10.137)]. Logo, para um conjunto simétrico, a probabilidade de erro $P_{eM} = \alpha$ de um receptor de máxima verossimilhança também é igual à $[P_{eM}]_{\max}$ do mesmo. A seguir, mostremos que não existe outro receptor cuja $[P_{eM}]_{\max}$ seja menor que α de um receptor de máxima verossimilhança para um conjunto simétrico. Isso pode ser visto pelo fato de que, para mensagens equiprováveis, o receptor de máxima verossimilhança é ótimo por definição. Para mensagens equiprováveis, todos os outros receptores devem ter $P_{eM} > \alpha$. Portanto, para esses receptores, $[P_{eM}]_{\max}$ jamais pode ser menor que α . Isso prova que o receptor de máxima verossimilhança é, de fato, o receptor minimax para um conjunto simétrico de sinais.

10.11 DETECÇÃO NÃO COERENTE

Se a fase θ do pulso de RF recebido $\sqrt{2} p'(t) \cos(\omega_c t + \theta)$ for desconhecida, não podemos usar técnicas de detecção coerentes. Nesse caso, devemos lançar mão de técnicas de detecção não coerentes, como a detecção de envelope. Pode ser mostrado^{9, 10} que, quando a fase θ do pulso recebido é aleatória e uniformemente distribuída em $(0, 2\pi)$, o receptor ótimo é um filtro casado ao pulso de RF $\sqrt{2} p'(t) \cos \omega_c t$ seguido por um detector de envelope, um amostrador (para colher amostras em $t = T_b$) e um comparador, para tomar a decisão (Fig. 10.36).

Chaveamento por Deslocamento de Amplitude

O detector não coerente para ASK é mostrado na Fig. 10.36. O filtro $H(f)$ é um filtro casado ao pulso de RF, ignorando a fase. Isso significa que a amplitude A_p da saída do filtro não será necessariamente máxima no instante de amostragem. Contudo, no instante de amostragem, envelope será próximo do máximo (Fig. 10.36). A saída do filtro casado é, agora, detectada por um detector de envelope. O envelope é amostrado em $t = T_b$ para a tomada de decisão.

Quando um **1** é transmitido, a saída do detector de envelope em $t = T_b$ é um envelope de uma onda senoidal de amplitude A_p misturada a um ruído gaussiano de variância σ_n^2 . Nesse caso, o envelope r tem densidade riceana, dada por [Eq. (9.86a)]

$$p_r(r|m=1) = \frac{r}{\sigma_n^2} e^{-(r^2+A_p^2)/2\sigma_n^2} I_0\left(\frac{rA_p}{\sigma_n^2}\right) \quad (10.138a)$$

Quando $A_p \gg \sigma_n$ (condição de pequeno ruído), da Eq. (9.86c), temos

$$p_r(r|m=1) \simeq \sqrt{\frac{r}{2\pi A_p \sigma_n^2}} e^{-(r-A_p)^2/2\sigma_n^2} \quad (10.138b)$$

$$\simeq \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} e^{-(r-A_p)^2/2\sigma_n^2} \quad (10.133c)$$

Observemos que, para pequeno ruído, a PDF de r é praticamente gaussiana, com média A_p e variância σ_n^2 . Quando **0** é transmitido, a saída do detector de envelope é um envelope de um ruído gaussiano de variância σ_n^2 . Nesse caso, o envelope tem uma densidade de Rayleigh dada por [Eq. (9.81)]

$$p_r(r|m=0) = \frac{r}{\sigma_n^2} e^{-r^2/2\sigma_n^2}$$

A Fig. 10.37 mostra curvas para $p_r(r|m=1)$ e $p_r(r|m=0)$. Usando argumentos empregados anteriormente (Fig. 10.4), o limiar ótimo é determinado como o ponto em que as duas densidades se cruzam. Assim, o limiar ótimo a_o é

$$\frac{a_o}{\sigma_n^2} e^{-(a_o^2+A_p^2)/2\sigma_n^2} I_0\left(\frac{A_p a_o}{\sigma_n^2}\right) = \frac{a_o}{\sigma_n^2} e^{-a_o^2/2\sigma_n^2}$$

ou

$$e^{-A_p^2/2\sigma_n^2} I_0\left(\frac{A_p a_o}{\sigma_n^2}\right) = 1$$

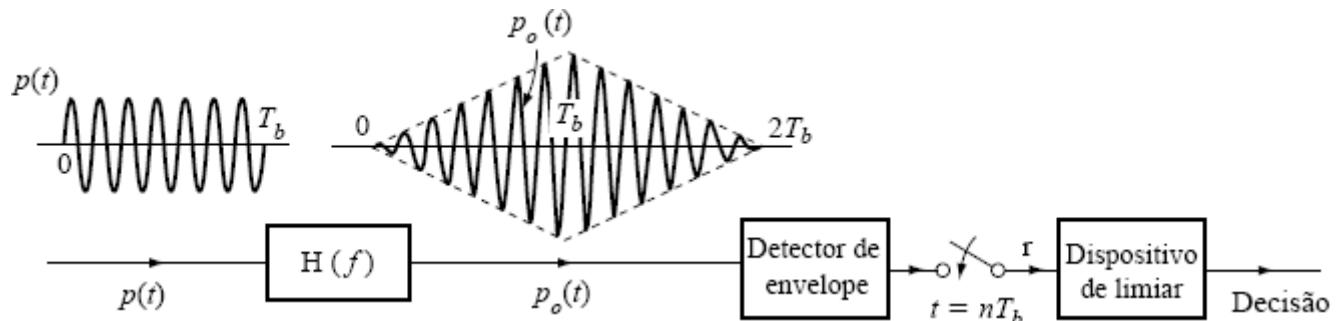


Figura 10.36 Detecção não coerente de sinais digitais modulados para ASK.

Essa equação é satisfeita, em boa aproximação, por

$$a_o = \frac{A_p}{2} \sqrt{1 + \frac{8\sigma_n^2}{A_p^2}}$$

Como é usado filtro casado, $A_p = E_p$ e $\sigma_n^2 = NE_p/2$. Além disso, para ASK, existem, em média, apenas $R_b/2$ pulsos não nulos por segundo. Assim, $E_b = E_p/2$. Logo,

$$\left(\frac{A_p}{\sigma_n}\right)^2 = \frac{2E_p}{\mathcal{N}} = 4\frac{E_b}{\mathcal{N}}$$

e

$$a_o = E_b \sqrt{1 + \frac{2}{E_b/\mathcal{N}}} \quad (10.139a)$$

Observemos que o limiar ótimo não é constante, mas depende de E_b/\mathcal{N} . Esta é uma grande desvantagem em canais de desvanecimento. Para um sinal forte, $E_b/\mathcal{N} \gg 1$,

$$a_o \simeq E_b = \frac{A_p}{2} \quad (10.139b)$$

$$\begin{aligned} P(\epsilon | m = \mathbf{0}) &= \int_{A_p/2}^{\infty} p_r(r | m = \mathbf{0}) dr \\ &= \int_{A_p/2}^{\infty} \frac{r}{\sigma_n^2} e^{-r^2/2\sigma_n^2} dr \\ &= e^{-A_p^2/8\sigma_n^2} \\ &= e^{-\frac{1}{2}E_b/\mathcal{N}} \end{aligned} \quad (10.140)$$

$$P(\epsilon | m = \mathbf{1}) = \int_{-\infty}^{A_p/2} p_r(r | m = \mathbf{1}) dr$$

O cálculo dessa integral é um tanto trabalhoso.⁴ Para um sinal forte (ou seja, $E_b/\mathcal{N} \gg 1$), a PDF riceana pode ser aproximada por uma PDF gaussiana [Eq. (9.86c)], e

$$\begin{aligned} P(\epsilon | m = \mathbf{1}) &\approx \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{A_p/2} e^{-(r-A_p)^2/2\sigma_n^2} dr \\ &= Q\left(\frac{A_p}{2\sigma_n}\right) \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{\mathcal{N}}}\right) \end{aligned} \quad (10.141)$$

Em consequência,

$$P_b = P_m(\mathbf{0})(\epsilon | m = \mathbf{0}) + P_m(\mathbf{1})P(\epsilon | m = \mathbf{1})$$

Admitindo $P_m(\mathbf{1}) = P_m(\mathbf{0}) = 0,5$,

$$P_b = \frac{1}{2} \left[e^{-\frac{1}{2}E_b/\mathcal{N}} + Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{\mathcal{N}}}\right) \right] \quad (10.142a)$$

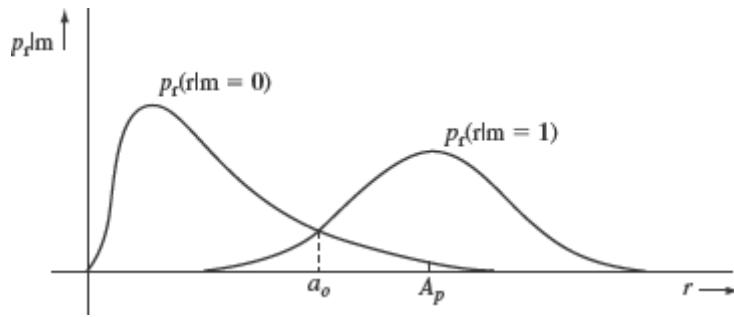


Figura 10.37 PDFs condicionais na detecção não coerente de sinais ASK.

Usando a aproximação $Q(\cdot)$ na Eq. (8.83a), temos

$$P_b \simeq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi E_b/\mathcal{N}}} \right) e^{-\frac{1}{2}E_b/\mathcal{N}} \quad E_b/\mathcal{N} \gg 1 \quad (10.142b)$$

$$\simeq \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}E_b/\mathcal{N}} \quad (10.142c)$$

Reparemos que, em um receptor ótimo, para $E_b/\mathcal{N} \gg 1$, $P(\in | m = 0)$ é muito menor do que $P(\in | m = 1)$. Por exemplo, em $E_b/\mathcal{N} = 10$, $P(\in | m = 0) \approx 8,7 P(\in | m = 1)$. Assim, a interpretação de **0** como **1** é o tipo de erro predominante. Na detecção não coerente, a informação temporal é extraída do envelope do sinal recebido, segundo os métodos discutidos na Seção 7.5.2.

Para um detector coerente,

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{\mathcal{N}}}\right) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi E_b/\mathcal{N}}} e^{-\frac{1}{2}E_b/\mathcal{N}} \quad E_b/\mathcal{N} \gg 1 \quad (10.143)$$

Isso parece similar à Eq. (10.142c) (caso não coerente). Assim, para grande valor de E_b/\mathcal{N} , os desempenho de detectores coerente e de envelope são semelhantes (Fig. 10.38).

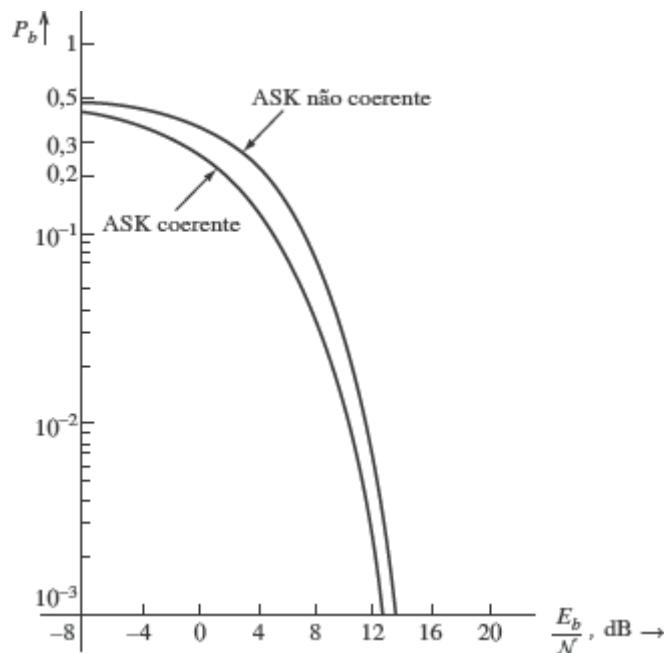


Figura 10.38 Probabilidade de erro na detecção ASK não coerente.

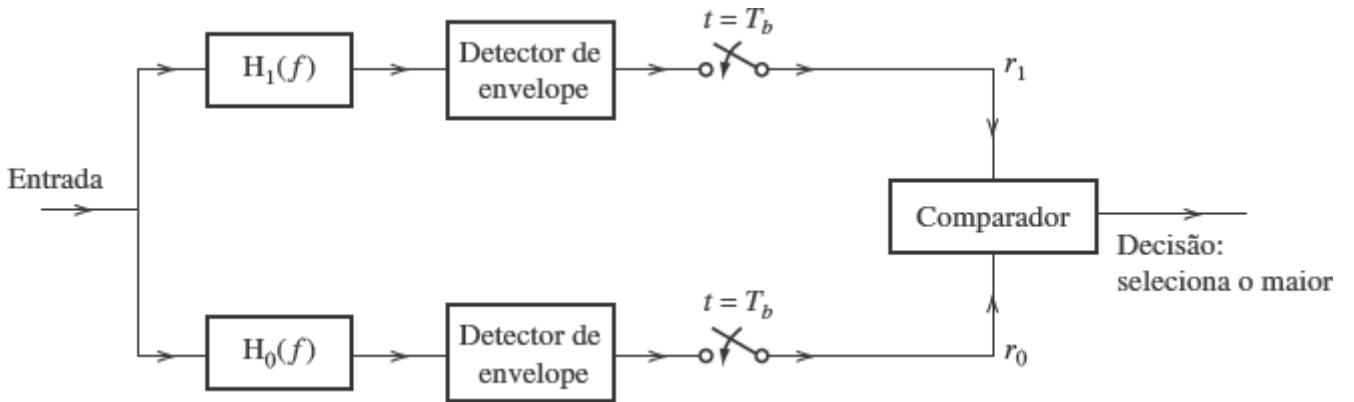


Figura 10.39 Detecção não coerente de FSK binária.

Chaveamento por Deslocamento de Frequência

Um receptor não coerente para FSK é mostrado na Fig. 10.39. Os filtros $H_0(f)$ e $H_1(f)$ são casados aos dois pulsos de RF que correspondem a **0** e **1**, respectivamente. As saídas dos detectores de envelope em $t = T_b$ são r_0 e r_1 , respectivamente. As componentes de ruído nas saídas dos filtros $H_0(f)$ e $H_1(f)$ são as VAs gaussianas n_0 e n_1 , respectivamente, com $\sigma_n 0 = \sigma_n 1 = \sigma_n$.

Se **1** for transmitido ($m = 1$), no instante de amostragem, o envelope r_1 tem a PDF riceana^{*}

$$p_{r_1}(r_1) = \frac{r_1}{\sigma_n^2} e^{-(r_1^2 + A_p^2)/2\sigma_n^2} I_0\left(\frac{r_1 A_p}{\sigma_n^2}\right)$$

e r_0 é o envelope de ruído com densidade de Rayleigh

$$P_{r_0}(r_0) = \frac{r_0}{\sigma_n^2} e^{-r_0^2/2\sigma_n^2}$$

A decisão é $m = 1$ se $r_1 > r_0$, e $m = 0$ se $r_1 < r_0$. Logo, quando o binário **1** é transmitido, um erro é cometido se $r_0 > r_1$,

$$P(\epsilon | m = 1) = P(r_0 > r_1)$$

O evento $r_0 > r_1$ é o mesmo que o evento conjunto “ r_1 tem qualquer valor positivo^{**} e r_0 tem um valor maior que o de r_1 ”. Isso é simplesmente o evento conjunto $(0 < r_1 < \infty, r_0 > r_1)$. Portanto,

$$\begin{aligned} P(\epsilon | m = 1) &= P(0 < r_1 < \infty, r_0 > r_1) \\ &= \int_0^\infty \int_{r_1}^\infty p_{r_1 r_0}(r_1, r_0) dr_1 dr_0 \end{aligned}$$

Como r_1 e r_0 são independentes, $p_{r_1 r_0} = p_{r_1} p_{r_0}$. Logo,

$$\begin{aligned} P(\epsilon | m = 1) &= \int_0^\infty \frac{r_1}{\sigma_n^2} e^{-(r_1^2 + A_p^2)/2\sigma_n^2} I_0\left(\frac{r_1 A_p}{\sigma_n^2}\right) \int_{r_1}^\infty \frac{r_0}{\sigma_n^2} e^{-r_0^2/2\sigma_n^2} dr_1 dr_0 \\ &= \int_0^\infty \frac{r_1}{\sigma_n^2} e^{-(2r_1^2 + A_p^2)/2\sigma_n^2} I_0\left(\frac{r_1 A_p}{\sigma_n^2}\right) dr_1 \end{aligned}$$

Sejam $x = \sqrt{2} r_1$ e $\alpha = A_p / \sqrt{2}$; com isto, temos

$$P(\epsilon | m = 1) = \frac{1}{2} e^{-A_p^2/4\sigma_n^2} \int_0^\infty \frac{x}{\sigma_n^2} e^{-(x^2 + \alpha^2)/2\sigma_n^2} I_0\left(\frac{x\alpha}{\sigma_n^2}\right) dx$$

Observemos que a integral é uma densidade riceana e, portanto, a integral é unitária. Assim,

$$P(\epsilon|m=1) = \frac{1}{2} e^{-A_p^2/4\sigma_n^2} \quad (10.144a)$$

Para um filtro casado,

$$\rho_{\max}^2 = \frac{A_p^2}{\sigma_n^2} = \frac{2E_p}{\mathcal{N}}$$

Para FSK, $E_b = E_p$, e a Eq. (10.144a) passa a

$$P(\epsilon|m=1) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}E_b/\mathcal{N}} \quad (10.144b)$$

De modo similar,

$$P(\epsilon|m=0) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}E_b/\mathcal{N}} \quad (10.144c)$$

e

$$P_b = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}E_b/\mathcal{N}} \quad (10.145)$$

Esse comportamento é similar ao da ASK não coerente [Eq. (10.142c)]. Novamente, observemos que, para $E_b/\mathcal{N} \gg 1$, os desempenhos de FSK coerente e não coerente são semelhantes.

De um ponto de vista prático, a FSK é preferível à ASK, pois a FSK tem um limiar ótimo fixo, enquanto o limiar ótimo da ASK depende de E_b/\mathcal{N} (nível de sinal). Portanto, a ASK é particularmente suscetível ao desvanecimento de sinal. A decisão da FSK envolve uma comparação entre r_0 e r_1 , e as duas variáveis são igualmente afetadas pelo desvanecimento do sinal. Assim, o desvanecimento de sinal não degrada o desempenho da FSK não coerente, como faz com a ASK não coerente. Essa é uma vantagem notável da FSK não coerente em relação à ASK não coerente. Além disso, na FSK não coerente, em contraste com a ASK não coerente, as probabilidades $P(\epsilon|m=1)$ e $P(\epsilon|m=0)$ são iguais. O preço pago por FSK para essa vantagem é a exigência de uma maior largura de banda.

MFSK Não Coerente

Do ponto de vista prático, é difícil manter a coerência de fase de M frequências. Assim, na prática, a MFSK raramente é empregada. A MFSK não coerente é muito mais comum. O receptor para a MFSK não coerente é similar àquele para a FSK não coerente binária (Fig. 10.39), mas com M bancos correspondentes às M frequências, nos quais o filtro $H_i(f)$ é casado ao pulso de RF $p(t) \cos \omega_i t$. A análise é simples. Se $m = 1$ for transmitido, r_1 é o envelope de uma senoide de amplitude A_p misturada a ruído gaussiano passa-faixa, e r_j ($j = 1, 2, \dots, M$) é o envelope do ruído gaussiano passa-faixa. Logo, r_1 tem densidade de Rice, enquanto r_2, r_3, \dots, r_M têm densidade de Rayleigh. Empregando os mesmos argumentos usados no caso coerente, temos

$$\begin{aligned} P_{CM} &= P(C|m=1) = P(0 \leq r_1 < \infty, r_2 < r_1, r_3 < r_1, \dots, r_M < r_1) \\ &= \int_0^\infty \frac{r_1}{\sigma_n^2} I_0\left(\frac{r_1 A_p}{\sigma_n^2}\right) e^{-(r_1^2 + A_p^2)/2\sigma_n^2} \left(\int_0^{r_1} \frac{x}{\sigma_n^2} e^{-x^2/2\sigma_n^2} dx\right)^{M-1} dr_1 \\ &= \int_0^\infty \frac{r_1}{\sigma_n^2} I_0\left(\frac{r_1 A_p}{\sigma_n^2}\right) e^{-(r_1^2 + A_p^2)/2\sigma_n^2} \left(1 - e^{-r_1^2/2\sigma_n^2}\right)^{M-1} dr_1 \end{aligned}$$

Substituindo $r_1^2/2\sigma_n^2 = x$ e $(A_p/\sigma_n)^2 = 2E_p/\mathcal{N} = 2E_b \log M/\mathcal{N}$, obtemos

$$P_{CM} = e^{-(E_b \log_2 M/\mathcal{N})} \int_0^\infty e^{-x} (1 - e^{-x})^{M-1} I_0\left(2\sqrt{\frac{x E_b \log_2 M}{\mathcal{N}}}\right) dx \quad (10.146a)$$

Usando o teorema binomial para expandir $(1 - e^{-x})^{M-1}$, temos

$$(1 - e^x)^{M-1} = \sum_{m=0}^{M-1} \binom{M-1}{m} (-1)^m e^{-mx}$$

Substituindo essa igualdade na Eq. (10.146a) e identificando

$$\int_0^\infty y e^{-ay^2} I_0(by) dy = \frac{1}{2a} e^{-b^2/4a}$$

obtemos (após trocarmos a ordem do somatório e da integral)

$$P_{CM} = \sum_{m=0}^{M-1} \binom{M-1}{m} \frac{(-1)^m}{m+1} e^{-mE_b \log_2 M / \mathcal{N}(m+1)} \quad (10.146b)$$

e

$$P_{eM} = 1 - P_{CM} = \sum_{m=1}^{M-1} \binom{M-1}{m} \frac{(-1)^{m+1}}{m+1} e^{-mE_b \log_2 M / \mathcal{N}(m+1)} \quad (10.146c)$$

A probabilidade de erro P_{eM} é mostrada na Fig. 10.40 em função de E_b / \mathcal{N} . Podemos observar que o desempenho da MFSK não coerente é apenas ligeiramente inferior ao da MFSK coerente, especialmente para grandes valores de M .

PSK Diferencialmente Coerente

Assim como é impossível demodular um sinal DSB-SC com um detector de envelope, também é impossível demodular a PSK (que, na verdade, é DSB-SC) de forma não coerente. Podemos, no entanto, demodular PSK sem a portadora local síncrona, ou coerente, usando o que é conhecido como PSK diferencial (DPSK).

O receptor ótimo é mostrado na Fig. 10.41. O receptor é muito parecido com um detector de correlação (Fig. 10.3), que é equivalente a um detector de filtro casado. Em um detector de correlação, multiplicamos o pulso $p(t)$ por um pulso $p(t)$ gerado localmente. No caso da DPSK, tiramos proveito do fato de que os dois pulsos de RF usados na transmissão são idênticos, a menos do sinal (ou fase). No detector na Fig. 10.41, multiplicamos o pulso que chega pelo pulso anterior. Assim, o pulso anterior funciona como um substituto para o pulso gerado localmente. A única diferença é que o pulso anterior é ruidoso, devido ao ruído de canal, e isso tende a degradar o desempenho em comparação com a PSK coerente. Quando a saída r é positiva, o pulso atual é idêntico ao anterior; quando r é negativa, o pulso atual é o negativo do anterior. Portanto, a partir do conhecimento do primeiro dígito de referência, é possível detectar todos os dígitos recebidos. A detecção é simplificada com o uso da chamada *codificação diferencial*, idêntica à discutida na Seção 7.3.6 no contexto de sinalização duobinária.

Para deduzir a probabilidade de erro da DPSK, observemos que a DPSK, por conta da codificação diferencial, é essencialmente um esquema de sinalização ortogonal. Um **1** binário é transmitido por uma sequência de dois pulsos (p, p) ou ($-p, -p$) ao longo de $2T_b$ segundos (sem transição). Do mesmo modo, um **0** binário é transmitido por uma sequência de dois pulsos ($p, -p$) ou ($-p, p$) ao longo de $2T_b$ segundos (com transição). Qualquer das sequências de pulsos usadas para o binário **1** é ortogonal a qualquer das sequências de pulsos usadas para o binário **0**. Como nenhuma portadora local é gerada para a demodulação, a detecção é não coerente, com energia efetiva de pulso igual a $2E_p$ (o dobro da energia do pulso p). Todavia, a energia realmente transmitida por dígito é apenas E_p , como no caso de FSK não coerente. Em consequência, o desempenho da DPSK é 3 dB superior do de FSK não coerente. Portanto, da Eq. (10.145), podemos escrever P_b para a DPSK como

$$P_b = \frac{1}{2} e^{-E_b / \mathcal{N}} \quad (10.147)$$

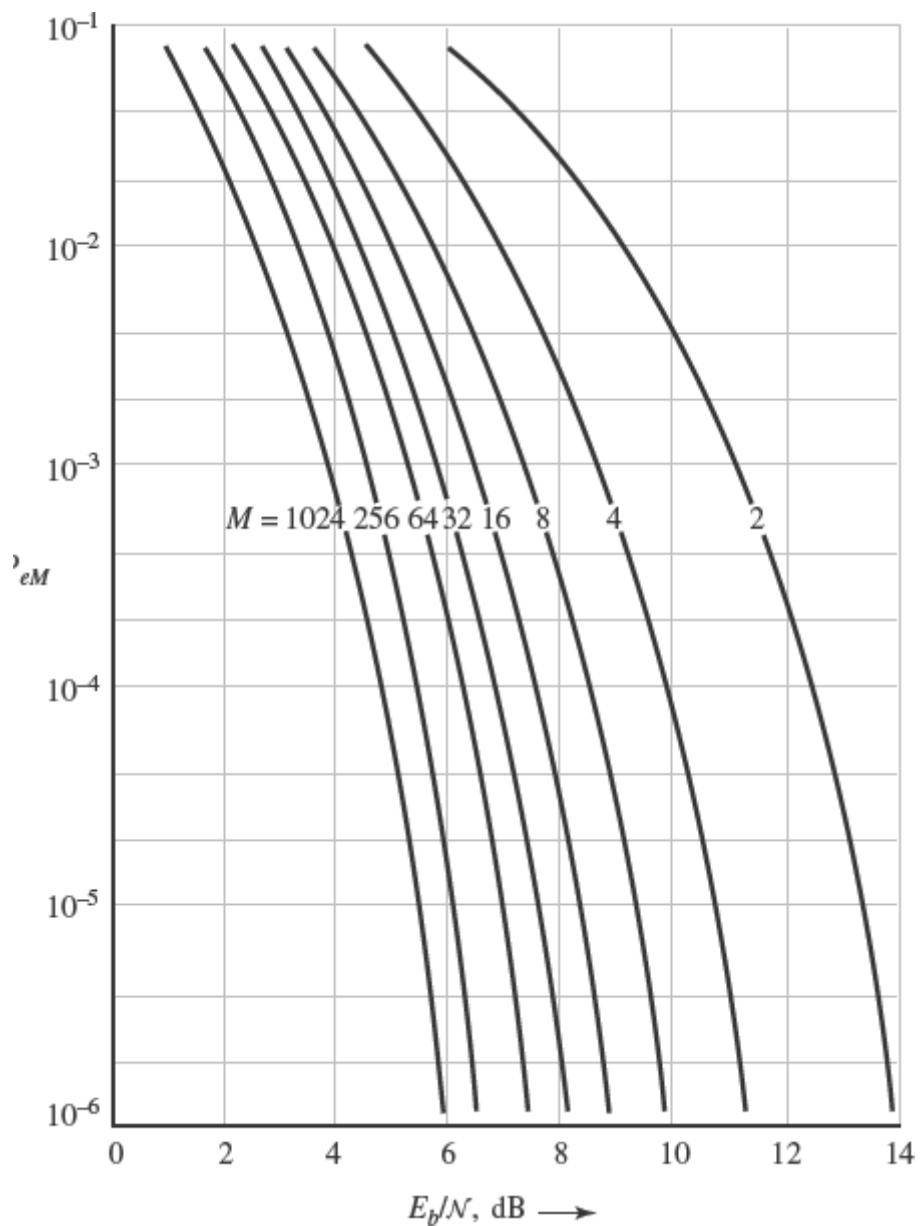


Figura 10.40 Probabilidade de erro para MFSK não coerente.

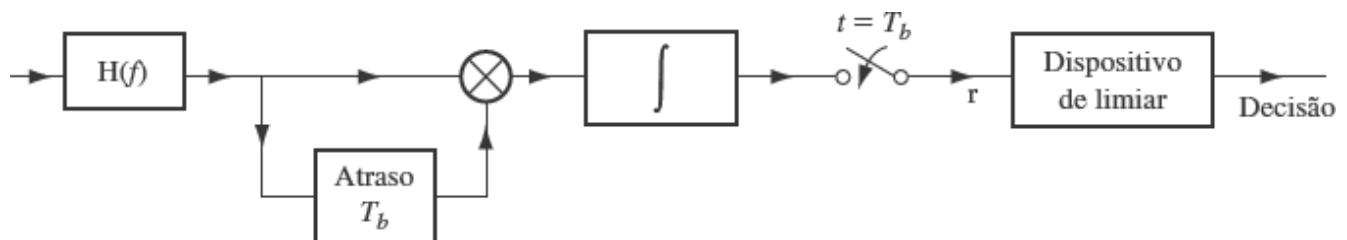


Figura 10.41 Detecção da PSK diferencial.

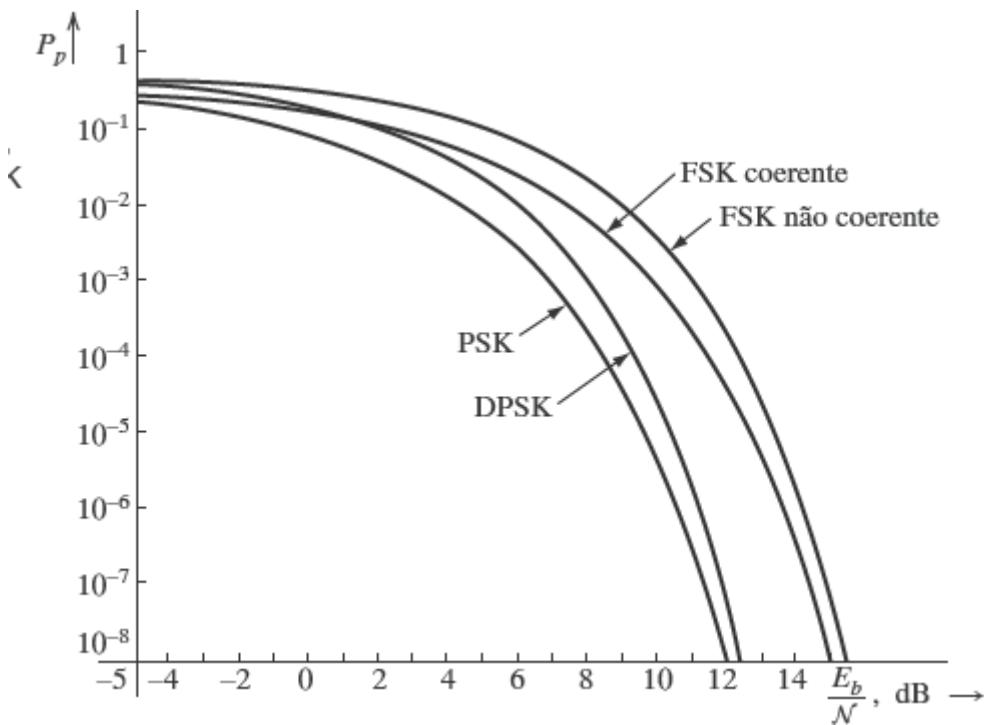


Figura 10.42 Probabilidade de erro da PSK, DPSK, e da FSK coerente e não coerente.

Essa probabilidade de erro (Fig. 10.42) é 3 dB superior à de FSK não coerente e, essencialmente, igual à da PSK coerente com $E_b/\mathcal{N} \gg 1$ [Eq. (10.39)]. Isso era esperado, pois vimos anteriormente que DPSK parece similar a PSK para grande SNR. A dedução rigorosa da Eq. (10.147) pode ser encontrada na literatura.⁷

10.12 EXERCÍCIOS COM O MATLAB

Neste grupo de exercícios computacionais, damos ao leitor uma oportunidade de testar as implementações e o desempenho de sistemas de comunicação digital básicos.

EXERCÍCIO COMPUTACIONAL 10.1: SINALIZAÇÃO POLAR BINÁRIA COM PULSOS DIFERENTES

Neste primeiro exercício, validamos a análise de desempenho da sinalização polar binária apresentada na Seção 10.1. Detecção ótima (filtro casado) sempre é usada no receptor. No programa Ex10_1.m, três pulsos diferentes são usados na sinalização polar:

- Pulses retangulares $p(t) = u(t) - u(t - T)$
- Pulses de meia senoide: $p(t) = \operatorname{sen}(\pi t/T)[u(t) - u(t - T)]$
- Pulso raiz de cosseno levantado com fator de decaimento $r = 0,5$ (ou largura de banda $0,75/T$) e truncado à duração de $6T$.

```

% Programa Matlab <Ex10_1.m>
% Este exercício Matlab <Ex10_1.m> efetua a simulação de
% transmissão polar binária em banda-base em canal AWGN.
% O programa gera sinais polares em banda-base usando 3 formas
% de onda de pulso diferentes (raiz de cosseno levantado ( $r=0,5$ ),
% retangular, meia senoide)
% e estima a taxa de erro bits (BER) para diferentes Eb/N
clear;clf;
L=1000000;           % Número total de símbolos no experimento: 1 milhão
% para exibir a forma de onda de pulso, superamostramos o sinal
% por um fator f_ovsamp=8
f_ovsamp=8;          % Fator de superamostragem versus taxa de dados
delay_rc=3;
% Geração do pulso raiz de cosseno levantado (fator de decaimento=0,5)
prcos=rcosflt([ 1 ], 1, f_ovsamp, 'sqrt', 0.5, delay_rc);
prcos=prcos(1:end-f_ovsamp+1);
prcos=prcos/norm(prcos);
pcmatch=prcos(end:-1:1);
% Geração de pulso retangular
prect=ones(1,f_ovsamp);
prect=prect/norm(prect);
prmatch=prect(end:-1:1);
% Geração de pulso de meia senoide
psine=sin([0:f_ovsamp-1]*pi/f_ovsamp);
psine=psine/norm(psine);
psmatch=psine(end:-1:1);
% Geração de dados aleatórios de sinal para sinalização polar
s_data=2*round(rand(L,1))-1;

```

```

% superamostragem para casar a 'taxa de superamostragem fictícia'
% que é f_ovsamp/T (T=1 é a duração de cada símbolo)
s_up=upsample(s_data,f_ovsamp);

% Identifica os atrasos de decisão devido à formatação de pulso
% e filtros casados
delayrc=2*delay_rc*f_ovsamp;
delayrt=f_ovsamp-1;
delaysn=f_ovsamp-1;
% Gera sinalização polar dos diferentes formatos de pulso
xrcos=conv(s_up,prcos);
xrect=conv(s_up,prect);
xsine=conv(s_up,psine);
t=(1:200)/f_ovsamp;
subplot(311)
figwave1=plot(t,xrcos(delayrc/2:delayrc/2+199));
title('(a) Pulso raiz de cosseno levantado.');
set(figwave1,'LineWidth',2);
subplot(312)
figwave2=plot(t,xrect(delayrt:delayrt+199));
title('(b) Pulso retangular.')
set(figwave2,'LineWidth',2);
subplot(313)
figwave3=plot(t,xsine(delaysn:delaysn+199));
title('(c) Pulso de meia senoide.')
xlabel('Número de períodos de símbolos de dados')
set(figwave3,'LineWidth',2);
% Calcula a duração do sinal
Lrcos=length(xrcos);Lrect=length(xrect);Lsine=length(xsine);
BER=[];
noiseq=randn(Lrcos,1);
% Gera ruído de canal (AWGN)
for i=1:10,
    Eb2N(i)=i;                                %(Eb/N em dB)
    Eb2N_num=10^(Eb2N(i)/10);                 % Eb/N numérico
    Var_n=1/(2*Eb2N_num);                     % 1/SNR é a variância do ruído
    signois=sqrt(Var_n);                      % desvio-padrão
    awgnois=signois*noiseq;                   % AWGN
    % Adiciona ruído aos sinais na saída do canal
    yrcos=xrcos+awgnois;
    yrect=xrect+awgnois(1:Lrect);
    ysine=xsine+awgnois(1:Lsine);

    % Primeiro, aplica filtros casados
    z1=conv(yrcos,pcmatch);clear awgnois, yrcos;
    z2=conv(yrect,prmatch);clear yrect;
    z3=conv(ysine,psmatch);clear ysine;

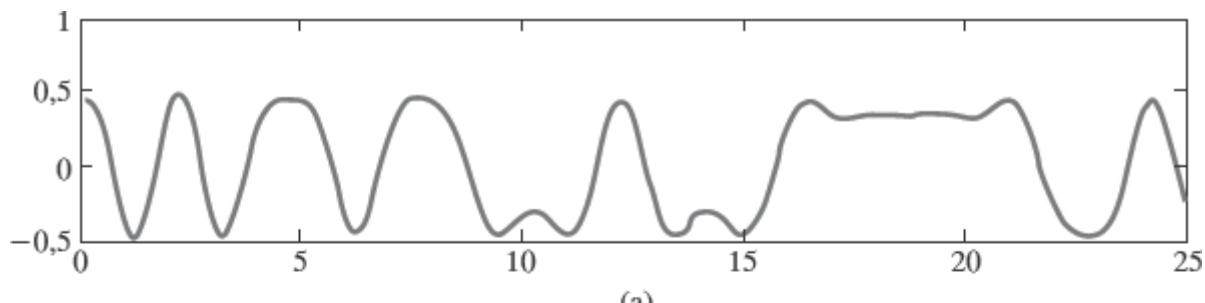
    % Amostra o sinal recebido e colhe amostras
    z1=z1(delayrc+1:f_ovsamp:end);
    z2=z2(delayrt+1:f_ovsamp:end);

```

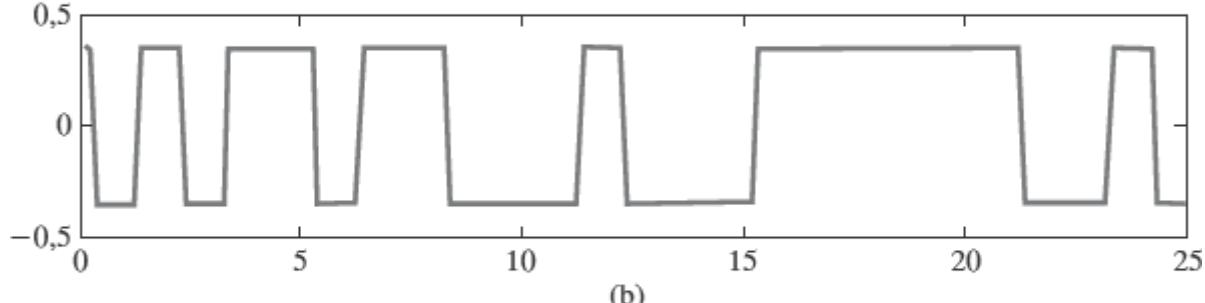
```

z3=z3(delaysn+1:f_ovsamp:end);
% Decisão baseada no sinal da amostra
dec1=sign(z1(1:L));dec2=sign(z2(1:L));dec3=sign(z3(1:L));
% Compara com os dados originais para calcular a BER para
% os três pulsos
BER=[BER;sum(abs(s_data-dec1))/(2*L)...
      sum(abs(s_data-dec2))/(2*L) ...
      sum(abs(s_data-dec3))/(2*L)];
Q(i)=0.5*erfc(sqrt(Eb2N_num)); %Calcula a BER analítica
end
figure(2)
subplot(111)
figber=semilogy(Eb2N,Q,'k-',Eb2N,BER(:,1),'b-*',...
    Eb2N,BER(:,2),'r-o',Eb2N,BER(:,3),'m-v');
legend('Analítico', 'Raiz de cosseno levantado','Retangular','Meia senoide')
xlabel('E_b/N (dB)');ylabel('BER')
set(figber,'Linewidth',2);
figure(3)
% Spectrum comparison
[Psd1,f]=pwelch(xrcos,[],[],[],'twosided',f_ovsamp);
[Psd2,f]=pwelch(xrect,[],[],[],'twosided',f_ovsamp);
[Psd3,f]=pwelch(xsine,[],[],[],'twosided',f_ovsamp);
figpsd1=semilogy(f-f_ovsamp/2,fftshift(Psd1));
ylabel('Power spectral density');
xlabel('frequency in unit of {1/T}');
ttl=title('(a) PSD usando pulso raiz de cosseno levantado (fator de
decaimento r=0,5)');

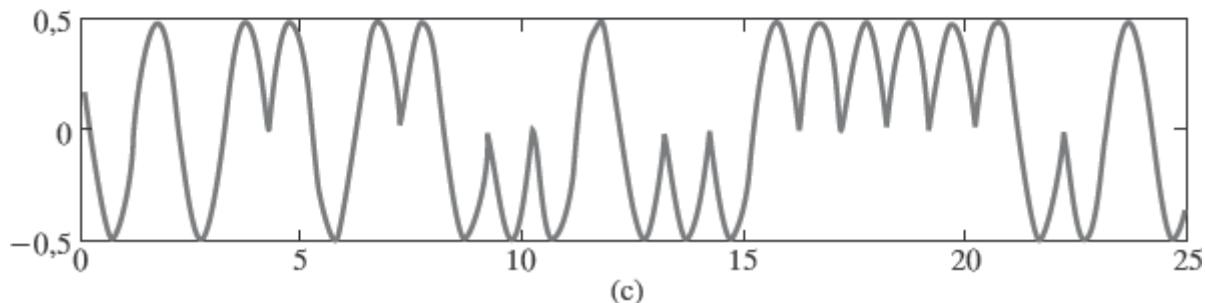
```



(a)



(b)



(c)

Figura 10.43 Ilustração dos sinais modulados a partir de três diferentes formatos de pulso: (a) pulso raiz de cosseno levantado, com fator de decaimento $r = 0,5$; (b) pulso retangular; (c) pulso de meia senoide.

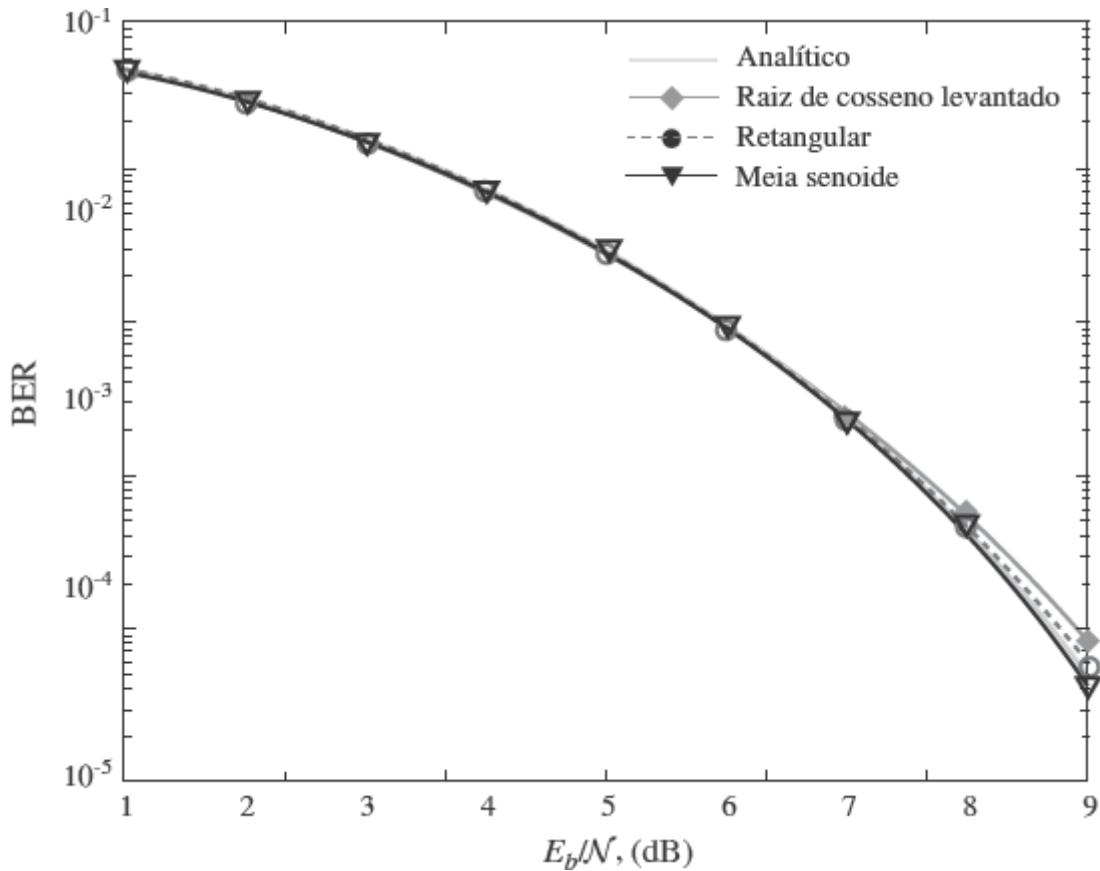


Figura 10.44 BER da detecção ótima (filtro casado) de sinalização polar usando três diferentes formatos de pulso: (a) pulso raiz de cosseno levantado, com fator de decaimento $r = 0,5$; (b) pulso retangular; (c) pulso de meia senoide.

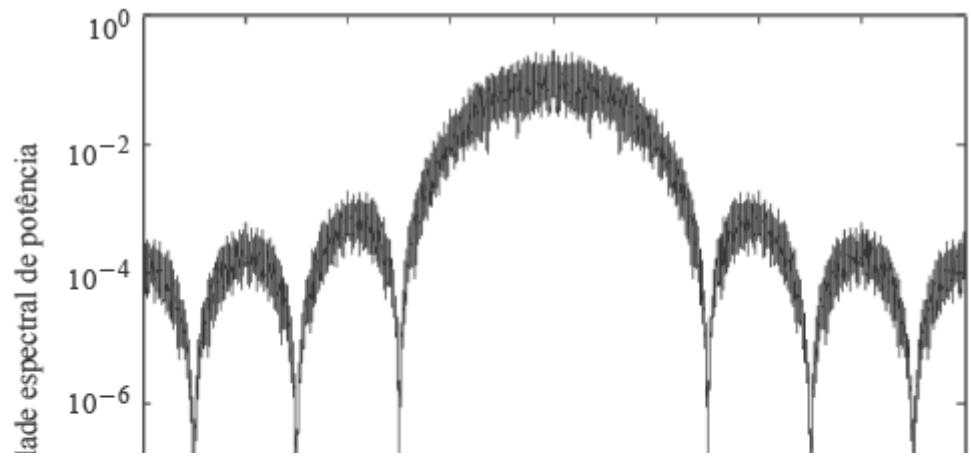
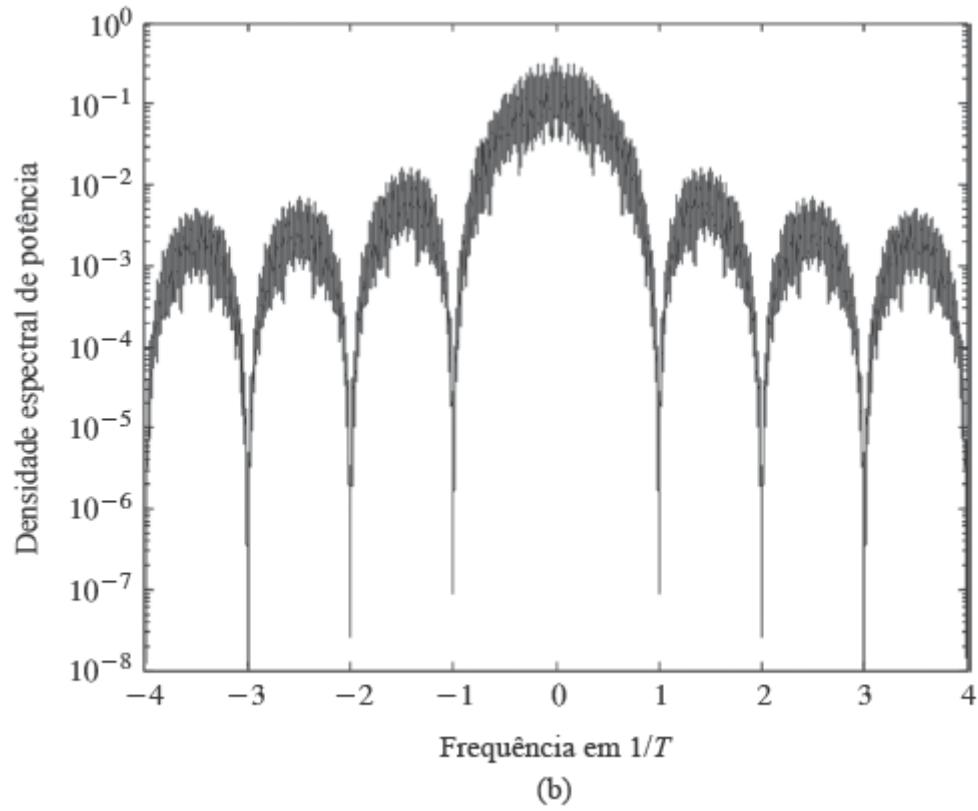
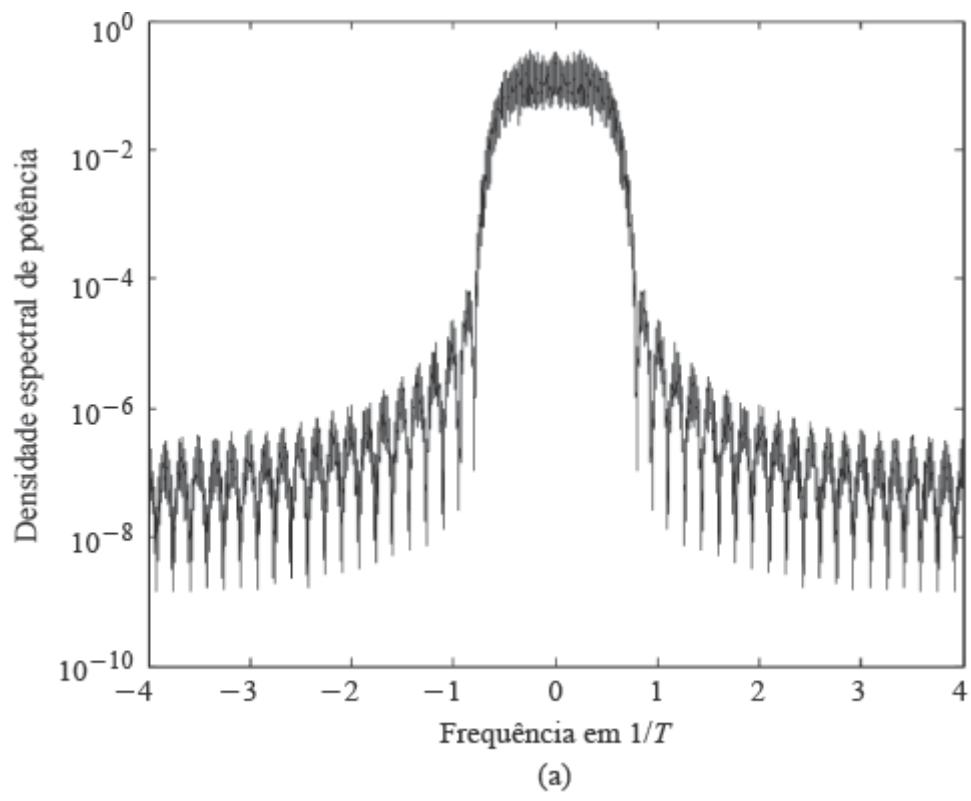
```

set(ttl,'FontSize',11);
figure(4)
figpsd2=semilogy(f-f_ovsamp/2,fftshift(Psd2));
ylabel('Densidade espectral de potência');
xlabel('Frequência em unidade de (I/T)');
tt2=title('(b) PSD usando pulso retangular NRZ');
set(tt2,'FontSize',11);
figure(5)
figpsd3=semilogy(f-f_ovsamp/2,fftshift(Psd3));
ylabel('Densidade espectral de potência');
xlabel('frequência de unidade de{1/T}');
tt3=title('(c) PSD usando pulso de meia senoide');
set(tt3,'FontSize',11);

```

Esse programa, primeiro, mostra os sinais binários modulados por sinalização polar, na Figura 10.43. As 3 diferentes formas de onda são resultado direto dos três diferentes formatos de pulso. Mesmo assim, os desempenhos de taxa de erro de bits (BER) são idênticos, como mostrado na Fig. 10.44. Isso confirma os resultados da Seção 10.1: o desempenho da sinalização independe da forma do pulso.

O programa também calcula a densidade espectral de potência para a sinalização polar usando os três sinais modulados diferentes. Da Fig. 10.45, podemos ver que o pulso raiz de cosseno levantado requer a mínima largura de banda. A sinalização de meia senoide exibe o maior lóbulo principal, e menor largura de banda total. O pulso retangular, de bordas abruptas, é o menos eficiente do ponto de vista de largura de banda. Assim, apesar de as simulações resultarem em mesma BER, as três distintas modulações polares exigem larguras de banda de canal muito diferentes.



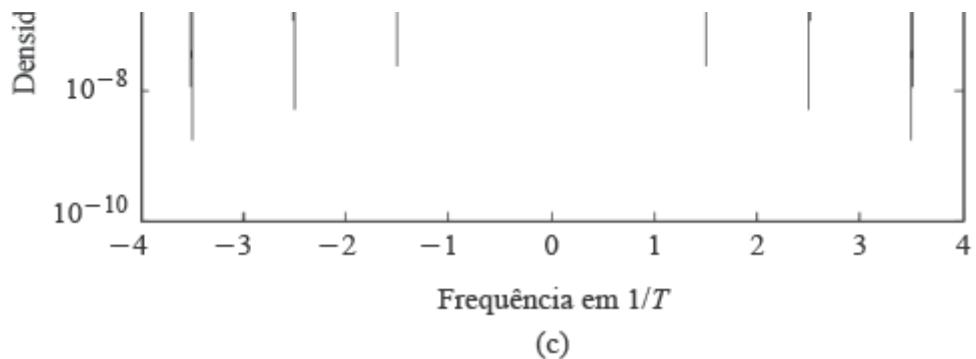


Figura 10.45 Densidade espectral de potência da transmissão polar binária usando três diferentes formatos de pulso:
(a) pulso raiz de cosseno levantado, com fator de decaimento $r = 0,5$; (b) pulso retangular NRZ; (c) pulso de meia senoide.

EXERCÍCIO COMPUTACIONAL 10.2: SINALIZAÇÃO BINÁRIA ON-OFF

A seguir, apresentamos um exercício que implementa e testa a sinalização on-off, assim como um tipo mais geral de sinalização ortogonal. Recordemos que a sinalização on-off é uma forma especial de sinalização binária ortogonal. O programa MATLAB Ex10_2.m mede, para os dois esquemas de sinalizações, a BER no receptor.

```

% PROGRAMA MATLAB <Ex10_2.m>
% Este exercício Matlab <Ex10_2.m> gera
% sinais on-off em banda-base usando o formato de pulso
% raiz de cosseno levantado (fator de decaimento = 0,5) e sinal
% ortogonal em banda-base
% antes de estimar a taxa de erro de bits (BER) para diferentes
% razões Eb/N, para efeitos de exibição e comparação
clear;clf
L=1000000;           % Número total de símbolos no experimento: 1 milhão
% Para exibir a forma de onda de pulso, superamostramos o sinal
% por um fator f_ovsamp = 8
f_ovsamp=16;          % Fator de superamostragem versus taxa de dados
delay_rc=3;
% Geração do pulso raiz de cosseno levantado (fator de decaimento =
0,5)
prcos=rcosflt([ 1 ], 1, f_ovsamp, 'sqrt', 0.5, delay_rc);
prcos=prcos(1:end-f_ovsamp+1);
prcos=prcos/norm(prcos);
pcmatch=prcos(end:-1:1);
% Geração de pulso retangular
psinh=sin([0:f_ovsamp-1]*pi/f_ovsamp);
psinh=psinh/norm(psinh);
phmatch=psinh(end:-1:1);
% Geração de pulso de meia senoide
psine=sin([0:f_ovsamp-1]*2*pi/f_ovsamp);
psine=psine/norm(psine);
psmatch=psine(end:-1:1);
% Geração de dados aleatórios de sinal para sinalização polar
s_data=round(rand(L,1));
% superamostragem para casar a 'taxa de superamostragem fictícia'
% que é f_ovsamp/T (T = 1 é a duração de cada símbolo)
s_up=upsample(s_data,f_ovsamp);
s_cp=upsample(1-s_data,f_ovsamp);

% Identifica os atrasos de decisão devido à formatação de pulso
% e filtros casados
delayrc=2*delay_rc*f_ovsamp;
delayrt=f_ovsamp-1;
% Gera sinalização polar dos diferentes formatos de pulso
xrcos=conv(s_up,prcos);
xorth=conv(s_up,psinh)+conv(s_cp,psine);
t=(1:200)/f_ovsamp;
figure(1)
subplot(211)
figwave1=plot(t,xrcos(delayrc/2:delayrc/2+199));

```

```

title('(a) Pulso raiz de cosseno levantado on-off.');
set(figwave1,'Linewidth',2);
subplot(212)
figwave2=plot(t,xorth(delayrt:delayrt+199));
title('(b) Modulação ortogonal.')
set(figwave2,'Linewidth',2);
% Calcula a duração do sinal
Lrcos=length(xrcos);Lrect=length(xorth);
BER=[];
noiseq=randn(Lrcos,1);
% Gera ruído de canal (AWGN)
for i=1:12,
    Eb2N(i)=i;                                % (Eb/N em dB)
    Eb2N_num=10^(Eb2N(i)/10);                 % Eb/N numérico
    Var_n=1/(2*Eb2N_num);                     % 1/SNR é a variância do ruído
    signois=sqrt(Var_n);                      % desvio-padrão
    awgnois=signois*noiseq;                   % AWGN
    % Adiciona ruído aos sinais na saída do canal
    yrcos=xrcos+awgnois/sqrt(2);
    yorth=xorth+awgnois(1:Lrect);

    % Aplica primeiros os filtros casados
    z1=conv(yrcos,pcmatch);clear awgnois, yrcos;
    z2=conv(yorth,phmatch);
    z3=conv(yorth,psmatch);clear yorth;

    % Amostra o sinal recebido e colhe amostras
    z1=z1(delayrc+1:f_ovsamp:end);
    z2=z2(delayrt+1:f_ovsamp:end-f_ovsamp+1);
    z3=z3(delayrt+1:f_ovsamp:end-f_ovsamp+1);
    % Decisão baseada no sinal da amostra
    dec1=round((sign(z1(1:L)-0.5)+1)*.5);dec2=round((sign(z2-z3)+1)*.5);
    % Compara com os dados originais para calcular a BER para
    % os três pulsos
    BER=[BER;sum(abs(s_data-dec1))/L sum(abs(s_data-dec2))/L];
    Q(i)=0.5*erfc(sqrt(Eb2N_num/2)); % Calcula a BER analítica
end
figure(2)
subplot(111)
figber=semilogy(Eb2N,Q,'k-',Eb2N,BER(:,1),'b-*',
Eb2N,BER(:,2),'r-o');
fleg=legend('Analítico','Raiz de cosseno levantado on-off','Sinalização
ortogonal');
fx=xlabel('E_b/N (dB)');fy=ylabel('BER');
set(figber,'Linewidth',2);set(fleg,'FontSize',11);
set(fx,'FontSize',11);
set(fy,'FontSize',11);
% Podemos plotar os pulsos individuais usados para a sinalização
% ortogonal
figure(3)
subplot(111);

```

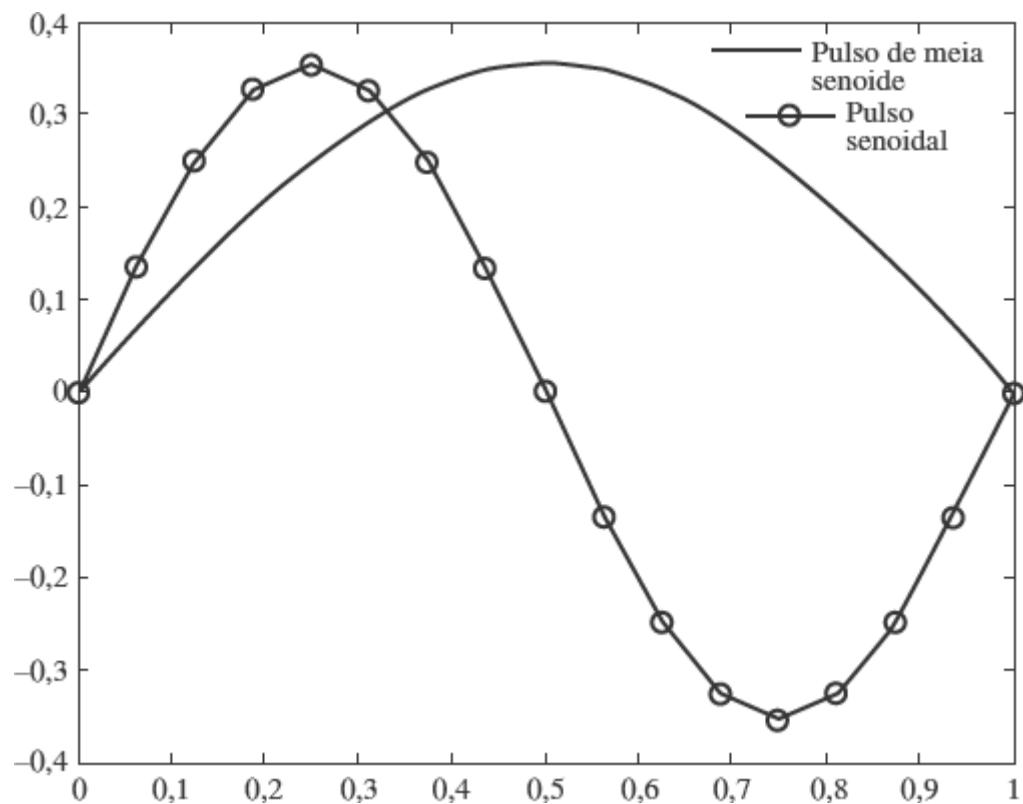


Figura 10.46 Formas de onda de dois pulsos usados em sinalização binária ortogonal: linha cheia, pulso de meia senoide; linha com círculos, pulso senoidal.

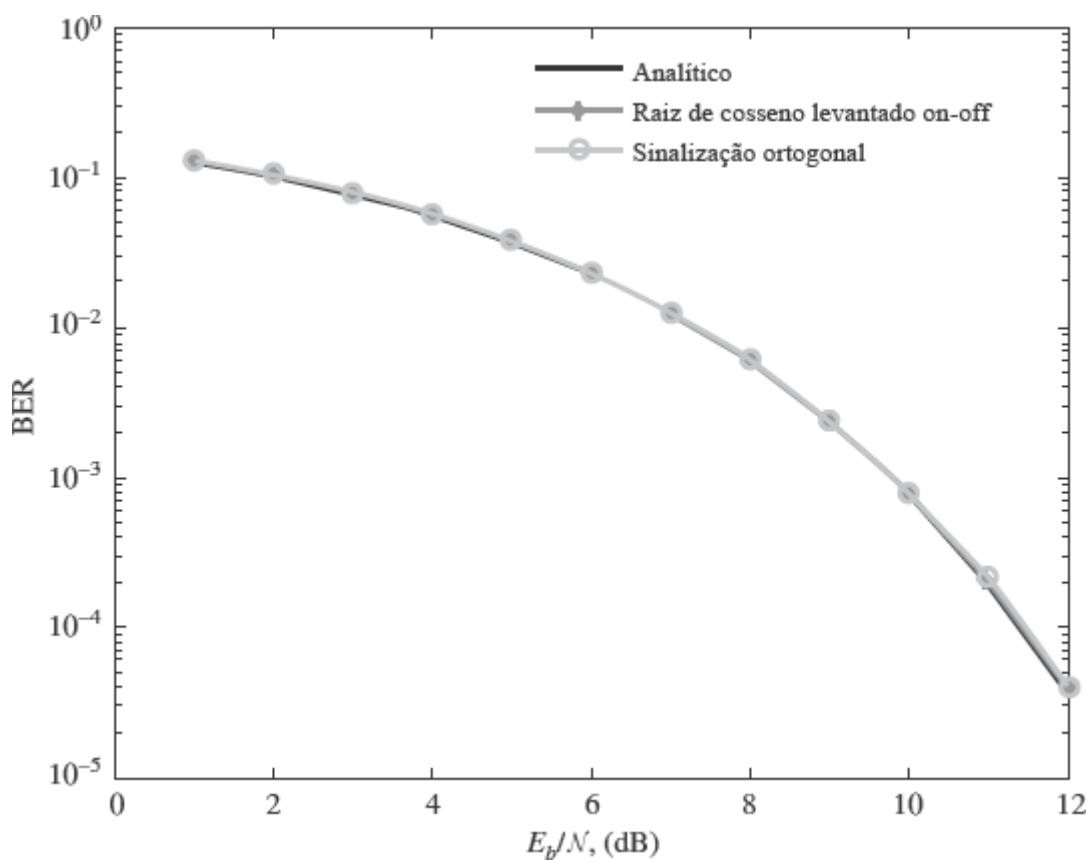


Figura 10.47 Medida de BER e comparação com BER analítica.

```

pulse=plot((0:f_ovsamp)/f_ovsamp,[psinh 0],'k-',...
           (0:f_ovsamp)/f_ovsamp,[psine 0],'k-o');
pleg=legend('Pulso de meia senoide', 'Pulso senoidal');
ptitle=title('Sinais ortogonais binários');
set(pulse,'Linewidth',2);
set(pleg,'FontSize',10);
set(ptitle,'FontSize',11);

```

Para a sinalização on-off, continuaremos a usar o pulso raiz de cosseno levantado do Exercício Computacional 10.1. Para a sinalização ortogonal mais geral, usaremos duas formas de pulsos de duração T . A Fig. 10.46 mostra esses pulsos ortogonais. Por fim, a Fig. 10.47 mostra a BER medida para ambos os esquemas de sinalização em comparação com a BER obtida da análise. Não é surpresa que os dois resultados medidas mostrem muito boa concordância com a BER analítica.

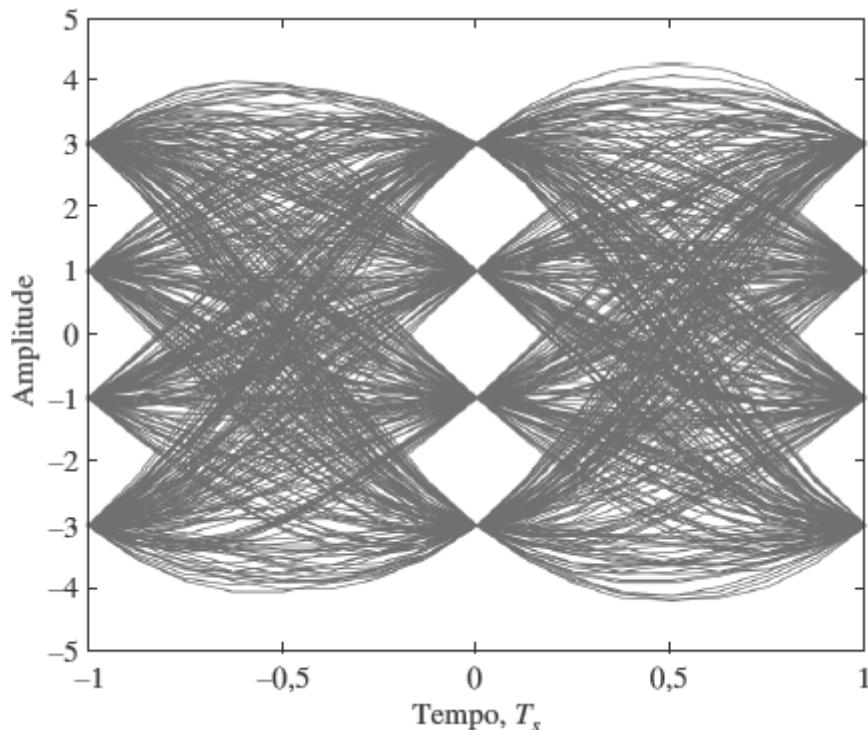


Figura 10.48 Diagrama de olho da componente real (em fase) da transmissão QAM-16 na saída do receptor de filtro casado.

EXERCÍCIO COMPUTACIONAL 10.3: MODULAÇÃO QAM-16

Nesse exercício, consideraremos uma constelação QAM mais complexa para transmissão. QAM M -ária foi analisada na Seção 10.6.6. No programa MATLAB Ex10_3.m, controlamos a largura de banda de transmissão aplicando o pulso raiz de cosseno levantado com fator de decaimento de 0,5 como a forma de pulso em banda-base. Para cada período de símbolo T , oito amostras uniformes são usadas para aproximar e emular sinais em tempo contínuo. A Fig. 10.48 ilustra o diagrama de olho aberto da parte real (em fase) da saída do filtro casado antes da amostragem. Pouca ISI é observada no ponto de amostragem, validando o uso da forma de pulso raiz de cosseno levantado em conjunto com o detector de filtro casado para transmissão sem ISI.

```

% Programa Matlab <Ex10_3.m>
% Este exercício Matlab <Ex10_3.m> efetua a simulação de
% transmissão polar QAM-16 em banda-base em canal AWGN.
% Pulso raiz de cosseno levantado com fator de decaimento = 0,5 é usado
% Receptor de filtro casado é projetado para detectar os símbolos
% O programa estima a taxa de erro de símbolo (SER) para diferentes Eb/N
clear;clf;
L=1000000;           % Número total de símbolos no experimento: 1 milhão
% Para exibir a forma de onda de pulso, superamostramos o sinal
% por um fator f_ovsamp=8
f_ovsamp=8;          % Fator de superamostragem versus taxa de dados
delay_rc=4;
% Geração de pulso raiz de cosseno levantado (fator de decaimento = 0,5)
prcos=rcosfl([ 1 ], 1, f_ovsamp, 'sqrt', 0.5, delay_rc);
prcos=prcos(1:end-f_ovsamp+1);
prcos=prcos/norm(prcos);
pcmatch=prcos(end:-1:1);

% Geração de dados aleatórios de sinal para sinalização polar
s_data=4*round(rand(L,1))+2*round(rand(L,1))-3+...
+j*(4*round(rand(L,1))+2*round(rand(L,1))-3);
% superamostragem para casar a

```

```

% 'taxa de superamostragem'
% que é f_ovsamp/T (T=1 é a duração de cada símbolo)
s_up=upsample(s_data,f_ovsamp);

% Identifica os atrasos de decisão devido à formatação de pulso
% e filtros casados
delayrc=2*delay_rc*f_ovsamp;
% Gera sinalização QAM-16 com formatação de pulso
xrcos=conv(s_up,prcos);

% Calcula a duração do sinal
Lrcos=length(xrcos);
SER=[];
noiseq=randn(Lrcos,1)+j*randn(Lrcos,1);
Es=10;           % symbol energy
% Gera ruído de canal (AWGN)
for i=1:9,
    Eb2N(i)=i*2;           % (Eb/N em dB)
    Eb2N_num=10^(Eb2N(i)/10); % Eb/N numérico
    Var_n=Es/(2*Eb2N_num);   % 1/SNR é a variância do ruído
    signois=sqrt(Var_n/2);    % desvio-padrão
    awgnois=signois*noiseq;  % AWGN
    % Adiciona ruído aos sinais na saída do canal
    yrcos=xrcos+awgnois;

    % Primeiro, aplica filtros casados
    z1=conv(yrcos,pcmatch);clear awgnois, yrcos;

    % Amostra o sinal recebido e colhe amostras
    z1=z1(delayrc+1:f_ovsamp:end);

    % Decisão baseada no sinal da amostra
    dec1=sign(real(z1(1:L)))+sign(real(z1(1:L))-2)+...
        sign(real(z1(1:L))+2)+...
        j*(sign(imag(z1(1:L)))+sign(imag(z1(1:L))-2)+...
        sign(imag(z1(1:L))+2));
    % Compara com os dados originais para calcular a SER para
    % os três pulsos
    %BER=[BER;sum(abs(s_data-dec1))/(2*L)];
    SER=[SER;sum(s_data~=dec1)/L];
    Q(i)=3*0.5*erfc(sqrt((2*Eb2N_num/5)/2));
%Calcula a SER analítica
end

figure(1)
subplot(111)
figber=semilogy(Eb2N,Q,'k- ',Eb2N,SER,'b-*');
axis([2 18 .99e-5 1]);
legend('Analítico', 'Raiz de cosseno levantado');
xlabel('E_b/N (dB)'); ylabel('Probabilidade de erro de símbolo');
set(figber,'Linewidth',2);

```

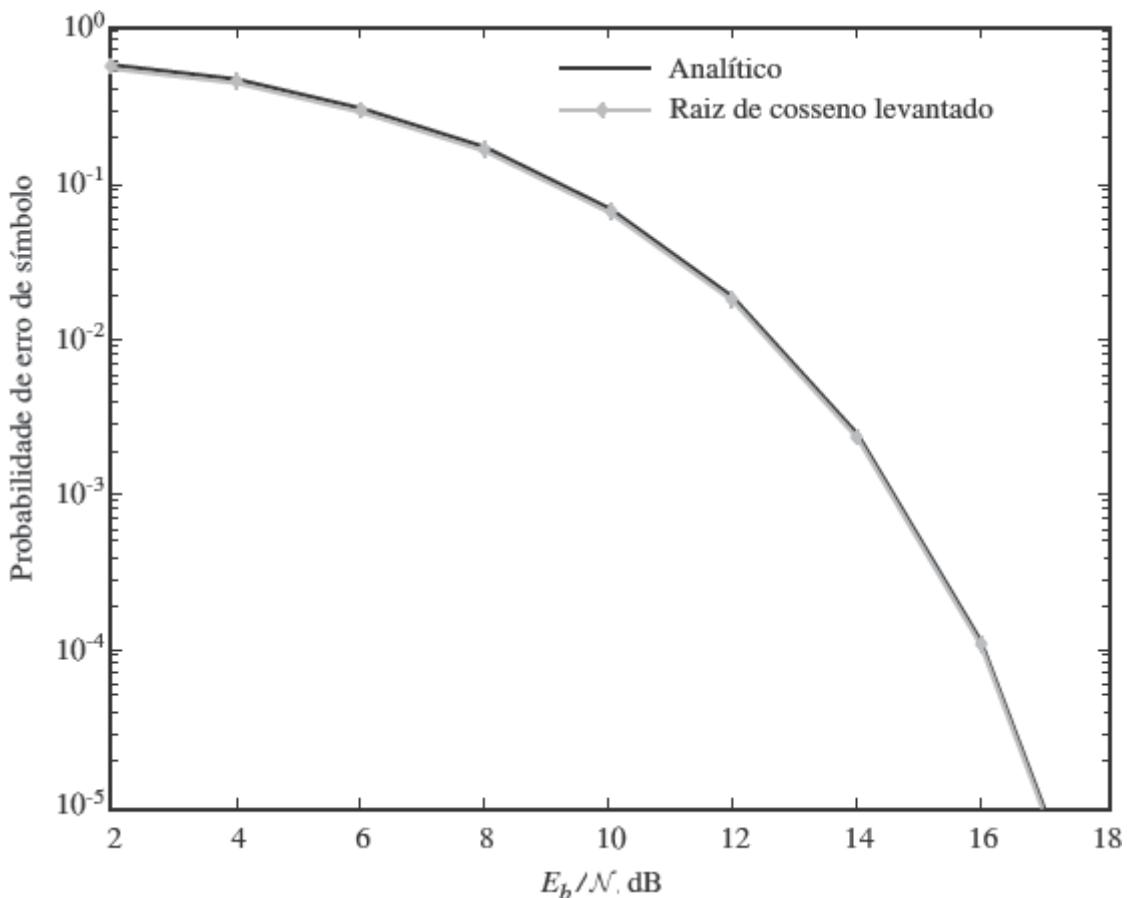


Figura 10.49 Probabilidade de erro de símbolo de QAM-16 usando pulso raiz de cosseno levantado, e comparação com resultado analítico.

```
% Gráfico da constelação
figure(2)
subplot(111)
plot(real(z1(1:min(L, 4000))), imag(z1(1:min(L, 4000))), '.');
axis('square')
xlabel('Parte real das amostras da saída do filtro casado')
ylabel('Parte imaginária das amostras da saída do filtro casado')
```

Como o sinal usa constelações QAM-16, em vez de medirmos a BER, medimos a taxa de erro de símbolo (*symbol error rate*) no receptor. A Fig. 10.49 ilustra que a SER medida apresenta excelente concordância com o resultado analítico da Seção 10.6.

O sucesso do receptor ótimo para QAM-16 também pode ser percebido com a observação das partes real e imaginária das amostras tomadas na saída do filtro casado. Usando um ponto para representar cada amostra medida, criamos um “diagrama de espalhamento”, que demonstra com clareza a confiabilidade da decisão tomada a seguir. Caso os pontos no diagrama de espalhamento estejam bem agrupados em torno do ponto de constelação original, é grande a possibilidade de a decisão ser confiável. Em caso contrário, numerosos erros de decisão podem ocorrer. A Fig. 10.50 ilustra o diagrama de espalhamento das medidas tomadas no receptor quando $E_b/N_0 = 18$ dB. O estreito agrupamento dos pontos de amostras medidos é uma forte indicação de que a SER resultante será muito baixa.

EXERCÍCIO COMPUTACIONAL 10.4: DETECÇÃO FSK NÃO COERENTE

Para testar os resultados de um receptor FSK binário não coerente, apresentamos o programa MATLAB Ex10_4.m, que supõe a ortogonalidade das duas frequências usadas na FSK. Como esperado, os resultados de BER medida mostrados na Fig. 10.51 concordam muito bem com resultados de BER analítica.

```
% PROGRAMA MATLAB <Ex10_4.m>
```

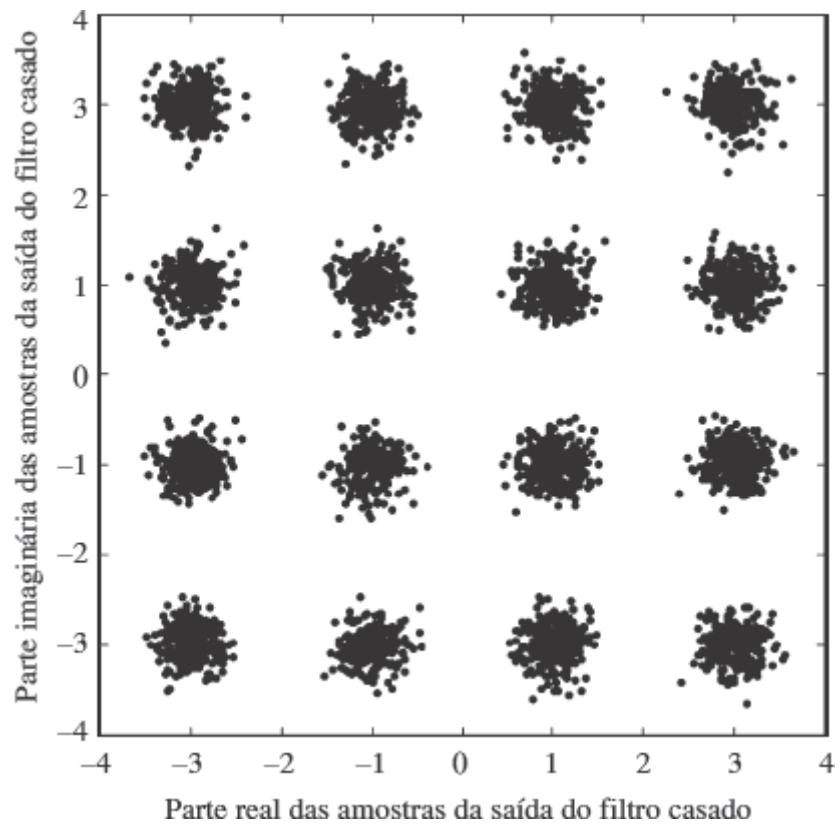


Figura 10.50 Diagrama de espalhamento da saída do filtro casado para a sinalização QAM-16 com pulso raiz de cosseno levantado quando $E_b/N_0 = 18$ dB.

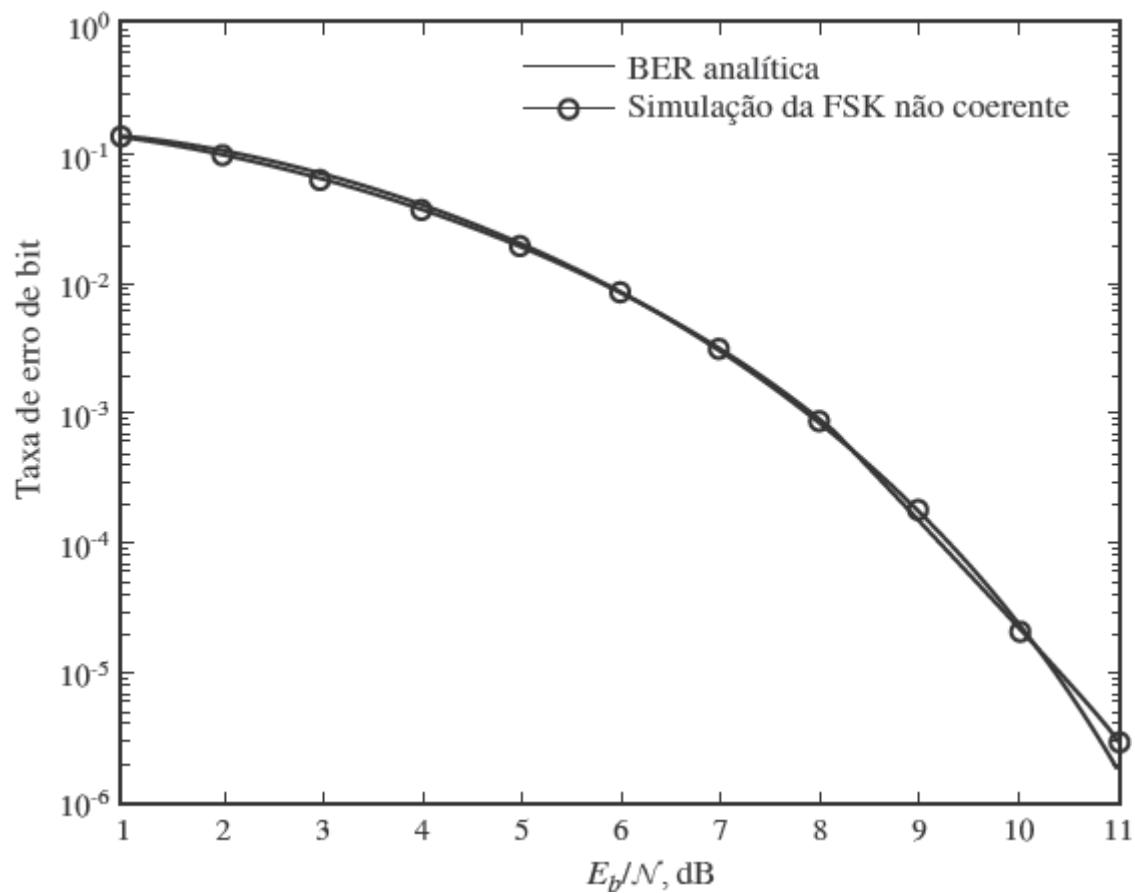


Figura 10.51 BER de detecção não coerente da FSK binária.

```

% Este programa efetua a simulação de detecção não coerente de
% sinalização ortogonal incluindo BFSK. Detecção MFSK não coerente
% requer apenas comparação das magnitudes dos intervalos de frequência.
L=100000; %Número total de símbolos no experimento
s_data=round(rand(L,1));
% Geração de dados aleatórios para as duas frequências
xbase1=[exp(j*2*pi*rand) 0];
xbase0=[0 exp(j*2*pi*rand)];
% Modulação das duas frequências ortogonais
xmodsig=s_data*xbase1+(1-s_data)*xbase0;
% Geração de sequências de ruído para os dois canais de frequência
noisei=randn(L,2);
noiseq=randn(L,2);
BER=[];
BER_az=[];
% Geração de ruído de canal (AWGN)
for i=1:12,
    Eb2N(i)=i; % (Eb/N em dB)
    Eb2N_num=10^(Eb2N(i)/10); % Eb/N numérico
    Var_n=1/(2*Eb2N_num); % 1/SNR é a variância do ruído
    signois=sqrt(Var_n); % desvio-padrão
    awgnois=signois*(noisei+j*noiseq); % canais complexos AWGN
    % Adiciona ruído aos sinais na saída do canal
    ychout=xmodsig+awgnois;
    % Detecção não coerente
    ydim1=abs(ychout(:,1));
    ydim2=abs(ychout(:,2));
    dec=(ydim1>ydim2);
    % Cálculo da BER das simulações
    BER=[BER; sum(dec~=s_data)/L];
    % Compara com BER analítica.
    BER_az=[BER_az; 0.5*exp(-Eb2N_num/2)];
end
figber=semilogy(Eb2N,BER_az,'k-',Eb2N,BER,'k-o');
set(figber,'LineWidth',2);
legend('BER Analítica', 'Simulação FSK não coerente');
fx=xlabel('E_b/N (dB)');
fy=ylabel('Taxa de erro de bit');
set(fx,'FontSize',11); set(fy,'FontSize',11);

```

EXERCÍCIO COMPUTACIONAL 10.5: DETECÇÃO NÃO COERENTE DE PSK DIFERENCIAL BINÁRIA

Para testar os resultados de um sistema de chaveamento por deslocamento de frequência, apresentamos o programa MATLAB Ex10_5.m. Como nos casos anteriores, resultados de BER medida mostrados na Fig. 10.52 exibem muito boa concordância com a BER analítica.

```

% PROGRAMA MATLAB <Ex10_5.m>
% Este programa simula detecção diferencial
% de DPSK binária. Detecção diferencial requer somente a comparação
% de fases sucessivas das amostras de sinal no receptor
%
clear;clf
L=1000000;           %Número total de símbolos no experimento
s_data=round(rand(L,1));
% Geração inicial de fases aleatórias
initphase=[2*rand];
% modulação diferencial
s_denc=mod(cumsum([0;s_data]),2);

```

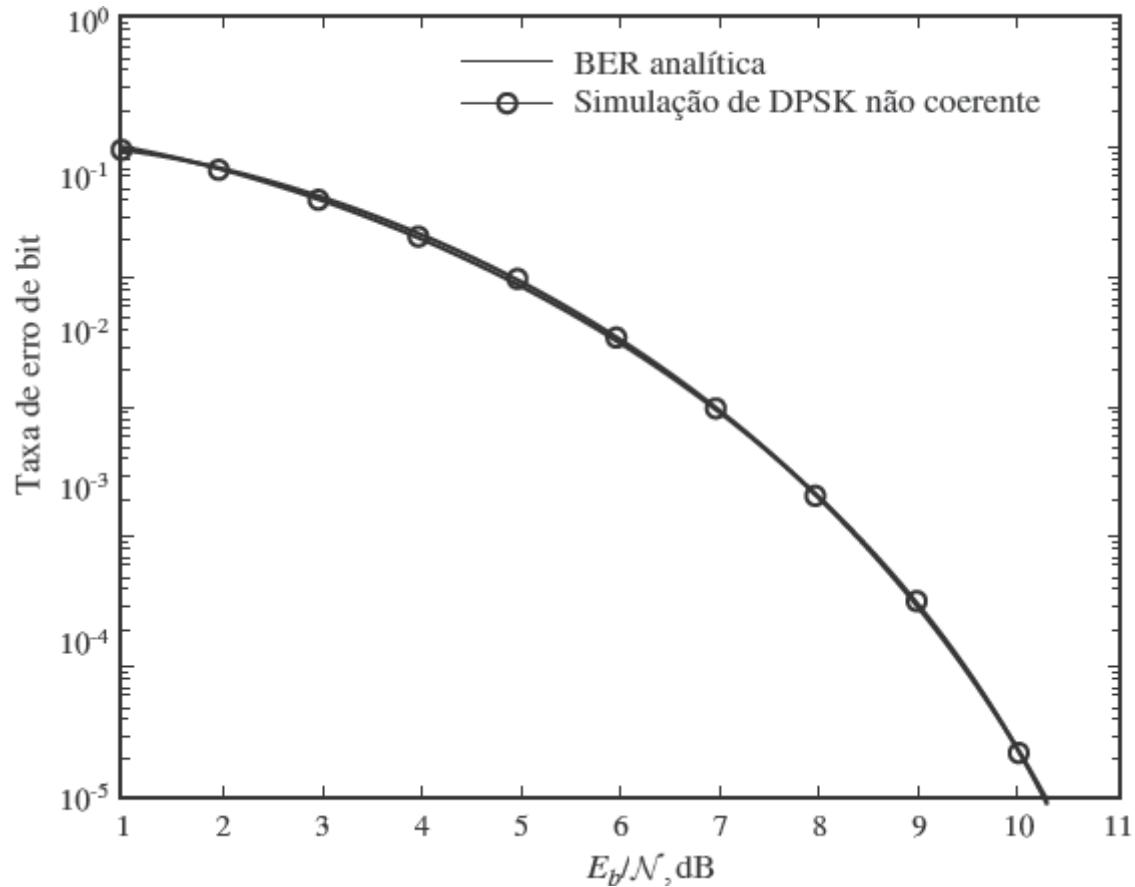


Figura 10.52 Resultados de BER analítica a partir de simulação da detecção não coerente da DPSK binária (círculos).

```

% define a fase divisível por pi
xphase=initphase+s_denc;
clear s_denc;
% modula a fase do sinal
xmodsig=exp(j*pi*xphase); clear xphase;
Lx=length(xmodsig);
% Gera sequência de ruído
noiseq=randn(Lx,2);
BER=[];
BER_az=[];
% Gera ruído de canal (AWGN)
for i=1:11,
    Eb2N(i)=i; % (Eb/N em dB)
    Eb2N_num=10^(Eb2N(i)/10); % Eb/N numérico
    Var_n=1/(2*Eb2N_num); % 1/SNR é a variância do ruído
    signois=sqrt(Var_n); % desvio-padrão
    awgnois=signois*(noiseq*[1;j]); % Canais complexos AWGN
    % Adiciona ruído aos sinais na saída do canal
    ychout=xmodsig+awgnois;
    % Detecção não coerente
    yphase=angle(ychout); %Determina fase da saída do canal
    clear ychout;
    ydfdec=diff(yphase)/pi; %Calcula a diferença de fase
    clear yphase;
    dec=(abs(ydfdec)>0.5); %toma decisões difíceis
    clear ydfdec;
    % Calcula a BER de simulações
    BER=[BER; sum(dec~=s_data)/L];
    % Compara com BER analítica.
    BER_az=[BER_az; 0.5*exp(-Eb2N_num)];
end

% Traça gráficos do resultado
figber=semilogy(Eb2N,BER_az,'k-',Eb2N,BER,'k-o');
axis([1 11 .99e-5 1]);
set(figber,'LineWidth',2);
legend('BER analítica', 'Simulação de DPSK binária');
fx=xlabel('E_b/N (dB)');
fy=ylabel('Taxa de erro de bit');
set(fx,'FontSize',11); set(fy,'FontSize',11);

```

REFERÊNCIAS

1. S. Pasupathy, "Minimum Shift Keying: A Spectrally Efficient Modulation," *IEEE Commun. Soc. Mag.*, vol. 17, pp. 14–22, July 1979.
2. J. J. Spilker, *Digital Communications by Satellite*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1977.
3. H. J. Landau and H. O. Pollak, "Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis, and Uncertainty, III: The Dimensions of Space of Essentially Time- and Band-Limited Signals," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 41, pp. 1295–1336, July 1962.

4. H. L. Van Trees, *Detection, Estimation, and Modulation Theory*, vols. I, II, and III, Wiley, New York, 1968–1971.
5. A. J. Viterbi, *Principles of Coherent Communication*, McGraw-Hill, New York, 1966.
6. H. J. Landau and D. Slepian, “On the Optimality of the Regular Simplex Code,” *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 45, pp. 1247–1272, Oct. 1966.
7. S. G. Wilson, *Digital Modulation and Coding*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.
8. A. V. Balakrishnan, “Contribution to the Sphere-Packing Problem of Communication Theory,” *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 3, pp. 485–506, Dec. 1961.
9. E. Arthurs and H. Dym, “On Optimum Detection of Digital Signals in the Presence of White Gaussian Noise—A Geometric Interpretation and a Study of Three Basic Data Transmission Systems,” *IRE Trans. Commun. Syst.*, vol. CS-10, pp. 336–372, Dec. 1962.
10. B. P. Lathi, *An Introduction to Random Signals and Communication Theory*, International Textbook Co., Scranton, PA, 1968.

EXERCÍCIOS

A Fig. E10.1-1 ilustra o chamado filtro integrador-descarregador. O amplificador de realimentação é um integrador ideal. A chave s_1 se fecha momentaneamente e se abre no instante $t = T_b$, descarregando toda a carga em C e fazendo com que a saída vá a zero. A chave s_2 amostra a saída imediatamente antes da ação de descarregamento.

- (a) Esboce o gráfico da saída $p_o(t)$ quando um pulso quadrado $p(t)$ é aplicado à entrada do filtro.
- (b) Esboce o gráfico da saída $p_o(t)$ do filtro casado ao pulso quadrado $p(t)$.
- (c) Mostre que o desempenho do filtro integrador-descarregador é idêntico ao do filtro casado; ou seja, mostre que ρ é o mesmo nos dois casos.

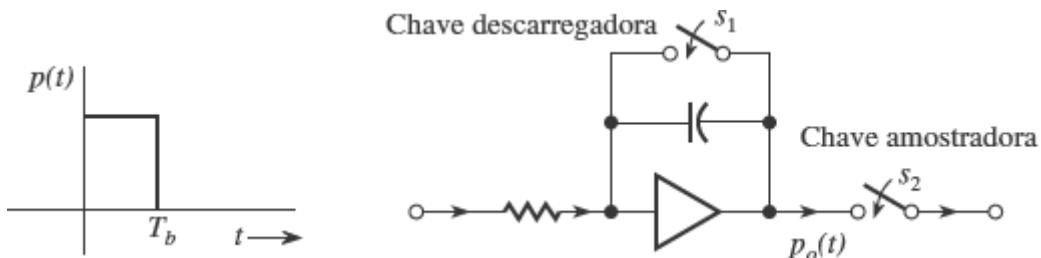


Figura E.10.1-1

Uma alternativa ao filtro ótimo é um filtro subótimo, em que admitimos uma forma de filtro específica e ajustamos seus parâmetros para maximizar ρ . Tais filtros são inferiores ao filtro ótimo, mas podem ter projeto mais simples.

Para um pulso retangular $p(t)$ de altura A e largura T_b na entrada (Fig. E10.1-2), determine ρ_{\max} quando, no lugar do filtro casado, for usado um filtro RC de um estágio com $H(\omega) = 1/(1 + j\omega RC)$. Admita ruído gaussiano branco com PSD $N/2$. Mostre que desempenho ótimo é obtido quando $1/RC = 1,26/T_b$.

Sugestão: Faça $d\rho^2/dx = 0$ ($x = T_b/RC$).

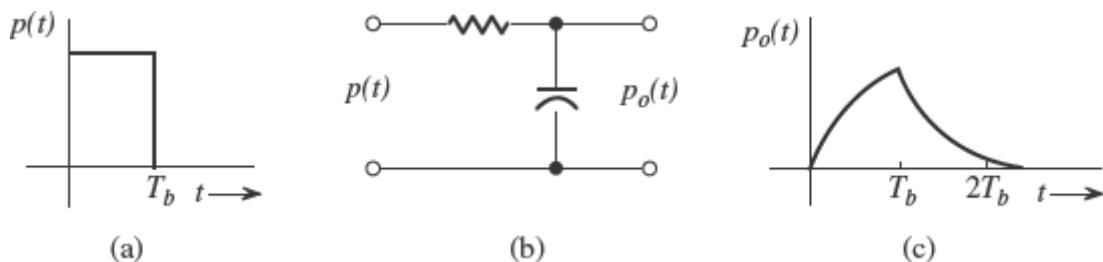


Figura E.10.1-2

Na detecção coerente de PPM binária, um pulso $p_0(t)$ de meia largura é transmitido com diferentes atrasos para os dígitos binários “0” e “1”, no intervalo $0 \leq t \leq T_b$. Note que

$$p_0(t) = u(t) - u(t - T_b/2)$$

A transmissão PPM binária consiste simplesmente na transmissão de

$$\begin{aligned} p_0(t), & \quad \text{se “0” for transmitido} \\ p_0(t - T_b/2), & \quad \text{se “1” for transmitido} \end{aligned}$$

O ruído de canal é AWGN com nível de espectro $\mathcal{N}/2$.

- (a) Determine a arquitetura do receptor ótimo para esse sistema binário. Esboce o gráfico da resposta do filtro no domínio do tempo.
- (b) Se $P[“0”] = 0,4$ e $P[“1”] = 0,6$, determine o limiar ótimo e a resultante taxa de erro de bit.
- (c) O projetista foi mal informado e crê que $P[“0”] = 0,5 = P[“1”]$, e projeta um receptor com base nessa informação. Determine a real probabilidade de erro quando, na verdade, as probabilidades *a priori* forem $P[“0”] = 0,4$ e $P[“1”] = 0,6$. Compare esse resultado com o da parte (b).

Na detecção coerente de modulações binárias em *chirp*, a transmissão em $0 \leq t \leq T_b$ é

$$\begin{aligned} A \cos(\alpha_0 t^2 + \theta_0), & \quad \text{se “0” for transmitido} \\ A \cos(\alpha_1 t^2 + \theta_1), & \quad \text{se “1” for transmitido} \end{aligned}$$

O ruído de canal é AWGN com espectro $\mathcal{N}/2$. Os dígitos binários são equiprováveis.

- (a) Projete o receptor ótimo.
- (b) Calcule a probabilidade de erro de bit para o receptor ótimo na parte (a).

Em esquemas coerentes, um pequeno piloto é adicionado para sincronização. Como o piloto não transporta informação, causa degradação de P_b . Considere um esquema PSK coerente que usa os seguintes dois pulsos de duração T_b :

$$p(t) = A\sqrt{1-m^2} \cos \omega_c t + A m \sin \omega_c t$$

$$q(t) = -A\sqrt{1-m^2} \cos \omega_c t + A m \sin \omega_c t$$

sendo $A m \sin \omega_c t$ o piloto. Mostre que, quando o ruído de canal é gaussiano branco,

$$P_b = Q \left[\sqrt{\frac{2E_b(1-m^2)}{\mathcal{N}}} \right]$$

Sugestão: Use a Eq. (10.25b).

Para sistemas de comunicação binária polar, cada erro de detecção tem algum custo. Suponha que, quando a transmissão $m = 1$ for lida como $m = 0$ no receptor, uma penalidade quantitativa, ou custo, C_{10} seja alocada ao erro e, da mesma forma, um custo C_{01} seja alocado quando a transmissão $m = 0$ for lida como $m = 1$. Para o caso polar, em que $P_m(0) = P_m(1) = 0,5$, mostre que, para ruído de canal gaussiano branco, o limiar ótimo que minimiza o custo total não é 0, mas a_o , dado por

$$a_o = \frac{\mathcal{N}}{4} \ln \frac{C_{01}}{C_{10}}$$

Sugestão: Veja a Sugestão para o Exercício 8.2-11.

Para um sistema binário polar com mensagens de probabilidades distintas, mostre que o limiar ótimo de decisão a_o é dado por

$$a_o = \frac{\mathcal{N}}{4} \ln \frac{P_m(\mathbf{0})C_{01}}{P_m(\mathbf{1})C_{10}}$$

em que C_{01} e C_{10} são os custos de erros, como explicado no Exercício 10.2-4, e $P_m(\mathbf{0})$ e $P_m(\mathbf{1})$ são as probabilidades de $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ serem transmitidos, respectivamente.

Sugestão: Veja a Sugestão para o Exercício 8.2-11.

Para comunicação 4-ária, mensagens são escolhidas dentre quatro símbolos, $m_1 = 00$, $m_2 = 01$, $m_3 = 10$ e $m_4 = 11$, transmitidos por pulsos $\pm p(t)$, 0 e $\pm 3p(t)$, respectivamente. Um filtro casado a $p(t)$ é usado no receptor. Denote a energia de $p(t)$ por E_p . O ruído de canal é AWGN com espectro $\mathcal{N}/2$.

- (a) Seja r a saída do filtro casado em t_m ; esboce o gráfico de $p_r(r|m_i)$ (00 , 01 , 10 e 11) para os quatro símbolos de mensagens, supondo que sejam equiprováveis.
- (b) Para minimizar a probabilidade de erro de detecção na parte (a), determine os limiares ótimos de decisão e a correspondente probabilidade de erro P_e em função da razão entre energia média de símbolo e ruído.

Dados binários são transmitidos por um pulso $p(t)$ para $\mathbf{0}$, e por um pulso $\gamma p(t)$ para $\mathbf{1}$. Seja $\gamma > 1$. Mostre que o receptor ótimo para esse caso consiste em um filtro casado a $p(t)$ mais um limiar de decisão, como mostrado na Fig. E10.2-7. Determine a probabilidade de erro P_e desse receptor em função de E_b/\mathcal{N} , supondo que $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ sejam equiprováveis.

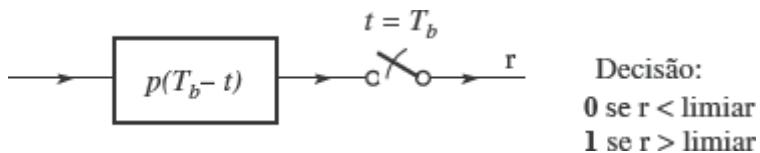


Figura E.10.2-7

Em uma transmissão binária, um pulso cosseno levantado $p(t)$ com fator de decaimento de 0,2 é usado para transmissão polar em banda-base. O canal ideal passa-baixos tem largura de banda $f_0 = 5000$ Hz.

- (a) Se o ruído de canal for AWGN com espectro $\mathcal{N}/2$, determine o filtro receptor ótimo e esboce o gráfico de sua resposta de frequência.
- (b) Se o ruído de canal for gaussiano com espectro

$$S_n(f) = 0,5\mathcal{N} \frac{1}{1 + (f/f_0)^2}$$

determine o filtro receptor ótimo e esboce o gráfico de sua resposta de frequência.

Em um sistema FSK, sinais binários de RF são transmitidos como

$$\begin{aligned} \mathbf{0} : \quad & \sqrt{2} \operatorname{sen}(\pi t/T_b) \cos [\omega_c - (\Delta\omega/2)t] & 0 \leq t \leq T_b \\ \mathbf{1} : \quad & \sqrt{2} \operatorname{sen}(\pi t/T_b) \cos [\omega_c + (\Delta\omega/2)t] & 0 \leq t \leq T_b \end{aligned}$$

O ruído de canal é AWGN. Suponha que as entradas binárias sejam equiprováveis.

- (a) Deduza o receptor coerente ótimo e o limiar ótimo.
- (b) Determine a mínima probabilidade de erro de bit.
- (c) É possível determinar $\Delta\omega$ para minimizar a probabilidade de erro de bit?

Considere quatro sinais no intervalo de tempo $(0, T)$:

$$\begin{aligned} p_0(t) &= u(t) - u(t - T) \\ p_1(t) &= \sin(2\pi t/T)[u(t) - u(t - T)] \\ p_2(t) &= \sin(\pi t/T)[u(t) - u(t - T)] \\ p_3(t) &= \cos(\pi t/T)[u(t) - u(t - T)] \end{aligned}$$

Aplique o procedimento de Gram-Schmidt e determine um conjunto de sinais de base ortogonais para esse espaço de sinais. Qual é a dimensão desse espaço de sinais?

Os sinais de base de um espaço de sinais tridimensional são dados por $\varphi_1(t) = p(t)$, $\varphi_2(t) = p(t - T_o)$ e $\varphi_3(t) = p(t - 2T_o)$, em que

$$p(t) = \sqrt{\frac{2}{T_o}} \sin\left(\frac{\pi t}{T_o}\right) [u(t) - u(t - T_o)]$$

- (a)** Esboce as formas de onda dos sinais representados por $(1, 1, 1)$, $(-2, 0, 1)$, $(1/3, 2, -\frac{1}{2})$ e $(-\frac{1}{2}, -1, 2)$ nesse espaço.
(b) Determine a energia de cada sinal na parte **(a)**.

Refaça o Exercício 10.4-2 para

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{T_o}} \\ \varphi_2(t) &= \sqrt{\frac{2}{T_o}} \cos \frac{\pi}{T_o} t \quad \varphi_3(t) = \sqrt{\frac{2}{T_o}} \cos \frac{2\pi}{T_o} t \quad 0 \leq t \leq T_o \end{aligned}$$

Para os três sinais básicos dados no Exercício 10.4-3, suponha que um sinal seja escrito como

$$x(t) = 1 + 2 \sin^3\left(\frac{\pi t}{T_o}\right)$$

- (a)** Use os três sinais básicos em termos de mínima energia de erro para determinar a melhor aproximação de $x(t)$. Qual é a mínima energia de erro da aproximação?
(b) Com a adição de mais um sinal de base

$$\varphi_4(t) = \sqrt{\frac{2}{T_o}} \sin \frac{\pi}{T_o} t \quad 0 \leq t \leq T_o$$

determine a redução na mínima energia de erro da aproximação.

Admita $p(t)$ como no Exercício 10.4-2 e

$$\varphi_k(t) = p[t - (k - 1)T_o] \quad k = 1, 2, 3, 4, 5$$

- (a)** Esboce os sinais representados por $(-1, 2, 3, 1, 4)$, $(2, 1, -4, -4, 2)$, $(3, -2, 3, 4, 1)$ e $(-2, 4, 2, 2, 0)$ neste espaço.
(b) Determine a energia de cada sinal.

- (c) Determine o ângulo entre todos os pares de sinais.

Sugestão: Recorde que o produto interno de dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} está relacionado ao ângulo entre os dois vetores por $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos(\theta)$.

Admita $p(t)$ como no Exercício 10.4-2 e

$$S_k(t) = P[t - (k - 1)T_0] \quad k = 1, 2, 3, 4, 5$$

Quando $s_k(t)$ é transmitido, o sinal recebido sob ruído $n_w(t)$ é

$$y(t) = s_k(t) + n_w(t) \quad 0 \leq t \leq 5T_0$$

Dado um ruído $n_w(t)$ gaussiano branco com espectro $\mathcal{N}/2$, faça o seguinte:

- (a) Defina um conjunto de funções de base para $y(t)$ tal que

$$E\{|y(t) - \sum y_i \varphi_i(t)|^2\} = 0$$

- (b) Caracterize a variável aleatória y_i quando $s_k(t)$ é transmitido.

- (c) Determine a função densidade de probabilidade conjunta da variável aleatória $\{y_1, \dots, y_5\}$ quando $s_k(t)$ é transmitido.

Para certo processo aleatório gaussiano estacionário $x(t)$, é dado que $R_x(\tau) = e^{-\tau^2}$. Determine a PDF conjunta das VAs $x(t+0,5)$, $x(t+1)$ e $x(t+2)$.

Um ruído gaussiano é caracterizado por suas média e função de autocorrelação. Um ruído gaussiano estacionário $x(t)$ tem média zero e função de autocorrelação $R_x(\tau)$.

- (a) Se $x(t)$ for a entrada de um sistema linear invariante no tempo com resposta ao impulso $h(t)$, determine a média e a função de autocorrelação da saída $y(t)$ do sistema linear.
(b) Se $x(t)$ for a entrada a um sistema linear variante no tempo cuja saída é

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) x(\tau) d\tau$$

mostre o tipo de processo de saída gerado e determine a média e função de autocorrelação da saída $y(t)$ do sistema linear.

Determine a PSD de saída o sistema linear na parte (a) do Exercício 10.5-3.

Determine a PSD de saída o sistema linear na parte (b) do Exercício 10.5-3.

Considere o pré-processamento da Fig. 10.17. O ruído de canal $n_w(t)$ é gaussiano branco.

- (a) Determine a energia de sinal de $r(t)$ e $q(t)$ no intervalo de tempo $[0, T_M]$.
(b) Prove que, embora $r(t)$ e $q(t)$ não sejam iguais, ambos encerram todo o conteúdo útil de sinal.
(c) Mostre que a função densidade de probabilidade conjunta de (q_1, q_2, \dots, q_N) , sob a hipótese de que $s_k(t)$ tenha sido transmitido, pode ser escrita como

$$p_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}) = \frac{1}{(\pi \mathcal{N})^{N/2}} \exp\left(-\|\mathbf{q} - s_k\|^2 / \mathcal{N}\right)$$

Considere um ruído de canal branco aditivo. Após projeção do sinal, o vetor de sinal recebido $N \times 1$ é dado por

$$\mathbf{q} = \mathbf{s}_i + \mathbf{n}$$

quando a mensagem m_i é transmitida. O vetor de ruído \mathbf{n} tem função densidade de probabilidade conjunta

$$\prod_{i=1}^N \frac{1}{\tau} \exp \left(\frac{-|\mathbf{n}_i|}{(2\tau)} \right)$$

- (a) Determine o detector (MAP) que pode minimizar a probabilidade de erro de detecção.
- (b) Siga as deduções do detector ótimo para ruído AWGN para obter a estrutura do receptor ótimo para esse ruído de canal branco não gaussiano.
- (c) Mostre a diferença entre as regiões de decisão para ruídos gaussiano e não gaussiano em um espaço de sinais bidimensional ($N = 2$).

Uma fonte binária emite dados a uma taxa de 400.000 bit/s. Considere chaveamento multiamplitude (PAM) com $M = 2, 16$ e 32 . Em cada caso, determine as necessárias potência de sinal na entrada do receptor e mínima largura de banda de transmissão quando $S_n(\omega) = 10^{-8}$ e a taxa de erro de bit, P_b , deve ser menor que 10^{-6} .

Refaça o Exercício 10.6-3 para a PSK M -ária.

Uma fonte emite M mensagens equiprováveis, que são alocadas a sinais s_1, s_2, \dots, s_M , como mostrado na Fig. E.10.6-5. Determine, para um canal AWGN, o receptor ótimo e a correspondente probabilidade de erro P_{eM} em função de E_b/\mathcal{N} .

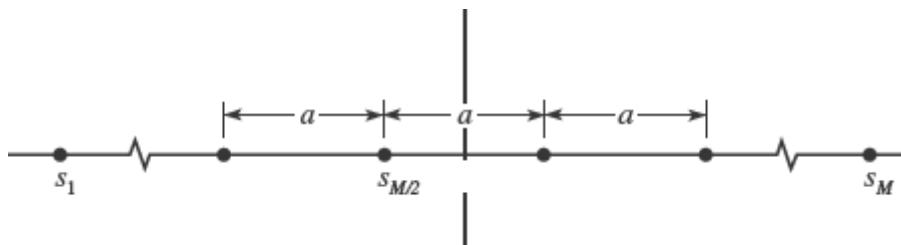


Figura E.10.6-5

Uma fonte emite oito mensagens equiprováveis, que são alocadas a sinais QAM s_1, s_2, \dots, s_M , como mostrado na Fig. E10.6-6.

- (a) Determine, para um canal AWGN, o receptor ótimo.
- (b) Determine as regiões de decisão e probabilidade de erro P_{eM} do receptor ótimo em função de E_b .

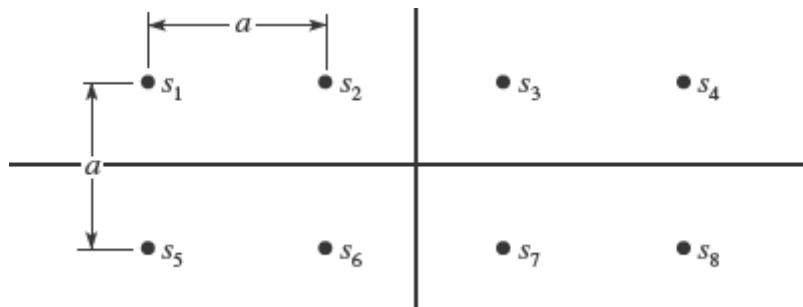


Figura E.10.6-6

Prove, para $E_b/\mathcal{N} \gg 1$ e $M \gg 2$, que a aproximação da probabilidade de erro para MSK na Eq. (10.109b) é válida.

Use a aproximação na Eq. (10.109b) para a PSK-16 para comparar as probabilidades de erro de símbolo de QAM-16 e a PSK-16. Calcule, aproximadamente, quantos decibéis são perdidos de E_b/\mathcal{N} (SNR) com a PSK-16, em relação à QAM-16 (ignorando a diferença constante na função \mathcal{Q}).

Compare as probabilidades de erro de símbolo da PAM-16, PSK-16 e QAM-16. Esboce gráficos dessas probabilidades em função de E_b/\mathcal{N} .

Mostre que, para a MPSK, o receptor ótimo da forma na Fig. 10.19a equivale a um comparador de fase. Supunha que todas as mensagens sejam equiprováveis e um canal AWGN.

Uma sinalização ternária tem três sinais para transmissão:

$$m_0 : 0, m_1 : 2p(t), m_2 : -2p(t).$$

- (a) Se $P(m_0) = P(m_1) = P(m_2) = 1/3$, determine as regiões de decisão ótimas e P_{eM} do receptor ótimo em função de \overline{E} . Admita um canal AWGN.
- (b) Determine P_{eM} em função de \overline{E}/\mathcal{N} .
- (c) Refaça as partes (a) e (b) para $P(m_0) = 1/2$ e $P(m_1) = P(m_2) = 0,25$.

Uma configuração de sinal 16-ária é mostrada na Fig. E10.6-12. Escreva uma expressão (não calcule as integrais) para a P_{eM} do receptor ótimo, supondo que todos os símbolos sejam equiprováveis. Admita, ainda, um canal AWGN.

Uma configuração de cinco sinais em um espaço bidimensional é mostrada na Fig. E10.6-13.

- (a) Escolha $\varphi_1(t) = \sqrt{2/T_o} \cos \omega_c t$ e $\varphi_2(t) = \sqrt{2/T_o} \sin \omega_c t$ e esboce gráficos das formas de onda dos cinco sinais.

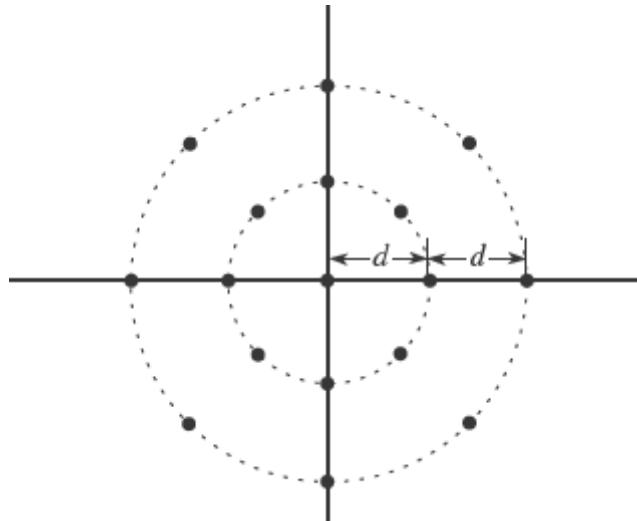


Figura E.10.6-12

- (b) No espaço de sinais, localize as regiões de decisão ótimas, admitindo canal AWGN.
- (c) Determine a probabilidade de erro P_{eM} em função de \overline{E} do receptor ótimo.

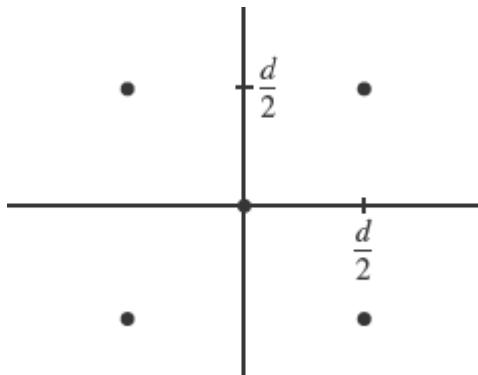


Figura E.10.6-13

Uma configuração de sinal QAM-16 é mostrada na Fig. E.10.6-14. Supondo que todos os símbolos sejam equiprováveis, determine a probabilidade de erro P_{eM} em função de E_b do receptor ótimo, considerando um

canal AWGN.

Compare o desempenho desse esquema com o resultado da QAM de 16 pontos retangular da Seção 10.6.

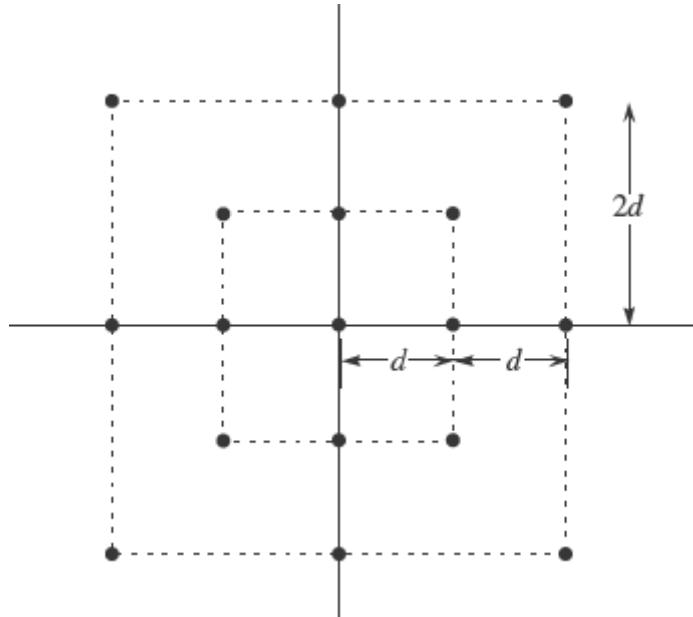


Figura 10.6-14

Os vértices de um hipercubo de N dimensões são um conjunto de 2^N sinais

$$s_k(t) = \frac{d}{2} \sum_{j=1}^N a_{kj} \varphi_j(t)$$

em que $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_N(t)\}$ é um conjunto de N sinais ortogonais, e a_{kj} é 1 ou -1 . Note que todos os sinais estão a uma distância $\sqrt{Nd}/2$ da origem e formam um cubo de dimensão N .

- (a) Esboce a configuração de sinais no espaço de sinais para $N = 1, 2$, e 3 .
- (b) Para cada configuração na parte (a), esboce gráficos de um possível conjunto de formas de onda.
- (c) Se todos os 2^N símbolos forem equiprováveis, determine o receptor ótimo e a probabilidade de erro P_{eM} do receptor ótimo em função de E_b , admitindo um canal AWGN.

Um conjunto ortogonal de sinais é dado por

$$s_k(t) = \sqrt{E} \varphi_k(t) \quad k = 1, 2, \dots, N$$

Um conjunto biortogonal de sinais é formado a partir do conjunto ortogonal, acrescentando a esse o negativo de cada sinal. Assim, ao conjunto ortogonal adicionamos outro conjunto

$$s_{-k}(t) = -\sqrt{E} \varphi_k(t)$$

Isso produz $2N$ sinais em um espaço de N dimensões. Supondo que todos os sinais sejam equiprováveis e um canal AWGN, obtenha a probabilidade de erro para o receptor ótimo. Como a largura de banda do conjunto biortogonal se compara com a do conjunto ortogonal?

- (a) Qual é o conjunto de sinais de energia mínima equivalente a um conjunto de sinais on-off binários?
- (b) Qual é o conjunto de sinais de energia mínima equivalente a um conjunto de sinais FSK binários?

- Usando conceitos geométricos relativos a espaço de sinais, explique por que os conjuntos on-off binário e ortogonal binário têm idênticas probabilidades de erro, e por que os requisitos de potência no caso polar binário são 3 dB menores que nos casos de conjuntos on-off e ortogonal.
- (c) \square

Uma fonte emite quatro mensagens equiprováveis m_1, m_2, m_3 e m_4 , codificadas pelos sinais $s_1(t), s_2(t), s_3(t)$ e $s_4(t)$, respectivamente, com

$$\left. \begin{array}{l} s_1(t) = 20\sqrt{2} \sin \frac{2\pi}{T_M} t \\ s_2(t) = 0 \\ s_3(t) = 10\sqrt{2} \cos \frac{2\pi}{T_M} t \\ s_4(t) = -10\sqrt{2} \cos \frac{2\pi}{T_M} t \end{array} \right\} \quad T_M = \frac{1}{20}$$

Cada um desses sinais tem duração $0 \leq t \leq T_M$ e é zero fora desse intervalo. Os sinais são transmitidos por canais AWGN.

- (a) Represente esses sinais em um espaço de sinais.
 (b) Determine as regiões de decisão.
 (c) Obtenha um conjunto de sinais de mínima energia equivalente.
 (d) Determine o receptor ótimo.

Um esquema de sinalização quaternária usa quatro formas de onda

$$\begin{aligned} s_1(t) &= 4 \varphi_1(t) \\ s_2(t) &= 2\varphi_1(t) + 2\varphi_2(t) \\ s_3(t) &= -2\varphi_1(t) - 2\varphi_2(t) \\ s_4(t) &= -4\varphi_2(t) \end{aligned}$$

em que $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ são sinais de base ortogonais. Todos os sinais são equiprováveis e o ruído de canal é gaussiano branco com PSD $S_n(\omega) = 10^{-4}$.

- (a) Represente esses sinais em um espaço de sinais e determine as regiões de decisão ótimas.
 (b) Calcule a probabilidade de erro do receptor ótimo.
 (c) Determine o conjunto de sinais de mínima energia equivalente.
 (d) Determine a redução na energia média quando o conjunto de sinais de mínima energia equivalente é transmitido.

Um sistema de sinalização ortogonal com $M = 4$ usa $\sqrt{E} \cdot \varphi_1(t), -\sqrt{E} \cdot \varphi_2(t), \sqrt{E} \cdot \varphi_3(t)$ e $\sqrt{E} \cdot \varphi_4(t)$ transmissão.

- (a) Determine o conjunto de sinais de mínima energia equivalente.
 (b) Represente o conjunto de sinais de mínima energia equivalente no espaço tridimensional.
 (c) Determine a redução na energia média quando o conjunto de sinais de mínima energia equivalente é usado.

Um esquema de sinalização ternária ($M = 3$) usa as três formas de onda

$$\begin{aligned} s_1(t) &= [u(t) - u(t - T_0/3)] \\ s_2(t) &= u(t) - u(t - T_0) \\ s_3(t) &= -[u(t - 2T_0/3) - u(t - T_0)] \end{aligned}$$

A taxa de transmissão é $1/T_0 = 200$ quilossímbolos por segundo. As três mensagens são equiprováveis, e o ruído de canal é gaussiano branco com PSD $S_n(\omega) = 2 \times 10^{-6}$.

- (a) Determine as regiões de decisão do receptor ótimo.
- (b) Determine o conjunto de sinais de mínima energia e esboce gráficos das formas de onda.
- (c) Calcule as energias médias do conjunto de sinais e do conjunto de sinais de mínima energia equivalente determinado na parte (a).

Refaça o Exercício 10.8-5 para $P(m_1) = 0,5$, $P(m_2) = 0,25$ e $P(m_3) = 0,25$.

Um esquema de sinalização binária usa duas formas de onda

$$s_1(t) = \text{rect}\left(\frac{t - 0,001}{0,002}\right) \quad \text{e} \quad s_2(t) = -\Delta\left(\frac{t - 0,001}{0,002}\right)$$

(veja o Capítulo 3 para as definições desses sinais.) A taxa de sinalização é de 1000 pulsos por segundo. Os dois sinais são equiprováveis, e o ruído de canal é gaussiano branco com PSD $S_n(\omega) = 2 \times 10^{-4}$.

- (a) Determine o conjunto de sinais de mínima energia equivalente.
- (b) Determine a probabilidade de erro do receptor ótimo.
- (c) Use um adequado espaço de sinais ortogonais para representar esses sinais como vetores.

Sugestão: Use a ortogonalização de Gram-Schmidt para determinar apropriados sinais de base $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$.

Em uma transmissão binária com mensagens m_0 e m_1 , os custos são definidos como

$$C_{00} = C_{11} = 1 \quad \text{e} \quad C_{01} = C_{10} = 4$$

As duas mensagens são equiprováveis. Determine o receptor de Bayes ótimo.

Em uma transmissão binária com mensagens m_0 e m_1 , os custos são definidos como

$$C_{00} = C_{11} = 1 \quad \text{e} \quad C_{01} = C_{10} = C$$

A probabilidade de m_0 é 1/3 e a de m_1 , 2/3.

- (a) Determine o receptor de Bayes ótimo.
- (b) Determine a mínima probabilidade de erro do receptor.
- (c) Determine o receptor de máxima verossimilhança.
- (d) Compara as probabilidades de erro dos receptores nas partes (b) e (c).

Desenhe gráficos das probabilidades de erro das detecções não coerentes da ASK binária, da FSK binária e da DPSK binária, e compare-as.

Deduza a probabilidade de erro de símbolo para diferentes representações da sinalização QPSK.

* A irrealizabilidade do filtro pode ser prontamente entendida de modo intuitivo quando o instante de tomada de decisão é $t_m < T_o$. Nesse caso, somos forçados a tomar uma decisão antes que o pulso completo tenha sido alimentado ao filtro ($t_m < T_o$). Isso requer um filtro profético, que seja capaz de responder a entradas antes que essas sejam aplicadas. Como sabemos, apenas filtros irrealizáveis (não causais) podem executar essa tarefa.

** Isso advém do fato de a transformada inversa de $|P(f)|^2$ ser simétrica em relação a $t = 0$, pois $|P(f)|^2$ é uma função par de f (Exercício 3.1-1). A saída proveniente do pulso de entrada anterior termina e tem valor zero em $t = T_o$.

Do mesmo modo, a saída proveniente do pulso de entrada seguinte tem início e valor zero em $t = T_o$. Portanto, no instante de tomada de decisão T_o , não ocorre interferência intersimbólica.

* Como k na Eq. (10.21b) é arbitrário, escolhemos $k = N/2$, por conveniência.

* Se a taxa de transmissão for R_b bits por segundo, a potência de sinal S_i é $S_i = E_b R_b$, e $E_b/N = S_i/NR_b$. Observemos que S_i/NR_b é similar ao parâmetro γ (relação sinal-ruído S_i/NB) usada em sistemas analógicos.

* Também podemos usar QAM (multiplexação em quadratura) para dobrar a eficiência de largura de banda.

** Existe, também, um espectro de $p'(t)$ centrado em $2\omega_c$, que, ao final, é eliminado pelo filtro casado a $p'(t)$.

* Se $\{\varphi_k(t)\}$ for completo, ortogonalidade implica

$$\int_{t \in \Theta} \varphi_j(t) \varphi_k^*(t) dt = 0$$

e a Eq. (10.52) se torna

$$x_k = \int_{t \in \Theta} x(t) \varphi_k^*(t) dt$$

* A rigor, essa igualdade não é verdadeira para todo o intervalo $[0, T_o]$. O conjunto de pontos para os quais a igualdade não vale é um conjunto de medida zero.

** Na Eq. (10.56c), as letras m.s. representam “no sentido quadrático médio” (*mean square*). (N.T.)

* Caso essas probabilidades sejam desconhecidas, devemos usar outros critérios de mérito, como máxima possibilidade ou minimax, a serem discutidos posteriormente.

* O código de Gray pode ser construído da seguinte maneira: um código binário natural (NBC – *natural binary code*) de n dígitos é construído correspondendo a 2^n números decimais. Se $b_1 b_2 \dots b_n$ for uma palavra desse código, a correspondente palavra do código de Gray $g_1 g_2 \dots g_n$ é obtida pela regra

$$\begin{aligned} g_1 &= b_1 \\ g_k &= b_k \oplus b_{k-1} \quad k \geq 2 \end{aligned}$$

Assim, para $n = 3$, o código binário **000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111** é transformado no código de Gray **000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100**.

** Para o caso não coerente, pulsos em banda-base devem ter a mesma polaridade; por exemplo, $0, p(t), 2p(t), \dots, (M-1)p(t)$.

* Aqui, ignoramos o espalhamento de banda na fronteira. Esse espalhamento é da ordem de $1/T_M$ Hz. A real largura de banda excede $(N-1)/2T_M$ por esse valor.

* Consideraremos FSK ortogonal. Isso assegura que r_0 e r_1 tenham densidades de Rayleigh e de Rice, respectivamente, quando 1 for transmitido.

** r_1 é o detector de envelope e pode assumir somente valores positivos.

11

COMUNICAÇÕES POR ESPALHAMENTO ESPECTRAL

Em sistemas tradicionais de comunicação digital, o projeto de técnicas de formatação de pulso em banda-base e de modulação objetiva a minimização da largura de banda consumida pelo sinal modulado durante a transmissão. A clara motivação para esse objetivo principal é o desejo de alcançar boa eficiência espectral e, assim, preservar recursos de largura de banda. Todavia, um sistema de comunicação de banda estreita exibe duas grandes fraquezas. Primeira, seu espectro concentrado o torna um alvo fácil para detecção e interceptação por usuários não previstos (por exemplo, inimigos no campo de batalha e bisbilhoteiros não autorizados). Segunda, por ter pouca redundância, a banda estreita é mais suscetível a bloqueio (*jamming*) ou interferência, pois mesmo interferência parcial na banda pode arruinar a recepção do sinal.

Tecnologias de espalhamento espectral (*spread spectrum*) foram inicialmente desenvolvidas para as comunidades militares e de inteligência para superar as fraquezas que acabamos de mencionar diante de interceptação e interferência. A ideia básica consistia em expandir cada sinal de usuário de modo que passasse a ocupar um espectro muito mais largo que o necessário. Para uma dada potência de transmissão, um espectro mais largo significa menor nível de potência de sinal e maior redundância espectral. Um nível mais baixo de potência de sinal dificulta a detecção e interceptação de sinais de comunicação, enquanto alta redundância espectral torna os sinais mais resistentes a interferência parcial ou total na banda, intencional ou não.

Há duas tecnologias dominantes de espalhamento espectral: espalhamento espectral por saltos em frequência (FHSS – *frequency hopping spread spectrum*) e espalhamento espectral por sequência direta (DSSS – *direct sequence spread Spectrum*). Neste capítulo, descreveremos esses dois sistemas em detalhe.

11.1 SISTEMAS DE ESPALHAMENTO ESPECTRAL POR SALTOS EM FREQUÊNCIA (FHSS)

O conceito de espalhamento espectral por saltos em frequência (FHSS) é, na verdade, de fácil compreensão. Cada usuário pode continuar usando sua modulação convencional. A única diferença é que, agora, a frequência portadora pode variar em intervalos regulares. Quando cada usuário pode variar sua frequência portadora segundo um padrão pseudoaleatório predeterminado, o correspondente sinal passa a ocupar um espectro mais largo, dificultando interceptação e interferência.

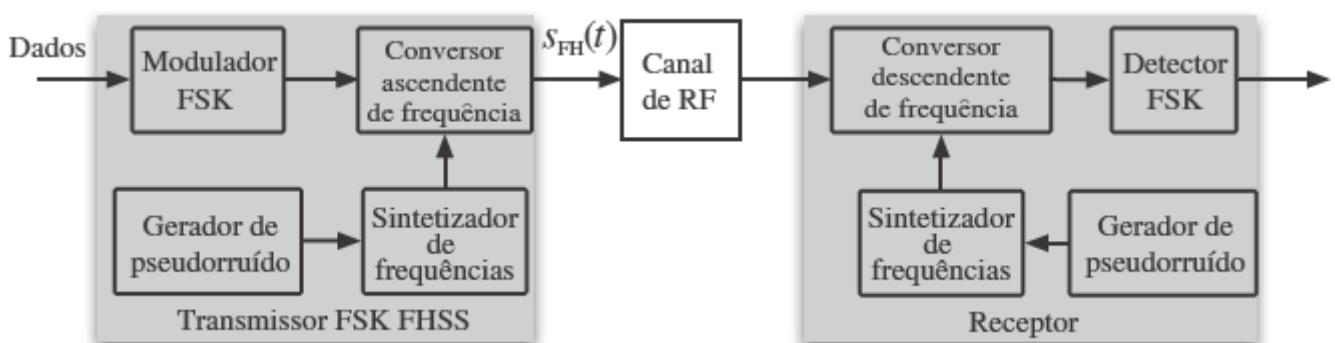


Figura 11.1 Sistema de espalhamento espectral por saltos em frequência.

A implementação de um sistema FHSS é mostrada na Fig. 11.1. Se, inicialmente, ignorarmos os dois conversores de frequência, esse sistema em nada difere de um sistema simples de comunicação digital com modulador e demodulador FSK. A única diferença desse sistema FHSS reside no fato de, no transmissor, a frequência *portadora* saltar de forma controlada pelo gerador de pseudoruído (PN – *pseudonoise*). Para rastrear a frequência portadora que salta, o receptor deve utilizar o mesmo gerador PN em sincronia com o gerador PN do transmissor.

A maioria dos sinais FHSS adota modulações FSK binária ou M -árias, em vez das modulações mais eficientes PAM, PSK e QAM. A motivação para a escolha de FSK advém de sua capacidade de utilizar a menos complexa detecção não coerente. A detecção coerente é necessária para as modulações PAM, PSK e QAM. Devido ao padrão de saltos controlado pelo pseudoruído (PN), detecção coerente exigiria que o receptor mantivesse coerência de fase com o transmissor em cada uma das frequências usadas no padrão de saltos. Essa exigência seria de difícil satisfação durante os saltos em frequência. A detecção FSK, por sua vez, pode ser não coerente, sem a necessidade de coerência de fase com a portadora, e pode ser facilmente incorporada a sistemas FHSS.

O conversor ascendente de frequência (*frequency upconverter*), como discutido no Exemplo 4.2 do Capítulo 4, pode ser um misturador ou multiplicador seguido por um filtro passa-faixa. Denotemos o período de símbolo por T_s . Assim, o sinal da modulação FSK M -ária pode ser escrito como

$$s_{\text{FSK}}(t) = A \cos(\omega_m t + \phi_m) \quad mT_s \leq t \leq (m+1)T_s \quad (11.1a)$$

sendo as frequências angulares de FSK M -ária especificadas por

$$\omega_m = \omega_c \pm \frac{1}{2}\Delta\omega, \omega_c \pm \frac{3}{2}\Delta\omega, \dots, \omega_c \pm \frac{M-1}{2}\Delta\omega \quad (11.1b)$$

A saída do sintetizador de frequências é constante por um período T_c , comumente referido como “chip”. Denotemos a saída do sintetizador de frequências por ω_h em um dado chip; com isso, o sinal FHSS é

$$s_{\text{FH}}(t) = A \cos[(\omega_h + \omega_m)t + \phi_m] \quad (11.2)$$

para o particular período de chip T_c . O padrão de saltos em frequências é controlado pelo gerador PN e tem a aparência típica ilustrada na Fig. 11.2. No receptor, um gerador PN idêntico permite a detecção do sinal FHSS na banda correta de frequência (ou seja, na banda para a qual o sinal saltou). Se a largura de banda do sinal FSK original for B_s Hz, o sinal FHSS ocupará uma banda L vezes mais larga

$$B_c = L \cdot B_s$$

Esse fator L é conhecido como fator de espalhamento.

Para período de símbolo T_s e período de chip T_c , a correspondente taxa de símbolo é $R_s = 1/T_s$ e a taxa de salto é $R_c = 1/T_c$. Em FHSS, há dois tipos de salto em frequência. Se $T_c \geq T_s$, FH é conhecido como de salto lento (*slow hopping*). Se $T_c < T_s$, FH é conhecido como FHSS rápido, e há múltiplos saltos em cada símbolo de dados. Em outras palavras, sob saltos rápidos, cada símbolo de dado é espalhado por múltiplas bandas de frequências, devido aos saltos rápidos, e deve ser detectado por detecção nessas bandas de frequências.

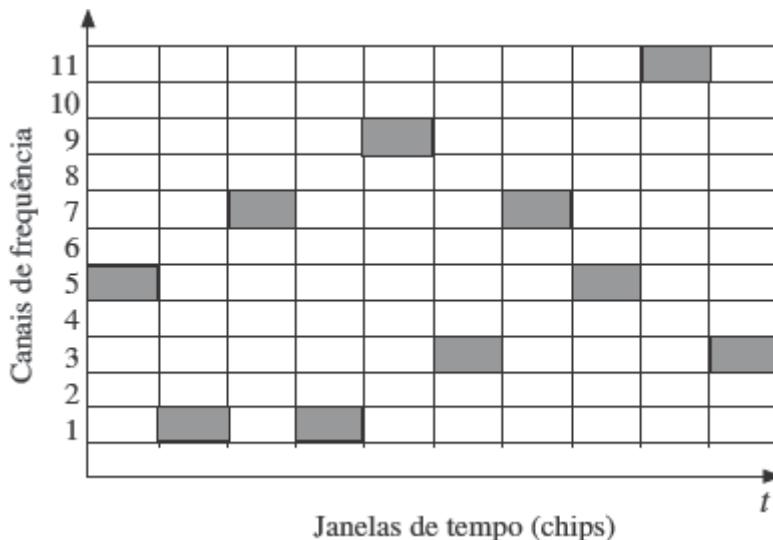


Figura 11.2 Padrão típico de saltos em frequência de Bluetooth.

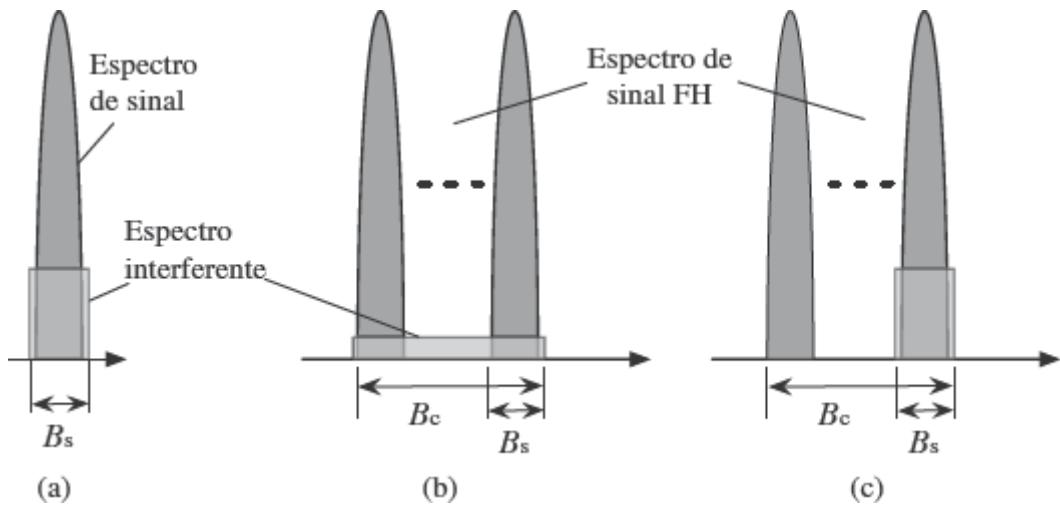


Figura 11.3 Efeitos de (a) interferência de banda estreita, (b) FHSS sob interferência de banda larga, (c) interferência parcial.

Uma das maiores vantagens do FHSS reside em sua capacidade de combater interferência (*jamming*). Suponhamos que uma fonte interferente tenha um nível finito de potência P_j . Diante de um sinal de banda estreita, com largura de banda B_s , a fonte interferente pode transmitir em B_s todo o tempo, criando um nível de PSD de interferência P_j/B_s . Portanto, no caso de transmissão em banda estreita (NB – narrowband), a relação sinal-interferência (SIR – signal-to-interference ratio) é

$$\left(\frac{E_b}{I}\right)_{\text{NB}} = \frac{E_b}{P_j/B_s} = \frac{E_b}{P_j} B_s \quad (11.3a)$$

Diante de um sinal FHSS com largura de banda total B_c , a fonte interferente deve repartir sua limitada potência e gerará um nível muito menor de PSD de interferência com valor médio P_j/B_c . Por conseguinte, em qualquer instante de tempo, a largura de banda do sinal ainda é B_s e a SIR,

$$\left(\frac{E_b}{I}\right)_{\text{FH}} = \frac{E_b}{P_j/B_c} = \frac{E_b}{P_j} B_c = L \cdot \left(\frac{E_b}{I}\right)_{\text{NB}} \quad (11.3b)$$

Portanto, com um fator de espalhamento L , um sinal FH é L vezes mais resistente a um sinal interferente de potência finita que um sinal de banda estreita. As Fig. 11.3a e b ilustram os diferentes efeitos de uma potência interferente finita em sinais de banda estreita e FHSS.

A fonte interferente, diante de um sinal FHSS, pode decidir concentrar sua potência P_j em uma estreita largura de banda de sinal. Isso provocará interferência em parte da banda. Se a frequência de saltos for baixa, tal que $T_c = T_s$, em média, um em cada L símbolos de sinal encontrará forte interferência, como ilustrado na Fig. 11.3c. Consideremos BFSK. Podemos admitir uma interferência muito forte, de modo que os bits transmitidos na frequência sob interferência têm a pior BER de 0,5. Após média nas L bandas, a BER total desse sistema FHSS sujeito a interferência parcial será

$$P_b = \frac{L-1}{L} \cdot \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{2N}\right) + \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2L} \quad (11.4)$$

Assim, com saltos lentos, a detecção do sinal FHSS sujeito à interferência parcial tem BER consideravelmente alta. Com o emprego de poderosos códigos de correção de erro à frente (FEC – forward error correction codes), a serem discutidos no Capítulo 14, esses erros de dados podem ser corrigidos pelo receptor.

Exemplo 11.1 Consideremos o caso de um sistema com saltos rápidos, no qual $T_c \ll T_s$. Há L bandas de frequências para o sistema FHSS. Suponhamos que a fonte interferente afete uma das L bandas. Consideremos que o número de saltos por T_s seja menor que L e nenhuma frequência seja repetida em cada T_s . Analisemos, em termos da BER, o desempenho de um sistema BFSK de saltos rápidos sujeito a tal interferência parcial.

Com saltos rápidos, cada símbolo de dado salta em

$$L_h \triangleq T_s/T_c \quad Lh \leq L$$

bandas estreitas. Portanto, em média, a probabilidade de um símbolo de dado se deparar com interferência parcial é L_h/L . Quando um símbolo BFKS não encontra interferência parcial durante os saltos, sua BER permanece inalterada. Caso um símbolo BFSK encontre interferência parcial, podemos aproximar a BER descartando a banda sob interferência. Em outras palavras, podemos aproximar o desempenho do símbolo BFSK sob interferência admitindo que sua energia útil seja

$$\frac{L_h - 1}{L_h} \cdot E_b$$

Assim, em média, o desempenho de BFSK com saltos rápidos consiste na média estatística dos dois tipos de bits BFSK:

$$\begin{aligned} P_b &= \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{2N}\right) \cdot \left(1 - \frac{L_h}{L}\right) + \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{2N} \cdot \frac{L_h - 1}{L_h}\right) \cdot \frac{L_h}{L} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{T_s}{LT_c}\right) \exp\left(-\frac{E_b}{2N}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{T_s}{LT_c}\right) \exp\left(-\frac{E_b}{2N} \cdot \frac{T_s - T_c}{T_s}\right) \end{aligned}$$

Em particular, quando $L \gg 1$, FHSS com saltos rápidos alcança uma BER muito melhor, pois

$$P_b \approx \frac{1}{2} \left(1 - \frac{T_s}{LT_c}\right) \exp\left(-\frac{E_b}{2N}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{T_s}{LT_c}\right) \exp\left(-\frac{E_b}{2N} \cdot 1\right) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{2N}\right)$$

Em outras palavras, com o uso de saltos rápidos, a BER de FHSS sujeito a interferência parcial se aproxima da BER sem interferência.

11.2 SISTEMAS FHSS MULTIUSUÁRIO E DESEMPENHO

Fica claro que o sistema FHSS provê maior segurança contra possíveis interferências e interceptações de inimigos. Sem total conhecimento do padrão de saltos que foi estabelecido, adversários são incapazes de seguir, grampear ou provocar interferência em uma transmissão FHSS. Contudo, se o sistema FHSS tiver somente um transmissor, o uso de uma largura de banda B_c muito maior que o necessário seria um desperdício. Para aumentar a eficiência espectral de sistemas FHSS, múltiplos usuários podem compartilhar a mesma banda de frequências B_c , com pequena degradação de desempenho.

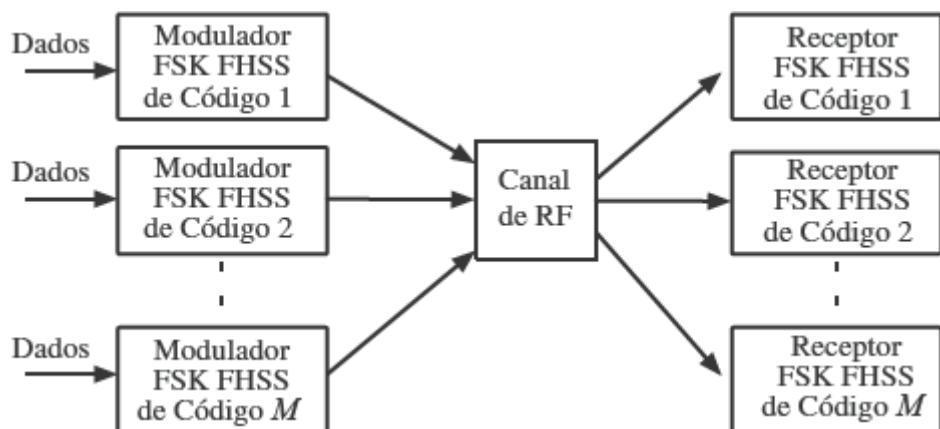


Figura 11.4 CDMA em FHSS, em que cada um dos M usuários recebe um código PN individual.

Como ilustrado na Fig. 11.4, cada um dos M usuários recebe um código PN individual de saltos para controlar seu padrão de saltos em frequência em FHSS. Os códigos podem ser escolhidos de modo que jamais ou raramente haja colisão entre usuários no espectro. Como múltiplos usuários têm acesso às mesmas L bandas, a eficiência espectral pode igualar a do sinal FSK original

sem qualquer perda das características de segurança de FHSS. Assim, o acesso de múltiplos usuários se torna possível com a alocação de distintos códigos de saltos (espalhamento) aos diferentes usuários, resultando em múltiplo acesso por divisão de código (CDMA – *code division multiple-access*).

Em geral, qualquer sobreposição de duas ou mais sequências PN de usuários resultaria em colisão de sinais nas bandas de frequências em que os valores das sequências PN são iguais durante certos chips. Em teoria, códigos de saltos bem projetados podem evitar tais colisões. Todavia, na prática, a falta de um relógio de sincronia comum e observável por todos os usuários significa que cada um exercita os saltos em frequência de forma independente. Além disso, algumas vezes, pode haver mais de L usuários ativos com acesso ao sistema FHSS. Os dois casos levam a colisões entre usuários. Tanto para sistemas FHSS rápidos e lentos, tais colisões podem resultar em aumento significativo de erros de detecção de usuário.

Desempenho de FHSS com Acesso de Múltiplos Usuários

Para um dado usuário de FHSS CDMA, o problema de colisão seria limitado à sua banda parcial. Na verdade, o efeito das colisões é similar ao caso de interferência em banda parcial, como veremos a seguir.

Recordemos que a análise de desempenho de sistemas FSK foi discutida no Capítulo 10 (Seção 10.7) para canais AWGN. Vimos que a probabilidade de erro de detecção de símbolo para sinais FSK M -ária não coerente era

$$P_{eM} = 1 - P_{cM} = \sum_{m=1}^{M-1} \binom{M-1}{m} \frac{(-1)^{m+1}}{m+1} e^{-mE_b \log_2 M / \mathcal{N}(m+1)} \quad (11.5)$$

Para sistemas FHSS lentos, cada símbolo de dado é transmitido por uma portadora de frequência fixa. Portanto, a probabilidade de erro de detecção de sistemas FHSS lentos é idêntica à Eq. (11.5). Em particular, sabemos que a BER do sistema FSK binário é [ver Eq. (10.145), Seção 10.11]

$$P_b = \frac{1}{2} e^{-E_b / 2\mathcal{N}}$$

Contudo, se dois usuários transmitirem simultaneamente na mesma banda de frequências, uma colisão ou “batida” ocorrerá. Nesse caso, consideremos que a probabilidade de erro seja 0,5.^{*} Assim, a probabilidade total de erro de bit pode ser modelada como

$$P_b = \frac{1}{2} e^{-E_b / 2\mathcal{N}} (1 - P_h) + \frac{1}{2} P_h \quad (11.6)$$

em que P_h é a probabilidade de uma colisão, que devemos calcular. Consideremos saltos aleatórios. Caso existam L bandas (*slots*) de frequência, a probabilidade de que um dado sinal interferente esteja presente na banda do usuário desejado será $1/L$. Se houver $M-1$ sinais interferentes ou outros usuários, a probabilidade de que pelo menos um esteja presente na desejada banda de frequência será

$$P_h = 1 - \left(1 - \frac{1}{L}\right)^{M-1} \approx \frac{M-1}{L} \quad (11.7)$$

admitindo que o valor de L seja grande. A substituição desse resultado na Eq. (11.6) leva a

$$P_b = \frac{1}{2} e^{-E_b / 2\mathcal{N}} \left(1 - \frac{M-1}{L}\right) + \frac{1}{2} \frac{M-1}{L} \quad (11.8)$$

Se $M=1$, a probabilidade de erro se reduz à BER de BFSK. Se $M \neq 1$, fazendo E_b / \mathcal{N} tender ao infinito, vemos que, com saltos aleatórios,

$$\lim_{E_b / \mathcal{N} \rightarrow \infty} P_b = \frac{1}{2} \frac{M-1}{L} = \frac{1}{2} P_h \quad (11.9)$$

que representa o piso inevitável da taxa de erro de detecção de bit devido à interferência de múltiplo acesso (MAI – *multiple access interference*). Logo, é importante que o padrão de saltos seja projetado para reduzir P_h na presença de múltiplos usuários.

FHSS Assíncrono

Na análise anterior, admitimos que as frequências portadoras de todos os usuários saltam em sincronia. Isso é conhecido como *saltos em frequência em sincronia (slotted frequency hopping)*. Esse tipo de sincronia temporal é facilmente mantido se as distâncias entre todos os pares transmissor-receptor forem essencialmente iguais. Esse pode não ser um cenário realista para muitos sistemas FHSS. Mesmo quando sincronia possa ser alcançada entre relógios individuais de usuários, sinais que seguirem diferentes rotas de transmissão não chegarão em sincronia, devido aos variados atrasos de propagação. Uma dedução simples para avaliação de desempenho assíncrono pode ser feita seguindo a abordagem de Geronotis e Pursley,¹ que fornece a probabilidade de uma colisão no caso assíncrono como

$$P_h = 1 - \left[1 - \frac{1}{L} \left(1 + \frac{1}{N_b} \right) \right]^{M-1} \quad (11.10)$$

em que N_b é o número de bits por salto. Comparando as Eqs. (11.7) e (11.10), vemos que, para o caso assíncrono, a probabilidade de uma colisão aumenta, como esperado. Usando a Eq. (11.10) na Eq. (11.6), obtemos a probabilidade de erro para o caso assíncrono como

$$P_b = \frac{1}{2} e^{-E_b/\mathcal{N}} \left[1 - \frac{1}{L} \left(1 + \frac{1}{N_b} \right) \right]^{M-1} + \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{1}{L} \left(1 + \frac{1}{N_b} \right) \right]^{M-1} \right\} \quad (11.11)$$

Como no caso de interferência em banda parcial, a BER de usuários FHSS decai à medida que o fator de espalhamento aumenta. Além disso, com a incorporação de FEC suficientemente robusto ao código de transmissão, usuários FHSS CDMA podem acomodar a maioria das colisões.

Exemplo 11.2 Consideremos um canal AWGN com nível de ruído $\mathcal{N} = 10^{-11}$. Um sinal de usuário é uma modulação FKS binária com taxa de dados de 16 kbit/s, que ocupa uma largura de banda de 20 kHz. A potência do sinal recebido é –20 dBm. Um inimigo tem uma fonte interferente que pode produzir interferência em um sinal de banda estreita ou passa-faixa. A potência interferente é finita, de modo que potência recebida do sinal interferente é, no máximo, –26 dBm. Para determinar a melhora aproximada da relação sinal-ruído para o sistema FHSS sob interferência, usemos um fator de espalhamento $L = 20$.

Como $P_s = -20 \text{ dBm} = 10^{-5} \text{ W}$ e $T_b = 1/16.000$, a energia por bit é igual a

$$E_b = P_s \cdot T_b = \frac{1}{1,6 \times 10^9}$$

O nível de ruído, por sua vez, é $= 10^{-11}$. Admitamos que o sinal interferente tenha distribuição gaussiana. O nível de potência interferente é $P_j = -26 \text{ dBm} = 4 \times 10^{-6} \text{ W}$.

Quando a interferência ocorre na estreita banda de 20 kHz, o nível de potência a interferência é

$$J_n = \frac{P_j}{20.000 \text{ Hz}} = 2 \times 10^{-10}$$

Assim, a resultante relação sinal-ruído é

$$\frac{E_b}{J_n + \mathcal{N}} = \frac{(1,6 \times 10^9)^{-1}}{2 \times 10^{-10} + 10^{-10}} \approx 4,74 \text{ dB}$$

Caso a interferência cubra todo o espectro L mais largo, o nível de potência da interferência se torna 20 vezes menor:

$$J_n = \frac{P_J}{400.000 \text{ Hz}} = 1 \times 10^{-11}$$

Portanto, nesse caso, a resultante relação sinal-ruído é

$$\frac{E_b}{J_n + \mathcal{N}} = \frac{(1,6 \times 10^9)^{-1}}{10^{-11} + 10^{-11}} \approx 14,95 \text{ dB}$$

A melhora na SNR é de, aproximadamente, 10 dB.

11.3 APlicações DE FHSS

O FHSS tem sido adotado em diversas aplicações práticas. As mais notáveis são o padrão de rede de área local sem fio (WLAN – *wireless local area network*) para Wi-Fi, conhecido como IEEE 802.11² e o padrão de rede de área pessoal sem fio (WPAN – *wireless personal area network*) para Bluetooth.

De IEEE 802.11 a Bluetooth

O IEEE 802.11 foi o primeiro padrão para Wi-Fi, divulgado em 1997. Com taxa de dados limitada a 2 Mbit/s, o padrão 802.11 teve aplicação muito limitada antes de 1999, quando a divulgação e adoção muito mais ampla dos padrões 802.11a e 802.11b removem a opção FHSS. Praticamente obsoleto, o padrão IEEE 802.11 foi milagrosamente revivido pelo produto comercial de grande sucesso vendido sob o nome de *Bluetooth*.³ A diferença entre Bluetooth e Wi-Fi reside no fato de que sistemas Wi-Fi devem prover maior vazão e cobrir distâncias maiores que sistemas Bluetooth.⁴ Wi-Fi também pode ser mais caro e consumir mais potência.

O Bluetooth, por sua vez, é um sistema de comunicação para distância ultracurta, usado em produtos eletrônicos, como telefones celulares, computadores, automóveis, modems, fones de ouvido e eletrodomésticos. Em substituição a enlaces infravermelhos em linha de visada, Bluetooth pode ser usado quando dois ou mais dispositivos estão próximos uns dos outros. Esse sistema não requer grande largura de banda. Como Bluetooth é basicamente igual à opção de salto em frequência (FH – *frequency hopping*) de IEEE 802.11, basta que descrevamos seus detalhes.

O protocolo opera na banda de frequência de 2,4 a 2,4835 GHz, de uso livre, sem necessidade de licença, para fins industriais, científicos e médicos, ou banda ISM (*industrial, scientific and medical*).

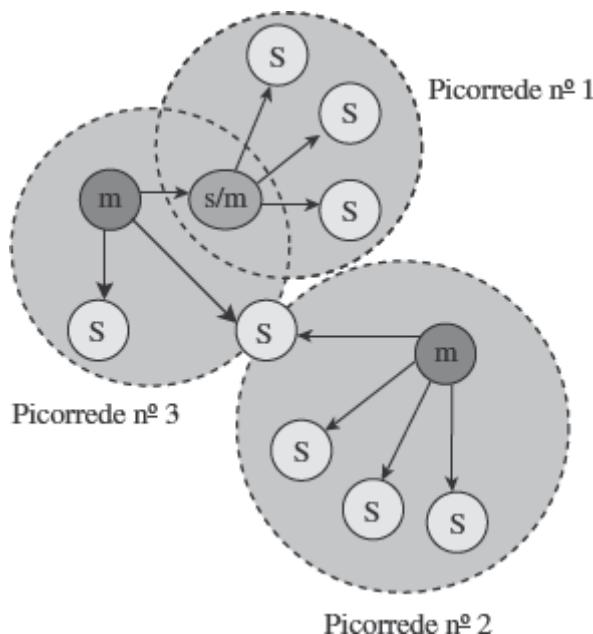


Figura 11.5 Uma área com cobertura de três picorredes: **m**, nós-mestre; **s**, nós-escravo; **s/m**, escravo/mestre. Um nó pode ser escravo e mestre em uma picorrede (nº 1) e escravo em outra (nº 3).



Figura 11.6 Modulação FHSS em 802.11 e em Bluetooth.

Para evitar interferência em outros dispositivos e redes que operem na banda ISM, o protocolo Bluetooth divide a banda em 79 canais de 1 MHz de largura e executa saltos (lentos) em frequência a uma taxa de até 1.600 Hz. Dois dispositivos Bluetooth sincronizam os saltos em frequência por meio de comunicação no modo mestre-escravo. Uma rede que agrupa até oito dispositivos forma uma **picorrede** (*piconet*), que tem um mestre. Um nó-escravo de uma picorrede pode ser mestre de outra picorrede. A relação entre nós-mestre e nós-escravo em picorredes é ilustrada na Fig. 11.5. Um dispositivo-mestre de Bluetooth pode se comunicar com até sete dispositivos ativos. A qualquer momento, o dispositivo-mestre pode trazer ao *status* de ativo até mais 255 dispositivos inativos, ou estacionados. Uma característica especial de Bluetooth é a capacidade de implementar saltos em frequência adaptativos (AFH – *adaptive frequency hopping*). A capacidade de adaptação é embutida para permitir que, na sequência de saltos, dispositivos Bluetooth evitem frequências congestionadas.

Tabela 11.1

Principais especificações de FHSS em 802.11 e de Bluetooth

	802.11 FHSS	Bluetooth (taxa básica)
Banda de frequências		ISM (2,4-2,4835 GHz)
Formato duplex		TDD
Largura de banda de um canal		1 MHz
Número de canais que não se sobrepõem		79
Produto BsT		0,5
Mínima distância entre saltos		6
Modulação	GFSK-2 e GFSK-4	GFSK-2
Taxa de dados	1Mbit/s e 2 Mbit/s	723,1 kbit/s
Taxa de saltos	2,5-160 Hz	1600 Hz

A modulação do sinal Bluetooth (de taxa básica) é mostrada na Fig. 11.6. O sinal binário é transmitido por meio de formatação gaussiana de pulso na modulação FSK de sinal. Como mostrado na Fig. 11.6, em um FSK binário simples, o filtro passa-baixas gaussiano é substituído por uma rota direta. A inclusão do filtro passa-baixas gaussiano gera o que é conhecido como sinal FSK gaussiano (ou GFSK). A modulação GFSK é uma FSK com fase contínua, e alcança maior eficiência de largura da banda justamente por forçar a continuidade de fase. Maior eficiência espectral também é alcançada com sinalização de resposta parcial (PRS – *partial response signaling*) em GFSK. A resposta do filtro gaussiano estica cada bit ao longo de múltiplos períodos de símbolo.

Mais especificamente, a resposta do filtro passa-baixas gaussiano ao impulso é dada por

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-t^2/2\sigma^2} \quad \sigma = \frac{\sqrt{\ln 2}}{2\pi B}$$

em que B é a largura de banda de 3 dB do filtro passa-baixas gaussiano. Como essa resposta é não causal, a implementação prática trunca a resposta do filtro a $4T_s$ segundos. Dessa forma, cada bit de informação é estendido ao longo de uma janela cuja largura é 3 vezes maior que a duração do bit T_s .

Reparemos que a seleção de B é determinada pela taxa de símbolo $1/T_s$. Em 802.11 e em Bluetooth, é feita a escolha $B = 0,5/T_s$. O índice de modulação FM deve ser entre 0,28 e 0,35. A taxa de símbolo de GFSK é sempre 1 MHz; FSK binária e FSK

de quatro níveis podem ser implementadas como GFSK-2 e GFSK-4, alcançando vazão de dados de 1 e 2 Mbit/s, respectivamente. A Tabela 11.1 resume os principais parâmetros e diferenças em FHSS de 802.111 e Bluetooth (taxa básica).

Notemos que nossa discussão sobre Bluetooth focou as versões (de taxa básica) 1.1 e 1.2. Mais recentemente, foi lançada a versão 2 de Bluetooth.⁴ As implementações da versão 2.0 apresentam maior taxa de dados (EDR – *enhanced data rate*), que alcança 2,1 Mbit/s. Tecnicamente, dispositivos de versão 2.0 mantêm a característica FHSS, mas utilizam a mais eficiente modulação PSK (diferencial).

SINCGARS

SINCGARS é uma sigla derivada do termo inglês para sistema de rádio aerotransportado e terrestre de canal simples (*single channel ground and airborne radio system*). Essa sigla representa uma família de rádios VHF-FM de combate usados por militares. Inicialmente produzidos pela ITT em 1983, SINCGARS transmite voz com FM e dados com CPFSK binário a 16 kbit/s, ocupando uma largura de banda de 25 kHz. Em uma banda operacional de 30 a 87,975 MHz, pode haver até 2320 canais.

Para combater interferências, rádios SINCGARS podem implementar saltos em frequência à baixa taxa de 100 Hz. Como a taxa de saltos é muito baixa, SINCGARS já não é eficaz contra dispositivos modernos de interferência. Por isso, SINCGARS está sendo substituído pelo mais recente e versátil sistema JTRS (*joint tactical radio system*, ou sistema de rádio tático integrado).

De Hollywood a CDMA

Como acontece com várias boas ideias, o conceito de *saltos em frequência* foi reivindicado por numerosos inventores. Uma das patentes, que recebeu pouca atenção, foi concedida a Willem Broertjes, de Amsterdã, Holanda, em agosto de 1932 (patente americana nº 1.869.659).⁵ Contudo, a mais intrigante patente relativa a saltos em frequência está associada a uma das atrizes mais famosas de Hollywood durante a Segunda Guerra Mundial, Hedy Lamarr. Em 1942, ela e o coinventor George Antheil (um compositor excêntrico) receberam a patente americana nº 2.292.387 pelo “Sistema de Comunicação Secreta”. A patente tinha como objetivo dificultar a detecção ou interceptação de torpedos guiados por rádio. Em grande parte devido à conexão com Hollywood, Hedy Lamarr se tornou uma figura lendária na comunidade de comunicação sem fio e, frequentemente, recebe os créditos de *inventora* de CDMA, enquanto outras figuras menos glamorosas, como Willem Broertjes, foram praticamente esquecidas.

Hedy Lamarr foi uma grande estrela de cinema.⁶ Nascida na Áustria, Hedwig Eva Maria Kiesler chegou à fama em 1933 com o filme austríaco *Ecstasy*, por conta de algumas cenas nada convencionais para a época. Em 1937, escapando dos nazistas e de seu primeiro marido (um traficante de armas nazista), foi para Londres, onde conheceu Louis Burt Mayer, cofundador e chefe dos estúdios MGM. Mayer ajudou a carreira da atriz austríaca em Hollywood ao dar a ela um contrato e um novo nome – Hedy Lamarr. Lamarr contracenou com colegas famosos, como Clark Gable, Spencer Tracy e Judy Garland, e apareceu em mais de uma dezena de filmes durante sua carreira no cinema.

Com evidentes talentos científicos, Hedy Lammar trabalhou com George Antheil, um compositor clássico, para ajudar no esforço de guerra. Eles tiveram uma ideia de um sofisticado dispositivo anti-interferência para uso em torpedos controlados por rádio. Em agosto de 1942, com seu nome de casada na época, Hedy Kiesler Markey, Hedy Lamarr recebeu a patente americana nº 2.292.387 (Fig. 11.7), juntamente com George Antheil. Eles doaram a patente como contribuição ao esforço de guerra. Tendo como inspiração o piano do compositor, a invenção de saltos em frequência usa 88 frequências, uma para cada nota no teclado de um piano.

Contudo, a invenção não seria implementada durante a Segunda Guerra Mundial. Era simplesmente demasiadamente difícil empacotar válvulas a vácuo em um torpedo. Todavia, a ideia de saltos em frequência se tornou uma realidade 20 anos mais tarde, durante a crise de mísseis com Cuba, em 1962 quando o sistema foi instalado em navios enviados para bloquear comunicações com e de Cuba. Ironicamente, nessa época, a patente de Lamarr-Antheil havia expirado. A ideia de saltos em frequência ou, de modo mais geral, a ideia de espalhamento espectral tem sido largamente utilizada em comunicações militares e civis, incluindo telefones celulares, redes LAN sem fio, Bluetooth, e numerosos outros sistemas de comunicação sem fio.

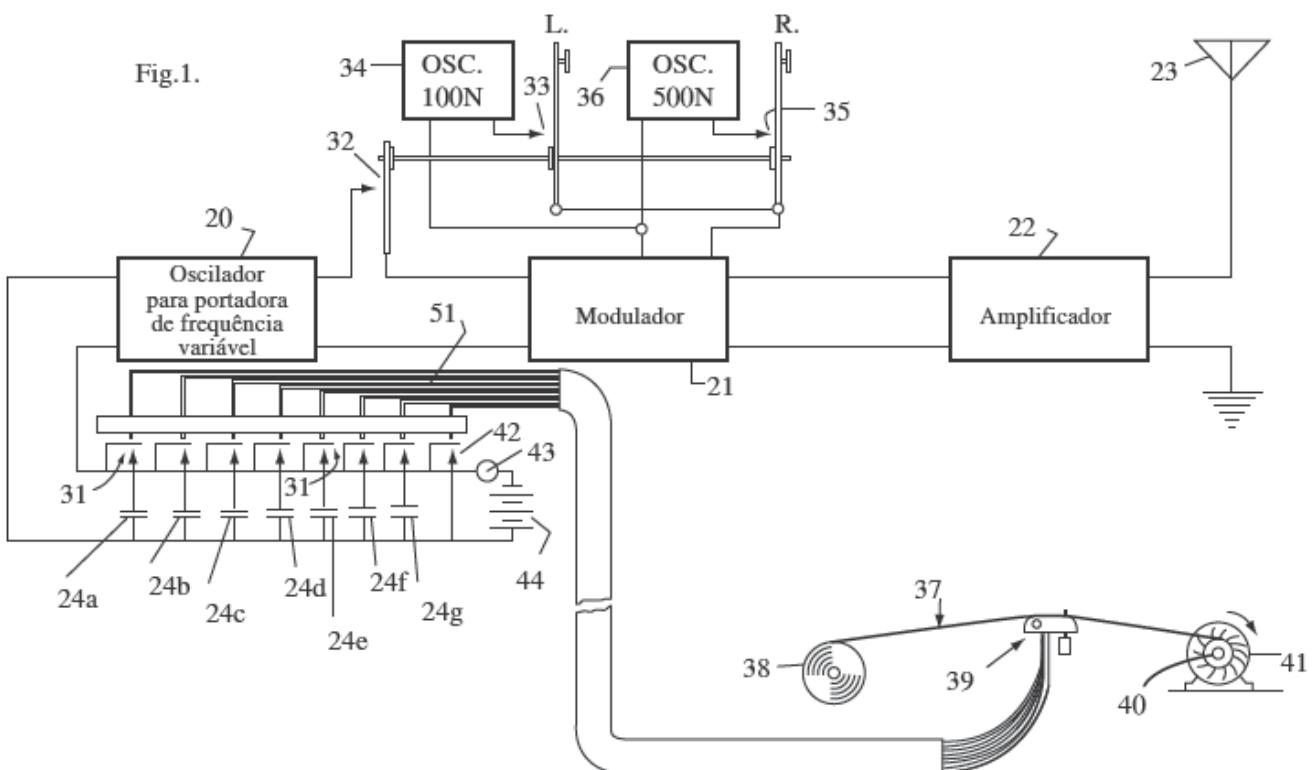
Apenas mais recentemente, Hedy Lamarr passou a receber um novo tipo de reconhecimento com uma inventora-celebridade. Em 1997, Hedy Lamarr e George Altheil receberam o *Electronic Frontier Foundation (EFF) Pioneer Award* [Prêmio Pioneiro da Fundação Fronteira Eletrônica]. Além disso, em agosto de 1997, Lamarr foi homenageada com o cobiçado *BULBIE Gnass Spirit of Achievement Bronze Award* [Medalha de Bronze Espírito da Conquista Gnass BULBIE] (o “Oscar” dos inventores). Caso ela também tivesse ganhado um Oscar por seu trabalho no cinema, teria sido a única pessoa a receber dois prêmios “Oscar” totalmente diferentes! De toda forma, inventores de todo o mundo ficaram felizes em receber uma celebridade do cinema em seu meio.

A inventora *Hedy Kiesler Markey* morreu em 2000, aos 86 anos de idade.

SISTEMA DE COMUNICAÇÃO SECRETA

Arquivada em 10 de junho de 1941.

2 Folhas–Folha 1

**Figura 11.7** Figura 1 da patente de Lamarr-Antheil (de U.S. Patent and Trademark Office).

11.4 ESPALHAMENTO ESPECTRAL POR SEQUÊNCIA DIRETA

Sistemas FHSS exibem algumas vantagens importantes, incluindo transceptores de baixa complexidade e resistência à interferência. Contudo, a dificuldade de sincronização de portadoras nos saltos em frequências significa que apenas demodulações não coerentes de FSK e DPSK são práticas. Como mostrado na análise na Seção 10.11, FSK e DPSK tendem a ter desempenho de BER (eficiência de potência) mais pobre e pior eficiência de largura de banda do que sistemas QAM, que requerem detecção coerente. Adicionalmente, a suscetibilidade a colisões faz de FHSS uma tecnologia menos eficiente para CDMA. Como demonstrado por modernos sistemas de comunicação, sistemas de espalhamento espectral por sequência direta (DSSS – *direct sequence spread spectrum*) são muito mais eficientes na utilização de largura de banda e de potência.⁷ Atualmente, DSSS se tornou a tecnologia de CDMA dominante nos avançados sistemas de comunicação sem fio. Não é exagero afirmar que DSSS e CDMA são quase sinônimos.

Detecção Ótima de PSK DSSS

Espalhamento espectral por sequência direta é uma tecnologia mais adequada à integração com modulações lineares com eficiência de largura de banda, como QAM/PSK. Embora existam diferentes formas de ver DSSS, sua importante operação de espalhamento espectral é alcançada por uma sequência PN, também conhecida como código PN ou chip PN. A sequência PN é principalmente binária, consistindo em 1s e 0s, que são representados por sinalização polar +1 e -1, respectivamente. Para minimizar interferência e facilitar a sincronia de chips, a sequência PN tem algumas interessantes propriedades de autocorrelação e de correlação cruzada.

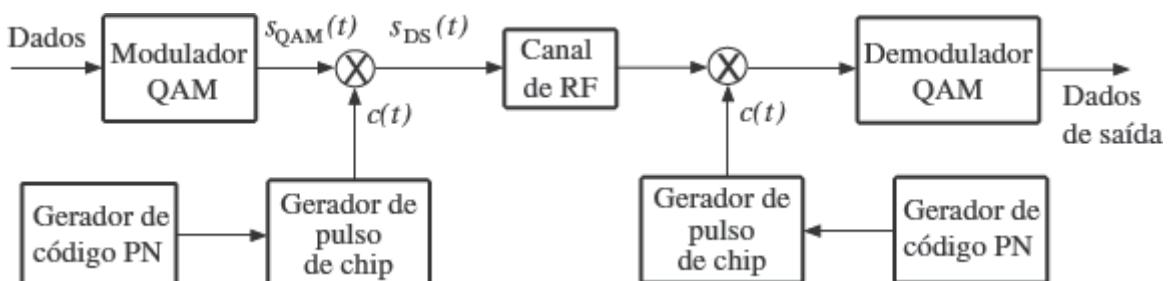


Figura 11.8 Sistema DSSS.

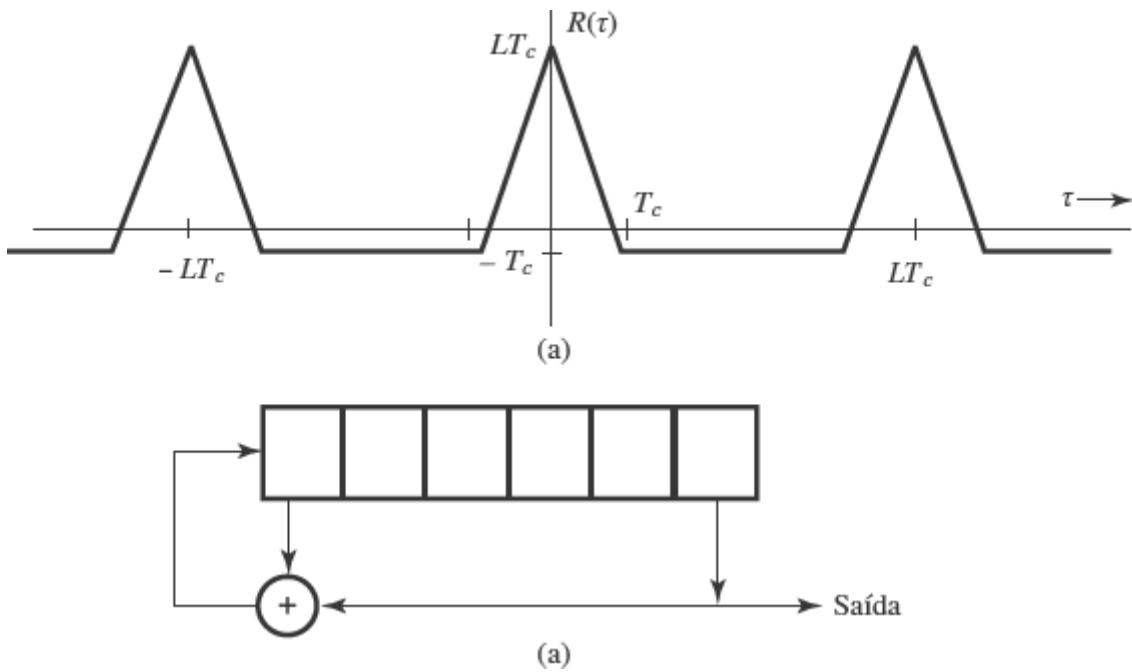


Figura 11.9 (a) Função de autocorrelação da sequência PN. (b) Gerador de seis estágios de uma sequência PN de comprimento máximo.

Espalhamento espectral por sequência direta (DSSS) expande o sinal de banda estreita tradicional com a utilização de um sinal de espalhamento $c(t)$. Como mostrado na Fig. 11.8, o sinal de dados original é linearmente modulado em um sinal QAM $s_{\text{QAM}}(t)$. Em vez de ser transmitido diretamente na largura de banda necessária, esse sinal é modificado por DSSS, que multiplica o sinal de espalhamento $c(t)$ pelo sinal QAM de banda estreita. Embora a frequência portadora do sinal permaneça inalterada em ω_c , o novo sinal após espalhamento é

$$s_{\text{DS}}(t) = s_{\text{QAM}}(t)c(t) \quad (11.12)$$

Aqui, o sinal transmitido $s_{\text{DS}}(t)$ é o produto de dois sinais, e sua largura de banda é igual à soma das larguras de banda do sinal QAM $s_{\text{QAM}}(t)$ e do sinal de espalhamento $c(t)$.

Geração da Sequência PN

Uma boa sequência PN $c(t)$ é caracterizada por uma autocorrelação similar à de ruído branco. Isso significa que a função de autocorrelação de uma sequência PN deve ser alta nas proximidades de $\tau = 0$ e baixa para todo $\tau \neq 0$, como mostrado na Fig. 11.9a. Além disso, em aplicações CDMA, diversos usuários compartilham a mesma banda usando distintas sequências PN. Portanto, é necessário que a correlação cruzada entre diferentes sequências PN seja pequena, para reduzir a interferência mútua.

Um código PN é periódico. Um circuito registrador de deslocamento (*shift register*) digital com realimentação de saída pode gerar uma sequência com longos períodos e baixa susceptibilidade a identificação estrutural por estranhos. As sequências PN binárias mais largamente conhecidas são as sequências de **comprimento máximo** de registrador de deslocamento (sequências m). Tal sequência, que pode ser gerada por um registrador de deslocamento de m estágios com conexão de realimentação adequada, tem um comprimento $L = 2^m - 1$ bits, o máximo período para uma máquina de estado finito como essa. A Fig. 11.9b mostra um codificador baseado em registrador de deslocamento para $m = 6$ e $L = 63$. Para uma sequência PN “curta” como essa, a função de autocorrelação é quase um impulso e periódica

$$R_c(\tau) = \int_0^{T_s} c(t)c(t + \tau) dt = \begin{cases} LT_c & \tau = 0, \pm LT_c, \dots \\ -T_c & \tau \neq 0, \pm LT_c, \dots \end{cases} \quad (11.13)$$

Segundo a terminologia, um código de espalhamento DSSS é um *código curto* se o período da sequência PN for igual ao período de símbolos de dados T_s . Um código de espalhamento DSSS é um *código longo* se o período da sequência PN for um múltiplo (em geral, grande) do período de símbolos de dados.

Análise de DSSS com Apenas Um Usuário

A análise mais simples do sistema DSSS pode ser baseada na Fig. 11.8. Para obter espalhamento espectral, o sinal de chip $c(t)$ tem, em geral, variação muito mais rápida do que a dos símbolos QAM. Como mostrado na Fig. 11.8, há múltiplos chips de ± 1 em cada duração de símbolo T_s . Denotemos o fator de espalhamento por

$$L = T_s/T_c \quad T_c = \text{chip period}$$

Assim, o espectro do sinal espalhado é, essencialmente, L vezes mais largo que o espectro da modulação original

$$B_c = (L + 1)B_s \approx L \cdot B_s$$

Notemos que o sinal de espalhamento $c(t) = \pm 1$ em qualquer instante de tempo. Dada a natureza polar do sinal de chip binário, o receptor, admitindo canal AWGN, pode “desespalar” o sinal recebido com facilidade

$$y(t) = s_{\text{DS}}(t) + n(t) = s_{\text{QAM}}(t)c(t) + n(t) \quad (11.14)$$

multiplicando-o pelo sinal de chip

$$= s_{\text{QAM}}(t)c^2(t) + n(t)c(t) \quad (11.15)$$

$$= s_{\text{QAM}}(t) + \underbrace{n(t)c(t)}_{x(t)} \quad (11.16)$$

Essa multiplicação permite que o receptor “desespalhe” o sinal com espalhamento espectral. A análise do receptor DSSS depende das características do ruído $x(t)$. Como $c(t)$ é determinístico e $n(t)$ é gaussiano com média zero, $x(t)$ também é gaussiano com média zero. Em consequência, a análise de desempenho do receptor requer apenas a determinação da PSD de $x(t)$.

Para determinar a densidade espectral de potência do ruído “desespalhado” $x(t) = n(t)c(t)$, podemos começar com a definição da PSD (Seção 9.3):

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \overline{\left[\frac{|X_T(f)|^2}{T} \right]} \quad (11.17a)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \overline{\left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} x(t_1)x(t_2)e^{-j2\pi f(t_2-t_1)} dt_1 dt_2 \right]}$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} \overline{x(t_1)x(t_2)} e^{-j2\pi f(t_2-t_1)} dt_1 dt_2$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} c(t_1)c(t_2)\overline{n(t_1)n(t_2)} e^{-j2\pi f(t_2-t_1)} dt_1 dt_2$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} c(t_1)c(t_2)R_n(t_2-t_1)e^{-j2\pi f(t_2-t_1)} dt_1 dt_2 \quad (11.17b)$$

Recordando que

$$R_n(t_2 - t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(v)e^{j2\pi v(t_2-t_1)} dv$$

Temos:

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} c(t_1)c(t_2)S_n(v)e^{-j2\pi(f-v)(t_2-t_1)} dt_1 dt_2 dv \quad (11.18a)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} S_n(v) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} c(t_1)c(t_2)e^{-j2\pi(f-v)(t_2-t_1)} dt_1 dt_2 dv$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} S_n(v) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} c(t)e^{-j2\pi(f-v)t} dt \right|^2 dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_n(v) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|C_T(f-v)|^2}{T} dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_n(v)S_c(f-v) dv \end{aligned} \quad (11.18b)$$

A última igualdade advém da definição da PSD para $c(t)$. A Eq. (11.18) ilustra a dependência da PSD de ruído do detector em relação ao sinal de chip $c(t)$. Desde que a sequência PN seja quase ortogonal, de modo que satisfaça a Eq. (11.13), temos

$$R_c(\tau) \approx LT_c \cdot \sum_i \delta(\tau - i \cdot LT_c) \quad (11.19a)$$

$$S_c(f) \approx LT_c \cdot \frac{1}{LT_c} \sum_k \delta(f - k/LT_c) = \sum_k \delta(f - k/LT_c) \quad (11.19b)$$

e

$$S_x(f) = \sum_k S_n(f - k/LT_c) \quad (11.20)$$

Em outras palavras, desde que a sequência de chip seja aproximadamente ortogonal, o ruído no detector QAM continua sendo um ruído gaussiano branco com média zero. Por motivos práticos, o ruído branco $n(t)$ é filtrado no receptor para ser limitado em banda a $1/2T_s$. Por conseguinte, o espectro de ruído após o desespalhador ainda é

$$S_x(f) = \frac{\mathcal{N}}{2} \quad (11.21)$$

Ou seja, o nível do espectro segue inalterado. Assim, a análise de desempenho efetuada no Capítulo 10 para detecções coerentes de QAM e PSK pode ser aplicada diretamente.

Na Seção 10.6, mostramos que, para um canal com PSD de ruído (branco) $\mathcal{N}/2$, a probabilidade de erro do receptor ótimo para sinalização polar é dada por

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\mathcal{N}}}\right) \quad (11.22)$$

em que E_b é a energia por bit (energia de um pulso). Esse resultado demonstra que a probabilidade de erro de um receptor ótimo não é alterada, independentemente se usamos DSSS ou não. Embora esse resultado pareça um tanto surpreendente, na verdade, é muito consistente com a análise AWGN. Para *apenas um usuário*, a única alteração em DSSS consiste no espalhamento da

transmissão em um espectro mais largo com uso de um novo formato de pulso $c(t)$. Portanto, a modulação continua sendo QAM e o canal, AWGN. Em consequência, a análise da detecção coerente da Seção 10.6 é totalmente aplicável a sinais DSSS.

11.5 CARACTERÍSTICAS DE RESILIÊNCIA DE DSSS

Como sistemas FHSS, para prover maior segurança contra possíveis interferências ou interceptações, sistemas DSSS espalham a energia do sinal em uma largura de banda L vezes maior. O baixo nível de potência dificulta a ação de interceptores. Além disso, sem conhecimento preciso do código de espalhamento do usuário [ou $c(t)$], adversários não são capazes de desespalarhar e recuperar o sinal QAM em banda-base. Adicionalmente, sinais interferentes em banda parcial interferem somente em uma porção da energia do sinal, não sendo capazes de bloquear todo o espectro e, portanto, não afetam sinais DSSS.

Para analisar o efeito de interferência em banda parcial, consideremos que uma interferência $i(t)$ atinja o receptor, produzindo

$$y(t) = s_{\text{QAM}}(t)c(t) + i(t)$$

Admitamos que a largura de banda da interferência seja B_i . Após desespalarhamento, o sinal de saída mais interferência será

$$y(t)c(t) = s_{\text{QAM}}(t) + i(t)c(t) \quad (11.23)$$

É importante observar que o termo de interferência tem uma nova resposta de frequência, devido ao desespalarhamento de $c(t)$

$$i_a(t) = i(t)c(t) \iff I(f) * C(f) \quad (11.24)$$

que tem largura de banda aproximada $B_c + B_i = LB_s + B_i$.

Análise de DSSS sob Interferências de Banda Estreita

Caso a interferência tenha a mesma largura de banda B_s do sinal QAM, a interferência “desespalarhada” $i_a(t)$ terá largura de banda igual a $(L + 1)B_s$. Em outras palavras, largura de banda da interferência de banda estreita $i(t)$ será, na verdade, **espalhada** L vezes pelo sinal de “desespalarhamento” $c(t)$.

Se a interferência de banda estreita tiver potência total P_i e largura de banda B_s , o nível de espectro da interferência original antes do desespalarhamento será

$$S_i(f) = \frac{P_i}{B_s} \quad f \in (f_c - 0,5B_s, f_c + 0,5B_s)$$

Após desespalarhamento, o espectro da interferência $i_a(t)$ se torna

$$S_{i_a}(f) = \frac{P_i}{(L + 1)B_s} \quad f \in [f_c - 0,5(L + 1)B_s, f_c + 0,5(L + 1)B_s]$$

Devido à operação de desespalarhamento, a interferência de banda estreita passa a ter $1/(L + 1)$ da intensidade do espectro original. Reparemos que o desejado sinal QAM mantém sua largura de banda original ($\omega_c - \pi B_s, \omega_c + \pi B_s$). Logo, no caso de interferências de banda estreita, o desespalarhamento pode reduzir a relação sinal-interferência (SIR) por um fator

$$\frac{\frac{E_b}{P_i/B_s}}{\frac{E_b}{P_i/(L + 1)B_s}} = L + 1 \quad (11.25)$$

Esse resultado mostra que DSSS é muito eficaz contra sinais interferentes de banda estreita (banda parcial), e permite a redução da SIR pelo fator de espalhamento. O efeito de “espalhamento” do desespalarhador em um sinal interferente de banda estreita é ilustrado na Fig. 11.10.

A capacidade de DSSS em combater interferência de banda estreita também significa que sinais de comunicação de banda estreita podem coexistir com sinais DSSS. A análise da SIR e a Fig. 11.10 estabelecem a resistência de sinais DSSS a interferências de banda estreita. Reciprocamente, se um sinal de banda estreita tiver de ser demodulado na presença de um sinal

DSSS, o sinal de banda estreita também pode ser extraído do sinal DSSS com pouca interferência, com a substituição do desespalhador por um filtro passa-faixa de banda estreita. Nesse caso, os papéis de sinal e interferência são, na verdade, trocados.

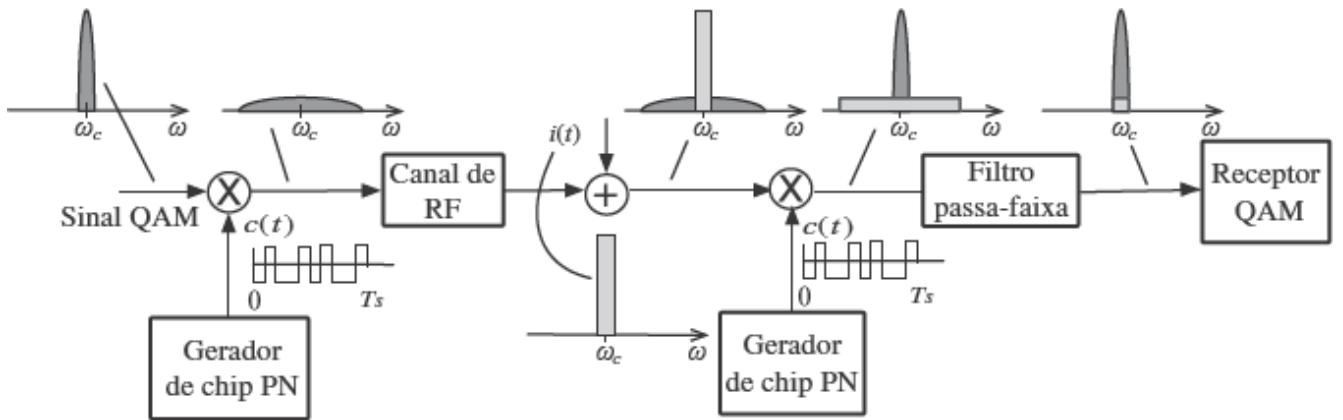


Figura 11.10 Redução de efeito de interferência de banda estreita pelo desespalhador DSSS.

Análise de DSSS sob Interferências de Banda Larga

Em muitos casos, interferências advêm de fontes de banda larga e não são geradas a partir da abordagem de espalhamento DSSS. Contra essas interferências, a operação de desespalhamento apenas alarga e reduz ligeiramente o espectro da interferência.

Admitamos que a interferência de banda larga tem a mesma largura de banda LB_s que o sinal espalhado. Com base na Eq. (11.24), após desespalhamento, a interferência seria $i_a(t)$, cuja largura de banda seria $2LB_s$. Em outras palavras, a interferência de banda larga $i(t)$ seria, na verdade, espalhada em um espectro com largura aproximadamente igual ao dobro da largura do sinal espalhado e intensidade igual à metade da intensidade do sinal. Dessa discussão, podemos perceber que um sinal DSSS é muito eficaz contra interferências de banda estreita e pouco eficaz contra interferências de banda larga.

11.6 MÚLTIPLO ACESSO POR DIVISÃO DE CÓDIGO (CDMA) DE DSSS

O diagrama de RF de um sistema DSSS pode ser representado, de modo equivalente, pelo diagrama em banda-base na Fig. 11.11, que mostra uma nova perspectiva do sistema DSSS, adequada à análise. Denotemos o símbolo de dado QAM como (o número complexo)

$$s_k = a_k + j b_k \quad (k-1)T_s \leq t < kT_s \quad (11.26)$$

Fica claro da sequência de chip PN que, após espalhamento, o sinal em banda-base é

$$s_k \cdot c(t) = (a_k + j b_k) \cdot c(t) \quad (k-1)T_s \leq t < kT_s \quad (11.27)$$

Ou seja, o símbolo s_k usa

$$c(t) \quad (k-1)T_s \leq t \leq kT_s$$

como formato de pulso para transmissão. Em consequência, na recepção, o receptor ótimo requereria que $c(t)$ fosse usado como receptor de correlação (ou um filtro casado). Fica evidente do diagrama na Fig. 11.11 que o desespalhador desempenha justamente a função do filtro casado ótimo (ou receptor de correlação). Tal receptor é conhecido como receptor ótimo convencional de um usuário.

Mostramos que sistemas DSSS têm vantagens contra ameaças interferentes de banda estreita e tentativas de interceptação. Todavia, caso um sistema DSSS tenha apenas um sinal a transmitir, o uso de uma maior largura de banda B_s será um grande desperdício. Assim, como em FHSS, CDMA de DSSS pode ser alcançado permitindo que múltiplos usuários, cada um associado a um distinto sinal de espalhamento PN $c_i(t)$, tenham acesso simultâneo à grande largura de banda LB_s . Um sistema de múltiplo acesso com M usuários baseado em CDMA é ilustrado na Fig. 11.12. Cada usuário pode aplicar um receptor ótimo de um usuário.

Como esses usuários CDMA transmitirão sem divisão no tempo ou na frequência, existirá interferência de múltiplos acessos (MAI – *multiple-access interference*) em cada receptor. Para analisar um sistema DSSS com M usuários em múltiplo acesso, devemos calcular a interferência na saída de um dado receptor causada pelos remanescentes $M - 1$ usuários. É mais simples focar o intervalo de tempo $[(k-1)T_s, kT_s]$ e o k -ésimo símbolo de todos os M usuários. Para simplicidade de análise, fizemos diversas hipóteses na Fig. 11.12, que explicitamos a seguir:

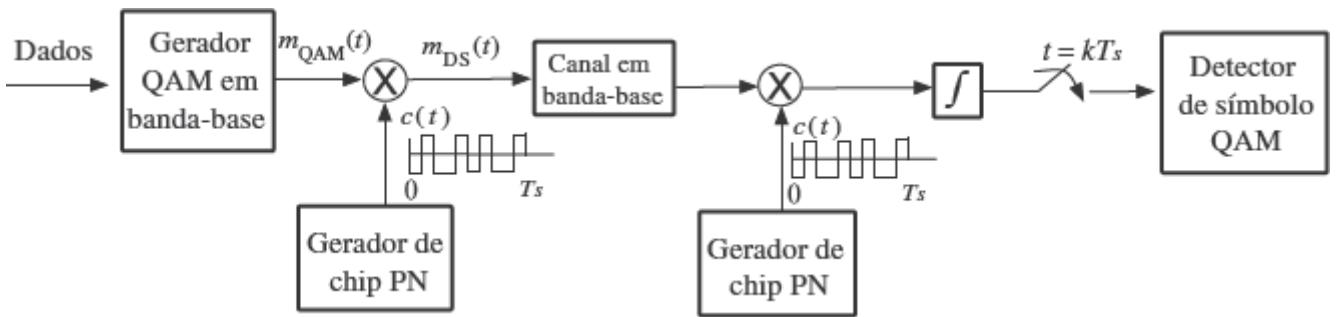


Figura 11.11 Diagrama equivalente em banda-base de sistema DSSS.

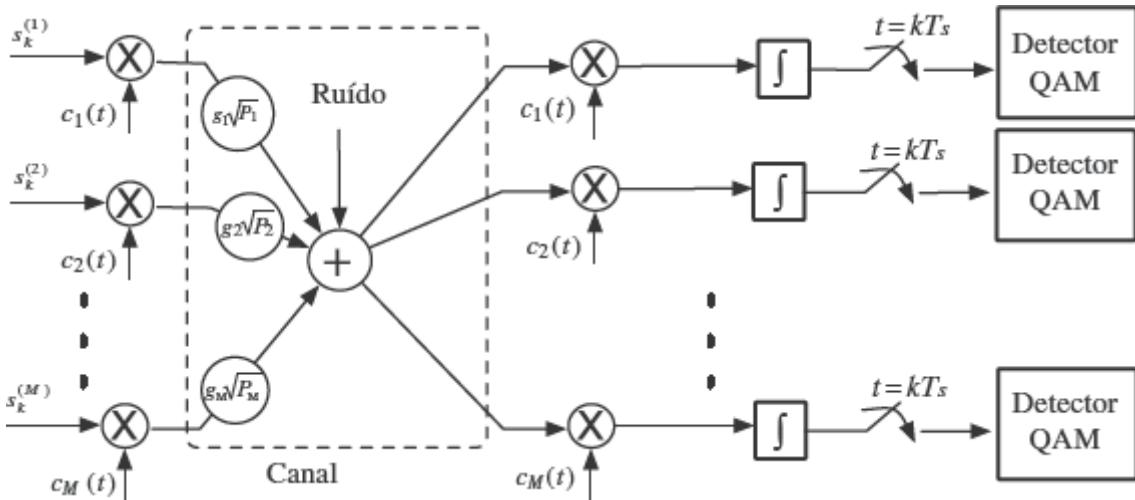


Figura 11.12 Sistema de múltiplo acesso por divisão de código (CDMA) baseado em DSSS.

- O i -ésimo usuário transmite um símbolo $s_k^{(i)}$ no intervalo $[(k-1)T_s, kT_s]$.
- Não existe atraso relativo entre os M usuários e cada receptor recebe o k -ésimo símbolo de todos os M usuários no intervalo $[(k-1)T_s, kT_s]$.
- Todos os símbolos de usuários têm potência unitária, ou seja, $E\{|s_k^{(i)}|^2\} = 1$.
- A potência de transmissão do i -ésimo usuário é P_i .
- O canal do i -ésimo usuário tem ganho escalar g_i .
- O canal é AWGN com ruído $n(t)$.

As primeiras duas hipóteses indicam que todos os M usuários são *síncronos*. Embora, na prática, sistemas CDMA assíncronos sejam comuns, a análise dos mesmos é uma generalização simples, mas não trivial, do caso síncrono.*

Como todos os usuários compartilham a mesma largura de banda, cada receptor terá igual acesso ao mesmo sinal de saída do canal

$$y(t) = \sum_{j=1}^M g_j \sqrt{P_j} s_k^{(j)} c_j(t) + n(t) \quad (11.28a)$$

Após aplicação do filtro casado (desespalhamento), a saída do i -ésimo receptor no instante de amostragem $t = kT_s$ é

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_k^{(i)} &= \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} c_i(t)y(t) dt \\
&= \sum_{j=1}^M g_j \sqrt{P_j} s_k^{(j)} \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} c_i(t)c_j(t) dt + \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} c_i(t)\mathbf{n}(t) dt \\
&= \sum_{j=1}^M g_j \sqrt{P_j} R_{i,j}(k) s_k^{(j)} + \mathbf{n}_i(k)
\end{aligned} \tag{11.28b}$$

Por conveniência de notação, definimos o coeficiente de correlação cruzada (variante no tempo) dos dois códigos de espalhamento como

$$R_{i,j}(k) = \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} c_i(t)c_j(t) dt \tag{11.28c}$$

e a amostra de ruído do i -ésimo receptor como

$$\mathbf{n}_i(k) = \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} c_i(t)\mathbf{n}(t) dt \tag{11.28d}$$

É importante notar que as amostras de ruído na Eq. (11.28d) são gaussianas com média

$$\overline{\mathbf{n}_i(k)} = \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} c_i(t)\overline{\mathbf{n}(t)} dt = 0$$

A correlação cruzada entre duas amostras de ruído pode ser calculada como

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{n}_i(k)\mathbf{n}_j(\ell)} &= \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} \int_{(\ell-1)T_s}^{\ell T_s} c_i(t_1)c_j(t_2)\overline{\mathbf{n}(t_1)\mathbf{n}(t_2)} dt_1 dt_2 \\
&= \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} \int_{(\ell-1)T_s}^{\ell T_s} c_i(t_1)c_j(t_2)R_{\mathbf{n}}(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 \\
&= \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} \int_{(\ell-1)T_s}^{\ell T_s} c_i(t_1)c_j(t_2) \frac{\mathcal{N}}{2} \delta(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 \\
&= \frac{\mathcal{N}}{2} \delta[k - \ell] \int_{(k-1)T_s}^{kT_s} c_i(t_1)c_j(t_1) dt_1
\end{aligned} \tag{11.29a}$$

$$= \frac{\mathcal{N}}{2} R_{i,j}(k) \delta[k - \ell] \tag{11.29b}$$

A Eq. (11.29) mostra que as amostras de ruído no receptor CDMA DS/SS são temporalmente brancas. Isso significa que as amostras de ruído gaussiano tomadas em diferentes instantes são independentes umas das outras. Portanto, a detecção ótima de $\{s_k^{(i)}\}$ pode ser baseada nas amostras $\{\mathbf{r}_k^{(i)}\}$ no tempo $t = kT$.

Para CDMA de código curto, os sinais de espalhamento $\{c_i(t)\}$ são periódicos, com período T_s . Em outras palavras, os sinais de espalhamento PN $\{c_i(t)\}$ são idênticos em cada período $[(k-1)T_s, kT_s]$. Portanto, no caso de sistemas CDMA de código curto, o coeficiente de correlação cruzada entre dois códigos de espalhamento é uma constante

$$R_{i,j}(k) = R_{i,j} \quad (11.30)$$

Reparemos que a variável de decisão do i -ésimo receptor é

$$r_k^{(i)} = g_i \sqrt{P_i} R_{i,i}(k) s_k^{(i)} + \underbrace{\sum_{j \neq i}^M g_j \sqrt{P_j} R_{i,j}(k) s_k^{(j)}}_{I_k^{(i)}} + n_i(k) \quad (11.31)$$

$I_k^{(i)}$ é um termo adicional que resulta da interferência de múltiplo acesso nos $M - 1$ sinais interferentes. Quando os códigos de espalhamento são selecionados de modo a satisfazerem a condição de ortogonalidade

$$R_{i,j}(k) = 0 \quad i \neq j$$

a interferência de múltiplo acesso em CDMA é zero, e cada usuário CDMA obtém desempenho idêntico ao de um único usuário DSSS ou de um único usuário QAM em banda-base.

Há várias formas de gerar códigos de espalhamento ortogonais. Códigos de Walsh-Hadamard são os mais conhecidos códigos de espalhamento ortogonais. Dado um comprimento de código L , igual ao fator de espalhamento, há um total de L códigos ortogonais de Walsh-Hadamard. Um exemplo simples de código Walsh-Hadamard para $L = 8$ é dado a seguir. Cada linha da matriz na Eq. (11.32) é um código de espalhamento de comprimento 8:

$$W_8 = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 \end{bmatrix} \quad (11.32)$$

No nível seguinte, o código de Walsh-Hadamard tem comprimento 16 e pode ser obtido de W_8 via

$$W_{2^k} = \begin{bmatrix} W_{2^{k-1}} & W_{2^{k-1}} \\ W_{2^{k-1}} & -W_{2^{k-1}} \end{bmatrix}$$

Na verdade, iniciando com $W_1 = [1]$ e $k = 0$, essa regra recursiva pode ser usada para gerar códigos de Walsh-Hadamard de comprimento $L = 2^k$.

Aproximação Gaussiana de MAI Não Ortogonal

Em aplicações práticas, muitos códigos de espalhamento não são totalmente ortogonais. Em consequência, o efeito de MAI no desempenho de detecção de cada usuário pode ser sério. Para analisar o efeito de MAI em um receptor de um usuário, precisamos estudar a distribuição de probabilidade de MAI. A análise exata da probabilidade de I_k é difícil. Uma alternativa é buscar uma boa aproximação. No caso de M grande, podemos invocar o teorema do limite central para aproximar a MAI por uma variável aleatória gaussiana. Recordemos que os símbolos QAM $s_k^{(i)}$ são independentes com média zero e variância unitária, ou seja,

$$\begin{aligned} \overline{s_k^{(j)}} &= 0 \\ \overline{s_k^{(j)} s_k^{(i)*}} &= 0 \quad i \neq j \\ \overline{|s_k^{(j)}|^2} &= 1 \end{aligned}$$

Assim, podemos aproximar a MAI como gaussiana com média

$$\overline{I_k^{(i)}} = \sum_{j \neq i}^M g_j \sqrt{P_j} R_{i,j}(k) \overline{s_k^{(j)}} = 0 \quad (11.33)$$

e variância

$$\overline{|I_k^{(i)}|^2} = \sum_{j \neq i}^M |g_j|^2 P_j |R_{i,j}(k)|^2 \quad (11.34)$$

O efeito dessa aproximação para a MAI é ruído de canal mais forte. Com efeito, o desempenho de detecção baseada na variável de decisão é degradado pela MAI gaussiana adicional. Com base na análise para um usuário, a nova SNR equivalente é degradada e passa a

$$\frac{2E_b}{E_b \left(|g_i|^2 P_i |R_{i,i}(k)|^2 \right)^{-1} \sum_{j \neq i}^M |g_j|^2 P_j |R_{i,j}(k)|^2 + \mathcal{N}}$$

Para o caso especial de BPSK ou sinalização polar, a BER do i -ésimo usuário CDMA é, aproximadamente,

$$Q \left(\frac{2E_b}{E_b \left(|g_i|^2 P_i |R_{i,i}(k)|^2 \right)^{-1} \sum_{j \neq i}^M |g_j|^2 P_j |R_{i,j}(k)|^2 + \mathcal{N}} \right) \quad (11.35)$$

Observemos que, quando apenas um usuário está presente ($M = 1$), a Eq. (11.35) se torna o bem conhecido resultado de BER polar

$$P_b = Q \left(\frac{2E_b}{\mathcal{N}} \right)$$

como esperado. O mesmo resultado se aplica quando todos os códigos de espalhamento forem mutuamente ortogonais, de modo que $R_{ij}(k) = 0$, $i \neq j$.

No caso extremo de sistema sem ruído, quando a relação sinal-ruído é muito alta ($E_b/\mathcal{N} \rightarrow \infty$), temos

$$\lim_{E_b/\mathcal{N} \rightarrow \infty} P_b = Q \left(\frac{|g_i|^2 P_i |R_{i,i}(k)|^2}{\sum_{j \neq i}^M |g_j|^2 P_j |R_{i,j}(k)|^2} \right)$$

Isso mostra a presença de um irredutível piso de erro para o caso limitado pela MAI. Esse piso de ruído desaparece quando os códigos de espalhamento são mutuamente ortogonais, de modo que $R_{ij}(k) = 0$ se $i \neq j$.

Problema Próximo-Distante

A aproximação gaussiana da MAI tem limitações ao ser usada para prever o desempenho do sistema. Embora o teorema do limite central implique que $I_k^{(i)}$ ⁽ⁱ⁾ tenderá a uma distribuição gaussiana nas proximidades do centro de sua distribuição, a convergência pode requerer um número M muito grande de usuários CDMA. Em um típico sistema CDMA, o número de usuários M é da ordem de 64 a 128. Quando M não for suficientemente grande, a aproximação gaussiana para a MAI pode ser bastante imprecisa, particularmente em um ambiente próximo-distante.

O chamado ambiente *próximo-distante*^{*} (*near-far*) descreve o seguinte cenário:

- O transmissor desejado está muito mais distante de seu receptor que alguns transmissores interferentes.
- Os códigos de espalhamento não são mutuamente ortogonais, ou seja, $R_{ij}(k) \neq 0$ quando $i \neq j$.

Se admitirmos a mesma potência de transmissão em todos os casos ($P_j = P_o$), no ambiente próximodistante, o ganho g_i do desejado canal é muito menor que os ganhos de alguns canais interferentes. Ou seja, pode existir algum conjunto de usuário J tal que

$$g_i \ll g_j \quad j \in \mathcal{J} \quad (11.36)$$

Em consequência, a Eq. (11.31) se torna

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_k^{(i)} &= \sqrt{P_o} g_i R_{i,i}(k) s_k^{(i)} + \sqrt{P_o} \sum_{j \in \mathcal{J}} g_j R_{i,j}(k) s_k^{(j)} + \left[\sqrt{P_o} \sum_{j \notin \mathcal{J}} g_j R_{i,j}(k) s_k^{(j)} + n_i(k) \right] \\ &= \sqrt{P_o} g_i R_{i,i}(k) s_k^{(i)} + \sqrt{P_o} \sum_{j \in J} g_j R_{i,j}(k) s_k^{(j)} + n'_i(k) \end{aligned} \quad (11.37)$$

em que definimos um termo de ruído equivalente

$$n'_i(k) = \sqrt{P_o} \sum_{j \notin \mathcal{J}} g_j R_{i,j}(k) s_k^{(j)} + n_i(k) \quad (11.38)$$

que é aproximadamente gaussiano.

Em um ambiente próximo-distante, é possível que, como resultado do menor ganho de canal do sinal e da correlação cruzada não nula, a componente de sinal (distante)

$$g_i R_{i,j}(k) s_k^{(j)}$$

seja dominada pela interferência forte (próxima)

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} g_j R_{i,j}(k) s_k^{(j)}$$

A análise da BER na Eq. (11.35), feita sob aproximação gaussiana, deixa de ser válida.

Exemplo 11.3 Consideremos um sistema CDMA com dois usuários ($M = 2$). A potência de transmissão dos dois sinais é de 10 mW. O receptor para o usuário 1 pode receber sinais dos dois transmissores. Para esse receptor, os ganhos de canal dos sinais são

$$g_1 = 10^{-4} \quad g_2 = 10^{-1}$$

O ganho de espalhamento é $L = 128$, de modo que

$$R_{1,1}(k) = 128 \quad R_{1,2}(k) = -1$$

O ruído amostrado $n_1(k)$ é gaussiano com média zero e variância 10^{-6} . Determinemos a BER para o desejado sinal do usuário 1.

A variável de decisão do receptor no tempo k é

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_k &= \sqrt{10^{-2}} \cdot 10^{-4} \cdot 128 \cdot s_k^{(1)} + \sqrt{10^{-2}} \cdot 10^{-1} \cdot (-1) \cdot s_k^{(2)} + n_1(k) \\ &= 10^{-2} \left[0,128 s_k^{(1)} - s_k^{(2)} + 100 n_1(k) \right] \end{aligned}$$

Para símbolos de dado equiprováveis ± 1 , a BER do usuário 1 é

$$\begin{aligned}
P_b &= 0,5 \cdot P \left[r_k > 0 | s_k^{(1)} = -1 \right] + 0,5 \cdot P \left[r_k < 0 | s_k^{(1)} = 1 \right] \\
&= P \left[r_k < 0 | s_k^{(1)} = 1 \right] \\
&= P \left[0,128 - s_k^{(2)} + 100n_1(k) < 0 \right]
\end{aligned}$$

Como os símbolos de dados são equiprováveis, $P [s_k^{(2)} = \pm 1] = 0,5$, e podemos utilizar o teorema da probabilidade total para obter

$$\begin{aligned}
P_b &= 0,5P \left[0,128 - s_k^{(2)} + 100n_1(k) < 0 | s_k^{(2)} = 1 \right] \\
&\quad + 0,5P \left[0,128 - s_k^{(2)} + 100n_1(k) < 0 | s_k^{(2)} = -1 \right] \\
&= 0,5P [0,128 - 1 + 100n_1(k) < 0] + 0,5P [0,128 + 1 + 100n_1(k) < 0] \\
&= 0,5P [100n_1(k) < 0,872] + 0,5P [100n_1(k) < -1,128] \\
&= 0,5[1 - Q(8,72)] + 0,5Q(11,28) \\
&\approx 0,5
\end{aligned}$$

Assim, a BER do sinal desejado é essencialmente 0,5, o que significa que o usuário em questão é totalmente dominado pela interferência nesse particular ambiente próximo-distante.

Controle de Potência em CDMA

Como o problema *próximo-distante* é um resultado direto da diferença nas potências de sinais de usuários no receptor, uma forma eficaz de combater o efeito *próximo-distante* consiste em aumentar a potência dos usuários “distantes” e reduzir a potência dos usuários “próximos”. Em CDMA, esse equilíbrio de potência é conhecido como *controle de potência*.

O controle de potência admite que todos os receptores estejam em funcionamento. Por exemplo, a comunicação celular se dá por meio da conexão de um número de telefones móveis em cada célula a uma estação radiobase que serve a célula. Todas as transmissões em uma célula são recebidas e detectadas na estação de base. A transmissão de uma unidade móvel à estação de base é conhecida como *enlace ascendente (uplink)* ou *reverso*, em contraste com o *enlace descendente (downlink)* ou *direto*, que representa a transmissão de uma estação de base a uma unidade móvel. Fica claro que o efeito próximo-distante não ocorre no *enlace descendente*. Na verdade, como múltiplas transmissões de usuários podem estar em perfeita sincronia, o enlace descendente de CDMA pode, com facilidade, ser feito sincrono para manter ortogonalidade. Além disso, em cada receptor móvel, todas as transmissões de sinal têm mesmo ganho de canal, pois todas têm origem na mesma estação radiobase. Nenhuma condição próxima-distante pode ser satisfeita. Por isso, usuários móveis de CDMA no enlace descendente não necessitam de *controle de potência* ou qualquer outro meio de combate a MAI forte.

Quando o CDMA é usado no *enlace ascendente* para permitir que múltiplos usuários móveis transmitam seus sinais à estação de base, o problema próximo-distante ocorrerá com frequência. Ao adotar *controle de potência*, a estação de base pode enviar instruções aos telefones móveis para aumentar ou reduzir suas potências de transmissão. O objetivo é que todos os sinais de usuários cheguem aos receptores da estação de base com níveis semelhantes de potência, independentemente dos respectivos ganhos de canal. E outras palavras, um valor constante de $|g_i|^2 P_i$ é alcançado, pois o *controle de potência* via realimentação de receptores fornece instruções aos transmissores móveis.

Um dos principais padrões de telefonia celular de segunda geração, cdmaOne (também conhecido como IS-95), introduzido pela Qualcomm, é um sistema CDMA DSSS. O cdmaOne aplica *controle de potência* para superar o problema próximo-distante nos receptores da estação de base.

O controle de potência admite duas formas: *malha aberta (open loop)* e *malha fechada (closed loop)*. No controle em malha aberta, uma estação móvel ajusta sua potência com base na intensidade do sinal que recebe da estação de base. Isso supõe uma relação recíproca entre os enlaces direto e reverso, uma hipótese que pode não ser válida caso o enlace opere em diferentes bandas de frequências. Em consequência, controle de potência em malha fechada é comumente empregado, pois a estação de base pode ordenar que a estação móvel altere sua potência de transmissão.

Resistência ao Problema Próximo-Distante

Um importante conceito de resistência ao problema próximo-distante foi definido por S. Verdú.¹⁰ O principal objetivo é determinar se um receptor CDMA pode superar a MAI com o simples aumento da relação sinal-ruído E_b/\mathcal{N} . Um receptor é definido como *resistente ao problema próximo-distante* se, para cada usuário no sistema CDMA, existir um não zero tal que, independentemente da intensidade da interferência, a probabilidade de erro de bit $P_b^{(i)}$ em função de E_b/\mathcal{N} satisfaça

$$\lim_{\mathcal{N} \rightarrow 0} \frac{P_b^{(i)}(E_b/\mathcal{N})}{Q(\sqrt{\gamma} \cdot 2E_b/\mathcal{N})} < +\infty$$

Isso significa que um receptor resistente ao problema próximo-distante não deve ter um piso de BER se $\mathcal{N} \rightarrow 0$. Nossa análise do receptor de filtro casado convencional, mesmo com base na aproximação gaussiana, demonstra que o receptor convencional de um usuário não resiste ao problema próximo-distante. Embora alivie o efeito próximo-distante, o controle de potência não torna o receptor convencional resistente ao problema próximo-distante. Para alcançar resistência ao problema próximo-distante, é preciso aplicar receptores para detecção de múltiplos usuários para a detecção conjunta de todos os símbolos de usuários, em vez de aproximar a soma das interferências como ruído gaussiano adicional.

11.7 DETECÇÃO MULTIUSUÁRIO (MUD)

Detecção de múltiplos usuários (MUD – *multiuser detection*) é uma alternativa ao controle de potência para combater o efeito próximo-distante. Em contraste com o controle de potência, a MUD é capaz de equalizar a potência do sinal recebido sem realimentação dos receptores aos transmissores. A MUD é um receptor centralizado que objetiva a detecção conjunta de todos os sinais de usuários, independentemente da diferença entre as intensidades dos sinais recebidos.

Para a MUD, a hipótese básica é que o receptor tenha acesso a amostras de todos os M sinais na Eq. (11.31). Além disso, o receptor deve ter conhecimento da seguinte informação:

1. Intensidades dos sinais de usuário, $g_i \sqrt{P_i}$.
2. Correlação cruzada da sequência de espalhamento $R_{i,j}(k)$.
3. Estatísticas das amostras de ruído $n_i(k)$.

Para explicar os diferentes receptores MUD, é mais conveniente que escrevamos a Eq. (11.31) na forma vetorial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_k^{(1)} \\ \mathbf{r}_k^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_k^{(M)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{1,1}(k) & R_{1,2}(k) & \cdots & R_{1,M}(k) \\ R_{2,1}(k) & R_{2,2}(k) & \cdots & R_{2,M}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{M,1}(k) & R_{M,2}(k) & \cdots & R_{M,M}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \sqrt{P_1} \\ g_2 \sqrt{P_2} \\ \ddots \\ g_M \sqrt{P_M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k^{(1)} \\ s_k^{(2)} \\ \vdots \\ s_k^{(M)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1(k) \\ n_2(k) \\ \vdots \\ n_M(k) \end{bmatrix} \quad (11.39a)$$

Podemos definir os vetores

$$\mathbf{r}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_k^{(1)} \\ \mathbf{r}_k^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_k^{(M)} \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}_k = \begin{bmatrix} s_k^{(1)} \\ s_k^{(2)} \\ \vdots \\ s_k^{(M)} \end{bmatrix} \quad \mathbf{n}_k = \begin{bmatrix} n_1(k) \\ n_2(k) \\ \vdots \\ n_M(k) \end{bmatrix} \quad (11.39b)$$

Podemos, também, definir as matrizes

$$\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} R_{1,1}(k) & R_{1,2}(k) & \cdots & R_{1,M}(k) \\ R_{2,1}(k) & R_{2,2}(k) & \cdots & R_{2,M}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{M,1}(k) & R_{M,2}(k) & \cdots & R_{M,M}(k) \end{bmatrix} \quad (11.39c)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} g_1 \sqrt{P_1} & & & \\ & g_2 \sqrt{P_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & g_M \sqrt{P_M} \end{bmatrix} \quad (11.39d)$$

Assim, as amostras dos M sinais de saída disponíveis a MUD podem ser escritas como

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{R}_k \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{s}_k + \mathbf{n}_k \quad (11.39e)$$

Reparemos que o vetor de ruído \mathbf{n}_k é gaussiano com média zero e matriz de covariância [Eq. (11.29)]

$$\overline{\mathbf{n}_k (\mathbf{n}_k^*)^T} = \frac{\mathcal{N}}{2} \mathbf{R}_k \quad (11.40)$$

O objetivo de receptores MUD é a determinação do desconhecido vetor de dados de usuário \mathbf{s}_k a partir do valor do vetor de sinal recebido $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k$. Com base no modelo de sinal da Eq. (11.39), diferentes receptores MUD conjuntos podem ser deduzidos segundo distintos critérios.

Para simplificar nossa notação na discussão de MUD, denotemos o conjugado da matriz \mathbf{A} por \mathbf{A}^* e a transposta de matriz \mathbf{A} por \mathbf{A}^T . Além disso, denotemos a transposta do conjugado da matriz \mathbf{A} por

$$\mathbf{A}^H = (\mathbf{A}^*)^T$$

A transposta do conjugado de uma matriz também é conhecida como sua hermitiana.

MUD Ótima: Receptor de Máxima Verossimilhança

A MUD ótima baseada no modelo de sinal da Eq. (11.39) é o detector de máxima verossimilhança (MLD – *maximum likelihood detector*), com a hipótese de símbolos de entrada equiprováveis. Como discutido na Seção 10.6, o receptor ótimo com mínima probabilidade de erro de símbolo é o receptor MAP

$$\mathbf{s}_k = \arg \max_{\mathbf{s}_k} p(\mathbf{s}_k | \mathbf{r}_k) \quad (11.41a)$$

Se todos os possíveis valores de \mathbf{s}_k forem equiprováveis, o detector MAP se reduz ao detector de *máxima verossimilhança* (ou MLD)

$$\mathbf{s}_k = \arg \max_{\mathbf{s}_k} p(\mathbf{r}_k | \mathbf{s}_k) \quad (11.41b)$$

Como o vetor de ruído \mathbf{n}_k é conjuntamente gaussiano com média zero com matriz de covariância $0,5 \mathcal{N} \mathbf{R}_k$, temos

$$p(\mathbf{r}_k | \mathbf{s}_k) = (\pi \mathcal{N})^{-M} [\det(\mathbf{R}_k)]^{-1} \exp \left[-\frac{1}{\mathcal{N}} (\mathbf{r}_k - \mathbf{R}_k \mathbf{D} \mathbf{s}_k)^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{r}_k - \mathbf{R}_k \mathbf{D} \mathbf{s}_k)^* \right] \quad (11.42)$$

O receptor MLD pode ser implementado como

$$\begin{aligned}
\max_{\mathbf{s}_k} p(\mathbf{r}_k | \mathbf{s}_k) &\iff \min_{\mathbf{s}_k} (\mathbf{r}_k - \mathbf{R}_k \mathbf{D} \mathbf{s}_k)^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{r}_k - \mathbf{R}_k \mathbf{D} \mathbf{s}_k)^* \\
&\iff \min_{\mathbf{s}_k} \left\| \mathbf{R}_k^{-1/2} (\mathbf{r}_k - \mathbf{R}_k \mathbf{D} \mathbf{s}_k) \right\|^2
\end{aligned} \tag{11.43}$$

O receptor MUD de máxima verossimilhança é ilustrado na Fig. 11.13.

Assim, o receptor MUD de máxima verossimilhança deve calcular e comparar os valores

$$\left\| \mathbf{R}_k^{-1/2} (\mathbf{r}_k - \mathbf{R}_k \mathbf{D} \mathbf{s}_k) \right\|^2$$

para todas as possíveis escolhas do desconhecido vetor de dados de usuário \mathbf{s}_k . Se cada usuário fizer uso de QAM-16 para modular seus dados, a complexidade do receptor MUD ótimo requer 16^M avaliações da Eq. (11.43). Fica evidente que o receptor MUD de máxima verossimilhança é muito complexo. De fato, a complexidade computacional aumenta exponencialmente com o número de usuários CDMA.¹⁰ Esse é o preço a ser pago pelo receptor CDMA ótimo e resistente ao problema próximo-distante.¹⁰

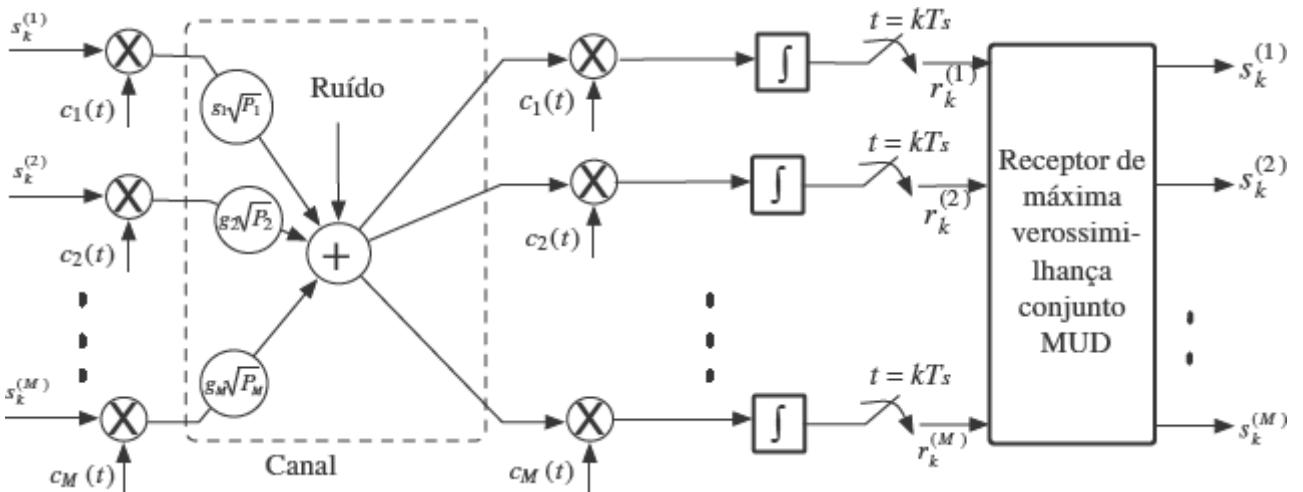


Figura 11.13 Receptor de máxima verossimilhança para detecção de múltiplos usuários de (MUD).

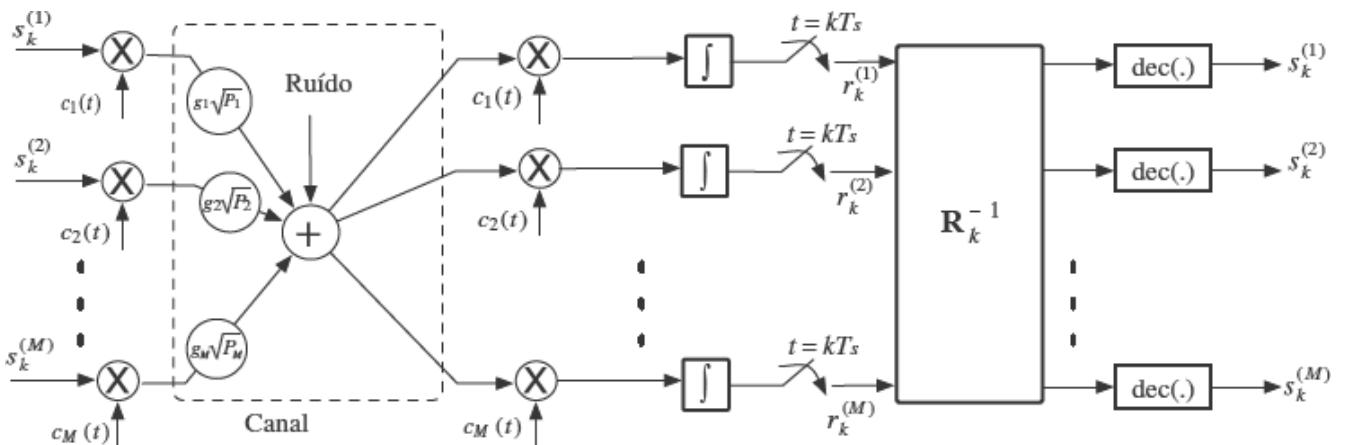


Figura 11.14 Receptor MUD descorrelator.

Receptor Descorrelator

A alta complexidade do receptor MUD de máxima verossimilhança reduz sua aplicabilidade em situações práticas. Para reduzir o custo computacional, foram propostas várias configurações de receptores MUD subótimos de baixa complexidade. O descorrelacionador MUD é um método linear que simplesmente usa multiplicação de matrizes para remover a MAI entre diferentes usuários. Com base na Eq. (11.39), a MAI entre diferentes usuários é causada pela matriz de correlação não diagonal \mathbf{R}_k . Assim, o efeito MAI pode ser removido com a pré-multiplicação de \mathbf{r}_k pela pseudoinversa de \mathbf{R}_k para “descorrelacionador” os sinais de usuários,

$$\mathbf{R}_k^{-1} \cdot \mathbf{r}_k = \mathbf{D} s_k + \mathbf{R}_k^{-1} \cdot \mathbf{n}_k \quad (11.44)$$

Essa operação de descorrelação deixa apenas o termo de ruído \mathbf{n}_k , que pode afetar o sinal de usuário. Um dispositivo de decisão rígida (*hard-decision device*) QAM pode ser aplicada para detectar os símbolos de usuários

$$\hat{s}_k = \text{dec}(\mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{r}_k) \quad (11.45)$$

A Fig. 11.14 ilustra um diagrama em blocos de um receptor descorrelator MUD. Como a principal operação de um receptor MUD de descorrelação reside na multiplicação matricial de , a complexidade computacional cresce apenas com a ordem de $O(M^2)$. O receptor descorrelator é resistente ao problema próximo-distante, como detalhado por Luras e Verdú.¹¹

Receptor de Mínimo Erro Quadrático Médio (MMSE)

A desvantagem do receptor MUD descorrelator reside na transformação de ruído \mathbf{n}_k . Na verdade, quando a matriz de correlação \mathbf{R}_k é mal condicionada, a transformação de ruído tem o efeito negativo de amplificação do ruído. Para mitigar este risco, uma MUD diferente e mais robusta^{12, 13} consiste em minimizar o erro quadrático médio com a aplicação de um bom receptor MUD linear e determinação da matriz ótima \mathbf{G} :

$$\min_{\mathbf{G}} E\{||\mathbf{s}_k - \mathbf{G} \mathbf{r}_k||^2\} \quad (11.46)$$

Esta matriz \mathbf{G} ainda representa um detector linear. Uma vez que \mathbf{G} tenha sido determinada, o receptor MUD simplesmente toma uma decisão rígida com base no sinal linearmente transformado, ou seja,

$$\hat{s}_k = \text{dec}(\mathbf{G} \mathbf{r}_k) \quad (11.47)$$

A matriz \mathbf{G} ótima pode ser calculada com aplicação do princípio da ortogonalidade [Eq. (8.84), Seção 8.5]. O princípio da ortogonalidade requer que o vetor de erro

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{G} \mathbf{r}_k$$

seja ortogonal ao vetor de sinal recebido \mathbf{r}_k . Em outras palavras,

$$\overline{(\mathbf{s}_k - \mathbf{G} \mathbf{r}_k) \mathbf{r}_k^H} = 0 \quad (11.48)$$

Assim, a matriz \mathbf{G} ótima pode ser calculada como

$$\mathbf{G} = \overline{\mathbf{s}_k \mathbf{r}_k^H} \left[\overline{\mathbf{r}_k \mathbf{r}_k^H} \right]^{-1} \quad (11.49)$$

Como o vetor de ruído \mathbf{n}_k e o vetor de sinal \mathbf{s}_k são independentes,

$$\overline{\mathbf{s}_k \mathbf{n}_k^H} = \mathbf{0}_{M \times M}$$

é a correlação cruzadas dos dois.

Além disso, havíamos estabelecido as igualdades

$$\overline{\mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^H} = \mathbf{I}_{M \times M} \quad \overline{\mathbf{n}_k \mathbf{n}_k^H} = \frac{\mathcal{N}}{2} \mathbf{R}_k$$

nas quais usamos $\mathbf{I}_{M \times M}$ para denotar a matriz identidade $M \times M$. Com isso, temos

$$\overline{\mathbf{r}_k \mathbf{r}_k^H} = \mathbf{R}_k \mathbf{D} \mathbf{D}^H \mathbf{R}_k^H + \frac{\mathcal{N}}{2} \mathbf{R}_k \quad (11.50a)$$

$$\overline{s_k r_k^H} = \mathbf{D}^H \mathbf{R}_k^H \quad (11.50b)$$

Portanto, a matriz do receptor linear ótimo é

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{D}^H \mathbf{R}_k^H \left(\mathbf{R}_k \mathbf{D} \mathbf{D}^H \mathbf{R}_k^H + \frac{\mathcal{N}}{2} \mathbf{R}_k \right)^{-1} \quad (11.51)$$

Fica claro que, quando o ruído de canal é zero (ou seja, $= 0$), a matriz ótima dada pela Eq. (11.51) se degenera a

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{D}^H \mathbf{R}_k^H \left(\mathbf{R}_k \mathbf{D} \mathbf{D}^H \mathbf{R}_k^H \right)^{-1} = (\mathbf{R}_k \mathbf{D})^{-1}$$

que, essencialmente, é o receptor descorrelator.

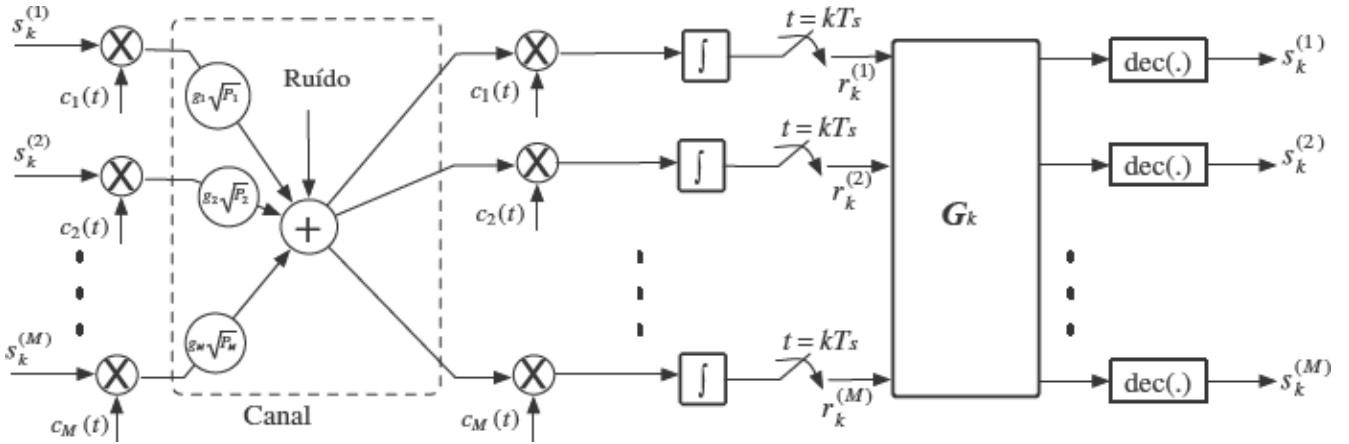


Figura 11.15 Receptor MUD de mínimo erro quadrático médio.

O receptor MUD linear de mínimo erro quadrático médio (MMSE – *minimum mean square error receiver*) é mostrado na Fig. 11.15. Como no caso do receptor descorrelator, o principal custo computacional advém da multiplicação matricial de \mathbf{G}_k . O receptor linear MMSE também tem resistência ao problema próximo-distante.¹¹

Receptor com Realimentação de Decisão

Reparemos que tanto o receptor descorrelator como o receptor MUD MMSE aplicam processamento linear de matrizes. Por isso, são conhecidos como receptores lineares de baixa complexidade. O receptor MUD ótimo, por sua vez, é não linear e tem complexidade muito maior. Existe, ainda, um receptor subótimo muito popular que é não linear. Trata-se de um método baseado no conceito de cancelamento sucessivo de interferências, conhecido como receptor MUD com realimentação de decisão.^{14, 15}

A principal *motivação* por trás do receptor MUD com realimentação de decisão reside no fato de que, em um ambiente próximo-distante, **nem todos** os usuários são igualmente afetados. Em um ambiente próximo-distante, os sinais mais fortes são os vencedores e os mais fracos, os perdedores. Na verdade, quando um dado usuário tiver uma intensidade $\sqrt{P_\ell g_\ell}$ que seja maior que as de todos os outros usuários, seu receptor de filtro casado convencional terá um desempenho melhor que o possível em um ambiente de intensidades iguais. Portanto, seria razoável classificar os usuários recebidos segundo as respectivas intensidades medidas por $\{P_i g_i\}$. Os símbolos QAM mais intensos de usuários podem ser detectados primeiro, usando apenas receptores de filtros casados convencionais projetados para usuários individuais. Uma vez que o símbolo de usuário mais intenso seja conhecido, seus efeitos de interferência nos restantes sinais de usuários podem ser cancelados. Ao cancelar o símbolo de usuário mais intenso dos vetores de sinais recebidos, restarão $M - 1$ símbolos desconhecidos de usuários a serem detectados. Entre eles, o próximo símbolo de usuário mais intenso pode ser detectado com maior precisão após a remoção da interferência mais intensa. Portanto, seu efeito também pode ser cancelado subsequentemente dos sinais recebidos, beneficiando os remanescentes $M - 2$ símbolos de usuários, e assim por diante. Por fim, o mais fraco sinal de usuário será detectado, depois que toda MAI tenha sido cancelada.

Fica claro que o receptor MUD com realimentação de decisão se vale do cancelamento sucessivo de interferências mais intensas para beneficiar a detecção dos sinais de usuários mais fracos. Por essa razão, o receptor MUD com realimentação de decisão também é conhecido como receptor com cancelamento sucessivo de interferências (SIC – *successive interference cancellation*).

cancellation receiver). A Fig. 11.16 mostra o diagrama em blocos do receptor MUD com realimentação de decisão. Com base na Eq. (11.31), o funcionamento do receptor SIC é sumarizado nos seguintes passos:

MUD com realimentação de decisão

Passo 1: Classificar todas as intensidades de usuários $\{P_i g_i^2\}$ em ordem decrescente. Sem perda de generalidade, consideremos

$$P_1 g_1^2 > P_2 g_2^2 > \dots > P_{M-1} g_{M-1}^2 > P_M g_M^2$$

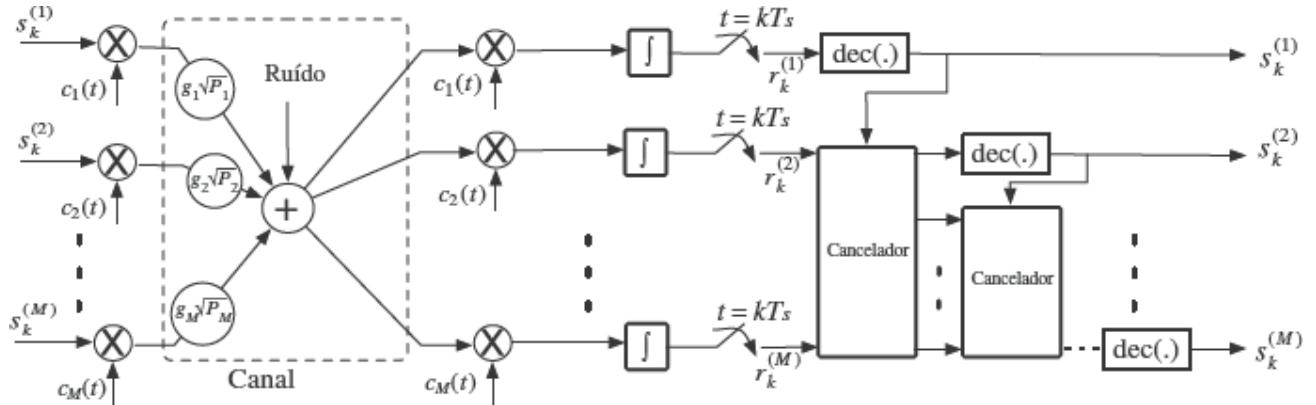


Figura 11.16 Receptor MUD com realimentação e decisão com base no cancelamento sucessivo de interferências (admitindo que todos os M usuários sejam classificados em ordem decrescente de ganho).

Sejam

$$\mathbf{y}_1^{(i)} = \mathbf{r}_k^{(i)}$$

e

$$l = 1$$

Passo 2: Detectar o l -ésimo (mais intenso) símbolo de usuário via

$$\hat{s}_k^{(\ell)} = \text{dec} \left(\mathbf{y}_\ell^{(\ell)} \right)$$

Passo 3: Cancelar a primeira (mais intensa) interferência de usuário dos sinais recebidos

$$\mathbf{y}_{\ell+1}^{(i)} = \mathbf{y}_\ell^{(i)} - g_\ell \sqrt{P_\ell} R_{i,\ell}(k) \hat{s}_k^{(\ell)} \quad i = \ell + 1, \dots, M$$

Passo 4: Fazer $l = l + 1$ e reiniciar do passo 2 até que $l = M$.

Um receptor MUD com realimentação de decisão requer pouca computação, pois o passo de cancelamento de interferência exige apenas complexidade $O(M^2)$. Esse é um receptor muito razoável e de baixa complexidade. Dada a correta decisão de símbolo, o cancelamento da interferência mais intensa dos sinais fracos elimina completamente o problema próximo-distante. A principal **desvantagem** ou fraqueza do receptor com realimentação de decisão reside no efeito de propagação de erro. Isso ocorre quando, no passo 2, um símbolo de usuário $s_k^{(i)}$ é detectado incorretamente. Em consequência, esse símbolo errôneo usado no cancelamento da interferência no passo 3 pode, na verdade, reforçar a MAI. Isso leva à probabilidade de mais erros de decisão do símbolo de usuário subsequente que, por sua vez, pode causar mais erros de decisão. A análise do efeito da propagação de erro pode ser encontrada nas referências 14 e 15.

11.8 SISTEMAS CDMA DSSS PRÁTICOS MODERNOS

Desde a década de 1990, surgiram muitas aplicações comerciais importantes para espalhamento espectral, incluindo telefones celulares, comunicação pessoal e localização de posição. A seguir, para ilustrar os benefícios de espalhamento espectral,

discutiremos algumas aplicações populares da tecnologia CDMA.

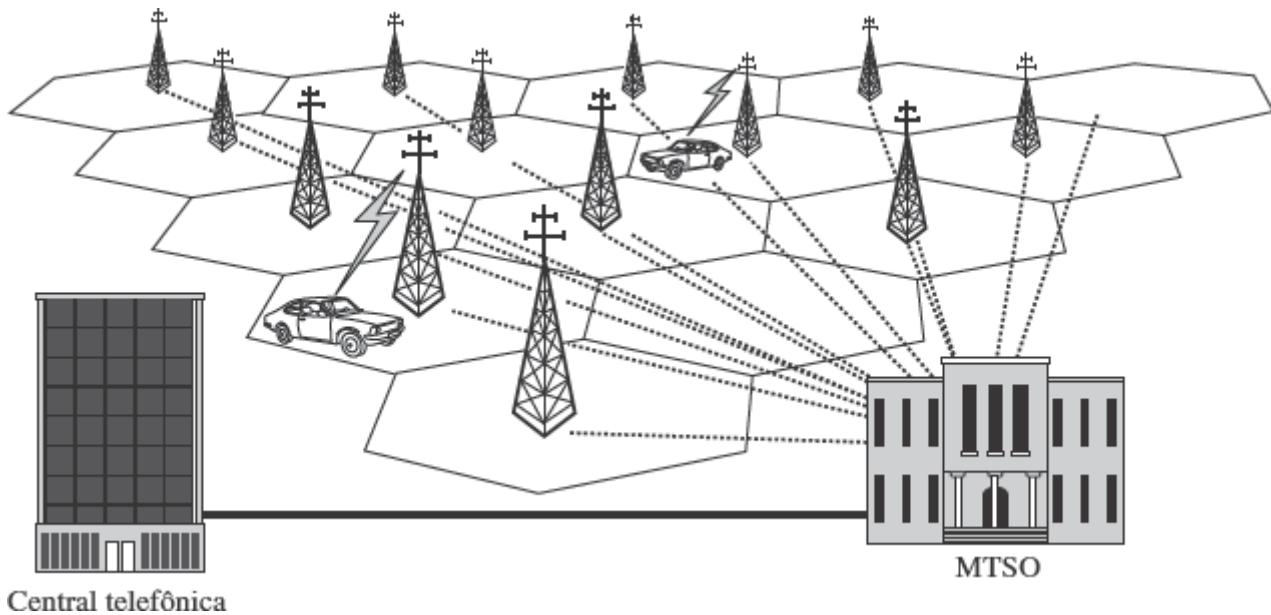


Figura 11.17 Sistema de telefonia celular.

11.8.1 CDMA em Redes de Telefonia Celular

Redes Celulares

A rede celular divide uma área de serviço em **células** geograficamente menores (Fig. 11.17). Cada célula tem uma torre de **estaçao de base** para conexão com os usuários móveis a que serve. Todas as estações de base são conectadas à **central de comutação de telefonia móvel (MTSO – mobile telephone switching office)** que, por sua vez, é conectada à central de telefonia. Um usuário que inicie uma chamada se comunica por um canal de rádio com sua estação de base, que envia o sinal à MTSO. A MTSO se conecta ao receptor via o sistema de telefonia fixa ou via outra estação de base. À medida que o usuário que faz a chamada se move de uma célula a outra, ocorre um processo de *transferência (handoff)*. Durante *handoff*, a MTSO automaticamente comuta o usuário para um canal disponível na nova célula enquanto a chamada está em curso. O processo de *handoff* é tão rápido que, em geral, os usuários não percebem.

A verdadeira engenhosidade da rede celular está na capacidade de reusar uma banda de frequências em múltiplas células. Sem as células, transmissores de alta potência podem ser usados para cobrir toda uma cidade. Contudo, isso permitiria que, a qualquer momento, um canal de frequência fosse usado somente por um usuário na cidade, o que imporia sérias limitações ao número de canais e usuários simultâneos. No esquema celular, a limitação é superada com o reuso das mesmas frequências em todas as células, exceto nas adjacentes. Para que isso seja possível, as potências dos transmissores são mantidas suficientemente baixas, evitando que o alcance de sinais de uma célula ultrapasse as células adjacentes. Podemos acomodar um número arbitrário de usuários aumentando o número de células, reduzindo a área das mesmas e os níveis de potência.

Os esquemas de celulares analógicos 1G (de primeira geração) usam sinais de áudio para modular um sinal FM com largura de banda de transmissão de 30 kHz. Esse sinal FM de banda larga resulta em boa SNR, mas é altamente ineficiente em termos de consumo de largura de banda e reuso de frequências. Os sistemas celulares 2G (de segunda geração) são todos digitais. Entre eles, **GSM** e **cdmaOne** são dois dos mais largamente empregados. GSM adota uma tecnologia TDMA, permitindo que oito usuários compartilhem um canal de 200 kHz. A tecnologia competidora cdmaOne (anteriormente conhecida como IS-95) é um sistema DSSS.

Por que CDMA em Sistemas Celulares?

Embora o espalhamento espectral seja inherentemente bem adequado para combater interferências de banda estreita, e apresente certas vantagens nas áreas de redes e *handoff*, a principal característica por trás da larga aplicação de CDMA em sistemas celulares é a capacidade de melhorar a utilização do espectro. Essa capacidade advém de duas fontes principais. Primeira, o emprego de CDMA permite melhorar o reuso de frequências. Sistemas de banda estreita não podem utilizar a mesma frequência de transmissão em células adjacentes, devido ao risco de interferência. CDMA tem resistência inerente a interferências. Embora usuários de células adjacentes empregando diferentes códigos contribuam para o nível total de interferência, sua contribuição será significativamente menor que a interferência proveniente de usuários da mesma célula. Isso leva a um aumento na eficiência de reuso de frequências. Além disso, no caso de carga de tráfego dinâmica, CDMA provê maior capacidade total. Isso se deve ao fato de que, em um sistema CDMA de baixa carga, usuários enfrentariam um nível mais baixo de interferência e, portanto, teriam melhor desempenho; usuários de TDMA com largura de banda de canal fixa não desfrutam desse benefício.

Sistema Celular CDMA: cdmaOne (IS-95)

O primeiro sistema CDMA comercialmente bem-sucedido em aplicações celulares foi desenvolvido pela Electronic Industries Association (EIA) [Associação de Indústrias Eletrônicas] como um padrão temporário – 95 (IS-95). Agora, com o nome oficial de **cdmaOne**, esse sistema emprega DSSS, adotando sequências de espalhamento de 1,2288 Mchip/s nos enlaces ascendentes e descendentes. As transmissões ascendentes e descendentes ocupam 1,25 MHz de largura de banda de RF, como ilustrado na Fig. 11.18.

O vocoder QCELP (*Qualcomm code-excited linear prediction*, ou predição linear excitada por código de Qualcomm) é usado para codificação de voz. Como o codificador de voz explora vazios e pausas na fala, a taxa de dados varia entre 1,2 e 9,6 kbit/s. Para manter a taxa de símbolos constante, sempre que a taxa de bits cai abaixo da taxa de pico de 9,6 kbit/s, código de repetição é usado para preencher os vazios. Por exemplo, se a saída do codificador de voz (e, subsequentemente, do codificador de convolução) cair a 2,4 kbit/s, a saída é repetida três vezes antes de chegar ao entrelaçador. O transmissor de cdmaOne tira proveito dessa repetição, reduzindo a potência de saída em pelo menos 20 dB durante três de quatro símbolos idênticos. Dessa forma, a interferência de múltiplo acesso é reduzida. Essa “comutação por atividade de voz” (*voice activity gating*) reduz a MAI e aumenta a capacidade global do sistema.

No enlace descendente, o cdmaOne usa modulação QPSK; no enlace ascendente, é usada uma variação de QPSK conhecida como QPSK com *offset* (ou OQPSK). Há outras diferenças importantes entre os enlaces direto e reverso. A Fig. 11.19 delineia as operações básicas de espalhamento e modulação no enlace direto. Após um código corretor de erro convolucional de taxa 1/2, a taxa de dados de voz passa a 19,2 kbit/s. O entrelaçamento (*interleaving*) embaralha os dados para reduzir efeitos de explosão de erro, e a mistura (*scrambling*) de códigos longos provê alguma proteção nominal de privacidade. A taxa de dados permanece em 19,2 kbit/s, até ser espalhada por um código curto de Walsh-Hadamard de comprimento 64, resultando em uma taxa de sequência de 1,2288 Mbit/s. Como, na ausência de distorções de canal, o enlace direto usa transmissões síncronas, pode haver até 64 canais de dados ortogonais, cada um fazendo uso de um distinto código de Walsh-Hadamard. As componentes em fase (I) e em quadratura (Q) das modulações QPSK transportam os mesmos dados na largura de banda de 1,25 MHz, embora diferentes máscaras de código sejam aplicadas a I e a Q.

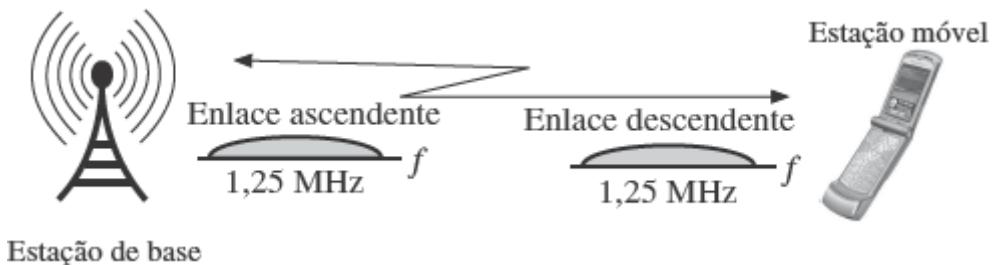


Figura 11.18 Exigência de largura de banda de RF para os enlaces ascendente e descendente de IS-05.

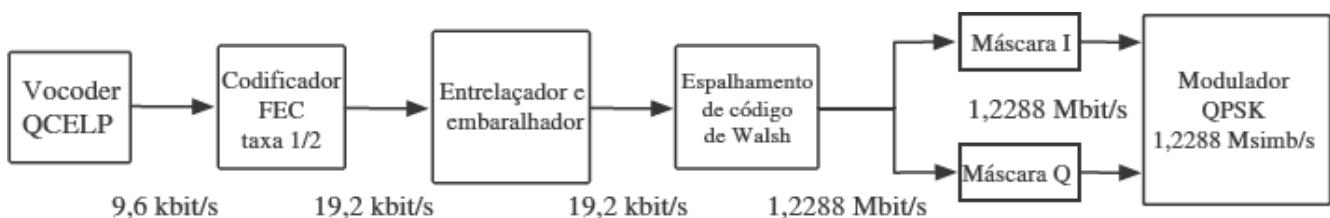


Figura 11.19 Modulação de enlace direto e espalhamento de código de Walsh de cdmaOne (IS-95).

O desempenho do enlace reverso é de grande interesse, por dois motivos. Primeiro, como discutido anteriormente, enlace reverso é sujeito ao problema próximo-distante. Segundo, como no enlace direto todas as transmissões têm origem na mesma estação de base, é feito uso de códigos de espalhamento ortogonais de Walsh-Hadamard para gerar sinais síncronos com correlação cruzada zero. O enlace reverso não desfruta desse luxo. Por isso, correção de erro mais poderosa (taxa 1/3) é empregada no enlace reverso. Não obstante, assim como no enlace direto, a taxa bruta do vocoder QCELP é 9,6 kbit/s que, por fim, é espalhada a 1,2288 Mbit/s em uma largura de banda de 1,25 MHz.

Como já mencionado, o uso de espalhamento espectral em comunicações móveis requer o tratamento do problema próximo-distante. Para combater esse problema, IS-95 usa controle de potência. No enlace direto, há um subcanal para fins de controle de potência. A cada 1,25 ms, a estação de base recebe estimativas da intensidade de sinal da unidade móvel. Se a mesma for muito alta, a base transmite um **1** no subcanal; se for muito baixa, a base transmite um **0**. Dessa forma, a estação móvel ajusta sua potência com base no sinal de controle de 800 bit/s para reduzir a interferência a outros usuários.

No novo milênio, provedores de serviços sem fio estão mudando seus sistemas celulares 2G para a próxima geração (3G) de sistemas sem fio, capazes de suportar transmissão de dados e conexões de internet de alta taxa. Por esse motivo, o padrão International Mobile Telecommunications-2000 (IMT-2000) [Padrão Internacional de Telecomunicações Móveis 2000] é o padrão global para comunicações sem fio de terceira geração. O padrão IMT-2000 provê uma estrutura para o acesso sem fio a sistemas de acesso fixos e móveis sem fio. O objetivo é prover cobertura celular sem fio de até 144 kbit/s para unidades móveis de alta velocidade, 384 kbit/s para pedestres e 2.048 Mbit/s para usuários em domicílio. Entre os padrões 3G há três importantes tecnologias sem fio baseadas em DS-SS CDMA: as duas versões competitivas de CDMA de banda larga, provenientes de 3rd Generation Partnership Project (3GPP) [Projeto de Parceria para a 3ª Geração] e 3rd Generation Partnership Project 2 (3GPP2), e TD-SCDMA, de 3GPP para a China.

Como os sistemas celulares 3G continuam a usar a banda celular existente, uma alta taxa de dados para um usuário significa uma redução de serviços para outros usuários CDMA ativos na mesma célula. Caso contrário, dada a limitada largura de banda, seria impossível servir ao mesmo número de usuários ativos como em **cdmaOne** e suportar taxa de dados de até 2,048 Mbit/s. Assim, a taxa de dados de e para a unidade móvel deve variar segundo a intensidade do tráfego de dados em uma célula. Como a maioria dos padrões de tráfego (incluindo o uso de internet) tende a ser em rajadas, a taxa de dados variável oferecida por sistemas celulares 3G é adequada para estas aplicações.

Ao contrário do FDMA e TDMA, o CDMA provê um ambiente perfeito para taxa de dados variável e requer modificações muito simples. Enquanto, para suportar uma taxa variável, o FDMA e o TDMA requereriam o agrupamento dinâmico de múltiplas bandas de frequências ou janelas temporais, o CDMA precisa mudar apenas o ganho de espalhamento. Em outras palavras, a taxas de dados mais elevadas, um transmissor CDMA pode usar um menor fator de espalhamento. Nesse modo, sua MAI a outros usuários é alta e poucos usuários podem ser acomodados. A taxas mais baixas, o transmissor usa maior fator de espalhamento, permitindo que um número maior de usuários transmitam.

No padrão CDMA2000 do 3GPP2, há dois modos de transmissão de rádio: 1xRTT, que utiliza uma banda de 1,25 MHz, e 3xRTT, que agrupa três bandas de 1,25 MHz. No enlace direto de 1xRTT, a máxima taxa de dados é 307,2 kbit/s, com ganho de espalhamento de 4. Assim, a taxa de chip ainda é 1,2288 Mchip/s. Uma versão mais recente do 3GPP2 é denominada CDMA2000 1xEV-DO revisão A, em que EV-DO significa “*evolution data-optimized*” (otimizado para dados de evolução). Esse sistema pode suportar taxa de dados de pico de 3,1 Mbit/s no enlace direto, com largura de banda de 1,25 MHz. Isto é alcançado com codificação adaptativa e modulações adaptativas, incluindo QPSK, PSK-8 e QAM-16. À taxa de pico, o ganho de espalhamento é 1 (ou seja, nenhum espalhamento).

Ao mesmo tempo, o sistema WCDMA de 3GPP aplica ideias similares. Ao contrário de CDMA 2000, WCDMA tem largura de banda padronizada de 5 MHz. Quando espalhamento é usado, a taxa de chip é de 4,096 Mchip/s. No enlace descendente, o fator de espalhamento WCDMA de 3GPP varia de 512 a 4. Com modulação QPSK, isso provê uma taxa de dados que varia entre 16 kbit/s e 2,048 Mchip/s. Como no caso do CDMA2000, o WCDMA do 3GPP também tem um equivalente a EV-DO conhecido como *high-speed packet access* (HSPA) [acesso por pacote de alta velocidade]. No enlace descendente, a recente versão HPSA (Versão 6) alcança a taxa de pico de 14,4 Mbit/s. Contudo, implementações existentes podem suportar uma taxa de pico de apenas 7,2 Mbit/s. Não obstante, a maioria dos usuários de dados ficaria satisfeita com essa alta taxa, excetuando, talvez, os telespectadores de TV de alta definição.

Controle de Potência *versus* MUD

Vale notar que, apesar do intenso interesse de pesquisa acadêmica em receptores CDMA de múltiplos usuários (nas décadas de 1980 e 1990), todos os sistemas celulares CDMA descritos aqui se baseiam no controle de potência para combater o problema próximo-distante. A razão para isso está no fato de que o controle de potência é de implementação bastante simples e se mostrou muito eficaz. Receptores MUD, por sua vez, requerem maior complexidade computacional. Para serem eficazes, receptores MUD exigem, ainda, demasiada informação sobre o canal e sinais associados a todos os usuários ativos. Além disso, receptores MUD sozinhos não são capazes de superar completamente a disparidade de desempenho em um ambiente próximo-distante.

11.8.2 CDMA no Sistema de Posicionamento Global (GPS)

O que É GPS?

O sistema de posicionamento global (GPS – *global positioning system*) é o único sistema global de navegação por satélite totalmente funcional. Utilizando uma constelação de, pelo menos, 24 satélites em órbita média em torno da Terra para transmitir precisos sinais de RF, o sistema permite que um receptor GPS determine suas próprias localização, velocidade e direção de deslocamento.

Um receptor GPS calcula sua posição com base nas distâncias a três ou mais satélites da constelação. A medida do atraso temporal entre a transmissão e a recepção de cada sinal de micro-onda de GPS fornece a distância a cada satélite, pois o sinal viaja a uma velocidade conhecida. O sinal também transporta informação sobre a localização do satélite. Ao determinar a posição de, pelo menos, três satélites, assim como a distância a cada um deles, o receptor pode calcular sua própria posição por meio de triangulação. Em geral, os receptores não têm relógios perfeitamente precisos e, portanto, rastreiam um ou mais satélites adicionais para corrigir o erro dos próprios relógios.

Cada satélite GPS difunde continuamente sua mensagem (de navegação) via BPSK, a uma taxa de 50 bit/s. Essa mensagem é transmitida por meio de dois códigos de espalhamento CDMA: um para o modo grosso de aquisição (C/A – coarse/acquisition) e um para o modo preciso (P – precise) (criptografado para uso militar). O código de espalhamento C/A é uma sequência PN com período de 1.023 chips enviados a 1.023 Mchip/s. O ganho de espalhamento é $L = 20.460$. A maioria dos usuários comerciais acessam somente o modo C/A.*

Originalmente desenvolvido para uso militar, o GPS encontrou muitas aplicações na vida civil, como em navegações marinha, aérea e terrestre, assim como em estudos geográficos e de agrimensura. O GPS permite que uma pessoa determine o tempo e sua posição (latitude, longitude e altitude) em qualquer lugar na terra, com precisão de polegadas. A pessoa também pode determinar a velocidade com que se move. Receptores GPS se tornaram pequenos e de baixo custo, podendo ser transportados por qualquer pessoa em carros ou barcos. Receptores GPS portáteis são abundantes e foram incorporados em unidade de telefonia móvel.

Como GPS Funciona?

Um receptor GPS mede sua distância a um grupo de satélites no espaço, que atuam como pontos precisos de referência. Como o sistema GPS consiste em 24 satélites, sempre haverá mais que quatro corpos orbitais visíveis de qualquer lugar na Terra. Os 24 satélites são localizados em seis planos orbitais, a uma altitude de 22.200 km. Cada satélite completa uma órbita em volta da terra a cada 12 horas. Os satélites são continuamente monitorados pelo Departamento de Defesa dos EUA, que conhece suas posições e velocidades exatas a cada instante de tempo. Essa informação é transmitida de volta aos satélites. Todos os satélites dispõem de relógios atômicos de alta precisão e são sincronizados para gerar o mesmo código PN ao mesmo tempo. Os satélites transmitem esse código PN continuamente, acompanhado de informação sobre suas localizações e a hora. Um receptor GPS na terra também gera o mesmo código PN, embora não em sincronismo com o dos satélites, devido à necessidade de receptores de baixo custo. Portanto, o código PN gerado pelo receptor estará deslocado temporalmente de α segundos (polarização temporal) em relação ao código PN dos satélites.

Consideremos, inicialmente, uma polarização temporal $\alpha = 0$. Ao medir o atraso temporal entre seu próprio código PN e o recebido de um satélite, o receptor pode calcular a distância d até o satélite. Essa informação posiciona o receptor em qualquer ponto na superfície de uma esfera de raio d , centrada na posição do satélite (que é conhecida), como mostrado na Fig. 11.20a. Medidas simultâneas de distâncias em relação a três satélites posicionam o receptor nas superfícies de três esferas, cada uma centrada na posição conhecida de um dos satélites. A interseção de duas esferas é um círculo (Fig. 11.20b), e a interseção desse círculo com a terceira esfera resulta em dois pontos, como mostrado na Fig. 11.20c. Um desses pontos é a posição correta do receptor. Mas qual deles? Afortunadamente, um dos dois pontos corresponde a uma resposta ridícula. O ponto incorreto pode não estar na superfície da Terra ou pode indicar uma velocidade impossivelmente alta para o receptor. O computador em um receptor GPS tem várias técnicas para distinguir o ponto correto do incorreto.

Na prática, a polarização temporal α não é zero. Para resolver esse problema, precisamos de uma medida de distância a um quarto satélite. Um usuário determina sua posição por meio da recepção do sinal de quatro dos 24 satélites possíveis, como ilustrado na Fig. 11.20d. Há quatro incógnitas, as coordenadas do usuário no espaço tridimensional e a polarização temporal no receptor do usuário. Essas quatro incógnitas podem ser calculadas com o uso de quatro equações de distância aos quatro satélites.

Como sinais DSSS consistem em uma sequência de pulsos extremamente curtos, é possível medir seus tempos de chegada com precisão. O sistema GPS permite precisão de 10 metros em qualquer ponto na Terra. O uso de **GPS diferencial** permite precisão da ordem de centímetros. Nesse caso, usamos uma posição terrestre cuja localização seja conhecida com exatidão. Comparação entre as coordenadas dessa posição com as lidas por um receptor GPS (na mesma posição) fornece o erro (polarização) do sistema GPS, que pode ser usado para corrigir os erros de medida GPS de outras posições. Isso tem por base o fato de que as órbitas dos satélites são tão altas que qualquer erro medido por um receptor será praticamente igual ao de qualquer outro receptor no mesmo local. O GPS diferencial é usado atualmente em aplicações como agrimensura, posicionamento de oleodutos, sistema de aviação, sistemas de navegação marinha e na preparação de mapas precisos para fins diversos, desde a localização de cabeamento elétrico subterrâneo à posição de torres de transmissão de energia.

Por que Espalhamento Espectral no GPS?

O uso de espalhamento espectral no sistema GPS tem três justificativas. Primeira, os sinais dos satélites ficam preservados do uso não autorizado. Segunda, e mais importante do ponto de vista prático, o inerente ganho de processamento de espalhamento espectral permite que níveis razoáveis de potências sejam empregados. Como o custo de um satélite é proporcional a seu peso, é desejável que a potência seja reduzida o máximo possível. Além disso, como cada satélite deve ver um hemisfério completo, as antenas devem ser de baixo ganho. Para maior precisão, pulsos curtos se fazem necessários para aumentar a resolução. Isso resulta em alta ocupação espectral e em um nível de sinal recebido vários decibéis abaixo do piso de ruído. Como a informação de distância deve ser calculada apenas cerca de uma vez a cada segundo, a largura de banda pode ser de apenas 100 Hz. Isso é naturalmente adequado à tecnologia de espalhamento espectral. O desespelhamento do sinal no receptor produz um significativo ganho de processamento, permitindo boa recepção com níveis de potência razoáveis. A terceira razão para uso de espalhamento espectral é que os satélites podem usar uma mesma banda de frequências, sem interferências mútuas, devido à quase ortogonalidade com o sinal de cada usuário.

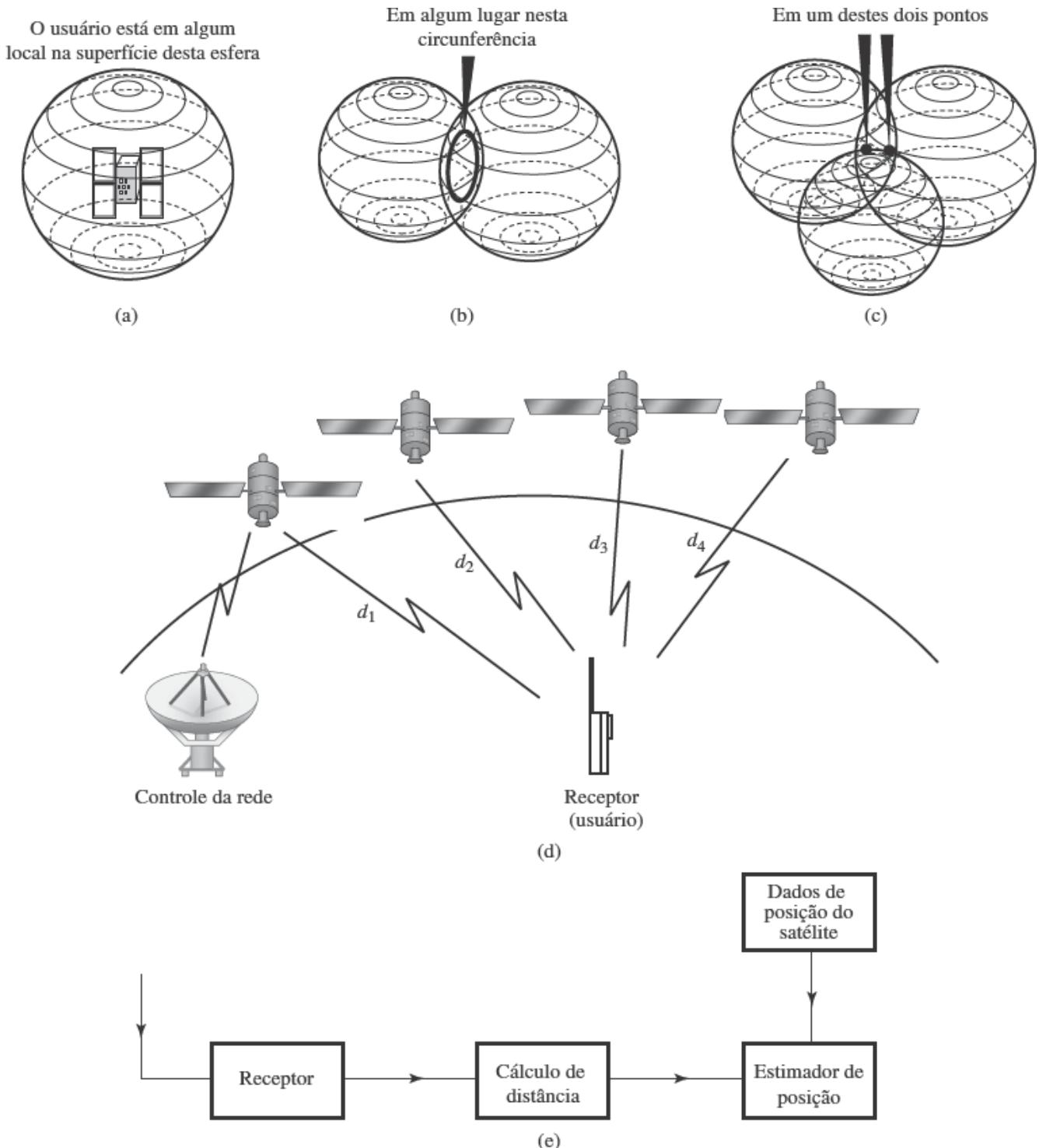


Figura 11.20 (a) Localização do receptor a partir de medida de um satélite. (b) Localização reduzida por medidas de dois satélites. (c) Localização reduzida por medidas de três satélites. (d) Sistema prático de posicionamento global baseado em quatro satélites. (e) Diagrama em blocos de um receptor GPS.

Cada satélite completa uma órbita em 12 horas e emite duas sequências PN moduladas em quadratura de fase, em duas frequências. As duas frequências são necessárias para corrigir o atraso introduzido pela ionosfera.

11.8.3 Padrão IEEE 802.11b para LAN Sem Fio

O IEEE 802.11b é um padrão comercial desenvolvido para rede de área local sem fio (WLAN – *wireless local area network*), para prover conexão sem fio de alta velocidade a (tipicamente) computadores *notebooks*.

Como seu antecessor IEEE 802.11, o padrão IEEE 802.11b opera na banda ISM de 2,4 a 2,4835 GHz, que dispensa licenciamento. Como em redes celulares, cada *notebook* em uma pequena área de cobertura forma um enlace de comunicação 1-para-1 com um “ponto de acesso”. Em geral, o ponto de acesso está conectado à internet por uma conexão de alta velocidade que pode transportar o tráfego de e para os computadores. Assim, o ponto de acesso funciona como uma ponte entre os computadores e a internet.

A banda ISM é povoada por sinais de numerosos dispositivos sem fio não licenciados, como fornos de micro-ondas, monitores eletrônicos de bebês, telefones sem fio e controladores sem fio. Portanto, a transmissão de dados em uma WLAN requer resistência à interferência proveniente desses dispositivos. O espalhamento espectral é uma tecnologia muito eficaz para comunicação nesse tipo de ambiente.

A simples modulação FSK utilizada no padrão IEEE 802.11 provê taxa de dados de até 2 Mbit/s e é de fácil implementação. Não obstante, a taxa de dados no enlace é muito baixa. Por ser um dispositivo poderoso e capaz de suprir níveis moderados de potência e computação, um *notebook* é capaz de suportar modulação mais complexa e mais rápida. IEEE 802.11 elimina a opção de FHSS e adota a transmissão DSSS. O padrão eleva a taxa de transmissão até 11 Mbit/s, que é razoavelmente satisfatória para a maioria das conexões de computadores.

Internacionalmente, 14 canais DSSS são definidos na banda ISM, embora nem todos sejam disponíveis em todos os países. Na América do Norte, há 11 canais (que se sobrepõem) com largura de banda de 22 MHz. O espaçamento entre canais é de 5 MHz. A Tabela 11.2 lista os canais DSSS.

A taxa de chip no padrão IEEE 802.11b é de 11 MHz, e a largura de banda de transmissão de espalhamento espectral é de, aproximadamente, 25 MHz. A taxa de dados de 802.11b pode ser de 1, 2, 5,5 e 11 Mbit/s. Para as taxas de 1 e 2 Mbit/s, são usadas as modulações BPSK e QPSK diferencial, respectivamente. Para as taxas de dados de 5,5 e 11 Mbit/s, foi desenvolvido um mais sofisticado chaveamento de código de complementar (CCK – *complementary code keying*). A taxa de dados no enlace é estabelecida com base nas condições de qualidade do canal. Os diferentes ganhos de espalhamento para o sinal DSSS modulado de 802.11b são listados na Tabela 11.3.

Tabela 11.2

Alocação de canais no padrão IEEE 802.11b na banda ISM de 2,4 GHz

Canal	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Central f_c , GHz	2,412	2,417	2,422	2,427	2,432	2,437	2,442	2,447	2,452	2,457	2,462

Tabela 11.3

Formato de modulação e fator de espalhamento na transmissão IEEE 802.11b

Taxa de chip	11 MHz			
Taxa de dados	1 Mbit/s	2 Mbit/s	5,5 Mbit/s	11 Mbit/s
Modulação	BPSK Diferencial	QPSK Diferencial	CCK	CCK
Ganho de espalhamento	11	11	2	1



Figura 11.21 LAN sem fio com um ponto de acesso e quatro nós de computadores.

Reparemos que cada ponto de acesso pode servir a vários enlaces. Além disso, pode haver mais de um ponto de acesso em uma dada área. Para evitar sobreposição espectral, enlaces de redes distintas devem ser separados por um mínimo de cinco canais. Por exemplo, os canais 1, 6 e 11 podem coexistir sem interferência mútua. É comum que uma área seja muito congestionada por cobertura de múltiplas redes. Assim, a sobreposição espectral se torna inevitável. Quando redes distintas utilizam canais que se sobreponham espectralmente, colisões de sinais podem ocorrer. Colisões de dados não são resolvidas por transmissões e receptores de rádio (camada física). Protocolos de redes são desenvolvidos para forçar que todas as redes e

usuários em competição aguardem um certo intervalo de tempo antes que transmitam um pacote finito de dados (*back off*). No padrão IEEE 802.11, esse intervalo de tempo é especificado como um valor aleatório, com base em uma distribuição uniforme que depende das características do tráfego. Esse protocolo de *back off* para resolver colisões de dados em uma WLAN é conhecido como função de coordenação distribuída (DCF – *distributed coordinator function*).

Para permitir que múltiplos enlaces compartilhem o mesmo canal, a DCF força que cada um deixe o canal vazio por um período aleatório de tempo. Isso significa que a máxima taxa de dados de 11 Mbit/s não pode ser alcançada por qualquer dos usuários em competição. Como mostrado na Fig. 11.21, os dois computadores que usam o canal 11 para conexão com o ponto de acesso devem recorrer à DCF para reduzir seus tempos de acesso e reduzir suas efetivas taxas de dados. Nesse caso, uma perfeita coordenação permitiria alocar 11 Mbit/s igualmente entre os dois usuários. É impossível obter essa situação ideal com o protocolo distribuído DCF. Com esse protocolo, a máxima vazão de cada usuário seria muito abaixo dos 5,5 Mbit/s.

O padrão IEEE 802.11b é, sem dúvida, um dos mais bem sucedidos padrões para comunicação sem fio e responsável pela abertura comercial do mercado de WLAN. Todavia, para melhorar a eficiência espectral e aumentar a possível taxa de dados, um novo esquema de modulação, conhecido como multiplexação por divisão em frequências ortogonais (OFDM – *orthogonal frequency division multiplexing*), foi incorporado aos padrões seguintes IEEE 802.11a e IEEE 802.11g.* Os princípios e análise de OFDM serão discutidos no Capítulo 12.

11.9 EXERCÍCIOS COM O MATLAB

Nesta seção de exercícios computacionais, apresentamos algumas oportunidades para que os leitores exercitem a implementação e comportamento de comunicações por espalhamento espectral. Consideraremos os casos de espalhamento espectral por saltos em frequências (FHSS), espalhamento espectral por sequência direta (DSSS) ou CDMA, e sistemas CDMA de múltiplos usuários. Testaremos o efeito de interferência de banda estreita em comunicações por espalhamento espectral e o efeito próximo-distante em sistemas CDMA de múltiplos usuários.

EXERCÍCIO COMPUTACIONAL 11.1: COMUNICAÇÃO FSK FHSS SUJEITA A INTERFERÊNCIA DE BANDA ESTREITA

O primeiro programa MATLAB, Ex11_1.m, implementa um sistema de comunicação FSHH que utiliza FSK e receptores não coerentes. Com um valor de entrada 1 (com interferência) e 0 (sem interferência), podemos ilustrar o efeito de FHSS contra sinais interferentes de banda estreita.

Tabela 11.4

Parâmetros usados no Exercício Computacional 11.1

Número de usuários	$m = 1$
Fator de espalhamento (número de bandas FSK)	$L = 8$
Número de saltos por símbolo por bit	$L_h = 1$
Modulação	BFSK
Detecção	Não coerente
Interferência em banda parcial	Banda FSK fixa

No programa Ex11_1.m, os parâmetros do sistema FHSS são dados na Tabela 11.4. Quando interferência em banda parcial está ligada, um canal FSK selecionado aleatoriamente é bloqueado por interferência. Sob ruído de canal gaussiano branco, o efeito de interferência em banda parcial no usuário FHSS é mostrado na Fig. 11.22. Podemos ver claramente que, sem interferência, o desempenho de FHSS coincide com o de FSK, como analisado na Seção 11.1 e no Capítulo 10. Sob interferência parcial, a BER do sistema FHSS tem um piso $1/(2L)$, como mostrado na Eq. (11.4). À medida que L aumenta de 4 para 8 e 16, o desempenho melhora.

```
% MATLAB PROGRAM <Ex11_1.m>
% Este programa efetua a simulação de sinalização FHSS com
% detecção não coerente de FSK.
% O sinal interferente bloqueará 1 das L bandas de frequências e
```

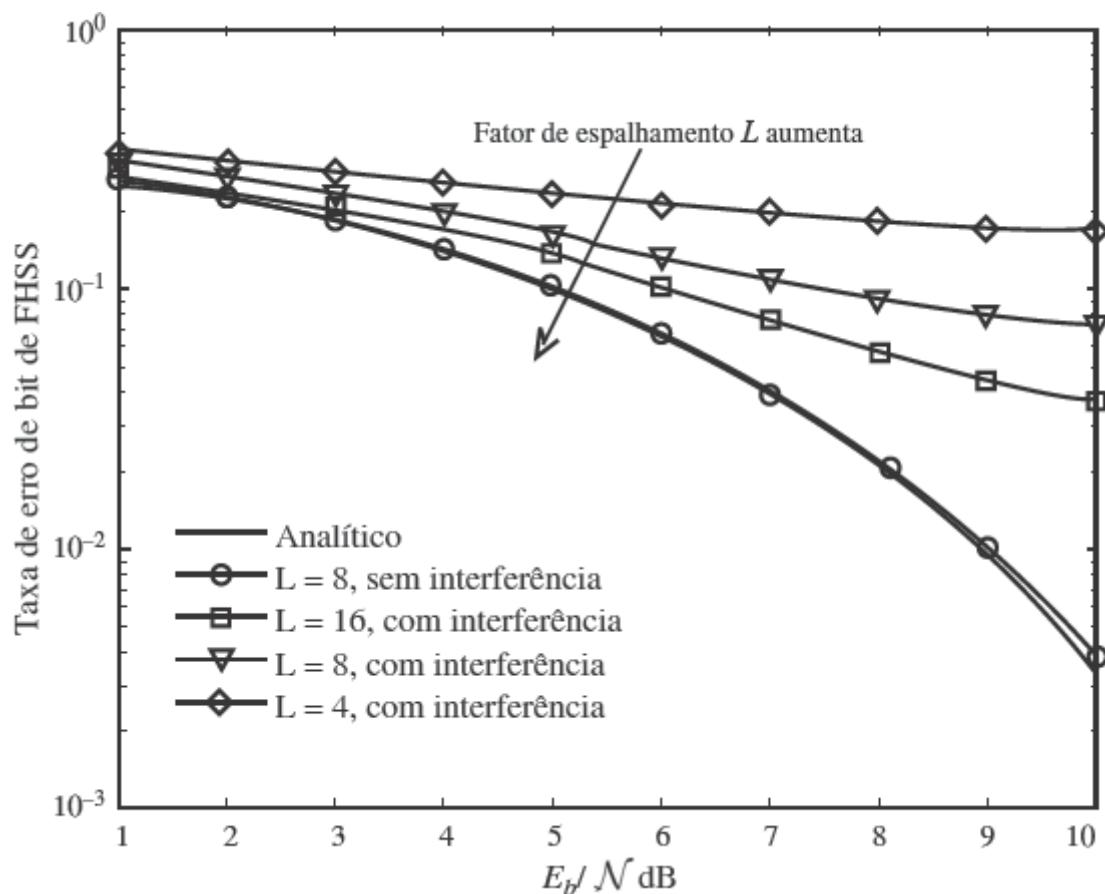


Figura 11.22 Desempenho de detecção não coerente de FHSS sob interferência em banda parcial.

```

% pode ser ligado ou desligado fornecendo o valor de entrada jamming=1 ou 0
% Detecção MFSK não coerente
% requer apenas a comparação das magnitudes dos bin de frequência
%
clear;clf
n=10000;      %Número de símbolos de dados na simulação
L=8;           % Número de bandas de frequências
Lh=1;          % Número de saltos por símbolo (bit)
m=1;           % Número de usuários
% Geração dos bits de informação
s_data=round(rand(n,m));
% Liga ou desliga a interferência parcial
jamming=input('interferência=? (Entre 1 para Sim, 0 para Não)');
% Geração de fases aleatórias nas duas frequências
xbase1=[exp(j*2*pi*rand(Lh*n,1))];
xbase0=[exp(j*2*pi*rand(Lh*n,1))];
% Modulação de duas frequências ortogonais
xmodsig=[kron(s_data,ones(Lh,1)).*xbase1 kron((1-s_data),ones(Lh,1)).*xbase0];
clear xbase0 xbase1;
% Geração de uma sequência aleatória de saltos de comprimento nLh
Phop=round(rand(Lh*n,1)*(L-1))+1;    % Padrão PN de saltos
Xsiga=sparse(1:Lh*n,Phop,xmodsig(:,1));
Xsigb=sparse(1:Lh*n,Phop,xmodsig(:,2));
% Geração de sequências de ruído para os dois canais de frequência
noisel=randn(Lh*n,1)+j*randn(Lh*n,1);
noise2=randn(Lh*n,1)+j*randn(Lh*n,1);
Nsiga=sparse(1:Lh*n,Phop,noisel);
Nsigb=sparse(1:Lh*n,Phop,noise2);
clear noisel noise2 xmodsig;
BER=[];
BER_az=[];
% Adiciona um canal a sofrer interferência (escolha aleatória)
if (jamming)
nch=round(rand*(L-1))+1;
Xsiga(:,nch)=Xsiga(:,nch)*0;
Xsigb(:,nch)=Xsigb(:,nch)*0;
Nsiga(:,nch)=Nsiga(:,nch)*0;
Nsigb(:,nch)=Nsigb(:,nch)*0;
end
% Geração do ruído de canal (AWGN)
for i=1:10,
    Eb2N(i)=i;                      % (Eb/N em dB)
    Eb2N_num=10^(Eb2N(i)/10);       % Eb/N numérico
    Var_n=1/(2*Eb2N_num);          % 1/SNR é a variância de ruído
    signois=sqrt(Var_n);            % desvio-padrão
    ych1=Xsiga+signois*Nsiga;      % Canais completos AWGN
    ych2=Xsigb+signois*Nsigb;      % Canais AWGN
    % Non-coherent detection
    for kk=0:n-1,
        Yvec1=[];Yvec2=[];
        for kk2=1:Lh,
            Yvec1=[Yvec1 ych1(kk*Lh+kk2,Phop(kk*Lh+kk2))];

```

```

Yvec2=[Yvec2 ych2(kk*Lh+kk2,Phop(kk*Lh+kk2))];
end
ydim1=Yvec1*Yvec1';
ydim2=Yvec2*Yvec2';
dec(kk+1)=(ydim1>ydim2);
end
clear ych1 ych2;
% Cálculo da BER das simulações
BER=[BER; sum(dec'~=_data)/n];
% Compara com a BER analítica
BER_az=[BER_az; 0.5*exp(-Eb2N_num/2)];
end
figber=semilogy(Eb2N,BER_az,'k-',Eb2N,BER,'k-o');
set(figber,'LineWidth',2);
legend('BER analítica', 'Simulação FHSS');
fx=xlabel('E_b/N (dB)');
fy=ylabel('Taxa de erro de bit');
set(fx,'FontSize',11); set(fy,'FontSize',11);

```

EXERCÍCIO COMPUTACIONAL 11.2: TRANSMISSÃO DSSS DE QPSK

Neste exercício, analisamos o desempenho de um sistema DSSS em banda-base sujeito à interferência de banda estreita. Para espalhar esse caso, usamos o código de Barker de comprimento 11

```
pcode = [1 1 1 -1 -1 -1 1 1 -1 1 1 -1]
```

devido às suas interessantes propriedades de espalhamento de espectro. Admitimos que os ruídos de canal sejam gaussianos brancos aditivos. O programa MATLAB Ex11_2b.m fornece os resultados de um usuário DSSS com modulação QPSK sujeito à interferência de banda estreita.

```

% MATLAB PROGRAM <Ex11_2b.m>
% Este programa efetua a simulação de sinalização DS-CDMA com
% detecção QAM coerente.
% Para ilustrar o efeito de espalhamento de CDMA, um usuário é espalhado por
% sequências PN de diferentes comprimentos. Interferência é adicionada como um sinal de banda estreita;
% Variação do ganho de espalhamento Lc;
clear;clf
Ldata=20000; % comprimento de dados na simulação; deve ser divisível por 8
Lc=11; % fator de espalhamento versus taxa de dados
% também pode usar mais curto Lc=7
% Gera símbolos de modulação QPSK
data_sym=2*round(rand(Ldata,1))-1+j*(2*round(rand(Ldata,1))-1);
jam_data=2*round(rand(Ldata,1))-1+j*(2*round(rand(Ldata,1))-1);
% Geração do código de espalhamento
pcode=[1 1 1 -1 -1 -1 1 -1 -1 1 -1]';
% Espalha agora
x_in=kron(data_sym,pcode);
% Potência de sinal da entrada do canal é 2*Lc
% Potência interferente é relativa
SIR=10; % SIR em dB
Pj=2*Lc/(10^(SIR/10));

```

```

% Geração do ruído (AWGN)
noiseq=randn(Ldata*Lc,1)+j*randn(Ldata*Lc,1); % Potência é 2
% Adiciona senoide interferente; frequência de amostragem é fc = Lc
jam_mod=kron(jam_data,ones(Lc,1)); clear jam_data;
jammer= sqrt(Pj/2)*jam_mod.*exp(j*2*pi*0.12*(1:Ldata*Lc)).'; %fj/
fc=0.12.
clear jam_mod;
[P,x]=pwelch(x_in,[],[],[4096],Lc,'twoside');
figure(1);
semilogy(x-Lc/2,fftshift(P));
axis([-Lc/2 Lc/2 1.e-2 1.e2]);
grid;
xfont=xlabel('frequência (em unidades de 1/T_s)');
yfont=ylabel('PSD do sinal CDMA');
set(xfont,'FontSize',11);set(yfont,'FontSize',11);
[P,x]=pwelch(jammer+x_in,[],[],[4096],Lc,'twoside');
figure(2);semilogy(x-Lc/2,fftshift(P));
grid;
axis([-Lc/2 Lc/2 1.e-2 1.e2]);
xfont=xlabel('frequência (em unidades de 1/T_s)');
yfont=ylabel('PSD do sinal CDMA + interferência de banda estreita');
set(xfont,'FontSize',11);set(yfont,'FontSize',11);

BER=[];
BER_az=[];

for i=1:10,
    Eb2N(i)=(i-1); % (Eb/N em dB)
    Eb2N_num=10^(Eb2N(i)/10); % Eb/N numérico
    Var_n=Lc/(2*Eb2N_num); % 1/SNR é a variância do ruído
    signois=sqrt(Var_n); % desvio-padrão
    awgnois=signois*noiseq; % AWGN
    % Adiciona ruído aos sinais na saída do canal
    y_out=x_int+awgnois+jammer;
    Y_out=reshape(y_out,Lc,Ldata).'; clear y_out awgnois;

    % Desespalarhar primeiro
    z_out=Y_out*pcode;

    % Decisão com base no sinal das amostras
    dec1=sign(real(z_out))+j*sign(imag(z_out));
    % Compara com os dados originais para calcular a BER
    BER=[BER;sum([real(data_sym) ~= real(dec1);...
        imag(data_sym) ~= imag(dec1)])/(2*Ldata)];
    BER_az=[BER_az;0.5*erfc(sqrt(Eb2N_num))]; %analítico
end
figure(3)
figber=semilogy(Eb2N,BER_az,'k- ',Eb2N,BER,'k-o');
legend('Sem interferência','Interferência de banda estreita (-10 dB)');
set(figber,'LineWidth',2);
xfont=xlabel('E_b/N (dB)');
yfont=ylabel('Taxa de erro de bit');
title('DSSS (CDMA) com ganho de espalhamento = 11');

```

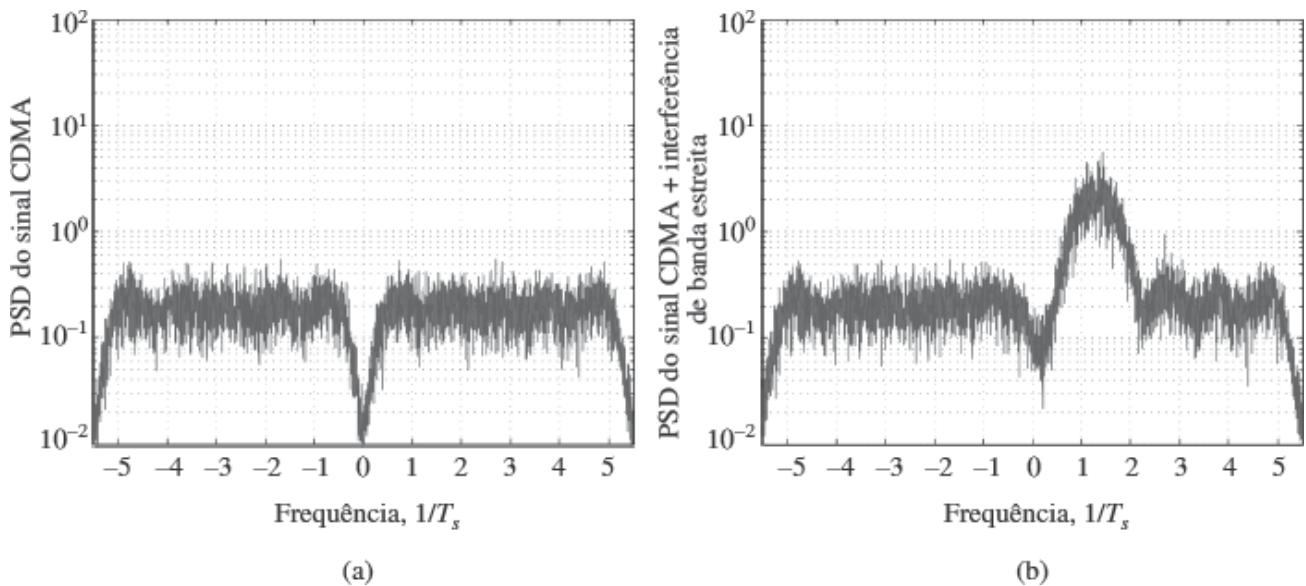


Figura 11.23 Densidades espectrais de potência de sinal DSSS com espalhamento por código de Barker de comprimento 11. (a) sem interferência de banda estreita; (b) com interferência de banda estreita, com SIR = 10 dB.

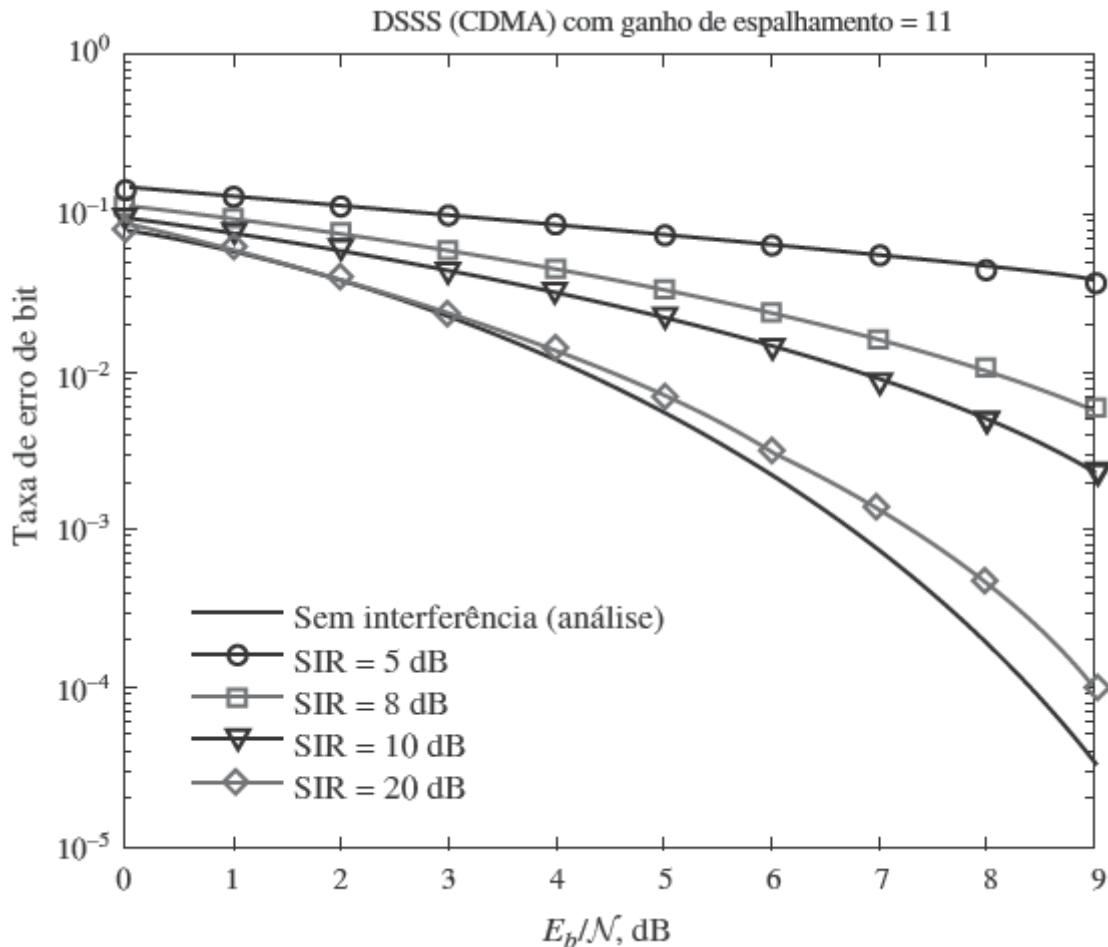


Figura 11.24 Probabilidades de erro de bit de DSSS com modulação QPSK sujeita a interferência de banda estreita.

Como, nesse caso, o fator de espalhamento é $L = 11$, o sinal DSSS ocupa uma largura de banda aproximadamente 11 vezes maior. Da portadora do sinal do usuário, adicionamos um sinal QPSK interferente de banda estreita, com deslocamento de frequência portadora de $1,32/T$. A relação sinal-interferência (SIR) pode ser ajustada. Na Fig. 11.23, podemos testemunhar as densidades espectrais de potência antes e depois da adição do sinal interferente com SIR = 10 dB. O desespalhamento no receptor permite a determinação da BER resultante do sinal QPSK sujeito a diferentes níveis de interferência (Fig. 11.24). À medida que o sinal interferente se torna mais forte, precisamos aplicar maiores fatores de espalhamento para mitigar o efeito de degradação da BER.

EXERCÍCIO COMPUTACIONAL 11.3: SISTEMA CDMA-DS MULTIUSUÁRIO

Para implementar sistemas CDMA-DS, devemos selecionar múltiplos códigos de espalhamento com boas propriedades de correlação cruzada e autocorrelação. Sequências Gold são uma classe bem conhecida de bons códigos de espalhamento. Notemos que sequências Gold não são mutuamente ortogonais: têm correlações cruzadas não zero, mas pequenas, que podem degradar o desempenho da detecção de múltiplos usuários. Selecionamos quatro sequências Gold para espalhar quatro usuários QPSK de iguais potências de transmissão. O efeito próximo-distante é considerado nesse exemplo.

O primeiro programa MATLAB, gold31code.m, aloca sequências Gold de comprimento 31 aos quatro sinais de usuário modulados em QPSK.

```
% MATLAB PROGRAM <gold31code.m>
% geração de uma tabela de 4 sequências Gold
% de comprimento 31.
GPN=[1      1      1      -1
      -1     1     -1      1
      -1    -1      1      1
      1      1     -1     -1
      -1    -1     -1     -1
      1      1      1      1
      1      1     -1     -1
      -1    -1     -1      1
      -1      1     -1     -1
      1     -1     -1      1
      -1    -1      1      1
      1      1     -1      1
      1     -1     -1     -1
      -1      1      1      1
      1     -1      1      1
      -1      1      1     -1
      -1    -1      1     -1
      -1      1      1     -1
      1      1      1     -1
      1     -1      1      1
      1     -1      1     -1
      1      1     -1     -1
      1      1      1      1
      1      1     -1     -1
      -1    -1     -1     -1
      1      1     -1      1
      1     -1     -1     -1
      -1      1     -1      1
      1      1     -1     -1
      1      1      1      1
      1      1     -1     -1
      1      1      1      1
      1      1      1      1];
```

O programa MATLAB principal, Ex11-3.m, completa o espalhamento dos quatro sinais de usuário. Os quatro sinais espalhados CDMA são somados no receptor antes da detecção. Cada um dos quatro usuários aplica o desespalhador convencional (filtro casado) ao receptor antes de efetuar a decisão símbolo a símbolo. Na Fig. 11.25, apresentamos a BER

resultante para os quatro usuários sob ruído gaussiano branco aditivo. Apresentamos, como referência, a BER de apenas um usuário em canal AWGN. Os quatro usuários têm a mesma BER. A pequena degradação da BER no caso multiusuário, em comparação com o caso de apenas um usuário, é causada pelos códigos não ortogonais de espalhamento.

```
% MATLAB PROGRAM <Ex11_3.m>
% Este programa efetua a simulação de sinalização CDMA-DS de múltiplos usuários com
% QPSK coerente para 4 usuários
```

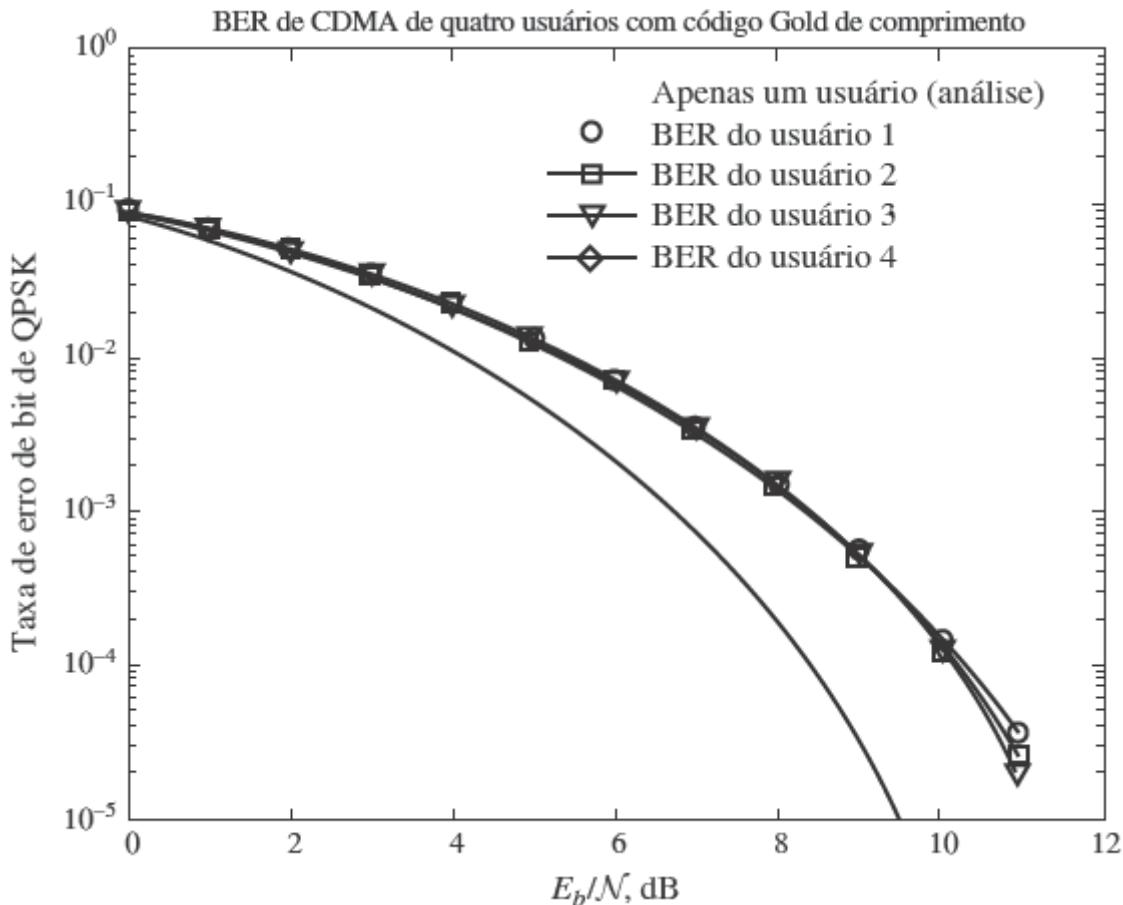


Figura 11.25 Desempenho de detecção convencional de um usuário CDMA-DS sem efeito próximo-distante.

```

%
%clear;clf
Ldata=10000; % comprimento de dados na simulação; Deve ser divisível por 8
Lc=31;         % fator de espalhamento versus taxa de dados
%Número de usuários = 4;
% Geração de símbolos de modulação QPSK
data_sym=2*round(rand(Ldata,4))-1+j*(2*round(rand(Ldata,4))-1);

% Seleciona 4 códigos de espalhamento (Códigos Gold de comprimento 11)
gold31code;
pcode=GPN;
% Códigos de espalhamento estão na matriz pcode de 31x4
PowerMat=diag(sqrt([1 1 1 1]));
pcodew=pcode*PowerMat;
% Espalha agora
x_in=kron(data_sym(:,1),pcodew(:,1))+kron(data_sym(:,2),pcodew(:,2))+...
kron(data_sym(:,3),pcodew(:,3))+kron(data_sym(:,4),pcodew(:,4));

% Potência de sinal da entrada do canal é 2*Lc

% Geração de ruído (AWGN)
noiseq=randn(Ldata*Lc,1)+j*randn(Ldata*Lc,1); % Potência é 2

BER1=[];
BER2=[];
BER3=[];
BER4=[];
BER_az [];

for i=1:12,
    Eb2N(i)=(i-1);                                % (Eb/N em dB)

```

```

Var_n=Lc/(2*Eb2N_num); %1/SNR é a variância do ruído
signois=sqrt(Var_n); % desvio-padrão
awgnois=signois*noiseq; % AWGN
% Adiciona ruído aos sinais na saída do canal
y_out=x_in+awgnois;
Y_out=reshape(y_out,Lc,Ldata).'; clear y_out awgnois;

% Desespalarhar primeiro
z_out=Y_out*pcode;

% Decisão baseada no sinal das amostras
dec=sign(real(z_out))+j*sign(imag(z_out));
% Comparar com dados originais para calcular BER
BER1=[BER1;sum([real(data_sym(:,1))~=real(dec(:,1));...
    imag(data_sym(:,1))~=imag(dec(:,1))])/(2*Ldata)];
BER2=[BER2;sum([real(data_sym(:,2))~=real(dec(:,2));...
    imag(data_sym(:,2))~=imag(dec(:,2))])/(2*Ldata)];
BER3=[BER3;sum([real(data_sym(:,3))~=real(dec(:,3));...
    imag(data_sym(:,3))~=imag(dec(:,3))])/(2*Ldata)];
BER4=[BER4;sum([real(data_sym(:,4))~=real(dec(:,4));...
    imag(data_sym(:,4))~=imag(dec(:,4))])/(2*Ldata)];
BER_az=[BER_az;0.5*erfc(sqrt(Eb2N_num))]; %analítico
end
BER=[BER1 BER2 BER3 BER4];
figure(1)
figber=semilogy(Eb2N,BER_az,'k-',Eb2N,BER1,'k-o',Eb2N,BER2,'k-s',...
    Eb2N,BER3,'k-v',Eb2N,BER4,'k-*');
legend('Apenas um usuário (análise)', 'BER do usuário 1', 'BER do usuário 2',...
    'BER do usuário 3', 'BER do usuário 4')
axis([0 12 0.99e-5 1.e0]);
set(figber,'LineWidth',2);
xlabel('E_b/N (dB)'); ylabel('Taxa de erro de bit de QPSK')
title('BER de CDMA de 4 usuários com código Gold de comprimento 31');

```

EXERCÍCIO COMPUTACIONAL 11.4: DETECÇÃO CDMA DE MULTIUSUÁRIO EM AMBIENTE PRÓXIMO-DISTANTE

Podemos, agora, modificar o programa no Exercício Computacional 11.3 para incluir o efeito próximo-distante. Entre os quatro usuários, os usuários 2 e 4 têm a mesma potência e são os mais fracos dos transmissores distantes. O usuário 1 tem 10 dB a mais de potência e o usuário 3, 7 dB a mais. Nesse ambiente próximo-distante, os usuários 2 e 4 sofrem o efeito de fortes sinais de interferência (usuários 1 e 3), devido à falta de ortogonalidade de códigos. Reparemos que os dois usuários fracos não têm o mesmo nível de interferência de multiusuário (MUI) dos outros usuários, devido à diferença de suas correlações.

O programa MATLAB Ex11_4a.m compara o desempenho do receptor convencional de um usuário com o do detector descorrelator de múltiplos usuários (MUD) descrito na Seção 11.7. Mostramos os resultados de desempenho dos usuários 2 e 4 na Fig. 11.26.

```

% MATLAB PROGRAM <Ex11_4a.m>
% Este programa efetua a simulação de sistema CDMA para múltiplos usuários
% sujeito ao efeito próximo-distante devido a variações de
% potência de Tx de usuário.
%
```

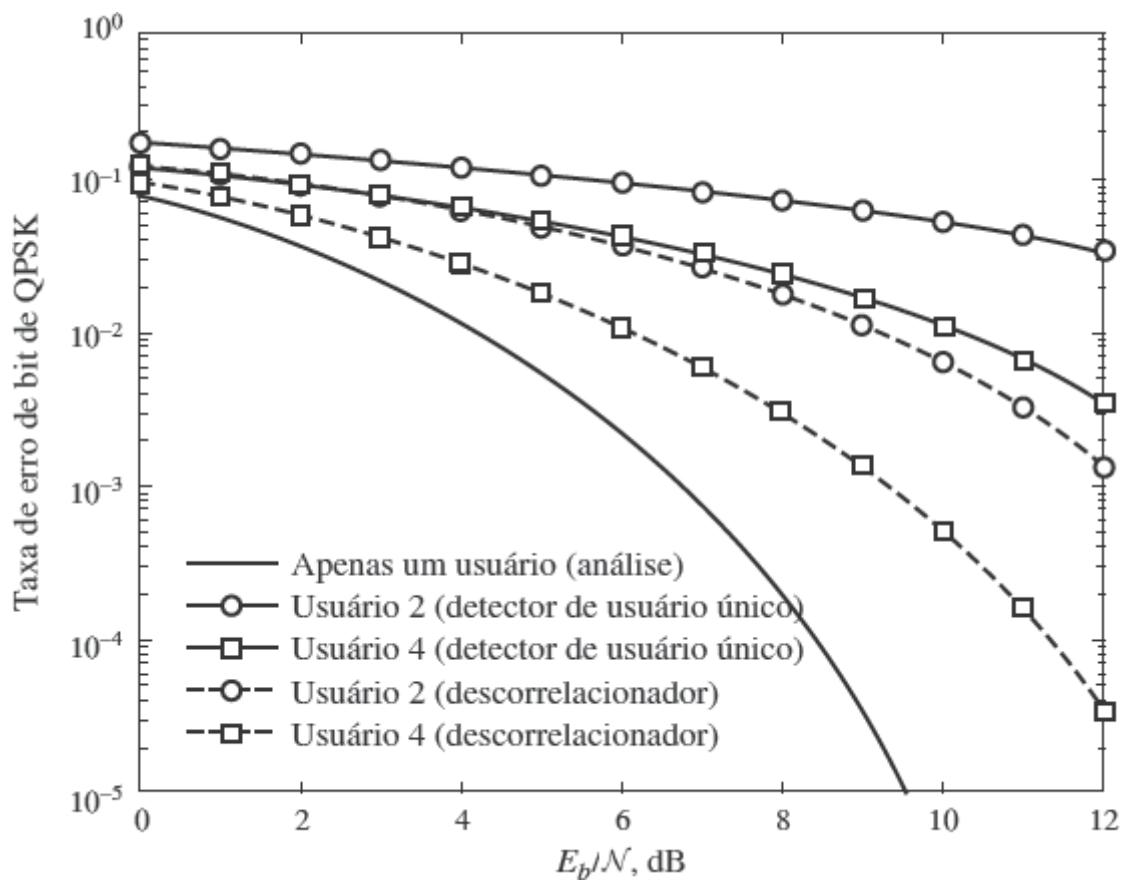


Figura 11.26 Comparação de desempenho de MUD descorrelator e receptor convencional de um usuário.

```

% Receptores descorrelatores são
% aplicados para mitigar o efeito próximo-distante
%
%clear;clf
Ldata=100000; % comprimento dos dados na simulação; deve ser divisível por 8
Lc=31; % fator de espalhamento versus taxa de dados
%Número de usuários = 4
% Geração de símbolos da modulação QPSK
data_sym=2*round(rand(Ldata,4))-1+j*(2*round(rand(Ldata,4))-1);

% Seleciona 4 códigos de espalhamento (códigos Gold de comprimento 11)
gold31code;
pcode=GPN;
% Códigos de espalhamento, agora, na matriz pcode de 31x4
PowerMat=diag(sqrt([10 1 5 1]));
pcodew=pcode*PowerMat;
Rcor=pcodew'*pcodew;
Rinv=pinv(Rcor);
% Aplica o espalhamento
x_in=kron(data_sym(:,1),pcodew(:,1))+kron(data_sym(:,2),pcodew(:,2))+...
kron(data_sym(:,3),pcodew(:,3))+kron(data_sym(:,4),pcodew(:,4));

% Potência de sinal da entrada do canal é 2*Lc

% Geração do ruído (AWGN)
noiseq=randn(Ldata*Lc,1)+j*randn(Ldata*Lc,1); % Potência é 2

BERb2=[];
BERa2=[];
BERb4=[];
BERa4=[];
BER_az=[];

```

```

for i=1:13,
    Eb2N(i)=(i-1);                                % (Eb/N em dB)
    Eb2N_num=10^(Eb2N(i)/10);                     % Eb/N numérico
    Var_n=Lc/(2*Eb2N_num);                        % 1/SNR é a variância do ruído
    signois=sqrt(Var_n);                           % desvio-padrão
    awgnois=signois*noiseq;                        % AWGN
    % Adicionar ruído ao sinal na saída do canal
    y_out=x_int+awgnois;
    Y_out=reshape(y_out,Lc,Ldata).'; clear y_out awgnois;
    % Desespalarhar primeiro e aplicar o descorrelator Rinv
    z_out=(Y_out*pcode);                          % saída do desespalhador (convencional)
    clear Y_out;
    z_dcr=z_out*Rinv;                            % saída do descorrelator

    % Decisão baseada no sinal dos receptores simples
    dec1=sign(real(z_out))+j*sign(imag(z_out));
    dec2=sign(real(z_dcr))+j*sign(imag(z_dcr));
    % Comparar com os dados originais para calcular a BER do usuário 2
    % e do usuário 4 (os mais fracos).
    BERa2=[BERa2;sum([real(data_sym(:,2))~=real(dec1(:,2));...
        imag(data_sym(:,2))~=imag(dec1(:,2))])/ (2*Ldata)];
    BERa4=[BERa4;sum([real(data_sym(:,4))~=real(dec1(:,4));...
        imag(data_sym(:,4))~=imag(dec1(:,4))])/ (2*Ldata)];
    BERb2=[BERb2;sum([real(data_sym(:,2))~=real(dec2(:,2));...
        imag(data_sym(:,2))~=imag(dec2(:,2))])/ (2*Ldata)];
    BERb4=[BERb4;sum([real(data_sym(:,4))~=real(dec2(:,4));...
        imag(data_sym(:,4))~=imag(dec2(:,4))])/ (2*Ldata)];
    BER_az=[BER_az;0.5*erfc(sqrt(Eb2N_num))];           %analítico
end
figure(1)
figber=semilogy(Eb2N,BER_az,'k-',Eb2N,BERa2,'k-o',Eb2N,BERa4,'k-s',...
    Eb2N,BERb2,'k--o',Eb2N,BERb4,'k--s');
legend('Apenas um usuário (análise)', 'Usuário 2 (detecção de usuário único)',...
    'Usuário 4 (detecção de usuário único)', 'Usuário 2 (descorrelacionados)',...
    'Usuário 4 (descorrelacionados)')
axis([0 12 0.99e-5 1.e0]);
set(figber,'LineWidth',2);
xlabel('E_b/N (dB)'); ylabel('Taxa de erro QPSK')
title('Comparações de BER de usuários fracos');

```

No programa MATLAB Ex11_4b.m, implementamos o receptor MUD com realimentação de decisão da Seção 11.7. O desempenho de MUD com realimentação de decisão para dois usuários é mostrado na Fig. 11.27.

```

% MATLAB PROGRAM <Ex11_4b.m>
% Este programa efetua a simulação de sistema CDMA para múltiplos
% usuários. Os 4 usuários têm potências diferentes para ilustrar o
% efeito próximo-distante no caso de receptores convencionais de
usuário único
%
```

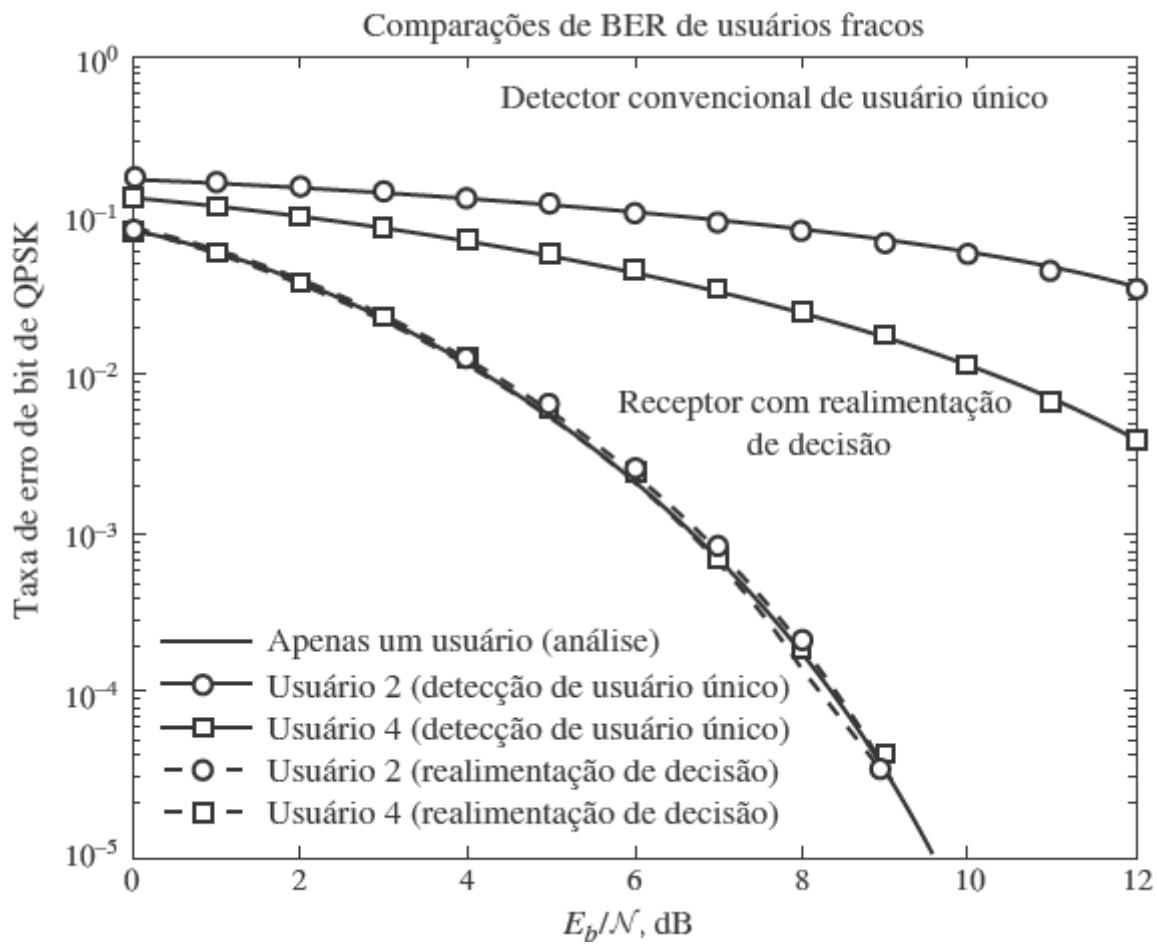


Figura 11.27 Comparação de desempenho de MUD descorrelator e receptor convencional de um usuário.

```
% Detectores com realimentação de decisão são testados para mostrar
% a capacidade dos mesmos em superar o problema próximo-distante
%
%clear;clf
Ldata=100000; % comprimento dos dados na simulação; deve ser divisível por 8
Lc=31;          % fator de espalhamento versus taxa de dados
%Número de usuários = 4;
% Geração de símbolos da modulação QPSK
data_sym=2*round(rand(Ldata,4))-1+j*(2*round(rand(Ldata,4))-1);

% Seleciona 4 códigos de espalhamento (códigos Gold de comprimento 11)
gold31code;
PCODE=GPN;
% Códigos de espalhamento, agora, na matriz PCODE de 31x4
PowerMat=diag(sqrt([10 1 5 1]));
PCODEW=PCODE*PowerMat;
RCOR=PCODEW'*PCODEW;
% Aplica o espalhamento
X_IN=kron(data_sym(:,1),PCODEW(:,1))+kron(data_sym(:,2),PCODEW(:,2))+...
kron(data_sym(:,3),PCODEW(:,3))+kron(data_sym(:,4),PCODEW(:,4));

% potência de sinal da entrada do canal 2*Lc

% Geração do ruído (AWGN)
noiseq=randn(Ldata*Lc,1)+j*randn(Ldata*Lc,1); % Potência é 2
BER_c2=[];
for i=1:Ldata
    BER_c2(i)=BER(X_IN+noiseq);
end
```

```

BER2=[];
BER_c4=[];
BER4=[];
BER_az [];

for i=1:13,
    Eb2N(i)=(i-1); % (Eb/N em dB)
    Eb2N_num=10^(Eb2N(i)/10); % Eb/N numérico
    Var_n=Lc/(2*Eb2N_num); % 1/SNR é a variância do ruído
    signois=sqrt(Var_n); % desvio-padrão
    awgnois=signois*noiseq; % AWGN
    % Adicionar ruído ao sinal na saída do canal
    y_out=x_in+awgnois;
    Y_out=reshape(y_out,Lc,Ldata).'; clear y_out awgnois;
    % Desespalarhar primeiro
    z_out=Y_out*pcode; % saída do desespalarhador (convencional)
    clear Y_out;
    % Decisão baseada no sinal dos receptores simples
    dec=sign(real(z_out))+j*sign(imag(z_out));

    % Decisão baseada no sinal das amostras
    decl=sign(real(z_out(:,1)))+j*sign(imag(z_out(:,1)));
    z_fk1=z_out-decl*Rcor(1,:);
    dec3=sign(real(z_fk1(:,3)))+j*sign(imag(z_fk1(:,3)));
    z_fk2=z_fk1-dec3*Rcor(3,:);
    dec2=sign(real(z_fk2(:,2)))+j*sign(imag(z_fk2(:,2)));
    z_fk3=z_fk2-dec2*Rcor(2,:);
    dec4=sign(real(z_fk3(:,4)))+j*sign(imag(z_fk3(:,4)));
    % Comparar com os dados originais para calcular a BER
    BER_c2=[BER_c2;sum([real(data_sym(:,2))~=real(dec(:,2));...
        imag(data_sym(:,2))~=imag(dec(:,2))])/(2*Ldata)];
    BER2=[BER2;sum([real(data_sym(:,2))~=real(dec2);...
        imag(data_sym(:,2))~=imag(dec2)])/(2*Ldata)];
    BER_c4=[BER_c4;sum([real(data_sym(:,4))~=real(dec(:,4));...
        imag(data_sym(:,4))~=imag(dec(:,4))])/(2*Ldata)];
    BER4=[BER4;sum([real(data_sym(:,4))~=real(dec4);...
        imag(data_sym(:,4))~=imag(dec4)])/(2*Ldata)];
    BER_az=[BER_az;0.5*erfc(sqrt(Eb2N_num))]; %analítico
end
clear z_fk1 z_fk2 z_fk3 decl dec3 dec2 dec4 x_in y_out noiseq;
figure(1)
figber=semilogy(Eb2N,BER_az,'k-',Eb2N,BER_c2,'k-o',Eb2N,BER_c4,'k-s',...
    Eb2N,BER2,'k--o',Eb2N,BER4,'k--s');
legend('Apenas um usuário (análise)', 'Usuário 2 (detecção de usuário único)',...
    'Usuário 4 (detecção de usuário único)', 'Usuário 2 (realimentação de decisão)',...
    'Usuário 4 (realimentação de decisão)');
axis([0 12 0.99e-5 1.e0]);
set(figber,'LineWidth',2);
xlabel('E_b/N (dB)'); ylabel('Taxa de erro de QPSK');
title('Comparações de BER de usuários fracos');

```

REFERÊNCIAS

1. E. O. Geronoitis and M. B. Pursley, "Error Probabilities for Slow Frequency-Hopped Spread-Spectrum Multiple Access Communications over Fading Channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 30, no. 5, pp. 996–1009, 1982.
2. Matthew S. Gast, *802.11 Wireless Networks: The Definitive Guide*, O'Reilly & Associates, Sebastopol, CA, 2002.
3. BrentA. Miller and Chatschik Bisdikian, *Bluetooth Revealed*, Upper Saddle River, NJ, Prentice-Hall, 2001.
4. <http://www.bluetooth.com>.
5. http://www.physics.princeton.edu/~trothman/Broertjes_patent.pdf.
6. DavidWallace, "Hedy Lamarr," *Lost Magazine*, October 2006.
7. J. S. Lehnert, "An Efficient Technique for Evaluating Direct-Sequence Spread-Spectrum Communications," *IEEE Trans.on Commun.*, vol. 37, pp. 851–858, August 1989.
8. R. Lups and S. Verdú, "Near-Far Resistance of Multiuser Detectors in Asynchronous Channels," *IEEE Trans.Commun.*, vol. COM-38, no. 4, pp. 496–508, April 1990.
9. S. Verdú, *Multiuser Detection*, Cambridge University Press, New York, 1998.
10. S. Verdú, "Optimum Multiuser Asymptotic Efficiency," *IEEE Trans.Commun.*, vol. COM-34, no. 9, pp. 890–897, Sept. 1986.
11. R. Lups and S. Verdu, "Linear Multiuser Detectors for Synchronous Code-Division Multiple-Access Channel," *IEEE Trans.Inform.Theory*, vol. 35, pp. 123–136, Jan. 1989.
12. Z. Xie, R. T. Short, and C. K. Rushforth, "AFamily of Suboptimum Detectors for Coherent Multiuser Communications," *IEEE Journal on Selected Areas of Communications*, vol. 8, pp. 683–690, May 1990.
13. M. K. Varanasi and B. Aazhang, "Near-Optimum Detection in Synchronous Code-Division Multiple- Access Systems," *IEEE Trans.Commun.*, vol. 39, pp. 825–836, May 1991.
14. A. J. Viterbi, "Very Low Rate Convolutional Codes for Maximum Theoretical Performance of Spread-Spectrum Multiple-Access Channels," *IEEE J.Select. Areas Commun.*, vol. 8, no 4, May 1990, pp. 641–649.
15. R. Kohno, H. Imai, M. Hatori, and S. Pasupathy, "Combination of an Adaptive Array Antenna and a Canceler of Interference for Direct-Sequence Spread-Spectrum Multiple-Access System," *IEEE J.Select. Areas Commun.*, vol. 8, no. 4, May 1990, pp. 675–682.
16. Juha Korhonen, *Introduction to 3G Mobile Communications*, Artech House, Boston, 2001.
17. S. C. Yang, *3G CDMA2000 Wireless System Engineering*, Artech House, Boston, 2004.
18. Keiji Tachikawa, ed. *W-CDMA Mobile Communications System*, Wiley, 2002.
19. 3rd Generation Partnership Project 2, "Physical Layer Standard for cdma2000 Spread Spectrum Systems," *3GPP2 C.S0002-D*, Version 1.0, Feb. 13, 2004.

EXERCÍCIOS

Considere um sistema ASK binário com saltos rápidos. O espectro AWGN é igual a $S_n(f) = 10^{-6}$ e as amplitudes dos sinais binários são 0 e 2 V. O sistema ASK usa uma taxa de dados de 100 kbit/s e é detectado de forma não coerente. O sistema ASK requer largura de banda de 100 kHz para transmissão. No entanto, os saltos em frequência se dão sobre 12 bandas ASK iguais, com largura de banda total de 1,2 MHz. O sinal interferente em banda parcial pode gerar uma forte interferência parecida com ruído gaussiano, com potência total de 27 dBm.

- (a) Para o caso em que o sinal interferente em banda parcial afeta um dos 12 canais FH, determine a BER do sistema ASK-FH quando o sinal ASK saltar 6 bandas por período de bit.
- (b) Para o caso em o sinal interferente em banda parcial afeta dois dos 12 canais FH, determine a BER do sistema ASK-FH quando o sinal ASK saltar 6 bandas por período de bit.
- (c) Para o caso em o sinal interferente em banda parcial afeta todos os 12 canais FH, determine a BER do sistema ASK-FH quando o sinal ASK saltar 6 bandas por período de bit.

Refaça o Exercício 11.1-1 para o caso em que o sinal ASK salta 12 bandas por período de bit.

Refaça o Exercício 11.1-1 para o caso em que o sinal ASK salta 1 banda por período de bit.

Em um sistema FH de múltiplos usuários que aplica BPSK para cada transmissão de usuário, considere cada usuário interferente como um interferente em banda parcial. Há M usuários e um total de L bandas de sinal para saltos em frequência síncronos. O usuário desejado em questão salta L_h bandas em cada período de bit.

- (a) Calcule a probabilidade de que exatamente 1 das bandas de sinal usadas pelo usuário desejado durante um período de bit seja afetada pelos sinais interferentes.
- (b) Calcule a probabilidade de que nenhuma das bandas de sinal usadas pelo usuário desejado durante um período de bit seja afetada pelos sinais interferentes.
- (c) Assuma que, quando parte de uma banda de sinal for afetada por interferência, possamos calcular o efeito na BER descartando a energia de sinal na banda afetada. Calcule a BER de um dado usuário nesse sistema.

Suponha que o ruído AWGN $n(t)$ tenha espectro $\mathcal{N}/2$. Se o ruído AWGN $n(t)$ for idealmente limitado em banda a $1/2T_c$ Hz, mostre que, se o sinal de espalhamento $c(t)$ tiver função de autocorrelação

$$R_c(\tau) = \sum_i \delta(\tau - i \cdot LT_c)$$

então a PSD de $x(t) = n(t)c(t)$ é, aproximadamente,

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(v) S_c(f - v) dv = \frac{\mathcal{N}}{2}$$

Considere sistemas DSSS com sinal interferente $i(t)$. No receptor, o sinal desespaldado $c(t) = \pm 1$ com largura de banda B_c .

- (a) Mostre que $i(t)$ e a interferência desespaldada

$$i_a(t) = i(t)c(t)$$

têm mesma potência.

- (b) Se $i(t)$ tiver largura de banda B_s e se o fator de espalhamento L for tal que $B_c = L \times B_s$, mostre que o espectro de potência de $i_a(t)$ tem amplitude L vezes menor e largura de banda L vezes maior.

Em um sistema CDMA multiusuário de DSSS, todos os transmissores estão à mesma distância dos receptores. Em outras palavras, $g_i = \text{constante}$. O espectro do ruído gaussiano branco aditivo é igual a $S_n(f) = 5 \times 10^{-6}$. BPSK é o formato de modulação de todos os usuários, e a taxa de dados é 16 kbit/s.

- (a) Se os códigos de espalhamento forem mutuamente ortogonais, calcule a necessária potência de sinal de usuário P_i para alcançar BER de 10^{-5} .
- (b) Admita que os códigos de espalhamento não sejam ortogonais, mais especificamente

$$R_{ii} = 1 \quad R_{ij} = -1/16 \quad i \neq j$$

Aplique a aproximação gaussiana para MAI não ortogonal e calcule a necessária potência de sinal de usuário P_i para alcançar BER de 10^{-5} .

Refaça o Exercício 11.6-1 para o caso em que um dos 15 transmissores interferentes estiver 2 vezes mais próximo do receptor desejado, de modo que seu ganho g_1 seja 4 vezes maior.

Para o sistema CDMA multiusuário do Exercício 11.6-3, projete os correspondentes receptores descorrelator e MMSE.

-
- * Esta é uma hipótese pessimista, pois estudos revelaram que o valor pode ser menor.
 - * Na análise de CDMA assíncrono, a janela de análise deve ser ampliada para tornar este caso equivalente ao de CDMA síncrono com um número muito maior de usuários.⁸, ⁹
 - * É igualmente comum o termo ambiente *perto-longe*. (N.T.)
 - * O código de espalhamento P é de 10,23 Mchip/s, com ganho de espalhamento $L = 204.600$. O período do código P é de $6,1871 \times 10^{12}$ bits. Na verdade, à taxa de 10,23 Mchip/s, o período do código tem a duração de uma semana!
 - * O padrão IEEE 802.11g opera na mesma banda ISM que IEEE 802.11b e deve ter compatibilidade retroativa. Assim, IEEE 802.11g inclui os mecanismos de CDMA e OFDM. IEEE 802.11a, por sua vez, opera na banda de 5 GHz e usa exclusivamente OFDM.

12

COMUNICAÇÕES DIGITAIS COM CANAIS SUJEITOS A DISTORÇÃO LINEAR

Nas discussões e análises anteriores de sistemas de comunicação digital, consideramos a hipótese ideal de que o canal de comunicação não introduzisse distorção. Além disso, admitimos que o único efeito negativo do canal era ruído gaussiano branco aditivo (AWGN). Contudo, na realidade, canais de comunicação estão longe de serem ideais. Entre diversas distorções físicas de canal, o *multipercorso* é, sem dúvida, o problema mais sério encontrado em comunicações sem fio. No caso de sistemas analógicos de comunicação, o multipercorso representa um efeito que, com frequência, pode ser tolerado pelos ouvidos (como eco) e olhos (como fantasmas) humanos. No entanto, no caso de sistemas digitais de comunicação, o multipercorso leva a distorções lineares de canal que se manifestam como interferências intersímbolicas (ISI). Isso ocorre porque o multipercorso faz com que múltiplas cópias do mesmo sinal cheguem ao receptor com diferentes atrasos temporais. Assim, um pulso de símbolo é atrasado, o que afeta um ou mais símbolos adjacentes, causando ISI. Como vimos, ISI pode afetar severamente a precisão de receptores. Para combater os efeitos de ISI devido a canais de multipercorso, discutiremos, neste capítulo, duas ferramentas muito eficazes: **equalização** e **OFDM** (modulação por divisão em frequências ortogonais).

12.1 DISTORÇÕES LINEARES EM CANAIS SEM FIO DE MULTIPERCURSO

Comunicação digital requer que sinais digitais sejam transmitidos por um meio específico entre transmissor e receptor. No mundo real, os meios físicos (canais) são analógicos. Devido a limitações práticas, canais analógicos, em geral, são imperfeitos e podem introduzir distorções indesejadas. Exemplos de meio analógicos não ideais incluem linhas telefônicas, cabos coaxiais, canais acústicos subaquáticos e canais sem fio de RF em frequências variadas. A Fig. 12.1 ilustra um caso simples em que a transmissão de uma estação de base a uma unidade móvel encontra um canal de multipercorso com dois feixes: um feixe em linha de visada e um devido à reflexão no solo. No receptor, há duas cópias do sinal transmitido, uma sendo uma versão atrasada da outra.

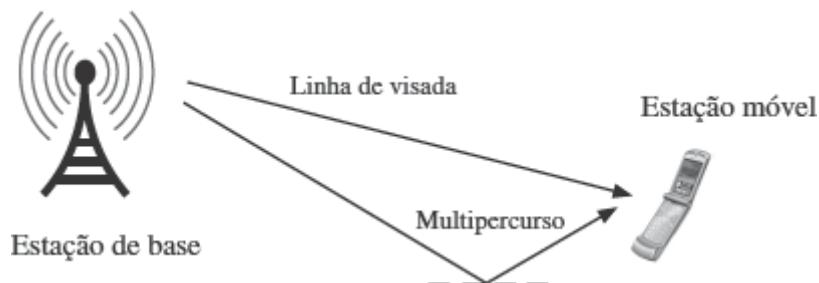


Figura 12.1 Ilustração simples de um canal de multipercorso com dois feixes.

Para entender o efeito de multipercorso nesse exemplo, denotemos os sinais recebidos em linha de visada e refletido, respectivamente, por

$$s(t) = m(t) \cos \omega_c t \quad \text{e} \quad \alpha_1 s(t - \tau_1) = \alpha_1 m(t - \tau_1) \cos \omega_c(t - \tau_1)$$

Aqui, admitimos que a modulação é DSB com sinal de mensagem PAM (Capítulo 7),

$$m(t) = \sum_k a_k p(t - kT)$$

em que T é a duração do símbolo PAM. Usamos α_1 e τ_1 para representar, respectivamente, a perda de multipercorso e o atraso do sinal refletido em relação ao sinal em linha de visada. Com isso, o sinal de RF na entrada do receptor é escrito como

$$\mathbf{r}(t) = m(t) \cos \omega_c t + \alpha_1 m(t - \tau_1) \cos \omega_c(t - \tau_1) + \mathbf{n}_c(t) \cos \omega_c t + \mathbf{n}_s(t) \sin \omega_c t \quad (12.1)$$

Na Eq. (12.1), $\mathbf{n}_c(t)$ e $\mathbf{n}_s(t)$ denotam as componentes em fase e em quadratura do ruído passa-faixa, respectivamente (Seção 9.9). Com detecção coerente, o sinal em banda-base de saída do receptor se torna

$$\begin{aligned} y(t) &= \text{LPF}\{2\mathbf{r}(t) \cos \omega_c t\} \\ &= m(t) + \alpha_1 (\cos \omega_c \tau_1) m(t - \tau_1) + \mathbf{n}_c(t) \end{aligned} \quad (12.2a)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_k a_k p(t - kT) + (\alpha_1 \cdot \cos \omega_c \tau_1) \sum_k a_k p(t - kT - \tau_1) + \mathbf{n}_c(t) \\ &= \sum_k a_k [p(t - kT) + (\alpha_1 \cos \omega_c \tau_1) p(t - kT - \tau_1)] + \mathbf{n}_c(t) \end{aligned} \quad (12.2b)$$

Com a definição de uma forma de onda em banda-base

$$q(t) = p(t) + (\alpha_1 \cos \omega_c \tau_1) p(t - \tau_1)$$

podemos simplificar a Eq. (12.2b):

$$y(t) = \sum_k a_k q(t - kT) + \mathbf{n}_c(t) \quad (12.2c)$$

Na verdade, esse canal de multipercorso converteu a forma do pulso original $p(t)$ em $q(t)$. Se $p(t)$ tiver sido projetada (como no Capítulo 7) para satisfazer o primeiro critério de Nyquist de ISI zero,

$$p(nT) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

a nova forma do pulso $q(t)$ certamente terá ISI, pois

$$q(nT) = p(nT) + (\alpha_1 \cdot \cos \omega_c \tau_1) p(nT - \tau_1) \neq 0 \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Generalizando este resultado, se houver $K + 1$ percursos, a real resposta do canal será

$$q(t) = p(t) + \sum_{i=1}^K [\alpha_i \cos \omega_c \tau_i] p(t - \tau_i)$$

admitindo que o percurso em linha de visada tenha atraso $\tau_0 = 0$ e ganho unitário $\alpha_0 = 1$. O efeito de ISI causado em $q(t)$ pelo somatório em K depende de (a) intensidades relativas dos ganhos de multipercorso $\{\alpha_i\}$ e (b) atrasos de multipercorso $\{\tau_i\}$.

Modelos QAM Genéricos

A QAM é uma transmissão eficiente para a conservação de largura de banda em comunicações com e sem fio. Novamente, admitamos que a taxa de símbolos em QAM seja $1/T$, sendo T a duração de cada símbolo. Em QAM, os símbolos de dados $\{s_k\}$ têm valores complexos, e o sinal de RF passa-faixa em quadratura transmitido é

$$s(t) = \left[\sum_k \text{Re}\{s_k\} p(t - kT) \right] \cos \omega_c t + \left[\sum_k \text{Im}\{s_k\} p(t - kT) \right] \sin \omega_c t \quad (12.3)$$

Assim, para canais de multipercorso com $K + 1$ percursos e resposta ao impulso

$$\delta(t) + \sum_{i=1}^K \alpha_i \delta(t - \tau_i)$$

o sinal passa-faixa recebido para QAM é

$$\mathbf{r}(t) = s(t) + \sum_{i=1}^K \alpha_i s(t - \tau_i) + \mathbf{n}_c(t) \cos \omega_c t + \mathbf{n}_s(t) \sin \omega_c t \quad (12.4)$$

Com detecção coerente, o demodulador QAM tem duas saídas em banda-base, $\text{LPF}\{2\mathbf{r}(t)\cos \omega_c t\}$ e $\text{LPF}\{2\mathbf{r}(t)\sin \omega_c t\}$. Essas duas saídas (em fase e em quadratura) têm valores reais e podem ser escritas como uma saída complexa:

$$y(t) = \text{LPF}\{2\mathbf{r}(t) \cos \omega_c t\} + j \cdot \text{LPF}\{2\mathbf{r}(t) \sin \omega_c t\} \quad (12.5a)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_k \text{Re}\{s_k\} \left[\sum_{i=0}^K (\alpha_i \cos \omega_c \tau_i) p(t - kT - \tau_i) \right] \\ &\quad + \sum_k \text{Im}\{s_k\} \left[\sum_{i=0}^K (\alpha_i \sin \omega_c \tau_i) p(t - kT - \tau_i) \right] \\ &\quad - j \cdot \sum_k \text{Re}\{s_k\} \left[\sum_{i=0}^K (\alpha_i \sin \omega_c \tau_i) p(t - kT - \tau_i) \right] \\ &\quad + j \cdot \sum_k \text{Im}\{s_k\} \left[\sum_{i=0}^K (\alpha_i \cos \omega_c \tau_i) p(t - kT - \tau_i) \right] + \mathbf{n}_c(t) + j \mathbf{n}_s(t) \\ &= \sum_k s_k \left[\sum_{i=0}^K \alpha_i \exp(-j\omega_c \tau_i) p(t - kT - \tau_i) \right] + \mathbf{n}_c(t) + j \mathbf{n}_s(t) \end{aligned} \quad (12.5b)$$

Mais uma vez, podemos definir uma resposta ao impulso (complexa) em banda-base

$$q(t) = \sum_{i=0}^K \alpha_i \exp(j\omega_c \tau_i) p(t - kT - \tau_i) \quad (12.6a)$$

e o ruído complexo em banda-base

$$\mathbf{n}_e(t) = \mathbf{n}_c(t) + j \mathbf{n}_s(t) \quad (12.6b)$$

O sinal em banda-base de saída do demodulador do receptor pode ser escrito simplesmente como

$$y(t) = \sum_k s_k q(t - kT) + \mathbf{n}_e(t) \quad (12.7)$$

em que todas as variáveis têm valores complexos. Fica claro que o pulso original $p(t)$, projetado para não ter ISI, foi transformado pelo canal de multipercorso em $q(t)$. No domínio da frequência, podemos ver que

$$Q(f) = \sum_{i=0}^K \alpha_i \exp[-j(2\pi f - \omega_c)\tau_i] \cdot P(f) \quad (12.8)$$

Isso significa que a resposta de frequência original $P(f)$ encontrou uma função de transferência dependente da frequência, devido à resposta de multipercorso

$$\sum_{i=0}^K \alpha_i \exp(j\omega_c \tau_i) \exp[-j2\pi f \tau_i]$$

Portanto, a distorção de canal é uma função da frequência f . Canais de comunicação que introduzem distorções dependentes da frequência são conhecidos como canais *seletivos em frequência*. Tais canais podem exibir ISI substancial, o que pode causar grande aumento nos erros de detecção.

ISI em Comunicação com Fio

Embora tenhamos demonstrado como o multipercorso pode, em comunicação sem fio, originar ISI e distorções de canal linear, sistemas com fio não são completamente imunes a esses problemas. De fato, sistemas com fio não têm um ambiente de multipercorso, pois todos os sinais são transmitidos por cabos dedicados. No entanto, quando os cabos têm múltiplos terminais abertos ociosos, descasamento de impedância nesses terminais abertos também pode gerar sinais refletidos que chegarão aos terminais receptores como cópias atrasadas. Portanto, ISI devido a distorções lineares de canal também pode ser problemática em sistemas com fio. Serviços de internet a cabo são um exemplo.

Equalização e OFDM

Como canais com ISI causam séria degradação de sinal e pobre desempenho de detecção, seus efeitos devem ser compensados no transmissor ou no receptor. Na maioria dos casos, em um ambiente incerto, os transmissores não têm ciência das reais condições de propagação. Assim, cabe aos receptores identificar o desconhecido $q(t)$ de canais de multipercorso e determinar meios de combater a ISI. As duas ferramentas mais comuns e eficazes no combate de canais com ISI são **equalização de canais** e **OFDM**.

12.2 EQUALIZAÇÃO DO CANAL NO RECEPTOR

Por conveniência, descreveremos o problema de equalização de canal para o caso de canal estacionário. Uma vez que os fundamentos da equalização de canais lineares invariantes no tempo (LIT) sejam entendidos, a tecnologia adaptativa pode acomodar canais variantes no tempo.

Quando um canal é LIT, usamos o simples diagrama de sistema da Fig. 12.2 para descrever o problema de equalização de canal. Em geral, a equalização de canal é estudada para (os espectralmente eficientes) sistemas QAM digitais. O modelo em banda-base para um típico sistema de comunicação QAM (com modulação em amplitude em quadratura) consiste em um canal LIT desconhecido $q(t)$, que representa a interconexão física entre o transmissor e o receptor na banda-base.

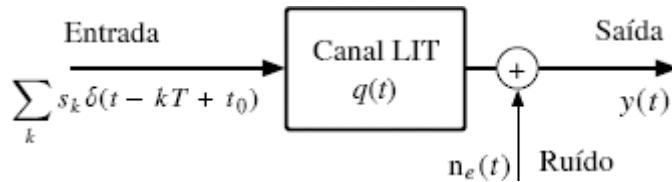


Figura 12.2 Representação em banda-base de transmissão QAM em um canal linear invariante no tempo com ISI.

O transmissor de banda-base gera uma sequência de dados de entrada aleatórios $\{s_k\}$ de valores complexos, em que cada elemento pertence à constelação de símbolos QAM. A sequência de dados $\{s_k\}$ é enviada pelo canal de banda-base, que é LIT e tem resposta ao impulso $q(t)$. Como os símbolos QAM $\{s_k\}$ têm valores complexos, a resposta ao impulso do canal em banda-base $q(t)$ também tem, em geral, valores complexos.

Considerando o canal de comunicação LIT, causal, de valores complexos e com resposta ao impulso $q(t)$, a relação entrada-saída do sistema QAM pode ser escrita como

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k q(t - kT + t_0) + n_e(t) \quad s_k \in \mathcal{A} \quad (12.9)$$

É comum admitirmos que o ruído de canal em banda-base $n_e(t)$ seja estacionário, gaussiano e independente da entrada do canal s_k . Dado o sinal em banda-base $y(t)$ no receptor, a tarefa do equalizador de canal consiste em estimar os dados originais $\{s_k\}$ a partir do sinal recebido $y(t)$.

A seguir, apresentaremos as condições típicas para que a equalização de canal seja alcançada. Sem perda de generalidade, admitiremos $t_0 = 0$.

12.2.1 Filtro Antimascaramento versus Filtro Casado

Mostramos, nas Seções 10.1 e 10.6, que o filtro receptor ótimo deve ser casado à resposta total $q(t)$. Esse filtro serve para maximizar a SNR do sinal amostrado na saída do filtro. Mesmo que a resposta $q(t)$ tenha ISI, Forney¹ estabeleceu a otimalidade do * receptor de filtro casado, como mostrado na Fig. 12.3. Com um filtro casado $q(-t)$ e amostragem à taxa de símbolo (taxa de baud) em $t = nT$, o receptor obtém uma sequência de saída que relaciona os dados do transmissor $\{s_k\}$ e as amostras do receptor,

$$z[n] = \sum_k s_k h(nT - kT) \quad (12.10)$$

em que

$$h(t) = q(t) * q(-t) \quad (12.11)$$

Se denotarmos as amostras de $h(t)$ por

$$h[n] = h(nT)$$

a Eq. (12.10) pode ser simplificada como

$$z[n] = \sum_k s_k h[n - k] = h[n] * s[n] \quad (12.12)$$

Em resumo, os sinais (de entrada e saída) do canal se relacionam por meio de um simples canal de uma entrada e uma saída (SISO - *single-input-single-output*), linear, discreto e com função de transferência

$$H(z) = \sum_n h[n] z^{-n} \quad (12.13)$$

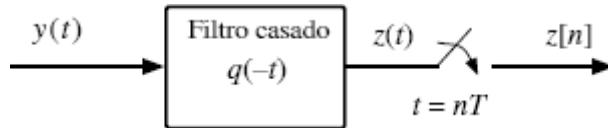


Figura 12.3 Receptor de filtro casado ótimo.

A representação discreta SISO do sinal QAM linear leva ao equalizador padrão com espaçamento T (TSE – *T-spaced equalizer*). O termo *equalização com espaçamento T* se refere ao processamento do sinal recebido e amostrado à taxa $1/T$. Portanto, a separação temporal entre amostras sucessivas é igual ao período de baud (símbolo) T .

O receptor de filtro casado ótimo encontra um grande obstáculo prático, pois a forma de pulso da resposta total $q(t)$ depende do ambiente do canal de multipercorso. Na prática, é muito difícil ajustar o filtro receptor segundo o sinal $q(t)$ variante no tempo, pois o ambiente do canal pode sofrer mudanças significativas e, possivelmente, rápidas. Além disso, em geral, os receptores não têm informação *a priori* sobre o canal que afeta $q(t)$. Assim, não faz sentido implementar o filtro receptor $q(-t)$ em um ambiente de canal dinâmico. É mais razoável projetar e implementar filtro receptor invariante no tempo. Logo, nossa importante tarefa consiste em selecionar um filtro receptor sem perder nenhuma informação de sinal em $y(t)$.

Na busca de uma solução, recordemos que o sinal de entrada QAM é

$$x(t) = \sum_k s_k p(t - kT)$$

Aprendemos, na Seção 7.2 [Eq. (7.9)], que a densidade espectral de potência de um trem de pulsos modulado em amplitude é

$$S_x(f) = |P(f)|^2 \frac{1}{T} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_s[n] e^{-jn2\pi fT} \right] \quad (12.14a)$$

$$\overbrace{R_s[n]}^{s_k + n s_k^*} = s_k + n s_k^* \quad (12.14b)$$

em que substituímos a amplitude de pulso a_k pelo símbolo QAM s_k . O espectro do sinal na Eq. (12.14a) mostra que a componente de sinal em $y(t)$ é limitada pela largura de banda de $p(t)$ ou $P(f)$.

O filtro receptor, portanto, não deve suprimir qualquer componente significativo de sinal e deve ter largura de banda igual à de $P(f)$. Contudo, se tomarmos um filtro receptor com largura de banda maior que a de $P(f)$, mais ruído passará pelo filtro, sem benefício para o sinal. Por essas razões, um bom filtro receptor deve ter largura de banda *exatamente igual* à de $P(f)$. Obviamente, existem muitos desses filtros. Um é o filtro casado ao pulso de transmissão $p(t)$ dado por

$$p(-t) \iff P^*(f)$$

Devemos considerar que, caso o canal não introduza distorção, $q(t) = p(t)$, e o receptor ótimo seria o filtro $p(-t)$ casado a $p(t)$. Portanto, faz sentido selecionar $p(-t)$ como o filtro receptor padrão (Fig. 12.4), por duas razões:

- (a) O filtro $p(-t)$ retém no sinal recebido todas as componentes de espectro do sinal original.
- (b) O filtro $p(-t)$ é ótimo, caso o ambiente não exiba distorção de canal.

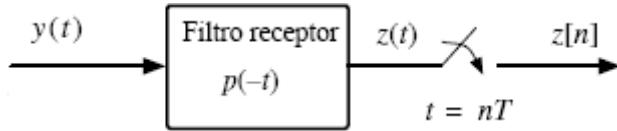


Figura 12.4 Filtro receptor casado ao pulso de transmissão comumente utilizado.

Assim, muitas vezes, aplicamos o filtro receptor $p(-t)$ casado ao pulso de transmissão $p(t)$. Isto significa que a resposta total do canal ao impulso consiste em

$$h(t) = q(t) * p(-t)$$

Reparemos que, devido à filtragem, $z(t) = p(-t) * y(t)$. O sinal $z(t)$ fica escrito como

$$z(t) = \sum_k s_k h(t - kT) + w(t) \quad (12.15)$$

em que o termo de ruído filtrado $w(t)$ surge de

$$w(t) = p(-t) * n_e(t) \quad (12.16)$$

com densidade espectral de potência

$$S_w(f) = |P(f)|^2 S_{n_e}(f)$$

Por fim, a relação entre a saída amostrada $z[k]$ e os símbolos de comunicação s_k é

$$\begin{aligned}
z[n] &= \sum_k h[n-k]s_k + w[n] \\
&= \sum_k h[k]s_{n-k} + w[n]
\end{aligned} \tag{12.17}$$

em que as amostras discretas de ruído são denotadas por $w[n] = w(nT)$.

Em geral, em canais com ISI, há duas abordagens ao problema de recuperação da entrada de canal (ou seja, equalização). A primeira consiste em determinar o receptor ótimo com base nos modelos de canal e de ruído. Essa abordagem leva à estimativa da sequência de máxima verossimilhança (MLSE – *maximum likelihood sequence estimation*), que demanda muito esforço computacional. Uma alternativa de baixo custo consiste em projetar filtros, conhecidos como equalizadores de canal, que compensem a distorção de canal. A seguir, descreveremos, primeiro, a essência do método MLSE para a recuperação de símbolos. Com a ilustração da alta complexidade computacional do método, adquiriremos motivação suficiente para as discussões subsequentes sobre equalizadores de canal de variadas complexidades.

12.2.2 Estimação da Sequência de Máxima Verossimilhança (MLSE)

As amostras da saída do receptor $\{z[n]\}$ dependem dos desconhecidos símbolos QAM de entrada $\{s_n\}$, segundo a relação na Eq. (12.17). A detecção ótima (MAP) de $\{s_n\}$ a partir de $\{z[n]\}$ requer a maximização da probabilidade condicional conjunta [Eq. (10.81)]:

$$\max_{\{s_n\}} p(\dots, s_{n-1}, s_n, s_{n+1}, \dots \mid \dots, z[n-1], z[n], z[n+1], \dots) \tag{12.18}$$

Ao contrário da detecção ótima símbolo a símbolo para canais AWGN, deduzida e analisada na Seção 10.6, a relação interdependente na Eq. (12.17) significa que o receptor ótimo deve detectar a sequência completa $\{s_n\}$ a partir de uma sequência de amostras do sinal recebido $\{z[n]\}$.

Para simplificar esse receptor ótimo, notemos que, na maioria dos sistemas de comunicação e aplicações, cada símbolo QAM s_n é selecionado de forma aleatória de uma constelação, com igual probabilidade. Assim, o detector MAP pode ser traduzido em uma estimativa da sequência de máxima verossimilhança (MLSE):

$$\max_{\{s_n\}} p(\dots, z[n-1], z[n], z[n+1], \dots \mid \dots, s_{n-1}, s_n, s_{n+1}, \dots) \tag{12.19}$$

Se o ruído de canal original $n_e(t)$ for gaussiano branco, o ruído discreto $w[n]$ também será gaussiano, pois a Eq. (12.16) mostra que $w(t)$ é a saída filtrada de $n_e(t)$. Na verdade, podemos definir a densidade espectral de potência do ruído branco $n_e(t)$ como

$$S_{n_e}(f) = \frac{\mathcal{N}}{2}$$

A densidade espectral de potência do ruído filtrado $w(t)$ é, então, dada por

$$S_w(f) = |P(f)|^2 S_{n_e}(f) = \frac{\mathcal{N}}{2} |P(f)|^2 \tag{12.20}$$

Dessa informação, podemos observar que a função de autocorrelação entre as amostras de ruído é

$$\begin{aligned}
R_w[\ell] &= \overline{w[\ell+n]w^*[n]} \\
&= \overline{w(\ell T + nT)w^*(nT)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} S_w(f) e^{-j2\pi f \ell T} df \\
&= \frac{\mathcal{N}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |P(f)|^2 e^{-j2\pi f \ell T} df
\end{aligned} \tag{12.21}$$

Em geral, a autocorrelação entre duas amostras de ruído na Eq. (12.21) depende do filtro receptor, que, nesse caso, é $p(-t)$. O projeto de pulso livre de ISI com base no primeiro critério de Nyquist, apresentado na Seção 7.3, é de particular importância. O primeiro critério de Nyquist requer que a resposta total, do transmissor ao receptor, seja livre de interferências intersimbólicas. Sem distorção de canal, o sistema QAM em consideração tem resposta total ao impulso dada por

$$p(t) * p(-t) \iff |P(f)|^2$$

Para que esse formato de pulso combinado seja livre de ISI, podemos aplicar o primeiro critério de Nyquist no domínio da frequência

$$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| P\left(f + \frac{k}{T}\right) \right|^2 = 1 \quad (12.22a)$$

Isso equivale à exigência no domínio do tempo

$$p(t) * p(-t) \Big|_{t=\ell T} = \begin{cases} 1 & \ell = 0 \\ 0 & \ell = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (12.22b)$$

Em outras palavras, o filtro formatador de pulso de Nyquist é igualmente dividido entre o transmissor e o receptor. Segundo a Eq. (12.22a), a resposta em frequência do formatador de pulso $P(f)$ é a raiz quadrada de um formato de pulso que satisfaz o primeiro critério de Nyquist no domínio da frequência. Se o formato de pulso cosseno levantado da Seção 7.3 for adotado, $P(f)$ seria conhecido como pulso **raiz de cosseno levantado**. Para um dado fator de decaimento r , o pulso raiz de cosseno levantado no domínio do tempo é

$$p_{\text{rrc}}(t) = \frac{2r}{\pi\sqrt{T}} \frac{\cos \left[(1+r)\frac{\pi t}{T} \right] + \left(4r\frac{t}{T} \right)^{-1} \sin (1-r)\frac{\pi t}{T}}{\left[1 - \left(4r\frac{t}{T} \right)^2 \right]} \quad (12.23)$$

Sem ISI, nas condições da Eq. (12.22b), podemos deduzir da Eq. (12.21) que

$$\begin{aligned} R_w[\ell] &= \frac{\mathcal{N}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |P(f)|^2 e^{-j2\pi f \ell T} df \\ &= \frac{\mathcal{N}}{2} p(t) * p(-t) \Big|_{t=\ell T} \\ &= \begin{cases} \frac{\mathcal{N}}{2} & \ell = 0 \\ 0 & \ell = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \end{aligned} \quad (12.24)$$

Isso significa que as amostras de ruído $\{w[n]\}$ são descorrelacionadas. Como as amostras de ruído $\{w[n]\}$ são gaussianas, também são independentes. Em consequência, a probabilidade conjunta condicional da Eq. (12.19) se torna muito mais simples

$$\begin{aligned} &p(\dots, z[n-1], z[n], z[n+1], \dots \mid \dots, s_{n-1}, s_n, s_{n+1}, \dots) \\ &= \prod_i p(z[n-i] \mid \dots, s_{n-1}, s_n, s_{n+1}, \dots) \end{aligned} \quad (12.25)$$

De fato, a Eq. (12.24) nos informa que $z[n-i]$ é gaussiano com variância /2 e valor médio

$$\sum_k h[k] s_{n-i-k}$$

Portanto, o receptor ótimo MLSE sob ruído de canal gaussiano e pulso raiz de cosseno levantado $p_{rc}(t)$ [Eq. (12.23)],

$$\begin{aligned} & \max_{\{s_n\}} \ln \left[\prod_i p(z[n-i] \mid \dots, s_{n-1}, s_n, s_{n+1}, \dots) \right] \\ \iff & \max_{\{s_n\}} \left\{ -\frac{2}{N} \sum_i \left| z[n-i] - \sum_k h[k] s_{n-i-k} \right|^2 \right\} \end{aligned} \quad (12.26a)$$

Assim, MLSE equivale a

$$\min_{\{s_n\}} \sum_i \left| z[n-i] - \sum_k h[k] s_{n-i-k} \right|^2 \quad (12.26b)$$

Para a maioria dos canais de comunicação, a resposta ao impulso $h[k]$ pode ser bem aproximada como um filtro de resposta ao impulso finita (FIR - *finite impulse response*) de alguma ordem finita. Se a máxima ordem do canal for L , tal que

$$H(z) = \sum_{k=0}^L h[k] z^{-k}$$

o receptor MLSE precisa resolver

$$\min_{\{s_n\}} \sum_i \left| z[n-i] - \sum_{k=0}^L h[k] s_{n-i-k} \right|^2 \quad (12.27)$$

Notamos que o algoritmo MLSE requer que o receptor possua o conhecimento dos coeficientes do canal discreto $\{h[k]\}$. Quando conhecimento exato do canal não for disponível, o receptor deve completar a importante tarefa de estimativa de canal.

Complexidade de MLSE e Implementações Práticas

Apesar da aparente grande complexidade do algoritmo MLSE [Eq. (12.27)], existe uma solução muito mais eficiente dada por Viterbi² com base no princípio de *programação dinâmica* de Bellman.³ A complexidade desse algoritmo, comumente referido como algoritmo de Viterbi, não cresce exponencialmente à medida que o comprimento dos dados aumenta. Se o tamanho da constelação QAM for M , a complexidade do algoritmo de Viterbi cresce com M^L . O algoritmo de Viterbi é uma ferramenta muito poderosa, particularmente quando a ordem L do canal não for muito grande e o tamanho da constelação M não for excessivo. Os detalhes do algoritmo de Viterbi serão discutidos no Capítulo 14, quando apresentaremos a decodificação de códigos convolucionais.

MLSE é muito comum em aplicações práticas. Em particular, para combater distorção de multipercorso, muitos receptores celulares GSM efetuam a detecção MLSE descrita aqui. Como GSM usa constelações binárias na transmissão de voz, a complexidade dos receptores MLSE é razoavelmente baixa para canais celulares comuns e pode ser aproximada por respostas FIR de ordens 3 a 8.

Contudo, os formatos de modulação adotados em modems telefônicos de alta velocidade são de grande complexidade. Por exemplo, os modems V.32bits (14,4 kbit/s) usam uma constelação QAM codificada em treliça de tamanho 128 (com 64 símbolos distintos) à taxa de símbolos de 2400 baud (símbolos/s). Nessas aplicações, mesmo um canal FIR relativamente curto $L = 5$ requereria que a MLSE tivesse mais de 1 bilhão de estados. Na verdade, a taxas de bit mais elevadas, modems telefônicos podem usar QAM 256 ou, até mesmo, QAM 960. Em consequência, o maior número de estados na MLSE torna esse método completamente inadequado como receptor nesses sistemas. Portanto, abordagens de equalização subótima com baixa complexidade são muito mais atraentes. A seguir, discutiremos o projeto de equalizadores simples e eficazes (empregados em aplicações que incluem modems telefônicos para a faixa de voz).

12.3 EQUALIZAÇÃO LINEAR COM ESPAÇAMENTO T (TSE)

O filtro receptor casado apenas ao pulso de transmissão $p(t)$ deixa de ser ótimo. *Mesmo que o filtro casado ideal $q(-t)$ seja conhecido e aplicado, é possível que, na prática, o instante de amostragem tenha um deslocamento t_0 , de modo que as amostras passem a ser colhidas em $t = nT + t_0$. Esse tipo de deslocamento do instante de amostragem é conhecido como *erro temporal*. Quando há um erro temporal, o receptor também não é ótimo. Na verdade, é comum que sistemas de comunicação práticos tenham canais com distorção e incertezas temporais desconhecidos. Não obstante, a equalização com espaçamento T tem implementação mais simples. A seguir, discutiremos os aspectos fundamentais do projeto TSE.

Como amostragens espaçadas por T levam ao simples sistema linear no tempo discreto na Eq. (12.17), como mostrado na Fig. 12.5, o equalizador linear básico é simplesmente um filtro linear $F(z)$ seguido por um dispositivo de decisão QAM. O objetivo operacional do (filtro) equalizador $F(z)$ é a remoção da maior parcela possível de ISI da saída $d[n]$. Iniciemos nossa discussão sobre equalizadores com espaçamento T (TSE) denotando a função de transferência do equalizador (causal) como

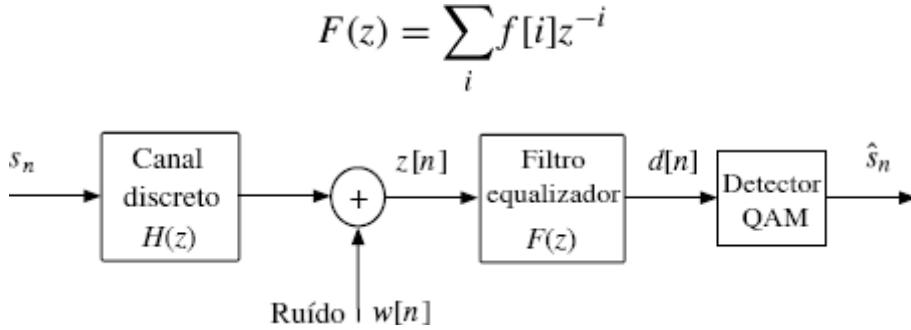


Figura 12.5 Modelo de canal linear discreto SISO para TSE.

Se o ruído de canal $w[n]$ for incluído, a saída TSE é

$$d[n] = F(z)z[n] = \underbrace{F(z)H(z)s_n}_{\text{termo de sinal}} + \underbrace{F(z)w[n]}_{\text{termo de ruído}} \quad (12.28)$$

Denotemos a função de transferência conjunta do equalizador de canal por

$$C(z) = F(z)H(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^{-i}$$

O objetivo do equalizador $F(z)$ é limpar a ISI em $d[n]$ para alcançar uma decisão sem erro

$$\hat{s}_n = \text{dec}(d[n]) = s_{n-u} \quad (12.29)$$

em que u é um atraso fixo na saída do equalizador. Como tanto o canal como o equalizador devem ser causais, a inclusão de um possível atraso u fornece a oportunidade para configurações mais simples e melhores de equalizadores.

Para entendermos melhor o projeto do filtro TSE $F(z)$, podemos dividir a saída TSE em diferentes termos

$$\begin{aligned} d[n] &= \sum_{i=0}^{\infty} c_i s_{n-i} + \sum_{i=0}^{\infty} f[i] w[n-i] \\ &= c_u s_{n-u} + \underbrace{\sum_{i=0, i \neq u}^{\infty} c_i s_{n-i}}_{\text{termo de ISI}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} f[i] w[n-i]}_{\text{termo de ruído}} \end{aligned} \quad (12.30)$$

A saída do filtro equalizador $d[n]$ consiste na desejada componente de sinal com o atraso adequado, mais a ISI e termos de ruído. Se a ISI e os termos de ruído forem zero, o dispositivo de decisão QAM sempre tomará a decisão correta, sem qualquer erro. Portanto, o projeto desse filtro equalizador linear $F(z)$ deve almejar a minimização do efeito da ISI e dos termos de ruído. Na

prática, há dois tipos populares de equalizadores: o projeto com forçamento a zero (ZF – *zero forcing*) e o projeto de mínimo erro quadrático médio (MMSE - *minimum mean square error*).

12.3.1 TSE com Forçamento a Zero

O fundamento do projeto de equalizadores com forçamento a zero consiste em eliminar a ISI sem considerar o efeito do ruído. Em princípio, um equalizador ZF perfeito $F(z)$ deve forçar

$$\sum_{i=0, i \neq u}^{\infty} c_i s_{n-i} = 0$$

Em outras palavras, todos os termos de ISI são eliminados

$$c_i = \begin{cases} 1 & i = u \\ 0 & i \neq u \end{cases} \quad (12.31a)$$

De modo equivalente, no domínio da frequência, o equalizador ZF requer

$$C(z) = F(z)H(z) = z^{-u} \quad (12.31b)$$

Reparemos que o equalizador linear $F(z)$ é basicamente um filtro inverso do canal ISI discreto $H(z)$ com atraso adequado u

$$F(z) = \frac{z^{-u}}{H(z)} \quad (12.31c)$$

Se o filtro ZF da Eq. (12.31c) for causal e puder ser implementado, a ISI será completamente eliminada de $z[n]$. Essa parece ser uma excelente solução, pois a única decisão a ser tomada pelo dispositivo de decisão é baseada em

$$z[n] = s_{n-u} + F(z)w[n]$$

sem qualquer ISI. Uma grande deficiência do equalizador reside no remanescente termo de ruído $F(z)w[n]$. Se a potência de ruído $z[n]$ for baixa, a decisão QAM terá grande precisão. Problemas surgem quando a função de transferência $F(z)$ tiver ganhos elevados em certas frequências. Em consequência, o termo de ruído $F(z)w[n]$ pode ser amplificado nestas frequências. Na verdade, quando a resposta em frequência $H(z)$ tiver nulos espectrais, ou seja

$$H(e^{j\omega_o}) = 0 \text{ para algum } \omega_o \in [0, \pi]$$

o equalizador ZF $F(z)$ terá ganho infinito em ω_0 e amplificará substancialmente a componente de ruído em ω_0 .

Uma perspectiva distinta consiste em considerar a variância do ruído filtrado. Se os termos de ruído $w[n]$ forem gaussianos independentes e igualmente distribuídos (i.i.d.) com média zero e variância $N/2$, o termo de ruído filtrado será

$$\tilde{w}[n] = F(z)w[n] = \sum_{i=0}^{\infty} f[i]w[n-i]$$

O termo de ruído permanece gaussiano com média

$$\overline{\sum_{i=0}^{\infty} f[i]w[n-i]} = \sum_{i=0}^{\infty} f[i]\overline{w[n-i]} = 0$$

e variância

$$\left| \sum_{i=0}^{\infty} f[i] w[n-i] \right|^2 = \mathcal{N}/2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} |f[i]|^2$$

Como a saída do equalizador ZF é

$$z[n] = s_{n-u} + \tilde{w}[n]$$

a probabilidade de erro de decisão em $\text{dec}(z[n])$ pode ser analisada com a aplicação das mesmas ferramentas usadas no Capítulo 10 (Seção 10.6). Em particular, com modulação BPSK, $s_n = \pm \sqrt{E_b}$ com igual probabilidade. Portanto, a probabilidade de erro de detecção é

$$P_b = Q \left(\sqrt{\frac{2E_b}{\mathcal{N} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} |f[i]|^2}} \right) \quad (12.32)$$

em que os parâmetros do equalizador ZF podem ser obtidos via transformada Z inversa

$$\begin{aligned} f[i] &= \frac{1}{2\pi j} \oint F(z) z^{i-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{z^{i-1-u}}{H(z)} dz \end{aligned} \quad (12.33)$$

Se $F(e^{j\omega})$ tiver nulos espectrais, $f[i]$ da Eq. (12.33) pode se tornar muito grande e causar sério aumento de P_b .

Exemplo 12.1 Consideremos um canal de primeira ordem

$$H(z) = 1 + z^{-2}$$

Determinemos, no caso de uma transmissão BPSK, o efeito de amplificação de ruído no equalizador ZF.

Como $H(e^{j2\pi f}) = 0$ quando $f = \pm 1/4$, fica claro que $H(z)$ tem nulos espectrais. Com aplicação do equalizador ZF, temos

$$\begin{aligned} f[i] &= \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{z^{i-1-u}}{1+z^{-2}} dz \\ &= \begin{cases} 0 & i < u \\ (-1)^{i-u} & i \geq u \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{i=0}^{\infty} |f[i]|^2 = \sum_{i=u}^{\infty} (1) = \infty$$

Isso significa que a BER da transmissão BPSK é igual a

$$P_b = Q(0) = 0,5$$

A amplificação de ruído é tão severa que a decisão se torna completamente aleatória.

O Exemplo 12.1 mostra claramente o significativo impacto da amplificação de ruído devido à equalização ZF. O efeito de amplificação de ruído é uma forte motivação para a busca de outras metodologias para equalizadores. Uma solução prática é o projeto baseado no mínimo erro quadrático médio (MMSE).

12.3.2 Projeto de TSE com Base em MMSE

Devido ao efeito de amplificação de ruído na equalização ZF, não devemos tentar a eliminação da ISI sem considerar o impacto negativo do termo de ruído. Na verdade, podemos observar a saída do equalizador na Eq. (12.30) e calcular a *distorção total* em $d[n]$ ao considerarmos a diferença (erro)

$$d[n] - s_{n-u} = \sum_{i=0, i \neq u}^{\infty} c_i s_{n-i} - s_{n-u} + \sum_{i=0}^{\infty} f[i] w[n-i] \quad (12.34)$$

Para reduzir o número de erros de decisão quando

$$\text{dec}(d[n]) \neq s_{n-u}$$

seria razoável que projetássemos um equalizador que minimizasse o erro quadrático médio entre $d[n]$ e s_{n-u} . Em outras palavras, o projeto de equalizador com base em MMSE deve minimizar

$$\overline{|d[n] - s_{n-u}|^2} \quad (12.35)$$

A seguir, determinaremos um filtro equalizador que possa minimizar o erro quadrático médio ou Eq. (12.35). Novamente, aplicaremos o princípio da ortogonalidade na estimativa ótima (Seção 8.5): o sinal de erro (diferença) deve ser ortogonal aos sinais usados na entrada do filtro. Como $d[n] = \sum_{i=0}^{\infty} f[i] z[n-i]$, devemos ter

$$(d[n] - s_{n-u}) \perp z[n-\ell] \quad \ell = 0, 1, \dots$$

Em outras palavras,

$$\overline{(d[n] - s_{n-u}) z^*[n-\ell]} = 0 \quad \ell = 0, 1, \dots \quad (12.36)$$

Portanto, os parâmetros do equalizador $\{f[i]\}$ devem satisfazer

$$\overline{\left(\sum_{i=0}^{\infty} f[i] z[n-i] - s_{n-u} \right) z^*[n-\ell]} = 0 \quad \ell = 0, 1, \dots$$

Reparemos que o sinal s_n e o ruído $w[n]$ são independentes. Além disso, os termos $\{s_n\}$ também são i.i.d. com média zero e variância E_s . Portanto, $\overline{s_{n-u} z^*[n]} = 0$, e temos

$$\begin{aligned}
\overline{s_{n-u} z^*[n-\ell]} &= \overline{\sum_{j=0}^{\infty} h[j]^* s_{n-j-\ell}^* + w[n-\ell]^*} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} h[j]^* \overline{s_{n-u} s_{n-j-\ell}^*} + 0 \\
&= \begin{cases} E_s \cdot h[u-\ell]^* & 0 \leq \ell \leq u \\ 0 & \ell > u \end{cases} \tag{12.37}
\end{aligned}$$

Seja

$$R_z[m] = \overline{z[n+m] z^*[n]} \tag{12.38}$$

O equalizador MMSE é, então, a solução das equações lineares

$$\sum_{i=0}^{\infty} f[i] R_z[\ell-i] = \begin{cases} E_s h[u-\ell]^* & \ell = 0, 1, \dots, u \\ 0 & \ell = u+1, u+2, \dots, \infty \end{cases} \tag{12.39}$$

Com base no modelo de sinal de saída do canal, podemos mostrar que

$$\begin{aligned}
R_z[m] &= \overline{\left(\sum_{i=0}^{\infty} h_i s_{n+m-i} + w[n+m] \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} h_j s_{n-j} + w[n] \right)^*} \\
&= E_s \sum_{j=0}^{\infty} h_{m+j} h_j^* + \frac{\mathcal{N}}{2} \delta[m] \tag{12.40}
\end{aligned}$$

Mínimo MSE e Atraso Ótimo

Devido à condição de ortogonalidade Eq. (12.36), temos

$$\overline{(d[n] - s_{n-u}) d[n]^*} = 0$$

Logo, o mínimo erro quadrático médio resultante pode ser calculado como

$$\begin{aligned}
\text{MSE}(u) &= \overline{(s_{n-u} - d[n]) s_{n-u}^*} \\
&= E_s (1 - c_u) \\
&= E_s \left(1 - \sum_{i=0}^{\infty} h_i f[u-i] \right) \tag{12.41}
\end{aligned}$$

Fica claro que equalizadores MMSE de diferentes atrasos podem levar a diferentes resultados de erro quadrático médio. Para determinar o atraso que corresponde ao mínimo erro quadrático médio, o receptor pode determinar o atraso ótimo segundo

$$u_o = \arg \max_u \sum_{i=0}^{\infty} h_i f[u-i] \tag{12.42}$$

Equalizadores MMSE de Comprimento Finito

Como é necessário que o equalizador $F(z)$ seja causal, o equalizador MMSE baseado na solução da Eq. (12.39) não tem uma forma fechada simples. A razão para isso é que $\{f[i]\}$ é causal, embora $R_z[m]$ não seja. Afortunadamente, é comum que a implementação prática do equalizador MMSE assuma a forma de um filtro com resposta ao impulso finita (FIR). Quando $F(z)$ é FIR, o equalizador MMSE pode ser determinado numericamente da Eq. (12.39). Seja

$$F(z) = \sum_{i=0}^M f[i]z^{-i}$$

A condição de ortogonalidade da Eq. (12.39) se reduz a um conjunto finito de equações lineares

$$\sum_{i=0}^M f[i] R_z[\ell - i] = \begin{cases} E_s h[u - \ell]^* & \ell = 0, 1, \dots, u \\ 0 & \ell = u + 1, u + 2, \dots, M \end{cases} \quad (12.43a)$$

Alternativamente, para $u < M$, podemos escrever a condição MMSE na forma matricial:

$$\left[\begin{array}{cccc} R_z[0] & R_z[-1] & \cdots & R_z[-M] \\ R_z[1] & R_z[0] & \cdots & R_z[1-M] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_z[M] & R_z[M-1] & \cdots & R_z[0] \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} f[0] \\ f[1] \\ \vdots \\ f[M] \end{array} \right] = E_s \left[\begin{array}{c} h[u]^* \\ h[u-1]^* \\ \vdots \\ h[0]^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right] \quad \left. \right\} M+1 \text{ linhas} \quad (12.43b)$$

Se o atraso u exceder M , o lado direito da Eq. (12.43b) passa a

$$\left[\begin{array}{cccc} R_z[0] & R_z[-1] & \cdots & R_z[-M] \\ R_z[1] & R_z[0] & \cdots & R_z[1-M] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_z[M] & R_z[M-1] & \cdots & R_z[0] \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} f[0] \\ f[1] \\ \vdots \\ f[M] \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} h[u]^* \\ h[u-1]^* \\ \vdots \\ h[u-M]^* \end{array} \right] \quad (12.43c)$$

A solução é única, desde que a matriz de autocorrelação na Eq. (12.43c) seja de posto (*rank*) completo.

MMSE versus ZF

Reparemos que, se especificarmos o nível de ruído como $= 0$, o projeto do equalizador MMSE das Eqs. (12.39) e (12.43c) se reduz ao projeto ZF. Em outras palavras, ao passar de MMSE a ZF, a única alteração no projeto consiste na substituição de $R_z[0]$ do caso ruidoso para o caso sem ruído

$$R_z[0] = E_s \sum_{j=0}^{\infty} |h_j|^2$$

Todos os outros procedimentos podem ser seguidos diretamente para o cálculo numérico dos parâmetros do equalizador ZF.

No entanto, é importante entender que o projeto de equalizadores ZF de comprimento finito segundo a Eq. (12.43c) pode ou não alcançar o objetivo de forçar toda a ISI a zero. Na verdade, se o canal $H(z)$ tiver ordem L , o projeto ZF requererá

$$F(z)H(z) = \sum_{i=0}^M f[i]z^{-i} \sum_{i=0}^L h[i]z^{-i} = z^{-u}$$

Pode ser igualmente impossível que essa condição seja alcançada por qualquer equalizador causal estável. A razão para isso é muito simples, se considerarmos princípios básicos de polinômios. O lado esquerdo é um polinômio de grau $M + L$. Logo, tem um total de $M + L$ raízes, cujas localizações dependem das funções de transferência do canal e do equalizador. O lado direito, por sua vez, tem apenas uma raiz no ∞ . Portanto, é impossível alcançar completamente essa igualdade de forçamento a zero. Assim, provavelmente, faríamos a seguinte pergunta: *O que conseguíramos com um equalizador de comprimento finito projetado segundo a Eq. (12.43c)?*

A resposta é encontrada na função-objetivo MMSE quando o ruído é zero. Especificamente, o equalizador é projetado para minimizar

$$\overline{|d[n] - s_{n-u}|^2} = \overline{|F(z)H(z)s_n - s_{n-u}|^2}$$

quando o ruído do canal não é levado em consideração. Assim, a solução da Eq. (12.43c) resultaria em um equalizador de comprimento finito que alcança a mínima diferença entre $F(z)H(z)$ e um puro atraso z^{-u} . No domínio do tempo, o projeto ZF de comprimento finito baseado na Eq. (12.43c) minimizará a distorção ISI que for igual a

$$\begin{aligned} & |c_u - 1|^2 + \sum_{j \neq u} |c_j|^2 \\ &= \left| \sum_{i=0}^M f[i]h[u-i] - 1 \right|^2 + \sum_{j \neq u} \left| \sum_{i=0}^M f[i]h[j-i] \right|^2 \end{aligned}$$

Em outras palavras, esse equalizador minimizará a contribuição da ISI ao erro quadrático médio em $d[n]$.

Projeto com Dados Finitos

O projeto MMSE (e ZF) das Eqs. (12.39) e (12.43c) pressupõe conhecimento estatístico de $R_z[m]$ e $S_{n-u} z^* [n-\ell]$. Na prática, nem sempre essa informação está prontamente disponível e sua obtenção pode exigir estimativa em tempo real. É mais comum que o transmissor envie uma curta sequência símbolos de treinamento (ou pilotos) que o receptor pode usar para determinar o equalizador ótimo. A seguir, descreveremos como o projeto anterior pode ser estendido para cobrir esse cenário.

Suponhamos que uma sequência de treinamento $\{s_n, n = n_1, n_1+1, \dots, n_2\}$ seja transmitida. Para projetar um equalizador FIR

$$F(z) = f[0] + f[1]z^{-1} + \cdots + f[M]z^{-M}$$

podemos minimizar o erro quadrático médio

$$J = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=u+n_1}^{u+n_2} |d[n] - s_{n-u}|^2$$

em que

$$d[n] = \sum_{i=0}^M f[i]z[n-i]$$

Para minimizar J , podemos tomar seu gradiente em relação a $f[j]$. Igualando o gradiente a zero, podemos determinar as condições a serem atendidas pelos parâmetros do equalizador ótimo

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^M f[i] \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=u+n_1}^{u+n_2} z[n-i] z^*[n-j] &= \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \\ &\times \sum_{n=u+n_1}^{u+n_2} s_{n-u} z^*[n-j] \quad j = 0, 1, \dots, M \end{aligned} \quad (12.44)$$

Estas $M+1$ condições podem ser escritas de forma mais compacta como

$$\begin{bmatrix} \tilde{R}_z[0,0] & \tilde{R}_z[1,0] & \cdots & \tilde{R}_z[M,0] \\ \tilde{R}_z[0,1] & \tilde{R}_z[1,1] & \cdots & \tilde{R}_z[M,1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{R}_z[0,M] & \tilde{R}_z[1,M] & \cdots & \tilde{R}_z[M,M] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f[0] \\ f[1] \\ \vdots \\ f[M] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{R}_{sz}[-u] \\ \tilde{R}_{sz}[-u+1] \\ \vdots \\ \tilde{R}_{sz}[-u+M] \end{bmatrix} \quad (12.45)$$

em que denotamos as aproximações médias temporais das funções de correlação (para $i, j = 0, 1, \dots, M$) como

$$\begin{aligned} \tilde{R}_z[i,j] &= \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=u+n_1}^{u+n_2} z[n-i] z^*[n-j] \\ \tilde{R}_{sz}[-u+j] &= \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=u+n_1}^{u+n_2} s_{n-u} z^*[n-j] \end{aligned}$$

Uma comparação entre as Eqs. (12.45) e (12.43c) deixa claro que, sob uma curta sequência de treinamento (préâmbulo), o equalizador ótimo pode ser obtido com a substituição dos valores exatos da função de correlação pelas correspondentes aproximações médias temporais. Se, por motivos de complexidade, for necessário evitar a inversão de matrizes, a equalização adaptativa de canais é uma tecnologia viável. A equalização adaptativa de canais foi desenvolvida por Lucky, em Bell Labs,^{4, 5} para canais telefônicos. Essa tecnologia pertence ao campo de filtragem adaptativa. Leitores interessados podem consultar o livro de Ding e Li,⁶ assim como as referências lá citadas.

12.4 EQUALIZADORES LINEARES FRACIONALMENTE ESPAÇADOS (FSE)

Mostramos que, quando o receptor desconhece a resposta do canal, é possível que a TSE perca informação importante de sinal. Na verdade, esse ponto fica bem claro a partir da teoria da amostragem. Como mostrado por Gitlin e Weinstein,⁷ quando o sinal transmitido (ou formato de pulso) tiver conteúdo espectral além de uma frequência $1/(2T)$ Hz, a amostragem à taxa de baud, à frequência de $1/T$, fica abaixo da taxa de Nyquist e pode levar a mascaramento espectral. Em consequência, o desempenho do receptor pode se tornar pobre, devido à perda de informação.

Na maioria dos casos, quando o pulso de transmissão satisfaz o primeiro critério de Nyquist de ISI zero, a componente de sinal recebido deve possuir conteúdo espectral acima de $1/(2T)$ Hz. Por exemplo, quando um pulso cosseno levantado (ou raiz de cosseno levantado) $p_{\text{rcc}}(t)$ é adotado, com fator de decaimento r [Eq. (12.23)], a largura de banda da componente de sinal é

$$\frac{1+r}{2T} \text{ Hz}$$

Por essa razão, a amostragem a $1/T$ seguramente causará mascaramento espectral e perda de informação, a menos que usemos filtros casados perfeitos $q(-t)$ e os momentos ideais de amostragem $t = kT$. Portanto, o uso de amostradores mais rápidos é de grande relevância. Quando o real período de amostragem for uma fração inteira do período de baud T , o sinal amostrado, sob modulação linear, pode ser representado por um modelo de sistema discreto de uma entrada e múltiplas saídas (SIMO – *single-input – multiple-output*). Os equalizadores resultantes são conhecidos como equalizadores fracionalmente espaçados (ou FSE – *fractionally spaced equalizers*).

12.4.1 Modelo Uma Entrada, Múltiplas Saídas (SIMO)

Um FSE pode ser obtido do sistema na Fig. 12.6, se o canal for amostrado a uma taxa mais rápida que a taxa de baud ou de símbolos $1/T$. Seja m um inteiro tal que o intervalo de amostragem seja $\Delta = T/m$. Em geral, como o pulso (raiz de) cosseno levantado tem largura de banda B ,

$$\frac{1}{2T} \leq B = \frac{1+r}{2T} \leq \frac{1}{T}$$

Qualquer taxa de amostragem da forma $1/\Delta = m/T$ ($m > 1$) será acima da taxa de amostragem de Nyquist e pode evitar mascaramento. Para efeitos de análise, denotemos a sequência de amostras da saída do canal por

$$\begin{aligned} z(k\Delta) &= \sum_{n=0}^{\infty} s_n h(k\Delta - nT) + w(k\Delta) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} s_n h(k\Delta - nm\Delta) + w(k\Delta) \end{aligned} \quad (12.46)$$

Para simplificar a notação, a saída superamostrada do canal $z(k\Delta)$ pode ser reorganizada (decimada) em m sequências paralelas

$$\begin{aligned} z_i[k] &\triangleq z(kT + i\Delta) \\ &= z(km\Delta + i\Delta) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} s_n h(km\Delta + i\Delta - nm\Delta) + w(km\Delta + i\Delta). \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} s_n h(kT - nT + i\Delta) + w(kT + i\Delta) \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (12.47)$$

Cada subsequência $z_i[k]$ está relacionada aos dados originais por

$$z_i[k] \triangleq z(kT + i\Delta) = s_k * h(kT + i\Delta) + w(kT + i\Delta)$$

Na verdade, cada subsequência é uma saída de um *subcanal* linear. Denotando a resposta de cada subcanal por

$$h_i[k] \triangleq h(kT + i\Delta) \iff H_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_i[k] z^{-k}$$

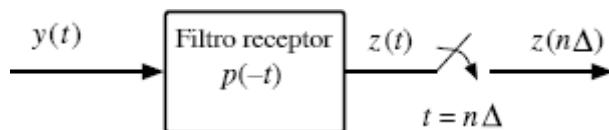


Figura 12.6 Front end de receptor com amostragens fracionalmente espaçadas para FSE.

e o correspondente ruído de subcanal por

$$w_i[k] \triangleq w(kT + i\Delta)$$

as m saídas de subcanais são reorganizadas como

$$\begin{aligned}
z_i[k] &= \sum_{n=0}^{\infty} s_n h_i[k-n] + w_i[k] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} h_i[n] s_{n-k} + w_i[k] \quad i = 1, \dots, m
\end{aligned} \tag{12.48}$$

Assim, essas m subsequências podem ser vistas como saídas estacionárias de m canais discretos, com uma sequência de entrada comum $s[k]$, como mostrado na Fig. 12.7. Naturalmente, isso representa um sistema de uma entrada, múltiplas saídas (SIMO) análogo a um receptor físico com m antenas. O FSE é, na verdade, um banco de m filtros $\{F_i(z)\}$ que, conjuntamente, tentam minimizar a distorção de canal mostrada na Fig. 12.7.

12.4.2 Configurações de FSE

Com base na representação SIMO do FSE na Fig. 12.7, um filtro FSE é provido para cada subsequência $z_i[k]$. Na verdade, o equalizador é um vetor de filtros

$$F_i(z) = \sum_{k=0}^M f_i[k] z^{-k} \quad i = 1, \dots, m \tag{12.49}$$

As saídas dos m filtros são somadas para formar a saída estacionária do equalizador

$$y[k] = \sum_{i=1}^m \sum_{n=0}^M f_i[n] z_i[k-n] \tag{12.50}$$

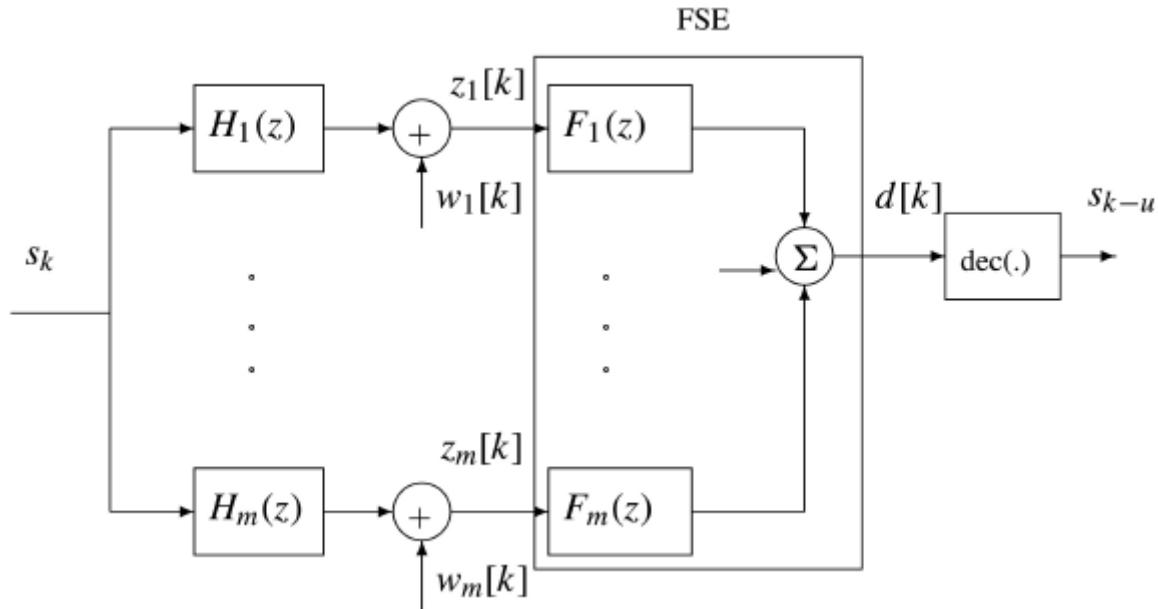


Figura 12.7 Estrutura equivalente de equalizadores fracionalmente espaçados (FSE).

Dada a relação linear entre a saída do equalizador e os parâmetros do equalizador, qualquer critério de projeto TSE pode ser generalizado em um projeto FSE.

Configuração ZF

Para projetar um FSE ZF, o objetivo é a eliminação de toda ISI na saída do dispositivo de decisão. Como, agora, há m subcanais paralelos, os filtros ZF devem satisfazer

$$C(z) = \sum_{i=1}^m F_i(z) H_i(z) = z^{-u} \quad (12.51)$$

Essa condição de forçamento a zero significa que a saída de decisão terá um atraso inteiro u .

Um exame mais detalhado dessa condição ZF revela sua conexão com a conhecida *identidade de Bezout*. Na identidade de Bezout, suponhamos que existam dois polinômios de graus até L ,

$$A_1(z) = \sum_{i=0}^L a_{1,i} z^{-i} \quad \text{e} \quad A_2(z) = \sum_{i=0}^L a_{2,i} z^{-i}$$

Se $A_1(z)$ e $A_2(z)$ não tiverem qualquer raiz em comum, são denominados polinômios **coprimos**. A identidade de Bezout afirma que, se $A_1(z)$ e $A_2(z)$ forem coprimos, deve haver dois polinômios

$$B_1(z) = \sum_{i=0}^M b_{1,i} z^{-i} \quad \text{e} \quad B_2(z) = \sum_{i=0}^M b_{2,i} z^{-i}$$

tais que

$$B_1(z)A_1(z) + B_2(z)A_2(z) = 1$$

A condição de grau é que $M \geq L - 1$. A solução para $B_1(z)$ e $B_2(z)$ pode não ser única. Fica evidente do texto clássico de Kailah⁸ que a condição de projeto ZF da Eq. (12.51) é uma generalização da identidade de Bezout para m canais. Para sermos precisos, seja $\{H_i(z), i = 1, 2, \dots, m\}$ um conjunto de polinômios de z^{-1} de graus finitos, com grau máximo L . Se as funções de transferência dos m subcanais $\{H_i(z)\}$ forem coprimas, existirá um conjunto de filtros $\{F_i(z)\}$ de graus $M \geq L - 1$ tais que

$$\sum_{i=1}^m F_i(z) H_i(z) = z^{-u} \quad (12.52)$$

em que o atraso pode ser selecionado do intervalo $u = 0, 1, \dots, M + L - 1$. Notemos que os filtros equalizadores $\{F_i(z)\}$ variam com o desejado atraso u . Além disso, para cada atraso u , os filtros equalizadores ZF $\{F_i(z)\}$ não são necessariamente únicos.

A seguir, descreveremos a abordagem numérica para a determinação dos parâmetros do filtro equalizador. Em vez de prosseguirmos com a representação polinomial no domínio z , podemos determinar a representação matricial da Eq. (12.52) como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} h_1[0] & \cdots & \cdots & h_m[0] \\ h_1[1] & \ddots & \cdots & h_m[1] \\ \vdots & \ddots & h_1[0] & \cdots & \cdots & \vdots & \ddots & h_m[0] \\ h_1[L] & \ddots & h_1[1] & \cdots & \cdots & h_m[L] & \ddots & h_m[1] \\ \ddots & \vdots & \cdots & \cdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ h_1[L] & \cdots & \cdots & & & & & h_m[L] \end{bmatrix}}_{\mathcal{H}: (L+M) \times m(M+1)} \begin{bmatrix} f_1[0] \\ f_1[1] \\ \vdots \\ f_1[M] \\ \vdots \\ f_m[0] \\ f_m[1] \\ \vdots \\ f_m[M] \end{bmatrix}_{m(M+1) \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(M+L) \times 1} \leftarrow u\text{-ésimo} \quad (12.53)$$

O projeto numérico como uma solução a essa configuração ZF existe se e somente se \mathcal{H} tiver posto de linha completo, ou seja, se as linhas de \mathcal{H} forem linearmente independentes. Essa condição é satisfeita para FSE (ou seja, $m > 1$) se $M \geq L$ e $\{H_i(z)\}$ forem coprimas.⁶

Configuração FSE MMSE

Aplicaremos uma técnica semelhante para a obtenção da configuração FSE MMSE. A diferença entre FSE e TSE reside no sinal de saída

$$d[n] = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^M f_i[k] z_i[n-k]$$

Para minimizar o MSE $\overline{|d[n-u]|^2}$, o princípio da ortogonalidade leva a

$$\overline{(d[n] - s_{n-u}) z_j^*[n-\ell]} = 0 \quad \ell = 0, 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, m \quad (12.54)$$

Portanto, os parâmetros do equalizador $\{f_i[k]\}$ devem satisfazer

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^M f_i[k] \overline{z_i[n-k] z_j^*[n-\ell]} = \overline{s_{n-u} z_j^*[n-\ell]} \quad \ell = 0, 1, \dots, M, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Há $m(M + 1)$ equações para os $m(M + 1)$ parâmetros desconhecidos $\{f_i[k]\}$, $i = 1, \dots, m$, $k = 0, \dots, M$. A configuração FSE MMSE pode ser determinada como uma solução desse conjunto de equações lineares. Em termos de questões práticas, também podemos fazer as seguintes observações:

- Quando temos apenas dados de comprimento finito para estimar a estatística necessária,

$$\overline{s_{n-u} z_j^*[n-\ell]} \quad \text{e} \quad \overline{z_i[n-k] z_j^*[n-\ell]}$$

podem ser substituídos por suas médias temporais da coleção limitada de dados. Isso é semelhante ao projeto TSE.

- Também semelhante ao projeto TSE MMSE, diferentes valores do atraso u levarão a diferentes erros quadráticos médios. Para determinar o atraso ótimo, podemos calcular o MSE para todos os atrasos positivos $u = 0, 1, \dots, M + L - 1$ e escolher o atraso que resulta no menor valor de MSE.

Desde seu surgimento,⁷ equalizadores adaptativos têm sido implementados como FSE. Quando há disponibilidade de dados de treinamento, a FSE tem a vantagem de suprimir a sensibilidade à fase temporal.⁷ Ao contrário do caso TSE, a FSE linear não amplifica necessariamente o ruído de canal. De fato, o efeito de amplificação de ruído depende fortemente da condição de canal coprimo. Em alguns casos, os subcanais em um conjunto não têm estritamente qualquer zero em comum. No entanto, se existir pelo menos um ponto z_a que seja quase a raiz de todos os subcanais, isto é,

$$H_i(z_a) \approx 0 \quad i = 1, \dots, m$$

dizemos que os subcanais são quase singulares. Quando os subcanais são coprimos e quase singulares, o efeito de amplificação de ruído ainda pode ser muito severo.

12.5 ESTIMAÇÃO DE CANAL

Até aqui, focamos a abordagem direta de projeto do equalizador, na qual os parâmetros do filtro equalizador são estimados diretamente dos sinais de entrada do canal s_n e dos sinais de saída do canal $z_i[n]$. Devemos nos dar conta de que, se o receptor MMSE for implementado, o algoritmo MMSE requer o conhecimento dos parâmetros do canal $\{h[k]\}$. Quando conhecimento exato do canal não estiver disponível, o receptor deve, primeiro, completar o importante passo de estimação do canal.

Na estimativa de canal, é mais comum considerar canais FIR de ordem finita L . Assim como no caso de estimativa linear de parâmetros do equalizador introduzido na seção anterior, a estimativa de canal deve, primeiro, considerar a relação entrada-saída do canal

$$z[n] = \sum_{k=0}^L h[k]s_{n-k} + w[n] \quad (12.55)$$

Caso símbolos pilotos consecutivos $\{s_n, n = n_1, n_1 + 1, \dots, n_2\}$ forem transmitidos, devido à ordem finita L do canal, as seguintes amostras da saída do canal

$$\{z[n], \quad n = n_1 + L, n_1 + L + 1, \dots, n_2\}$$

dependem apenas desses dados pilotos e do ruído. Podemos aplicar o princípio de MMSE para estimar os coeficientes do canal $\{h[k]\}$ para minimizar o erro de estimação médio:

$$J(h[0], h[1], \dots, h[L]) = \frac{1}{n_2 - n_1 - L + 1} \sum_{n_1+L}^{n_2} \left| z[n] - \sum_{k=0}^L h[k]s_{n-k} \right|^2 \quad (12.56)$$

Essa estimação MMSE pode ser simplificada igualando a zero a derivada de $J(h[0], h[1], \dots, h[M])$ em relação a cada $h[j]$. Removendo constantes redundantes, obtemos

$$\left(\sum_{n_1+L}^{n_2} z[n]s_{n-j}^* \right) - \sum_{k=0}^L h[k] \cdot \left(\sum_{n_1+L}^{n_2} s_{n-k}s_{n-j}^* \right) = 0 \quad j = 0, 1, \dots, L$$

Portanto, definindo

$$\tilde{r}_{sz}[j] \triangleq \sum_{n_1+L}^{n_2} z[n]s_{n-j}^* \quad \text{e} \quad \tilde{R}_s[j, k] \triangleq \sum_{n_1+L}^{n_2} s_{n-k}s_{n-j}^* \quad j = 0, 1, \dots, L$$

podemos simplificar a estimação de canal MMSE em uma expressão matricial compacta:

$$\begin{bmatrix} \tilde{R}_z[0, 0] & \tilde{R}_z[0, 1] & \cdots & \tilde{R}_z[0, L] \\ \tilde{R}_z[1, 0] & \tilde{R}_z[1, 1] & \cdots & \tilde{R}_z[1, L] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{R}_z[L, 0] & \tilde{R}_z[L, 1] & \cdots & \tilde{R}_z[L, L] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \vdots \\ h[L] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{r}_{sz}[0] \\ \tilde{r}_{sz}[1] \\ \vdots \\ \tilde{r}_{sz}[L] \end{bmatrix} \quad (12.57)$$

Para estimar os parâmetros de canal $h[i]$, a Eq. (12.57) pode ser resolvida por inversão de matriz.

No caso mais geral de FSE, o mesmo método pode ser usado para estimar os parâmetros do i -ésimo subcanal: basta substituir $z[n-k]$ por $z_i[n-k]$.

12.6 EQUALIZADOR COM REALIMENTAÇÃO DE DECISÃO

As configurações TSE e FSE discutidas até aqui são conhecidas como equalizadores lineares, pois a equalização consiste em um filtro linear seguido por um dispositivo de decisão sem memória. Tais equalizadores lineares são conhecidos como equalizadores com alimentação para frente (FFW – *feedforward*). As vantagens de equalizadores FFW residem em sua implementação simples como filtros FIR e nas abordagens diretas de projeto. Equalizadores FFW requerem complexidade computacional muito menor que receptores MMSE não lineares.

Equalizadores FFW, no entanto, sofrem de várias deficiências importantes. Primeira, as formas FFW de TSE e FSE podem causar severa amplificação de ruído, dependendo das condições do canal. Segunda, dependendo das raízes dos polinômios de canal, pode haver necessidade de que o(s)

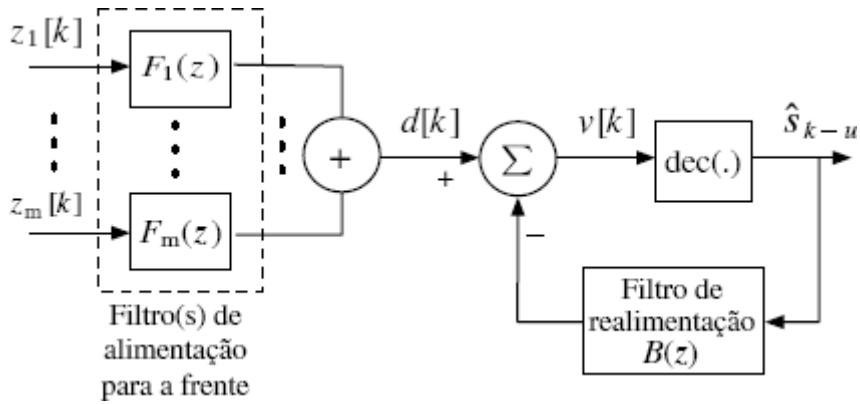


Figura 12.8 Equalizador com realimentação de decisão, com amostras fracionalmente espaçadas.

equalizador(es) FFW seja(m) muito longo(s), para que seja(m) eficaz(es), particularmente quando o canal é quase singular. Para obter uma simples e eficaz equalização de canal sem o risco de amplificação de ruído, uma ferramenta muito útil é o *equalizador com realimentação de decisão* (DFE – *decision feedback equalizer*).

Recordemos que equalizadores FFW, em geral, funcionam como um filtro inverso de canal (na configuração ZF) ou como um filtro inverso de canal regularizado (na configuração MMSE). O DFE, no entanto, inclui um filtro de realimentação, além de um filtro de alimentação para frente. O filtro de alimentação para frente é idêntico a TSE ou FSE linear, enquanto o filtro de realimentação tenta cancelar a ISI de amostras anteriores de dados, com uso de estimativas de dados geradas por um dispositivo de decisão sem memória. O filtro de alimentação para frente pode operar em amostras fracionalmente espaçadas. Portanto, pode haver m filtros paralelos, como mostrado na Fig. 12.8.

A ideia básica por trás da inclusão de um filtro de realimentação $B(z)$ é motivada pela ciência de que a saída do filtro de alimentação para frente $d[k]$ talvez contenha alguma ISI residual que possa ser *regenerada* de forma mais eficaz pela saída do filtro de realimentação e cancelada de $v[k]$. Mais especificamente, consideremos o caso em que a saída do filtro de alimentação para frente $d[k]$ consiste em

$$d[k] = s_{k-u} + \underbrace{\sum_{i=u+1}^N c_i s_{k-i}}_{\text{ISI residual}} + \underbrace{\tilde{w}[n]}_{\text{ruído}} \quad (12.58)$$

Há um termo residual de ISI, assim como um termo de ruído. Se a saída da decisão for muito precisa, tal que

$$\hat{s}_{k-u} = s_{k-u}$$

a entrada do filtro de realimentação será igual ao verdadeiro símbolo de dado. Se denotarmos o filtro de realimentação por

$$B(z) = \sum_{i=1}^{N-u} b_i z^{-i}$$

temos

$$\begin{aligned}
v[k] &= d[k] - \sum_{i=1}^{N-u} b_i \hat{s}_{k-u-i} \\
&= s_{k-u} + \sum_{i=u+1}^N c_i s_{k-i} - \sum_{i=1}^{N-u} b_i \hat{s}_{k-u-i} + \tilde{w}[n] \\
&= s_{k-u} + \sum_{i=u+1}^N c_i s_{k-i} - \sum_{i=1}^{N-u} b_i s_{k-u-i} + \tilde{w}[n] \\
&= s_{k-u} + \sum_{i=1}^{N-u} (c_{u+i} - b_i) s_{k-u-i} + \tilde{w}[n]
\end{aligned} \tag{12.59}$$

Para eliminar a ISI residual, o filtro de realimentação deve ter coeficientes

$$b_i = c_{u+i} \quad i = 1, 2, \dots, N-u-1$$

Com esses parâmetros de DFE, a ISI residual é completamente cancelada. Portanto, a entrada do dispositivo de decisão

$$v[k] = s_{k-u} + \tilde{w}[n]$$

contém ISI zero. A deficiência restante em $v[k]$ é o ruído. Como o termo de ruído em $d[k]$ não é afetado ou amplificado pelo filtro de realimentação, a saída de decisão para o próximo instante de tempo seria muito mais precisa após o cancelamento de toda ISI.

Até aqui, nossa análise do DFE focou a operação ideal do mesmo, quando os resultados de decisão estão corretos. Tradicionalmente, o projeto e análise do DFE são baseados nesse cenário idealizado de operação. O projeto de filtros DFE deve incluir tanto o filtro com alimentação para frente como o filtro com realimentação. Embora, historicamente, tenha havido algumas tentativas anteriores de desacoplar o projeto dos filtros com alimentação para frente e realimentado, o trabalho recente de Al Dhahir e Cioffi⁹ fornece uma discussão ampla e rigorosa.

Na análise de um DFE, a hipótese de saída de decisão correta leva à remoção da ISI em $v[k]$ e, portanto, uma maior possibilidade de que a saída de decisão seja precisa. Não podemos deixar de notar esse argumento circular “galinha ou ovo”. A verdade é que o DFE é inherentemente um sistema não linear. Mais importante, o dispositivo de decisão abrupta nem ao menos é diferenciável. Por conseguinte, as ferramentas analíticas mais tradicionais desenvolvidas para sistemas lineares e não lineares deixam de ser aplicáveis. Por essa razão, a irônica análise galinha-ovo se torna o último recurso. Por sorte, para sistemas de alta SNR, esse argumento circular produz resultados analíticos que podem ser verificados experimentalmente, com boa concordância.

Propagação de Erro em DFE

Devido à sua estrutura de realimentação, o equalizador DFE está sujeito a um fenômeno particular conhecido como propagação de erro. Por exemplo, quando o dispositivo de decisão comete um erro, o símbolo errôneo será enviado ao filtro de realimentação e usado para cancelamento de ISI na Eq. (12.59). Contudo, como símbolo é incorreto, em vez de cancelar a ISI causada por esse símbolo, a subtração de cancelamento pode, ao contrário, reforçar a ISI em $v[k]$. Em consequência, o dispositivo de decisão fica mais sujeito a cometer erros subsequentes. Isto é conhecido como *propagação de erro*.

Propagação de erro significa que o real desempenho de DFE será pior que a previsão de resultados analíticos deduzidos sob a hipótese de decisão perfeita. Além disso, o efeito da propagação de erro significa que DFE está mais sujeito a cometer uma rajada de erros de decisão antes que haja recuperação do modo de propagação de erro. O tempo necessário para recuperação da propagação de erro depende da resposta do canal, e foi investigado por Kennedy e Anderson.¹⁰

12.7 COMUNICAÇÕES OFDM (MULTIPORTADORA)

Como aprendemos no projeto de TSE e FSE, a equalização de canal é uma tarefa exclusiva de receptores. A única assistência prestada pelo transmissor à equalização feita pelo receptor é a possível transmissão de símbolos de treinamento ou pilotos. Em um típico ambiente de incerteza, é razoável que receptores assumam a tarefa de equalização, pois, em geral, o transmissor tem pouco ou nenhum conhecimento da resposta do canal em uso.* Não obstante a implementação mais simples em comparação com MLSE ótimo, em geral, equalizadores – como os de alimentação para frente e com realimentação de decisão – levam a

desempenho abaixo do satisfatório. E, o que é mais importante, o desempenho de equalizadores FFW e com realimentação de decisão é demasiadamente sensível a todos os parâmetros em sua estrutura transversal. Caso um ou mais parâmetros deixem de reter o valor desejado, todo o equalizador falhará.

Em várias aplicações, os transmissores têm informação parcial a respeito das características do canal. Uma das mais importantes peças de informação parcial de canal é o espalhamento de atraso de canal, ou seja, para um canal de comprimento finito

$$H(z) = \sum_{k=0}^L h[k]z^{-k}$$

a ordem L do canal é conhecida no transmissor, embora $\{h[k]\}$ ainda seja desconhecido. Dada essa informação parcial de canal, uma particular técnica de transmissão, conhecida como modulação por divisão em frequências ortogonais (OFDM – *orthogonal frequency division modulation*), pode ser implementada no transmissor. Com a aplicação de OFDM, a tarefa de equalização pelo receptor é um pouco simplificada.

12.7.1 Princípios de OFDM

Consideremos um transmissor responsável pela transmissão de uma sequência de sinais de dados $\{s_k\}$ por um canal FIR $H(z)$ de ordem máxima L . Antes de iniciarmos a descrição dos fundamentos de OFDM, reparemos que a resposta de frequência do canal FIR pode ser representada como

$$H(e^{j2\pi fT}) = \sum_{k=0}^L h[k]e^{-j2\pi fkT} \quad (12.60)$$

em que T é a duração de cada símbolo e, também, o período de amostragem. Como $H(e^{j2\pi fT})$ é a resposta de frequência do canal, $h[k] = h(kT)$ é uma função periódica de f , com período $1/T$.

A transformada de Fourier discreta (DFT – *discrete fourier transform*) é uma função amostrada da resposta de frequência do canal. Seja N o número total de amostras uniformes em cada período de frequência $1/T$. Assim, a frequência f é amostrada em

$$\begin{aligned} f_0 &= 0 \cdot \frac{1}{NT} = 0 \\ f_1 &= 1 \cdot \frac{1}{NT} = \frac{1}{NT} \\ &\vdots \\ f_{N-1} &= (N-1) \cdot \frac{1}{NT} = \frac{(N-1)}{NT} \end{aligned}$$

Podemos usar uma notação mais simples para denotar a sequência DFT ao definirmos $\omega_n = 2\pi n/NT$:

$$\begin{aligned}
H[n] &= H(e^{j\omega_n T}) \\
&= \sum_{k=0}^L h[k] \exp(-j\omega_n Tk) \\
&= \sum_{k=0}^L h[k] \exp\left(-j2\pi \frac{n}{NT} kT\right) \\
&= \sum_{k=0}^L h[k] \exp\left(-j2\pi \frac{nk}{N}\right) \quad n = 0, 1, \dots, (N-1)
\end{aligned} \tag{12.61}$$

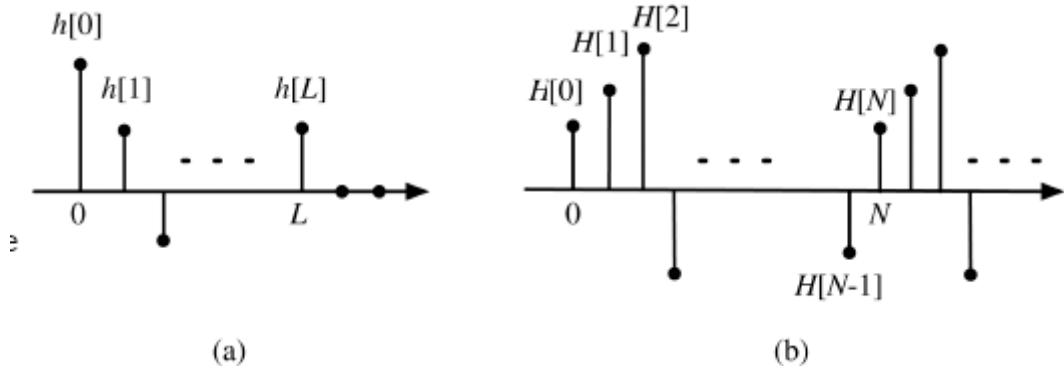


Figura 12.9 (a) Resposta do canal no domínio do tempo discreto e (b) saí correspondente DFT periódica.

Na Eq. (12.61), é útil perceber que $H[n]$ é periódica, com período N (Fig. 12.9). Logo,

$$H[-n] = \sum_{k=0}^L h[k] \exp\left(j2\pi \frac{nk}{N}\right) \tag{12.62a}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^L h[k] \exp\left(j2\pi \frac{nk}{N} - j2\pi \frac{Nk}{N}\right) \\
&= \sum_{k=0}^L h[k] \exp\left[-j2\pi \frac{(N-n)k}{N}\right] \\
&= H[N-n]
\end{aligned} \tag{12.62b}$$

Com base na relação convolucional entre a entrada $\{s_k\}$ e saída do canal

$$z[k] = \sum_{i=0}^L h[i] s_{k-i} + w[k]$$

um vetor de N símbolos de saída pode ser escrito na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} z[N] \\ z[N-1] \\ \vdots \\ z[L] \\ \vdots \\ z[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] & h[1] & \cdots & h[L] \\ & h[0] & h[1] & \cdots & h[L] \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & h[0] & h[1] & \cdots & h[L] \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & h[0] & h[1] & \cdots & h[L] \end{bmatrix} \\
\times \begin{bmatrix} s_N \\ s_{N-1} \\ \vdots \\ s_1 \\ s_0 \\ \vdots \\ s_{-(L-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w[N] \\ w[N-1] \\ \vdots \\ w[L] \\ \vdots \\ w[1] \end{bmatrix} \quad (12.63)$$

O passo fundamental em OFDM é a introdução do que é conhecido como *prefixo cíclico* aos dados transmitidos.^{*} Esse passo substitui os M primeiros elementos

$$s_0, s_{-1}, \dots, s_{-(L-1)}$$

do vetor de dados de $(N + L)$ dimensões pelos últimos símbolos

$$\{s_N, s_{N-1}, \dots, s_{N-L+1}\} \longrightarrow \{s_0, s_{-1}, \dots, s_{-(L-1)}\}$$

Com a inserção do prefixo cíclico, podemos reescrever a Eq. (12.63) como

$$\begin{bmatrix} z[N] \\ z[N-1] \\ \vdots \\ z[L] \\ \vdots \\ z[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] & h[1] & \cdots & h[L] \\ & h[0] & h[1] & \cdots & h[L] \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & h[0] & h[1] & \cdots & h[L] \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & h[0] & h[1] & \cdots & h[L] \end{bmatrix} \\
\times \begin{bmatrix} s_N \\ s_{N-1} \\ \vdots \\ s_1 \\ s_N \\ \vdots \\ s_{N-L+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w[N] \\ w[N-1] \\ \vdots \\ w[L] \\ \vdots \\ w[1] \end{bmatrix} \quad (12.64a)$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} h[0] & h[1] & \cdots & h[L] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h[0] & h[1] & \cdots & h[L] & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & h[0] & h[1] & \cdots & h[L] \\ h[L] & \ddots & \ddots & 0 & h[0] & \cdots & h[L-1] \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ h[1] & \cdots & h[L] & 0 & \cdots & 0 & h[0] \end{bmatrix}}_{\mathcal{H}_{cp} : (N \times N)} + \begin{bmatrix} w[N] \\ w[N-1] \\ \vdots \\ w[L] \\ \vdots \\ w[1] \end{bmatrix} \quad (12.64b)$$

O papel crítico do prefixo cíclico é a conversão da matriz de convolução do canal na Eq. (12.64a) na matriz cíclica $N \times N$ bem estruturada na Eq. (12.64b).

A seguir, precisamos introduzir a matriz DFT de N pontos e a correspondente matriz DFT inversa. Primeiro, é mais conveniente que denotemos

$$W_N = \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}\right)$$

Esse número complexo W_N tem algumas propriedades úteis:

- $W_N^N = 1$
- $W_N^{-i} = W_N^{N-i}$

Se tomarmos a DFT do vetor de N dimensões

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{N-1} \end{bmatrix}$$

obtemos a DFT

$$V[n] = \sum_{k=0}^{N-1} v_i \exp\left(-j2\pi \frac{nk}{N}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} v_i W_N^{nk} \quad n = 0, 1, \dots, (N-1)$$

e

$$V[-n] = \sum_{k=0}^{N-1} v_i \exp\left(j2\pi \frac{nk}{N}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} v_i W_N^{-nk} \quad n = 0, 1, \dots, (N-1)$$

A DFT inversa também pode ser simplificada como

$$v_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} V[n] \exp\left(j2\pi \frac{nk}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} V[n] W_N^{-nk} \quad k = 0, 1, \dots, (N-1)$$

Com isso, a DFT de N pontos de \mathbf{v} pode ser escrita na forma matricial

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V[0] \\ V[1] \\ \vdots \\ V[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_N^{0\cdot 0} & W_N^{0\cdot 1} & \cdots & W_N^{0\cdot(N-1)} \\ W_N^{1\cdot 0} & W_N^{1\cdot 1} & \cdots & W_N^{1\cdot(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ W_N^{(N-1)\cdot 0} & W_N^{(N-1)\cdot 1} & \cdots & W_N^{(N-1)\cdot(N-1)} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v} \quad (12.65)$$

Se denotarmos a matriz DFT $N \times N$ por

$$\mathbf{W}_N \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^1 & \cdots & W_N^{(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \quad (12.66a)$$

\mathbf{W}_N também tem uma inversa

$$\mathbf{W}_N^{-1} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & \cdots & W_N^{-(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & W_N^{-(N-1)} & \cdots & W_N^{-(N-1)^2} \end{bmatrix} \quad (12.66b)$$

Isso pode ser comprovado (Exercício 12.7-1) mostrando que

$$\mathbf{W}_N \cdot \mathbf{W}_N^{-1} = I_{N \times N}$$

Com essa notação, obtemos a relação

$$\mathbf{V} = \mathbf{W}_N \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{W}_N^{-1} \cdot \mathbf{V}$$

Uma propriedade notável da matriz cíclica $_{cp}$ pode ser estabelecida com a aplicação das matrizes DFT e IDFT,

$$\mathcal{H}_{cp} \cdot \mathbf{W}_N^{-1} = \begin{bmatrix} h[0] & h[1] & \cdots & h[L] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h[0] & h[1] & \cdots & h[L] & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & h[0] & h[1] & \cdots & h[L] \\ h[L] & \ddots & \ddots & 0 & h[0] & \cdots & h[L-1] \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ h[1] & \cdots & h[L] & 0 & \cdots & 0 & h[0] \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & \cdots & W_N^{-(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & W_N^{-(N-1)} & \cdots & W_N^{-(N-1)^2} \end{bmatrix} \\
& = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} H[0] & H[-1] & \cdots & H[-N+1] \\ H[0] & H[-1]W_N^{-1} & \cdots & H[-N+1]W_N^{-(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ H[0] & H[-1]W_N^{-(N-1)} & \cdots & H[-N+1]W_N^{-(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \\
& = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & \cdots & W_N^{-(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & W_N^{-(N-1)} & \cdots & W_N^{-(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H[0] & & & \\ & H[-1] & & \\ & & \ddots & \\ & & & H[-N+1] \end{bmatrix} \\
& = \mathbf{W}_N^{-1} \cdot \mathbf{D}_H \tag{12.67a}
\end{aligned}$$

em que definimos a matriz diagonal com as entradas da DFT do canal

$$\mathbf{D}_H = \begin{bmatrix} H[0] & & & \\ & H[-1] & & \\ & & \ddots & \\ & & & H[-N+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H[N] & & & \\ & H[N-1] & & \\ & & \ddots & \\ & & & H[1] \end{bmatrix}$$

A última igualdade advém da natureza periódica de $H[n]$ dada na Eq. (12.62b). Deixamos como exercício para o leitor mostrar que qualquer matriz cíclica de ordem $N \times N$ pode ser diagonalizada por pré-multiplicação por \mathbf{W}_N e pós-multiplicação por \mathbf{W}_N^{-1} (Exercício 12.7-2).

Com base na Eq. (12.67a), estabelecemos a seguinte relação importante para OFDM:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\text{cp}} &= \mathbf{W}_N^{-1} \cdot \mathbf{D}_H \cdot \mathbf{W}_N \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{W}_N \right)^{-1} \cdot \mathbf{D}_H \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{W}_N \tag{12.67b}
\end{aligned}$$

Recordemos que, após a adição do prefixo cíclico, a relação entrada-saída do canal se reduz à Eq. (12.64b). Em consequência,

$$\begin{bmatrix} z[N] \\ z[N-1] \\ \vdots \\ z[1] \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{W}_N \right)^{-1} \cdot \mathbf{D}_H \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{W}_N \right) \begin{bmatrix} s_N \\ s_{N-1} \\ \vdots \\ s_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w[N] \\ w[N-1] \\ \vdots \\ w[1] \end{bmatrix}$$

Isso significa que se colocarmos dados da fonte de informação em

$$\tilde{\mathbf{s}} \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{s}_N \\ \tilde{s}_{N-1} \\ \vdots \\ \tilde{s}_1 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{W}_N \right) \begin{bmatrix} s_N \\ s_{N-1} \\ \vdots \\ s_1 \end{bmatrix}$$

podemos obter os símbolos de transmissão OFDM de

$$\mathbf{s} \triangleq \begin{bmatrix} s_N \\ s_{N-1} \\ \vdots \\ s_1 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{W}_N \right)^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{s}_N \\ \tilde{s}_{N-1} \\ \vdots \\ \tilde{s}_1 \end{bmatrix}$$

Apesar do escalar $1/\sqrt{N}$, podemos chamar a transformação matricial de de $\sqrt{N} \mathbf{W}_N^{-1}$ operação IDFT (DFT inversa). Em outras palavras, aplicamos IDFT aos dados da fonte de informação $\tilde{\mathbf{s}}$ no transmissor OFDM para obtermos \mathbf{s} antes da adição do prefixo cíclico.

Do mesmo modo, podemos transformar o vetor de saída do canal com

$$\tilde{\mathbf{z}} \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{z}[N] \\ \tilde{z}[N-1] \\ \vdots \\ \tilde{z}[1] \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{W}_N \right) \begin{bmatrix} z[N] \\ z[N-1] \\ \vdots \\ z[1] \end{bmatrix}$$

Correspondendo à IDFT, essa operação também pode ser chamada de DFT. Por fim, reparemos que o vetor de ruído na saída do canal também passa pela DFT:

$$\tilde{\mathbf{w}} \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{w}[N] \\ \tilde{w}[N-1] \\ \vdots \\ \tilde{w}[1] \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{W}_N \right) \begin{bmatrix} w[N] \\ w[N-1] \\ \vdots \\ w[1] \end{bmatrix}$$

Agora, podemos ver a relação simples que existe entre os dados da fonte e o vetor de saída do canal, que passou pela DFT

$$\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{D}_H \tilde{\mathbf{s}} + \tilde{\mathbf{w}} \quad (12.68a)$$

Como \mathbf{D}_H é diagonal, esse produto de matrizes é essencialmente uma multiplicação elemento a elemento:

$$\tilde{z}[n] = H[n] \tilde{s}_n + \tilde{w}[n] \quad n = 1, \dots, N \quad (12.68b)$$

Isso mostra que, agora, temos N (sub)canais paralelos, sendo cada um apenas um canal escalar de ganho $H[n]$. Cada vetor de N símbolos de dados na transmissão OFDM é conhecido como *quadro OFDM (OFDM frame)* ou símbolo OFDM. Cada subcanal $H[n]$ também é conhecido como subportadora.

Com a aplicação da IDFT ao vetor de dados da fonte e da DFT ao vetor de saída do canal, a OFDM converte um canal de ordem L com ISI em N subcanais paralelos sem ISI. Com isso, não há mais necessidade de tratarmos com a convolução complexa associada à resposta do canal no domínio do tempo. Cada subcanal passa a ser apenas um ganho não seletivo em frequência. Não há ISI em cada subcanal. Os N subcanais paralelos são independentes, pois seus ruídos são independentes. Por isso, a modulação é conhecida como modulação por divisão em frequências ortogonais (OFDM). O diagrama em blocos da implementação de um sistema OFDM de N pontos com canal FIR linear de ordem L é mostrado na Fig. 12.10.

12.7.2 Ruído em Canal OFDM

Segundo a Eq. (12.68b), cada um dos N canais atua como uma portadora separada, com frequência $f = n/NT$ e ganho de canal $H[n]$. Com efeito, os símbolos de dados originais $\{\tilde{s}_n\}$ são divididos em N sequências e transmitidos por N subportadoras. Por essa razão aparente, OFDM também é conhecida como sistema de comunicação por *subportadoras*. Em resumo, OFDM utiliza IDFT e prefixo cíclico para realizar comunicação multiportadora sem a necessidade de, em realidade, gerar e modular múltiplas (sub)portadoras. O real diagrama em blocos de OFDM é apresentado na Fig. 12.11.

Agora, estudemos a relação entre as amostras de ruído transformado $\tilde{w}[n]$ na Fig. 12.11. Primeiro, reparemos que

$$\begin{aligned}\tilde{w}[N-j] &= \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k \cdot (N-j)} w[N-k] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-kj} w[N-k] \quad j = 0, 1, \dots, (N-1)\end{aligned}$$

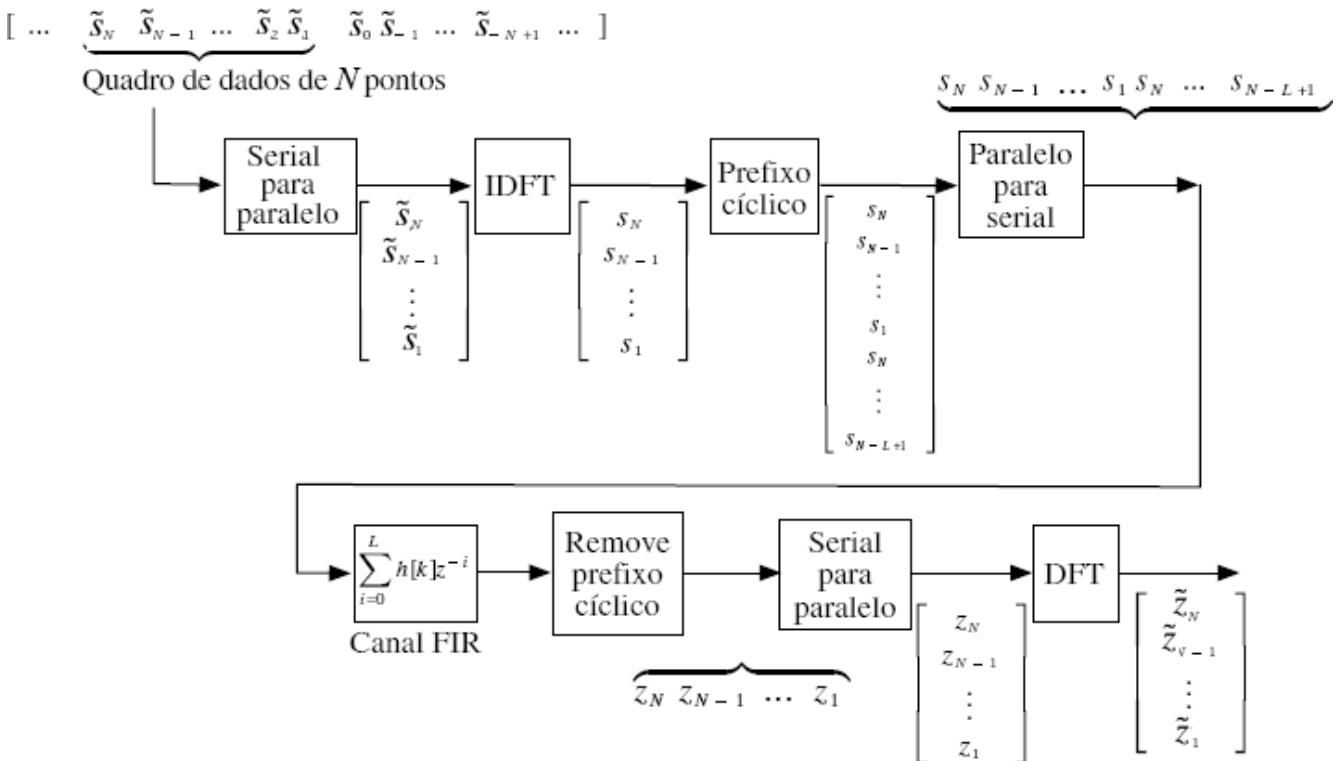


Figura 12.10 Ilustração de um sistema de transmissão OFDM de N pontos.

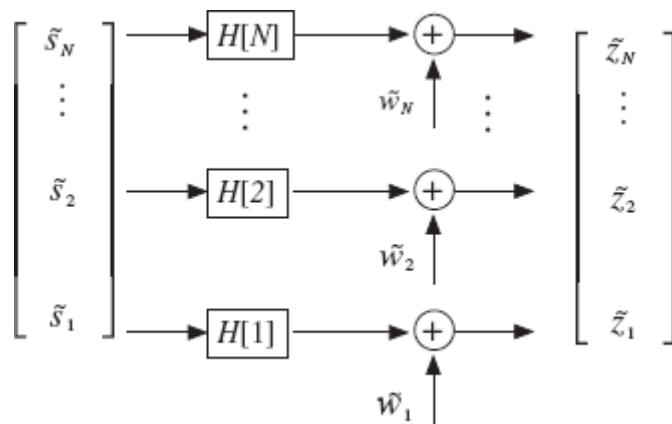


Figura 12.11 N canais AWGN independentes gerados por OFDM sem ISI.

Essas são combinações lineares de amostras de ruído gaussiano conjuntamente distribuídas $\{w[N-k]\}$. Portanto, $\{\tilde{w}[N-j]\}$ permanece gaussiana. Além disso, como $w[n]$ tem média zero,

$$\begin{aligned}
\overline{\tilde{\mathbf{w}}[N-j]} &= \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-kj} \overline{\mathbf{w}[N-k]} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, (N-1) \\
\overline{\tilde{\mathbf{w}}[N-i] \tilde{\mathbf{w}}[N-j]^*} &= \frac{1}{N} \sum_{k_1=0}^{N-1} W_N^{-k_1 \cdot i} \mathbf{w}[N-k_1] \sum_{k_2=0}^{N-1} W_N^{k_2 \cdot j} \mathbf{w}[N-k_2]^* \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} W_N^{k_2 \cdot j - k_1 \cdot i} \overline{\mathbf{w}[N-k_1] \mathbf{w}[N-k_2]^*} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} W_N^{k_2 \cdot j - k_1 \cdot i} \cdot \frac{\mathcal{N}}{2} \delta[k_1 - k_2] \\
&= \mathcal{N}/2N \sum_{k_1=0}^{N-1} W_N^{k_1(j-i)} \\
&= \mathcal{N}/2N \cdot \begin{cases} N & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \\
&= \frac{\mathcal{N}}{2} \delta[i-j]
\end{aligned} \tag{12.69}$$

Como $\{\tilde{\mathbf{w}}[n]\}$ têm média zero com correlação zero, são descorrelacionadas, segundo a Eq. (12.69). Adicionalmente, $\{\tilde{\mathbf{w}}[n]\}$ são ruídos gaussianos. Como variáveis aleatórias gaussianas descorrelacionadas também são independentes, $\{\tilde{\mathbf{w}}[n]\}$ são ruídos independentes com média zero e variâncias idênticas $\mathcal{N}/2$. A independência dos N canais de ruído demonstra que OFDM converte um canal FIR com ISI e ordem máxima L em N canais paralelos, independentes e AWGN, como mostrado na Fig. 12.11.

12.7.3 OFDM com Preenchimento de Zeros

Mostramos que, com a introdução de um prefixo cíclico de comprimento L , uma matriz de convolução cíclica de canal pode ser estabelecida. Como qualquer matriz cíclica de ordem $N \times N$ pode ser diagonalizada por IDFT e DFT (Exercício 12.7-2), o canal com ISI de ordem menor ou igual a L é transformado em N subcanais paralelos independentes.

Existe uma abordagem alternativa ao uso do prefixo cíclico: o método conhecido como **preenchimento com zeros**. O transmissor, primeiro, efetua a IDFT nos N dados de entrada. A seguir, em vez de repetir os últimos L símbolos, como na Eq. (12.64b), para transmitir

$$\begin{bmatrix} s_N \\ s_{N-1} \\ \vdots \\ s_1 \\ s_N \\ \vdots \\ s_{N-L+1} \end{bmatrix}$$

o prefixo cíclico pode ser simplesmente substituído por L zeros, para transmitir

$$\left[\begin{array}{c} s_N \\ s_{N-1} \\ \vdots \\ s_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right] \quad (N+L) \times 1$$

Os passos restantes da transmissão OFDM permanecem inalterados. No receptor, podemos empilhar os símbolos recebidos em

$$\mathbf{y} = \left[\begin{array}{c} z[N] \\ z[N-1] \\ \vdots \\ z[L] \\ \vdots \\ z[1] \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z[N+L] \\ \vdots \\ z[N+1] \end{array} \right]$$

Podemos, então, mostrar que (Exercício 12.7-4)

$$\tilde{\mathbf{z}} = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{W}_N \right) \mathbf{y} \quad (12.70)$$

alcançaria a mesma relação multicanal da Eq. (12.68b).

12.7.4 Redundância de Prefixo Cíclico em OFDM

Os dois passos mais críticos de OFDM no transmissor são a inserção do prefixo cíclico e o uso da IDFT de N pontos. O necessário comprimento do prefixo cíclico L depende da ordem do canal FIR. Como, em sistemas práticos, a ordem do canal pode variar, o transmissor OFDM deve ter conhecimento *a priori* da máxima ordem do canal.

Embora seja aceitável que transmissores OFDM usem uma ordem de canal superestimada, a grande desvantagem de inserir um prefixo cíclico mais longo que o necessário é o desperdício de largura de banda do canal. Para entender essa desvantagem, reparemos que, em OFDM, o prefixo cíclico permite a transmissão bem-sucedida de N símbolos de dados $\{\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_N\}$ com duração temporal $(N+L)T$. Os L símbolos do prefixo cíclico são introduzidos por OFDM como redundância para a remoção de ISI no canal seletivo em frequência original $H(z)$. Como $(N+L)$ períodos de símbolos são usados para transmitir os N dados de informação, a taxa de dados efetiva de OFDM é igual a

$$\frac{N}{N+L} \frac{1}{T}$$

Se L for superestimado, a taxa de dados efetiva será reduzida, e a transmissão de um prefixo cíclico desnecessariamente longo desperdiçará alguma largura de banda do canal. Por isso, transmissores OFDM requerem conhecimento preciso do espalhamento do atraso do canal para que alcancem boa eficiência de largura de banda. Se o prefixo cíclico tiver comprimento menor que L , o receptor deve incluir um filtro no domínio do tempo conhecido como filtro de encurtamento do canal, para que a resposta efetiva do filtro de canal seja reduzida a LT .

12.7.5 Equalização OFDM

Mostramos que a OFDM converte um canal com ISI em N subcanais AWGN paralelos, como ilustrado na Fig. 12.11. Cada um dos N subcanais tem ruído gaussiano branco aditivo de média zero e variância $\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_N$. O ganho do subcanal é $H[k]$, que é a resposta de frequência FIR em k/NT Hz. Estritamente falando, esses N canais paralelos não têm qualquer ISI. Logo, não há necessidade de equalização de canal. Todavia, como cada subcanal tem ganho diferente, a detecção ótima de $\{\tilde{s}_n\}$ de

$$\tilde{z}[n] = H[n] \tilde{s}_n \quad n = 1, \dots, N$$

requereria o conhecimento do ganho do canal $H[n]$

$$\hat{s}_n = \text{dec} \left(H[n]^{-1} \tilde{z}[n] \right) \quad n = 1, \dots, N$$

O receptor OFDM resultante é mostrado na Fig. 12.12. Para cada subcanal, uma derivação para ajuste de ganho pode ser aplicada para compensar a diferença de ganho. Na verdade, isso significa que precisamos implementar um banco de N derivações para ajuste de ganho. O objetivo é compensar os N subcanais de modo que o ganho total de cada símbolo de dado se torne unitário antes do dispositivo de decisão QAM. Os equalizadores de ganho compensam igualmente o sinal e o ruído de subcanal. Assim, não afetam a SNR do subcanal e não alteram a precisão de detecção. De fato, os equalizadores são usados apenas para facilitar o emprego do mesmo dispositivo de decisão modular em todos os subcanais. Surpreendentemente, esse banco de elementos equalizadores de ganho no receptor é exatamente igual ao *equalizador* em um amplificador de áudio de alta fidelidade. Essa estrutura é conhecida como equalizador de uma derivação (*one-tap equalizer*) para receptor OFDM.

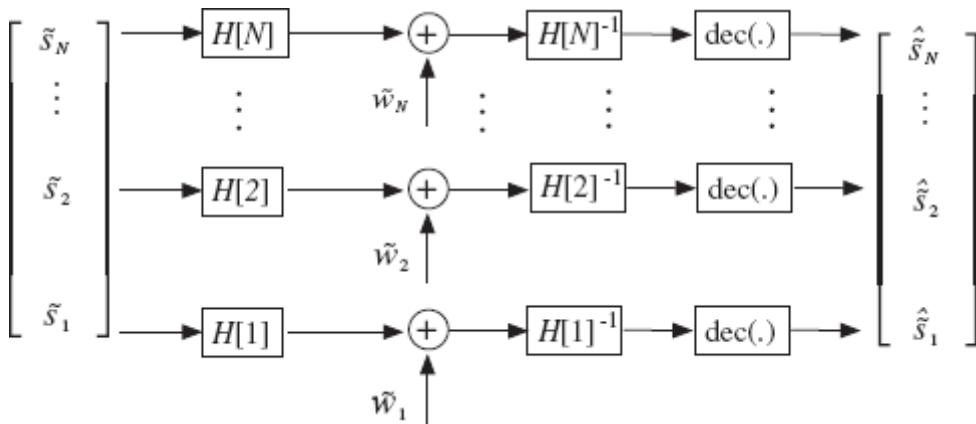


Figura 12.12 Uso, em OFDM, de um banco de ajustadores de ganho de receptor para N canais AWGN independentes, para alcançar equalização de ganho.

12.8 MODULAÇÕES MULTITONS DISCRETOS (DMT)

Uma forma ligeiramente diferente de OFDM é conhecida como modulação **multiton discreto** (DMT – *discrete multitone*). Na modulação DMT, as operações básicas de processamento de sinal são essencialmente idênticas às de OFDM. A única diferença entre DMT e OFDM padrão reside no fato de que transmissores DMT têm conhecimento da informação de subcanal. Em consequência, a DMT transmite sinais de diferentes constelações em diferentes subcanais (conhecidos como subportadoras). Como mostrado na Fig. 12.13, um único canal de RF é dividido em N subcanais ou subportadoras por OFDM e DMT. Cada subportadora transporta uma distinta sequência de dados:

$$\{\dots \tilde{s}_i[k+1] \tilde{s}_i[k] \tilde{s}_i[k-1] \dots\}$$

As constelações QAM das N sequências podem ser diferentes.

Como a distorção do canal original é seletiva em frequência, os ganhos dos subcanais, em geral, variam ao longo da largura de banda. Assim, embora DMT ou OFDM converta o canal com distorção por ISI em N canais paralelos independentes sem ISI, os símbolos transmitidos por diferentes subportadoras encontrarão diferentes SNRs no receptor. Em DMT, os receptores são responsáveis pela comunicação de informação dos subcanais ao transmissor. Dessa forma, transmissores podem implementar medidas compensatórias para otimizar várias métricas de desempenho. Mencionamos duas abordagens comuns adotadas por transmissores DMT:

- Carregamento (alocação) de potência de subportadoras para maximizar a SNR média no receptor.
- Carregamento (alocação) de bits nas subportadoras para equalizar a taxa de erro de bit (BER) nas mesmas.

Carregamento de Potência do Transmissor para Maximizar a SNR no Receptor

Para descrever a ideia de carregamento (ou alocação) de potência no transmissor para maximizar a SNR total no receptor, seja $s_i[k]$ a sequência de dados transportada pelo i -ésimo subcanal, e seja

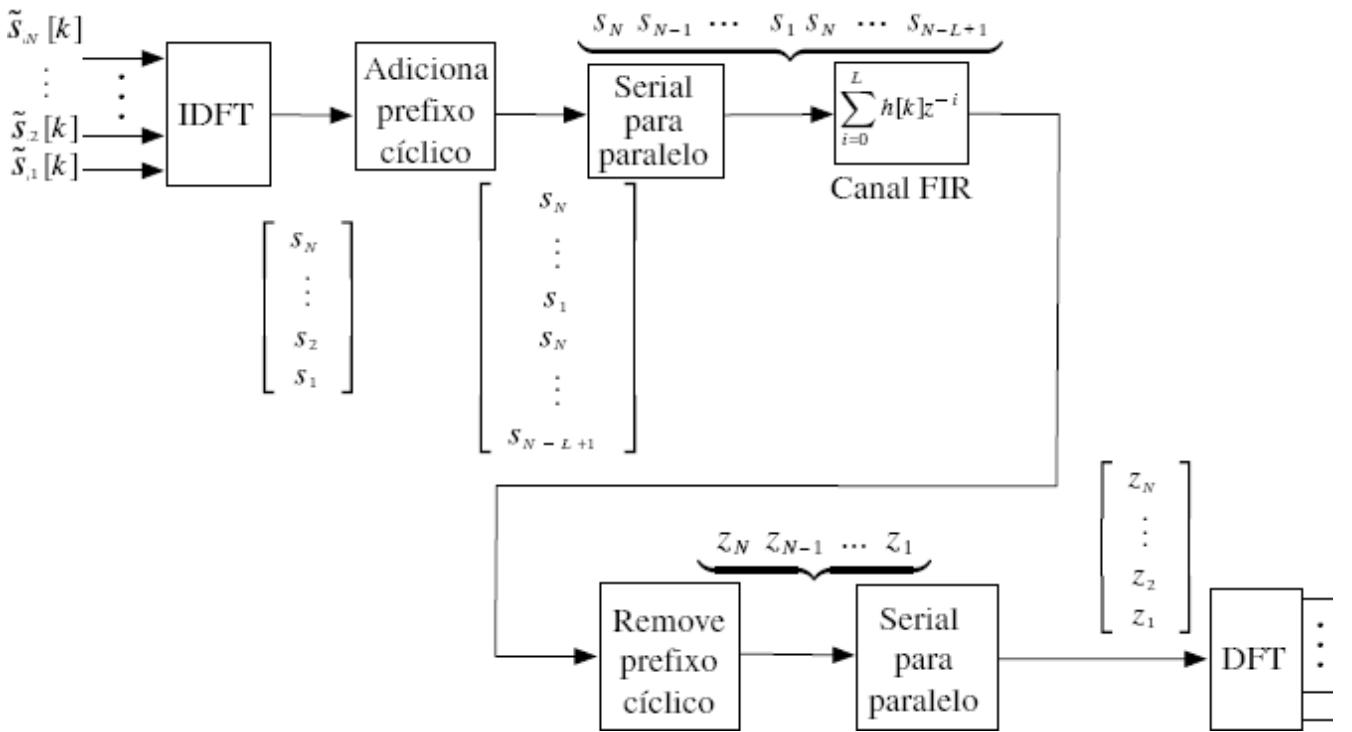


Figura 12.13 Transmissão DMT de N diferentes sequências de símbolos em um único canal FIR.

$\{s_i[k]\}$ uma sequência de dados independentes no tempo k . Admitamos, ainda, que todas as sequências de dados $\{s_i[k]\}$ também sejam independentes umas das outras. Denotemos a potência média de $s_i[k]$ por

$$P_i = \overline{|s_i[k]|^2}$$

A potência total de entrada do canal é

$$\sum_{i=1}^M P_i$$

e a correspondente potência de saída do canal, no receptor, é dada por

$$\sum_{i=1}^M |H[i]|^2 \cdot P_i$$

Logo, a SNR total de saída do canal é

$$\frac{\sum_{i=1}^M |H[i]|^2 \cdot P_i}{NN/2} = \frac{2}{NN} \sum_{i=1}^M |H[i]|^2 \cdot P_i$$

Para determinar a distribuição ótima de potência, gostaríamos de maximizar a SNR de saída. Como a potência de entrada do canal é limitada, a otimização requer

$$\begin{aligned} & \max_{\{P_i \geq 0\}} \sum_{i=1}^N |H[i]|^2 \cdot P_i \\ & \text{sujeito a } \sum_{i=1}^N P_i = P \end{aligned} \tag{12.71}$$

Mais uma vez, podemos invocar a desigualdade de Cauchy-Schwartz

$$\left| \sum_i a_i b_i \right|^2 \leq \sum_i |a_i|^2 \sum_i |b_i|^2$$

com igualdade se e apenas se $b_i = \lambda a_i^*$

Com base na desigualdade de Cauchy-Schwartz,

$$\max_{\{P_i \geq 0\}} \sum_{i=1}^N |H[i]|^2 \cdot P_i = \sqrt{\sum_{i=1}^N |H[i]|^4 \cdot \sum_{i=1}^N |P_i|^2} \quad (12.72a)$$

se

$$P_i = \lambda |H[i]|^2 \quad (12.72b)$$

Devido à restrição na potência de entrada $\sum_{i=1}^N P_i = P$, a distribuição ótima de potência de entrada seria

$$\sum_{i=1}^N P_i = \lambda \cdot \sum_{i=1}^N |H[i]|^2 = P \quad (12.73a)$$

Em outras palavras,

$$\lambda = \frac{1}{\sum_{i=1}^N |H[i]|^2} P \quad (12.73b)$$

Substituindo a Eq. (12.73b) na Eq. (12.72b), podemos obter o carregamento ótimo de potência de entrada nos N subcanais como

$$P_i = \frac{|H[i]|^2}{\sum_{i=1}^N |H[i]|^2} P \quad (12.74)$$

Essa distribuição ótima de potência em OFDM, também conhecida como carregamento (ou alocação) de potência, faz muito sentido. Se tiver ganho elevado, um canal é capaz de amplificar a potência de sua entrada de modo muito mais efetivo que um canal com ganho inferior. Portanto, os subcanais de alto ganho receberão maior carregamento de potência, enquanto os subcanais de baixo ganho receberão carregamento muito menor. Nenhuma potência deve ser desperdiçada no caso extremo de um canal com ganho zero, pois a saída desse canal não contribuirá para a potência total de sinal recebida.

Além da perspectiva de maximizar a SNR média, a teoria da informação também pode provar, com rigor, a otimalidade do carregamento de potência na maximização da capacidade de canais seletivos em frequência. Isso será discutido posteriormente (Seção 13.7).

Carregamento de Bits nas Subportadoras em DMT

Caso obtenha informação do canal $|H[i]|$, o transmissor passa a ser capaz de predizer a probabilidade de erro de detecção dos símbolos transmitidos em cada subportadora. A SNR de cada subportadora é

$$\text{SNR}_i = \frac{2|H[i]|^2}{\mathcal{N}} \frac{1}{|s_i[k]|^2}$$

Portanto, a BER dessa subportadora particular depende da SNR e da constelação QAM da subportadora. Diferentes modulações nas diferentes subportadoras podem levar a diferentes potências $|s_i[k]|^2$.

Consideremos o caso geral em que o i -ésimo subcanal transporta K_i bits em cada símbolo modulado. Denotemos a BER do i -ésimo subcanal por $P_b[i]$. Assim, a taxa de erro de bit média, levando em conta as N subportadoras, é

$$P_b = \frac{\sum_{i=1}^N K_i \cdot P_b[i]}{\sum_{i=1}^N K_i}$$

Caso todos os subcanais apliquem a mesma constelação QAM, K_i será constante para todo i e

$$P_b = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_b[i]$$

Claramente, canais com baixa SNR gerarão muitos erros de detecção, enquanto subcanais com alta SNR gerarão menor número de erros de detecção. Se não houver carregamento de potência, a SNR do i -ésimo subcanal será proporcional ao ganho do subcanal $|H[i]|^2$. Em outras palavras, BERs de subcanais pobres podem ser várias ordens de magnitude maiores que as BERs de bons subcanais. Portanto, a BER média P_b será dominada pelas altas $P_b[i]$ dos subcanais pobres. Com base nessa observação, podemos perceber que, para reduzir a BER média, é desejável a “equalização” das BERs dos subcanais. Tornando os subcanais igualmente confiáveis, a BER média do sistema DMT melhorará. Uma forma eficaz de “equalizar” as BERs dos subcanais consiste em aplicar a prática de carregamento (ou alocação) de bits.^{11, 12}

Para descrever o conceito de carregamento de bits, a Tabela 12.1 ilustra a SNR necessária para alcançar uma probabilidade de erro de detecção de 10^{-6} , para cinco constelações familiares. Fica claro que constelações pequenas (como BPSK, QPSK) requerem SNRs muito mais baixas que grandes constelações (como QAM-16, QAM-32). Isso significa que subportadoras com ganhos baixos devem receber constelações menos complexas e carregar um número menor de bits por símbolo. No caso extremo de subcanais com ganho próximo de zero, nenhum bit deve ser atribuído aos mesmos e as subportadoras devem ser mantidas vazias. As subportadoras com alto ganho, por sua vez, devem receber constelações mais complexas e carregar um número muito maior de bits por símbolo. Essa distribuição de bits no transmissor, segundo as condições das subportadoras, é denominada carregamento (ou alocação) de bits. Em alguns casos, o ganho de uma subportadora pode ser muito baixo para transportar n bits por símbolo, mas o transporte de $n - 1$ bits por símbolo pode representar um grande desperdício. Nesses casos, o transmissor pode aplicar também o carregamento de potência a essa subportadora. Portanto, é comum que, na modulação DMT, os carregamentos de bits e de potência sejam complementares no transmissor.^{11, 12} A Fig. 12.14 mostra um diagrama em blocos do altamente eficaz carregamento de bit e de potência em DMT.

Tabela 12.1

SNR necessária para alcançar probabilidade de erro de detecção de 10^{-6}

Constelação	E_b/N_0 para $P_e = 10^{-6}$, dB
BPSK	10,6
QPSK	10,6
8-PSK	14
16-QAM	14,5
32-QAM	17,4

Prefixo Cílico e Encurtamento de Canal

Os princípios de OFDM e DMT requerem que o prefixo cílico não seja menor que a ordem da resposta do canal de comunicação FIR. Embora esse requisito possa parecer razoável em um ambiente bem definido, em diversas aplicações, a ordem do canal ou espalhamento do atraso pode variar bastante em um dado intervalo. Se um prefixo cílico longo for sempre fornecido, tendo em vista o pior caso de (maior) espalhamento de atraso, a eficiência de largura de banda total do sistema de comunicação OFDM/DMT será muito baixa.

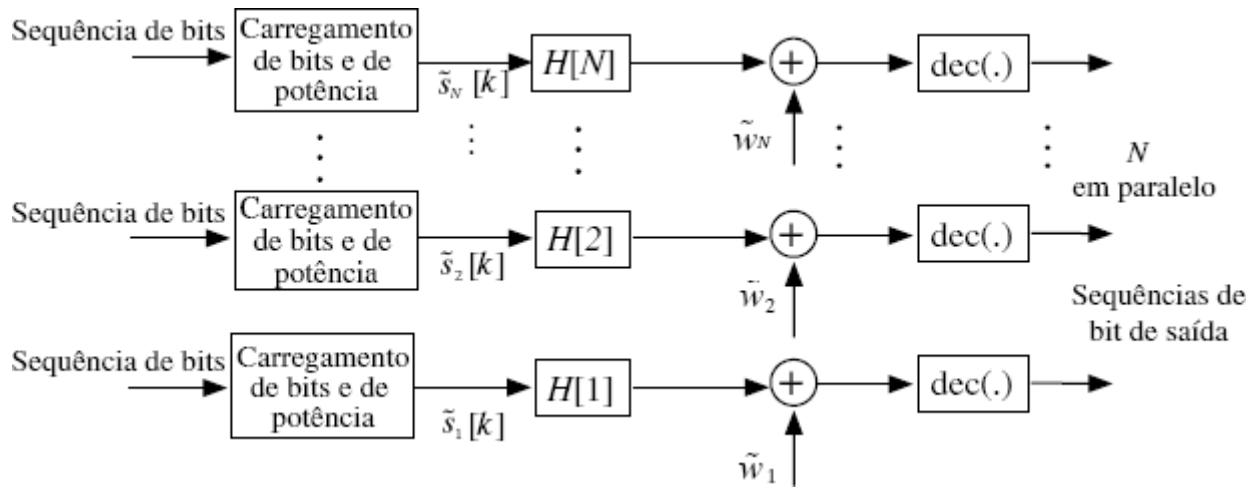


Figura 12.14 Carregamento de bits e de potência em um sistema de transmissão DMT (OFDM) com N subportadoras.

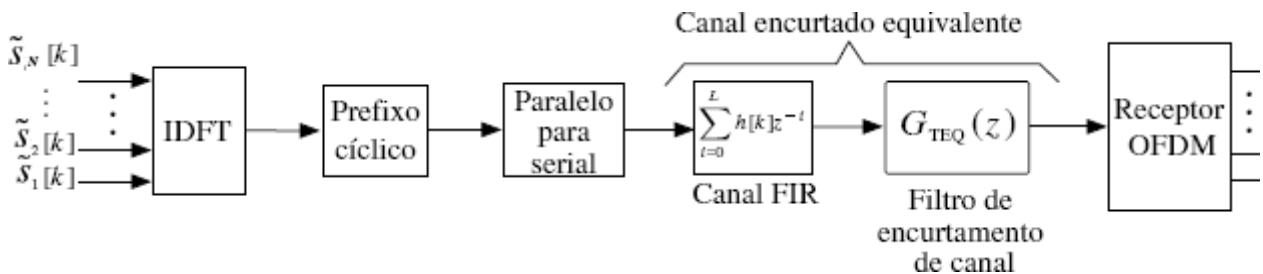


Figura 12.15 Equalizador no domínio do tempo (TEQ) para encurtamento de canal em um sistema de transmissão DMT (OFDM) com N subportadoras.

Para superar esse problema, é mais desejável aplicar um adicional equalizador no domínio do tempo (TEQ – *time domain equalizer*) no receptor para encurtar a ordem de canal efetiva. Vale notar que o objetivo dessa equalização no domínio do tempo (TEQ) não é a eliminação completa da ISI, como na Seção 13.3. O propósito do filtro TEQ $G_{\text{TEQ}}(z)$ é *encurtar* a ordem efetiva da resposta conjunta do equalizador de canal, tal que

$$G_{\text{TEQ}}(z)H(z) \approx \sum_{k=0}^{L_1} q[k]z^{-k} \quad L_1 < L$$

Essa tarefa de encurtamento de canal é menos exigente que a de completa remoção de ISI. Ao forçar que L_1 seja (aproximadamente) menor que a ordem original L , um prefixo cíclico mais curto pode ser usado para melhorar a eficiência de transmissão de OFDM/DMT. A inclusão de um TEQ para encurtamento de canal é ilustrada na Fig. 12.15.

12.9 APlicações Práticas de OFDM e DMT

A OFMD é, possivelmente, uma das mais bem-sucedidas técnicas de sinalização para comunicação digital. Combinada com carregamentos de potência e de bits no transmissor, o benefício de OFDM inclui alta eficiência espectral e resiliência contra interferências de RF e distorção de multipercorso. Como resultado das muitas vantagens, há numerosos sistemas de comunicação OFDM/DMT práticos, desde o sistema de linha de assinante digital (DSL – *digital subscriber line*) ao rádio sem fio de banda ultralarga (UWB – *ultrawideband*) e à difusão por satélite.

Linha de Assinante Digital Assimétrica (ADSL)

Nos últimos anos, a ADSL (*asymmetric digital subscriber line*) substituiu a maioria de modems de voz e se tornou a tecnologia dominante para o provimento de serviços de internet a milhões de domicílios. Modems convencionais para a banda de voz usam até 3,4 kHz de largura de banda analógica, amostrada a 8 kHz pela rede de telefonia pública comutada (PSTN – *public switched telephone Network*). Esses modems de linha discada convertem bits em formas de onda que devem caber nessa estreita banda de voz. Devido à reduzida largura da banda, modems de banda de voz são obrigados a utilizar constelações QAM muito grandes (por exemplo, QAM-960 em V.34, para 28,8 kbit/s). Grandes constelações QAM, por sua vez, requerem altas potências de transmissão e equalização de alta complexidade. Por essas razões, modems de banda de voz rapidamente atingiram o teto de 56 kbit/s na recomendação ITU-T V.90.¹³

A ADSL, no entanto, não é limitada pela banda de voz da telefonia. Na verdade, a ADSL evita completamente o sistema de telefonia de voz, pois se trata de um serviço de dados. A ADSL utiliza as tradicionais linhas telefônicas de par trançado de cobre para prover conexão de última milha aos domicílios. A ideia básica é que os canais a fio de cobre têm, na verdade, largura de banda muito maior que os 4 kHz da banda de voz. Todavia, à medida que a distância aumenta, o canal a fio de cobre se degrada rapidamente nas frequências altas. Assim, a DSL pode explorar a grande largura de banda dos fios telefônicos (de até 1 MHz) apenas quando a distância de conexão é pequena (1-5 km).¹⁴

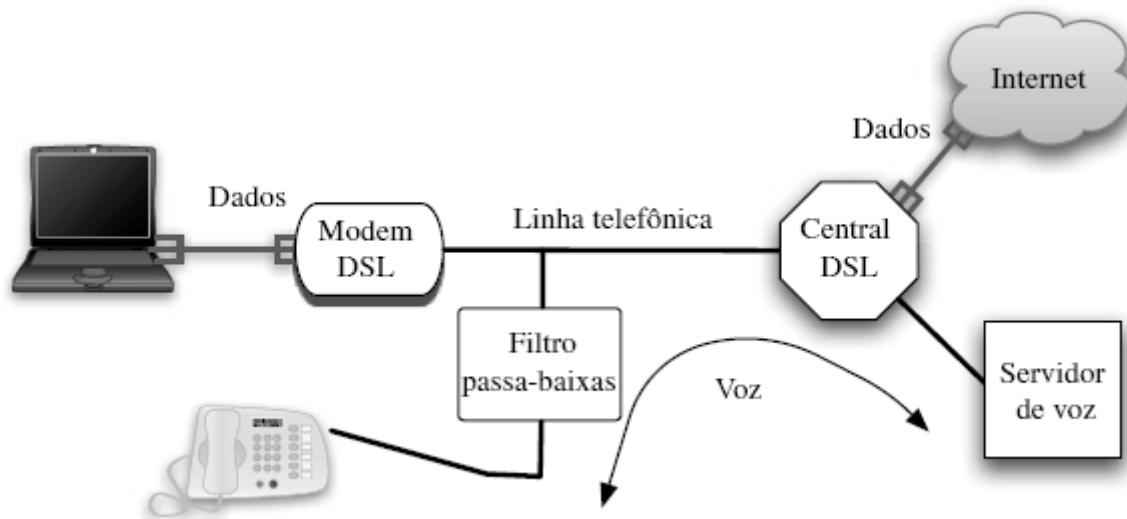


Figura 12.16 Dados e voz compartilham a mesma linha telefônica pela divisão em frequência. O serviço de dados é provido pela central DSL, situada nas proximidades de modems DSL.

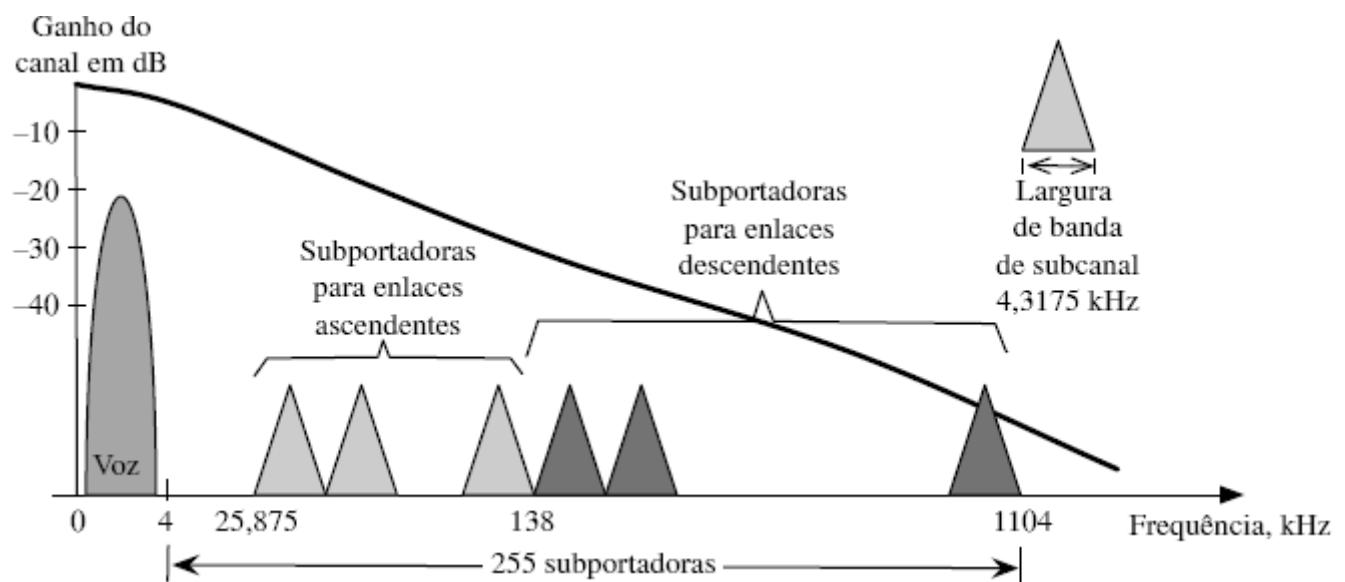


Figura 12.17 Alocação de frequência e subportadora em serviços ADSL.

A banda de voz é, às vezes, referida como banda do velho serviço de telefone simples (POTS – *plain-old-telephone-service*). POTS e serviço de dados DSL são separados em frequência. O tráfego de voz continua a usar a banda de voz abaixo de 3,4 kHz. Os dados DSL usam a banda de frequências acima da banda de voz. Como mostrado na Fig. 12.16, quando o serviço DSL está disponível, a separação dos dois sinais é alcançada por um simples filtro passa-baixas (em linha), inserido entre a saída de telefonia e cada aparelho telefônico.

A Fig. 12.17 ilustra a alocação de largura de banda e de subportadoras no sistema ADSL. A partir do topo da banda POTS ao limite superior nominal de 1104 kHz de ADSL, temos 255 subcanais (subportadoras) igualmente espaçados, com largura de banda de 4,3175 kHz. As subportadoras são numeradas de 1 a 255. As portadoras de baixa numeração, entre 4,3175 e 25,875 kHz, também podem ser usadas por outros provedores de serviços. Em geral, os provedores de serviço ADSL utilizam a banda nominal entre 25,875 e 1104 kHz (da subportadora 6 à subportadora 255). Essas 250 portadoras são divididas entre transmissões de dados descendentes (*downstream*, do servidor DSL para os assinantes) e ascendentes (*upstream*, do assinante para o servidor DSL).

Nas atuais aplicações de internet, a maioria dos usuários tem maior necessidade na transmissão descendente que na ascendente. Em contraste com o tráfego de negócios, essa exigência de serviços de dados “assimétricos” define o objetivo da

ADSL. Portanto, na ADSL, o número de subportadoras descendentes é maior do que o de subportadoras ascendentes. Na ADSL, as subportadoras 6 a 32 (correspondendo a 25,875-138 kHz) são, em geral, alocadas aos dados ascendentes. As subportadoras 64 e 96 são reservadas para pilotos ascendente e descendente, respectivamente. Excluindo essas duas subportadoras pilotos, as subportadoras 33 a 255 (correspondendo a 138-1104 kHz) são alocadas aos dados descendentes. As típicas alocações de subportadoras e taxas de dados são resumidas na Tabela 12.2. Reparemos que essa tabela se aplica somente à recomendação ITUT-T básica para DSL (G.992.1). Dependendo da condição do canal, provedores de serviços podem aumentar a taxa de dados usando maior largura de banda ou, até mesmo, subportadoras acima da subportadora 255.

Na ADSL, a taxa de transmissão de quadros DMT é 4 kHz. O DMT ascendente utiliza IFFT real de 64 pontos, o que equivale a uma IFFT complexa de 32 pontos. O prefixo cílico ascendente tem comprimento 4. Na transmissão descendente, é aplicada uma IFFT real de 512 pontos, equivalente a uma IFFT complexa de 256 pontos. O prefixo cílico descendente tem comprimento 32 (o que equivale a 16 números complexos). Como o espalhamento de atraso de canal é, em geral, muito maior que o prefixo cílico prescrito, encurtamento TEQ de canal é comumente empregado na ADSL com a ajuda de milhares de símbolos de treinamento (por exemplo, na transmissão descendente) para adaptação de parâmetros TEQ.

Tabela 12.2 Alocações básicas de subportadoras e taxas de dados para enlaces ascendentes e descendentes em ADSL

	Ascendente	Descendente
Modulação (carregamento de bits)		QPSK a 64-QAM (2–6 bits por símbolo)
Taxa de transmissão de quadros DMT	4 kHz	
Subportadora piloto	Nº 64	Nº 96
Subportadoras típicas	6 a 32	33 a 255
Bits por quadro típicos	até 162	bits até 1326 bits
Máximo número possível de portadoras	1 a 63	1 a 255 (excluindo 64 e 96)
Máximo número de bits por quadro	até 378 bits	até 1518 bits
Máxima taxa de dados	$4 \text{ kHz} \times 378 = 1,512 \text{ Mbit/s}$	$4 \text{ kHz} \times 1518 \text{ bits} = 6,072 \text{ Mbit/s}$

Difusão Digital

Embora a América do Norte tenha decidido adotar o padrão ATSC para difusão de televisão digital, a uma taxa máxima de 19,39 Mbit/s, usando modulação 8-VSB, o sistema DVB-T (*digital video broadcast-terrestrial*, ou difusão de vídeo digital-terrestre) se tornou um padrão pan-europeu e ganhou aceitação em partes da Ásia, América Latina e Austrália. O sistema DVB-T foi introduzido em 1997¹⁵ e usa OFDM em canais com 6, 7 ou 8 MHz de largura.

O DVB-T especifica três diferentes modos de transmissão OFDM, com crescente complexidade, tendo em vista diferentes taxas de bit (qualidade de vídeo). O sistema pode usar 2048 subportadoras (modo 2K), 4096 subportadoras (modo 4K) ou 8196 subportadoras (modo 8K). O comprimento do prefixo cílico pode ser 1/32, 1/16, 1/8 ou 1/4 do comprimento da FFT nos três diferentes modos. Cada subportadora pode ter três formatos de modulação: QPSK, QAM-16 ou QAM-64. Quando a qualidade do subcanal é pobre, uma constelação mais simples, como QPSK, é usada. Quando a SNR do subcanal é alta, a constelação QAM-64 é usada. Canais com qualidades distintas oferecem diferentes qualidades de vídeo, da TV com definição padrão (SDTV – *standard-definition TV*) à TV de alta definição (HDTV – *high-definition TV*).

O padrão DVB-H para recepção de vídeo por unidades portáteis móveis foi publicado em 2004. Os formatos de modulação em subportadora OFDM e DMT permanecem idênticos aos usados em DVB-T. Voltado a serviços multimídia com baixa qualidade de vídeo, o sistema de difusão de multimídia digital (DMB – *digital multimedia broadcasting*) também aplica OFDM, mas se limita à modulação em subportadora QPSK (diferencial). DMB ocupa uma largura de banda menor que 1,7 MHz e pode usar até 1536 subportadoras.

Outras Aplicações de OFDM

DSL e DVB-T são apenas duas aplicações limitadas de OFDM em sistemas de comunicação digital. A OFDM encontrou grande aplicação em numerosos sistemas de comunicação terrestre sem fio. Uma lista que impressiona inclui difusão de áudio digital (DAB – *digital audio broadcasting*), Wi-Fi (IEEE 802.11a, IEEE 802.11g), WiMAX (IEEE 802.16), rádio de banda ultralarga (UWB) (IEEE 802.15.3a), 3rd Generation Partnership Project (3GPP), evolução de longo prazo (LTE – *long term evolution*) e

acesso por pacote OFDM de alta velocidade (HSOPA – *high-speed OFDM packet access*). A Tabela 12.3 lista importantes papéis desempenhados por OFDM em vários sistemas de comunicação.

Vale ressaltar, no entanto, que a OFDM não teve muita aceitação em comunicações por satélite que usam antenas direcionais e em sistemas a cabo coaxial (por exemplo, modems a cabo, DTV a cabo). A razão para isso é, na verdade, óbvia. Canais direcionais de satélite e canais a cabo coaxial têm pouca distorção seletiva em frequência. Em particular, normalmente, não sofrem de sérios efeitos de multipercuso. Sem a necessidade de combater significativos espalhamento de atraso de canal e ISI, a OFDM seria, na verdade, redundante. Por isso, sistemas como serviços de TV digital via satélite e serviços digitais a cabo preferem o formato básico de modulação de uma única portadora. Contudo, aplicações terrestres e de difusão direta, com frequência, encontram distorções de multipercuso e são perfeitas candidatas ao uso de OFDM.

Tabela 12.3

Lista curta e impressionante da história de aplicações de OFDM

Ano	Evento
1995	Padrão Eureka 147 para difusão de áudio digital: primeiro padrão OFDM
1996	Padrão ANSI T1.413 para ADSL (posteriormente, se tornou ITU-TG.992.1)
1997	Padrão DVB-T definido por ETSI
1998	Projeto <i>Magic WAND</i> [Demonstrador de Rede ATM Sem Fio] demonstra modems OFDM para LAN sem fio
1999	Padrão IEEE 802.11a para LAN sem fio (Wi-Fi)
2002	Padrão IEEE 802.11g para LAN sem fio
2004	Padrão IEEE 802.16d para MAN sem fio (WiMAX)
2004	MediaFLO anunciado por Qualcomm
2004	Padrão DVB-T de ETSI
2004	Candidato ao padrão IEEE 802.15.3a(WUB) MB-OFDM
2004	Candidato ao padrão IEEE 802.11n para LAN sem fio de próxima geração
2005	Padrão IEEE 802.16e (melhorado) para WiMAX
2005	Padrão DMB terrestre (T-DMB) (TS 102 427) adotado por ETSI (julho)
2005	Tem início a primeira difusão T-DMB na Coreia do Sul (dezembro)
2005	Candidato aos padrões celulares móveis 3.75G (LTE e HSOPA)
2005	Candidato ao padrão colaborativo 4G CJK (China, Japão e Coreia)
2005	Candidato ao padrão IEEE P1675 para comunicação via rede elétrica (<i>power line communications</i>)
2006	Candidato ao padrão IEEE 802.16m para WiMAX móvel

Difusão de Áudio Digital

Como listado na Tabela 12.3, o projeto europeu Eureka 147 lançou, com sucesso, a difusão de áudio digital (DAB – *digital audio broadcasting*) com OFDM. O Eureka 147 cobre a difusão terrestre de áudio digital e, também, a difusão de áudio direta de satélite sem antenas receptoras direcionais. Os receptores são equipados somente com tradicionais antenas omnidirecionais. O Eureka 147 requer a abertura de uma nova banda espectral de 1,452 a 1,492 MHz na banda L, tanto para difusão terrestre como para difusão via satélite.

Apesar do sucesso do Eureka na Europa, preocupações quanto a conflito espectral na banda L levaram os Estados Unidos a se decidirem contra o uso do Eureka 147. Na América do Norte, a DAB foi dividida em difusão de rádio via satélite, por XM e Sirius, com base em tecnologias proprietárias, e em difusão terrestre com base no padrão IBOC (*in-band, on-channel*, ou na banda, no canal) recomendado pela FCC. XM e Sirius eram duas companhias competidoras, e se fundiram em 2008. A nova companhia, Sirius XM, provê rádio via satélite para automóveis, enquanto IBOC foca os tradicionais usuários domésticos de rádio. A Sirius XM usa a banda S em 2,3 GHz para radiodifusão direta via satélite. Sob o nome comercial de HD Radio, desenvolvido por iBiquity Digital Corporation, IBOC permite que estações de FM e AM analógicas usem a mesma banda para transmitir seus conteúdos na forma digital, tirando proveito do espaçamento entre estações de rádio FM e AM tradicionais. Em outubro de 2008, mais de 1,5 milhão de *chipsets* de rádio HD havia sido vendido, e havia mais de 1800 estações de rádio HD apenas nos Estados Unidos.

Na operação de rádio via satélite, o sistema de rádio XM usa a largura de banda de 2332,5 a 2345,0 MHz. Essa banda de 12,5 MHz é dividida em seis portadoras. Quatro portadoras são usadas para transmissão via satélite. O rádio XM usa dois satélites geoestacionários para transmitir o mesmo conteúdo. Os sinais são transmitidos com modulação QPSK de cada satélite. Para recepção confiável, os sinais transmitidos em linha de visada direta pelo satélite 1 são recebidos, reformatados a uma modulação em múltiplas portadoras (OFDM) e difundidos por transmissores terrestres. Cada grupo de duas portadoras transmite 100 sequências de 8 kbit/s. Essas sequências representam dados de áudio comprimidos e são combinadas por meio de um processo patenteado para formar um número variável de canais, com diferentes taxas de bit.

O sistema de rádio via satélite de Sirius usa três satélites orbitais que operam na banda de 2320 a 2332 MHz. Esses satélites estão em orbitais mais baixas e não são geoestacionários. Na verdade, seguem uma órbita terrestre elíptica altamente inclinada (HEO – *highly inclined elliptical Earth orbit*), também conhecida como órbita Tundra. Cada satélite completa uma órbita a cada 24 horas e, portanto, é dito ser geossíncrono. Em qualquer instante de tempo, dois dos três satélites cobrem a América do Norte. Assim, a largura da banda de 12 MHz é igualmente dividida entre três portadoras: duas para a cobertura de dois satélites e uma para os repetidores terrestres. A modulação QPSK altamente confiável é adotada para as transmissões Sirius. Os repetidores terrestres são úteis em algumas áreas urbanas, nas quais a cobertura de satélite pode ser bloqueada.

Quanto aos sistemas terrestres de rádio HD, OFDM também é uma tecnologia importante em IBOC, tanto para IBOC AM como para IBOC FM. Em contraste com o sistema DAB via satélite, que agrupa múltiplos programas de estações em uma única sequência de dados, IBOC AM e IBOC FM permitem que cada estação use sua própria faixa espectral para transmissão, como uma estação de rádio tradicional. IBOC FM tem maior largura de banda por estação e provê taxa de dados mais elevada. Com OFDM, a largura de banda do subcanal IBOC FM é de 363,4 Hz e o máximo número de portadoras, 1093. Cada subportadora usa modulação QPSK. A largura de banda do subcanal IBOC AM é de 181,7 Hz (metade da de IBOC FM) e até 104 subportadoras podem ser usadas. Cada subportadora pode aplicar QAM de 16 pontos (subportadoras secundárias) ou QAM de 64 pontos (subportadoras principais). Mais detalhes sobre IBOC podem ser encontrados no livro de Maxson.¹⁶

12.10 EQUALIZAÇÃO CEGA E IDENTIFICAÇÃO

Equalização e identificação comuns no receptor requerem que um sinal conhecido (de treinamento) seja transmitido pelo transmissor para auxiliar na identificação do sistema. Alternativamente, a sequência de treinamento pode ser usada diretamente para determinar o necessário equalizador de canal. A Fig. 12.18 ilustra como um sinal de treinamento pode ser usado na fase inicial de funcionamento do receptor.

Durante a fase de treinamento, uma sequência conhecida é transmitida pelo transmissor, de modo que a saída do equalizador seja comparada com a entrada desejada para formar um erro. Os parâmetros do equalizador podem ser ajustados para minimizar o erro quadrático médio de símbolos. Ao final da fase de treinamento, os parâmetros do equalizador devem estar suficientemente próximos de seus valores ótimos, de modo que a maior parte da interferência intersimbólica (ISI) seja removida. Agora que a entrada do canal pode ser corretamente recuperada da saída do equalizador por meio de um dispositivo de decisão sem memória (*slicer*, ou fatiador), a transmissão de dados reais pode ter início. A saída de decisão pode ser usada como entrada correta do canal para formar o erro de símbolo para ajuste continuado do equalizador ou para rastrear variações lentas de canal. O equalizador adaptativo obtém o sinal de referência da saída de decisão, quando o equalizador estiver ligado no modo *direcionado a decisão* (Fig. 12.18). É evidente que esse mecanismo de treinamento pode ser aplicado independentemente do equalizador em uso, seja TSE, FSE ou DPE.

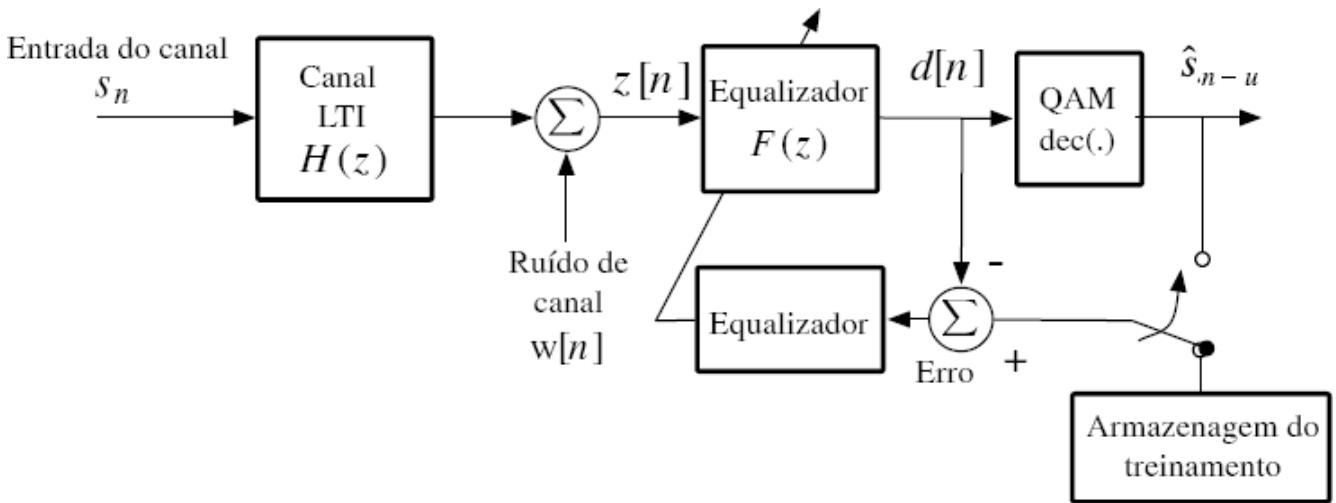


Figura 12.18 Equalização de canal baseada em uma fase de treinamento antes de comutação ao modo de realimentação.

Em muitas comunicações, os sinais são transmitidos em canais variantes no tempo. Em consequência, um sinal de treinamento periódico se faz necessário para identificar ou equalizar a resposta do canal variante no tempo. A deficiência dessa abordagem é aparente em muitos sistemas de comunicação, nos quais o uso da sequência de treinamento pode representar custos adicionais significativos ou pode ser impraticável. Por exemplo, não existe um sinal de treinamento para receptores que tentam interceptar comunicações inimigas. Em um sistema de multidifusão ou de difusão, é altamente indesejável que o transmissor inicie uma sessão de treinamento para cada novo receptor, suspendendo temporariamente a transmissão normal a todos os usuários existentes. Portanto, há grande necessidade prática para um tipo especial de equalizador de canal, conhecido como equalizador **cego**, que não requer a transmissão de uma sequência de treinamento. TV a cabo e modems a cabo digitais são excelentes exemplos de sistemas que podem se beneficiar da equalização cega.

Há diversas abordagens ao problema de equalização cega. Em geral, métodos de equalização cega podem ser classificados como diretos e indiretos. Na abordagem de equalização cega direta, filtros equalizadores são deduzidos diretamente de estatísticas da entrada e do sinal de saída observado do canal desconhecido. A abordagem de equalização cega indireta identifica a resposta ao impulso do canal antes do projeto de um filtro equalizador apropriado ou de métricas MLSE. O entendimento dessas questões requer leitura cuidadosa da literatura, incluindo artigos publicados na década de 1980 por Benveniste e outros,^{17, 18} que introduziram a terminologia de “equalização cega”. Outra fonte útil de informação são os artigos de Godard,¹⁹ Picchi e Prati,²⁰ Shalvi e Weinstein,^{21, 22} Rupprecht,²³ Kennedy e Ding,²⁴ Tong *et al.*,²⁵ Moulines *et al.*,²⁶ e Brillinger e Rosenblatt.²⁸ Para uma cobertura sistemática, o leitor é direcionado aos vários livros publicados sobre o assunto.^{6, 28, 29}

12.11 DISTORÇÕES EM CANAL VARIANTE NO TEMPO DEVIDO À MOBILIDADE

Até aqui, focamos distorções em canais invariantes no tempo ou, pelo menos, invariantes no período de interesse. Em comunicações móveis sem fio, a mobilidade do usuário leva naturalmente à variação de canal. Duas causas principais de canais variantes no tempo são: (1) mudança de ambiente e (2) efeito Doppler. Na maioria dos casos, para um dado usuário, uma mudança de ambiente se dá a uma taxa muito inferior à do efeito Doppler. Por exemplo, um transmissor/receptor que viaja a uma velocidade de 100 km/h se move a menos de 2,8 metros a cada 100 ms. Para uma frequência portadora de 900 MHz, o correspondente máximo desvio de frequência Doppler é de 83 Hz. Isso significa que, em um intervalo de 100 ms, o canal sofreria 8 ciclos completos de alterações. Assim, a menos que a unidade móvel faça uma curva repentinamente ou entre em um túnel, o efeito Doppler é, em geral, mais severo que o efeito de mudança de ambiente.

Deslocamentos Doppler e Canais com Desvanecimento

Em comunicações móveis, a mobilidade de transmissores e receptores pode levar ao que é conhecido como *efeito Doppler*, descrito no século dezenove pelo físico austríaco Christian Doppler. Ele observou que a frequência de ondas de luz e de som era afetada pelo movimento da fonte em relação ao receptor. Ondas de rádio estão sujeitas ao mesmo efeito Doppler quando o transmissor ou o receptor está em movimento. No caso da transmissão de um sinal de RF de banda estreita

$$m(t) \cos \omega_c t$$

quando a velocidade relativa da alteração de distância entre a fonte e o receptor for v_d , o sinal de RF recebido terá efetivamente uma nova portadora

$$m(t) \cos(\omega_c + \omega_d)t \quad \omega_d = \frac{v_d}{c} \omega_c$$

em que c é a velocidade da luz. Notemos que v_d e, portanto, ω_d são negativas quando a distância entre fonte e receptor decresce, e positivas quando essa distância aumenta.

Em um ambiente de multipercorso, se o usuário móvel viajar a uma dada velocidade v_d , o percurso em linha de visada terá a maior taxa de variação. Isso significa que, se houver $K + 1$ multipercursos no canal, a distância do i -ésimo percurso de propagação variará a uma velocidade v_i . A cópia do i -ésimo sinal que viaja ao longo do i -ésimo percurso sofrerá um deslocamento Doppler

$$\omega_i = \frac{v_i}{c} \omega_c \quad (12.75)$$

Além disso, como

$$-v_d \leq v_i \leq v_d$$

o máximo deslocamento Doppler é limitado por

$$|\omega_i| \leq \omega_{\max} = \frac{|v_d|}{c} \omega_c$$

Com base na análise de Doppler, cada percurso tem um deslocamento de frequência Doppler ω_i , atraso τ_i e atenuação α_i . O sinal do i -ésimo percurso pode, então, ser escrito como

$$\begin{aligned} & \alpha_i \left[\sum_k \operatorname{Re} \{s_k\} p(t - kT - \tau_i) \right] \cos [(\omega_c + \omega_i)(t - \tau_i)] \\ & + \alpha_i \left[\sum_k \operatorname{Im} \{s_k\} p(t - kT - \tau_i) \right] \sin [(\omega_c + \omega_i)(t - \tau_i)] \end{aligned} \quad (12.76)$$

Em consequência, podemos escrever o sinal em banda-base recebido, após demodulação, como

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_k s_k \left\{ \sum_{i=0}^K \underbrace{\alpha_i \exp[-j(\omega_c + \omega_i)\tau_i] \exp(-j\omega_i t)}_{\beta_i(t)} p(t - kT - \tau_i) \right\} \\ &= \sum_k s_k \left[\sum_{i=0}^K \beta_i(t) p(t - kT - \tau_i) \right] \end{aligned} \quad (12.77)$$

Desvanecimento de Canal Seletivo em Frequência

Recordemos que a transmissão original em banda-base é

$$x(t) = \sum_k s_k p(t - kT)$$

Na saída do canal da Eq. (12.77), se a velocidade da unidade móvel for zero, $\omega_i = 0$ e todos os termos $\beta_i(t) = \beta_i$ serão constantes. No caso de mobilidade nula, a saída do canal em banda-base se torna

$$y(t) = \sum_k s_k \left[\sum_{i=0}^K \beta_i p(t - kT - \tau_i) \right]$$

Isso significa que o correspondente canal é linear, invariante no tempo, com resposta ao impulso

$$h(t) = \sum_{i=0}^K \beta_i \delta(t - \tau_i) \quad (12.78)$$

e função de transferência

$$H(f) = \sum_{i=0}^K \beta_i \exp(-j2\pi f \tau_i) \quad (12.79)$$

Esse é um canal seletivo em frequência com interferência intersimbólica (ISI).

Quando a velocidade de mobilidade v_d não for zero, os termos $\beta_i(t)$ variarão no tempo. Em consequência, o canal deixa de ser linear invariante no tempo e passa a ser um canal linear variante no tempo. Suponhamos que a entrada do canal seja uma senoide pura $x(t) = \exp(j\omega_p t)$. A saída desse canal variante no tempo, segundo a Eq. (12.77), será

$$\sum_{i=0}^K \beta_i(t) \exp[j\omega_p(t - \tau_i)] = \exp(j\omega_p t) \cdot \sum_{i=0}^K \beta_i(t) \exp(-j\omega_p \tau_i) \quad (12.80)$$

Essa relação mostra que a resposta do canal a uma entrada senoidal é uma senoide com frequência igual à da entrada e amplitude variante no tempo. Além disso, essa amplitude variante no tempo também depende da frequência da entrada (ω_p). Para esses canais de multipercorso, a resposta do canal é *variante no tempo e depende da frequência*. Em comunicações móveis, canais variantes no tempo são conhecidos como canais com *desvanecimento*. Quando comportamentos variantes no tempo dependem da frequência, os canais são conhecidos como *canais com desvanecimento seletivo em frequência*. Canais desse tipo, caracterizados por ISI variante no tempo, são grandes obstáculos às comunicações digitais sem fio.

Canais com Desvanecimento Plano

Um caso especial a ser considerado é aquele em que os atrasos de multipercorso $\{\tau_i\}$ não têm grande espalhamento. Em outras palavras, consideremos

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_K$$

Se o espalhamento do atraso de multipercorso for pequeno, $\tau_K \ll T$, e

$$\tau_i \approx 0 \quad i = 1, 2, \dots, K$$

Nesse caso especial, como $p(t - \tau_i) \approx p(t)$, o sinal recebido $y(t)$ é simplesmente

$$\begin{aligned}
y(t) &= \sum_k s_k \left\{ \sum_{i=0}^K \alpha_i \exp[-j(\omega_c + \omega_i)\tau_i] \exp(-j\omega_i t) p(t - kT - \tau_i) \right\} \\
&\approx \sum_k s_k \left\{ \sum_{i=0}^K \alpha_i \exp[-j(\omega_c + \omega_i)\tau_i] \exp(-j\omega_i t) p(t - kT) \right\} \\
&= \left\{ \sum_{i=0}^K \alpha_i \exp[-j(\omega_c + \omega_i)\tau_i] \exp(-j\omega_i t) \right\} \sum_k s_k p(t - kT) \\
&= \rho(t) \cdot \sum_k a_k p(t - kT)
\end{aligned} \tag{12.81}$$

em que definimos o ganho do canal variante no tempo como

$$\rho(t) = \sum_{i=0}^K \alpha_i \exp[-j(\omega_c + \omega_i)\tau_i] \exp(-j\omega_i t) \tag{12.82}$$

Portanto, quando o espalhamento do atraso de multipercorso for pequeno, a única distorção no sinal recebido $y(t)$ é um ganho variante no tempo $\rho(t)$. Essa variação temporal da intensidade do sinal recebido é conhecida como desvanecimento. Canais que exibem somente um ganho variante no tempo que depende do ambiente são conhecidos como canais com desvanecimento plano. Canais desse tipo não introduzem ISI e, portanto, não requerem equalização. Como canais com desvanecimento plano geram sinais de saída com intensidades variantes no tempo, períodos sem erros de detecção tendem a serem seguidos por períodos com rajadas de erros. Para superar as rajadas de erros devido a canais com desvanecimento plano, o entrelaçamento de palavras de código para correção de erros à frente (*forward error correction codewords*) é uma ferramenta eficaz.

Conversão de Canais com Desvanecimento Seletivo em Frequência em Canais com Desvanecimento Plano

Canais com rápido desvanecimento seletivo em frequência representam um sério desafio às comunicações móveis. Esses canais não apenas introduzem ISI, mas também têm características que variam no tempo. Embora as técnicas de equalização no domínio do tempo, discutidas nas Seções 12.3 a 12.6, possam efetivamente mitigar o efeito de ISI, requerem dados de treinamento para identificar os parâmetros do canal ou estimar parâmetros do equalizador. Em geral, estimação de parâmetros de canais ou de equalizadores tem bom desempenho somente quando os parâmetros permanecem praticamente inalterados entre períodos sucessivos de treinamento. Portanto, equalizadores no domínio do tempo não são bem equipados para confrontar canais de variação rápida.

Por sorte, temos uma alternativa. Mostramos (na Seção 12.7) que OFDM pode converter um canal seletivo em frequência em um grupo de canais planos paralelos. Quando o canal em questão tiver desvanecimento rápido e for seletivo em frequência, a OFDM pode convertê-lo em um banco de canais planos com desvanecimento rápido. Assim, técnicas de combate a canais planos com desvanecimento rápido, como entrelaçamento de código, podem ser aplicadas a canais com desvanecimento rápido seletivo em frequência.

Devemos ressaltar que, para canais com desvanecimento rápido, outro meio eficaz de combate ao efeito de desvanecimento é a introdução de *diversidade* de canais. Diversidade de canais permite que os mesmos dados de transmissão sejam enviados por vários canais. Diversidade de canais pode ser alcançada no domínio do tempo, por meio de repetição, no domínio da frequência, com uso de múltiplas bandas, ou no espaço, com o emprego de múltiplas antenas transmissoras e receptoras. Como diversidades nos domínio do tempo e da frequência ocupam mais largura de banda, diversidade espacial – na forma de sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO – *multiple-input – multiple-output*) – se tornou particularmente atraente em anos recentes. Dentro os vários padrões para comunicação sem fio, Wi-Fi (IEEE 802.11n), WiMAX (IEEE 802.16e) e LTE celular (evolução de longo prazo) adotaram as tecnologias de OFDM e MIMO para alcançar taxas de dados mais elevadas e maior cobertura. Discutiremos os princípios básicos de MIMO no Capítulo 13.

12.12 EXERCÍCIOS COM O MATLAB

Nessa seção, apresentamos três exercícios computacionais; todos modelam um sistema de comunicação QAM que modula dados com uso de uma constelação QAM-16. Os sinais QAM-16 passam por canais lineares com ISI e encontram ruído gaussiano

branco aditivo (AWGN) na saída do canal.

EXERCÍCIO COMPUTACIONAL 12.1: EQUALIZAÇÃO LINEAR DE QAM-16

O primeiro programa MATLAB, `Ex12_1.m`, gera 1.000.000 pontos de dados QAM-16 para transmissão. Cada QAM requer um período de símbolo T . O formato do pulso transmitido é raiz de cosseno levantado, com fator de decaimento de 0,5 [Eq. (12.23)]. Assim, a largura de banda em banda-base é $0,75/T$ Hz.

```

% Matlab Program <Ex12_1.m>
% Este exercício Matlab <Ex12_1.m> simula a
% equalização linear com transmissão QAM-16 em banda-base
% e canal de multipercorso com AWGN.
% Pressupomos portadora correta e sincronia.
% Pulso raiz de cosseno levantado com fator de decaimento = 0,5 é usado
% Filtro casado é aplicado no front end do receptor
% O programa estima a taxa de erro de símbolo (SER) para diferentes Eb/N
L=10000000;           % Número total de símbolos no experimento é 1 milhão
% Para exibir a forma do pulso, o sinal é superamostrado
% por um fator f_ovsamp=8
f_ovsamp=8;           % Fator de superamostragem versus taxa de dados
delay_rc=4;
% Gera pulso raiz de cosseno levantado (fator de decaimento = 0,5)
prcos=rcosfl([ 1 ], 1, f_ovsamp, 'sqrt', 0.5, delay_rc); % Pulso RRC
prcos=prcos(1:end-f_ovsamp+1);                           % remove 0s
prcos=prcos/norm(prcos);                                % normaliza
pcmatch=prcos(end:-1:1);                                % MF

% Gera dados aleatórios de sinal para sinalização polar
s_data=4*round(rand(L,1))+2*round(rand(L,1))-3+...
        +j*(4*round(rand(L,1))+2*round(rand(L,1))-3);
% amostras adicionais para igualar a 'taxa de superamostragem'
(normalizar por 1/t).
% Igual a f_ovsamp/T (T = 1 é a duração do símbolo)
s_up=upsample(s_data,f_ovsamp);

% Identifica os atrasos de decisão devido à formatação do pulso
% e filtros casados
delayrc=2*delay_rc*f_ovsamp;
% Gera sinalização polar de diferentes formatações de pulso
xrcos=conv(s_up,prcos);
[c_num,c_den] = cheby2(12,20,(1+0.5)/8);
% A próxima linha comentada determina a resposta de frequência
% [H,fnlz]=freqz(c_num,c_den,512,8);

% O filtro passa-baixas é o filtro TX antes de o sinal ser enviado ao canal
xchout=filter(c_num,c_den,xrcos);

% Agora, podemos fazer os gráficos das densidades espectrais de
potência dos dois sinais
%          xrcos e xchout
% Isso mostra o efeito de filtragem do filtro Tx antes
% da transmissão em termos das densidades espectrais de potência dos sinais
% Mostra como a filtragem passa-baixas no Tx pode ter distorcido pouco o sinal
plotPSD_Comparison

% Aplica um canal de multipercorso de 2 feixes
mpath=[1 0 0 -0.65];    % multipercorso delta(t)-0.65 delta(t-3T/8)
% canal de multipercorso no domínio do tempo
h=conv(conv(prcos,pcmatch),mpath);
hscale=norm(h);

```

```

xchout=conv(mpath,xchout);      % aplica multipercorso de 2 feixes
xrxout=conv(xchout,pcmatch);    % passa o sinal pelo filtro casado
                                % separadamente do ruído
delaychb=delayrc+3;
out_mf=xrxout(delaychb+1:f_ovsamp:delaychb+L*f_ovsamp);
clear xrxout;
% Gera ruído aleatório complexo para a saída do canal
noiseq=randn(L*f_ovsamp,1)+j*randn(L*f_ovsamp,1);
% primeiro, passa ruído AWGN pelo filtro casado
noiseflt=filter(pcmatch,[1],noiseq); clear noiseq;
% Gera ruído amostrado após filtro casado antes de aplicar fator de escala
% e adicionar ao sinal QAM
noisesamp=noiseflt(1:f_ovsamp:L*f_ovsamp,1);

clear noiseq noiseflt;
Es=10*hscale;                  % energia do símbolo

% Ativa receptor equalizador linear
linear_eq

for ii=1:10;
    Eb2Naz(ii)=2*ii-2;
    Q(ii)=3*0.5*erfc(sqrt((2*10^(Eb2Naz(ii)*0.1)/5)/2));
% Calcula BER analítica
end
% Mostra resultados em gráficos
plotQAM_results

```

A transmissão é feita por um canal de multipercorso de dois feixes, com resposta ao impulso

$$h(t) = g(t) - 0,65g(t - 3T/8)$$

em que $g(t)$ é a resposta de um canal passa-baixas formado por aplicação de um filtro de Chebyshev do tipo II, ordem 12, rejeição de 20 dB e largura de banda de 0,75/T Hz. A resposta ao impulso desse canal é mostrada na Fig. 12.19.

O programa principal Ex12_1.m chama uma sub-rotina plotPSD_comparison.m para, primeiro, gerar as densidades espectrais de potência do sinal transmitido antes e depois do filtro passa-baixas de Chebyshev. A comparação na Fig. 12.20 mostra que a configuração de raiz de cosseno levantado é quase limitada em banda, pois o canal passa-baixas introduz pouca alteração na **banda passante** do espectro do sinal transmitido. Isso significa que o ambiente de multipercorso é o único responsável pela ISI.

```

% MATLAB PROGRAM <plotPSD_comparison.m>
% Este programa calcula a PSD do sinal QAM antes e depois
% de um bom filtro passa-baixas de chebyshev, antes de ser enviado
ao canal
%
[Pdfy,fq]=pwelch(xchout,[],[],1024,8,'twosided'); % PSD antes do
filtro no TX
[Pdfx,fp]=pwelch(xrcos,[],[],1024,8,'twosided'); % PSD após o
filtro no TX
figure(1);
subplot(211);semilogy(fp-f_ovsamp/2,fftshift(Pdfx),'b-');
axis([-4 4 1.e-10 1.2e0]);

```

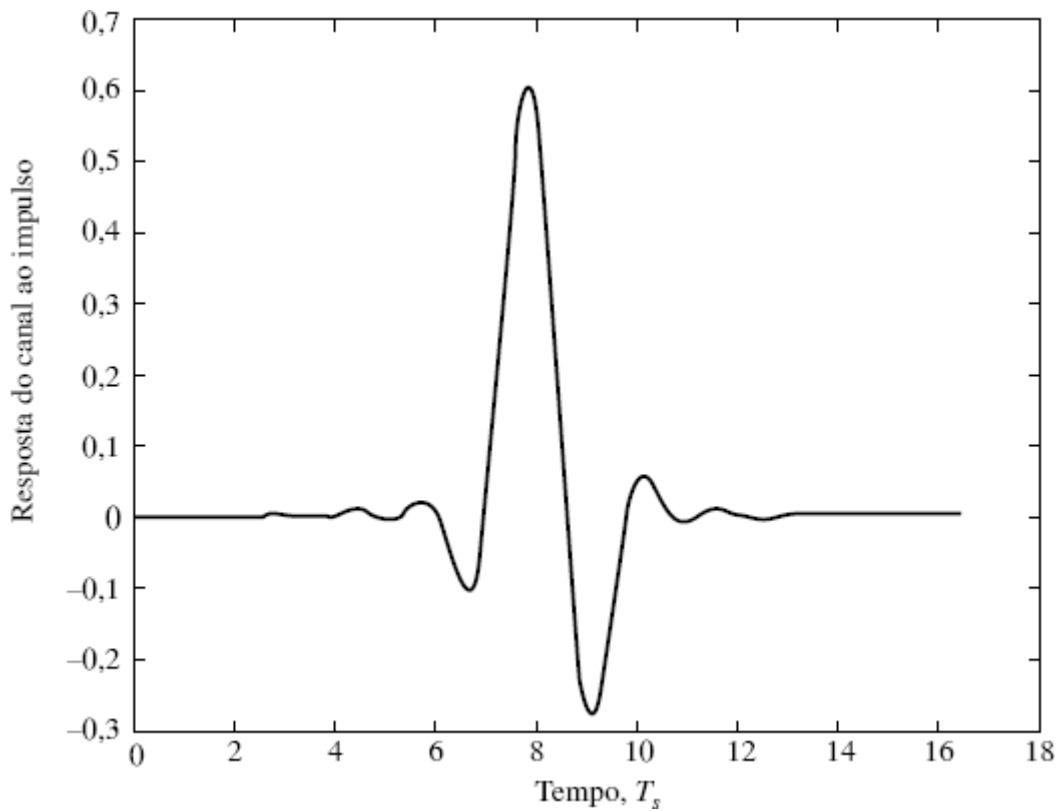
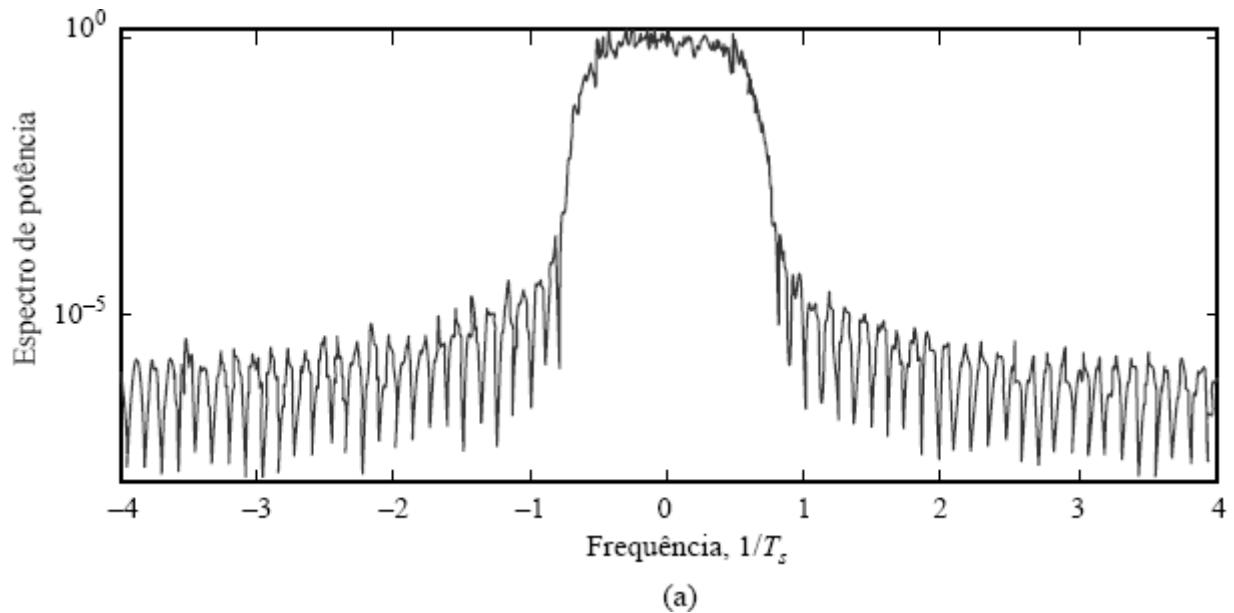


Figura 12.19 Resposta de canal de multipercorso com dois feixes para transmissão QAM.



(a)

Figura 12.20 Densidades espectrais de potência de sinal QAM raiz de cosseno levantado antes e depois de canal passa-baixas com largura de banda $0,75/T$; espectro (a) na entrada e (b) na saída do filtro passa-baixas.

```

xlabel('Frequência (em unidades de 1/T_s)');
ylabel('Espectro de Potência');
title('(a) Espectro na entrada do filtro passa-baixas')
subplot(212); semilogy(fq-f_ovsamp/2,fftshift(Pdfy),'b-');
axis([-4 4 1.e-10 1.2e0]);

xlabel('Frequência (em unidades de 1/T_s)');
ylabel('Espectro de Potência');
title('(b) Espectro na saída do filtro passa-baixas')

```

Após a aplicação do filtro casado no receptor (raiz de cosseno levantado), o sinal QAM será amostrado, equalizado e decodificado. A sub-rotina `linear_eq.m` projeta um equalizador MMSE de comprimento finito e espaçamento T de ordem M

= 8, como descrito na Seção 12.3 [Eq. (12.43b)]. No projeto do equalizador, os primeiros 200 símbolos QAM são usados como dados de treinamento. O equalizador filtra a saída do filtro casado antes de uma tomada de decisão QAM-16, segundo a região de decisão na Fig. 10.24b, no Capítulo 10.

```
% MATLAB PROGRAM <linear_eq.m>
% Esta é a parte do receptor do exemplo de equalização QAM
%
Ntrain=200;          % Número de símbolos de treinamento para equalização
Neq=8;                % Ordem do equalizador linear (= comprimento -1)
u=0;                  % atraso de equalização u deve ser <= Neq
SERneq=[];            %
SEReq=[];              %
for i=1:13,
    Eb2N(i)=i*2-1;           % (Eb/N em dB)
    Eb2N_num=10^(Eb2N(i)/10); % Eb/N numérico
    Var_n=Es/(2*Eb2N_num);   % 1/SNR é a variância do ruído
    signois=sqrt(Var_n/2);   % desvio-padrão
    z1=out_mf+signois*noisesamp; % Adiciona ruído

    Z=toeplitz(z1(Neq+1:Ntrain),z1(Neq+1:-1:1)); % matriz de sinal para
                                                    % cálculo de R
    dvec=[s_data(Neq+1-u:Ntrain-u)]; % constrói vetor de dados de treinamento
    f=pinv(Z'*Z)*Z'*dvec;           % vetor de derivação do equalizador
    dsig=filter(f,1,z1);            % aplica equalizador FIR
    % Decisão baseada nas partes Re/Im das amostras
    deq=sign(real(dsig(1:L)))+sign(real(dsig(1:L))-2)+...
        sign(real(dsig(1:L))+2)+...
        j*(sign(imag(dsig(1:L)))+sign(imag(dsig(1:L))-2)+...
            sign(imag(dsig(1:L))+2));
    % Comparar com dados originais para calcular a SER
    % (1) para o caso sem equalizador
    dneq=sign(real(z1(1:L)))+sign(real(z1(1:L))-2)+...
        sign(real(z1(1:L))+2)+...
        j*(sign(imag(dsig(1:L)))+sign(imag(z1(1:L))-2)+...
            sign(imag(z1(1:L))+2));
    SERneq=[SERneq;sum(abs(s_data~=dneq))/(L)];
    % (2) para o caso com equalizador
    SEReq=[SEReq;sum(s_data~=deq)/L];
end
```

Uma vez que os resultados da equalização linear estejam disponíveis, o programa principal `Ex12_1.m` chama outra sub-rotina, `plotQAM_results.m`, para criar figuras ilustrativas. Na Fig. 12.21, o diagrama de olho sem ruído da componente em fase na saída do filtro casado do receptor, antes da amostragem, exibe um forte efeito de ISI. O olho do sinal QAM está fechado e, sem equalização, uma decisão QAM simples levaria a altas probabilidades de erro de símbolo (também conhecidas como taxa de erro de símbolo).

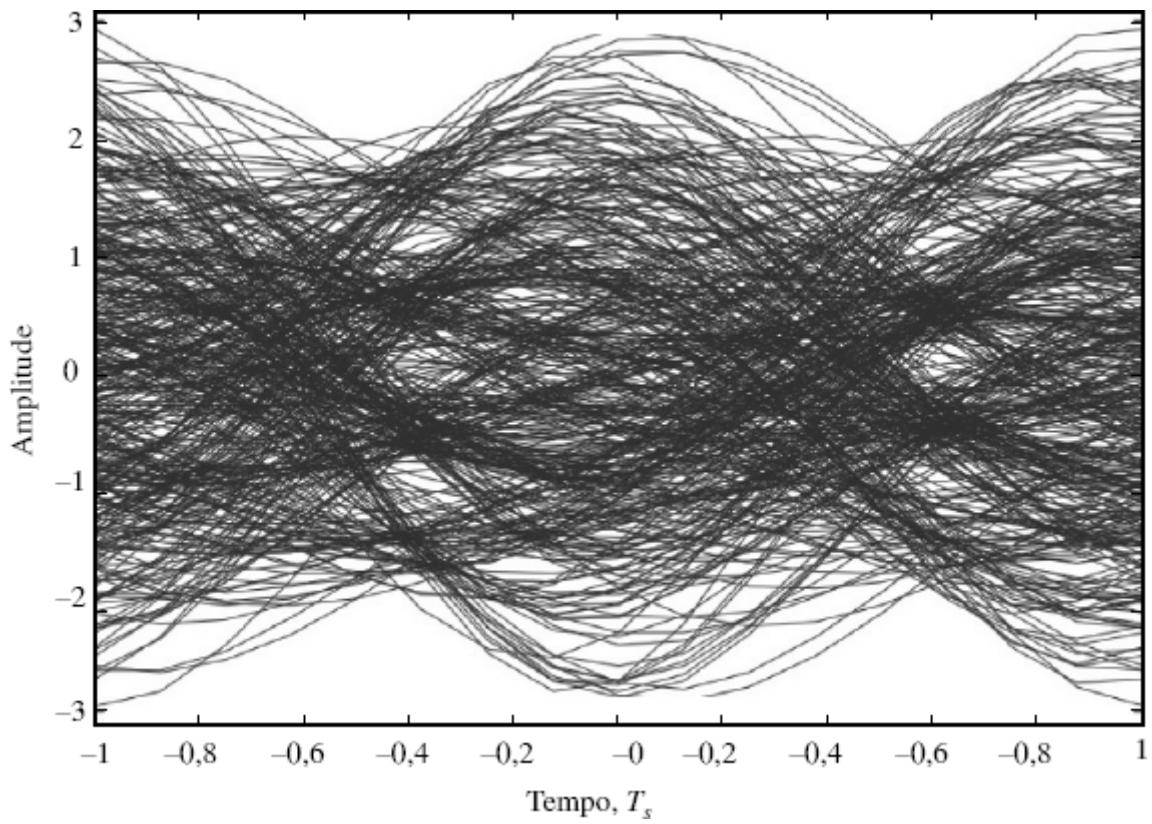


Figura 12.21 Diagrama de olho sem ruído da componente em fase (real) no receptor (após o filtro casado), antes da amostragem: o olho está fechado, e a ISI levaria a erros de decisão.

```

% MATLAB PROGRAM <plotQAM_results.m>
% Este programa traça gráficos para comparação de taxas de erro de
% símbolos antes e depois
% da equalização
%
%                               pontos da constelação
%                               diagrama de olho antes da equalização
figure(2)
subplot(111)
figber=semilogy(Eb2Naz,Q,'k-',Eb2N,SERneq,'b-o',Eb2N,SEReq,'b-v');
axis([0 26 .99e-5 1]);
legend('Analítico', 'Sem equalizador', 'Com equalizador');
xlabel('E_b/N (dB)'); ylabel('Probabilidade de erro de símbolo');
set(figber,'Linewidth',2);
% Gráfico da constelação antes e depois da equalização
figure(3)
subplot(121)
plot(real(z1(1:min(L,4000))),imag(z1(1:min(L,4000))),'.');
axis('square')
xlabel('Parte real')
title('(a) Antes da equalização')
ylabel('Parte imaginária');
subplot(122)
plot(real(dsig(1:min(L,4000))),imag(dsig(1:min(L,4000))),'.');
axis('square')
title('(b) Depois da equalização')
xlabel('Parte real')
ylabel('Parte imaginária');
figure(4)
t=length(h);
plot([1:t]/f_ovsamp,h);
xlabel('Tempo (em unidades de T_s)')
title('Resposta ao impulso do canal de multipercorso');
% Traça diagramas de olho devido ao canal de multipercorso

eyevec=conv(xchout,prcos);
eyevec=eyevec(delaychb+1:(delaychb+800)*f_ovsamp);
eyediagram(real(eyevec),16,2);
title('Diagrama de olho (componente em fase)');
xlabel('Tempo (em unidades de T_s)');

```

Podemos suprimir uma parcela significativa de ISI com a aplicação de um equalizador linear à saída amostrada do filtro casado. A Fig. 12.22 compara os “gráficos de espalhamento” de amostras de sinal antes e depois da equalização, com $E_b/\mathcal{N} = 26$ dB. O contraste demonstra que o equalizador, de fato, removeu a maior parte da ISI introduzida pelo canal de multipercorso.

O programa `linear_eq.m` também calcula estatisticamente a taxa de erro de símbolo (SER) para diferentes níveis de SNR. O programa calcula, ainda, a SER ideal, segundo o canal AWGN sem ISI (Capítulo 10) e, para efeitos de comparação, a SER em equalização. Os resultados mostrados na Fig. 12.23 demonstram a eficácia da equalização linear nesse exemplo.

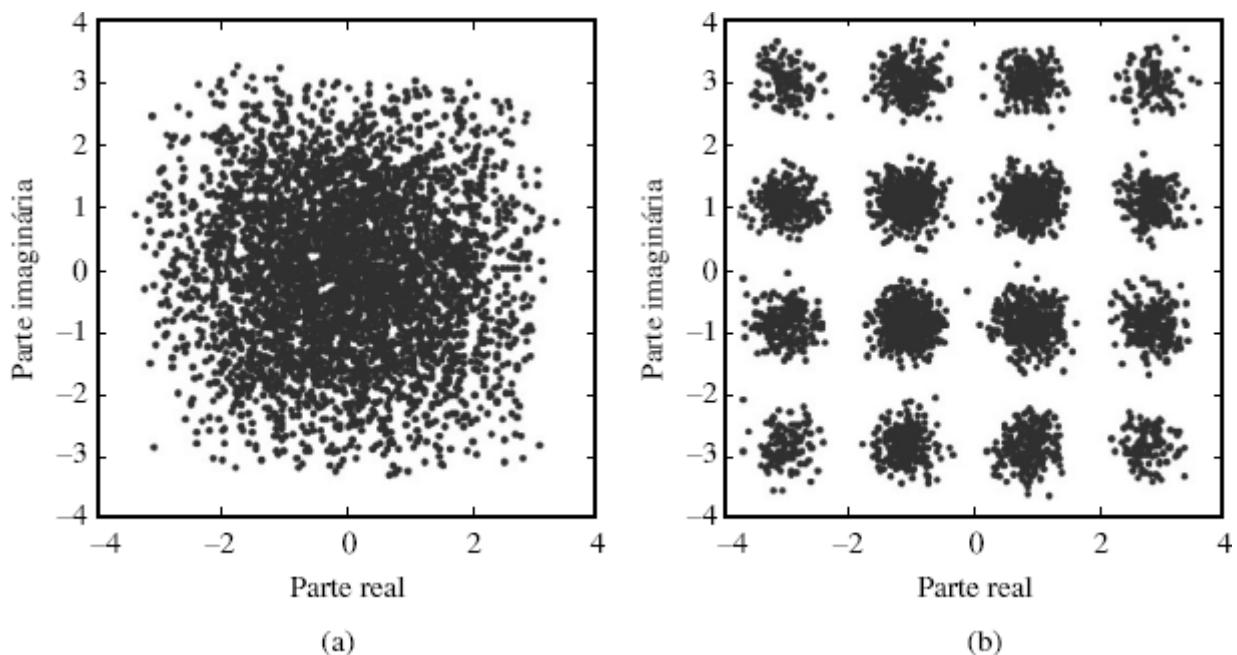


Figura 12.22 Gráficos de espalhamento de amostras de sinal antes (a) e depois (b) da equalização linear, com $E_b/N_0 = 26$ dB, demonstrando a eficaz mitigação da ISI pela equalização linear.

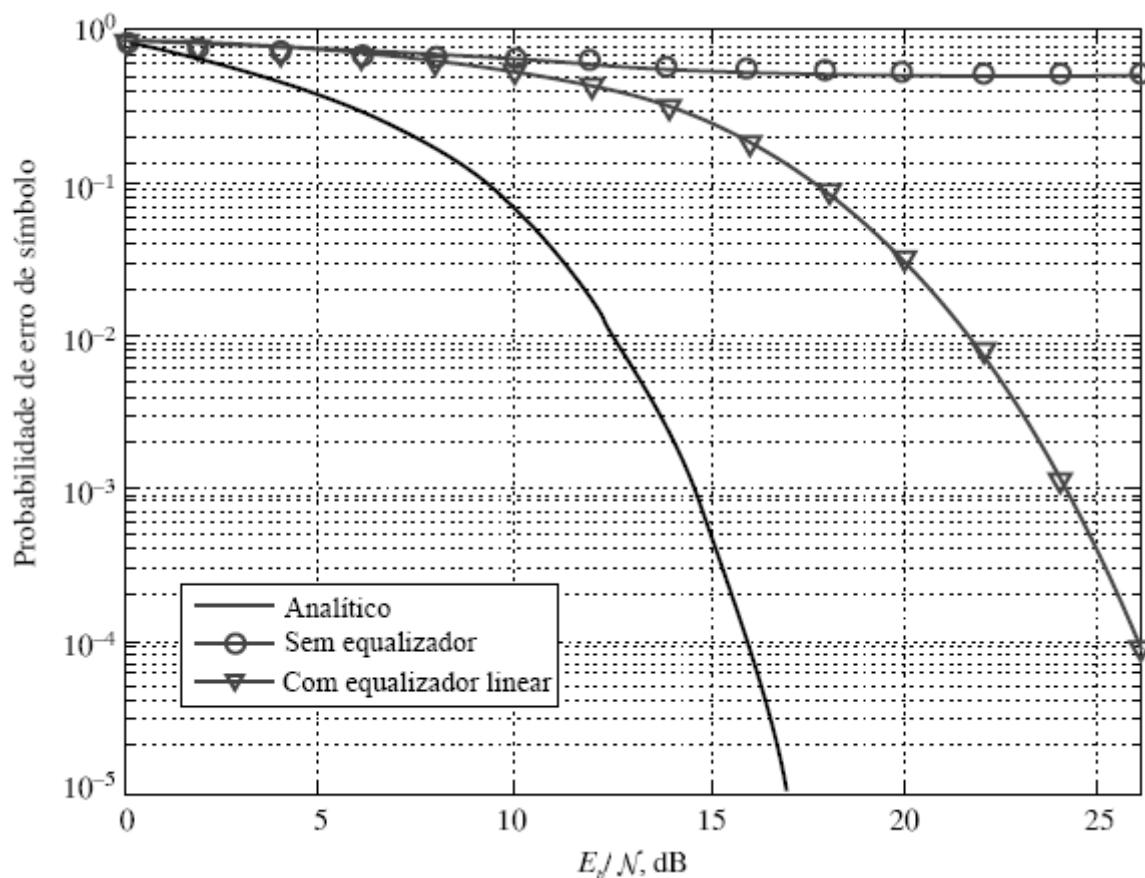


Figura 12.23 Comparação das taxas de erro de símbolo (SER) antes e depois de a equalização linear demonstrar a eficácia do combate à ISI devido a canal de multipercuso.

EXERCÍCIO COMPUTACIONAL 12.2: EQUALIZAÇÃO COM REALIMENTAÇÃO DE DECISÃO

Neste exercício, usamos o programa MATLAB principal Ex12_2.m para gerar o mesmo tipo de dados que no exercício anterior. A principal diferença é que adotamos um canal de multipercorso ligeiramente diferente

$$h(t) = g(t) - 0,83g(t - 3T/8)$$

no qual a ISI é muito mais severa. No receptor, em vez de equalizadores lineares, usaremos e testaremos o equalizador com realimentação de decisão (DFE), como descrito na Seção 12.6. Para simplificar, implementaremos apenas o filtro de realimentação DFE, sem usarmos o filtro FFW.

```
% Matlab Program <Ex12_2.m>
% Este exercício MATLAB <Ex12_2.m> simula
% a equalização com realimentação de decisão para transmissão
QAM-16 em banda-base
% em canal de multipercorso com AWGN.
% Pressupomos portadora correta e sincronia.
% É usado pulso raiz de cosseno levantado com fator de decaimento = 0,5
% Filtro casado é aplicado no front end do receptor.
% O programa estima a taxa de erro de símbolo para diferentes Eb/N
clear;clf;
L=100000;      % Número total de símbolos no experimento é 1 milhão
% Para exibir a forma do pulso, o sinal é superamostrado
% por um fator f_ovsamp=8
f_ovsamp=8;      % Fator de superamostragem versus taxa de dados
delay_rc=4;
% Gera pulso raiz de cosseno levantado (fator de decaimento = 0,5)
prcos=rcosflt([ 1 ], 1, f_ovsamp, 'sqrt', 0.5, delay_rc); % pulso RRC
prcos=prcos(1:end-f_ovsamp+1);                         % remove Os
prcos=prcos/norm(prcos);                            % normaliza
pcmatch=prcos(end:-1:1);                           % MF

% Gera dados aleatórios de sinal para sinalização polar
s_data=4*round(rand(L,1))+2*round(rand(L,1))-3+...
+j*(4*round(rand(L,1))+2*round(rand(L,1))-3);
% amostras adicionais para igualar a 'taxa de superamostragem'
(normalizar por 1/T).
% Igual a f_ovsamp/T (T=1 é a duração do símbolo)
s_up=upsample(s_data,f_ovsamp);

% Identifica os atrasos de decisão devido à formatação do pulso
% e filtros casados
delayrc=2*delay_rc*f_ovsamp;
% Gera sinalização polar de diferentes formatações de pulso
xrcos=conv(s_up,prcos);
[c_num,c_den] = cheby2(12,20,(1+0.5)/8);
% A próxima linha comentada determina a resposta de frequência
% [H,fnlz]=freqz(c_num,c_den,512,8);

% O filtro passa-baixas é o filtro TX antes de o sinal ser enviado ao
canal
xchout=filter(c_num,c_den,xrcos);
```

```

% Agora, podemos fazer os gráficos das densidades espectrais de potênci-
a dos dois sinais
%           xrcos e xchout
% Isso mostra o efeito de filtragem do filtro Tx antes
% da transmissão em termos das densidades espectrais de potência dos
sinais
% Mostra como a filtragem passa-baixas no Tx distorce pouco o sinal
plotPSD_comparison

% Aplica um canal de multipercurso de 2 feixes
mpath=[1 0 0 -0.83];    % multipercurso delta(t)-0.83 delta(t-3T/8)
%                           ou usa mpath=[1 0 0 .45];
% canal de multipercurso no domínio do tempo
h=conv(conv(prcos,pcmatch),mpath);
hscale=norm(h);

xchout=conv(mpath,xchout);    % aplica multipercurso de 2 feixes
xrxout=conv(xchout,pcmatch); % passa o sinal pelo filtro casado
                             % separadamente do ruído
delaychb=delayrc+3;
out_mf=xrxout(delaychb+1:f_ovsamp:delaychb+L*f_ovsamp);
clear xrxout;

% Gera ruído aleatório complexo para a saída do canal
noiseq=randn(L*f_ovsamp,1)+j*randn(L*f_ovsamp,1);
% primeiro, passa ruído AWGN pelo filtro casado
noiseflt=filter(pcmatch,[1],noiseq); clear noiseq;
% Gera ruído amostrado após filtro casado antes de aplicar fator de escala
% e adicionar ao sinal QAM
noisesamp=noiseflt(1:f_ovsamp:L*f_ovsamp,1);

clear noiseq noiseflt;
Es=10*hscale;                  % energia do símbolo

% Ativa receptor equalizador linear
dfe
SERdfe=SEReq;
for ii=1:9;
    Eb2Naz(ii)=2*ii;
    Q(ii)=3*0.5*erfc(sqrt((2*10^(Eb2Naz(ii)*0.1)/5)/2));
%calcula BER analítica
end
% usa o programa plotQAM_results para mostrar resultados
plotQAM_results
linear_eq

```

No receptor, uma vez que o sinal tenha passado pelo filtro casado ao pulso raiz de cosseno levantado, as amostras espaçadas por T serão enviadas ao DFE. A sub-rotina dfe.m implementa o projeto DFE e a equalização. O projeto DFE requer que o receptor, primeiro, estime a resposta do canal discreto. Usamos os primeiros 200 símbolos QAM como dados de treinamento para a estimação do canal. A seguir, calculamos a SER da saída do DFE em dfe.m. A listagem do programa dfe.m é dada a seguir.

```

% MATLAB PROGRAM <dfe.m>
% Esta é a parte do receptor do exemplo de equalização QAM

```

```

% que usa o equalizador com realimentação de decisão (DFE)
%
Ntrain=200;           % Número de símbolos de treinamento para equalização
Nch=3;                 % Ordem do equalizador linear (=comprimento-1)
SEReq=[]; SERneq=[];
for i=1:13,
    Eb2N(i)=i*2-1;                                % (Eb/N em dB)
    Eb2N_num=10^(Eb2N(i)/10);                      % Eb/N numérico
    Var_n=Es/(2*Eb2N_num);                         % 1/SNR é a variância
                                                    % do ruído
    signois=sqrt(Var_n/2);                          % desvio-padrão
    z1=out_mf+signois*noisesamp;                   % Adiciona ruído

    Z=toeplitz(s_data(Nch+1:Ntrain),s_data(Nch+1:-1:1)); % matriz de sinal para
                                                    % cálculo de R
    dvec=[z1(Nch+1:Ntrain)];
    % constrói vetor de dados de treinamento
    h_hat=pinv(Z'*Z)*Z'*dvec;
    % determina vetor de derivação da estimativa do canal
    z1=z1/h_hat(1);
    % equaliza a perda de ganho
    h_hat=h_hat(2:end)/h_hat(1);
    % especifica a primeira derivação com 1

    feedbk=zeros(1,Nch);
    for kj=1:L,
        zfk=feedbk*h_hat;                           % realimenta dados
        dsig(kj)=z1(kj)-zfk;                      % subtrai a realimentação
        % Agora, toma decisão após realimentação
        d_temp=sign(real(dsig(kj)))+sign(real(dsig(kj))-2)+...
            sign(real(dsig(kj))+2)+...
            j*(sign(imag(dsig(kj)))+sign(imag(dsig(kj))-2)+...
            sign(imag(dsig(kj))+2));
        feedbk=[d_temp feedbk(1:Nch-1)];
        % atualiza dados de realimentação
    end
    % Agora, calcula a decisão completa FDE após realimentação de decisão
    dfreq=sign(real(dsig))+sign(real(dsig)-2)+...
        sign(real(dsig)+2)+...
        j*(sign(imag(dsig))+sign(imag(dsig)-2)+...
        sign(imag(dsig)+2));
    dfreq=reshape(dfreq,L,1);
    % Calcula SER após realimentação de decisão
    SEReq=[SEReq;sum(s_data(1:L) ~=dfreq)/L];
    % toma decisão sem DFE
    dneq=sign(real(z1(1:L)))+sign(real(z1(1:L))-2)+...
        sign(real(z1(1:L))+2)+...
        j*(sign(imag(z1(1:L)))+sign(imag(z1(1:L))-2)+...
        sign(imag(z1(1:L))+2));
    % Calcula SER sem equalização
    SERneq=[SERneq;sum(abs(s_data~=dneq))/ (L) ];
end

```

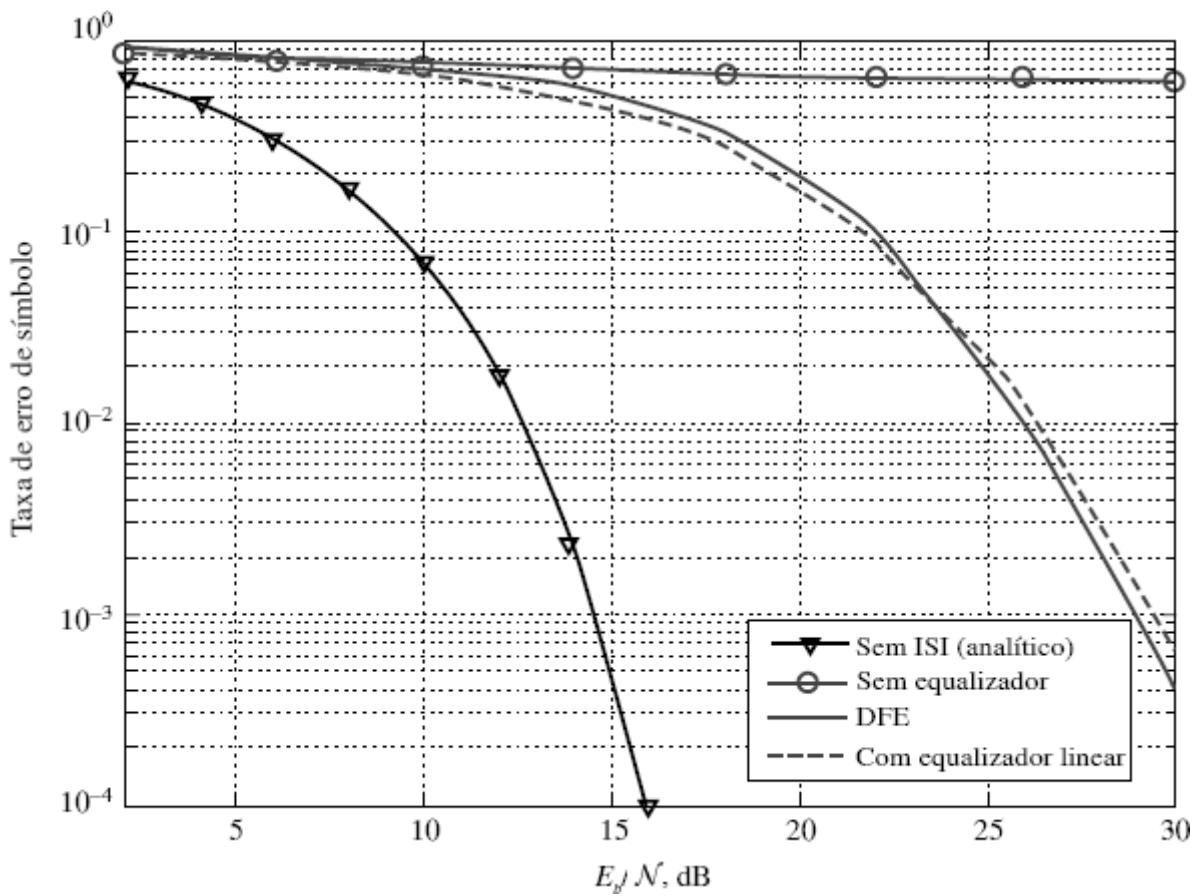


Figura 12.24 Comparação de taxas de erro de símbolo (SER) de DFE, de equalização linear e de canal ideal.

Uma vez calculada a SER com DFE, a mesma é comparada com a SER da equalização linear do exercício anterior, com a SER de um canal AWGN ideal e com SER de um receptor sem equalização. Os resultados são mostrados na Fig. 12.24. Da comparação, podemos perceber que tanto o DFE como o equalizador linear são eficazes na mitigação da ISI do canal. Para SNR menores, o equalizador linear é ligeiramente melhor, pois o DFE é mais suscetível a erro de propagação (Seção 12.6) neste caso.

EXERCÍCIO COMPUTACIONAL 12.3: TRANSMISSÃO OFDM DE SINAIS QAM

Neste exemplo, utilizaremos OFDM para transmissão QAM. Escolhemos o número de subportadoras (e o tamanho da FFT) como $N = 32$. Escolhemos o canal com resposta ao impulso finita (FIR) como

```
channel=[0.3 -0.5 0 1 .2 -0.3]
```

O comprimento do canal é 6 ($L = 5$, na Seção 12.7). Por essa razão, podemos selecionar o comprimento do prefixo cíclico igual ao comprimento mínimo $L = 5$.

```

% Matlab Program <Ex12_3.m>
% Este exercício MATLAB <Ex12_3.m> simula
% um sistema OFDM que emprega sinalização QAM-16 em banda-base
% e canal de multipercorso com AWGN.
% Pressupomos portadora correta e sincronia.
% 32 subportadoras são usadas, com comprimento de canal = 6
% e prefixo cíclico de comprimento = 5.
clear;clf;
L=1600000;           % Número total de símbolos no experimento é 1 milhão
Lfr=L/32;             % número de quadros de dados
% Gera dados aleatórios de sinal para sinalização polar
s_data=4*round(rand(L,1))+2*round(rand(L,1))-3+...
+j*(4*round(rand(L,1))+2*round(rand(L,1))-3);

channel=[0.3 -0.5 0 1 .2 -0.3];          % canal no domínio-t
hf=fft(channel,32);                      % calcula canal no domínio-f
p_data=reshape(s_data,32,Lfr);            % conversão S/P
p_td=ifft(p_data);                      % IFFT para converter ao domínio-t
p_cyc=[p_td(end-4:end,:);p_td];        % adiciona prefixo cíclico
s_cyc=reshape(p_cyc,37*Lfr,1);          % conversão P/S

Psig=10/32;                            % potência média de entrada do canal
chsout=filter(channel,1,s_cyc);        % gera sinal de saída do canal
clear p_td p_cyc s_data s_cyc;        % libera um pouco de memória
noiseq=(randn(37*Lfr,1)+j*randn(37*Lfr,1));
SEReq=[];

for ii=1:31,
SNR(ii)=ii-1;                         % SNR em dB
Asig=sqrt(Psig*10^(-SNR(ii)/10))*norm(channel);
x_out=chsout+Asig*noiseq;              % Adiciona ruído
x_para=reshape(x_out,37,Lfr);          % conversão S/P
x_disc=x_para(6:37,:);                % descarta caudas
xhat_para=fft(x_disc);                % FFT de volta ao domínio-f

z_data=inv(diag(hf))*xhat_para;        % equalização no domínio-f
% calcula a decisão QAM após equalização
deq=sign(real(z_data))+sign(real(z_data)-2)+sign(real(z_data)+2)+...
j*(sign(imag(z_data))+sign(imag(z_data)-2)+sign(imag(z_data)+2));
% Agora, compara com dados originais para calcular a SER
SEReq=[SEReq sum(p_data~=deq,2)/Lfr];
end

for ii=1:9,
SNRa(ii)=2*ii-2;
Q(ii)=3*0.5*erfc(sqrt((2*10^(SNRa(ii)*0.1)/5)/2));
%Calcula a BER analítica
end

% chama outro programa para exibir a análise OFDM
ofdmAz

```

O programa MATLAB principal `Ex12_3.m` completa a modulação OFDM, equalização e detecção. Como as subportadoras (subcanais) têm ganhos diferentes e, em consequência, SNRs diferentes, cada uma das 32 subportadoras pode ter uma SER distinta. Assim, a simples comparação das SERs não conta toda a história. Por isso, chamamos outro programa, `ofdmAz.m`, para analisar os resultados desse sistema OFDM.

```
% MATLAB PROGRAM <ofdmAz.m>
% Este programa é usado para analisar as subportadoras OFDM e suas
% saídas no receptor.

% Traça gráfico de ganho das subportadoras
figure(2);
stem(abs(hf));
xlabel('Ordem da subportadora');

title('Ganho do subcanal');

% Traça gráfico do espalhamento da constelação de subcanal após OFDM
figure(3);
subplot(221);plot(z_data(1,1:800),'.')      % saída do subcanal 1
ylabel('Imaginário');
title('(a) Saída do subcanal 1');axis('square');
subplot(222);plot(z_data(10,1:800),'.');    % saída do subcanal 10
ylabel('Imaginário');
title('(b) Saída do subcanal 10');axis('square');
subplot(223);plot(z_data(15,1:800),'.');    % Saída do subcanal 15
xlabel('Real');ylabel('Imaginário');
title('(c) Saída do subcanal 15');axis('square');
subplot(224);plot(z_data(:,1:800),'b.')%; Saídas de canais
misturados
xlabel('Real');ylabel('Imaginário');
title('(d) Mixed OFDM output');axis('square');

% Traça gráfico de SER média de OFDM e de SER de "canal ideal"
% Com a desabilitação de 5 portadoras pobres, a SER média pode ser reduzida.
figure(4);
figc=semilogy(SNRA,Q,'k-',SNR,mean(SEReq),'b-o',...
    SNR,mean([SEReq(1:14,:);SEReq(20:32,:)]),'b-s');
set(figc,'LineWidth',2);
legend('Canal ideal','Usando todas as subportadoras','Desabilitando
5 portadoras pobres')
title('SER média de OFDM');
axis([1 30 1.e-4 1]);hold off;
xlabel('SNR (dB)');ylabel('Taxa de erro de símbolo (SER)');
```

Primeiro, na Fig. 12.25, mostramos o ganho de subcanal $H[n]$. Podemos ver claramente que, dentre os 32 subcanais, os 5 mais centrais têm piores ganhos e, portanto, SNRs mais baixas. Esperamos, então, que esses canais exibam o pior desempenho. Fixando a SNR média do canal em 30 dB, podemos analisar as saídas equalizadas de diferentes subportadoras. Em particular, selecionamos os subcanais 1, 10 e 15, pois representam canais moderado, bom e pobre, respectivamente. Os gráficos de espalhamento das amostras de saída (Fig. 12.26a-c) demonstram o contraste de qualidade entre esses subcanais. Se não fizermos qualquer distinção entre subcanais, vemos na Fig. 12.26d que o desempenho global de OFDM é dominado pelos subcanais pobres.

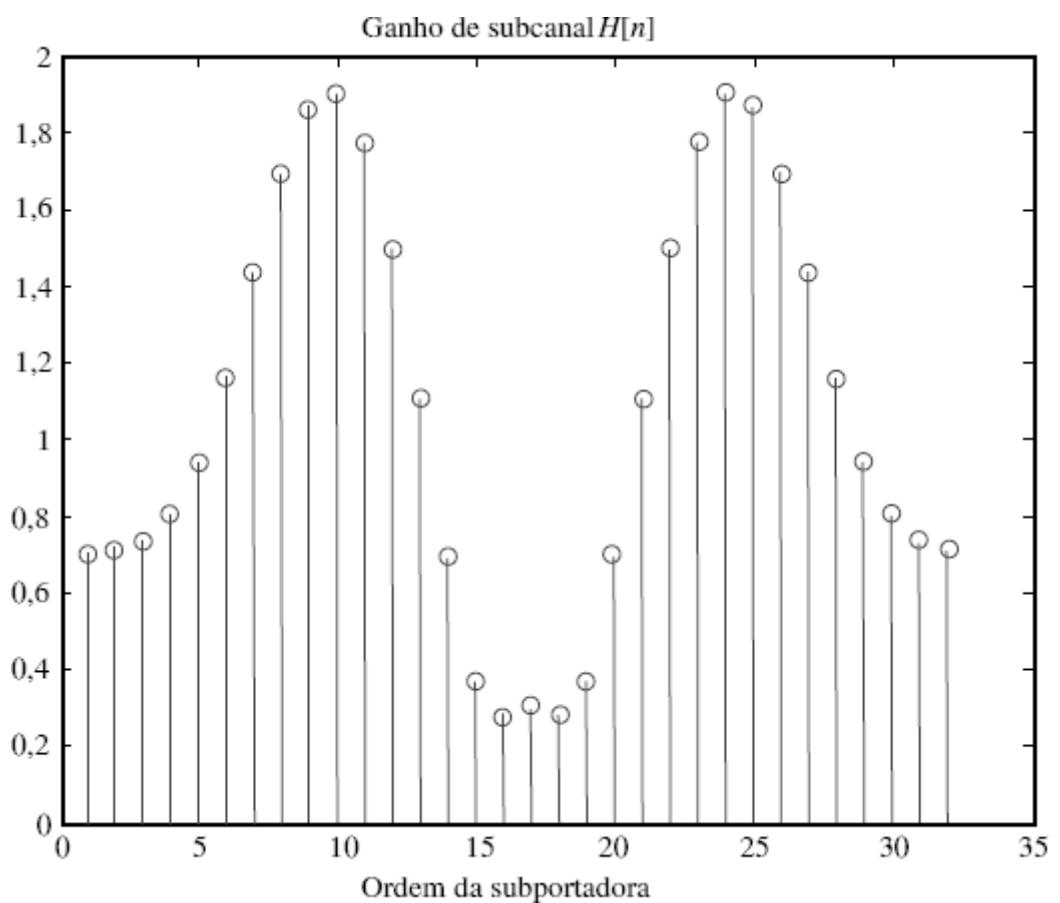


Figura 12.25 Comparação do ganho no canal para as 32 subportadoras.

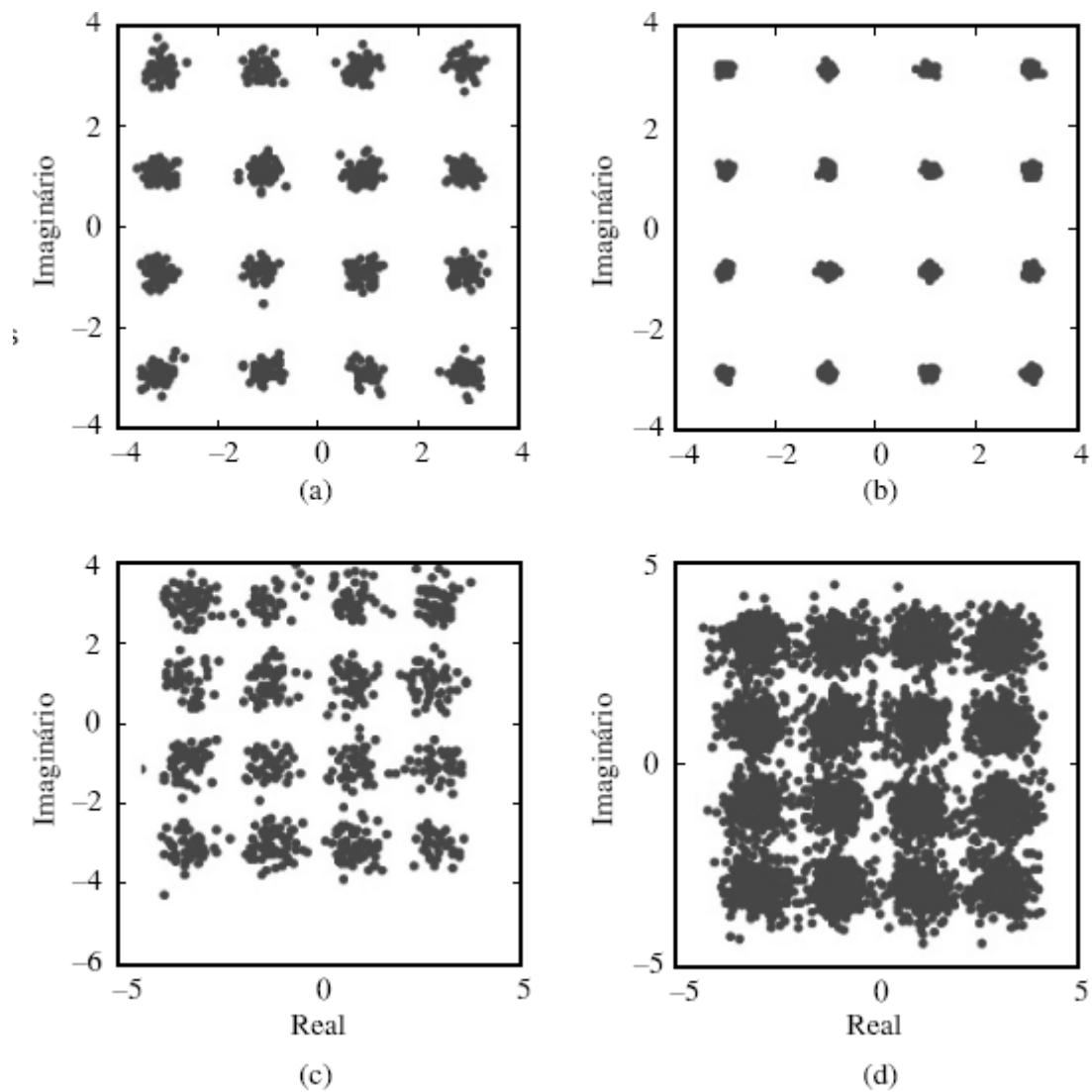


Figura 12.26 Diferentes qualidades de canais como mostrado por gráficos de espalhamento das seguintes saídas de canais OFDM: (a) subcanal 1, (b) subcanal 10, (c) subcanal 15 e (d) subcanais misturados.

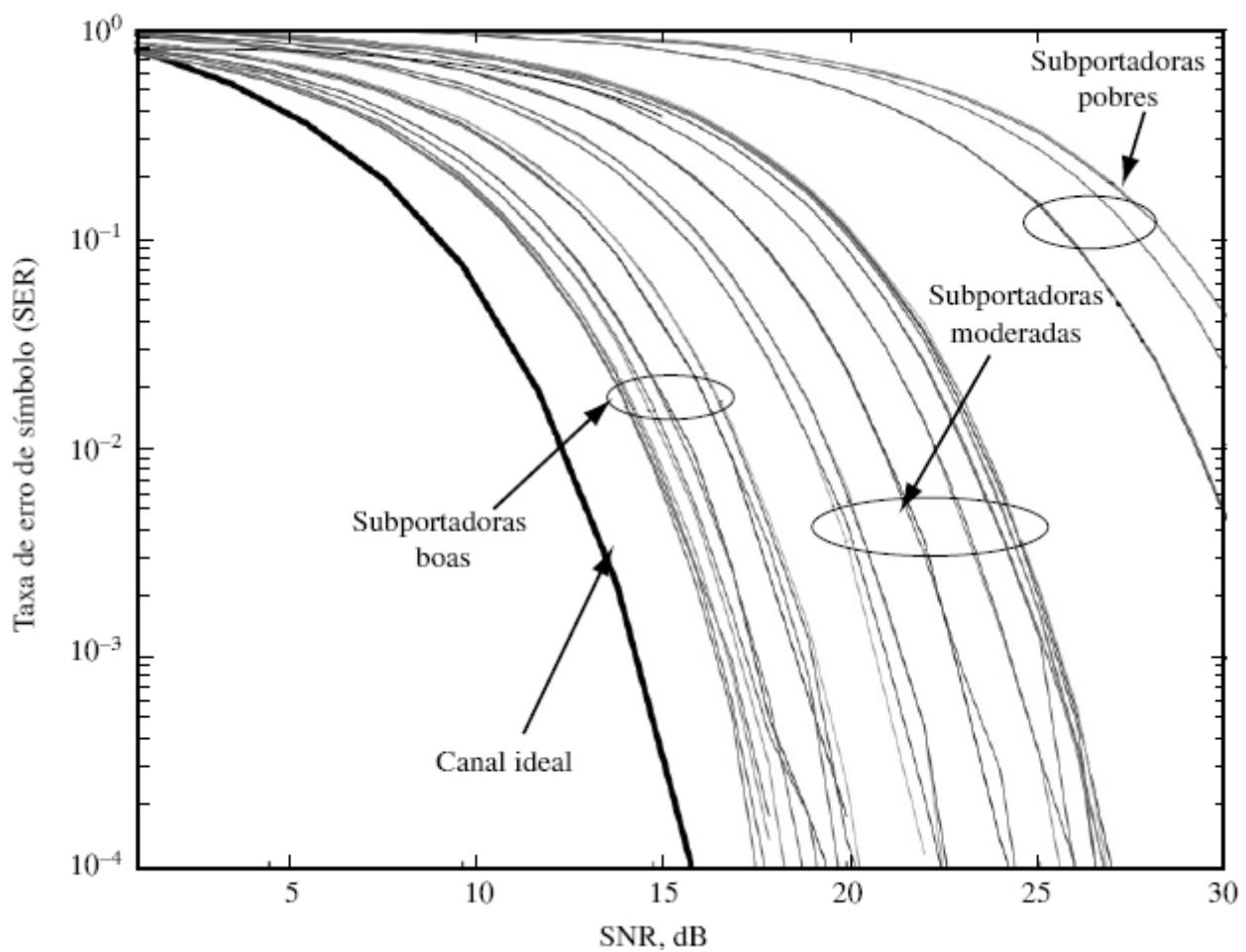


Figura 12.27 Taxa de erro de símbolos (SER) das 32 subportadoras em um canal de multipercorso.

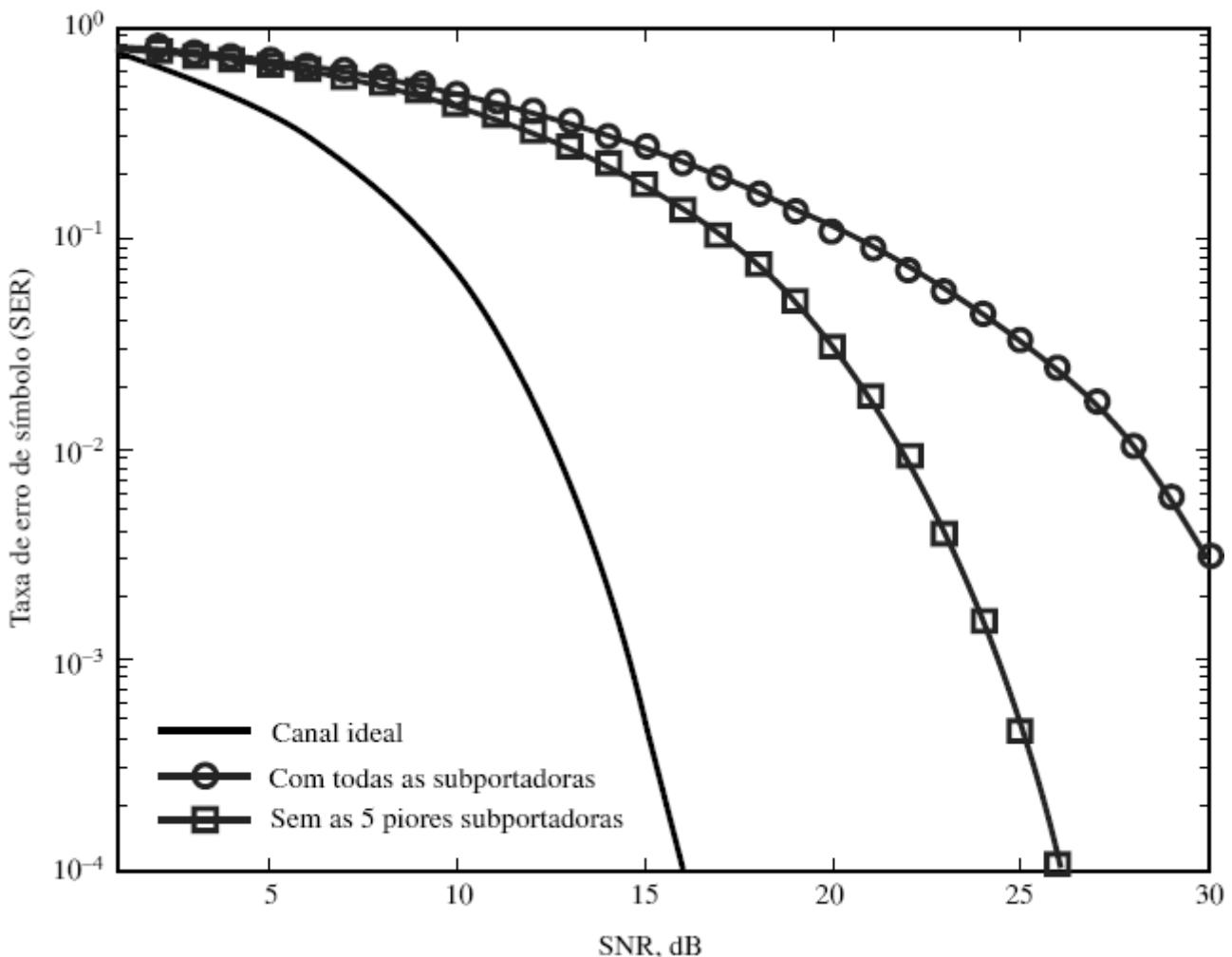


Figura 12.28 SER média das subportadoras OFDM antes e depois da desabilitação dos cinco piores canais.

Podemos, também, analisar a SER de cada uma das 32 subportadoras, como na Fig. 12.27. Vemos claramente que os 5 piores subcanais são responsáveis pelos 5 piores desempenhos de SER. Naturalmente, se considerarmos a SER média tomada entre os 32 canais, a maior SER tende a dominar e a aumentar a SER global do sistema OFDM.

Para tornar o sistema OFDM mais confiável, uma abordagem possível consiste em aplicar carregamento de bits. Na verdade, um caso extremo de carregamento de bit é a desabilitação de subcanais pobres (ou seja, nada enviar aos subcanais com ganho muito baixo). Podemos ver da comparação de SERs na Fig. 12.28 que, com a desabilitação dos 5 piores canais dentre as 32 subportadoras, a SER global é reduzida (melhorada) de forma significativa.

REFERÊNCIAS

1. G. D. Forney, Jr., "Maximum Likelihood Sequence estimation of Digital Sequences in the Presence of Intersymbol Interference," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-18, pp. 363–378, May 1972.
2. Andrew J. Viterbi, "Error Bounds for Convolutional Codes and an Asymptotically Optimum Decoding Algorithm," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 13, no. 2, pp. 260–269, April 1967.
3. Richard Bellman, "Sequential Machines, Ambiguity, and Dynamic Programming," *J. ACM*, vol. 7 no. 1, pp. 24–28, Jan. 1960.
4. R. W. Lucky, "Automatic Equalization for Digital Communication," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 44, pp. 547–588, April 1965.
5. R.W. Lucky, "Techniques for Adaptive Equalization of Digital Communication Systems," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 45, pp. 255–286, Feb. 1966.
6. Z. Ding and Y. Li, *Blind Equalization and Identification*, CRC Press, New York, 2001.
7. R. D. Gitlin and S. B. Weinstein, "Fractionally-Spaced Equalization: An Improved Digital Transversal Equalizer," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 60, pp. 275–296, 1981.
8. T. Kailath, *Linear Systems*, Chapter 5, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1979.
9. N. Al-Dhahir and J. Cioffi, "MMSE Decision Feedback Equalizers and Coding: Finite-Length Results," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 41, no. 4, pp. 961–976, July 1995.

10. R.A. Kennedy and B. D. O. Anderson, "Tight Bounds on the Error Probabilities of Decision Feedback Equalizers," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-35, pp. 1022–1029, Oct. 1987.
11. P. Chow, J. Cioffi, and J. Bingham, "A Practical Discrete Multitone Transceiver Loading Algorithm for Data Transmission over Spectrally Shaped Channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 43, no. 2/3/4, pp. 773–775, Feb./Mar./Apr. 1995.
12. A. Leke and J. M. Cioffi, "A Maximum Rate Loading Algorithm for Discrete Multitone Modulation Systems," *Proceedings of IEEE Globecom*, pp. 1514–1518, Phoenix, AZ, 1997.
13. International Telecommunication Union, ITU-T Recommendation V.90, September 1998.
14. International Telecommunication Union, ITU-T Recommendation G.992.1, June 1999.
15. ETSI, "Digital Video Broadcasting: Framing Structure, Channel Coding and Modulation for Digital Terrestrial Television," European Telecommunication Standard EN 300 744 V1.5, Nov. 2004.
16. D. P. Maxson, *The IBOC Handbook*, Elsevier Amsterdam, 2007.
17. A. Benveniste, M. Goursat, and G. Ruget, "Robust Identification of a Non-minimum Phase System: Blind Adjustment of a Linear Equalizer in Data Communications," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. AC-25, pp. 385–399, June 1980.
18. A. Benveniste and M. Goursat, "Blind Equalizers," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 32, pp. 871–882, Aug. 1982.
19. D. N. Godard, "Self-Recovering Equalization and Carrier Tracking in Two-Dimensional Data Communication Systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-28, pp. 1867–1875, Nov. 1980.
20. G. Picchi and G. Prati, "Blind Equalization and carrier Recovery Using a 'Stop-and-Go' Decision-Directed Algorithm," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-35, pp. 877–887, Sept. 1987.
21. O. Shalvi and E. Weinstein, "New Criteria for Blind Deconvolution of Non-minimum Phase Systems (Channels)," *IEEE Trans. Inform., Theory*, vol. IT-36, pp. 312–321, March 1990.
22. O. Shalvi and E. Weinstein, "Super-exponential Methods for Blind Deconvolution," *IEEE Trans. Inform., Theory*, vol. IT-39, pp. 504–519, March 1993.
23. W. T. Rupprecht, "Adaptive Equalization of Binary NRZ-Signals by Means of Peak Value Minimization," In *Proc. 7th Eu. Conf. on Circuit Theory Design*, Prague, 1985, pp. 352–355.
24. R. A. Kennedy and Z. Ding, "Blind Adaptive Equalizers for QAM Communication Systems Based on Convex Cost Functions," *Opt. Eng.*, pp. 1189–1199, June 1992.
25. L. Tong, G. Xu, and T. Kailath, "Blind Channel Identification and Equalization Based on Second-Order Statistics: A Time-Domain Approach," *IEEE Trans. Inform., Theory*, vol. IT-40, pp. 340–349, March 1994.
26. E. Moulines, P. Duhamel, J.-F. Cardoso, and S. Mayrargue, "Subspace Methods for the Blind Identification of Multichannel FIR Filters," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. SP-43, pp. 516–525, Feb. 1995.
27. D. R. Brillinger and M. Rosenblatt, "Computation and Interpretation of k th Order Spectra," In *Spectral Analysis of Time Series*, B. Harris, E. Wiley, New York, 1967.
28. C.-Y. Chi, C.-C. Feng, C.-H. Chen, and C.-Y. Chen, *Blind Equalization and System Identification*, Springer, Berlin, 2006.
29. Simon Haykin, Ed. *Blind Deconvolution*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1994

EXERCÍCIOS

12.1-1 Em uma transmissão QAM com taxa de símbolo $1/T = 1$ MHz, admita que $p(t)$ seja um pulso raiz de cosseno levantado com fator de decaimento de 0,5. A frequência portadora em uso é de 2,4 GHz.

(a) Deduza a parte $q(T)$ do resultante pulso em banda-base quando o canal de multipercorso tiver a resposta ao impulso dada por

$$0,95\delta(t) - 0,3\delta(t - T/2)$$

(b) Determine se o olho estará aberto para a transmissão QPSK na parte (a) quando as saídas do canal forem amostradas em $t = kT$.

12.2-1 Considere o modelo de transmissão de sinal do Exercício 12.1-1.

(a) Determine o filtro casado para o pulso equivalente em banda-base resultante do canal de multipercorso.

(b) Determine a função de transferência do equivalente sistema linear em tempo discreto $H(z)$ entre os símbolos de entrada QAM e a saída do filtro casado amostrada em $t = kT$.

12.2-2 Em um sistema QAM digital, a forma do pulso recebido em banda-base é $q(t) = \Delta(\frac{t}{2T})$. O ruído de canal (antes do filtro casado) é AWGN com espectro /2.

- (a) Determine a densidade espectral de potência do ruído $w(t)$ na saída do filtro casado.
- (b) Determine a média e a variância do ruído amostrado $w[kT]$ na saída do filtro casado.
- (c) Determine se as amostras de ruído $w[kT]$ são independentes.

12.3-1 Em um sistema BPSK em banda-base, o canal em tempo discreto é especificado por

$$H(z) = 1 + 0,6z^{-1}$$

As amostras do sinal recebido são

$$z[k] = H(z)s_k + w[k]$$

O sinal BPSK é $s_k = \pm 1$, com igual probabilidade. O ruído de canal discreto $w[k]$ é gaussiano branco aditivo, com média zero e variância /2, tal que $E_b/\mathcal{N} = 18$.

- (a) Calcule a probabilidade de erro quando $z[k]$ é enviado diretamente a um dispositivo de decisão BPSK.
- (b) Calcule a probabilidade de erro quando $z[k]$ passa, primeiro, por um equalizador de forçamento a zero antes de um dispositivo de decisão BPSK.

12.3-2 Refaça o Exercício 12.3-2 para o canal discreto

$$H(z) = 1 + 0,9z^{-1}$$

12.3-3 Compare os resultados de BER dos Exercícios 12.3-1 e 12.3-2. Observe as diferentes profundidades dos nulos espectrais do canal e, com base na diferença entre os efeitos de amplificação de ruído, explique as diferenças nas BERs.

12.3-4 Para o canal no Exercício 12.3-1, determine a resposta de um equalizador MMSE de seis derivações. Determine o resultante mínimo MSE. Qual será o correspondente MSE se o equalizador ZF for usado no lugar do equalizador MMSE?

12.3-5 Refaça o Exercício 12.3-3 para o canal FIR do Exercício 12.3-2.

12.4-1 Em um canal fracionalmente amostrado, a frequência de amostragem é escolhida como $2/T$ (ou seja, duas amostras são tomadas a cada símbolo s_k transmitido). As respostas dos dois subcanais amostrados são

$$H_1(z) = 1 + 0,9z^{-1} \quad H_2(z) = -0,3 + 0,5z^{-1}$$

Os dois subcanais têm ruídos gaussianos brancos aditivos, são independentes, têm médias zero e variância $\sigma_w^2 = 0,2$. O símbolo de entrada s_k é PAM-4 com igual probabilidade de ser $(\pm 1, \pm 3)$.

- (a) Mostre que $F_1(z) = 0,3$ e $F_2(z) = 1$ formam um equalizador com forçamento a zero.
- (b) Mostre que $F_1(z) = 1$ e $F_2(z) = -1,8$ também formam um equalizador com forçamento a zero.
- (c) Qual dos dois anteriores equalizadores ZF com espaçamento fracionário tem melhor desempenho? Esse resultado mostra que equalizadores ZF de atrasos diferentes podem levar a desempenhos diferentes.

12.4-2 Para o mesmo sistema no Exercício 12.4-1, faça o que é pedido a seguir.

- (a) Determine os equalizadores ZF de atrasos 0, 1 e 2 quando os filtros do equalizador ZF tiverem ordem 1, ou seja

$$F_i(z) = f_i[0] + f_i[1]z^{-1} \quad i = 1, 2$$

- (b) Determine a resultante distribuição de ruído na saída do equalizador de cada um dos três equalizadores ZF com espaçamento fracionário.
- (c) Calcule a probabilidade de erro de símbolo caso uma decisão abrupta PAM seja tomada na saída do equalizador.

12.6-1 Em um DFE para sinalização polar binária, $s_k \in \{-1, 1\}$, com igual probabilidade. A saída do filtro com alimentação à frente $d[k]$ é dada por

$$d[k] = s_{k-2} + 0,8s_{k-3} + w[k]$$

em que $w[k]$ é branco gaussiano com média zero e variância 0,04.

- (a) Determine o coeficiente do filtro DFE.
- (b) Determine a BER da saída DFE quando a decisões realimentadas não tiverem erro.
- (c) Caso o dispositivo de decisão não seja livre de erros, haverá propagação de erro. Determine a probabilidade de erro na próxima decisão no símbolo s_{k-2} , sabendo que ocorreu erro na decisão anterior s_{k-3} .

12.7-1 Prove que $\mathbf{W}_N \cdot \mathbf{W}_N^{-1} = I_{N \times N}$.

12.7-2 Uma matriz cíclica é uma matriz completamente especificada por sua primeira linha (ou coluna). A linha i é um deslocamento cíclico dos elementos na linha $i - 1$. Em outras palavras, se a primeira linha da matriz C for a_1, \dots, a_{N-1}, a_N , a segunda linha será a_N, a_1, \dots, a_{N-1} , e assim por diante. Prove que qualquer matriz cíclica de ordem $N \times N$ pode ser diagonalizada por \mathbf{W}_N e \mathbf{W}_N^{-1} , ou seja,

$$\mathbf{W}_N \cdot C \cdot \mathbf{W}_N^{-1} = \text{diagonal}$$

12.7-3 Considere o canal FIR com resposta ao impulso

$$h[0] = 1,0, \quad h[1] = -0,5, \quad h[2] = 0,3$$

O ruído de canal é gaussiano branco aditivo, com espectro /2. Projete um sistema OFDM com $N = 16$ (a) especificando o comprimento do prefixo cíclico; (b) determinando os ganhos dos N subcanais; (c) deduzindo a taxa de erro de bit de cada subcanal para modulações BPSK; (d) determinando a taxa de erro de bit média de todo o sistema OFDM.

12.7-4 Considere um canal FIR de ordem máxima L . Primeiro, aplique a IDFT usual ao vetor de dados da fonte,

$$\mathbf{s} = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{W}_N \right)^{-1} \tilde{\mathbf{s}}$$

A seguir, em vez de aplicar um prefixo cíclico como na Eq. (12.64b), insira uma sequência de L zeros na frente de cada N dados antes da transmissão,

$$\left[\begin{array}{c} s_N \\ s_{N-1} \\ \vdots \\ s_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} (N+L) \times 1 \end{array} \right.$$

Esse vetor de dados preenchido com zeros é transmitido normalmente por um canal FIR $\{h[k]\}$. No receptor, empilhe os símbolos recebidos $\{z[n]\}$ em

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} z[N] \\ z[N-1] \\ \vdots \\ z[L] \\ \vdots \\ z[1] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z[N+L] \\ \vdots \\ z[N+1] \end{bmatrix}$$

Prove que

$$\tilde{\mathbf{z}} = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{W}_N \right) \mathbf{y} = \begin{bmatrix} H[N] & & & & \\ & H[N-1] & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & H[+1] \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{s}}$$

Isso ilustra a equivalência entre preenchimento de zeros e prefixo cíclico em OFDM.

- 12.7-5** Mostre que, em canais AWGN, OFDM cíclica e OFDM com preenchimento com zeros alcançam idênticas SNRs, para uma mesma potência de entrada do canal.

* Forney provou¹ que estatística suficiente para a estimativa de símbolos de entrada é mantida por amostragem da saída do filtro casado à taxa de baud em $t = nT$. Esse resultado forma a base do conhecido modelo SISO (*Single-Input – Single-Output*) de sistema com uma entrada, uma saída obtido por amostragem com filtro casado. No entanto, quando $q(t)$ é desconhecido, a otimalidade deixa de ser aplicável.

* A estatística suficiente mostrada por G. D. Forney¹ não é necessariamente retida.

* Em um ambiente estacionário (por exemplo, linhas DSL), os canais são muito estáveis e os receptores podem usar um canal de enlace reverso para passar ao transmissor informação sobre o canal direto. Essa realimentação de informação do estado do canal (CSI – *channel state information*) é, normalmente, realizada a uma baixa taxa de bit para assegurar a precisão, e pode consumir recursos valiosos de largura de banda.

* Além do uso de prefixo cíclico, preenchimento com zeros é uma abordagem alternativa, mas equivalente.

13 INTRODUÇÃO À TEORIA DA INFORMAÇÃO

Dentre todos os meios de comunicação discutidos até aqui, nenhum produz comunicação sem erro. Podemos aumentar a precisão em sinais digitais reduzindo a probabilidade de erro P_e . Contudo, parece que, desde que ruído de canal exista, a comunicação jamais será livre de erros. Por exemplo, em todos os sistemas digitais discutidos até agora, P_e varia assintoticamente como. Se aumentarmos E_b , a energia por bit, podemos reduzir P_e a qualquer nível desejado. A potência de sinal é $S_i = E_b R_b$, em que R_b é a taxa de bits. Portanto, aumentar E_b significa aumentar a potência de sinal (para uma dada taxa de bits), reduzir a taxa de bits (para uma dada potência), ou as duas coisas. Devido a limitações físicas, não é possível S_i aumentar além de certo limite. Assim, para reduzir P_e ainda mais, devemos reduzir R_b , a taxa de transmissão de dígitos de informação. Ou seja, o preço a ser pago pela redução de P_e é uma redução na taxa de transmissão. Para que P_e se aproxime de zero, R_b deve se aproximar de zero. Parece, então, que, na presença de ruído, é impossível alcançar comunicação sem erro. Isso era o que pensavam engenheiros de comunicação até a publicação do artigo seminal de Shannon¹ em 1948. Shannon mostrou que, para um dado canal, desde que a taxa de dígitos de informação por segundo a ser transmitida fosse mantida dentro de certo limite determinado pelo canal físico (conhecido como capacidade do canal), seria possível alcançar comunicação sem erro. Em outras palavras, para obter $P_e \rightarrow 0$, não é necessário fazer $R_b \rightarrow 0$. O objetivo ($P_e \rightarrow 0$) pode ser alcançado mantendo R_b abaixo de C , a capacidade do canal (por segundo). A essência do artigo de Shannon é que a presença de uma perturbação aleatória em um canal, por si só, não impõe qualquer limite na precisão da transmissão, mas define um limite sobre a taxa de informação para a qual uma probabilidade de erro arbitrariamente pequena ($P_e \rightarrow 0$) pode ser alcançada.

Usamos a frase “taxa de transmissão de informação” como se a informação pudesse ser medida. De fato, assim é. A seguir, discutiremos o conteúdo de informação de uma mensagem, como entendido pelo “senso comum”, e também como entendido pelo “senso da engenharia”. Surpreendentemente, as duas abordagens levam à mesma medida da informação em uma mensagem.

13.1 MEDIDA DE INFORMAÇÃO

Medida de Informação pelo Senso Comum

Consideremos as três manchetes hipotéticas em um jornal:

1. Haverá luz do dia amanhã.
2. Estados Unidos invadem o Irã.
3. Irã invade os Estados Unidos.

O leitor dificilmente prestará atenção à primeira manchete, a menos que viva nas proximidades do Polo Norte ou do Polo Sul. O leitor ficará muito, muito interessado na segunda. Todavia, a terceira manchete é que, de fato, prenderá a atenção do leitor. Esse item despertará muito mais interesse que os outros dois. Do ponto de vista do “senso comum”, a primeira manchete praticamente não contém informação; a segunda contém muita informação; a terceira contém ainda mais informação. Se analisarmos as probabilidades de ocorrência desses três eventos, perceberemos que a probabilidade de ocorrência do primeiro é a unidade (um evento certo), a do segundo é baixa (um evento de probabilidade pequena, mas finita), a do terceiro é praticamente zero (um evento quase impossível). Quando um evento de baixa probabilidade ocorre causa grande surpresa e, portanto, transporta mais informação que a ocorrência de um evento de maior probabilidade. Assim, a informação está associada ao elemento de surpresa, que é um resultado da incerteza ou imprevisibilidade. Quanto mais inesperado for um evento, maior a surpresa e, portanto, a informação. A probabilidade de ocorrência de um evento é uma medida de sua imprevisibilidade e, assim, está ligada ao conteúdo de informação. Do ponto de vista do senso comum, a quantidade de informação recebida de uma mensagem é diretamente proporcional à incerteza ou inversamente proporcional à probabilidade de ocorrência da mesma. Se P for a probabilidade de ocorrência de uma mensagem e I , a informação obtida da mensagem, fica evidente por essa discussão que, quando $P \rightarrow 1$, $I \rightarrow 0$, e que, quando $P \rightarrow 0$, $I \rightarrow \infty$ e que, quanto menor P , maior I . Isso sugere a seguinte medida de informação:

$$I \sim \log \frac{1}{P} \tag{13.1}$$

Medida de Informação no Senso da Engenharia

A seguir mostraremos que, do ponto de vista da engenharia, o conteúdo de informação de uma mensagem é consistente com a medida intuitiva [Eq. (13.1)]. O que queremos dizer com ponto de vista da engenharia? Um engenheiro é responsável pela transmissão eficiente de mensagens. Por esse serviço, o engenheiro cobrará do cliente uma quantia proporcional à informação a ser transmitida. Na verdade, o engenheiro cobrará do cliente uma quantia proporcional ao tempo que a largura de banda do canal ficar ocupada pela transmissão da mensagem. Em resumo, do ponto de vista da engenharia, a quantidade de informação em uma mensagem é proporcional ao (mínimo) tempo necessário para transmitir a mensagem. A seguir, mostraremos que esse conceito de informação também leva à Eq. (13.1). Isso implica que uma mensagem com maior probabilidade pode ser transmitida em um tempo mais curto que uma mensagem com probabilidade menor. Esse fato pode ser comprovado pelo exemplo da transmissão de símbolos alfabéticos do inglês usando o código Morse. Esse código consiste em várias combinações de dois símbolos (traço e ponto, como no código Morse, ou pulsos de amplitudes A e $-A$ volts). Cada letra é representada por certa combinação desses símbolos, denominada **palavra de código**, que tem certo comprimento. Obviamente, para transmissão eficiente, palavras de código mais curtas são associadas às letras e , i , a e o , que ocorrem com mais frequência. Palavras de código mais longas são atribuídas às letras x , k , q e z , que ocorrem com menor frequência. Cada letra pode ser considerada uma mensagem. É claro que letras que ocorrem com mais frequência (com maior probabilidade de ocorrência) requerem menor tempo para transmissão (palavras de código mais curtas) que aquelas com menor probabilidade de ocorrência. Mostremos, então, que, em média, o tempo necessário para transmitir um símbolo (ou uma mensagem) com probabilidade de ocorrência P é, de fato, proporcional a $\log(1/P)$.

Para simplificar, iniciemos com o caso de mensagens binárias m_1 e m_2 , com igual probabilidade de ocorrência. Podemos usar dígitos binários para codificar essas mensagens e representar m_1 e m_2 pelos dígitos **0** e **1**, respectivamente. É óbvio que precisamos de, no mínimo, um dígito binário (que pode assumir dois valores) para representar cada uma das duas mensagens equiprováveis. Consideremos, agora, o caso de quatro mensagens equiprováveis m_1 , m_2 , m_3 e m_4 . Se essas mensagens forem codificadas na forma binária, precisamos de, no mínimo, dois dígitos binários por mensagem. Cada dígito binário pode assumir dois valores. Logo, uma combinação de dois dígitos binários pode formar quatro palavras de código **00**, **01**, **10** e **11**, que podem ser atribuídas às quatro mensagens equiprováveis m_1 , m_2 , m_3 e m_4 , respectivamente. Fica claro que cada uma dessas mensagens ocupa o dobro do tempo de transmissão que no caso de duas mensagens equiprováveis e, portanto, contém o dobro de informação. Da mesma forma, podemos codificar qualquer uma de oito mensagens equiprováveis com um mínimo de três dígitos binários, pois três dígitos binários formam oito palavras de código distintas. Cada palavra de código pode ser associada a uma das oito mensagens. Podemos perceber que, em geral, precisaremos de $\log_2 n$ dígitos binários para codificar cada uma de n mensagens equiprováveis.* Como as mensagens são equiprováveis, P , a probabilidade de ocorrência de qualquer uma delas, é $1/n$. Assim, para codificar cada mensagem (de probabilidade P), precisamos de $\log_2(1/P)$ dígitos binários. Portanto, do ponto de vista da engenharia, a informação I contida em uma mensagem de probabilidade de ocorrência P é proporcional a $\log_2(1/P)$,

$$I = k \log_2 \frac{1}{P} \quad (13.2)$$

em que k é uma constante a ser determinada. Mais uma vez, concluímos (do ponto de vista da engenharia) que o conteúdo de informação de uma mensagem é proporcional ao logaritmo do recíproco da probabilidade da mensagem.

Definamos, agora, a informação transportada por uma mensagem, segundo a Eq. (13.2). A constante de proporcionalidade é, por conveniência, tomada como unitária e, em termos de unidades binárias – abreviadas por **bit** (*binary unit*, ou unidade binária) – a informação é dada por

$$I = \log_2 \frac{1}{P} \text{ bits} \quad (13.3)$$

Segundo essa definição, a informação I contida em uma mensagem pode ser interpretada como o mínimo número de dígitos binários necessário para a codificação da mesma. Isso é dado por $\log_2(1/P)$, em que P é a probabilidade de ocorrência da mensagem. Embora tenhamos obtido esse resultado considerando mensagens equiprováveis, mostraremos na próxima seção que o mesmo também se aplica ao caso de mensagens não equiprováveis.

Consideremos, agora, o caso de dígitos r -ários, em vez de binários, para a codificação. Cada um dos dígitos r -ários pode assumir r valores (**0**, **1**, **2**, ..., $r - 1$). Cada uma de n mensagens (codificadas por dígitos r -ários) pode, então, ser transmitida por uma sequência particular de sinais r -ários. Como cada dígito r -ário pode assumir r valores, k dígitos r -ários podem formar um máximo de r^k palavras de código distintas. Portanto, para codificar cada uma das n mensagens, precisamos de, no mínimo, $k = \log_r n$ dígitos r -ários.** Mas, $n = 1/P$, em que P é a probabilidade de ocorrência de cada mensagem. Então, precisaremos de, no mínimo, $\log_r(1/P)$ dígitos r -ários. Assim, a informação I por mensagem é

$$I = \log_r \frac{1}{P} \text{ unidades } r\text{-árias} \quad (13.4)$$

Das Eqs. (13.3) e (13.4), fica evidente que

$$I = \log_2 \frac{1}{P} \text{ bits} = \log_r \frac{1}{P} \text{ unidades } r\text{-árias}$$

Logo,^{*}

$$\text{unidades } r\text{-árias} = \log_2 r \text{ bits} \quad (13.5)$$

Nota sobre a Unidade de Informação: Embora o uso da unidade r -ária como unidade genérica de informação seja tentador, a unidade binária ($r = 2$) é comumente usada na literatura. Não há, obviamente, qualquer perda de generalidade no uso de $r = 2$. Essas unidades sempre podem ser convertidas em outras, com emprego da Eq. (13.5). Daqui em diante, usaremos a unidade binária (bit) para informação. Omitiremos a base para a função logarítmica, ficando subentendido que é 2.

Informação Média por Mensagem: Entropia de uma Fonte

Consideremos uma fonte sem memória m que emite mensagens m_1, m_2, \dots, m_n com probabilidades P_1, P_2, \dots, P_n , respectivamente ($P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$). Uma fonte **sem memória** implica que cada mensagem emitida independe da(s) anterior(es). Pela definição na Eq. (13.3) [ou Eq. (13.4)], o conteúdo de informação da mensagem m_i é I_i , dado por

$$I_i = \log \frac{1}{P_i} \text{ bits} \quad (13.6)$$

A probabilidade de ocorrência de m_i é P_i . Logo, a informação média por mensagem emitida pela fonte é dada por bits. A informação média por mensagem de uma fonte m é denominada **entropia**, e denotada por $H(m)$. Assim,

$$\begin{aligned} H(m) &= \sum_{i=1}^n P_i I_i \text{ bits} \\ &= \sum_{i=1}^n P_i \log \frac{1}{P_i} \text{ bits} \end{aligned} \quad (13.7a)$$

$$= - \sum_{i=1}^n P_i \log P_i \text{ bits} \quad (13.7b)$$

A entropia de uma fonte é uma função das probabilidades das mensagens. É interessante que determinemos a distribuição de probabilidade de mensagens que fornece a máxima entropia. Como a entropia é uma medida da incerteza, a distribuição de probabilidade que gera a máxima incerteza terá máxima entropia. Em termos qualitativos, esperamos que a entropia seja máxima quando todas as mensagens forem equiprováveis. Mostremos, então, que isso é verdade.

Como $H(m)$ é uma função de P_1, P_2, \dots, P_n , o valor máximo de $H(m)$ é determinado da equação $dH(m)/dP_i = 0$, para $i = 1, 2, \dots, n$, sujeita à condição

$$1 = P_1 + P_2 + \dots + P_{n-1} + P_n \quad (13.8)$$

Como a função a ser maximizada é

$$H(m) = - \sum_{i=1}^n P_i \log P_i \quad (13.9)$$

precisamos usar o lagrangiano para formar uma nova função

$$f(P_1, P_2, \dots, P_n) = -\sum_{i=1}^n P_i \log P_i + \lambda(P_1 + P_2 + \dots + P_{n-1} + P_n - 1)$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{df}{dP_j} &= -P_j \left(\frac{1}{P_j} \right) \log e - \log P_j + \lambda \\ &= -\log P_j + \lambda - \log e \quad j = 1, 2, \dots, n\end{aligned}$$

Igualando as derivadas a zero, obtemos

$$P_1 = P_2 = \dots = P_n = \frac{2^\lambda}{e}$$

Invocando a condição sobre as probabilidades na Eq. (13.8), temos

$$n \frac{2^\lambda}{e} = 1$$

Com isso,

$$P_1 = P_2 = \dots = P_n = \frac{1}{n} \tag{13.10}$$

Para mostrar que a Eq. (13.10) fornece $[H(m)]_{\max}$ e não $[H(m)]_{\min}$, notemos que, quando $P_1 = 1$ e $P_2 = P_3 = \dots = P_n = 0$, $H(m) = 0$, enquanto as probabilidades na Eq. (13.10) fornecem

$$H(m) = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} = \log n$$

Interpretações Intuitiva (do Senso Comum) e de Engenharia da Entropia: Anteriormente, observamos que os pontos de vista intuitivo e de engenharia levavam à mesma definição da informação associada a uma mensagem. Todavia, as bases conceituais para os dois pontos de vista são completamente diferentes. Em consequência, temos duas interpretações físicas da informação. Segundo o ponto de vista da engenharia, o conteúdo de informação de qualquer mensagem é igual ao número mínimo de dígitos necessário para a codificação da mensagem e, portanto, a entropia $H(m)$ é igual ao número mínimo de dígitos por mensagem requerido, em média, para codificação. Do ponto de vista intuitivo, a informação é vista como tendo sincronia com a quantidade de surpresa, ou incerteza, associada ao evento (mensagem). Uma menor probabilidade de ocorrência implica mais incerteza em relação ao evento. Incerteza, obviamente, está associada à surpresa. Assim, de modo intuitivo, a informação associada a uma mensagem é uma medida da incerteza (imprevisibilidade) da mensagem. Portanto, $\log(1/P_i)$ é uma medida da incerteza da mensagem m_i , e $\sum_{i=1}^n \log(1/P_i)$ é a incerteza média (por mensagem) da fonte que gera as mensagens m_1, m_2, \dots, m_n com probabilidades P_1, P_2, \dots, P_n , respectivamente. As duas interpretações são úteis no entendimento qualitativo das definições matemáticas e resultados da teoria da informação. A entropia também pode ser vista como uma função associada a uma variável aleatória m que assume os valores m_1, m_2, \dots, m_n com probabilidades $P(m_1), P(m_2), \dots, P(m_n)$:

$$H(m) = \sum_{i=1}^n P(m_i) \log \frac{1}{P(m_i)} = \sum_{i=1}^n P_i \log \frac{1}{P_i}$$

Assim, podemos associar uma entropia a qualquer variável aleatória discreta.

Se a fonte não for sem memória (ou seja, caso uma mensagem emitida em qualquer instante de tempo dependa das mensagens emitidas anteriormente), a entropia da fonte será menor que $H(m)$ na Eq. (13.9). Isso se deve ao fato de que, quando uma mensagem depende das anteriores, sua incerteza fica reduzida.

13.2 CODIFICAÇÃO DE FONTE

Vimos que o número mínimo de dígitos binários requerido para a codificação de uma mensagem é igual à entropia da fonte $\log(1/P)$, se todas as mensagens da fonte forem equiprováveis (a probabilidade de cada mensagem é P). A seguir, generalizaremos esse resultado para o caso de mensagens não equiprováveis. Mostraremos que, para uma arbitrária distribuição de probabilidade das mensagens, o número médio de dígitos binários por mensagem necessário para a codificação é dado por $H(m)$ (em bits).

Consideremos uma fonte m que emite mensagens m_1, m_2, \dots, m_n , com probabilidades P_1, P_2, \dots, P_n , respectivamente. Consideremos, ainda, uma sequência de N mensagens, com $N \rightarrow \infty$. Seja k_i o número de vezes em que a mensagem m_i ocorre nessa sequência. Segundo a interpretação da frequência relativa (ou lei dos grandes números),

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{k_i}{N} = P_i$$

Assim, a mensagem m_i ocorre NP_i vezes em uma sequência de N mensagens (desde que $N \rightarrow \infty$). Portanto, em uma típica sequência de N mensagens, m_1 ocorrerá NP_1 vezes, m_2 ocorrerá NP_2 vezes, ..., m_n ocorrerá NP_n vezes. A ocorrência de todas as outras composições é extremamente improvável ($P \rightarrow 0$). Dessa forma, qualquer sequência típica (com $N \rightarrow \infty$) tem a mesma proporção das n mensagens, embora, em geral, a ordem seja diferente. Admitamos uma fonte sem memória; ou seja, admitamos que a mensagem emitida pela fonte independe de mensagens anteriores. Consideremos, agora, uma típica sequência S_N de N mensagens da fonte. Como as n mensagens (de probabilidades P_1, P_2, \dots, P_n) ocorrem NP_1, NP_2, \dots, NP_n vezes e como cada mensagem é independente, a probabilidade de ocorrência de uma típica sequência S_N é dada por

$$P(S_N) = (P_1)^{NP_1} (P_2)^{NP_2} \cdots (P_n)^{NP_n} \quad (13.11)$$

Como todas as possíveis sequências de N mensagens desta fonte têm a mesma composição, todas as sequências (de N mensagens) são equiprováveis, com probabilidade $P(S_N)$. Podemos, então, considerar essas longas sequências como novas mensagens (que são equiprováveis). Para codificar uma dessas sequências, precisaremos de L_N dígitos binários, em que

$$L_N = \log \left[\frac{1}{P(S_N)} \right] \text{ dígitos binários} \quad (13.12)$$

Substituindo a Eq. (13.11) na Eq. (13.12), obtemos

$$L_N = N \sum_{i=1}^n P_i \log \frac{1}{P_i} = NH(m) \text{ dígitos binários}$$

Notemos que L_N é o comprimento (número de dígitos binários) da palavra de código necessária para codificar N mensagens na sequência. Assim, L , o número médio de dígitos requerido por mensagem, é L_N/N , dado por

$$L = \frac{L_N}{N} = H(m) \text{ dígitos binários} \quad (13.13)$$

Assim, a codificação de N mensagens sucessivas permite a codificação de uma sequência de mensagens da fonte usando, em média, $H(m)$ dígitos binários por mensagem, em que $H(m)$ é a entropia da mensagem da fonte (em bits). Além disso, podemos mostrar que $H(m)$ é, de fato, em média, o número mínimo de dígitos requerido para a codificação dessa fonte de mensagem. É impossível encontrar qualquer código decodificável sem ambiguidade cujo comprimento médio seja menor que $H(m)$.^{4, 5}

Código de Huffman

O teorema da codificação de fonte diz que, para a codificação de uma fonte de entropia $H(m)$, precisamos, em média, de um mínimo de $H(m)$ dígitos binários por mensagem. O número de dígitos na palavra de código representa o **comprimento** da mesma. Assim, o comprimento de palavra médio de um código ótimo é $H(m)$. Desafortunadamente, para alcançar esse comprimento, em geral, devemos codificar uma sequência de N mensagens ($N \rightarrow \infty$) de cada vez. Se desejarmos codificar cada mensagem diretamente sem usar longas sequências, o comprimento médio de palavra de código por mensagem será maior que $H(m)$. Na prática, não é desejável usar longas sequências, pois causam atrasos de transmissão e aumentam a complexidade de equipamentos. Portanto, é preferível codificar as mensagens diretamente, mesmo que o preço seja pago em termos de maior comprimento de palavra. Na maioria dos casos, o preço se revela pequeno. A seguir, apresentamos um procedimento, dado sem

prova, para a determinação do código de fonte ótimo, denominado código de Huffman. A prova de que este código é ótimo pode ser encontrada na literatura.⁴⁻⁶

Ilustremos o procedimento com um exemplo que usa um código binário. Primeiro, organizemos as mensagens na ordem decrescente de probabilidade, como mostrado na Tabela 13.1. Aqui, temos seis mensagens com probabilidades 0,30, 0,25, 0,15, 0,12, 0,08 e 0,10. Agreguemos as duas últimas mensagens em uma única com probabilidade $P_5 + P_6 = 0,18$. Isso nos deixa com cinco mensagens de probabilidades 0,30, 0,25, 0,18, 0,15 e 0,12. Essas mensagens são, então, organizadas na segunda coluna, em ordem decrescente de probabilidade. Repetimos esse procedimento de agregar as duas últimas mensagens na segunda coluna e reorganizá-las em ordem decrescente de probabilidade. Isso é feito até que o número de mensagens seja reduzido a dois. A essas duas mensagens (reduzidas) são atribuídos **0** e **1** como seus primeiros dígitos na sequência de códigos. Agora, voltamos e atribuímos os números **0** e **1** ao segundo dígito para as duas mensagens agregadas no passo anterior. Continuamos regredindo dessa forma até chegarmos à primeira coluna. Pode ser mostrado que o código obtido (para a primeira coluna) é ótimo. O procedimento completo é ilustrado nas Tabelas 13.1 e 13.2.

Tabela 13.1

Fonte Original		Fontes Reduzidas			
Mensagens	Probabilidades	S_1	S_2	S_3	S_4
m_1	0,30	0,30			
m_2	0,25	0,25	0,27		
m_3	0,15	0,18	0,25	0,43	
m_4	0,12	0,15	0,18		
m_5	0,08	0,12			
m_6	0,10				

Tabela 13.2

Fonte Original			Fontes Reduzidas			
Mensagens	Probabilidades	Código	S_1	S_2	S_3	S_4
m_1	0,30	00	0,30	00	0,43	0,57
m_2	0,25	10	0,25	10	0,30	0,43
m_3	0,15	010	0,18	11	0,27	1
m_4	0,12	011	0,15	010	0,18	11
m_5	0,08	110	0,12	011		
m_6	0,10	111				

O código ótimo (de Huffman) obtido por esse procedimento também é conhecido como **código compacto**. O comprimento médio do código compacto no exemplo considerado é dado por

$$L = \sum_{i=1}^n P_i L_i = 0,3(2) + 0,25(2) + 0,15(3) + 0,12(3) + 0,1(3) + 0,08(3)$$

$$= 2,45 \text{ dígitos binários}$$

A entropia $H(m)$ da fonte é dada por

$$H(m) = \sum_{i=1}^n P_i \log_2 \frac{1}{P_i}$$

$$= 2,418 \text{ bits}$$

Portanto, o mínimo comprimento possível (alcançado por uma sequência infinitamente longa de mensagens) é 2,418 dígitos binários. O uso de codificação direta (código de Huffman) permite alcançar um comprimento médio de 2,45 bits no exemplo considerado. Essa é uma boa aproximação ao desempenho ótimo. Assim, nesse caso, pouco é ganho com a complexa codificação de um número de mensagens.

O mérito de qualquer código é medido por seu comprimento médio em comparação a $H(m)$ (o mínimo comprimento médio). Definimos **eficiência de código** η como

$$\eta = \frac{H(m)}{L}$$

em que L é o comprimento médio do código. Em nosso exemplo,

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{2,418}{2,45} \\ &= 0,976\end{aligned}$$

A **redundância** γ é definida como

$$\begin{aligned}\gamma &= 1 - \eta \\ &= 0,024\end{aligned}$$

Embora seja um código de comprimento variável, o código de Huffman pode ser decodificado sem ambiguidade. Se recebermos uma sequência de mensagens codificadas com o código de Huffman, a mesma poderá ser decodificada de uma única forma, ou seja, sem ambiguidade. Por exemplo, se, neste exercício, a fonte emitisse a sequência de mensagens $m_1 m_5 m_2 m_1 m_4 m_3 m_6 \dots$, a mesma seria codificada como **001101000011010111...**. O leitor pode comprovar que essa sequência de mensagens pode ser decodificada de uma única forma, ou seja, $m_1 m_5 m_2 m_1 m_4 m_3 m_6 \dots$, mesmo que não haja demarcação entre as mensagens individuais. Esta unicidade é garantida pela propriedade especial de que nenhuma palavra de código é um prefixo de outra palavra de código (mais longa).

Um procedimento semelhante é usado para determinar um código r -ário compacto. Nesse caso, organizamos as mensagens em ordem decrescente de probabilidade, combinamos as r últimas em uma mensagem e reorganizamos o novo conjunto (conjunto reduzido) em ordem decrescente de probabilidade. Repetimos o procedimento até que o conjunto final seja reduzido a r mensagens. A cada uma dessas mensagens, atribuímos um dos r números **0, 1, 2, ..., r - 1**. A seguir, regredimos como no caso binário, até que a cada uma das mensagens originais tenha sido atribuído um código.

Para um código r -ário, teremos exatamente r mensagens no último conjunto reduzido se e somente se o número total de mensagens originais for $r + k(r - 1)$, em que k é um inteiro, pois cada redução diminui o número de mensagens em $r - 1$. Portanto, se houver um total de k reduções, o número total de mensagens deve ser $r + k(r - 1)$. Caso essa condição não seja satisfeita pelas mensagens originais, devemos adicionar algumas mensagens fictícias com probabilidade de ocorrência zero, até que a mesma seja atendida. Por exemplo, se $r = 4$ e o número de mensagens n for 6, devemos adicionar uma mensagem fictícia com probabilidade de ocorrência zero, para que o número total de mensagens seja 7, ou $[4 + 1(4 - 1)]$, e procedemos como usual. O procedimento é ilustrado no Exemplo 13.1.

Exemplo 13.1 Uma fonte sem memória emite seis mensagens com probabilidades 0,3, 0,25, 0,15, 0,12, 0,1 e 0,08. Determinemos um código de Huffman 4-ário (quaternário). Determinemos, ainda, o comprimento de palavra médio, a eficiência e a redundância.

Nesse caso, precisamos adicionar uma mensagem fictícia para satisfazer a condição de que o número de mensagens seja $r + k(r - 1)$ e, então, procedemos como usual. O código de Huffman é determinado na Tabela 13.3. O comprimento L desse código é

$$\begin{aligned}L &= 0,3(1) + 0,25(1) + 0,15(1) + 0,12(2) + 0,1(2) + 0,08(2) + 0(2) \\ &= 1,3 \text{ dígitos 4-ários}\end{aligned}$$

Tabela 13.3

Fonte Original

Mensagens	Probabilidades	Código	Fontes Reduzidas
m_1	0,30	0	
m_2	0,25	2	
m_3	0,15	3	
m_4	0,12	10	
m_5	0,10	11	
m_6	0,08	12	
m_7	0,00	13	

E

$$H_4(m) = - \sum_{i=1}^6 P_i \log_4 P_i$$

$$= 1,209 \text{ dígitos 4-ários}$$

A eficiência do código η é calculada como

$$\eta = \frac{1,209}{1,3} = 0,93$$

A redundância é $\gamma = 1 - \eta = 0,07$.

Para alcançar a eficiência de código $\eta \rightarrow 1$, precisamos de $N \rightarrow \infty$. O código de Huffman usa $N = 1$ e sua eficiência é, em geral, menor que 1. Existe um equilíbrio entre esses dois extremos $N = 1$ e $N = \infty$. Podemos codificar um grupo de $N = 2$ ou 3 mensagens. Na maioria dos casos, o uso de $N = 2$ ou 3 pode fornecer uma eficiência próxima de 1, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 13.2 Uma fonte sem memória emite mensagens m_1 e m_2 com probabilidades 0,8 e 0,2. Determinemos o código binário ótimo (código de Huffman) para essa fonte, assim como para suas **extensões de segunda e terceira ordens** (ou seja, $N = 2$ e 3). Determinemos, em cada caso, a eficiência do código.

O código de Huffman para essa fonte é apenas **0** e **1**, com $L = 1$, e

$$H(m) = -(0,8 \log 0,8 + 0,2 \log 0,2)$$

$$= 0,72 \text{ bit}$$

Logo,

$$\eta = 0,72$$

Para a extensão de segunda ordem da fonte ($N = 2$), há quatro possíveis mensagens compostas $m_1 m_1$, $m_1 m_2$, $m_2 m_1$ e $m_2 m_2$, com probabilidades 0,64, 0,16, 0,16 e 0,04, respectivamente. O código de Huffman é obtido na Tabela 13.4.

Tabela 13.4

Fonte Original

Mensagens	Probabilidades	Código	Fontes Reduzidas				
$m_1 m_1$	0,64	0		0,64	0	0,64	0
$m_1 m_2$	0,16	11		0,20	10	0,36	1
$m_2 m_1$	0,16	100		0,16	11		
$m_2 m_2$	0,04	101					

Tabela 13.5

Mensagens	Probabilidades	Código
$m_1 m_1 m_1$	0,512	0
$m_1 m_1 m_2$	0,128	100
$m_1 m_2 m_1$	0,128	101
$m_2 m_1 m_1$	0,128	110
$m_1 m_2 m_2$	0,032	11100
$m_2 m_1 m_2$	0,032	11101
$m_2 m_2 m_1$	0,032	11110
$m_2 m_2 m_2$	0,008	11111

Nesse caso, o comprimento de palavra médio L' é

$$\begin{aligned} L' &= 0,64(1) + 0,16(2) + 0,16(3) + 0,04(3) \\ &= 1,56 \end{aligned}$$

Esse é o comprimento de palavra para duas mensagens da fonte original. Portanto, L , o comprimento de palavra por mensagem, é

$$L = \frac{L'}{2} = 0,78$$

e

$$\eta = \frac{0,72}{0,78} = 0,923$$

Prosseguindo com $N = 3$ (extensão de terceira ordem da fonte), temos oito mensagens possíveis e, seguindo o procedimento do código de Huffman, determinamos o código como mostrado na Tabela 13.5. O comprimento de palavra L'' é

$$\begin{aligned} L'' &= (0,512)1 + (0,128 + 0,128 + 0,128)3 \\ &\quad + (0,032 + 0,032 + 0,032)5 + (0,008)5 \\ &= 2,184 \end{aligned}$$

Logo,

$$L = \frac{L''}{3} = 0,728$$

e

$$\eta = \frac{0,72}{0,728} = 0,989$$

13.3 COMUNICAÇÃO SEM ERRO EM UM CANAL RUIDOSO

Como vimos na seção anterior, mensagens de uma fonte com entropia $H(m)$ podem ser codificadas com o uso de, em média, $H(m)$ dígitos por mensagem. Essa codificação tem redundância zero. Portanto, se transmitirmos essas mensagens codificadas por um canal ruidoso, parte da informação será recebida erroneamente. Não existe a possibilidade de comunicação sem erro em um canal ruidoso quando as mensagens são codificadas com redundância zero. Em geral, o uso de redundância ajuda a combater os efeitos do ruído. Isso pode ser visto no exemplo de um **código com teste de paridade simples** (*single parity check code*), em que um dígito binário é adicionado a cada palavra de código para assegurar que o número total de 1s na palavra de código resultante seja sempre par (ou ímpar). Se ocorrer um único erro na palavra de código recebida, a paridade será violada e o receptor solicitará retransmissão. Esse é um exemplo bem simples para demonstrar a utilidade da redundância. Procedimentos mais complexos de codificação, capazes de corrigir até n dígitos, serão discutidos no próximo capítulo.

A adição de um dígito aumenta o comprimento de palavra médio para $H(m) + 1$, resultando em $\eta = H(m)/[H(m) + 1]$ e redundância $1 - \eta = 1/[H(m) + 1]$. Portanto, a adição de um dígito aumenta a redundância e, assim, também ajuda a combater o ruído. Imunidade contra ruído de canal pode ser melhorada com o aumento da redundância. Shannon mostrou ser possível alcançar comunicação sem erro com a adição de redundância suficiente.

Transmissão em Canais Simétricos Binários

Consideremos um canal simétrico binário (BSC – *binary symmetric channel*) com probabilidade de erro P_e . Para transmissão sem erro nesse canal, mensagens de uma fonte com entropia $H(m)$ devem ser codificadas por códigos binários em que o comprimento de palavra seja, pelo menos, $H(m)/C_s$, em que

$$C_s = 1 - \left[P_e \log \frac{1}{P_e} + (1 - P_e) \log \frac{1}{1 - P_e} \right] \quad (13.14)$$

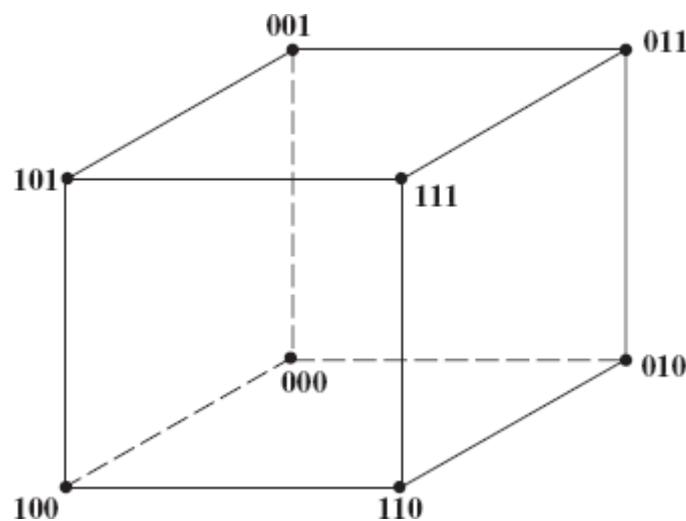


Figura 13.1 Cubo tridimensional no espaço de Hamming.

O parâmetro C_s ($C_s < 1$) é denominado **capacidade de canal** (e será discutido na Seção 13.4).

Devido à adição de redundância para proteção contra erros, a eficiência desses códigos será sempre abaixo de $C_s < 1$. Para comunicação sem erro em um dado canal binário com $C_s = 0,4$, um código deverá ter, pelo menos, $2,5H(m)$ dígitos binários por mensagem, o que representa 2,5 vezes o número de dígitos correspondente ao caso sem redundância. Isso significa que há

$1,5H(m)$ bits redundantes por mensagem. Assim, em média, para cada 2,5 dígitos transmitidos, um dígito é de informação e 1,5 dígito é redundante, ou de verificação, resultando em uma redundância $1 - C_s = 0,6$.

Como discutido no início deste capítulo, P_e , a probabilidade de erro da sinalização binária, varia com , de modo que, para $P_e \rightarrow 0$, é preciso que $S_i \rightarrow \infty$ ou $R_b \rightarrow 0$. Como S_i deve ser finita, $P_e \rightarrow 0$, somente se $R_b \rightarrow 0$. Contudo, o resultado de Shannon assegura que, para comunicação sem erro em uma largura de banda B , não é, de fato, necessário ter $R_b \rightarrow 0$. Basta manter R_b abaixo de C , a capacidade do canal por segundo ($C = 2BC_s$). Onde está a discrepância? Para responder a essa pergunta, investiguemos cuidadosamente o papel da redundância na comunicação sem erro. Embora a discussão a seguir seja voltada ao esquema binário, a mesma é geral e pode ser estendida ao caso M -ário.

Consideremos um método simples de reduzir P_e por meio da repetição de um dado dígito um número ímpar de vezes. Por exemplo, podemos transmitir **0** e **1** como **000** e **111**. Para tomar uma decisão, o receptor usa a regra da maioria; ou seja, se pelo menos dois dos três dígitos forem **1**, a decisão será **1**, e se pelo menos dois dos três dígitos forem **0**, a decisão será **0**. Assim, se menos que dois dos três dígitos estiverem em erro, a informação será recebida sem erro. Do mesmo modo, para corrigir dois erros, precisamos de cinco repetições. Em qualquer caso, repetições causam redundância e melhoram P_e (Exemplo 8.8).

Tentemos entender essa situação de um ponto de vista gráfico. Consideremos o caso de três repetições. Podemos mostrar as oito possíveis sequências de três dígitos binários graficamente como os vértices de um cubo (Fig. 13.1). É conveniente mapear as sequências binárias como ilustrado na Fig. 13.1 e lançar mão do que é conhecido como **distância de Hamming** entre sequências binárias. Se duas sequências binárias do mesmo comprimento diferirem em j posições (j dígitos), a distância de Hamming entre as sequências é j . Assim, a distância de Hamming entre **000** e **010** (ou entre **001** e **101**) é 1 e entre **000** e **111**, 3. No caso de três repetições, transmitimos o binário **1** como **111** e o binário **0** como **000**. A distância de Hamming entre essas duas sequências é 3. Observemos que, dos oito vértices possíveis, ocupamos apenas dois (**000** e **111**) com mensagens transmitidas. Contudo, no receptor, devido ao ruído de canal, podemos receber qualquer uma das oito sequências, a regra da maioria para decisão pode ser interpretada como uma regra que decide a favor da mensagem (**000** ou **111**) que estiver à menor distância de Hamming da sequência recebida. As sequências **000**, **001**, **010** e **100** estão a 1 unidade de distância de Hamming de **000**, e a pelo menos 2 unidades de **111**. Portanto, quando recebemos qualquer uma dessas quatro sequências, a decisão será o binário **0**. Da mesma forma, quando qualquer uma das sequências **110**, **111**, **011** ou **101** for recebida, a decisão será o binário **1**.

Agora, podemos ver por que a probabilidade de erro é reduzida nesse esquema. Dos oito vértices possíveis, usamos apenas dois, que são separados por 3 unidades de Hamming. Se desenarmos uma esfera de Hamming de raio unitário em torno de cada um desses dois vértices (**000** e **111**), as duas esferas de Hamming^{*} não se sobreporão. O ruído de canal pode criar uma distância entre as sequências recebida e transmitida; desde que essa distância seja igual ou menor que 1 unidade, ainda será possível detectar a mensagem sem erro. Do mesmo modo, o caso de cinco repetições pode ser representado por um hipercubo de cinco dimensões. As sequências transmitidas **00000** e **11111** ocupam dois vértices separados por cinco unidades, e esferas de Hamming com raio de 2 unidades centradas nesses vértices não se sobrepõem. Nesse caso, mesmo que o ruído de canal cause dois erros, ainda será possível detectar as mensagens corretamente. Portanto, a redução da probabilidade de erro se deve ao fato de não termos usado todos os vértices disponíveis para mensagens. Caso ocupássemos todos os vértices disponíveis com mensagens (como no caso sem redundância ou repetição), se o ruído de canal causasse um erro, a sequência recebida ocuparia um vértice atribuído a outra sequência transmitida e, inevitavelmente, tomariamos uma decisão errada. Justamente por não ocuparmos os vértices vizinhos aos das sequências transmitidas é que somos capazes de detectar a sequência corretamente, apesar de erros de canal dentro de certo limite. Quanto menor a fração de vértices utilizados, menor será a probabilidade de erro. Devemos ter em mente que a redundância (ou repetição) é o que permite manter vértices desocupados.

Repetição É Ineficiente

Se continuarmos a aumentar n , o número de repetições, reduziremos P_e , mas também reduziremos R_b pelo fator n . Todavia, não importa quanto grande n seja feito, a probabilidade de erro jamais será zero. O problema desse esquema é ser ineficiente, pois adicionamos dígitos redundantes (ou de verificação) a cada dígito de informação. Como analogia, dígitos redundantes (ou de verificação) são como guardas que protegem o dígito de informação. Ter guardas para cada dígito de informação é um pouco parecido com o caso de famílias que vivem em uma rua onde ocorreram diversos roubos. Cada família fica temerosa e contrata um guarda. Obviamente, isso é caro e ineficiente. Uma solução melhor seria que todas as famílias na rua contratassem um guarda e dividissem os custos. Um guarda pode vigiar todas as casas na rua, supondo que a mesma seja razoavelmente curta. Caso a rua seja muito longa, pode ser necessário contratar uma equipe de guardas. Contudo, certamente não é necessário contratar um guarda por casa. Ao usar repetições, estamos em uma situação semelhante. Dígitos redundantes (ou repetidos) foram usados para vigiar (ou verificar) apenas um dígito de mensagem. Usando a analogia anterior, poderia ser mais eficiente se usássemos dígitos redundantes não para verificar (vigiar) um dado dígito transmitido, mas para um bloco de dígitos. Essa é a solução de nosso problema. Consideremos um grupo de dígitos de informação em certo intervalo de tempo de T segundos, e adicionemos alguns dígitos redundantes para verificar todos esses dígitos.

Suponhamos que precisemos transmitir α dígitos binários de informação por segundo. Em um período de T segundos, temos um bloco de αT dígitos binários de informação. Se, a esse bloco de dígitos de informação, adicionarmos $(\beta - \alpha)$ dígitos de verificação (isto é, $\beta - \alpha$ dígitos de verificação ou redundantes por segundo), precisaremos transmitir βT ($\beta > \alpha$) dígitos a cada αT dígitos de informação. Portanto, em um intervalo de T segundos, temos

$$\begin{aligned}\alpha T &= \text{dígitos de informação} \\ \beta T &= \text{total de dígitos transmitidos } (\beta > \alpha) \\ (\beta - \alpha)T &= \text{dígitos de verificação}\end{aligned}\quad (13.15)$$

Assim, em vez de transmitirmos um dígito binário a cada $1/\alpha$ segundos, deixamos que αT dígitos se acumulem em T segundos. Consideremos isso como uma mensagem a ser transmitida. Há um total de $2^{\alpha T}$ dessas supermensagens. Assim, a cada T segundos, devemos transmitir uma das possíveis $2^{\alpha T}$ supermensagens. Essas supermensagens são transmitidas por uma sequência de βT dígitos binários. Há um total de $2^{\beta T}$ sequências possíveis de βT dígitos binários, que podem ser representadas como vértices de um hipercubo de βT dimensões. Como temos apenas $2^{\alpha T}$ mensagens a serem transmitidas, e existem $2^{\beta T}$ vértices disponíveis, ocupamos somente uma fração $2^{-(\beta - \alpha T)}$ dos vértices do hipercubo de βT dimensões. Observemos que a taxa de transmissão foi reduzida por um fator α/β . Este fator de redução α/β independe de T . A fração de vértices ocupados (fator de ocupação) por mensagens transmitidas é $2^{-(\beta - \alpha T)}$ e pode ser reduzida com o aumento de T . No limite $T \rightarrow \infty$, o fator de ocupação tende a zero. Isso forçará a probabilidade a cair a 0, nos dando a possibilidade de comunicação sem erro.

Contudo, uma questão importante aguarda resposta. Qual deve ser a razão de redução de taxa α/β para que esse sonho se torne realidade? Para responder a essa pergunta, observemos que o aumento de T aumenta o comprimento da sequência transmitida (βT dígitos). Se P_e for a probabilidade de erro de dígito, podemos ver a partir da definição de frequência relativa (ou lei dos grandes números) que, à medida que $T \rightarrow \infty$, o número total de dígitos em erro em uma sequência de βT dígitos ($\beta T \rightarrow \infty$) é exatamente $\beta T P_e$. Portanto, as sequências recebidas estarão a uma distância de Hamming de $\beta T P_e$ das sequências transmitidas. Para comunicação sem erro, devemos, então, deixar desocupados todos os vértices nas esferas de raio $\beta T P_e$ desenhadas em torno de cada um dos $2^{\alpha T}$ vértices ocupados. Em resumo, devemos ser capazes de empacotar $2^{\alpha T}$ esferas que não se sobreponham, cada uma de raio $\beta T P_e$, em um espaço de Hamming de βT dimensões. Isto significa que, para um dado β , α não pode ser aumentado além de algum limite sem causar sobreposição das esferas e, consequentemente, falha no esquema de correção de erro. O teorema de Shannon afirma que, para que esse esquema funcione, α/β deve ser menor que a constante (capacidade de canal) C_s que, fisicamente, é uma função do ruído de canal e da potência de sinal:

$$\frac{\alpha}{\beta} < C_s \quad (13.16)$$

Devemos estar cientes de que comunicação perfeita, sem erro, não é prática. Nesse sistema, acumulamos os dígitos de informação por T segundos antes de codificá-los e, como $T \rightarrow \infty$, para comunicação sem erro, teríamos de esperar uma eternidade para iniciar a codificação. Assim, haverá um atraso infinito no transmissor e um atraso adicional de mesma duração no receptor. Além disso, o equipamento necessário para armazenagem, codificação e decodificação da sequência de comprimento infinito seria monstruoso. Como esperado, o sonho de comunicação sem erro não pode ser realizado na prática. Qual é, então, a utilidade do resultado de Shannon? Uma, é que esse resultado indica um limite superior para a taxa de comunicação sem erro que pode ser alcançada em um canal. Isso, por si só, é notável. Outra, o resultado indica que podemos reduzir a probabilidade de erro abaixo de um nível *arbitrariamente* baixo se permitirmos apenas uma pequena redução da taxa de transmissão de dígitos de informação. Podemos, portanto, buscar um equilíbrio entre comunicação sem erro com atraso infinito e comunicação *quase* sem erro com atraso finito.

13.4 CAPACIDADE DE CANAL DE UM CANAL DISCRETO SEM MEMÓRIA

Esta seção trata de canais discretos sem memória. Consideremos uma fonte que gera uma mensagem que contém r símbolos x_1, x_2, \dots, x_r . O receptor recebe símbolos y_1, y_2, \dots, y_s . O conjunto de símbolos $\{y_k\}$ pode ou não ser idêntico ao conjunto $\{x_k\}$, dependendo da natureza do receptor. Se usarmos receptores dos tipos discutidos no Capítulo 10, o conjunto de símbolos recebidos será idêntico ao conjunto transmitido. Ao receber um sinal, o receptor ótimo decide qual dos r símbolos x_1, x_2, \dots, x_r foi transmitido. Aqui, seremos mais genéricos e não restringiremos o conjunto $\{y_k\}$ a ser idêntico ao conjunto $\{x_k\}$.

Se o canal não tiver ruído, a recepção de algum símbolo y_j determina, sem ambiguidade, o símbolo transmitido. No entanto, devido ao ruído, quando y_j for recebido, haverá alguma incerteza em relação ao símbolo transmitido. Denotemos por $P(x_i|y_j)$ a probabilidade condicional de que x_i tenha sido transmitido quando y_j foi recebido; assim, a incerteza em relação a x_i quando y_j for recebido será $\log [1/P(x_i|y_j)]$. Tomando a média dessa incerteza para todos x_i e y_j , obtemos $H(x|y)$, a incerteza média em relação ao símbolo transmitido x quando um símbolo y for recebido. Assim,

$$H(x|y) = \sum_i \sum_j P(x_i, y_j) \log \frac{1}{P(x_i|y_j)} \text{ bits por símbolo} \quad (13.17)$$

Para canais sem ruído, a incerteza seria zero.* Obviamente, essa incerteza, $H(x|y)$ é causada pelo ruído de canal, e representa a perda média de informação sobre um símbolo transmitido quando um símbolo é recebido. Chamamos $H(x|y)$ de **entropia condicional** de x dado y (isso é, a quantidade de incerteza em relação a x uma vez que y seja conhecido).

Reparemos que $P(y_j|x_i)$ representa uma probabilidade *a priori* de que y_j seja recebido quando x_i é transmitido. Essa é uma característica do canal e do receptor. Assim, um dado canal (com seu receptor) é especificado pela **matriz de canal**:

$$\text{Entradas} \quad \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{matrix} \quad \text{Saídas} \quad \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_s \\ P(y_1|x_1) & P(y_2|x_1) & \cdots & P(y_s|x_1) \\ P(y_1|x_2) & P(y_2|x_2) & \cdots & P(y_s|x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(y_1|x_r) & P(y_2|x_r) & \cdots & P(y_s|x_r) \end{pmatrix}$$

Podemos usar a regra de Bayes para obter as probabilidades condicionais *a posteriori* (ou reversas) $P(x_i|y_j)$:

$$P(x_i|y_j) = \frac{P(y_j|x_i)P(x_i)}{P(y_j)} \quad (13.18a)$$

$$= \frac{P(y_j|x_i)P(x_i)}{\sum_i P(x_i, y_j)} \quad (13.18b)$$

$$= \frac{P(y_j|x_i)P(x_i)}{\sum_i P(x_i)P(y_j|x_i)} \quad (13.18c)$$

Assim, se as probabilidades dos símbolos de entrada $P(x_i)$ e a matriz de canal forem conhecidas, as probabilidades condicionais *a posteriori* podem ser calculadas das Eqs. (13.18). A probabilidade condicional *a posteriori* $P(x_i|y_j)$ é a probabilidade de que x_i tenha sido transmitido quando y_j foi recebido.

Para um canal sem ruído, a quantidade média de informação recebida seria $H(x)$ bits (entropia da fonte) por símbolo recebido. Reparemos que $H(x)$ é a informação média transmitida pelo canal por símbolo. Devido ao ruído de canal, mesmo ao receber y , haverá uma incerteza em relação a x na quantidade média de $H(x|y)$ bits de informação por símbolo. Portanto, na recepção de y , a quantidade de informação que o receptor recebe é, em média, $I(x; y)$ bits por símbolo recebido, em que

$$I(x; y) = H(x) - H(x|y) \quad \text{bits por símbolo} \quad (13.19)$$

$I(x; y)$ é denominada **informação mútua** de x e y . Como

$$H(x) = \sum_i P(x_i) \log \frac{1}{P(x_i)} \quad \text{bits}$$

temos

$$I(x; y) = \sum_i P(x_i) \log \frac{1}{P(x_i)} - \sum_i \sum_j P(x_i, y_j) \log \frac{1}{P(x_i|y_j)}$$

E, como

$$\sum_j P(x_i, y_j) = P(x_i)$$

temos

$$\begin{aligned} I(x; y) &= \sum_i \sum_j P(x_i, y_j) \log \frac{1}{P(x_i)} - \sum_i \sum_j P(x_i, y_j) \log \frac{1}{P(x_i|y_j)} \\ &= \sum_i \sum_j P(x_i, y_j) \log \frac{P(x_i|y_j)}{P(x_i)} \end{aligned} \quad (13.20a)$$

$$= \sum_i \sum_j P(x_i, y_j) \log \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)P(y_j)} \quad (13.20b)$$

Alternativamente, usando a regra de Bayes na Eq. (13.20a), podemos expressar $I(x; y)$ como

$$I(x; y) = \sum_i \sum_j P(x_i, y_j) \log \frac{P(y_j|x_i)}{P(y_j)} \quad (13.20c)$$

ou podemos substituir a Eq. (13.18c) na Eq. (13.20a):

$$I(x; y) = \sum_i \sum_j P(x_i)P(y_j|x_i) \log \frac{P(y_j|x_i)}{\sum_i P(x_i)P(y_j|x_i)} \quad (13.20d)$$

A Eq. (13.20d) expressa $I(x; y)$ em termos das probabilidades dos símbolos de entrada e da matriz de canal.

As unidades de $I(x; y)$ devem ser estudadas com atenção. Como $I(x; y)$ é a quantidade média de informação recebida por símbolo transmitido, suas unidades são bits por símbolo. Se usarmos dígitos binários na entrada, o símbolo será um dígito binário e as unidades de $I(x; y)$, bits por dígito binário.

Como, na Eq. (13.20b), $I(x; y)$ é simétrico em relação a x e y , temos

$$I(x; y) = I(y; x) \quad (13.21a)$$

$$= H(y) - H(y|x) \quad (13.21b)$$

A grandeza $H(y|x)$ é a entropia condicional de y dado x e é a incerteza média em relação ao símbolo recebido quando o símbolo transmitido é conhecido. A Eq. (13.21b) pode ser reescrita como

$$H(x) - H(x|y) = H(y) - H(y|x) \quad (13.21c)$$

Da Eq. (13.20d), fica claro que $I(x; y)$ é uma função das probabilidades dos símbolos transmitidos $P(x_i)$ e da matriz de canal. Para um dado canal, $I(x; y)$ será máxima para algum conjunto de probabilidades $P(x_i)$. Esse valor máximo é a **capacidade de canal** C_s :

$$C_s = \max_{P(x_i)} I(x; y) \text{ bits por símbolo} \quad (13.22)$$

Assim, como permitimos que a entrada do canal escolha qualquer probabilidade $P(x_i)$, C_s representa a máxima informação que pode ser transmitida por um símbolo pelo canal. Esses conceitos ficarão mais claros com o exemplo de um canal simétrico binário (BSC) dado a seguir.

Exemplo 13.3 Determinemos a capacidade de canal do BSC mostrado na Fig. 13.2.

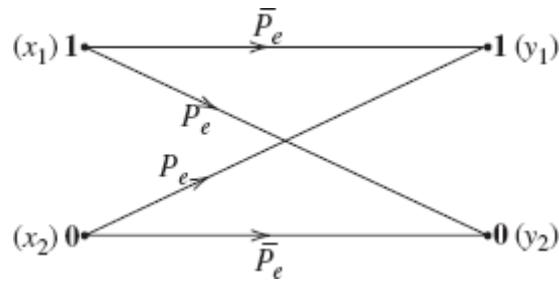


Figura 13.2 Canal simétrico binário.

Sejam $P(x_1) = \alpha$ e $P(x_2) = \bar{\alpha} = (1 - \alpha)$, e

$$P(y_1|x_2) = P(y_2|x_1) = P_e$$

$$P(y_1|x_1) = P(y_2|x_2) = \bar{P}_e = 1 - P_e$$

A substituição dessas probabilidades na Eq. (13.20d) fornece

$$\begin{aligned} I(x; y) &= \alpha \bar{P}_e \log \left(\frac{\bar{P}_e}{\alpha \bar{P}_e + \bar{\alpha} P_e} \right) + \alpha P_e \log \left(\frac{P_e}{\alpha P_e + \bar{\alpha} \bar{P}_e} \right) \\ &\quad + \bar{\alpha} P_e \log \left(\frac{P_e}{\alpha \bar{P}_e + \bar{\alpha} P_e} \right) + \bar{\alpha} \bar{P}_e \log \left(\frac{\bar{P}_e}{\alpha P_e + \bar{\alpha} \bar{P}_e} \right) \\ &= (\alpha P_e + \bar{\alpha} \bar{P}_e) \log \left(\frac{1}{\alpha P_e + \bar{\alpha} \bar{P}_e} \right) \\ &\quad + (\alpha \bar{P}_e + \bar{\alpha} P_e) \log \left(\frac{1}{\alpha \bar{P}_e + \bar{\alpha} P_e} \right) \\ &\quad - \left(P_e \log \frac{1}{P_e} + \bar{P}_e \log \frac{1}{\bar{P}_e} \right) \end{aligned}$$

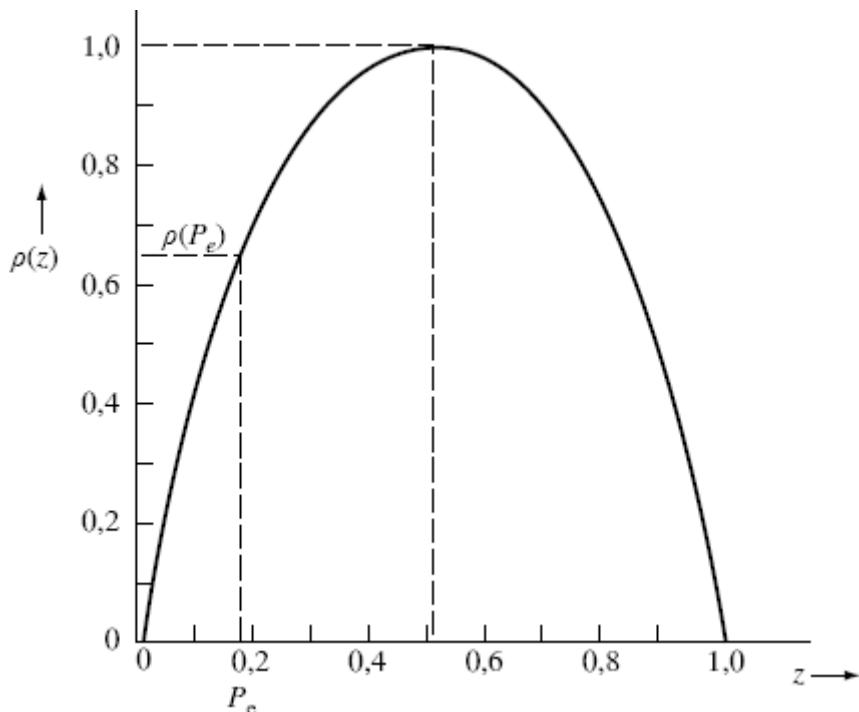


Figura 13.3 Gráfico de $\rho(z)$.

Se definirmos

$$\rho(z) = z \log \frac{1}{z} + \bar{z} \log \frac{1}{\bar{z}}$$

com $\bar{z} = (1 - z)$, obtemos

$$I(x; y) = \rho(\alpha P_e + \bar{\alpha} \bar{P}_e) - \rho(P_e) \quad (13.23)$$

A Fig. 13.3 mostra o gráfico de $\rho(z)$ em função de z . Pode ser observado que $\rho(z)$ é máximo em $z = 1/2$. (Vale notar que a região de interesse é apenas $0 < z < 1$). Para uma dada P_e , $\rho(P_e)$ é fixa. Com isso, da Eq. (13.23) segue que $I(x; y)$ é máxima quando $\rho(\alpha P_e + \bar{\alpha} \bar{P}_e)$ for máxima. Isso ocorre quando

$$\alpha P_e + \bar{\alpha} \bar{P}_e = 0,5$$

ou

$$\alpha P_e + (1 - \alpha)(1 - P_e) = 0,5$$

Esta equação é satisfeita quando

$$\alpha = 0,5 \quad (13.24)$$

Para esse valor de α , $\rho(\alpha P_e + \bar{\alpha} \bar{P}_e) = 1$, e

$$\begin{aligned} C_s &= \max_{P(x_i)} I(x; y) = 1 - \rho(P_e) \\ &= 1 - \left[P_e \log \frac{1}{P_e} + (1 - P_e) \log \left(\frac{1}{1 - P_e} \right) \right] \end{aligned} \quad (13.25)$$

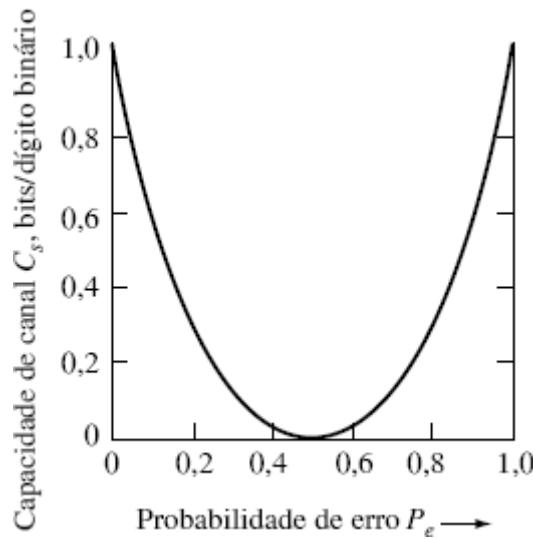


Figura 13.4

Capacidade de canal simétrico binário em função da probabilidade de erro P_e .

Da Fig. 13.4, que mostra C_s em função de P_e , vemos que o valor máximo de C_s é a unidade. Isso significa que podemos transmitir, no máximo, 1 bit de informação por dígito binário. Esse é o resultado esperado, pois um dígito binário pode transportar uma de duas mensagens equiprováveis. O conteúdo de informação de uma das duas mensagens

é $\log_2 2 = 1$ bit. Observamos, ainda, que C_s é máxima quando a probabilidade de erro $P_e = 0$ ou $P_e = 1$. Quando a probabilidade de erro $P_e = 0$, o canal é sem ruído, e esperamos que C_s seja máxima. Contudo, surpreendentemente, C_s também é máxima quando $P_e = 1$. Isso é de fácil explicação: o canal comete erros de forma consistente e certa de que se torna tão bom quanto um canal sem ruído. Tudo o que devemos fazer para termos comunicação sem erro e inverter a decisão feita; isso é, se **0** for recebido, decidimos que **1** foi transmitido e vice-versa. A capacidade de canal C_s é zero (mínima) quando $P_e = 1/2$. Se a probabilidade de erro for $1/2$, os símbolos transmitidos e os símbolos recebidos são estatisticamente independentes. Se recebermos **0**, por exemplo, **1** ou **0** pode ter sido igualmente transmitido, de modo que a informação recebida é zero.

Capacidade de Canal por Segundo

A capacidade de canal C_s na Eq. (13.22) representa a máxima quantidade possível de informação transmitida quando um símbolo (dígito) for transmitido. Se K símbolos forem transmitidos por segundo, a máxima taxa de transmissão de informação por segundo é KC_s . Esta é a capacidade em unidade de informação por segundo, e será denotada por C (em bits por segundo):

$$C = KC_s$$

Comentário sobre Capacidade de Canal: Capacidade de canal é uma propriedade de um particular canal físico pelo qual a informação é transmitida. Isso é verdade desde que o termo *canal* seja interpretado corretamente. Um canal significa não apenas o meio de transmissão, mas também inclui as especificações do tipo de sinal (binário, r -ário etc., ou ortogonal simplex etc.) e do tipo de receptor usado (o receptor determina a probabilidade de erro). Todas essas especificações são incluídas na matriz de canal. Uma matriz de canal especifica completamente o canal. Se, por exemplo, decidirmos usar dígitos 4-ários em vez de dígitos binários em algum canal físico, a matriz de canal é alterada (se torna uma matriz 4×4), assim como a capacidade de canal. Do mesmo modo, uma alteração no receptor, na potência de sinal ou na potência de ruído alterará a matriz de canal e, portanto, a capacidade de canal.

Medida de Capacidade de Canal

A capacidade de canal C_s é o máximo valor de $H(x) - H(x|y)$; naturalmente, $C_s \leq \max H(x)$ [pois $H(x|y) \geq 0$]. Contudo, $H(x)$ é a informação média por símbolo de entrada; logo, C_s sempre é menor que (ou igual a) a máxima informação média por símbolo de entrada. Se usarmos símbolos binários na entrada, o valor máximo de $H(x)$ é 1 bit, e ocorrerá quando $P(x_1) = P(x_2) = 1/2$. Logo, para um canal binário, $C_s \leq 1$ bit por dígito binário. Se usarmos símbolos r -ários, o valor máximo de $H_r(x)$ será 1 unidade r -ária. Assim, $C_s \leq 1$ unidade r -ária por símbolo.

Comprovação de Comunicação sem Erro em um BSC

Mostramos que, em um canal ruidoso, C_s bits de informação podem ser transmitidos por símbolo. Se considerarmos um canal binário, isso significa que, para cada dígito (símbolo) binário transmitido, a informação recebida é C_s bits ($C_s \leq 1$). Assim, para transmitir 1 bit de informação, precisamos transmitir pelo menos $1/C_s$ dígitos binários. Isso corresponde a uma eficiência de código igual a C_s , e a uma redundância $1 - C_s$. Aqui, transmissão de informação significa transmissão sem erro, pois $I(x; y)$ foi definida como a informação transmitida menos a perda de informação causada pelo ruído de canal.

O problema com essa dedução é o fato de ser baseada em certa definição especulativa de informação [Eq. (13.1)]. Com base nessa definição, enunciamos a informação perdida durante a transmissão pelo canal. Na verdade, não temos qualquer prova concreta de que a informação perdida no canal se comportará dessa forma. Portanto, a única maneira de assegurarmos que toda essa estrutura especulativa faça sentido é comprovando-a. Se conseguirmos mostrar que C_s bits de informação sem erro podem ser transmitidos por símbolo em um canal, a comprovação é feita. Um caso geral será discutido posteriormente. Aqui, comprovaremos os resultados para um BSC.

Consideremos uma fonte binária que emite mensagens a uma taxa de α dígitos por segundo. Acumulamos estes dígitos de informação por T segundos, agrupando um total de αT dígitos. Como αT dígitos formam $2^{\alpha T}$ combinações possíveis, nosso problema consiste em transmitir uma dessas $2^{\alpha T}$ supermensagens a cada T segundos. As supermensagens são transmitidas por um código cuja palavra tem comprimento de βT dígitos, com $\beta > \alpha$ para assegurar redundância. Como βT dígitos podem formar $2^{\beta T}$ padrões distintos, (vértices de um hiper cubo de βT dimensões) e temos apenas $2^{\alpha T}$ mensagens, utilizamos somente uma fração $2^{-(\beta-\alpha)T}$ dos vértices. Os vértices remanescentes são deliberadamente mantidos desocupados para combater o ruído. Se fizermos $T \rightarrow \infty$, a fração de vértices usados tenderá a 0. Como há βT dígitos em cada sequência transmitida, o número de dígitos recebidos em erro será exatamente $\beta T P_e$, quando $T \rightarrow \infty$. Agora, construímos esferas de Hamming de raio $\beta T P_e$ em torno de cada um dos $2^{\alpha T}$ vértices usados para as mensagens. Quando uma mensagem qualquer for transmitida, a mensagem recebida estará na esfera de Hamming centrada no vértice correspondente àquela mensagem. Usamos a seguinte regra de decisão: se uma sequência recebida cair em uma esfera centrada na mensagem m_i , a decisão será “ m_i foi transmitida”. Se $T \rightarrow \infty$, a decisão será sem erro se todas as $2^{\alpha T}$ esferas não se sobreponerem.

De todas as possíveis sequências de βT dígitos, o número de sequências que diferem de uma dada sequência por exatamente j dígitos é $\binom{\beta T}{j}$ (ver Exemplo 8.6). Logo, K , o número total de sequências que diferem de uma dada sequência por $\beta T P_e$ dígitos ou menos, é

$$K = \sum_{j=0}^{\beta T P_e} \binom{\beta T}{j} \quad (13.26)$$

Agora, usemos uma desigualdade muito útil na teoria da informação:⁴, ⁷

$$\sum_{j=0}^{\beta T P_e} \binom{\beta T}{j} \leq 2^{\beta T \rho(P_e)} \quad P_e < 0,5$$

Logo,

$$K \leq 2^{\beta T \rho(P_e)} \quad (13.27)$$

com a definição

$$\rho(P_e) = P_e \log \frac{1}{P_e} + (1 - P_e) \log \frac{1}{1 - P_e}$$

Dos possíveis $2^{\beta T}$ vértices, escolhemos $2^{\alpha T}$ para serem atribuídos às supermensagens. Como selecionamos esses vértices? O procedimento de decisão deixa claro que, se atribuirmos um dado vértice a uma supermensagem, nenhum dos outros vértices em uma esfera de raio $\beta T P_e$ (centrada no vértice em questão) pode ser atribuído a outra supermensagem. Assim, quando escolhemos um vértice para s_1 , os correspondentes K vértices [Eq. (13.26)] se tornam inelegíveis. Para s_2 , escolhemos um dos restantes $2^{\beta T} - K$ vértices. Prosseguimos dessa forma até que todos os $2^{\alpha T}$ vértices tenham sido varridos. Esse é um processo tedioso. Vejamos o que acontece quando escolhemos os necessários $2^{\alpha T}$ vértices de forma aleatória, dentre os $2^{\beta T}$ vértices disponíveis. Nessa abordagem, há o risco de selecionarmos mais que um vértice em uma distância $\beta T P_e$. Se, no entanto, α/β for suficientemente pequeno, a probabilidade de fazer tal escolha será extremamente pequena à medida que $T \rightarrow \infty$. A probabilidade de escolher um particular vértice s_1 como um dos $2^{\alpha T}$ vértices dentre os $2^{\beta T}$ vértices é $2^{\alpha T}/2^{\beta T} = 2^{-(\beta-\alpha)T}$.

Lembrando que K vértices estão a uma distância de $\beta T P_e$ dígitos de s_1 , a probabilidade de que também possamos escolher outro vértice s_2 que esteja à distância $\beta T P_e$ de cada um desses K vértices (que formam a esfera de Hamming em torno de s_1) é

$$P = K 2^{-(\beta-\alpha)T}$$

Da Eq. (13.27), temos

$$P \leq 2^{-[\beta[1-\rho(P_e)]-\alpha]T}$$

Portanto, à medida que $T \rightarrow \infty$, $P \rightarrow 0$ se

$$\beta[1 - \rho(P_e)] > \alpha$$

ou seja,

$$\frac{\alpha}{\beta} < 1 - \rho(P_e) \quad (13.28a)$$

Todavia, $1 - \rho(P_e)$ é C_s , a capacidade de canal de um BSC [Eq. (13.25)]. Portanto,

$$\frac{\alpha}{\beta} < C_s \quad (13.28b)$$

Assim, a probabilidade de escolhermos aleatoriamente duas sequências a uma distância $\beta T P_e$ tende a 0 quando $T \rightarrow \infty$, desde que $\alpha/\beta < C_s$, e teremos comunicação sem erro. Podemos escolher $\alpha/\beta = C_s - \varepsilon$, onde ε é arbitrariamente pequeno.

13.5 CAPACIDADE DE CANAL DE UM CANAL CONTÍNUO SEM MEMÓRIA

Para uma variável aleatória discreta x que assume valores x_1, x_2, \dots, x_n com probabilidades $P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n)$, respectivamente, a entropia $H(x)$ foi definida como

$$H(x) = - \sum_{i=1}^n P(x_i) \log P(x_i) \quad (13.29)$$

Para dados analógicos, temos que lidar com variáveis aleatórias contínuas. Portanto, devemos estender a definição de entropia a variáveis aleatórias contínuas. Ficamos tentados a dizer que, para variáveis aleatórias contínuas, $H(x)$ é obtida com a substituição do somatório na Eq. (13.29) por uma integral:^{*}

$$H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log \frac{1}{p(x)} dx \quad (13.30)$$

Veremos que a Eq. (13.30) é, de fato, a definição de entropia para uma variável aleatória contínua. Contudo, não podemos aceitar essa definição, a menos que mostremos que seu significado possa ser interpretado como incerteza. Uma variável aleatória x assume um valor no intervalo $(n\Delta x, (n+1)\Delta x)$ com probabilidade $p(n\Delta x) \Delta x$ no limite $\Delta x \rightarrow 0$. Logo, $H(x)$, a entropia de uma variável aleatória contínua x , é dada por

$$\begin{aligned} H(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_n p(n\Delta x) \Delta x \log \frac{1}{p(n\Delta x) \Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\sum_n p(n\Delta x) \Delta x \log \frac{1}{p(n\Delta x)} - \sum_n p(n\Delta x) \Delta x \log \Delta x \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log \frac{1}{p(x)} dx - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log \Delta x \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log \frac{1}{p(x)} dx - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log \Delta x \end{aligned} \quad (13.31)$$

No limite $\Delta x \rightarrow 0$, $\log \Delta x \rightarrow -\infty$. Parece, então, que a entropia de uma variável aleatória contínua é infinita. O que é verdade. A magnitude da incerteza associada a uma variável aleatória contínua é infinita. Essa conclusão também é obtida de modo intuitivo. Uma variável aleatória contínua assume um número infinito de valores e, portanto, a incerteza é de ordem infinita. Isso significa que não há uma definição razoável para entropia de uma variável aleatória contínua? Ao contrário, veremos que o primeiro termo na Eq. (13.31) funciona como uma medida razoável de entropia (informação média) de uma variável aleatória contínua x . Podemos usar o seguinte raciocínio: Podemos considerar $\int p(x) \log [1/p(x)] dx$ como uma entropia relativa, com $-\log \Delta x$ fazendo o papel de uma referência. A informação transmitida por um canal é, na verdade, a diferença dos termos $H(x)$ e $H(x|y)$. Obviamente, se tivermos uma referência comum para $H(x)$ e $H(x|y)$, a diferença $H(x) - H(x|y)$ será igual à diferença entre suas entropias relativas. Com isso, justificamos o uso do primeiro termo na Eq. (13.31) como a entropia **diferencial** de x . Contudo, devemos sempre lembrar que isso é uma entropia relativa e não a entropia absoluta. A falha em reconhecer esse ponto sutil gera muitas falácias, uma das quais será explorada no Exemplo 13.4.

Com base nesse argumento, definimos $H(x)$, a entropia diferencial de uma variável aleatória contínua x , como

$$H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log \frac{1}{p(x)} dx \quad \text{bits} \quad (13.32a)$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log p(x) dx \quad \text{bits} \quad (13.32b)$$

Embora $H(x)$ seja a entropia diferencial (relativa) de x , por questão de brevidade, a chamaremos de entropia da variável aleatória x .

Exemplo 13.4 A amplitude de um sinal x é uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $(-1, 1)$. Esse sinal é passado por um amplificador de ganho 2. A saída y também é uma variável aleatória, uniformemente distribuída no intervalo $(-2, 2)$. Determinemos as entropias (diferenciais) $H(x)$ e $H(y)$.

Temos

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & |x| < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$P(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & |y| < 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Logo,

$$H(x) = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \log 2 \, dx = 1 \text{ bit}$$

$$H(y) = \int_{-2}^2 \frac{1}{4} \log 4 \, dy = 2 \text{ bits}$$

A entropia da variável aleatória y é 1 bit maior que a de x . Esse resultado pode parecer uma surpresa, pois o conhecimento de x determina y sem ambiguidade, e vice-versa, pois $y = 2x$. Portanto, as incertezas médias de x e y devem ser iguais. Amplificação, por si só, não é capaz de adicionar ou subtrair informação. Por que, então, $H(y)$ é o dobro de $H(x)$? Isso fica claro se recordarmos que $H(x)$ e $H(y)$ são entropias diferenciais (relativas) e podem ser iguais se e somente se suas entropias de referência forem iguais. A entropia de referência R_1 para x é $-\log \Delta x$, e a entropia de referência R_2 para y é $-\log \Delta y$ (no limite, quando $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$),

$$R_1 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -\log \Delta x$$

$$R_2 = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} -\log \Delta y$$

e

$$\begin{aligned} R_1 - R_2 &= \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \log \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \\ &= \log \left(\frac{dy}{dx} \right) \\ &= \log 2 = 1 \text{ bit} \end{aligned}$$

Portanto, R_1 , a entropia de referência para x é maior que a R_2 , a entropia de referência para y . Logo, se x e y tiverem entropias absolutas iguais, suas entropias diferenciais (relativas) devem diferir por 1 bit.

Máxima Entropia para um Dado Valor Quadrático Médio de x

No caso de variáveis aleatórias discretas, observamos que a entropia era máxima quando os resultados (mensagens) eram equiprováveis (distribuição de probabilidade uniforme). Para funções aleatórias contínuas, também existe uma PDF $p(x)$ que maximiza $H(x)$ nas Eqs. (13.32). No entanto, no caso de uma distribuição contínua, x deve atender condições adicionais. O valor máximo de x ou o valor médio quadrático de x deve ser conhecido. A seguir, determinemos a PDF $p(x)$ que produzirá a máxima entropia quando $\overline{x^2}$ for dado por uma constante σ^2 . O problema, então, consiste em maximizar $H(x)$:

$$H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log \frac{1}{p(x)} dx \quad (13.33)$$

com a condição

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \quad (13.34a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = \sigma^2 \quad (13.34b)$$

Para resolver esse problema, usemos um teorema do cálculo de variações. Dada a integral I ,

$$I = \int_a^b F(x, p) dx \quad (13.35)$$

sujeita às seguintes condições:

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi_1(x, p) dx &= \lambda_1 \\ \int_a^b \varphi_2(x, p) dx &= \lambda_2 \\ &\vdots \\ \int_a^b \varphi_k(x, p) dx &= \lambda_k \end{aligned} \quad (13.36)$$

em que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ são constantes conhecidas. O resultado do cálculo de variações diz que a forma de $p(x)$ que maximiza I na Eq. (13.35), sujeita às condições na Eq. (13.36), é obtida da solução da equação

$$\frac{\partial F}{\partial p} + \alpha_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial p} + \alpha_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial p} + \dots + \alpha_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial p} = 0 \quad (13.37)$$

As grandezas $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ são constantes ajustáveis, chamadas de **multiplicadores indeterminados**, que podem ser calculados com a substituição de $p(x)$ [obtida da Eq. (13.37)] na Eq. (13.36). No caso em consideração,

$$F(p, x) = p \log \frac{1}{p}$$

$$\varphi_1(x, p) = p$$

$$\varphi_2(x, p) = x^2 p$$

Logo, a solução para p é dada por

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(p \log \frac{1}{p} \right) + \alpha_1 + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial p} x^2 p = 0$$

ou

$$-(1 + \log p) + \alpha_1 + \alpha_2 x^2 = 0$$

Resolvendo para p , temos

$$p = e^{(\alpha_1 - 1)} e^{\alpha_2 x^2} \quad (13.38)$$

Substituindo a Eq. (13.38) na Eq. (13.34a), obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha_1 - 1} e^{\alpha_2 x^2} dx \\ &= 2e^{\alpha_1 - 1} \int_0^{\infty} e^{\alpha_2 x^2} dx \\ &= 2e^{\alpha_1 - 1} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{-\alpha_2}} \right) \end{aligned}$$

desde que α_2 seja negativo, ou

$$e^{\alpha_1 - 1} = \sqrt{\frac{-\alpha_2}{\pi}} \quad (13.39)$$

A seguir, substituímos as Eqs. (13.38) e (13.39) na Eq. (13.34b):

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \sqrt{\frac{-\alpha_2}{\pi}} e^{\alpha_2 x^2} dx \\ &= 2\sqrt{\frac{-\alpha_2}{\pi}} \int_0^{\infty} x^2 e^{\alpha_2 x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2\alpha_2} \end{aligned}$$

ou

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2\sigma^2} \quad (13.40a)$$

e

$$e^{\alpha_1 - 1} = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2}} \quad (13.40b)$$

Com a substituição da Eq. (13.40) na Eq. (13.38), temos

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2} \quad (13.41)$$

Concluímos, portanto, que, para um dado valor quadrático médio, a máxima entropia (ou máxima incerteza) é obtida quando a distribuição de x for gaussiana. Essa entropia, ou incerteza, máxima é dada por

$$H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log_2 \frac{1}{p(x)} dx$$

Reparemos que

$$\begin{aligned}\log \frac{1}{p(x)} &= \log \left(\sqrt{2\pi\sigma^2} e^{x^2/2\sigma^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log (2\pi\sigma^2) + \frac{x^2}{2\sigma^2} \log e\end{aligned}$$

Logo,

$$H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \left[\frac{1}{2} \log (2\pi\sigma^2) + \frac{x^2}{2\sigma^2} \log e \right] dx \quad (13.42a)$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} \log (2\pi\sigma^2) \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx + \frac{\log e}{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \log (2\pi\sigma^2) + \frac{\log e}{2\sigma^2} \sigma^2 \\ &= \frac{1}{2} \log (2\pi e \sigma^2) \quad (13.42b)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \log (17.1\sigma^2) \quad (13.42c)$$

Em resumo, para um dado valor quadrático médio $\overline{x^2}$, a entropia é máxima para uma distribuição gaussiana, e a correspondente entropia é $\frac{1}{2} \log(2\pi e \sigma^2)$.

Usando raciocínio semelhante, o leitor pode mostrar (Exercício 13.5-1) que, se x for limitado a algum valor de pico M ($-M < x < M$), a entropia será máxima quando x for uniformemente distribuído:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2M} & -M < x < M \\ 0 & \text{para todos os outros valores de } x \end{cases}$$

Entropia de Ruído Gaussiano Branco Limitado em Banda

Consideremos um ruído gaussiano branco limitado em banda $n(t)$, com densidade espectral de potência (PSD) $\mathcal{N}/2$. Como

$$R_n(\tau) = \mathcal{N}B \operatorname{sinc}(2\pi B\tau)$$

sabemos que $\operatorname{sinc}(2\pi B\tau)$ é zero em $\tau = \pm k/2B$ (k inteiro). Portanto,

$$R_n\left(\frac{k}{2B}\right) = 0 \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

E

$$R_n\left(\frac{k}{2B}\right) = \overline{n(t)n\left(t + \frac{k}{2B}\right)} = 0 \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Como $n(t)$ e $n(t + k/2B)$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) são amostras de Nyquist de $n(t)$, todas as amostras de Nyquist de $n(t)$ são descorrelacionadas. Como $n(t)$ é gaussiana, descorrelação implica independência. Então, todas as amostras de Nyquist de $n(t)$ são independentes. Notemos que

$$\overline{n^2} = R_n(0) = \mathcal{N}B$$

Assim, a variância de cada amostra de Nyquist é B . Da Eq. (13.42b), temos que a entropia $H(n)$ de cada amostra de Nyquist de $n(t)$ é

$$H(n) = \frac{1}{2} \log (2\pi e \mathcal{N}B) \text{ bits por amostra} \quad (13.43a)$$

Como $n(t)$ é completamente especificada por $2B$ amostras de Nyquist por segundo, a entropia por segundo de $n(t)$ é a entropia de $2B$ amostras de Nyquist. Como todas as amostras são independentes, o conhecimento de uma amostra não fornece qualquer informação sobre qualquer outra amostra. Assim, a entropia de $2B$ amostras de Nyquist é a soma das entropias das $2B$ amostras, e

$$H'(n) = B \log (2\pi e \mathcal{N}B) \text{ bit/s} \quad (13.43b)$$

em que $H'(n)$ é a entropia por segundo de $n(t)$.

Do resultado obtido até aqui, podemos tirar uma importante conclusão. Dentre todos os sinais limitados em banda a B Hz e com certo valor quadrático médio σ^2 , o sinal gaussiano branco limitado em banda tem a maior entropia por segundo. Para entender a razão para isso, recordemos que, para um dado valor quadrático médio, amostras gaussianas têm a maior entropia; além disso, todas as $2B$ amostras de um processo gaussiano limitado em banda são independentes. Logo, a entropia por segundo é a soma das entropias de todas as $2B$ amostras. No caso de processos que não sejam brancos, as amostras de Nyquist são correlacionadas e, portanto, a entropia por segundo é menor que a soma das entropias das $2B$ amostras. Se o sinal não for gaussiano, suas amostras não serão gaussianas e, consequentemente, a entropia por amostra também será menor que a máxima entropia possível para um dado valor quadrático médio. Em resumo, para uma classe de sinais limitados em banda e que tenham certo valor quadrático médio, o sinal gaussiano branco tem a maior entropia por segundo, ou a maior quantidade de incerteza. Essa também é a razão por que, na transmissão de sinais, o ruído gaussiano branco é, em termos de interferência, o pior ruído possível.

Informação Mútua $I(x; y)$

O teste definitivo de qualquer conceito é sua utilidade. A seguir, mostraremos que, quando consideramos $I(x; y)$, a informação mútua das variáveis aleatórias contínuas x e y , a entropia relativa definida nas Eqs. (13.32) leva a resultados que fazem sentido. Desejamos transmitir uma variável aleatória x por um canal. Cada valor de x em um dado intervalo contínuo é uma mensagem que pode ser transmitida, por exemplo, como um pulso de altura x . A mensagem recuperada pelo receptor será uma variável aleatória contínua y . Se o canal não tivesse ruído, o valor recebido y seria determinado sem ambiguidade do valor transmitido x . Contudo, o ruído de canal introduz uma incerteza em relação ao verdadeiro valor de x . Consideremos o evento em que, no transmissor, um valor de x no intervalo $(x, x + \Delta x)$ tenha sido transmitido ($\Delta x \rightarrow 0$). A probabilidade desse evento é $p(x)\Delta x$, no limite $\Delta x \rightarrow 0$. Assim, a quantidade de informação transmitida é $\log [1/p(x)\Delta x]$. Denotemos o valor de y no receptor por y e a densidade de probabilidade condicional de x quando $y = y$, por $p(x|y)$. Assim, $p(x|y)\Delta x$ é a probabilidade de que x esteja no intervalo $(x, x + \Delta x)$ quando $y = y$ (desde que $\Delta x \rightarrow 0$). Obviamente, existe uma incerteza em relação ao evento x no intervalo $(x, x + \Delta x)$. Como essa incerteza, $\log [1/p(x|y)\Delta x]$, é a informação perdida ao longo do canal, a informação recebida é $I(x; y)$, dada por

$$\begin{aligned} I(x; y) &= \log \left[\frac{1}{p(x)\Delta x} \right] - \log \left[\frac{1}{p(x|y)\Delta x} \right] \\ &= \log \frac{p(x|y)}{p(x)} \end{aligned} \quad (13.44)$$

Notemos que essa relação é verdadeira no limite $\Delta x \rightarrow 0$. Portanto, $I(x; y)$ representa a informação transmitida ao longo de um canal se recebermos y ($y = y$) quando x ($x = x$) foi transmitido. Desejamos determinar a informação média transmitida pelo canal quando algum x é transmitido e algum y , recebido. Devemos, então, calcular a média de $I(x; y)$ para todos os valores de x e y . A informação média transmitida será denotada por $I(x; y)$, em que

$$I(x; y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) I(x; y) dx dy \quad (13.45a)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y) \log \frac{p(x|y)}{p(x)} dx dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y) \log \frac{1}{p(x)} dx dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y) \log p(x|y) dx dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x)p(y|x) \log \frac{1}{p(x)} dx dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y) \log p(x|y) dx dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log \frac{1}{p(x)} dx \int_{-\infty}^{\infty} p(y|x) dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y) \log p(x|y) dx dy
\end{aligned} \tag{13.45b}$$

Notemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(y|x) dy = 1 \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log \frac{1}{p(x)} dx = H(x)$$

Logo,

$$I(x;y) = H(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y) \log p(x|y) dx dy \tag{13.46a}$$

$$= H(x) - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y) \log \frac{1}{p(x|y)} dx dy \tag{13.46b}$$

A integral no lado direito é a média de $\log [1/p(x|y)]$ tomada em x e y . Contudo, $\log [1/p(x|y)]$ representa a incerteza em relação a x quando y é recebido. Como vimos, essa é a informação perdida ao longo do canal. O valor médio de $\log [1/p(x|y)]$ é a perda de informação média quando algum x é transmitido e algum y , recebido. Por definição, isso é $H(x|y)$, a entropia condicional (diferencial) de x e y , dada por

$$H(x|y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y) \log \frac{1}{p(x|y)} dx dy \tag{13.47}$$

Assim,

$$I(x;y) = H(x) - H(x|y) \tag{13.48}$$

Portanto, quando algum valor de x é transmitido e algum valor de y recebido, a informação média transmitida pelo canal é $I(x; y)$, dada pela Eq. (13.48). Podemos definir a capacidade de canal C_s como a máxima quantidade de informação que pode ser transmitida, em média, por amostra ou valor transmitido:

$$C_s = \max I(x; y) \tag{13.49}$$

Para um dado canal, $I(x; y)$ é uma função apenas da densidade de probabilidade de entrada $p(x)$. Isso pode ser mostrado da seguinte maneira:

$$p(x,y) = p(x)p(y|x) \tag{13.50}$$

$$\begin{aligned}
\frac{p(x|y)}{p(x)} &= \frac{p(y|x)}{p(y)} \\
&= \frac{p(y|x)}{\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y) dx} \\
&= \frac{p(y|x)}{\int_{-\infty}^{\infty} p(x)p(y|x) dx}
\end{aligned} \tag{13.51}$$

Substituindo as Eqs. (13.50) e (13.51) na Eq. (13.45b), obtemos

$$I(x; y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x)p(y|x) \log \left(\frac{p(y|x)}{\int_{-\infty}^{\infty} p(x)p(y|x) dx} \right) dx dy \quad (13.52)$$

A densidade de probabilidade condicional $p(y|x)$ é característica de um dado canal. Assim, para um dado canal especificado por $p(y|x)$, $I(x; y)$ é uma função apenas da densidade de probabilidade de entrada $p(x)$. Logo,

$$C_s = \max_{p(x)} I(x; y)$$

Se o canal permitir a transmissão de K valores por segundo, C , a capacidade de canal por segundo, será dada por

$$C = KC_s \text{ bit/s} \quad (13.53)$$

Para variáveis aleatórias contínuas, como no caso de variáveis discretas, $I(x; y)$ é simétrica em relação a x e y . Isso pode ser visto reescrevendo a Eq. (13.45b) como

$$I(x; y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) \log \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} dx dy \quad (13.54)$$

Essa equação mostra que $I(x; y)$ é simétrica em relação a x e y . Assim,

$$I(x; y) = I(y; x)$$

Da Eq. (13.48), temos

$$I(x; y) = H(x) - H(x|y) = H(y) - H(y|x) \quad (13.55)$$

Capacidade de um Canal AWGN Limitado em Banda

A capacidade de canal C é, por definição, a máxima taxa de transmissão de informação por um canal. A informação mútua $I(x; y)$ é dada pela Eq. (13.55):

$$I(x; y) = H(y) - H(y|x) \quad (13.56)$$

A capacidade de canal C é o valor máximo da informação mútua $I(x; y)$ por segundo. Determinemos, primeiro, o valor máximo de $I(x; y)$ por amostra. Nossa objetivo é determinar a capacidade de um canal limitado em banda a B Hz e perturbado por ruído gaussiano branco de PSD /2. Adicionalmente, limitaremos a potência de sinal (ou seu valor quadrático médio) a S . Admitimos que perturbação é aditiva, ou seja, que o sinal recebido $y(t)$ é dado por

$$y(t) = x(t) + n(t) \quad (13.57)$$

Como o canal é limitado em banda, tanto o sinal $x(t)$ como o ruído $n(t)$ são limitados em banda a B Hz. Obviamente, $y(t)$ também é limitado em banda a B Hz. Todos esses sinais podem, então, ser completamente especificados por amostras colhidas à taxa uniforme de $2B$ amostras por segundo. Determinemos a máxima informação que pode ser transmitida por amostra. Sejam x , n e y amostras de $x(t)$, $n(t)$ e $y(t)$, respectivamente. A informação $I(x; y)$ transmitida por amostra é dada pela Eq. (13.56):

$$I(x; y) = H(y) - H(y|x)$$

Agora, determinemos $H(y|x)$. Por definição [Eq. (13.47)],

$$\begin{aligned}
H(y|x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y) \log \frac{1}{p(y|x)} dx dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} p(y|x) \log \frac{1}{p(y|x)} dy
\end{aligned}$$

Como

$$y = x + n$$

para um dado x , y é igual a n mais uma constante (x). Logo, a distribuição de y quando x tem um dado valor é idêntica à de n , exceto por uma translação por x . Seja $p_n(\cdot)$ a PDF da amostra de ruído n ; então,

$$\begin{aligned}
p(y|x) &= p_n(y-x) \\
\int_{-\infty}^{\infty} p(y|x) \log \frac{1}{p(y|x)} dy &= \int_{-\infty}^{\infty} p_n(y-x) \log \frac{1}{p_n(y-x)} dy
\end{aligned} \tag{13.58}$$

Fazendo $y - x = z$, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(y|x) \log \frac{1}{p(y|x)} dy = \int_{-\infty}^{\infty} p_n(z) \log \frac{1}{p_n(z)} dz$$

O lado direito é a entropia $H(n)$ da amostra de ruído n . Logo,

$$\begin{aligned}
H(y|x) &= H(n) \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx \\
&= H(n)
\end{aligned} \tag{13.59}$$

Na dedução da Eq. (13.59), não fizemos qualquer hipótese a respeito do ruído. Assim, a Eq. (13.59) é muito geral e se aplica a todos os tipos de ruído. A única condição é que o ruído perturbe o canal de modo aditivo. Com isso,

$$I(x;y) = H(y) - H(n) \quad \text{bits por amostra} \tag{13.60}$$

Admitimos que o valor quadrático médio do sinal $x(t)$ tenha um valor S , e que o valor quadrático médio do ruído seja N . Suponhamos, também, que o sinal $x(t)$ e o ruído $n(t)$ sejam independentes. Nesse caso, o valor quadrático médio de y será a soma dos valores quadráticos médios de x e n :

$$\overline{y^2} = S + N$$

Para um dado ruído [dada $H(n)$], $I(x; y)$ é máxima quando $H(y)$ for máxima. Vimos que, para um dado valor quadrático médio de y ($\overline{y^2} = S + N$), $H(y)$ será máxima se y for gaussiana e, então, a máxima entropia $H_{\max}(y)$ será dada por

$$H_{\max}(y) = \frac{1}{2} \log [2\pi e(S + N)] \tag{13.61}$$

Como

$$y = x + n$$

e n é gaussiano, y será gaussiano se e somente x for gaussiano. Como o valor quadrático médio de x é S ,

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi S}} e^{-x^2/2S}$$

e

$$\begin{aligned} I_{\max}(x; y) &= H_{\max}(y) - H(n) \\ &= \frac{1}{2} \log [2\pi e(S + N)] - H(n) \end{aligned}$$

Para ruído gaussiano branco com valor quadrático médio N ,

$$H(n) = \frac{1}{2} \log 2\pi eN \quad N = \mathcal{N}B$$

e

$$C_s = I_{\max}(x; y) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{S + N}{N} \right) \quad (13.62a)$$

$$= \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{S}{N} \right) \quad (13.62b)$$

A capacidade de canal por segundo é a informação máxima que pode ser transmitida por segundo. As Eqs. (13.62) representam a máxima informação transmitida por amostra. Se todas as amostras forem estatisticamente independentes, a informação total transmitida por segundo será $2B$ vezes C_s . Se as amostras não forem independentes, a informação total será menor que $2BC_s$. Como a capacidade de canal C representa a máxima possível informação transmitida por segundo,

$$\begin{aligned} C &= 2B \left[\frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{S}{N} \right) \right] \\ &= B \log \left(1 + \frac{S}{N} \right) \text{ bit/s} \end{aligned} \quad (13.63)$$

As amostras de um sinal gaussiano limitado em banda são independentes se e somente se a densidade espectral de potência (PSD) do sinal for uniformemente distribuída na banda (Exemplo 9.2 e Exercício 9.2-3). Obviamente, para transmitir informação à máxima taxa [Eq. (13.63)], a PSD do sinal $y(t)$ deve ser uniforme. A PSD de y é dada por

$$S_y(f) = S_x(f) + S_n(f)$$

Como $S_n(f) = \mathcal{N}/2$, a PSD de $x(t)$ também deve ser uniforme. Assim, a máxima taxa de transmissão (C bit/s) é alcançada quando $x(t)$ também for um sinal gaussiano branco.

Em resumo, quando o ruído de canal for aditivo, branco e gaussiano, com valor quadrático médio N ($N = \mathcal{N}B$), a capacidade de canal C de um canal limitado em banda sujeito à condição de uma dada potência de sinal S é dada por

$$C = B \log \left(1 + \frac{S}{N} \right) \text{ bit/s}$$

em que B é a largura de banda do canal em hertz. A máxima taxa de transmissão (C bit/s) pode ser realizada somente se o sinal de entrada for gaussiano branco.

Capacidade de um Canal de Largura de Banda Infinita

À primeira vista, a Eq. (13.63) parece indicar que a capacidade de canal tende a ∞ à medida que a largura de banda B do canal tende a ∞ . Isso, no entanto, não é verdade. Para ruído branco, a potência de ruído é $N = \mathcal{N}B$. Logo, se B aumentar, N também aumenta. Pode ser mostrado que, no limite $B \rightarrow \infty$, C tende ao limite:

$$\begin{aligned}
C &= B \log \left(1 + \frac{S}{N} \right) \\
&= B \log \left(1 + \frac{S}{\mathcal{N}B} \right) \\
\lim_{B \rightarrow \infty} C &= \lim_{B \rightarrow \infty} B \log \left(1 + \frac{S}{\mathcal{N}B} \right) \\
&= \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{S}{\mathcal{N}} \left[\frac{\mathcal{N}B}{S} \log \left(1 + \frac{S}{\mathcal{N}B} \right) \right]
\end{aligned}$$

Esse limite pode ser calculado ao notarmos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \log_2 \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \log_2 e = 1,44$$

Logo,

$$\lim_{B \rightarrow \infty} C = 1,44 \frac{S}{\mathcal{N}} \text{ bit/s} \quad (13.64)$$

Assim, para ruído de canal gaussiano branco, quando $B \rightarrow \infty$, a capacidade de canal C tende a um limite de $1,44S/\mathcal{N}$. A variação de C com B é mostrada na Fig. 13.5. Fica evidente que a capacidade pode ser feita infinita somente se a potência de sinal S for aumentada até o infinito. Para potências finitas de sinal e de ruído, a capacidade de canal permanece finita.

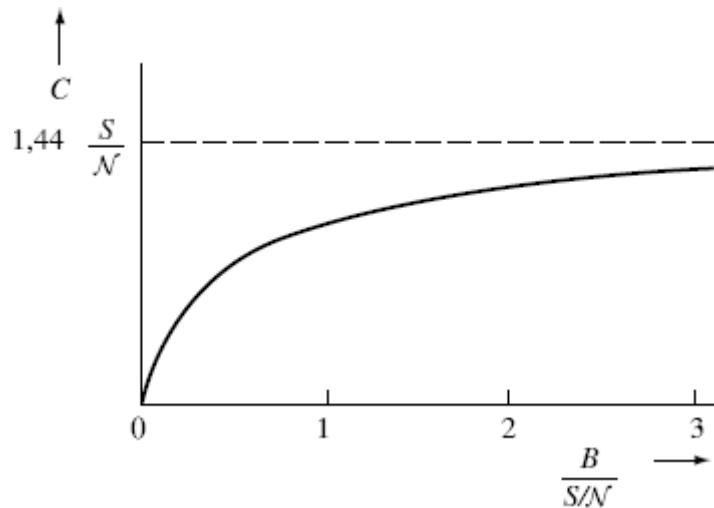


Figura 13.5

Capacidade de canal em função da largura de banda, para um canal com ruído gaussiano branco e potência de sinal fixa.

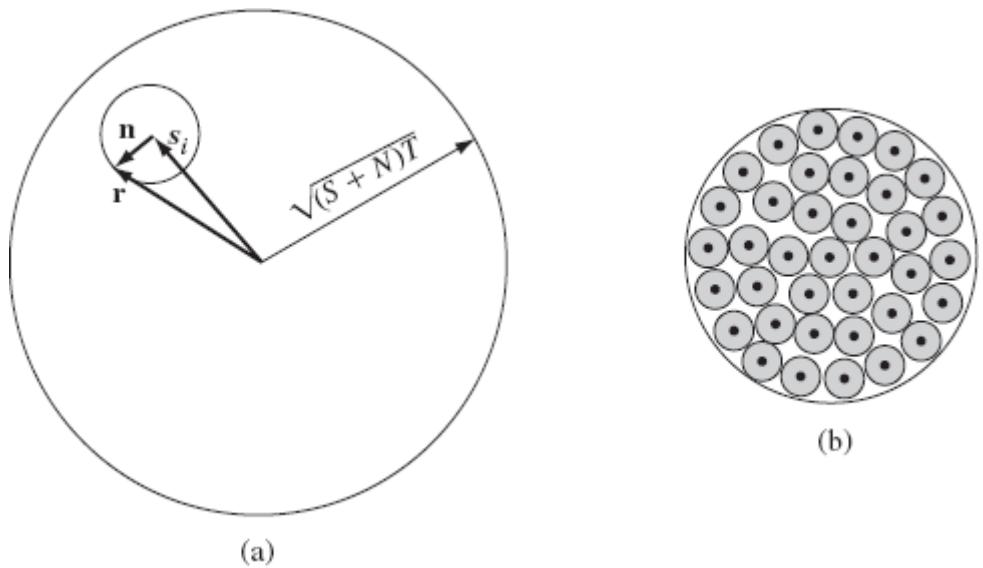


Figura 13.6

(a) Sinais transmitido, recebido e de ruído representados no espaço de sinais. (b) Escolha de sinais para comunicação sem erro.

Comprovação de Comunicação sem Erro em um Canal Contínuo

Usando conceitos da teoria da informação, mostramos que é possível transmitir informação sem erro a uma taxa $B \log_2 (1 + S/N)$ bit/s em um canal limitado em banda a B Hz. A potência de sinal é S e o ruído de canal é gaussiano branco com potência N . Esse teorema pode ser comprovado por raciocínio semelhante ao usado para comprovar a capacidade de canal no caso discreto. A comprovação baseada no espaço de sinais é tão geral que, na verdade, representa uma prova alternativa do teorema da capacidade.

Consideremos uma comunicação M -ária com M mensagens equiprováveis m_1, m_2, \dots, m_M , transmitidas por sinais $s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)$. Todos os sinais são limitados no tempo, com duração T , e têm largura de banda essencial de B Hz. Suas potências são menores ou iguais a S . O canal é limitado em banda a S e o ruído de canal é gaussiano branco, com potência N .

Todas as formas de onda de sinais e ruído têm $2BT + 1$ dimensões. No limite, faremos $T \rightarrow \infty$. Assim, $2BT \gg 1$ e, na discussão a seguir, o número de dimensões será tomado como $2BT$. Como a potência de ruído é N , a energia da forma de onda de ruído com duração de T segundos é NT . Dada uma potência de sinal S , a máxima energia de sinal é ST . Como os sinais e ruído são independentes, a máxima energia recebida é $(S + N)T$. Logo, todos os sinais recebidos estarão em um hiperesfera de $2BT$ dimensões e raio $\sqrt{(S + N)T}$ (Fig. 13.6a). Um típico sinal recebido $s_i(t) + n(t)$ tem energia $(S_i + N)T$, e o ponto r que representa esse sinal está a uma distância $\sqrt{(S_i + N)T}$ da origem (Fig. 13.6a). O vetor de sinal s_i , o vetor de ruído n e o vetor recebido r são mostrados na Fig. 13.6a. Como

$$|s_i| = \sqrt{S_i T}, \quad |n| = \sqrt{N T}, \quad |r| = \sqrt{(S_i + N)T} \quad (13.65)$$

os vetores s_i , n e r formam um triângulo retângulo. Além disso, n está em uma esfera de raio \sqrt{NT} centrada em s_i . Notemos que, por ser aleatório, n pode cair em qualquer lugar na esfera centrada em s_i ^{*}.

Temos M possíveis vetores transmitidos, localizados no interior de uma grande esfera. Para cada s possível, desenhamos uma esfera de raio \sqrt{NT} centrada em s . Se o vetor recebido r estiver em uma das esferas pequenas, o centro dessa esfera é a forma de onda transmitida. Se preenchermos a grande esfera com M esferas que não se sobrepõem e não se tocam, cada uma de raio \sqrt{NT} (Fig. 13.6b), e usarmos os centros dessas M esferas para as formas de onda transmitidas, seremos capazes de detectar corretamente todas as M formas de onda no receptor com o simples emprego do receptor de máxima verossimilhança. O receptor de máxima verossimilhança olha o ponto r do sinal recebido e decide que o sinal transmitido é, dentre os possíveis M pontos transmitidos, o mais próximo de r (menor vetor de erro). Cada ponto recebido r estará na superfície de uma das M esferas que não se sobreponham; com uso do critério da máxima verossimilhança, o sinal transmitido será escolhido corretamente como o ponto no centro da esfera em que estiver r .

Portanto, nossa tarefa consiste em determinar quantas pequenas esferas que não se sobreponham cabem na grande esfera. Para calcular esse número, devemos determinar o volume de uma esfera de D dimensões.

Volume de uma Esfera de D Dimensões

Uma esfera de D dimensões é descrita pela equação

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_D^2 = R^2$$

em que R é o raio da esfera. Podemos mostrar que o volume $V(R)$ de uma esfera de raio R é dado por

$$V(R) = R^D V(1) \quad (13.66)$$

em que $V(1)$ é o volume de uma esfera de D dimensões e raio unitário, sendo, portanto, uma constante. Para provar isso, temos, por definição,

$$V(R) = \int_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_D^2 \leq R^2} \cdots \int dx_1 dx_2 \cdots dx_D$$

Fazendo $y_j = x_j/R$, temos

$$\begin{aligned} V(R) &= R^D \int_{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_D^2 \leq 1} \cdots \int dy_1 dy_2 \cdots dy_D \\ &= R^D V(1) \end{aligned}$$

Assim, a razão entre os volumes das duas esferas de raios R é

$$\frac{V(\hat{R})}{V(R)} = \left(\frac{\hat{R}}{R}\right)^D$$

Uma consequência direta desse resultado é que, quando D é grande, quase todo o volume da esfera está concentrado na superfície, pois, se $\hat{R}/R < 1$, então $(\hat{R}/R)^D \rightarrow 0$ à medida que $D \rightarrow \infty$. Essa razão tende a zero mesmo que \hat{R} difira de R por uma pequena quantidade Δ (Fig. 13.7). Isso significa que, não importa quanto pequeno seja Δ , o volume no interior do raio \hat{R} é uma fração desprezível do volume total em um raio R , desde que D seja suficientemente grande. Portanto, para D grande, quase todo o volume de uma esfera de D dimensões fica concentrado na superfície. Esse resultado parece estranho, mas um pouco de reflexão mostra que faz sentido. O volume é proporcional à D -ésima potência do raio. Assim, para G grande, um pequeno aumento em R pode aumentar enormemente o volume, e todo esse aumento advém de um pequeno aumento em R nas proximidades da superfície da esfera. Isso significa que a maior parte do volume deve estar concentrada na superfície.

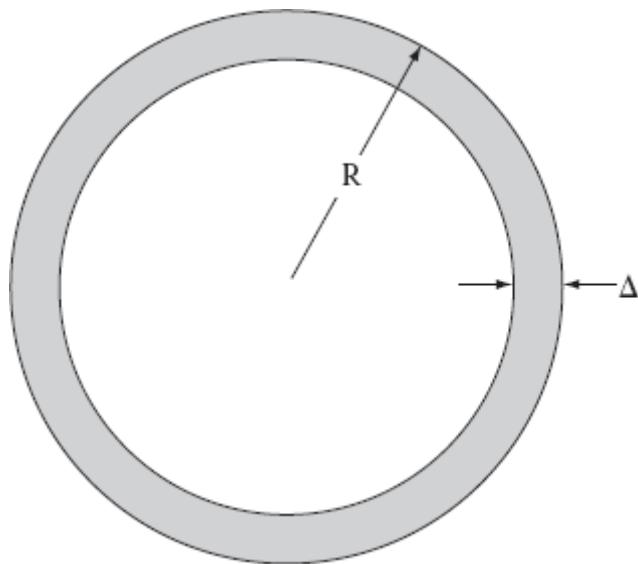


Figura 13.7

Volume de uma casca de uma hiperesfera de D dimensões.

O número de esferas de raio \sqrt{NT} que não se sobrepõem e que podem ser empacotadas em uma esfera de raio $\sqrt{(S+N)T}$ é limitado pela razão entre os volumes das esferas de sinal e de ruído. Assim,

$$M \leq \frac{[\sqrt{(S+N)T}]^{2BT} V(1)}{(\sqrt{NT})^{2BT} V(1)} = \left(1 + \frac{S}{N}\right)^{BT} \quad (13.67)$$

Cada um dos sinais M -ários transporta informação de $\log_2 M$ dígitos binários. Logo, a transmissão de um dos M sinais a cada T segundos equivale à taxa de informação C dada por

$$C = \frac{\log M}{T} \leq B \log \left(1 + \frac{S}{N}\right) \text{ bit/s} \quad (13.68)$$

Essa equação fornece um limite superior para C .

Para mostrar que podemos, de fato, receber informação sem erro à taxa $B \log (1 + S/N)$, usemos o argumento proposto por Shannon.⁸ Em vez de escolher as M mensagens transmitidas nos centros das esferas que não se sobrepõem (Fig. 13.6b), Shannon propôs a escolha aleatória dos M pontos na esfera de sinal I_s de raio \sqrt{ST} (Fig. 13.8). Consideremos um particular sinal transmitido s_k . Como admitimos que a energia de sinal seja $\leq S$, o ponto s_k estará em algum ponto no interior da esfera de sinal I_s de raio \sqrt{ST} . Como todos os M sinais são escolhidos aleatoriamente dessa esfera, a probabilidade de encontrar um sinal em um volume ΔV é $\min(1, M\Delta V/V_s)$, em que V_s é o volume de I_s . Contudo, como para D grande todo o volume da esfera está concentrado na superfície, todos os M pontos selecionados aleatoriamente estariam nas proximidades da superfície de I_s . A Fig. 13.8 mostra o sinal transmitido s_k , o sinal recebido r e o ruído n . Desenhamos uma esfera de raio \sqrt{NT} centrada em r . Essa esfera se cruza com a esfera I_s e forma uma região comum com formato de lente. O sinal s_k está na superfície das duas esferas. Usemos o receptor de máxima verossimilhança. Isso significa que, quando r for recebido, tomaremos a decisão “ s_k foi transmitido”, desde que nenhum dos $M - 1$ pontos de sinal remanescentes estejam mais próximo de r que s_k . A probabilidade de que qualquer outro sinal seja encontrado na lente é V_{lente}/V_s . Portanto, P_e , a probabilidade de erro na detecção de s_k quando r é recebido, é

$$P_e = (M - 1) \frac{V_{\text{lente}}}{V_s} < M \frac{V_{\text{lente}}}{V_s}$$

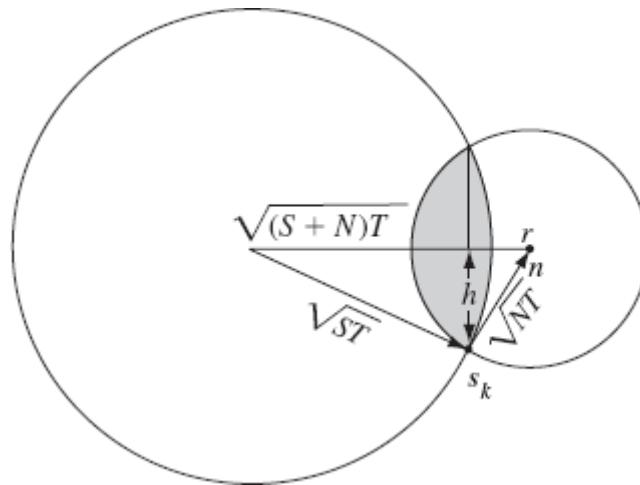


Figura 13.8

Dedução da capacidade de canal.

Da Fig. 13.8, observamos que $V_{\text{lente}} < V(h)$, em que $V(h)$ é o volume de uma esfera de D dimensões e raio h . Como r , s_k e n formam um triângulo retângulo,

$$h\sqrt{(S+N)T} = \sqrt{(ST)(NT)} \quad \text{e} \quad h = \sqrt{\frac{SNT}{S+N}}$$

Logo,

$$V(h) = \left(\frac{SNT}{S+N} \right)^{BT} V(1)$$

Assim,

$$V_s = (ST)^{BT} V(1)$$

e,

$$P_e < M \left(\frac{N}{S+N} \right)^{BT}$$

Se escolhermos

$$M = \left[k \left(1 + \frac{S}{N} \right) \right]^{BT}$$

então,

$$P_e < [k]^{BT}$$

Se fizermos $k = 1 - \Delta$, em que Δ é um número positivo escolhido arbitrariamente pequeno,

$$P_e \rightarrow 0 \quad \text{como} \quad BT \rightarrow \infty$$

Isso significa que P_e pode ser feito arbitrariamente pequena com o aumento de T , desde que M seja escolhido arbitrariamente próximo de $(1 + S/N)^{BT}$. Assim,

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{T} \log_2 M \\ &= \left[B \log \left(1 + \frac{S}{N} \right) - \epsilon \right] \quad \text{bit/s} \end{aligned} \tag{13.69}$$

na qual ϵ é um número positivo arbitrariamente pequeno. Isso leva a $k = 2^{-\epsilon T}$ e prova o resultado desejado. Uma dedução mais rigorosa desse resultado pode ser encontrada em Wozencraft e Jacobs.⁹

Por serem selecionados aleatoriamente de uma grande esfera de sinal, os M sinais tendem a adquirir a estatística de ruído branco⁸ (isto é, de processo aleatório gaussiano branco).

Comentário sobre Capacidade de Canal

Segundo o resultado deduzido neste capítulo, teoricamente, podemos ter comunicação sem erro até C bit/s. Há, no entanto, dificuldades práticas à obtenção dessa taxa. Na prova da fórmula de capacidade, admitimos que a comunicação é efetuada por sinais de duração T . Isso significa que devemos esperar T segundos para acumular dados de entrada e, então, codificá-los por uma das formas de onda de duração T . Como a taxa de capacidade é alcançada somente no limite $T \rightarrow \infty$, teremos uma longa espera no receptor até obtermos a informação. Além disso, como o número de mensagens possíveis que podem ser transmitidas no intervalo T aumenta exponencialmente com T , a complexidade das estruturas do transmissor e do receptor aumenta além da imaginação quando $T \rightarrow \infty$.

A capacidade de canal indicada pela Equação de Shannon [Eq. (13.69)] é a máxima taxa de comunicação sem erro alcançável em um sistema ótimo sem nenhuma restrição (exceto largura de banda B , potência de sinal S e potência de ruído de canal gaussiano branco N). Se tivermos qualquer outra restrição, essa taxa máxima não será alcançada. Por exemplo, se considerarmos um canal binário (canal restrito a transmitir somente sinais binários), não seremos capazes de alcançar a taxa de Shannon, mesmo que o canal seja ótimo. Na Seção 13.9, o Exercício Computacional 13.2 fornecerá confirmação numérica disso. A fórmula de capacidade de canal [Eq. (13.63)] indica que a taxa de transmissão é uma função que aumenta monotonamente com a potência

de sinal S . Contudo, se usarmos um canal binário, veremos que o aumento da potência transmitida além de certo ponto resulta em pouca vantagem. Assim, em um canal binário, o aumento de S não aumenta a taxa de comunicação sem erro acima de certo valor. Isso não significa que a fórmula da capacidade de canal falhou; simplesmente significa que, quando dispomos de grande quantidade de potência (com largura de banda finita), o esquema binário não é o esquema de comunicação ótimo.

Um último comentário: os resultados de Shannon nos dão o limite superior teórico de comunicação sem erro. Contudo, não nos dizem exatamente como esse limite pode ser alcançado. Citando palavras de Abramson, escritas em 1963: “[Esse é um dos problemas que] continua a debocar dos especialistas em teoria da informação, desde o artigo original de Shannon em 1948. Apesar do enorme esforço dedicado desde então à busca deste Santo Graal da teoria da informação, um método *determinístico* para a geração dos códigos prometidos por Shannon ainda não foi descoberto”.⁴ Surpreendentemente, 30 anos mais tarde, a introdução de códigos-turbo e a redescoberta de códigos de teste de paridade de baixa densidade (LDPC – *Low-Density Parity Check*) alterariam a paisagem completamente. Apresentaremos esses códigos no Capítulo 14.

13.6 EQUAÇÃO DE SHANNON E SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO PRÁTICOS

É interessante determinar a lei ideal para a barganha entre SNR e largura de banda de transmissão com o uso da equação de capacidade de canal. Consideremos uma mensagem com largura de banda B , usada para modulação (ou codificação), e o resultante sinal modulado, com largura de banda B_T . Esse sinal é recebido na entrada de um demodulador ideal com potências de sinal e de ruído S_i e N_i , respectivamente * (Fig. 13.9). A largura de banda da saída do demodulador é B e a SNR, S_o/N_o . Como, idealmente, uma SNR S/N e uma largura de banda B podem transmitir $B \log(1 + S/N)$ bits de informação, as taxas de informação ideais dos sinais na entrada e na saída do demodulador são, respectivamente, $B_T \log(1 + S_i/N_i)$ e $B \log(1 + S_o/N_o)$ bits. Como o demodulador não cria nem destrói informação, as duas taxas devem ser iguais, ou seja,

$$B_T \log\left(1 + \frac{S_i}{N_i}\right) = B \log\left(1 + \frac{S_o}{N_o}\right)$$

e

$$\left(1 + \frac{S_o}{N_o}\right) = \left(1 + \frac{S_i}{N_i}\right)^{B_T/B} \quad (13.70a)$$

Na prática, para a maioria dos sistemas, $S_o/N_o \gg S_i/N_i \gg 1$, de modo que

$$\frac{S_o}{N_o} \simeq \left(\frac{S_i}{N_i}\right)^{B_T/B} \quad (13.70b)$$

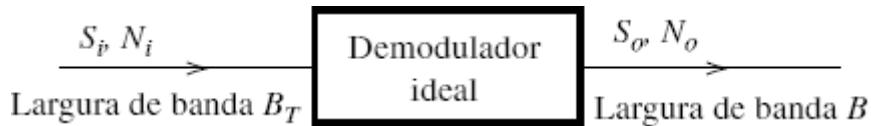


Figura 13.9

Barganha ideal entre SNR e largura de banda.

E

$$\begin{aligned} \frac{S_i}{N_i} &= \frac{S_i}{NB_T} \\ &= \left(\frac{S_i}{NB}\right)\left(\frac{B}{B_T}\right) = \frac{B}{B_T}\gamma \quad \gamma = \frac{S_i}{NB} \end{aligned}$$

Logo, as Eqs. (13.70) se tornam

$$\frac{S_o}{N_o} = \left(1 + \frac{\gamma}{B_T/B}\right)^{B_T/B} - 1 \quad (13.71a)$$

$$\simeq \left(\frac{\gamma}{B_T/B} \right)^{B_T/B} \quad (13.71b)$$

As Eqs. (13.70) e (13.71) fornecem a lei ideal de troca entre SNR e largura de banda. A Fig. 13.10 mostra a SNR de saída S_o/N_o em função de γ para diversos valores de B_T/B .

A SNR de saída aumenta com o fator de expansão de largura de banda B_T/B . Isso significa que, para manter uma dada SNR de saída, a potência do sinal transmitido pode ser reduzida exponencialmente com o fator de expansão de largura de banda. Assim, para um pequeno aumento na largura de banda, devemos reduzir a potência transmitida consideravelmente. Para uma pequena redução na largura de banda, podemos aumentar a potência transmitida consideravelmente.

Investiguemos, agora, como dois sistemas digitais se comparam com o sistema ideal.

PCM

Como vimos, PCM M -ária exibe um efeito de saturação, a menos que, à medida que γ aumenta, passemos a maiores valores de M . Se o sinal de mensagem for quantizado em L níveis, cada amostra pode ser codificada por $\log_M L$ pulsos M -ários. Seja B a largura de banda do sinal de mensagem; precisamos, então, transmitir $2B$ amostras por segundo. Em consequência, R_M , o número total de pulsos M -ários por segundo, é

$$R_M = 2B \log_M L$$

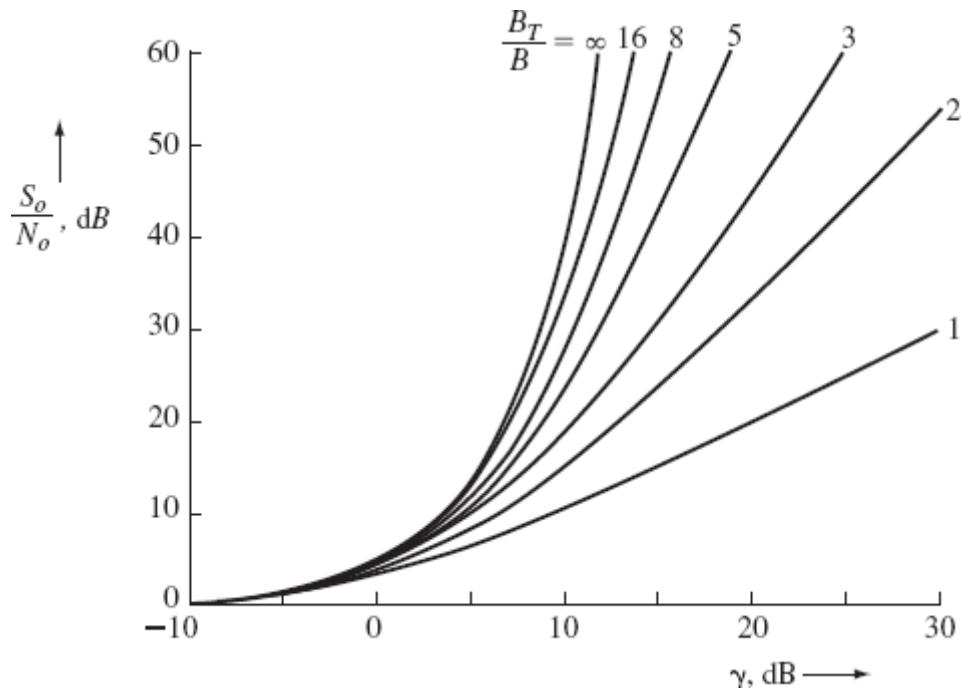


Figura 13.10

Comportamento ideal de SNR em função de γ para diversas razões entre B_T e B .

A largura de banda de transmissão B_T é a metade do número de pulsos (M -ários) por segundo. Logo,

$$B_T = \frac{R_M}{2} = B \log_M L \quad (13.72a)$$

Da Eq. (10.98a), a potência S_i é calculada como

$$S_i = \frac{M^2 - 1}{3} E_p R_M \quad (13.72b)$$

E,

$$N_i = \mathcal{N} B_T = \frac{\mathcal{N} R_M}{2} \quad (13.73)$$

Cada pulso M -ário transporta a informação de $\log_2 M$ bits, e transmitimos $2B \log_M L$ pulsos M -ários por segundo. Ou seja, a taxa de transmissão de informação é R_b bits por segundo, em que

$$\begin{aligned} R_b &= (2B \log_M L)(\log_2 M) \\ &= 2B_T \log_2 M \\ &= B_T \log_2 M^2 \text{ bit/s} \end{aligned}$$

A substituição das Eqs. (13.72b) e (13.73) nessa última equação leva a

$$R_b = B_T \log_2 \left(1 + \frac{3\mathcal{N}}{2E_p} \frac{S_i}{N_i} \right) \text{ bit/s} \quad (13.74)$$

Transmitimos a informação equivalente a R_b dígitos binários por segundo no canal PCM M -ário. No entanto, a recepção não é sem erro. Os pulsos são detectados com a probabilidade de erro P_{eM} dada na Eq. (10.99c). Se P_{eM} for da ordem de 10^{-6} , podemos considerar que a detecção é, essencialmente, sem erros. Da Eq. (10.99c),

$$P_{eM} \simeq 2Q \left(\sqrt{\frac{2E_p}{\mathcal{N}}} \right) = 10^{-6} \quad M \gg 1$$

Logo,

$$\frac{2E_p}{\mathcal{N}} = 24$$

Substituindo esse valor na Eq. (13.74), obtemos

$$R_b = B_T \log_2 \left(1 + \frac{1}{8} \frac{S_i}{N_i} \right) \text{ bit/s} \quad (13.75)$$

Portanto, em um canal com largura de banda B_T e SNR de S_i/N_i , um sistema PCM pode transmitir informação à taxa R_b na Eq. (13.75). O canal ideal com largura de banda B_T e SNR S_i/N_i pode transmitir informação à taxa de C bit/s, em que

$$C = B_T \log_2 \left(1 + \frac{S_i}{N_i} \right) \text{ bit/s} \quad (13.76)$$

Assim, o sistema PCM usa cerca de oito vezes (9 dB) mais potência que o sistema ideal. Esse desempenho ainda é muito superior ao do sistema FM. A Fig. 13.11 mostra R_b/B_T em função de S_i/N_i . Para o sistema ideal, temos

$$\frac{R_b}{B_T} = \frac{C}{B_T} = \log_2 \left(1 + \frac{S_i}{N_i} \right) \quad (13.77)$$

No limiar, PCM é 9 dB inferior à curva ideal.

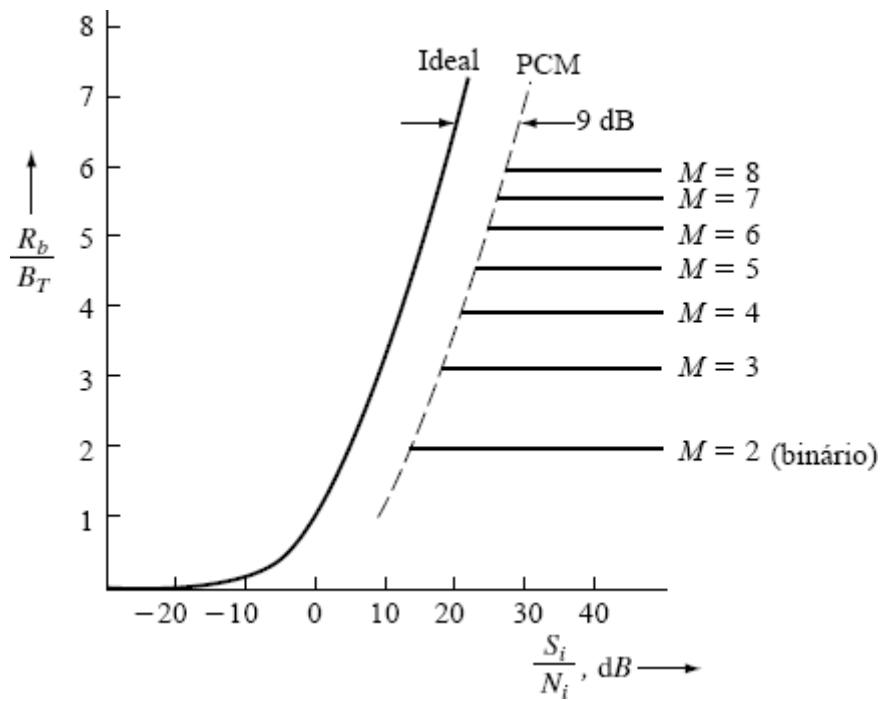


Figura 13.11
Comparação entre os comportamentos do sistema ideal e de PCM.

Quando PCM está sob saturação, a probabilidade de erro de detecção tende a 0. Cada pulso M -ário transmite $\log_2 M$ bits e há $2B_T$ bits por segundo. Logo,

$$R_b = 2B_T \log_2 M \quad (13.78)$$

ou

$$\frac{R_b}{B_T} = 2 \log_2 M \quad (13.79)$$

Isso fica claro na Fig. 13.11 (linhas cheias horizontais).

Sinalização Ortogonal

No caso de sinalização ortogonal, mostramos na Eq. (10.122) que a taxa de comunicação sem erro é

$$R_b \leq 1,44 \frac{S_i}{N} \text{ bit/s} \quad (13.80)$$

Vimos, na Eq. (13.64), que essa é precisamente a taxa de comunicação sem erro em um canal ideal com largura de banda infinita. Portanto, à medida que $M \rightarrow \infty$, a largura de banda de um esquema M -ário também tende ao infinito e a taxa de comunicação tende à de um canal ideal.

13.7 CAPACIDADE DE CANAL SELETIVO EM FREQUÊNCIA

Até aqui, limitamos a discussão à capacidade de canais sem distorção, com largura de banda finita e sujeitos a ruído gaussiano. Este modelo de canal é aplicável quando canais têm ganho ou desvanecimento plano. Na prática, muitas vezes nos deparamos com muitos tipos de canais complexos. Em particular, vimos no Capítulo 12 que, na presença de multipercorso significativo, a maioria dos canais de comunicação sem fio tende a ser seletiva em frequência. A seguir, analisemos a capacidade de canais seletivos em frequência, que não exibem espectro sem distorção (plano).

Primeiro, consideremos um canal AWGN limitado em banda cuja saída aleatória é

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{n}$$

Esse canal tem ganho constante H na largura de banda. Com base na Eq. (13.63), esse canal AWGN limitado em banda (passa-baixas), com largura de banda B , tem capacidade

$$C = B \cdot \log \left(1 + |H|^2 \frac{S}{N} \right) \quad \text{bit/s} \quad (13.81)$$

em que S e N são as potências de sinal e de ruído, respectivamente. Nos Capítulos 4 e 9, demonstramos a equivalência, via modulação, entre canais em banda-base e passa-faixa. Portanto, dados o mesmo espectro e largura de banda de ruído, canais AWGN passa-baixas, limitados em banda, e canais AWGN passa-faixa possuem idênticas capacidades de canal. Agora, estamos aptos a descrever a capacidade de canais seletivos em frequência.

Consideremos um canal passa-faixa de largura de banda infinitesimal Δf , centrada em uma frequência f_i . Nessa estreita banda, sejam $H(f_i)$ o ganho do canal, $S_x(f_i)$ a densidade espectral de potência (PSD) do sinal e $S_n(f_i)$, a PSD de ruído gaussiano. Como essa pequena largura de banda é essencialmente um canal AWGN limitado em banda, segundo a Eq. (13.63), sua capacidade é

$$\begin{aligned} C(f_i) &= \Delta f \cdot \log \left[1 + |H(f_i)|^2 \frac{S_x(f_i)\Delta f}{S_n(f_i)\Delta f} \right] \\ &= \log \left[1 + \frac{|H(f_i)|^2 S_x(f_i)}{S_n(f_i)} \right] \Delta f \quad \text{bit/s} \end{aligned} \quad (13.82)$$

Isso significa que podemos dividir um canal seletivo em frequência $H(f)$ em estreitos canais AWGN passa-faixas disjuntos, de largura de banda Δf . Assim, a capacidade de canal total é aproximada por

$$\hat{C} = \sum_i \log \left[1 + \frac{|H(f_i)|^2 S_x(f_i)}{S_n(f_i)} \right] \Delta f \quad \text{bit/s}$$

Na verdade, o sistema prático OFDM (ou DMT) discutido no Capítulo 12 é um sistema desse tipo, e consiste em um banco de canais planos paralelos com ganhos diferentes. Essa capacidade é aproximada porque a resposta do canal, a PSD de sinal ou a PSD de ruído, pode não ser constante em uma banda Δf não nula. Fazendo $\Delta f \rightarrow 0$, podemos determinar a real capacidade do canal como

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \log \left[1 + \frac{|H(f)|^2 S_x(f)}{S_n(f)} \right] df \quad (13.83)$$

Carregamento de Potência para Máxima Capacidade

Na Eq. (13.83), estabelecemos que a capacidade de um canal seletivo em frequência, com resposta $H(f)$ e sujeito a ruído gaussiano colorido de densidade espectral de potência (PSD) $S_n(f)$, depende da PSD de entrada $S_x(f)$. Para que o transmissor utilize toda a capacidade do canal, precisamos determinar a densidade espectral de potência (PSD) de entrada $S_x(f)$ ótima que maximize a capacidade integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \log \left[1 + \frac{|H(f)|^2 S_x(f)}{S_n(f)} \right] df$$

Para isso, reparemos que não seria justo considerarmos uma PSD de entrada $S_x(f)$ arbitrária, pois diferentes densidades espetrais de potência podem levar a diferentes valores da potência de entrada total. Dados dois sinais com mesma forma de PSD, o sinal mais forte, com maior potência, tem uma vantagem desleal e tem transmissão mais cara. Assim, uma abordagem justa para a maximização da capacidade do canal deve limitar a potência de entrada total de sinal a um limite de potência de transmissor P_x . A determinação da melhor PSD de entrada sujeita à limitação de potência total é conhecida como o problema de **carregamento (ou alocação) de potência para máxima capacidade**.

A PSD que alcança o carregamento de potência para máxima capacidade é a solução do problema da otimização de:

$$\max_{S_x(f)} \int_{-\infty}^{\infty} \log \left(1 + \frac{|H(f)|^2 S_x(f)}{S_n(f)} \right) df \quad (13.84)$$

sujeito a $\int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df \leq P_x$

Para a solução desse problema de otimização, mais uma vez, dividimos o canal (de largura de banda B) em K estreitos canais planos centrados em $\{f_i, i = 1, 2, \dots, K\}$ e com largura de banda $\Delta f = B/K$. Definindo

$$\begin{aligned} N_i &= S_n(f_i) \Delta f \\ H_i &= H(f_i) \\ S_i &= S_x(f_i) \Delta f \end{aligned}$$

o problema de otimização se torna um problema discreto

$$\max_{\{S_i\}} \sum_{i=1}^K \log \left(1 + \frac{|H_i|^2 S_i}{N_i} \right) \Delta f \quad (13.85a)$$

$$\text{sujeito a } \sum_{i=1}^K S_i = P \quad (13.85b)$$

O problema da determinação de N ótimos valores de potência $\{S_i\}$ é a essência do problema de carregamento ótimo de potência.

Esse problema pode ser tratado com a introdução de um multiplicador de Lagrange padrão λ para formar uma função-objetivo modificada

$$G(S_1, S_2, \dots, S_K) = \sum_{i=1}^K \log \left(1 + \frac{|H_i|^2 S_i}{N_i} \right) \Delta f + \lambda \cdot \left(P - \sum_{i=1}^K S_i \right) \quad (13.86)$$

Tomando a derivada parcial de $G(S_1, \dots, S_K)$ em relação a S_j e igualando-a a zero, temos

$$\frac{\Delta f}{1 + |H_j|^2 S_j / N_j} \frac{|H_j|^2}{N_j} - \lambda \ln 2 = 0 \quad j = 1, 2, \dots, K$$

Reescrivemos essa condição de optimidade como

$$\frac{\Delta f}{\lambda \ln 2} - \frac{N_j}{|H_j|^2} = S_j \quad j = 1, 2, \dots, K$$

Definindo uma nova variável $W = (\lambda \ln 2)^{-1}$, asseguramos que a atribuição ótima de potência entre os K subcanais é

$$S_i = W \cdot \Delta f - \frac{N_i}{|H_i|^2} \quad i = 1, 2, \dots, K \quad (13.87a)$$

$$\text{tal que } \sum S_i = P \quad (13.87b)$$

A condição de carregamento ótimo de potência na Eq. (13.87) ainda não está completa, pois, se não tomarmos cuidado, alguns dos S_i podem ser negativos. Portanto, devemos aplicar a condição adicional para assegurar que $S_i \geq 0$:

$$S_i = \max \left(W \cdot \Delta f - \frac{N_i}{|H_i|^2}, 0 \right) \quad i = 1, 2, \dots, K \quad (13.88a)$$

$$\text{tal que} \quad \sum S_i = P \quad (13.88b)$$

As duas relações na Eq. (13.88) descrevem a solução do problema da otimização do carregamento de potência. Devemos notar que permanece desconhecido o parâmetro W , que deve ser especificado. Aplicando a condição de potência total $\sum S_i = P$, podemos determinar o parâmetro W .

Por fim, tomamos o limite $\Delta f \rightarrow 0$ e $K \rightarrow \infty$. Como $S_i = S_x(f_i)\Delta f$ e $N_i = S_n(f_i)\Delta f$, a PSD do sinal de entrada ótimo fica dada por

$$S_x(f) = \max \left(W - \frac{S_n(f)}{|H(f)|^2}, 0 \right) \quad (13.89a)$$

Notemos, novamente, que não há uma solução em forma fechada para a constante ótima W , que é obtida da condição sobre a potência de entrada total:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df = P \quad (13.89b)$$

ou

$$P = \int_{\{f: W - S_n(f)/|H(f)|^2 > 0\}} \left(W - \frac{S_n(f)}{|H(f)|^2} \right) df \quad (13.89c)$$

A substituição da PSD ótima da Eq. (13.89) na fórmula de capacidade fornece a máxima capacidade de canal como

$$C_{\max} = \int_{\{f: W - S_n(f)/|H(f)|^2 > 0\}} \log \left(\frac{W|H(f)|^2}{S_n(f)} \right) df \quad (13.90)$$

Interpretação do Carregamento Ótimo de Potência como Enchimento com Água

A PSD de entrada ótima do canal deve satisfazer a restrição de potência na Eq. (13.89c). Uma vez que a constante W tenha sido determinada, o transmissor pode ajustar sua PSD de transmissão segundo a Eq. (13.89a), maximizando a capacidade do canal. Essa solução ótima para o problema da otimização da PSD de entrada do canal é conhecida como solução do enchimento com água (*water-filling or water-pouring solution*).⁵

A interpretação da PSD ótima como enchimento com água é ilustrada na Fig. 13.12. Primeiro, traçamos o gráfico da resposta de frequência $S_n(f)/|H(f)|^2$. Observemos que essa curva tem o formato de um recipiente de água. Consideraremos a potência total como um balde d'água com volume total P . Podemos, então, despejar todo o balde d'água no recipiente para obtermos igual nível de água. O nível final de água atingirá o valor W quando o balde estiver vazio. Em cada frequência f , profundidade de água é a desejada PSD ótima $S_x(f)$ especificada na Eq. (13.89a). É claro que, quando a PSD do ruído for grande, tal que $S_n(f)/|H(f)|^2$ seja grande para alguma f , nenhuma quantidade de água será despejada nessa frequência. Em outras palavras, para tais frequências, a PSD ótima será zero. Reparemos que um alto valor de $S_n(f)/|H(f)|^2$ significa um baixo valor da SNR do canal $|H(f)|^2/S_n(f)$. Reciprocamente, quando $S_n(f)/|H(f)|^2$ for baixo, ou quando a SNR for alta, o valor ótimo da PSD $S_x(f)$ será alto. Em resumo, o enchimento com água aloca mais potência de sinal às frequências em que a SNR do canal $|H(f)|^2/S_n(f)$ for alta, e pouca potência às frequências em que a SNR do canal $|H(f)|^2/S_n(f)$ for baixa.

Essa solução é semelhante, mas não igual, ao de carregamento de potência para máxima SNR no receptor do sistema DMT discutido na Seção 12.8.

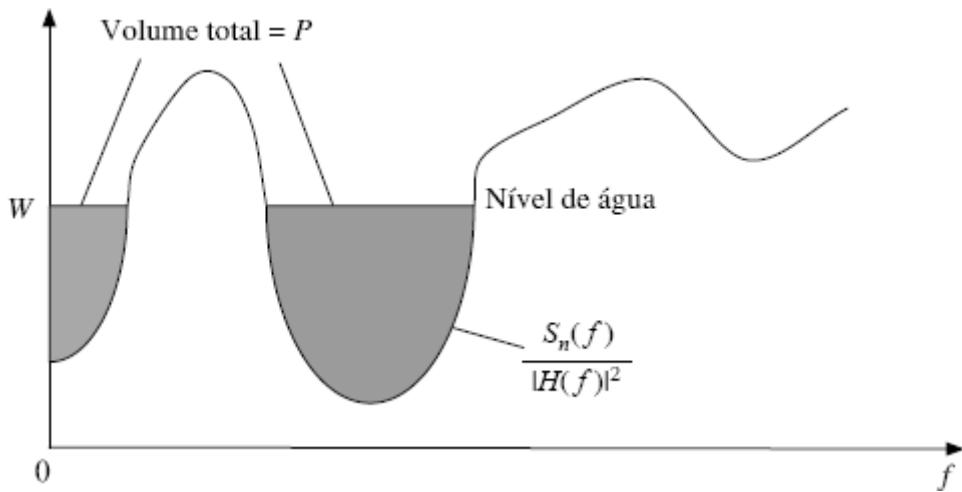


Figura 13.12

Ilustração do princípio de enchimento com água para alocação de potência que maximize a capacidade de um canal seletivo em frequência.

Carregamento Ótimo de Potência em OFDM/DMT

Como mostra a ilustração do enchimento com água, é impossível determinar uma expressão em forma fechada para W . Uma vez que P tenha sido especificada, um algoritmo iterativo de enchimento com água pode ser usado para determinar W e, assim, o carregamento ótimo da PSD $S_x(f)$. Na prática, essa abordagem para a determinação do nível de água W requer a determinação numérica de W . A solução numérica, a largura de banda do canal é dividida em bandas suficientemente estreitas de largura Δf que não se sobrepõem.

Em sistemas de comunicação práticos OFDM e DMT, o algoritmo iterativo de enchimento com água serve como uma luva para a determinação da capacidade de canal. A máxima capacidade pode ser realizada em canais OFDM com a alocação de diferentes potências S_i às distintas portadoras ortogonais. Em particular, a potência alocada à subportadora f_i deve ser

$$S_i = \Delta f \cdot \max \left(W - \frac{S_n(f_i)}{|H(f_i)|^2}, 0 \right)$$

com $\sum S_i = P$. Essa alocação ótima de potência ou carregamento ótimo de potência pode ser determinada com a adição de potência incremental às subportadoras, uma de cada vez, até que $\sum S_i = P$.

13.8 SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO COM MÚLTIPLAS ENTRADAS E MÚLTIPLAS SAÍDAS

Na última década, uma das mais importantes inovações em comunicações móveis foi o advento de tecnologias de múltiplas entradas, múltiplas saídas (MIMO – *multiple-input-multiple-output*). Na verdade, os padrões para Wi-Fi (IEEE 802.11n) e WiMAX (IEEE 802.16e) incorporaram transmissores e receptores (ou transceptores) MIMO. A principal vantagem de sistemas de comunicações móveis com MIMO é a capacidade dos mesmos em aumentar significativamente a capacidade de canal sem fio sem aumento correspondente na largura de banda ou na potência de sinal no transmissor. É interessante ressaltar que o desenvolvimento da tecnologia MIMO tem origem em fundamentos da teoria da informação. A seguir, explicaremos essa conexão.

13.8.1 Capacidade de Canais MIMO

Até aqui, consideramos apenas uma variável de sinal para transmissão; agora, trataremos com vetores de sinais de entrada e de saída. Em outras palavras, cada vetor de sinal consiste em múltiplos símbolos de dados a serem transmitidos ou recebidos simultaneamente em sistemas MIMO. Consideremos um vetor de sinal aleatório $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$. Se o vetor de sinal for discreto com probabilidades

$$p_i = P(\mathbf{x} = \mathbf{x}_i) \quad i = 1, 2, \dots$$

a entropia de \mathbf{x} é determinada por

$$H(\mathbf{x}) = - \sum_i p_i \log p_i \tag{13.91}$$

Da mesma forma, quando \mathbf{x} é distribuído continuamente com função de densidade de probabilidade $p(x_1, x_2, \dots, x_N)$, sua entropia diferencial é definida por

$$H(\mathbf{x}) = - \int \cdots \int p(x_1, x_2, \dots, x_N) \log p(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1, dx_2, \dots, dx_N \quad (13.92)$$

Consideremos um vetor aleatório de valor real \mathbf{x} , que consiste em N variáveis aleatórias gaussianas independentes e igualmente distribuídas (i. i. d.). Admitamos que \mathbf{x} tenha média (vetorial) $\boldsymbol{\mu}$ e matriz de covariância

$$\mathbf{C}_x = E\{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T\}$$

Sua entropia diferencial pode ser calculada⁵ como

$$H(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} [N \cdot \log(2\pi e) + \log \det(\mathbf{C}_x)] \quad (13.93)$$

Fica claro que a entropia de um vetor aleatório não é afetada pela média $\boldsymbol{\mu}$. Portanto, por conveniência, podemos considerar somente vetores com médias zero. De agora em diante, admitiremos

$$\boldsymbol{\mu} = E\{\mathbf{x}\} = 0$$

Dentre todos os vetores aleatórios de valor real que têm média zero e satisfazem a condição

$$\mathbf{C}_x = \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\}$$

temos¹¹

$$\max_{p_x(\mathbf{x}): \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^T) = \mathbf{C}_x} H(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} [N \cdot \log(2\pi e) + \log \det(\mathbf{C}_x)]. \quad (13.94)$$

Isso significa que, entre todos os vetores aleatórios reais com igual matriz de covariância, a distribuição vetorial gaussiana tem máxima entropia.

Consideremos, agora, um canal MIMO com desvanecimento plano e matriz de ganho \mathbf{H} . A matriz de canal $N \times M$ conecta o vetor de entrada $M \times 1 \mathbf{x}$ ao vetor de saída \mathbf{y} :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{w} \quad (13.95)$$

em que \mathbf{w} é o vetor de ruído gaussiano branco aditivo $N \times 1$, com média zero e matriz de covariância C_w . Como mostrado na Fig. 13.13, um sistema MIMO consiste em M antenas transmissoras, no lado do transmissor, e N antenas receptoras, no lado do receptor. Cada antena transmissora pode transmitir a todas as N antenas receptoras. Dado um canal \mathbf{H} de dimensões $N \times M$ (isto é, M antenas transmissoras e N antenas receptoras), a informação mútua entre os vetores de entrada e de saída é

$$I(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = H(\mathbf{y}) - H(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \quad (13.96a)$$

$$= H(\mathbf{y}) - H(\mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{w}|\mathbf{x}) \quad (13.96b)$$

Recordemos que, sob a condição de que \mathbf{x} seja conhecido, $\mathbf{H} \cdot \mathbf{x}$ é uma média constante. Portanto, a entropia condicional de \mathbf{y} dado \mathbf{x} é

$$H(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = H(\mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{w}|\mathbf{x}) = H(\mathbf{w}) \quad (13.97)$$

e

$$I(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = H(\mathbf{y}) - H(\mathbf{w}) \quad (13.98a)$$

$$= H(\mathbf{y}) - \frac{1}{2} [N \cdot \log_2 (2\pi e) + \log \det (\mathbf{C}_w)] \quad (13.98b)$$

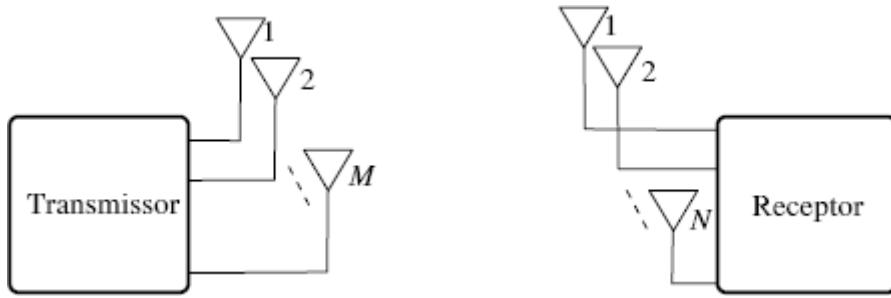


Figura 13.13
Sistema MIMO com M antenas transmissoras e N antenas receptoras.

Podemos usar o resultado da Eq. (13.94) para obter

$$\max I(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max H(\mathbf{y}) - \frac{1}{2} [N \cdot \log_2 (2\pi e) + \log \det (\mathbf{C}_w)] \quad (13.99a)$$

$$= \frac{1}{2} [N \cdot \log_2 (2\pi e) + \log \det (\mathbf{C}_y)] - \frac{1}{2} [N \cdot \log_2 (2\pi e) + \log \det (\mathbf{C}_w)] \quad (13.99b)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} [\log \det (\mathbf{C}_y) - \log \det (\mathbf{C}_w)] \\ &= \frac{1}{2} [\log \det (\mathbf{C}_y \cdot \mathbf{C}_w^{-1})] \end{aligned} \quad (13.99c)$$

Como a entrada do canal \mathbf{x} independe do vetor de ruído \mathbf{w} , temos

$$\mathbf{C}_y = \text{Cov}(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}_x \mathbf{H}^T + \mathbf{C}_w$$

Assim, a capacidade do canal por vetor de transmissão é

$$\begin{aligned} C_s &= \max_{p(\mathbf{x})} I(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= \frac{1}{2} \log \det (\mathbf{I}_N + \mathbf{H} \mathbf{C}_x \mathbf{H}^T \mathbf{C}_w^{-1}) \end{aligned} \quad (13.100)$$

Dado um canal simétrico passa-baixas com largura de banda de B Hz, $2B$ amostras de \mathbf{x} podem ser transmitidas, resultando em uma capacidade de canal

$$\begin{aligned} C(\mathbf{H}) &= B \log \det (\mathbf{I} + \mathbf{H} \mathbf{C}_x \mathbf{H}^T \mathbf{C}_w^{-1}) \\ &= B \log \det (\mathbf{I} + \mathbf{C}_x \mathbf{H}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{H}) \end{aligned} \quad (13.101)$$

em que, para matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} de dimensões adequadas, invocamos a igualdade $\det (\mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det (\mathbf{I} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{A})$. Podemos ver claramente da Eq. (13.101) que a capacidade de canal depende da matriz de covariância \mathbf{C}_x do vetor de sinal de entrada gaussiano. Esse resultado mostra que, conhecido o canal MIMO ($\mathbf{H}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{H}$) no transmissor, um sinal de entrada ótimo pode ser determinado se \mathbf{C}_x for projetada para maximizar a capacidade de canal total $C(\mathbf{H})$.

Agora, devemos considerar dois cenários: (1) transmissores MIMO sem conhecimento do canal MIMO e (2) transmissores MIMO com conhecimento de canal que permita a otimização de \mathbf{C}_x . Discutamos a capacidade do canal MIMO para esses dois casos separados.

13.8.2 Transmissor sem Conhecimento do Canal

Para transmissores sem conhecimento do canal, a matriz de covariância de entrada \mathbf{C}_x deve ser escolhida sem qualquer preferência. Em consequência, a escolha padrão $\mathbf{C}_x = \sigma_x^2 \mathbf{I}$ deve ser feita. Nesse caso, a capacidade do sistema MIMO é simplesmente

$$C = B \log \det \left(\mathbf{I} + \sigma_x^2 \mathbf{H}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{H} \right) \quad (13.102)$$

Consideremos a autodecomposição de

$$\mathbf{H}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{H} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{U}^H$$

em que \mathbf{U} é uma matriz quadrada unitária $N \times N$ tal que $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^H = \mathbf{I}_N$ e \mathbf{D} é uma matriz diagonal com elementos diagonais não negativos em ordem decrescente:

$$\mathbf{D} = \text{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_r, 0, \cdot 0)$$

Reparemos que $d_r > 0$ é o menor autovalor não zero de $\mathbf{H}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{H}$, cujo posto é limitado por $r \leq \min(N, M)$. Como $\det(\mathbf{I} + \mathbf{B} \mathbf{A}) = \det(\mathbf{I} + \mathbf{B} \mathbf{A})$ e $\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I}$, temos

$$C = B \log \det \left(\mathbf{I} + \sigma_x^2 \cdot \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{U}^H \right) \quad (13.103a)$$

$$= B \log \det \left(\mathbf{I} + \sigma_x^2 \cdot \mathbf{D} \mathbf{U}^H \mathbf{U} \right)$$

$$= B \log \det \left(\mathbf{I} + \sigma_x^2 \mathbf{D} \right)$$

$$= B \log \prod_{i=1}^r (1 + \sigma_x^2 d_i) \quad (13.103b)$$

$$= B \sum_{i=1}^r \log(1 + \sigma_x^2 d_i) \quad (13.103c)$$

No caso especial de ruído de canal aditivo, branco e gaussiano, $\mathbf{C}_w = \sigma_w^2 \mathbf{I}$, e

$$\mathbf{H}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{H} = \frac{1}{\sigma_w^2} \mathbf{H}^T \mathbf{H} = \frac{1}{\sigma_w^2} \mathbf{U} \begin{bmatrix} \gamma_1 & & & & \\ & \gamma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \gamma_r & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \mathbf{U}^H \quad (13.104)$$

em que γ_i é o i -ésimo maior autovalor de $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$, que admitimos ter posto r . Por conseguinte, a capacidade de canal para esse sistema MIMO é

$$C = B \sum_{i=1}^r \log \left(1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_w^2} \gamma_i \right) \quad (13.105)$$

Em resumo, essa capacidade de canal é a soma das capacidades de r canais AWGN paralelos. Cada subcanal tem SNR igual a $\sigma_x^2 \cdot \gamma_i / \sigma_w^2$. A Fig. 13.14 demonstra o sistema equivalente que consiste em r canais AWGN paralelos, com r sinais de

entrada ativos x_1, \dots, x_r .

No caso especial em que o canal MIMO é tão bem condicionado que todos seus autovalores não zero sejam idênticos, $\gamma_i = \gamma$, a capacidade de canal é

$$C_{\text{MIMO}} = r \cdot B \log \left(1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_w^2} \gamma \right) \quad (13.106)$$

Para efeito de comparação com o canal com uma entrada e uma saída (SISO), para o qual H é um escalar, e $r = 1$, a capacidade do canal SISO é simplesmente

$$C_{\text{SISO}} = B \log \left(1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_w^2} \gamma \right) \quad (13.107)$$

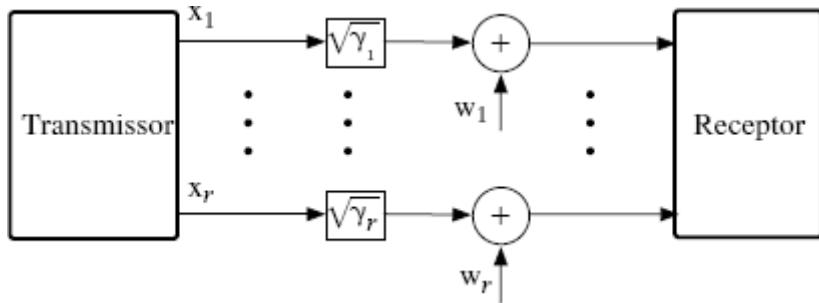


Figura 13.14

Sistema de comunicação com r canais paralelos equivalente a um sistema MIMO sem conhecimento do canal no transmissor.

Portanto, com a aplicação de transceptores MIMO, a capacidade de canal é aumentada a r vezes a capacidade do canal SISO original. Esse resultado demonstra as significativas vantagens da tecnologia MIMO para prover a necessária melhora de capacidade de sistemas de comunicação sem fio.

13.8.3 Transmissor com Conhecimento do Canal

Em numerosos sistemas de comunicação sem fio, o transmissor pode adquirir conhecimento do canal MIMO $H^T C_w^{-1} H$ por meio de um mecanismo de realimentação. Nesses casos, para maximizar a capacidade do sistema MIMO, o transmissor pode otimizar a matriz de covariância C_x do sinal de entrada.¹²

Primeiro, observemos que a capacidade de canal da Eq. (13.101) pode ser aumentada com a simples multiplicação da matriz C_x por uma constante grande k . Isso, obviamente, significaria aumentar a potência de transmissão k vezes, o que seria desleal. Portanto, para ser leal, o projeto da matriz de covariância C_x deve ser baseado em alguma restrição de ordem prática. Em um típico sistema de comunicação, sabemos que o transmissor com maior potência de sinal levará a maior SNR e, em consequência, a maior capacidade. Assim como no projeto da PSD baseado no enchimento com água, para canais seletivos em frequência, devemos restringir a potência total de transmissão do transmissor MIMO a um limite P .

Para mostrar como essa restrição na potência afetaria a matriz de covariância de entrada C_x , primeiro, precisamos introduzir o operador “traço” (Tr) de matrizes quadradas. Consideraremos uma matriz quadrada $M \times M F$ cujo elemento na i -ésima linha e j -ésima coluna é denotado por F_{ij} . O traço da matriz F é a soma de seus elementos diagonais

$$\text{Tr}(F) = \sum_{i=1}^M F_{i,i} \quad (13.108)$$

Como o operador traço é linear, da propriedade do operador valor esperado $E\{\cdot\}$ [Eq. (8.59)], temos

$$E\{\text{Tr}(F)\} = \text{Tr}(E\{F\}) \quad (13.109)$$

Introduzimos, agora, uma propriedade muito útil do operador traço. Se os produtos matriciais AB e BA forem matrizes quadradas de dimensões adequadas, terão o mesmo traço; ou seja,

$$\text{Tr}(\mathbf{AB}) = \text{Tr}(\mathbf{BA}) \quad (13.110)$$

Essa igualdade se revela muito importante. Na aplicação da Eq. (13.110), sabemos que, para o vetor \mathbf{x} ,

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = \text{Tr} [\mathbf{x}^T \mathbf{x}] \quad (13.111a)$$

$$= \text{Tr} [\mathbf{x} \mathbf{x}^T] \quad (13.111b)$$

Para o vetor de sinal $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_M)$, podemos aplicar as Eqs. (13.109) e (13.111) para mostrar que a potência de soma média do vetor de sinal \mathbf{x} é

$$\sum_{i=1}^M E \{x_i^2\} = E \left\{ \sum_{i=1}^M x_i^2 \right\} \quad (13.112a)$$

$$\begin{aligned} &= E \{ \mathbf{x}^T \mathbf{x} \} \\ &= E \{ \text{Tr} [\mathbf{x} \mathbf{x}^T] \} \\ &= \text{Tr} [E \{ \mathbf{x} \mathbf{x}^T \}] \\ &= \text{Tr} [\mathbf{C}_x] \end{aligned} \quad (13.112b)$$

Com isso, estabelecemos que a restrição de potência se traduz em uma restrição de traço

$$\text{Tr} (\mathbf{C}_x) \leq P$$

Portanto, dado que o transmissor conheça , a matriz de covariância ótima do sinal de entrada que maximiza a capacidade do canal é definida por

$$\mathbf{C}_x: \max_{\text{Tr}(\mathbf{C}_x) \leq P} B \log \det (\mathbf{I} + \mathbf{C}_x \mathbf{H}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{H}) \quad (13.113)$$

Esse problema de otimização é bem definido.

Para determinar \mathbf{C}_x ótima, recordemos a autodecomposição

$$\mathbf{H}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{H} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{U}^H$$

Aplicando a propriedade do traço na Eq. (13.110), podemos reescrever o projeto da matriz de covariância ótima como

$$\max_{\text{Tr}(\mathbf{C}_x) \leq P} B \log \det (\mathbf{I} + \mathbf{C}_x \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{U}^H) = \max_{\text{Tr}(\mathbf{C}_x) \leq P} B \log \det (\mathbf{I} + \mathbf{U}^H \mathbf{C}_x \mathbf{U}) \quad (13.114)$$

Como matrizes de covariância são positivas semidefinidas (Apêndice D.7), podemos definir uma nova matriz positiva semidefinida

$$\bar{\mathbf{C}}_x = \mathbf{U}^H \mathbf{C}_x \mathbf{U} \quad (13.115)$$

Segundo a Eq. (13.110), sabemos que

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[\bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{x}}] &= \text{Tr}[\mathbf{U}^H \mathbf{C}_{\mathbf{x}} \mathbf{U}] \\
&= \text{Tr}[\mathbf{C}_{\mathbf{x}} \mathbf{U} \mathbf{U}^H] \\
&= \text{Tr}[\mathbf{C}_{\mathbf{x}} \mathbf{I}] \\
&= \text{Tr}[\mathbf{C}_{\mathbf{x}}]
\end{aligned} \tag{13.116}$$

Na verdade, a Eq. (13.116) nos diz que os traços de $\mathbf{C}_{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{x}}$ são idênticos. Essa igualdade nos permite simplificar o problema de maximização da capacidade como

$$\begin{aligned}
C &= \max_{\mathbf{C}_{\mathbf{x}}: \text{Tr}(\mathbf{C}_{\mathbf{x}}) \leq P} B \log \det(\mathbf{I} + \mathbf{U}^H \mathbf{C}_{\mathbf{x}} \mathbf{U}) \\
&= \max_{\bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{x}}: \text{Tr}(\bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{x}}) \leq P} B \log \det(\mathbf{I} + \bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{x}} \mathbf{D})
\end{aligned} \tag{13.117a}$$

$$= \max_{\bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{x}}: \text{Tr}(\bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{x}}) \leq P} B \log \det(\mathbf{I} + \mathbf{D}^{1/2} \bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{x}} \mathbf{D}^{1/2}) \tag{13.117b}$$

O problema na Eq. (13.117b) é mais simples, pois \mathbf{D} é uma matriz diagonal. Além disso, podemos invocar a ajuda de uma ferramenta muito útil e comumente empregada na diagonalização de matrizes, conhecida como **desigualdade de Hadamard**:

Desigualdade de Hadamard: Seja a_{ij} o elemento na i -ésima linha e j -ésima coluna de uma matriz complexa A $n \times n$. A é positiva semidefinida e hermitiana, ou seja, $(\text{conj}(A))^T = A$. Logo, a seguinte desigualdade é válida:

$$\det(A) \leq \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

e a igualdade ocorre se e somente se A for diagonal.

Podemos comprovar com facilidade que $\mathbf{I} + \mathbf{D}^{1/2} \bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{x}} \mathbf{D}^{1/2}$ é positiva semidefinida, pois $\bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{x}}$ é positiva semidefinida (Exercício 13.8-3). Invocando a desigualdade de Hadamard na Eq. (13.117b), fica claro que, para máxima capacidade de canal, precisamos ter

$$\mathbf{D}^{1/2} \bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{x}} \mathbf{D}^{1/2} = \text{diagonal}$$

Em outras palavras, a entrada de canal ótima requer

$$\bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{x}} = \mathbf{D}^{-1/2} \cdot \text{diagonal} \cdot \mathbf{D}^{-1/2} = \text{diagonal} \tag{13.118}$$

A Eq. (13.118) estabelece que a estrutura ótima de $\bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{x}}$ é diagonal. Esse resultado simplifica grandemente o problema de maximização da capacidade. Denotemos a estrutura ótima da matriz de covariância por

$$\bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{x}} = \text{diagonal } (c_1, c_2, \dots, c_M)$$

Assim, a capacidade é maximizada por uma matriz $\bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{x}}$ positiva semidefinida, segundo

$$C = \max_{\bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{x}}: \text{Tr}(\bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{x}}) \leq P} B \log \det(\mathbf{I} + \mathbf{D}^{1/2} \bar{\mathbf{C}}_{\mathbf{x}} \mathbf{D}^{1/2}) \tag{13.119a}$$

$$= \max_{\sum_{i=1}^M c_i \leq P, c_i \geq 0} B \sum_{i=1}^M \log(1 + c_i d_i) \tag{13.119b}$$

Em outras palavras, nossa tarefa consiste em encontrar os elementos positivos ótimos $\{c_i\}$ para maximizar a Eq. (13.119b), sujeita à condição $\sum_i c_i \leq P$.

Seguindo a abordagem lagrangeana, definimos uma função-objetivo modificada

$$g(c_1, c_2, \dots, c_M) = B \sum_{i=1}^M \log(1 + c_i d_i) + \lambda \left(P - \sum_{i=1}^M c_i \right) \quad (13.120)$$

Tomando a derivada da função-objetivo modificada em relação a c_j ($j = 1, 2, \dots, M$) e igualando a zero, temos

$$B \frac{\log e \cdot d_j}{1 + c_j d_j} - \lambda = 0 \quad j = 1, 2, \dots, M$$

ou

$$c_j = \left[\frac{B}{\lambda \ln 2} - \frac{1}{d_j} \right] \quad j = 1, 2, \dots, M$$

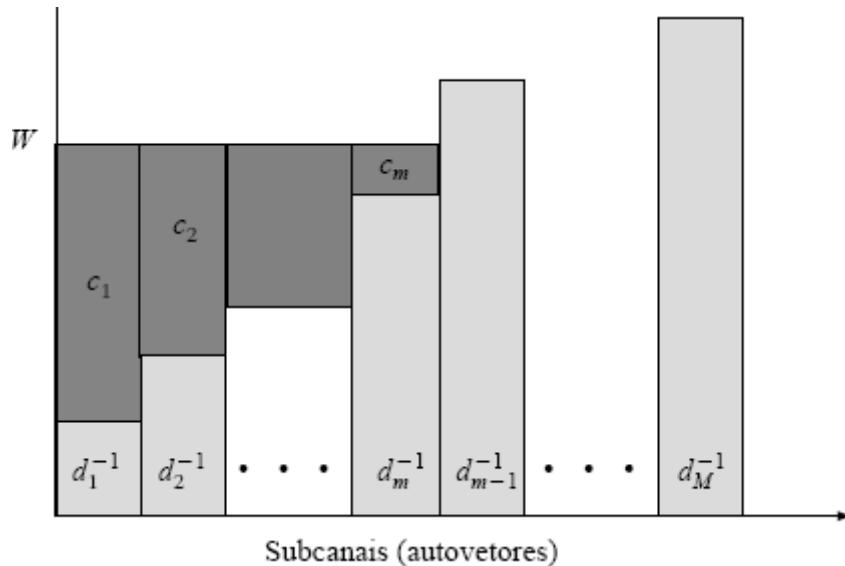


Figura 13.15

Interpretação do carregamento de potência no transmissor MIMO com conhecimento do canal como enchimento com água.

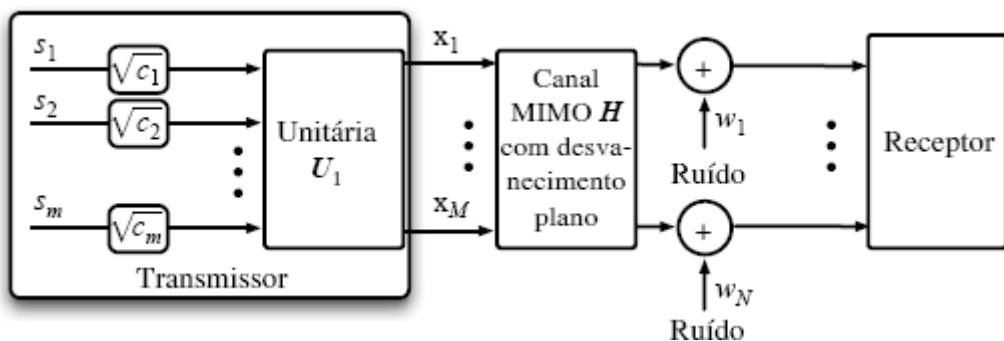


Figura 13.16

Interpretação do carregamento ótimo de potência no transmissor MIMO com conhecimento do canal como enchimento com água.

Os elementos diagonais ótimos $\{c_i\}$ são sujeitos à condição

$$\sum_{i=1}^M c_i = P$$

$$c_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, M$$

Como no problema de alocação de potência para canal com ruído gaussiano colorido, podemos definir um nível de água $W = B/(\lambda \ln 2)$. Aplicando o mesmo procedimento iterativo do enchimento com água, podemos determinar a alocação ótima de potência (em cada autovetor) como

$$c_i = \max \left(W - \frac{1}{d_i}, 0 \right) \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (13.121a)$$

com a restrição sobre a potência total

$$\sum_{i=1}^M c_i = P \quad (13.121b)$$

A Fig. 13.15 ilustra a interpretação do carregamento ótimo de potência no transmissor MIMO com conhecimento do canal como enchimento com água.

A matriz de covariância ótima do sinal de entrada é, portanto, determinada por

$$\mathbf{C}_x = \mathbf{U} \cdot \text{Diag}(c_1, c_2, \dots, c_m, 0, \dots, 0) \cdot \mathbf{U}^H$$

Em outras palavras, o vetor de sinal de entrada pode ser formado por uma transformação unitária \mathbf{U} , após determinarmos c_i com base no enchimento com água. Na verdade, c_i é a quantidade de potência carregada na (alocada à) i -ésima coluna de \mathbf{U} , ou seja, i -ésimo autovetor de $\mathbf{H}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{H}$.

Suponhamos que desejemos transmitir m sequências de sinais independentes $\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ de média zero e variância unitária. A entrada ótima do canal MIMO é formada por meio de

$$\mathbf{x} = \mathbf{U}_1 \text{diag}(\sqrt{c_1}, \sqrt{c_2}, \dots, \sqrt{c_m}) \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{bmatrix} \quad (13.122)$$

em que \mathbf{U}_1 é a primeira das m colunas de \mathbf{U} . A Fig. 13.16 mostra um diagrama em blocos desse transmissor MIMO ótimo, que maximiza a capacidade de canal com base no conhecimento do canal MIMO. O multiplicador matricial $\mathbf{U}_1 \text{diag}(\sqrt{c_1}, \sqrt{c_2}, \dots, \sqrt{c_m})$ no transmissor é conhecido como **pré-codificador linear ótimo**.

13.9 EXERCÍCIOS COM O MATLAB

Nesta seção, apresentamos exercícios MATLAB para reforçar os conceitos de codificação de fonte e capacidade de canal discutidos neste capítulo.

EXERCÍCIO COMPUTACIONAL 13.1: CÓDIGO DE HUFFMAN

O primeiro programa, `huffmancode.m`, é uma função codificadora de Huffman. O usuário precisa apenas fornecer um vetor de probabilidade que consiste em todas as probabilidades de símbolos da fonte. Não é necessário que as entradas de probabilidade sejam ordenadas.

```

function [huffcode,n]=huffmancode(p);
% entrada p é um vetor de probabilidade que consiste em
% probabilidades de símbolos da fonte x_i
if min(p)<0,
    error('Elemento negativo não pode estar em um vetor de probabilidade')
    return
else if abs(sum(p)-1)>1.e-12,
    error('Soma das probabilidades de entrada não é 1')
    return
end
[psort,pord]=sort(p);
n=length(p);
q=p;
for i=1:n-1
    [q,l]=sort(q);
    m(i,:)=[l(1:n-i+1),zeros(1,i-1)];
    q=[q(1)+q(2),q(3:end),1];
end
Cword=zeros(n^2,1);
Cword(1)=0;
Cword(2)=1;
for i1=1:n-2
    Ctemp=Cword;
    idx0=find(m(n-i1,:)==1)*n;
    Cword(1:n)=[Ctemp(idx0-n+2:idx0) '0'];
    Cword(n+1:2*n)=[Cword(1:n-1) '1'];

    for i2=2:i1+1
        idx2=find(m(n-i1,:)==i2);
        Cword(i2*n+1:(i2+1)*n)=Ctemp(n*(idx2-1)+1:n*idx2);
    end
end
for i=1:n
    idx1=find(m(1,:)==i);
    huffcode(i,1:n)=Cword(n*(idx1-1)+1:idx1*n);
end
end

```

O segundo programa, `huffmanEx.m`, gera um exemplo muito simples de codificação de Huffman. Nesse exercício, fornecemos um vetor de probabilidade de entrada de comprimento 8. O programa `huffmanEx.m` gera a lista de palavras de código para todos os símbolos de entrada. A entropia $H(x)$ dessa fonte é calculada e comparada com o comprimento de palavra de código Huffman médio. A razão entre esses valores mostra a eficiência do código.

```

% Matlab Program <huffmanEx.m>
% Este exercício requer a entrada de um
% vetor de probabilidade p que liste todas as
% probabilidades de cada símbolo de entrada da fonte
clear;
p=[0.2 0.05 0.03 0.1 0.3 0.02 0.22 0.08]; %Vetor de probabilidade de símbolo
[huffcode,n]=huffmancode(p); %Codifica o código de Huffman
entropy=sum(-log(p)*p')/log(2); %Calcula a entropia da fonte
% Exibe os resultados do codificador de Huffman
display(['símbolo', '--> ', ' palavra de código', ' Probabilidade'])
for i=1:n
codeword_Length(i)=n-length(find(abs(huffcode(i,:))==32));
display(['x', num2str(i), '--> ', huffcode(i,:), ', ', num2str(p(i))]);
end
codeword_Length
avg_length=codeword_Length*p';
display(['Entropia = ', num2str(entropy)])
display(['Comprimento médio da palavra = ', num2str(avg_length)])

```

Com a execução do programa huffmanEx.m, obtemos os seguintes resultados:

```

huffmanEx
símbolo --> palavra de código  Probabilidade
x1    -->      00          0.2
x2    -->      10111       0.05
x3    -->      101101      0.03
x4    -->      100         0.1
x5    -->      11          0.3
x6    -->      101100      0.02
x7    -->      01          0.22
x8    -->      1010        0.08
codeword_Length =
2      5      6      3      2      6      2      4
Entropia = 2.5705
Comprimento médio da palavra = 2.61

```

EXERCÍCIO COMPUTACIONAL 13.2: CAPACIDADE DE CANAL E INFORMAÇÃO MÚTUA

Este exercício fornece uma oportunidade para calcular a capacidade de canal com uma entrada e uma saída (SISO) sujeito a ruído gaussiano branco aditivo.

O programa MATLAB `mutualinfo.m` contém uma função que pode calcular a informação mútua média entre duas sequências de dados x e y de mesmo comprimento. Usamos um histograma para estimar a função densidade de probabilidade conjunta $p(x, y)$ antes do cálculo da informação mútua, segundo a definição na Eq. (13.45a).

```

function muinfo_bit=mutualinfo(x,y)
%mutualinfo calcula a informação mútua de dois
%vetores x e y em bits
%muinfo_bit = mutualinfo(X,Y)
%
%saída : informação mútua
%X,Y : Vetores de 1 dimensão a serem analisados
%
minx=min(x);
maxx=max(x);
deltax=(maxx-minx)/(length(x)-1);
lowerx=minx-deltax/2;
upperx=maxx+deltax/2;
ncellx=ceil(length(x)^(1/3));
miny=min(y);
maxy=max(y);
deltay=(maxy-miny)/(length(y)-1);
lowery=miny-deltay/2;
uppery=maxy+deltay/2;
ncelly=ncellx;

rout(1:ncellx,1:ncelly)=0;
xx=round( (x-lowerx)/(upperx-lowerx)*ncellx + 1/2 );
yy=round( (y-lowery)/(uppery-lowery)*ncelly + 1/2 );

for n=1:length(x)
    indexx=xx(n);
    indexy=yy(n);
    if indexx >= 1 & indexx <= ncellx & indexy >= 1 & indexy <= ncelly
        rout(indexx,indexy)=rout(indexx,indexy)+1;
    end;
end;

h=rout;

estimate=0;
sigma=0;
count=0;

% calcula somas de linhas e colunas
hy=sum(h);
hx=sum(h');

for nx=1:ncellx
    for ny=1:ncelly
        if h(nx,ny) ~=0

```

```

    logf=log(h(nx,ny)/hx(nx)/hy(ny));
else
    logf=0;
end;
count=count+h(nx,ny);
estimate=estimate+h(nx,ny)*logf;
sigma=sigma+h(nx,ny)*logf^2;
end;
end;

% estimação polarizada
estimate=estimate/count;
sigma =sqrt( (sigma/count-estimate^2)/(count-1) );
estimate=estimate+log(count);
nbias =(ncellx-1)*(ncelly-1)/(2*count);

% remove polarização
muinfo_bit=(estimate-nbias)/log(2);

```

No programa MATLAB principal, `capacity_plot.m`, calculamos a capacidade de canal AWGN para razão S/N de 0, 5, 10, 15 e 20 dB. A capacidade de canal para diferentes SNRs é mostrada na Fig. 13.17. Adicionalmente, podemos testar a informação mútua $I(x; y)$ entre a entrada do canal x e a correspondente saída do canal y, para um dado nível de SNR.

Nesse programa, estimamos $I(x; y)$ para cinco diferentes sinais de entrada de média zero e variância unitária:

- Entrada gaussiana
- Entrada binária equiprovável
- Entrada PAM-4 equiprovável
- Entrada PAM-8 equiprovável
- Entra uniforme no intervalo $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

A correspondente informação mútua $I(x; y)$ é estimada pela média tomada em 1.000.000 amostras de dados.

```

% Matlab program <capacity_plot.m>
clear;clf;
Channel_gain=1;
H=Channel_gain; % Ganho de canal AWGN
SNRdb=0:5:20; % SNR em dB
L=1000000;

SNR=10.^ (SNRdb/10);
% Calcula a capacidade de canal analítica
Capacity=1/2*log(1+H*SNR)/log(2);
% Estima a informação mútua entre sinais
% de entrada e saída dos canais AWGN

for kk=1:length(SNRdb),
noise=randn(L,1)/sqrt(SNR(kk));
x=randn(L,1);
x1=sign(x);
x2=(floor(rand(L,1)*4-4.e-10)*2-3)/sqrt(5);
x3=(floor(rand(L,1)*8-4.e-10)*2-7)/sqrt(21);
x4=(rand(L,1)-0.5)*sqrt(12);

```

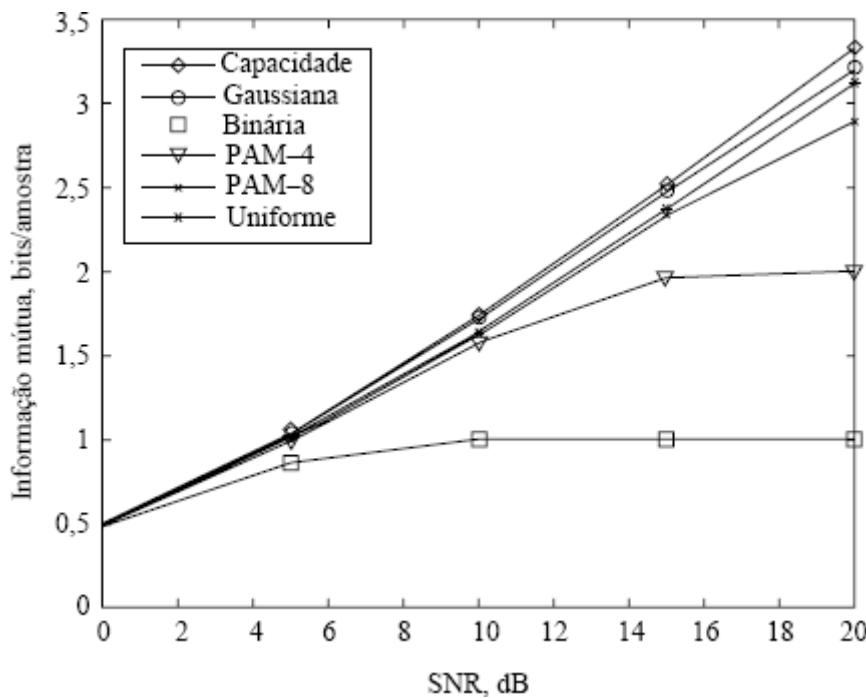


Figura 13.17

Capacidade de canal comparada com informação mútua entre saída do canal e diferentes sinais de entrada.

```

muinfovec(kk,1)=mutualinfo(x,x+noise); %Entrada gaussiana
muinfovec(kk,2)=mutualinfo(x1,x1+noise); % Entrada binária (-1,+1)
muinfovec(kk,3)=mutualinfo(x2,x2+noise); % Entrada PAM-4 (-3,-1,1,3)
muinfovec(kk,4)=mutualinfo(x3,x3+noise); % Entrada PAM-8 (-7,-5,-3,
-1,1,3,5,7)
muinfovec(kk,5)=mutualinfo(x4,x4+noise); % Entrada uniforme(-0.5,0.5)
end
plot(SNRdb,Capacity,'k-d');hold on
plot(SNRdb,muinfovec(:,1),'k-o')
plot(SNRdb,muinfovec(:,2),'k-s')
plot(SNRdb,muinfovec(:,3),'k-v')
plot(SNRdb,muinfovec(:,4),'k-x')
plot(SNRdb,muinfovec(:,5),'k-*')
xlabel('SNR (dB)');ylabel('informação mútua (bits/amostra)')
legend('Capacidade','Gaussiana','Binária','PAM-4','PAM-8',...
'uniforme','Local','Noroeste')
hold off

```

O gráfico da informação mútua estimada é traçado em função da capacidade de canal, para diferentes SNRs, para cinco distribuições de entrada: (1) Gaussiana; (2) Binária (± 1); (3) PAM nível 4 (ou PAM-4); (4) PAM nível 8 (ou PAM-8); e (5) Uniforme. Todas as cinco distribuições uniformes são normalizadas para terem média zero e potência (variância) unitária. Como mostrado na Fig. 13.17, a informação mútua obtida com a entrada gaussiana concorda muito bem com a capacidade de canal teórica. Esse resultado confirma a conclusão da Seção 13.5, de que entrada de canal gaussiana alcança a capacidade de canal. A Fig. 13.17 mostra que a informação mútua de todas as outras entradas fica abaixo da informação mútua obtida pela entrada gaussiana. Dentre as cinco distribuições, a entrada binária produz a menor informação mútua, enquanto PAM-8 produz informação mútua muito próxima da capacidade de canal para SNR abaixo de 20 dB. Essa observação indica que informação mútua mais alta pode ser obtida quando a distribuição da entrada do canal for próxima da gaussiana.

EXERCÍCIO COMPUTACIONAL 13.3: CAPACIDADE DE CANAL MIMO

Neste exercício, mostramos como a capacidade de canal MIMO varia para diferentes números de antenas transmissoras e antenas receptoras. O programa MATLAB `mimocap.m` calcula a capacidade MIMO teórica de 200 canais MIMO aleatórios de diferentes tamanhos, para uma SNR de 3 dB. Consideremos o caso de um transmissor que não tem conhecimento do canal

MIMO. Portanto, às antenas de transmissão é alocada a mesma potência de sinal σ_x^2 . Adicionalmente, admitimos que os ruídos de canal sejam gaussianos, brancos, aditivos e independentes, com variância σ_w^2 .

As entradas na matriz do canal MIMO \mathbf{H} são geradas aleatoriamente de uma distribuição gaussiana de média zero e variância unitária. Como os canais são aleatórios, para M antenas transmissoras e N antenas receptoras, a capacidade MIMO por transmissão é

$$C = \frac{1}{2} \log \left[\mathbf{I}_N + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_w^2} \mathbf{H} \mathbf{H}^T \right]$$

Como as entradas na matriz do canal MIMO \mathbf{H} são geradas aleatoriamente, a correspondente capacidade também é aleatória. Dos 200 canais, cada configuração MIMO $N \times M$ deve gerar 200 valores distintos de capacidade.

```
% Matlab Program <mimocap.m>
% Este programa calcula a capacidade de canais MIMO aleatórios (mxn)
% e traça gráfico da distribuição cumulativa (CDF) da capacidade
% resultante;
% Número de canais aleatórios:      K=200
% Relação sinal-ruído:           SNRdb=3dB
clear
hold off
clf
K=200;
SNRdb=3;
SNR=10^(SNRdb/10);
m=1; n=1; % Canais 1x1
for kk=1:K
    H=randn([m n]); %Canal MIMO aleatório
    cap11(kk)=log(det(eye(n,n)+SNR*H'*H))/(2*log(2));
end
[N11,C11]=hist(cap11,K/10); %CDF da capacidade MIMO
m=2;n=2; % Canais 2x2
for kk=1:K
    H=randn([m n]); %Canal MIMO aleatório
    cap22(kk)=log(det(eye(n,n)+SNR*H'*H))/(2*log(2));
end
[N22,C22]=hist(cap22,K/10); %CDF da capacidade MIMO
m=4;n=2; % Canais 4x2
for kk=1:K
    H=randn([m n]); %Canal MIMO aleatório
    cap42(kk)=log(det(eye(n,n)+SNR*H'*H))/(2*log(2));
end
[N42,C42]=hist(cap42,K/10); %CDF da capacidade MIMO
m=2;n=4; % Canais 2x4
for kk=1:K
    H=randn([m n]); %Canal MIMO aleatório
    cap24(kk)=log(det(eye(n,n)+SNR*H'*H))/(2*log(2));
end
[N24,C24]=hist(cap24,K/10); %CDF da capacidade MIMO
m=4;n=4; % Canais 4x4
for kk=1:K
```

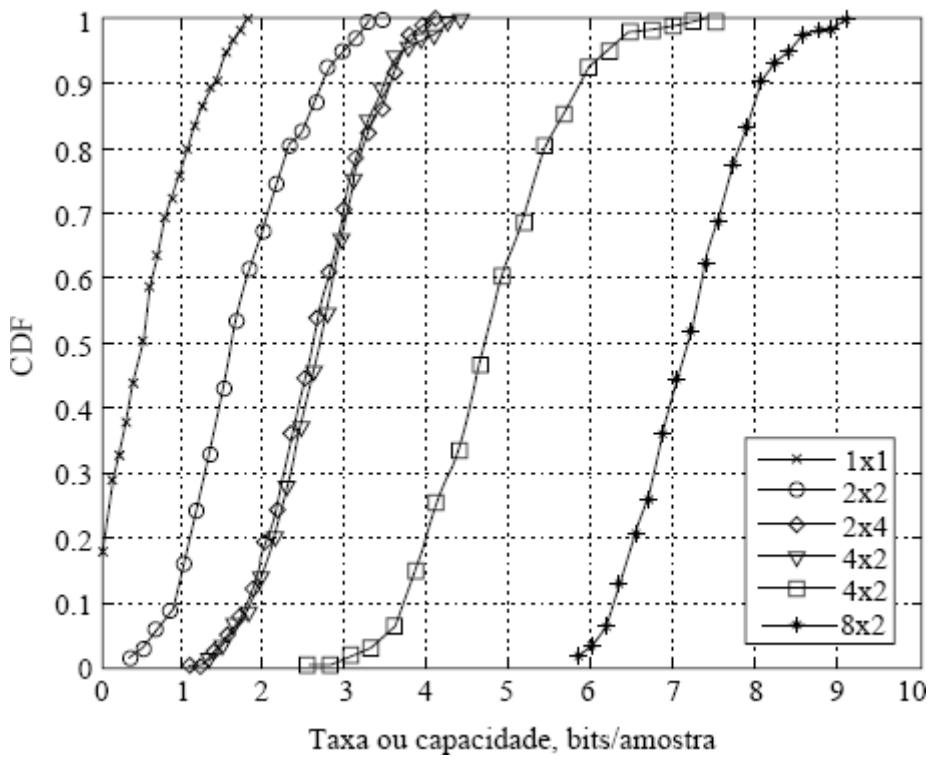


Figura 13.18

Função de distribuição cumulativa (CDF) de diferentes configurações MIMO.

```

H=randn([m n]); %Canal MIMO aleatório
cap44(kk)=log(det(eye(n,n)+SNR*H'*H))/(2*log(2));
end
[N44,C44]=hist(cap44,K/10); %CDF da capacidade MIMO
m=8;n=4; % Canais 8x4
for kk=1:K
    H=randn([m n]); %Canal MIMO aleatório
    cap84(kk)=log(det(eye(n,n)+SNR*H'*H))/(2*log(2));
end
[N84,C84]=hist(cap84,K/10); %CDF da capacidade MIMO
m=8;n=8; % Canais 8x8
for kk=1:K
    H=randn([m n]); %Canal MIMO aleatório
    cap88(kk)=log(det(eye(n,n)+SNR*H'*H))/(2*log(2));
end
[N88,C88]=hist(cap88,K/10); %CDF da capacidade MIMO
% Pronto para traçar o gráfico da CDF da distribuição da capacidade
plot(C11,cumsum(N11)/K,'k-x',C22,cumsum(N22)/K,'k-o',...
    C24,cumsum(N24)/K,'k-d',C42,cumsum(N42)/K,'k-v',...
    C44,cumsum(N44)/K,'k-s',C84,cumsum(N84)/K,'k-*');
legend('1x1','2x2','2x4','4x2','4x4','8x4','Local','Sudeste');
grid
xlabel('Taxa ou capacidade (bits amostra) para SNR=3dB');ylabel('CDF');
% Fim do gráfico

```

Na Fig. 13.18, ilustramos a função de distribuição cumulativa (CDF) da capacidade de canal C_{MIMO}

$$\text{Prob}(C_{\text{MIMO}} \leq r)$$

de cada configuração MIMO estimada dos 200 canais aleatórios. Calculamos a CDF da capacidade de canal para seis diferentes configurações MIMO: 1×1 , 2×2 , 2×4 , 4×2 , 4×4 e 8×4 . Os resultados mostram claramente que sistemas MIMO com mais antenas transmissoras e antenas receptoras têm distribuições CDF concentradas na capacidade ou taxa mais alta. Por exemplo, sistemas MIMO 2×2 têm capacidade abaixo de 4 bits/amostra com probabilidade de 1. Contudo, para sistemas MIMO 4×4 , a probabilidade cai a apenas 0,2. Considerando sistemas MIMO 8×4 , a probabilidade cai abaixo de 0,05. Esses exemplos numéricos demonstram claramente a maior capacidade alcançada pela tecnologia MIMO.

REFERÊNCIAS

1. C. E. Shannon, “Mathematical Theory of Communication,” *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 27, pp. 379–423, July 1948; pp. 623–656, Oct. 1948.
2. R. V. L. Hartley, “Transmission of Information,” *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 7, pp. 535–563, July 1928.
3. H. Nyquist, “Certain Factors Affecting Telegraph Speed,” *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 3, pp. 324–346, April 1924.
4. N. Abramson, *Information Theory and Coding*, McGraw-Hill, New York, 1963.
5. R. G. Gallager, *Information Theory and Reliable Communication*, Wiley, New York, 1968.
6. D. A. Huffman, “A Method for Construction of Minimum Redundancy Codes,” *Proc. IRE*, vol. 40, pp. 1098–1101, Sept. 1952.
7. R. W. Hamming, *Coding and Information Theory*, 2nd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1986.
8. C. E. Shannon, “Communication in the Presence of Noise,” *Proc. IRE*, vol. 37, pp. 10–21, Jan. 1949.
9. J. M. Wozencraft and I. A. Jacobs, *Principles of Communication Engineering*, Wiley, New York, 1965, Chapter 5.
10. A. J. Viterbi, *Principles of Coherent Communication*, McGraw-Hill, New York, 1966.
11. A. Paulraj, R. Nabar, and D. Gore, *Introduction to Space-Time Wireless Communications*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
12. T. M. Cover and J. A. Thomas, *Elements of Information Theory*, Wiley-Interscience, New York, 1991.

EXERCÍCIOS

- 13.1-1** Uma fonte gera quatro mensagens aleatoriamente a cada microsegundo. As probabilidades dessas mensagens são 0,4, 0,3, 0,2 e 0,1. Cada mensagem emitida independe das outras na sequência.
- Qual é a entropia da fonte?
 - Qual é a taxa de informação gerada por essa fonte (em bits por segundo)?
- 13.1-2** Uma imagem padrão de televisão é composta aproximadamente por 300.000 elementos básicos de imagem (cerca de 600 elementos de imagem em uma linha horizontal e 500 linhas por quadro). Cada um desses elementos pode assumir 10 níveis distintos de tonalidade (como preto e escalas de cinza). Determine o conteúdo de informação de um quadro de imagem de televisão.
- 13.1-3** Um locutor de rádio descreve uma imagem de televisão em 1000 palavras de seu vocabulário de 10.000 palavras. Admita que cada uma das 10.000 palavras no vocabulário do locutor tenha uma mesma probabilidade de ocorrência na descrição dessa imagem (uma aproximação grosseira, mas suficientemente boa para dar uma ideia). Determine a quantidade de informação difundida pelo locutor na descrição da imagem. Você diria que o locutor faz justiça à imagem em 1000 palavras? O velho ditado “Uma imagem vale mais que mil palavras” é uma visão exagerada ou suavizada da realidade? Use os dados do Exercício 13.1-2 para estimar a informação em uma imagem.
- 13.1-4** Da cidade de *Old North Church* [Igreja Velha do Norte], em Boston, em 1775, o amigo de Paul Revere devia mostrar uma lanterna caso o exército inglês avançasse por terra e duas lanternas caso cruzasse a baía em botes.
- Admita que Revere não tinha como saber antecipadamente que rota os ingleses tomariam. Quanta informação ele recebeu quando viu duas lanternas?
 - E se Revere tivesse 90% de certeza de que os ingleses marchariam por terra? Nesse caso, quanta informação duas lanternas transportariam?

13.1-5 Estime, por diferentes métodos, a informação por letra na língua inglesa, admitindo que cada caractere independe dos outros (Isso não é verdade, mas serve para dar uma ideia).

- (a) No primeiro método, suponha que todos os 27 caracteres (26 letras e um espaço) são equiprováveis. Essa é uma aproximação grosseira, mas boa para uma resposta rápida.
- (b) No segundo método, use a tabela de probabilidades de vários caracteres (Tabela E.13.1-5).

Tabela E.13.1-5

Probabilidade de ocorrência de letras na língua inglesa

Letra	Probabilidade	$-\log P_i$
Espaço	0,187	2,46
E	0,1073	3,22
T	0,0856	3,84
A	0,0668	3,90
O	0,0654	3,94
N	0,0581	4,11
R	0,0559	4,16
I	0,0519	4,27
S	0,0499	4,33
H	0,04305	4,54
D	0,03100	5,02
L	0,02775	5,17
F	0,02395	5,38
C	0,02260	5,45
M	0,02075	5,60
U	0,02010	5,64
G	0,01633	5,94
Y	0,01623	5,95
P	0,01623	5,95
W	0,01620	6,32
B	0,01179	6,42
V	0,00752	7,06
K	0,00344	8,20
X	0,00136	9,54

J	0,00108	9,85
Q	0,00099	9,98
Z	0,00063	10,63

- (c) Use a regra de Zipf, que relaciona o posto de uma palavra à sua probabilidade. Na prosa em inglês, se ordenarmos as palavras segundo a frequência de uso, de modo que a palavra usada com maior frequência (*the*) seja a palavra de número 1 (posto 1), a segunda palavra mais provável (*of*) é a de número 2 (posto 2), e assim por diante, a probabilidade da palavra de número r (posto r) é calculada empírica e aproximadamente como

$$P(r) = \frac{0,1}{r}$$

Use a lei de Zipf para calcular a entropia por palavra. Admita que há 8727 palavras. A razão para esse número é que as probabilidades $P(r)$ somam 1 para r de 1 a 8727. A lei de Zipf, surpreendentemente, dá resultados razoavelmente bons. Supondo que, em média, há 5,5 letras (incluindo espaço) por palavra, calcule a entropia ou informação por letra.

- 13.2-1** Uma fonte emite sete mensagens com probabilidades $1/2$, $1/4$, $1/8$, $1/16$, $1/32$, $1/64$ e $1/64$, respectivamente. Determine a entropia da fonte. Obtenha um código binário compacto e determine o comprimento médio da palavra de código. Calcule a eficiência e a redundância do código.
- 13.2-2** Uma fonte emite sete mensagens com probabilidades $1/3$, $1/3$, $1/9$, $1/9$, $1/27$, $1/27$ e $1/27$. Determine a entropia da fonte. Obtenha um código 3-ário compacto e determine o comprimento médio da palavra de código. Calcule a eficiência e a redundância do código.
- 13.2-3** Uma fonte emite quatro mensagens aleatoriamente a cada microsegundo. As probabilidades dessas mensagens são $0,5$, $0,3$, $0,1$ e $0,1$. As mensagens são geradas de forma independente.
- (a) Qual é a entropia da fonte?
 - (b) Obtenha um código binário compacto e determine comprimento médio da palavra de código, a eficiência e a redundância do código.
 - (c) Refaça a parte (b) para um código compacto terciário.
- 13.2-4** Para as mensagens no Exercício 13.2-1, obtenha o código compacto 3-ário e determine o comprimento médio da palavra de código. Calcule a eficiência e a redundância do código.
- 13.2-5** Para as mensagens no Exercício 13.2-2, obtenha o código compacto binário e determine o comprimento médio da palavra de código. Calcule a eficiência e a redundância do código.
- 13.2-6** Uma fonte emite três mensagens aleatórias equiprováveis e independentes.
- (a) Determine a entropia da fonte.
 - (b) Determine um código compacto terciário, o comprimento médio da palavra de código, a eficiência e a redundância do código.
 - (c) Refaça a parte (b) para um código binário.
 - (d) Para aumentar a eficiência de um código binário, codificamos a segunda extensão da fonte. Determine um código binário compacto, o comprimento médio da palavra de código, a eficiência e a redundância do código.
- 13.4-1** Uma matriz de canal binário é dada por

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Saída} \\ & \left(\begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{10} & \frac{9}{10} \end{array} \right) \\ \text{Entrada} & \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right) \end{array}$$

Isso significa $P_{y|x}(y_1|x_1) = 2/3$, $P_{y|x}(y_2|x_2) = 1/3$ etc. Sabendo que $P_x(x_1) = 1/3$ e $P_x(x_2) = 2/3$, determine $H(x)$, $H(x|y)$, $H(y)$, $H(y|x)$ e $I(x; y)$.

- 13.4-2** Para o canal terciário na Fig. E.13.4-2, $P_x(x_1) = P$ e $P_x(x_2) = P_x(x_3) = Q$. (Nota: $P + 2Q = 1$).

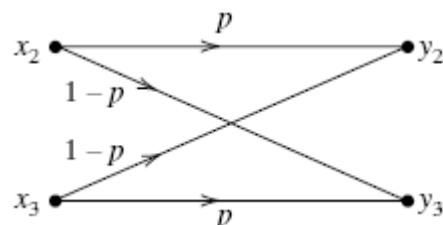
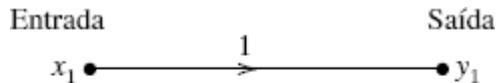


Figura E.13.4-2

- (a)** Determine $H(x)$, $H(x|y)$, $H(y)$ e $I(x; y)$.

(b) Mostre que a capacidade de canal C_s é dada por

$$C_s = \log\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) \quad (13.123)$$

em que $\beta = 2^{-[p \log p + (1-p) \log (1-p)]}$.

- 13.4-3** Considere o canal simétrico binário (BSC) mostrado na Fig. E.13.4-3a. A matriz de canal é dada por

$$M = \begin{bmatrix} 1 - P_e & P_e \\ P_e & 1 - P_e \end{bmatrix}$$

A Fig. E.13.4-3b mostra uma cascata de dois desses BSCs.

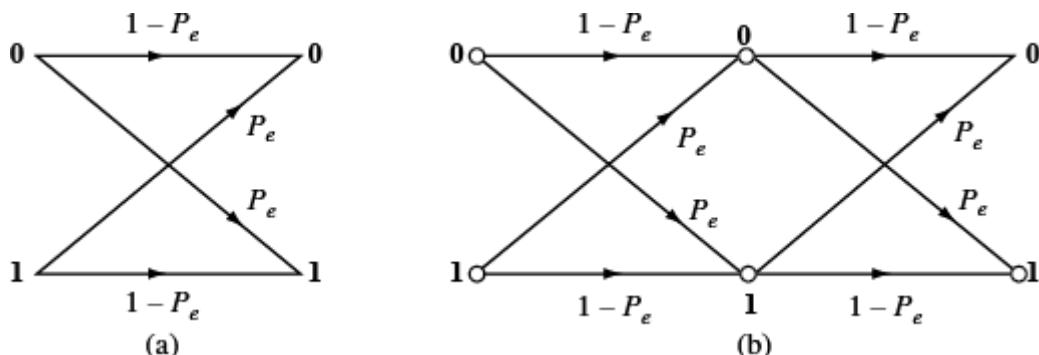


Figura E.13.4-3

- (a) Determine a matriz de canal para a cascata de canais na Fig. E.13.4-3b. Mostre que essa matriz é M^2 .
- (b) Se os dois canais BSC na Fig. E.13.4-3b tiverem probabilidades de erro P_{e1} e P_{e2} , com matrizes de canal M_1 e M_2 , respectivamente, mostre que a matriz de canal da cascata desses dois canais é $M_1 M_2$.
- (c) Use os resultados da parte (b) para mostrar que a matriz de canal para uma cascata de n canais BSCs idênticos, cada um com matriz de canal M , é M^k . Comprove sua resposta para $n = 3$ confirmando os resultados no Exemplo 8.7.
- (d) Use os resultados da parte (c) para determinar a capacidade de canal para uma cascata de k canais BSCs idênticos, cada um com probabilidade de erro P_e .

13.4-4 Em comunicação de dados com o emprego de código de detecção de erro, assim que um erro é detectado, uma solicitação automática de retransmissão (ARQ – *Automatic ReQuest for retransmission*) habilita a retransmissão de dados em erro. Em um canal desse tipo, dados em erro são apagados. Portanto, há uma probabilidade de apagamento p , mas a probabilidade de erro é zero. Um canal desse tipo, denominado **canal com apagamento binário (BEC – binary erasure channel)**, pode ser modelado como mostrado na Fig. E.13.4-4. Determine $H(x)$, $H(x|y)$ e $I(x; y)$, admitindo que as duas mensagens transmitidas sejam equiprováveis.

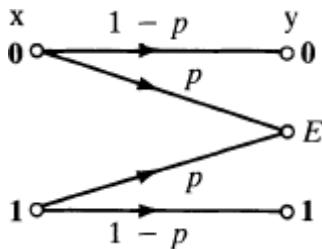


Figura
E.13.4-4

13.4-5 Uma cascata de dois canais é mostrada na Fig. E.13.4-5. Os símbolos na fonte, na saída do primeiro canal e na saída do segundo canal são denotados por x , y e z , respectivamente. Mostre que

$$H(x|z) \geq H(x|y)$$

e

$$I(x; y) \geq I(x; z)$$

Isso mostra que a informação que pode ser transmitida por uma cascata de canais não pode ser maior que a transmitida em um canal. Na verdade, canais de informação tendem a vazar informação.

Sugestão: Para uma cascata de canais, observe que

$$P(z_k|y_j, x_i) = P(z_k|y_j)$$

Logo, pela regra de Bayes

$$P(x_k|y_j, z_k) = P(x_i|y_j)$$

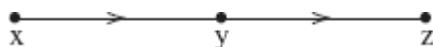


Figura
E.13.4-5

13.5-1 Para uma variável aleatória contínua x , restrita a uma amplitude de pico M ($-M < x < M$), mostre que a entropia é máxima quando x é uniformemente distribuída no intervalo $(-M, M)$ e tem densidade de probabilidade zero fora desse intervalo. Mostre que a máxima entropia é dada por $\log 2M$.

13.5-2 Para uma variável aleatória contínua x restrita a valores positivos, $0 < x < \infty$, com valor médio A , mostre que a entropia é máxima quando

$$P_X(x) = \frac{1}{A} e^{-x/A} u(x)$$

Mostre que a correspondente entropia é

$$H(X) = \log eA$$

13.5-3 Uma transmissão de televisão requer 30 quadros, cada um com 300.000 elementos de imagem, sejam transmitidos por segundo. Use os dados no Exercício 13.1-2 para estimar a largura de banda teórica do canal AWGN se a SNR no receptor tiver de ser de, pelo menos, 50 dB.

13.7-1 Em um sistema de comunicação em um canal seletivo em frequência, com função de transferência

$$H(f) = \frac{2}{1 + j\pi(f/200)}$$

a PSD do sinal de entrada é

$$S_X(f) = \Pi\left(\frac{f}{400}\right)$$

O ruído de canal é AWGN, com espectro $S_N(f) = 10^{-2}$. Determine a informação mútua entre a entrada e a saída do canal.

* Aqui, assumimos que o número n é tal que $\log_2 n$ seja um inteiro. Mais adiante, observaremos que esta restrição não é necessária.

** Aqui, mais uma vez, assumimos que o número n é tal que $\log_2 n$ seja um inteiro. Como veremos mais adiante, essa restrição não é necessária.

* Em geral,

$$1 \text{ unidade } r\text{-árias} = \log_r r \text{ unidades } s\text{-árias}$$

A unidade 10-ária de informação é denominada **hartley** em homenagem a R. V. L. Hartley,² um dos pioneiros (juntamente com Nyquist³ e Carson) na área de transmissão de informação na década de 1920. A base matemática rigorosa da teoria da informação, no entanto, foi estabelecida por C. E. Shannon¹ em 1948:

$$1 \text{ hartley} = \log_2 10 = 3,32 \text{ bits}$$

Algumas vezes, é usada a unidade **nat**:

$$1 \text{ nat} = \log_2 e = 1,44 \text{ bit}$$

* Notemos que a esfera de Hamming não é uma verdadeira hiperesfera geométrica, pois a distância de Hamming não é uma verdadeira distância geométrica (por exemplo, as sequências **001**, **010** e **100** estão em uma esfera de Hamming centrada em **111**, com raio 2).

* Isso pode ser comprovado do fato de que, para um canal sem ruído, todas as probabilidades na Eq. (13.17) são 0 ou 1. Se $P(x_i|y_j) = 1$, então $\log [1/P(x_i|y_j)] = 0$ e se $P(x_i|y_j) = 0$, $P(x_i|y_j) = P(y_j) P(x_i|y_j) = 0$. Isto mostra que $H(x|y) = 0$.

* Em toda a discussão, a PDF $p_x(x)$ será abreviada por $p(x)$; isso não causa ambiguidade e aumenta a clareza das equações.

* Como N é a potência média de ruído, a energia média em um intervalo T é NT + , em que , → 0 à medida que $T \rightarrow \infty$. Assim, podemos assumir que n esteja na esfera.

* Assumimos ruído de canal gaussiano branco aditivo.

14 CÓDIGOS CORRETORES DE ERRO

Como discutido no Capítulo 13, a chave para alcançar comunicação digital sem erro na presença de distorção, ruído e interferência é a adição de redundância apropriada aos bits de dados originais. Um bom exemplo é adição de um dígito de paridade para a detecção de um número ímpar de erros. Desde a publicação do pioneiro trabalho de Shannon,¹ muito foi feito na área de códigos corretores de erros à frente (FEC – *Forward Error Correcting codes*). Neste capítulo, apresentaremos uma introdução a esse tema; uma cobertura muito mais detalhada pode ser encontrada no clássico livro de Lin e Costello.²

14.1 VISÃO GERAL

Em geral, há duas importantes classes de códigos FEC: códigos de blocos e códigos convolucionais. Nos **códigos de blocos** cada bloco de k dígitos de dados é codificado em uma palavra de código mais longa de n dígitos ($n > k$). Cada sequência individual de k dígitos de dados determina completamente uma única palavra de código de n dígitos. Nos **códigos convolucionais**, a sequência codificada de n dígitos depende não apenas dos k dígitos de dados, mas também dos anteriores $N - 1$ ($N > 1$) dígitos de dados. Assim, a sequência codificada para certos k dígitos de dados não é única, mas depende dos anteriores $N - 1$ dígitos de dados. Em resumo, o codificador tem memória. Nos códigos de blocos, k dígitos são acumulados e, então, codificados em uma palavra de código de n dígitos. Nos códigos convolucionais, a codificação é feita em uma base contínua e não em blocos de k dígitos de dados.

O trabalho pioneiro de Shannon¹ sobre a capacidade de canais ruidosos produziu um famoso resultado conhecido como **teorema da codificação de canal ruidoso**. Esse resultado afirma que, para um canal ruidoso de capacidade C , existem códigos de taxa $R < C$ tais que a decodificação de máxima verossimilhança pode levar à probabilidade de erro

$$P_e \leq 2^{-nE_b(R)} \quad (14.1)$$

em que $E_b(R)$ é a energia por bit de informação, definida como uma função da taxa de código R . Esse resultado notável mostra que uma probabilidade de erro **arbitrariamente pequena** pode ser alcançada com o aumento do comprimento n do código de blocos, mantendo constante a taxa de código. Um resultado similar para códigos convolucionais também foi mostrado na Ref. 1. Reparemos que esse resultado estabelece a existência de **bons** códigos, mas não nos diz como determiná-los. Na verdade, não é apenas uma questão de projetar bons códigos. Esse resultado requer, para a redução da probabilidade de erro, que n seja grande e, para as longas palavras de código de comprimento n , que decodificadores tenham grande capacidade de armazenagem e alta complexidade. Portanto, o principal problema no projeto de códigos é a dupla tarefa de buscar códigos corretores de erro com grande comprimento n , para reduzir a probabilidade de erro, e decodificadores que sejam de simples implementação. Os melhores resultados até o momento são a recente descoberta de códigos-turbo e a redescoberta de códigos verificadores de paridade de baixa densidade (LDPC – *low-density parity check codes*), a serem discutidos mais adiante. Os primeiros são derivados de códigos convolucionais e os últimos são uma forma de códigos de blocos.

Códigos corretores de erros requerem uma forte base matemática. Para prover uma introdução suficientemente detalhada de vários tópicos importantes associados a esse assunto, organizamos este capítulo segundo a base matemática necessária ao entendimento. Iniciamos com o estudo dos códigos de blocos, que são mais simples, intuitivos e requerem menor quantidade de análise probabilística. A seguir, introduzimos os conceitos e princípios de códigos convolucionais e de sua decodificação. Por fim, focamos o conceito mais sofisticado de autodecodificação, que estabelece uma fundação para o estudo de progressos recentes em códigos-turbo de alto desempenho e códigos verificadores de paridade de baixa densidade.

14.2 REDUNDÂNCIA PARA CORREÇÃO DE ERRO

Em códigos FEC, uma palavra de código é uma unidade de bits que pode ser decodificada de modo independente. O número de bits em uma palavra de código é conhecido como comprimento do código. Se k dígitos de dados forem transmitidos por uma palavra de código de n dígitos, o número de dígitos de verificação será $m = n - k$. Nesse caso, a **taxa de código** será $R = k/n$. Esse tipo de código é conhecido como código (n, k) . Dígitos de dados (d_1, d_2, \dots, d_k) formam uma k -upla, ou seja, um vetor \mathbf{d} de k

dimensões. Da mesma forma, uma palavra de código (c_1, c_2, \dots, c_n) é um vetor de n dimensões. Inicialmente, determinaremos o número mínimo de dígitos de verificação a serem usados para detectar ou corrigir um número t de erros em um código (n, k) .

Se o comprimento do código binário for n , haverá um total de 2^n palavras de código (ou vértices de um hipercubo de n dimensões) disponíveis para serem atribuídas a 2^k palavras de dados. Suponhamos que desejemos determinar um código que seja capaz de corrigir até t dígitos em erro. Nesse caso, se transmitirmos uma palavra de dados d_j por meio de uma das palavras de código (ou um dos vértices) c_j , devido aos erros de canal, a palavra recebida não será c_j , mas algum c_j' . Se o ruído de canal causar erro em t ou menos dígitos, estará em algum ponto no interior da esfera de Hamming* de raio t e centro em c_j . Se tiver de corrigir até t erros, o código deve ter a seguinte propriedade: não deve haver sobreposição entre quaisquer esferas de Hamming de raio t centradas nas palavras de código. Isso significa que não devemos usar como palavras de códigos os vértices que estiverem a uma distância de Hamming t de qualquer palavra de código. Caso uma palavra de código recebida esteja no interior de uma esfera de Hamming de raio t e centro em c_j , decidimos que a palavra de código transmitida foi c_j . Esse esquema é capaz de corrigir até t erros, e a distância mínima d_{\min} entre t palavras corretoras de código que não se sobrepõem é dada por

$$d_{\min} = 2t + 1 \quad (14.2)$$

A seguir, para determinar uma relação entre n e k , observamos que há 2^n vértices ou palavras disponíveis para 2^k palavras de dados. Assim, há $2^n - 2^k$ vértices redundantes. Quantos vértices, ou palavras, estão no interior de uma esfera da Hamming de raio t ? O número de sequências (de n dígitos) que diferem de uma dada sequência por j dígitos corresponde ao número de possíveis combinações de n coisas tomadas j a j , o que é dado por $\binom{n}{j}$ [Eq. (8.16)]. Portanto, o número de maneiras em que até t erros podem ocorrer é

$$\sum_{j=1}^t \binom{n}{j}$$

Assim, para cada palavra de código, devemos deixar

$$\sum_{j=1}^t \binom{n}{j}$$

vértices (ou palavras) sem uso. Como temos 2^k palavras de código, devemos deixar um total de

$$2^k \sum_{j=1}^t \binom{n}{j}$$

palavras sem uso. Portanto, o número total de palavras deve ser de pelo menos

$$2^k + 2^k \sum_{j=1}^t \binom{n}{j} = 2^k \sum_{j=0}^t \binom{n}{j}$$

Todavia, o número total de palavras, ou vértices, disponíveis é 2^n . Assim, devemos ter

$$2^n \geq 2^k \sum_{j=0}^t \binom{n}{j}$$

ou

$$2^{n-k} \geq \sum_{j=0}^t \binom{n}{j} \quad (14.3a)$$

Observemos que $n - k = m$ é o número de dígitos de verificação. Logo, a Eq. (14.3a) pode ser expressa como

$$2^m \geq \sum_{j=0}^t \binom{n}{j} \quad (14.3b)$$

Esse resultado é conhecido como **limite de Hamming**. Vale ressaltar que, em geral, o limite de Hamming é uma condição necessária, mas não suficiente. Contudo, para o caso de códigos corretores de um erro, esse limite é uma condição necessária e suficiente. Se algum m satisfizer o limite de Hamming, isso não significa necessariamente que um código corretor de t erros de n dígitos possa ser construído. A Tabela 14.1 mostra alguns exemplos de códigos corretores de erro e suas taxas.

Tabela 14.1

Alguns Exemplos de Códigos Corretores de Erros

	n	k	Código	Eficiência do Código (ou Taxa do Código)
Correção de um erro, $t = 1$	3	1	(3, 1)	0,33
Mínima separação de código 3	4	1	(4, 1)	0,25
	5	2	(5, 2)	0,4
	6	3	(6, 3)	0,5
	7	4	(7, 4)	0,57
	15	11	(15, 11)	0,73
	31	26	(31, 26)	0,838
Correção de dois erros, $t = 2$	10	4	(10, 4)	0,4
Mínima separação de código 5	15	8	(15, 8)	0,533
Correção de três erros, $t = 3$	10	2	(10, 2)	0,2
Mínima separação de código 7	15	5	(15, 5)	0,33
	23	12	(23, 12)	0,52

Um código para o qual a desigualdade nas Eqs. (14.3) se tornam igualdades são conhecidos como **códigos perfeitos**. Em um desses códigos, as esferas de Hamming (com centro em cada uma das palavras de código) não apenas não se sobrepõem, mas varrem todos os 2^n vértices, de modo que nenhum vértice fique fora de alguma esfera. Um código perfeito corretor de e erros satisfaz a condição de que toda sequência (recebida) possível esteja, no máximo, a uma distância e de alguma palavra de código. Códigos perfeitos existem somente em alguns relativamente poucos casos. No caso binário, códigos perfeitos corretores de um erro recebem a denominação de **código de Hamming**. Para um código de Hamming, $t = 1$ e $d_{\min} = 3$; da Eq. (14.3b), temos

$$2^m = \sum_{j=0}^1 \binom{n}{j} = 1 + n \quad (14.4)$$

Portanto, códigos de Hamming são códigos (n, k) , com $n = 2^m - 1$, $k = 2^m - 1 - m$ e distância mínima $d_{\min} = m$. Em geral, escrevemos um código de Hamming como um código $(2^m - 1, 2^m - 1 - m, m)$. Um dos mais conhecidos códigos de Hamming é o código $(7, 4, 3)$.

Outra forma de corrigir erros consiste em projetar um código para detectar (e não corrigir) até t erros. Quando o detector detecta um erro, pode solicitar retransmissão. Esse mecanismo é conhecido como solicitação automática de repetição (ou ARQ – *automatic repeat request*). Como a detecção de erro requer um menor número de dígitos de verificação, esses códigos operam a taxas (eficiências) mais elevadas.

Para detectar t erros, as palavras de códigos devem estar separadas por uma distância de Hamming de, pelo menos $t + 1$. Caso contrário, uma sequência de bits recebida erroneamente, com até t bits em erro, poderia ser outra palavra de código transmitida. Suponhamos que uma palavra de código transmitida c_j contenha α erros de bits ($\alpha \leq t$). Assim, a palavra de código recebida \tilde{c}_j está a uma distância α de c_j . Todavia, como $\alpha \leq t$, \tilde{c}_j jamais pode ser outra palavra de código válida, pois todas as palavras de código estão separadas por, pelo menos, $t + 1$. Logo, a recepção de \tilde{c}_j imediatamente indica que um erro foi cometido. Portanto, a mínima distância d_{\min} entre t palavras de código detectoras de erro é

$$d_{\min} = t + 1$$

Na apresentação da teoria de codificação, usaremos adição em módulo 2, definida por

$$\begin{aligned}\mathbf{1} \oplus \mathbf{1} &= \mathbf{0} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \oplus \mathbf{1} &= \mathbf{1} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{1}\end{aligned}$$

Em lógica digital, isso também é conhecido como operação OR exclusivo (XOR). Reparemos que a soma em módulo 2 de qualquer dígito binário com ele próprio é sempre zero. No desenvolvimento de códigos binários a ser feito de aqui em diante, todas as adições apresentadas serão em módulo 2.

14.3 CÓDIGOS DE BLOCOS LINEARES

Uma palavra de código consiste em n dígitos c_1, c_2, \dots, c_n , enquanto uma palavra de dados consiste em k dígitos d_1, d_2, \dots, d_k . Como as palavras de código e de dados são, respectivamente, uma n -upla e uma k -upla, são vetores de n e k dimensões. Usaremos vetores-linha para representar essas palavras:

$$\begin{aligned}\mathbf{c} &= (c_1, c_2, \dots, c_n) \\ \mathbf{d} &= (d_1, d_2, \dots, d_k)\end{aligned}$$

Para o caso geral de códigos de blocos lineares, todos os n dígitos de \mathbf{c} são formados por combinações lineares (adições em módulo 2) de k dígitos de dados. Um caso especial, em que $c_1 = d_1, c_2 = d_2, \dots, c_k = d_k$, e os dígitos remanescentes, de c_{k+1} a c_n , são combinações lineares de d_1, d_2, \dots, d_k , é conhecido como **código sistemático**. Em um código sistemático, os primeiros k dígitos de uma palavra de código são os dígitos de dados (ou informação) e os restantes $m = n - k$ dígitos são **dígitos de verificação de paridade**, formados por combinações lineares dos dígitos de dados d_1, d_2, \dots, d_k :

$$\begin{aligned}c_1 &= d_1 \\ c_2 &= d_2 \\ &\vdots \\ c_k &= d_k \\ c_{k+1} &= h_{11}d_1 \oplus h_{12}d_2 \oplus \cdots \oplus h_{1k}d_k \\ c_{k+2} &= h_{21}d_1 \oplus h_{22}d_2 \oplus \cdots \oplus h_{2k}d_k \\ &\vdots \\ c_n &= h_{m1}d_1 \oplus h_{m2}d_2 \oplus \cdots \oplus h_{mk}d_k\end{aligned}\tag{14.5a}$$

ou

$$\mathbf{c} = \mathbf{d}\mathbf{G} \quad (14.5b)$$

em que

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{11} & h_{21} & \cdots & h_{m1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & h_{12} & h_{22} & \cdots & h_{m2} \\ & & \vdots & & 0 & & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & h_{1k} & h_{2k} & \cdots & h_{mk} \end{bmatrix} \quad (14.6)$$

A matriz \mathbf{G} $k \times n$ é denominada **matriz geradora**. Para códigos sistemáticos, \mathbf{G} pode ser dividida em uma matriz identidade \mathbf{I}_k $k \times k$ e uma matriz \mathbf{P} $k \times m$. Os elementos de \mathbf{P} são 0 ou 1. A palavra de código pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \mathbf{d}\mathbf{G} \\ &= \mathbf{d}[\mathbf{I}_k \quad \mathbf{P}] \\ &= [\mathbf{d} \quad \mathbf{d}\mathbf{P}] \\ &= [\mathbf{d} \quad \mathbf{c}_p] \end{aligned} \quad (14.7)$$

em que os dígitos de verificação, também conhecidos como bits *checksum* ou bits de paridade, são

$$\mathbf{c}_p = \mathbf{d}\mathbf{P} \quad (14.8)$$

Portanto, conhecendo os dígitos de dados, podemos calcular os dígitos de verificação da Eq. (14.8) e, em consequência, a palavra de código \mathbf{c}_p . O **peso** da palavra de código \mathbf{c} é o número de 1s na mesma. A **distância de Hamming** entre duas palavras de código \mathbf{c}_a e \mathbf{c}_b é o número de elementos pelos quais diferem:

$$d(\mathbf{c}_a, \mathbf{c}_b) = \text{peso de } (\mathbf{c}_a \oplus \mathbf{c}_b)$$

Exemplo 14.1 Para um código (6, 3), a matriz geradora \mathbf{G} é

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para todas as oito possíveis palavras de dados, determinemos as correspondentes palavras de código e comprovemos que esse código corrige um erro.

A Tabela 14.2 lista as oito palavras de dados e as correspondentes palavras de código formadas de $\mathbf{C} = \mathbf{d}\mathbf{G}$.

Tabela 14.2

Palavra de Dados \mathbf{d}	Palavra de Código \mathbf{c}
111	111000

110	110110
101	101011
100	100101
011	011101
010	010011
001	001110
000	000000

Reparemos que a distância entre quaisquer duas palavras de código é, pelo menos, 3. Portanto, o código pode corrigir, pelo menos, um erro. O possível codificador para esse código, mostrado na Fig. 14.1, usa um registrador de deslocamento (*shift register*) de três dígitos e três somadores em módulo 2.

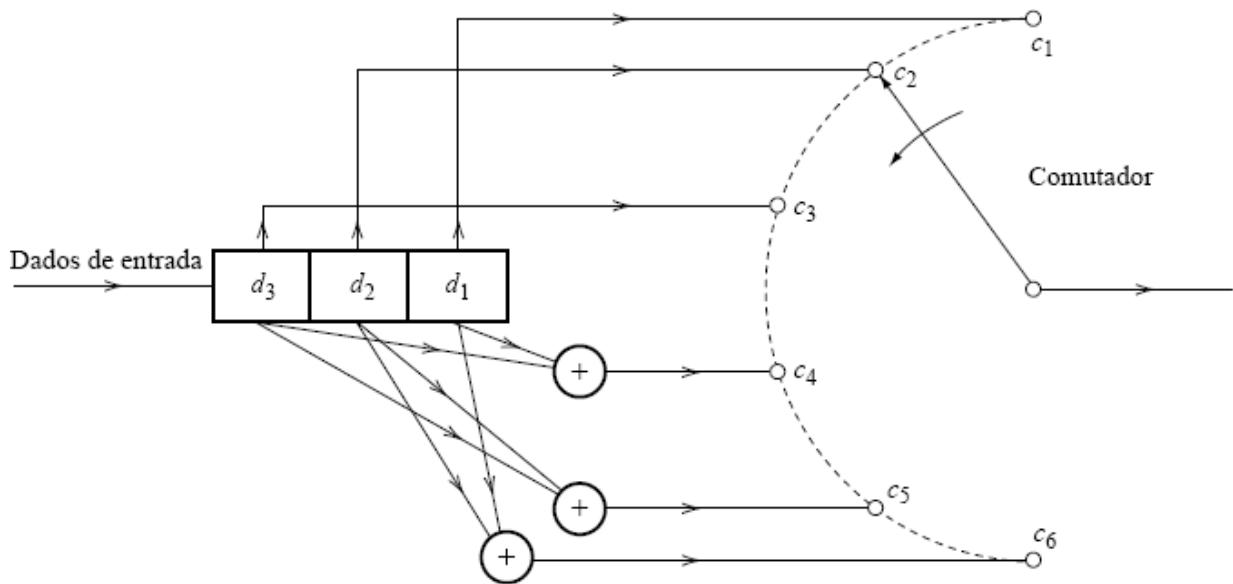


Figura 14.1
Codificador para códigos de blocos lineares.

Códigos Lineares

Um código de blocos é um **código de blocos linear** se, para todo par de palavras de código c_a e c_b de um código de blocos,

$$c_a \oplus c_b$$

também for uma palavra de código. Por essa razão, códigos lineares devem ter uma palavra de código toda de zeros **000...00**. Para códigos lineares, a **distância mínima** é igual ao **peso mínimo**.

Decodificação

Consideremos algumas propriedades de palavras de código que possam ser usadas para o propósito de decodificação. Da Eq. (14.8) e do fato de que a soma em módulo 2 de qualquer sequência com ela própria é zero, obtemos

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{P} \oplus \mathbf{c}_p = \underbrace{[\mathbf{d} \quad \mathbf{c}_p]}_{\mathbf{c}} \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} = 0 \quad (14.9)$$

em que \mathbf{I}_m é a matriz identidade de ordem $m \times m$ ($m = n - k$). Assim,

$$\mathbf{c}\mathbf{H}^T = 0 \quad (14.10a)$$

em que

$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \quad (14.10b)$$

e sua transposta

$$\mathbf{H} = [\mathbf{P}^T \quad \mathbf{I}_m] \quad (14.10c)$$

é denominada **matriz de verificação de paridade**. Cada palavra de código deve satisfazer a Eq. (14.10a). Essa é nossa chave para a decodificação. Consideremos a palavra recebida \mathbf{r} . Devido a possíveis erros causados pelo ruído de canal, em geral, \mathbf{r} difere da palavra de código transmitida \mathbf{c} ,

$$\mathbf{r} = \mathbf{c} \oplus \mathbf{e}$$

em que a palavra de erro (ou vetor de erro) \mathbf{e} também é um vetor-linha de n elementos. Por exemplo, se a palavra de dados **100** no Exemplo 14.1 for transmitida como a palavra de código **100101** (Tabela 14.2) e o ruído de canal causar um erro de detecção no terceiro dígito,

$$\mathbf{r} = \mathbf{101101}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{100101}$$

e

$$\mathbf{e} = \mathbf{001000}$$

Portanto, um elemento **1** em \mathbf{e} indica um erro na posição correspondente, e **0** indica que não houve erro. A distância de Hamming entre \mathbf{r} e \mathbf{c} é apenas o número de 1s em \mathbf{e} .

Suponhamos que a palavra de código transmitida tenha sido \mathbf{c}_i e que o ruído de canal cause um erro \mathbf{e}_i , de modo que a palavra recebida seja $\mathbf{r} = \mathbf{c}_i + \mathbf{e}_i$. Se não houvesse erro, ou seja, se \mathbf{e}_i fosse **000000**, teríamos $\mathbf{r}\mathbf{H}^T = 0$. Todavia, por causa de possíveis erros de canal, $\mathbf{r}\mathbf{H}^T$ é, em geral, um vetor-linha não nulo \mathbf{s} , denominado **síndrome**:

$$\mathbf{s} = \mathbf{r}\mathbf{H}^T \quad (14.11a)$$

$$\begin{aligned} &= (\mathbf{c}_i \oplus \mathbf{e}_i)\mathbf{H}^T \\ &= \mathbf{c}_i\mathbf{H}^T \oplus \mathbf{e}_i\mathbf{H}^T \\ &= \mathbf{e}_i\mathbf{H}^T \end{aligned} \quad (14.11b)$$

Ao receber \mathbf{r} , podemos calcular a síndrome \mathbf{s} [Eq. (14.11a)] e, possivelmente, podemos calcular \mathbf{e}_i da Eq. (14.11b). Infelizmente, o conhecimento de \mathbf{s} não nos permite calcular \mathbf{e}_i sem ambiguidade, pois \mathbf{r} também pode ser expressa em termos de outras palavras de códigos diferentes de \mathbf{c}_i . Assim,

$$\mathbf{r} = \mathbf{c}_j \oplus \mathbf{e}_j \quad j \neq i$$

Logo,

$$\mathbf{s} = (\mathbf{c}_j \oplus \mathbf{e}_j)\mathbf{H}^T = \mathbf{e}_j\mathbf{H}^T$$

Como há 2^k palavras de código possíveis,

$$\mathbf{s} = \mathbf{eH}^T$$

é satisfeita por 2^k vetores de erro. Em outras palavras, a síndrome \mathbf{s} por si só não é capaz de definir um único vetor de erro. Por exemplo, se uma palavra de dados $\mathbf{d} = \mathbf{100}$ for transmitida por uma palavra de código $\mathbf{100101}$ no Exemplo 14.1, e se um erro de detecção for causado no terceiro dígito, a palavra recebida será $\mathbf{101101}$. Nesse caso, temos $\mathbf{c} = \mathbf{100101}$ e $\mathbf{e} = \mathbf{001000}$. Contudo, a mesma palavra poderia ser recebida se $\mathbf{c} = \mathbf{101011}$ e $\mathbf{e} = \mathbf{000110}$, ou se $\mathbf{c} = \mathbf{010011}$ e $\mathbf{e} = \mathbf{111110}$, e assim por diante. Portanto, há oito possíveis vetores de erro (2^k vetores de erro) que satisfazem a Eq. (14.11b). Qual deles devemos usar? Por isso, devemos definir nosso critério de decisão. Um critério razoável é a regra de máxima verossimilhança, segundo a qual, se recebermos \mathbf{r} , decidimos a favor da palavra de código \mathbf{c} para qual \mathbf{r} tem maior probabilidade de ser recebida. Em outras palavras, decidimos “ \mathbf{c}_i foi transmitida” se

$$P(\mathbf{r}|\mathbf{c}_i) > P(\mathbf{r}|\mathbf{c}_k) \quad \text{para todo } k \neq i$$

No caso de um canal simétrico binário (BSC), essa regra produz uma resposta muito simples. Suponhamos que a distância de Hamming entre \mathbf{r} e \mathbf{c}_i seja d ; isso implica que o canal causa erros em d dígitos. Portanto, denotando a probabilidade de erro de dígito de um BSC por P_e , temos

$$P(\mathbf{r}|\mathbf{c}_i) = P_e^d (1 - P_e)^{n-d} = (1 - P_e)^n \left(\frac{P_e}{1 - P_e} \right)^d$$

Se $P_e < 0,5$ for satisfeita por um canal razoável, $P(\mathbf{r}|\mathbf{c}_i)$ será uma função monotonamente decrescente de d , pois $P_e/(1 - P_e) < 1$. Assim, para maximizar $P(\mathbf{r}|\mathbf{c}_i)$, devemos escolher a palavra \mathbf{c}_i mais próxima de \mathbf{r} ; ou seja, devemos escolher o vetor de erro \mathbf{e} com o menor número de 1s. Um vetor \mathbf{e} com o menor número de 1s é denominado **vetor de peso mínimo**. Esse vetor de peso mínimo \mathbf{e}_{\min} será usado para corrigir o erro em \mathbf{r} por meio de

$$\mathbf{c} = \mathbf{r} \oplus \mathbf{e}_{\min}$$

Exemplo 14.2 Um código (6, 3) linear é gerado segundo a matriz geradora no Exemplo 14.1. O receptor recebe $\mathbf{r} = \mathbf{100011}$. Admitindo que o canal seja BSC e que a regra de detecção de máxima verossimilhança seja usada, determinemos a correspondente palavra de dados.

Temos

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \mathbf{rH}^T \\ &= [\mathbf{1} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{1}] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{1} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{0}] \end{aligned}$$

Devido à operação em módulo 2, subtração é o mesmo que adição, de modo que a correspondente palavra de código transmitida \mathbf{c} é dada por

$$\mathbf{c} = \mathbf{r} \oplus \mathbf{e}$$

em que \mathbf{e} satisfaz

$$s = [1 \ 1 \ 0] = eH^T$$

$$= [e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4 \ e_5 \ e_6] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vemos que $e = 001000$ satisfaz essa equação. No entanto, a equação é igualmente satisfeita por $e = 000110$, ou 010101 ou 011011 ou 111110 ou 101101 ou 100011 . A escolha adequada, o vetor de peso mínimo e_{\min} , é 001000 . Logo,

$$c = 100011 \oplus 001000 = 101011$$

Tabela 14.3

Tabela de Decodificação para o Código na Tabela 14.2

e	s
000000	000
100000	101
010000	011
001000	110
000100	100
000010	010
000001	001
100010	111

O procedimento de decodificação que acabamos de descrever é muito desorganizado. Para torná-lo sistemático, deveríamos considerar todas as síndromes possíveis e, a cada uma, associarmos um vetor de erro de peso mínimo. Por exemplo, o código corretor de um erro no Exemplo 14.1 tem uma síndrome com três dígitos. Portanto, há oito síndromes possíveis. Preparamos uma tabela de vetores de erro de peso mínimo correspondentes a cada síndrome (Tabela 14.3). Para preparar essa tabela, consideramos todos os possíveis vetores de erro de peso mínimo e usamos a Eq. (14.11b) para calcular s para cada um. O primeiro vetor de erro de peso mínimo **000000** é um caso trivial, cuja síndrome é **000**. A seguir, consideramos todos os possíveis vetores de erro de peso unitário. Há seis desses vetores: **100000**, **010000**, **001000**, **000100**, **000010** e **000001**. A síndrome associada a cada um deles pode ser calculada da Eq. (14.11b), e é listada na tabela (Tabela 14.3). Com isso, falta ainda uma síndrome, **111**, que não está associada a um vetor de erro. Como todos os vetores de erro de peso unitário foram considerados, devemos buscar vetores de erro com peso 2.

Concluímos que, para as primeiras sete síndromes (Tabela 14.3), há um único vetor de peso mínimo e . Contudo, para $s = 111$, o vetor de erro e tem um peso mínimo 2 e não é único. Por exemplo, cada um dos vetores $e = 100010$ ou 010100 ou 001001 tem $s = 111$ e os três vetores e são de peso mínimo (peso 2). Nesse caso, escolhemos um e qualquer como sendo o padrão de erro **correto**. Isso significa que o presente código pode corrigir todos os padrões de um erro e um padrão de dois erros (**100010**). Por exemplo, se $c = 101011$ for transmitido, se o ruído de canal causar o erro duplo **100010**, o vetor recebido for $r = 001001$, então

$$s = rH^T = [1 \ 1 \ 1]$$

Da Tabela 14.3, vemos que o vetor correspondente a $s = \mathbf{111}$ é $e = \mathbf{100010}$, e imediatamente decidimos $c = r \oplus e = \mathbf{101011}$. Reparemos, contudo, que esse código não corrigirá outros padrões de erro duplo além de $\mathbf{100010}$. Portanto, esse código corrige não apenas todos os erros simples, mas também um padrão de erro duplo. Esse bônus adicional de correção de um erro duplo ocorre porque n e k sobressatisfazem o limite de Hamming [Eq. (14.3b)]. Caso n e k satisfizessem o limite exatamente, teríamos apenas a capacidade de correção de erro simples. Esse é o caso do código $(7, 4)$, capaz de corrigir somente todos os padrões de erro simples.

Portanto, para decodificação sistemática, preparamos uma tabela de todos os padrões de erros corrigíveis e as correspondentes síndromes. Para decodificação, precisamos apenas calcular $s = \mathbf{rH}^T$ e, da tabela de decodificação, determinar o correspondente vetor e . A decisão é $c = r \oplus e$. Como s tem $m = n - k$ dígitos, existe um total de 2^{n-k} síndromes, cada uma consistindo em $n - k$ dígitos. Existe o mesmo número de vetores de erro corrigíveis, cada um com n dígitos. Logo, para fins de decodificação, precisamos armazenar $(2n - k)2^{n-k} = (2n - k)2^m$ bits. Essa necessidade de armazenagem cresce exponencialmente com m , de modo que o número de dígitos de verificação de paridade pode se tornar enorme, mesmo para códigos de complexidade moderada.

Construção de Códigos de Hamming

Ainda não está claro como projetar ou escolher os coeficientes da matriz geradora ou verificadora de paridade. Infelizmente, não existe uma forma sistemática para o projeto de códigos, exceto para poucos casos especiais, como os códigos cíclicos e a classe de códigos corretores de erro simples conhecida como *códigos de Hamming*. Consideremos um código corretor de erro simples $(7, 4)$. Esse código satisfaz o limite de Hamming exatamente, e comprovaremos que um código adequado pode ser construído. Nesse caso, $m = 3$ e há sete síndromes não nulas; como $n = 7$, há exatamente sete padrões de erro simples. Portanto, podemos corrigir todos os padrões de erro simples e nada além disso. Consideremos o padrão de erro simples $e = \mathbf{1000000}$. Como

$$s = \mathbf{eH}^T$$

\mathbf{eH}^T será simplesmente a primeira linha de \mathbf{H}^T . Do mesmo modo, para $e = \mathbf{0100000}$, $s = \mathbf{eH}^T$ será a segunda linha de \mathbf{H}^T , e assim por diante. Para decodificação sem ambiguidade, é necessário que todas as sete síndromes correspondentes aos sete padrões de erro simples sejam distintas. Reciprocamente, se todas as sete síndromes forem distintas, poderemos decodificar todos os padrões de erro simples. Isso significa que a única exigência sobre \mathbf{H}^T é que todas suas sete linhas sejam distintas e não nulas. Reparemos que \mathbf{H}^T é uma matriz $n \times (n - k)$ (no caso em questão, 7×3). Como existem sete padrões não nulos de três dígitos, é possível encontrarmos sete linhas não nulas de três dígitos cada uma. Há diversas maneiras para ordenar essas linhas. Vale enfatizar que as três linhas inferiores devem formar a matriz identidade I_m [Eq. (14.10b)].

Uma possível forma para \mathbf{H}^T é

$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix}$$

A correspondente matriz geradora \mathbf{G} é

$$\mathbf{G} = [\mathbf{I}_k \quad \mathbf{P}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, $d = \mathbf{1011}$, a correspondente palavra de código é $c = \mathbf{1011001}$, e assim por diante.

Um código linear genérico (n, k) tem vetores de síndrome de m dimensões ($m = n - k$). Portanto, há $2^m - 1$ distintos vetores de síndrome não nulos que podem corrigir $2^m - 1$ padrões de erro simples. Como, em um código (n, k) , há exatamente n padrões de erro simples, todos os erros simples podem ser corrigidos se

$$2^m - 1 \geq n$$

Essa é precisamente a condição na Eq. (14.4) para $t = 1$. Assim, para qualquer (n, k) que satisfaça essa condição, o procedimento que acabamos de discutir permite a construção de um código corretor de erros simples. Em resumo, um código de Hamming $(2^m - 1, m)$

$-1, 2^m - 1 - m, m$) tem os seguintes atributos:

Número de bits de paridade	$m \geq 3$
Comprimento de código	$n = 2^m - 1$
Número de bits de mensagem	$k = 2^m - m - 1$
Distância mínima	$d_{\min} = 3$
Capacidade de correção de erro	$t = 1$

Para mais detalhes sobre códigos de blocos, o leitor pode consultar os livros de Peterson e Weldon³ e de Lin e Costello.²

14.4 CÓDIGOS CÍCLICOS

Códigos cíclicos são uma subclasse de códigos de blocos lineares. Como vimos, no caso de códigos corretores de erros simples, um procedimento para a seleção da matriz geradora é relativamente simples. No entanto, esse procedimento não nos leva muito longe quando se trata da construção de códigos corretores de erros de ordens mais altas. Códigos cíclicos satisfazem uma interessante estrutura matemática que permite o projeto de códigos corretores de erros de ordens mais altas. Além disso, no caso de códigos cíclicos, os cálculos da codificação e de síndromes podem ser implementados com facilidade com o uso de registradores de deslocamento.

Em códigos cíclicos, as palavras de código são simples deslocamentos laterais uma das outras. Por exemplo, se $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ for uma palavra de código, $(c_2, c_3, \dots, c_n, c_1)$ e $(c_3, c_4, \dots, c_n, c_1, c_2)$ também serão palavras de códigos. Usaremos a seguinte notação: se

$$\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n) \quad (14.12a)$$

for um vetor de código de um código C , $\mathbf{c}^{(i)}$ denota \mathbf{c} deslocado cicличamente de i posições para a esquerda, ou seja,

$$\mathbf{c}^{(i)} = (c_{i+1}, c_{i+2}, \dots, c_n, c_1, c_2, \dots, c_i) \quad (14.12b)$$

Códigos cíclicos podem ser descritos em uma forma polinomial. Essa propriedade é de extrema utilidade na análise e implementação desses códigos. O vetor de código \mathbf{c} na Eq. (14.12a) pode ser expresso como o polinômio de grau $(n-1)$

$$c(x) = c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \dots + c_n \quad (14.13a)$$

Os coeficientes do polinômio são **0** ou **1** e obedecem as seguintes propriedades:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} & \mathbf{0} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \\ \mathbf{0} + \mathbf{1} = \mathbf{1} + \mathbf{0} = \mathbf{1} & \mathbf{0} \times \mathbf{1} = \mathbf{1} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \\ \mathbf{1} + \mathbf{1} = \mathbf{0} & \mathbf{1} \times \mathbf{1} = \mathbf{1} \end{array}$$

O polinômio de código $c^{(i)}(x)$ para o vetor de código $\mathbf{c}^{(i)}$ na Eq. (14.12b) é

$$c^{(i)}(x) = c_{i+1}x^{n-1} + c_{i+2}x^{n-2} + \dots + c_nx^i + c_1x^{i-1} + \dots + c_i \quad (14.13b)$$

Uma das interessantes propriedades de polinômios de código é o fato de $c^{(i)}(x)$ ser o resto da divisão de $x^i c(x)$ por $x^n + 1$. Podemos comprovar esta propriedade da seguinte forma:

$$\begin{aligned} xc(x) &= c_1x^n + c_2x^{n-1} + \dots + c_nx \\ &\underline{x^n + 1} \overline{c_1x^n + c_2x^{n-1} + \dots + c_nx} \\ &\quad c_1x^n + \\ &\quad \underline{c_2x^{n-1} + c_3x^{n-2} + \dots + c_nx + c_1} \\ &\quad \text{resto} \end{aligned}$$

Fica claro que o resto é $c^{(1)}(x)$. Na dedução desse resultado, usamos o fato de que, quando se trata de operações em módulo 2, subtração é o mesmo que adição. Prosseguindo dessa forma, podemos mostrar que o resto da divisão de $x^i c(x)$ por $x^n + 1$ é $c^{(i)}$.

(x).

A seguir, introduzimos o conceito de polinômio gerador de código $g(x)$. Como cada palavra de código (n, k) pode ser representada por um polinômio de código

$$c(x) = c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \cdots + c_n$$

$g(x)$ será um polinômio gerador de código (de grau $n - k$) se, para um polinômio de dados $d(x)$ de grau $k - 1$

$$d(x) = d_1x^{k-1} + d_2x^{k-2} + \cdots + d_k$$

pudermos gerar um polinômio de código como

$$c(x) = d(x)g(x) \quad (14.14)$$

Reparemos que há 2^k polinômios de código (ou palavras de código) distintos. No caso de códigos cíclicos, o deslocamento cíclico de uma palavra de código ainda é uma palavra de código.

A seguir, provaremos um importante teorema relativo a códigos cíclicos:

Teorema de Código de Blocos Linear Cíclico: Se $g(x)$ for um polinômio de grau $n - k$ e for um fator de $x^n + 1$ (em módulo 2), então $g(x)$ é um polinômio gerador que gera um código de blocos linear cíclico (n, k) .

Prova: Para um vetor de dados (d_1, d_2, \dots, d_k) , o polinômio de dados é

$$d(x) = d_1x^{k-1} + d_2x^{k-2} + \cdots + d_k \quad (14.15)$$

Consideremos k polinômios

$$g(x), \quad xg(x), \quad \dots, \quad x^{k-1}g(x)$$

com graus $n - k, n - k + 1, \dots, n - 1$, respectivamente. Então, uma combinação linear desses polinômios é igual a

$$d_1x^{k-1}g(x) + d_2x^{k-2}g(x) + \cdots + d_kg(x) = d(x)g(x) \quad (14.16)$$

Independentemente dos valores dos dados $\{d_i\}$, $d(x)g(x)$ terá grau $n - 1$ ou menor, e será um múltiplo de $g(x)$. Portanto, uma palavra de código é formada com o uso da Eq. (14.16). Há um total de 2^k polinômios (palavras de código) distintos do polinômio de dados $d(x)$, correspondentes a 2^k vetores de dados. Logo, temo um código linear (n, k) gerado pela Eq. (14.14). Para provar que esse código é cíclico, seja

$$c(x) = c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \cdots + c_n$$

um polinômio de código nesse código [Eq. (14.16)]. Então,

$$\begin{aligned} xc(x) &= c_1x^n + c_2x^{n-1} + \cdots + c_nx \\ &= c_1(x^n + 1) + (c_2x^{n-1} + c_3x^{n-2} + \cdots + c_nx + c_1) \\ &= c_1(x^n + 1) + c^{(1)}(x) \end{aligned}$$

Como $xc(x)$ é $xd(x)g(x)$ e $g(x)$ é um fator de $x^n + 1$, $c^{(1)}(x)$ também deve ser um múltiplo de $g(x)$ e, para algum vetor de dados d , pode ser expresso como $d(x)g(x)$. Portanto, $c^{(1)}(x)$ também é um polinômio de código. Prosseguindo dessa forma, vemos que $c^{(2)}(x), c^{(3)}(x), \dots$, são polinômios de código gerados pela Eq. (14.16). Assim, o código linear (n, k) gerado por $d(x)g(x)$ é, de fato, cíclico. ■

Exemplo 14.3 Determinemos um polinômio gerador $g(x)$ para um código cíclico $(7, 4)$, e determinemos vetores de código para os seguintes vetores de dados: **1010**, **1111**, **0001** e **1000**.

Neste caso, $n = 7$ e $n - k = 3$; logo,

$$x^7 + 1 = (x + 1)(x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)$$

Para um código $(7, 4)$, o polinômio gerador deve ser de grau $n - k = 3$. Nesse caso, há duas escolhas possíveis para $g(x)$: $x^3 + x + 1$ ou $x^3 + x^2 + 1$. Escolhamos o último:

$$g(x) = x^3 + x^2 + 1$$

como possível polinômio gerador. Para $d = [1 \ 0 \ 1 \ 0]$,

$$d(x) = x^3 + x$$

e o polinômio de código é

$$\begin{aligned} c(x) &= d(x)g(x) \\ &= (x^3 + x)(x^3 + x^2 + 1) \\ &= x^6 + x^5 + x^4 + x \end{aligned}$$

Logo,

$$c = 1110010$$

Tabela 14.4

<i>d</i>	<i>c</i>
1010	1110010
1111	1001001
0001	0001101
1000	1101000

Do mesmo modo, palavras de código para outras palavras de dados podem ser determinadas (Tabela 14.4). Reparemos a estrutura das palavras de código. Os primeiros k dígitos não são necessariamente os bits de dados. Portanto, este não é um código sistemático.

Em um código sistemático, os k primeiros dígitos são bits de dados, enquanto os últimos $m = n - k$ dígitos são bits de verificação de paridade. Códigos sistemáticos são um caso especial de códigos genéricos. Até aqui, nossa discussão se aplica a códigos cíclicos genéricos, dos quais códigos cíclicos sistemáticos são um caso especial. A seguir, desenvolveremos um método para a geração de códigos cíclicos sistemáticos.

Códigos Cíclicos Sistemáticos

Agora, mostraremos que, para um código sistemático, o polinômio de palavra de código $c(x)$ correspondente ao polinômio $d(x)$ é dado por

$$c(x) = x^{n-k}d(x) + \rho(x) \quad (14.17a)$$

em que $\rho(x)$ é o resto da divisão de $x^{n-k}d(x)$ por $g(x)$,

$$\rho(x) = \text{Resto} \frac{x^{n-k}d(x)}{g(x)} \quad (14.17b)$$

Para provar isso, observemos que

$$\frac{x^{n-k}d(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{\rho(x)}{g(x)} \quad (14.18a)$$

em que $q(x)$ tem grau $k - 1$ ou menor. Adicionamos $\rho(x)/g(x)$ aos dois lados da Eq. (14.18a) e, como $f(x) + f(x) = 0$ na adição em módulo 2, obtemos

$$\frac{x^{n-k}d(x) + \rho(x)}{g(x)} = q(x) \quad (14.18b)$$

ou

$$q(x)g(x) = x^{n-k}d(x) + \rho(x) \quad (14.18c)$$

Como $q(x)$ tem grau $k - 1$ ou menor, $q(x)g(x)$ é um polinômio de código. Como $x^{n-k}d(x)$ representa $d(x)$ deslocado para a esquerda por $n - k$ dígitos, os primeiros k dígitos dessa palavra de código são precisamente \mathbf{d} e os últimos $n - k$ dígitos correspondentes a $\rho(x)$ devem ser dígitos de verificação de paridade. Isso ficará claro ao considerarmos um exemplo específico.

Exemplo 14.4 Construamos um código cíclico $(7, 4)$ sistemático usando um polinômio gerador (Exemplo 14.3).

Usemos

$$g(x) = x^3 + x^2 + 1$$

Considerando um vetor de dados $\mathbf{d} = 1010$,

$$d(x) = x^3 + x$$

e

$$x^{n-k}d(x) = x^6 + x^4$$

Logo

$$\begin{array}{r}
 x^3 + x^2 + 1 & \leftarrow q(x) \\
 \underline{x^3 + x^2 + 1} \overline{| x^6 + x^4 } \\
 \underline{x^6 + x^5 + x^3} \\
 \underline{x^5 + x^4 + x^3} \\
 \underline{x^5 + x^4 + x^2} \\
 \underline{x^3 + x^2} \\
 \underline{x^3 + x^2 + 1} & \leftarrow \rho(x) \\
 1
 \end{array}$$

Portanto, da Eq. (14.17a),

$$\begin{aligned}
c(x) &= x^3 d(x) + \rho(x) \\
&= x^3(x^3 + x) + 1 \\
&= x^6 + x^4 + 1
\end{aligned}$$

e

$$c = \mathbf{1010001}$$

Tabela 14.5

<i>d</i>	<i>c</i>
1111	1111111
1110	1110010
1101	1101000
1100	1100101
1011	1011100
1010	1010001
1001	1001011
1000	1000110
0111	0111001
0110	0110100
0101	0101110
0100	0100011
0011	0011010
0010	0010111
0001	0001101
0000	0000000

Também poderíamos ter determinado a palavra de código c diretamente da Eq. (14.18c). Assim, $c(x) = q(x)g(x) = (x^3 + x^2 + 1)(x^3 + x^2 + 1) = x^6 + x^4 + 1$. Dessa forma, construímos, então, toda a tabela de código (Tabela 14.5). Esse procedimento é muito tedioso. Há, no entanto, um atalho por meio da matriz geradora de código \mathbf{G} . Podemos usar o procedimento anterior para calcular as palavras de código correspondentes às palavras de dados **1000**, **0100**, **0010**, **0001**. Essas palavras de código são **1000110**, **0100011**, **0010111**, **0001101**. Agora, observamos que essas quatro palavras de código são as quatro linhas de \mathbf{G} . Isso ocorre porque, $c = \mathbf{d} \cdot \mathbf{G}$ e, quando $\mathbf{d} = \mathbf{1000}$, $\mathbf{d} \cdot \mathbf{G}$ é a primeira linha de \mathbf{G} , e assim por diante. Logo,

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora, podemos usar $\mathbf{c} = \mathbf{d}\mathbf{G}$ para construir o restante da tabela de código. Esse é um método eficiente, pois nos permite a construção de toda a tabela de código a partir do conhecimento de apenas k palavras de código.

A Tabela 14.5 lista o código completo. Reparemos que d_{\min} , a distância mínima entre duas palavras de código, é 3. Portanto, esse é um código corretor de erros simples, e 14 dessas palavras de código podem ser obtidas por sucessivos deslocamentos cíclicos das duas palavras de código **1110010** e **1101000**. As restantes duas palavras de código **1111111** e **0000000** permanecem inalteradas sob deslocamento cíclico.

Polinômio Gerador e Matriz Geradora de Códigos Cílicos

Códigos cílicos também podem ser descritos por uma matriz geradora \mathbf{G} (Exercícios 14.3-6 e 14.3-7). Pode ser mostrado que códigos de Hamming são códigos cílicos. Uma vez que o polinômio gerador $g(x)$ seja dado, é uma tarefa simples determinar a matriz geradora de código sistemático $\mathbf{G} = [\mathbf{I} \ \mathbf{P}]$ por meio da determinação da submatriz de paridade \mathbf{P} :

$$\begin{aligned} \text{1ª linha de } \mathbf{P}: \text{Resto } & \frac{x^{n-1}}{g(x)} \\ \text{2ª linha de } \mathbf{P}: \text{Resto } & \frac{x^{n-2}}{g(x)} \\ & \vdots \\ k\text{-ésima linha de } \mathbf{P}: \text{Resto } & \frac{x^{n-k}}{g(x)} \end{aligned} \tag{14.19}$$

Consideremos um código de Hamming $(7, 4, 3)$ com polinômio gerador

$$g(x) = x^3 + x + 1. \tag{14.20}$$

$$\text{Resto } \frac{x^6}{g(x)} = x^2 + 1$$

$$\text{Resto } \frac{x^5}{g(x)} = x^2 + x + 1$$

$$\text{Resto } \frac{x^4}{g(x)} = x^2 + x$$

$$\text{Resto } \frac{x^3}{g(x)} = x + 1$$

Portanto, a matriz geradora de código cílico é

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{14.21}$$

Com isso, uma forma da matriz verificadora de paridade é

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14.22)$$

Geração de Código Cíclico

Uma das vantagens de códigos cílicos é o fato de suas codificação e decodificação poderem ser implementadas por meio de elementos simples como registradores de deslocamento e somadores em módulo 2. Um código gerado de forma sistemática é descrito nas Eqs. (14.17). A necessária divisão de $x^{n-k} d(x)$ por $g(x)$ pode ser implementada por um circuito divisor que consiste em um registrador de deslocamento com conexões de realimentação segundo o polinômio gerador $g(x) = x^{n-k} + g_1x^{n-k-1} + \dots + g_{n-k-1}x + 1$. Os ganhos g_k são 0 ou 1. Um circuito codificador com $n - k$ registradores de deslocamento é mostrado na Fig. 14.2. O entendimento desse circuito divisor requer alguma base em redes sequenciais lineares. Uma explicação do funcionamento desse circuito pode ser encontrada em Peterson e Weldon.³ Os k dígitos de dados são deslocados, um de cada vez, na entrada, com o comutador s na posição p_1 . O símbolo D representa um atraso de um dígito. À medida que os dígitos de dados se movem pelo codificador, também são deslocados para a linha de saída, pois os primeiros k dígitos da palavra de código são os próprios dígitos de dados. Assim que o último (k -ésimo) dígito de dados passar pelo último [$(n - k)$ -ésimo] registrador, todos os registradores conterão os dígitos de verificação de paridade. O comutador s passa à posição p_2 e os $n - k$ dígitos de verificação de paridade são deslocados, um de cada vez, para a linha.

Decodificação

Cada polinômio de código válido $c(x)$ é um múltiplo de $g(x)$. Em outras palavras, $c(x)$ é divisível por $g(x)$. Quando ocorrer um erro durante a transmissão, o polinômio de palavra recebido $r(x)$ não será um múltiplo de $g(x)$, se o número de erros em r for corrigível. Assim,

$$\frac{r(x)}{g(x)} = m_1(x) + \frac{s(x)}{g(x)} \quad (14.23)$$

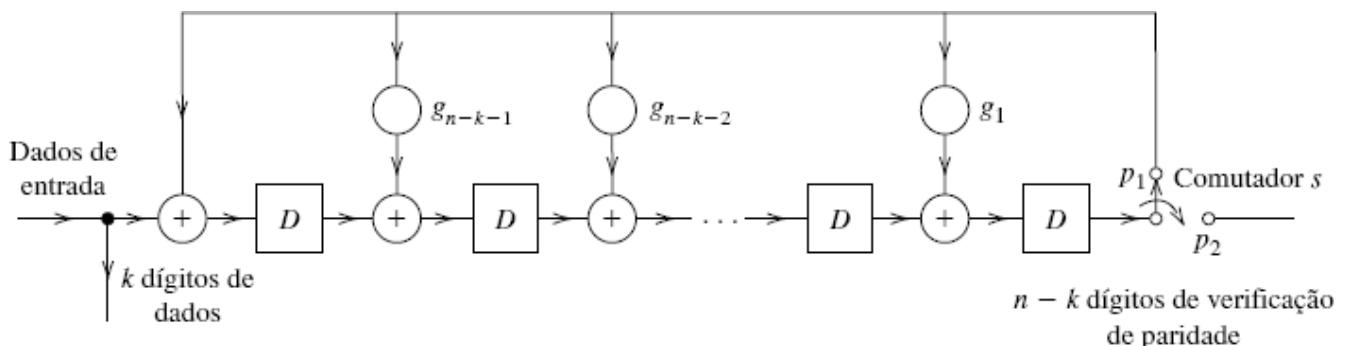


Figura 14.2
Codificador para código cíclico sistemático.

e

$$s(x) = \text{Resto} \frac{r(x)}{g(x)} \quad (14.24)$$

em que o polinômio de síndrome $s(x)$ tem grau $n - k - 1$ ou menor.

Se $e(x)$ for o polinômio de erro, então

$$r(x) = c(x) + e(x)$$

Recordando que $c(x)$ é um múltiplo de $g(x)$,

$$\begin{aligned}
s(x) &= \text{Resto} \frac{r(x)}{g(x)} \\
&= \text{Resto} \frac{c(x) + e(x)}{g(x)} \\
&= \text{Resto} \frac{e(x)}{g(x)}
\end{aligned} \tag{14.25}$$

Novamente, uma palavra recebida r poderia resultar em qualquer uma das 2^k palavras de código e um erro adequado. Por exemplo, para o código na Tabela 14.5, se $r = 0110010$, isso poderia significar $c = 1110010$ e $e = 1000000$, ou $c = 1101000$ e $e = 1011010$ ou 14 outras combinações. Como vimos, o padrão de erro mais provável é aquele com mínimo peso (ou mínimo número de 1s). Assim, aqui, $c = 1110010$ e $e = 1000000$ é a decisão correta.

É conveniente que preparamos uma tabela de decodificação, ou seja, listemos as síndromes para todos os erros corrigíveis. Para qualquer r , calculamos a síndrome da Eq. (14.24) e, da tabela, determinamos o correspondente erro corrigível e . A seguir, calculamos $c = r \oplus e$. Reparemos que o cálculo de $s(x)$ [Eq. (14.24)] envolve exatamente a mesma operação necessária ao cálculo de $\rho(x)$ durante a codificação [Eq. (14.18a)]. Portanto, o circuito na Fig. 14.2 também pode ser suado para calcular $s(x)$.

Exemplo 14.5 Construam a tabela de decodificação para o código (7, 4) corretor de erros simples na Tabela 14.5. Determinemos os vetores de dados transmitidos para os seguintes vetores recebidos r : (a) 1101101; (b) 0101000; (c) 0001100.

Tabela 14.6

e	s
1000000	110
0100000	011
0010000	111
0001000	101
0000100	100
0000010	010
0000001	001

O primeiro passo consiste em construir a tabela de decodificação. Como $n - k - 1 = 2$, o polinômio de síndrome é de segundo grau, e há sete síndromes não nulas. Também há sete possíveis padrões de erro simples corrigíveis, pois $n = 7$. Podemos usar

$$s = e \cdot H^T$$

para calcular a síndrome para cada um dos sete padrões de erro corrigíveis. Reparemos que (Exemplo 14.4)

$$H = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Podemos, agora, calcular as síndromes com base em H . Por exemplo, para $e = 1000000$,

$$\begin{aligned}
s &= [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot H^T \\
&= 110
\end{aligned}$$

Do mesmo modo, calculamos as síndromes para os restantes padrões de erro (Tabela 14.6).

Quando a palavra recebida r for **1101101**, podemos calcular $s(x)$ pela Eq. (14.24) ou simplesmente pelo produto matricial

$$\begin{aligned}s &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{H}^T \\&= [\mathbf{1} \ \mathbf{1} \ \mathbf{0} \ \mathbf{1} \ \mathbf{1} \ \mathbf{0} \ \mathbf{1}] \cdot \mathbf{H}^T \\&= \mathbf{101}\end{aligned}$$

Logo, da Tabela 14.6, obtemos $e = \mathbf{0001000}$ e

$$c = r \oplus e = \mathbf{1101101} \oplus \mathbf{0001000} = \mathbf{1100101}$$

Como esse código é sistemático,

$$d = \mathbf{1100}$$

Da mesma forma, para $r = \mathbf{0101000}$, determinamos $s = \mathbf{110}$ e $e = \mathbf{1000000}$; logo, $c = r \oplus e = \mathbf{1101000}$ e $d = \mathbf{1101}$. Para $r = \mathbf{0001100}$, obtemos $s = \mathbf{001}$ e $e = \mathbf{0000001}$; logo, $c = r \oplus e = \mathbf{0001101}$ e $d = \mathbf{0001}$.

Códigos de Bose-Chaudhuri-Hocquenghen (BCH) e Códigos de Reed-Solomon

Códigos BCH são, talvez, a classe mais estudada de códigos cíclicos corretores de erros aleatórios. Além disso, o procedimento para decodificação desses códigos pode ser implementado com simplicidade. O código de Hamming é um caso especial dos códigos BCH. Esses códigos são descritos da seguinte forma: para quaisquer inteiros positivos m e t ($t < 2^{m-1}$), existe um código (n, k) corretor de t erros, com $n = 2^m - 1$ e $n - k \leq mt$. A distância mínima d_{\min} entre palavras de código é limitada pela desigualdade $2t + 1 \leq d_{\min} \leq 2t + 2$.

Como um caso especial de códigos BCH *não binários*, códigos de Reed-Solomon são, sem dúvida, os mais bem sucedidos códigos corretores de erro à frente (FEC) em uso atualmente. Códigos de Reed-Solomon encontram aplicações variadas, como na armazenagem digital (DVD, CD-ROM), modems de alta velocidade, sistemas sem fio de banda larga e HDTV, entre outras. A análise detalhada de códigos BCH e de Reed-Solomon requer o intenso uso de álgebra moderna, e está além do escopo desse capítulo introdutório. Para uma discussão detalhada de códigos BCH e de Reed-Solomon, o leitor é direcionado ao texto clássico de Lin e Costello.²

Códigos Verificadores de Redundância Cílica (CRC) para Detecção de Erros

Um dos códigos cíclicos mais largamente empregados é o código verificador de redundância cílica (CRC – *Cyclic Redundancy Check codes*) para detecção de erros de transmissão de dados. Códigos CRC são cíclicos e projetados para detectar pacotes de dados em erro no receptor (em geral, após correção de erro). Para verificar a integridade do bloco de dados de carga (pacote), cada pacote de dados é codificado por códigos CRC de comprimento $n \leq 2^m - 1$. Os códigos CRC mais comuns têm $m = 12, 16$ ou 32 , com polinômio gerador da forma

$$g(x) = (1 + x)g_c(x)$$

$g_c(x)$ = polinômio gerador de um código de Hamming cílico

Para selecionar uma matriz geradora de código, o critério de projeto consiste em controlar a probabilidade de eventos de erro não detectados. Em outras palavras, códigos CRC devem ser capazes de detectar os padrões de erro mais prováveis, de modo que a probabilidade de erros não detectados satisfaça

$$P(e \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{0} | e \neq \mathbf{0}) < \epsilon \quad (14.26)$$

em que é especificado pelo usuário segundo suas exigências de qualidade. Os códigos CRC mais comuns são listados na Tabela 14.7, juntamente com as correspondentes matrizes geradoras. Para cada quadro de bits de dados no transmissor, o codificador CRC gera, para detecção de erros, uma sequência verificadora de quadros (FCS – *Frame-Checking Sequence*) com 8, 12, 16 ou 32 bits de comprimento. Por exemplo, pacotes IEEE 802.11 e IEEE 802.11b são verificados pela sequência de 16 bits de CRC-CCITT, enquanto pacotes IEEE 802.11a são verificados pela sequência CRC-32.

Tabela 14.7

Códigos CRC de Uso Comum e os Correspondentes Polinômios Geradores

Código	Número de bits na FCS	Polinômio Gerador $g(x)$
CRC-8	8	$x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$
CRC-12	12	$x^{12} + x^{11} + x^3 + x^2 + x + 1$
CRC-16	16	$x^{16} + x^{15} + x^2 + 1$
CRC-CCITT	16	$x^{16} + x^{12} + x^5 + 1$
CRC-32	32	$x^{32} + x^{26} + x^{23} + x^{22} + x^{16} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$

14.5 EFEITOS DA CORREÇÃO DE ERRO

Comparação entre Sistemas Codificados e Não Codificados

É interessante compararmos as probabilidades de erro de bit (ou taxa de erro de bits) quando sistemas codificados e não codificados estão sujeitos a restrições semelhantes quanto à potência e à taxa de informação.

Consideremos um código (n, k) corretor de t erros. Nesse caso, k dígitos de informação são codificados em n dígitos. Para uma comparação adequada, admitamos que os k dígitos de informação sejam transmitidos, nos dois sistemas, no mesmo intervalo de tempo e que a potência transmitida S_i seja a mesma para os dois sistemas. A taxa de bits R_b do sistema não codificado é um fator k/n menor que a do sistema codificado, pois o sistema não codificado requer a transmissão de apenas k dígitos (em contraste com o sistema codificado, que deve transmitir n dígitos). Isso significa que a razão entre as larguras de banda dos sistemas não codificado e codificado é k/n . Fica claro que o sistema codificado sacrifica largura de banda a favor de maior confiabilidade. O sistema codificado envia n bits de código para k bits de informação. Para sermos justos, a energia total usada pelos n bits de código deve ser igual à energia total usada pelo sistema não codificado para os k bits de informação. Assim, no sistema codificado, cada bit de código tem energia E_b k/n vezes menor que a de bit no sistema não codificado. Desejamos esclarecer como a correção de erro pode reduzir a taxa de erro de bits (BER) originalmente mais alta apesar desta perda de energia do bit de código.

Sejam P_{bu} e P_{bc} as probabilidades brutas de erro de bit nos casos não codificado e codificado, respectivamente. No caso não codificado, a probabilidade bruta de erro de bit é a taxa final de erro de bits, P_{eu} .

Para um código (n, k) corretor de t erros, a BER bruta pode ser reduzida, pois o decodificador é capaz de corrigir até t bits errados a cada n bits. Consideremos o caso ideal em que o decodificador não tentará corrigir a palavra de código quando houver mais que t erros em n bits. Essa ação do decodificador ideal com correção de erro pode reduzir a BER média. Seja $P(j, n)$ a probabilidade de j erros em n dígitos. Assim, o número médio de erros de bit em cada palavra de código após correção de erros é

$$\begin{aligned}\bar{n}_e &= E\{j \text{ erros de bit em } n \text{ bits}\} \\ &= \sum_{j=t+1}^n j \cdot P(j, n)\end{aligned}\tag{14.27a}$$

Portanto, a BER média após correção de erros deve ser

$$P_{ec} = \frac{\bar{n}_e}{n}\tag{14.27b}$$

Como há $\binom{n}{j}$ maneiras em que j erros podem ocorrer em n dígitos (Exemplo 8.6), temos

$$P(j, n) = \binom{n}{j} (P_{bc})^j (1 - P_{bc})^{n-j}$$

Com base na Eq. (14.27a),

$$\bar{n}_e = \sum_{j=t+1}^n j \binom{n}{j} (P_{bc})^j (1 - P_{bc})^{n-j} \quad (14.28a)$$

$$\begin{aligned} P_{ec} &= \sum_{j=t+1}^n \frac{j}{n} \binom{n}{j} (P_{bc})^j (1 - P_{bc})^{n-j} \\ &= \sum_{j=t+1}^n \binom{n-1}{j-1} (P_{bc})^j (1 - P_{bc})^{n-j} \end{aligned} \quad (14.28b)$$

Para $P_{bc} \ll 1$, o primeiro termo no somatório na Eq. (14.28b) domina todos os outros, de modo que podemos desprezá-los. Com isso,

$$P_{ec} = \binom{n-1}{t} (P_{bc})^{t+1} (1 - P_{bc})^{n-(t+1)} \quad (14.29a)$$

$$\simeq \binom{n-1}{t} (P_{bc})^{t+1} \quad \text{para } P_{bc} \ll 1 \quad (14.29b)$$

Para prosseguirmos com a comparação, é necessário que especifiquemos algum esquema de transmissão. Consideremos um esquema PSK coerente. Nesse caso, para ruído de canal gaussiano branco aditivo (AWGN),

$$P_{eu} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N}}\right) \quad (14.30a)$$

Como E_b para o caso codificado é k/n vezes a energia no caso não codificado, temos

$$P_{bc} = Q\left(\sqrt{\frac{2kE_b}{nN}}\right) \quad (14.30b)$$

Logo,

$$P_{ec} = \binom{n-1}{t} \left[Q\left(\sqrt{\frac{2kE_b}{N}}\right) \right]^{t+1} \quad (14.31a)$$

$$P_{eu} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N}}\right) \quad (14.31b)$$

Para comparar sistemas codificado e não codificado, poderíamos desenhar gráficos de P_{eu} e de P_{ec} em função da taxa bruta E_b/N (para o sistema não codificado). Como as Eqs. (14.31) envolvem parâmetros t, n e k , uma comparação adequada requer uma família de gráficos. Para o caso de um código (7, 4) corretor de erro simples ($t = 1, n = 7$ e $k = 4$), a Fig. 14.3 mostra gráficos de P_{ec} e P_{eu} nas Eqs. (14.31) em função de E_b/N . Observemos que, para altos valores de E_b/N , o esquema codificado é superior ao esquema não codificado, mas a melhora (de cerca de 1 dB) não é muito significativa. No entanto, para maiores valores de n e k , o esquema codificado pode ser tornar significativamente superior ao não codificado. No caso de canais práticos afetados por desvanecimento e ruído impulsional, códigos mais poderosos podem produzir ganhos substanciais, como mostra nosso próximo exemplo.

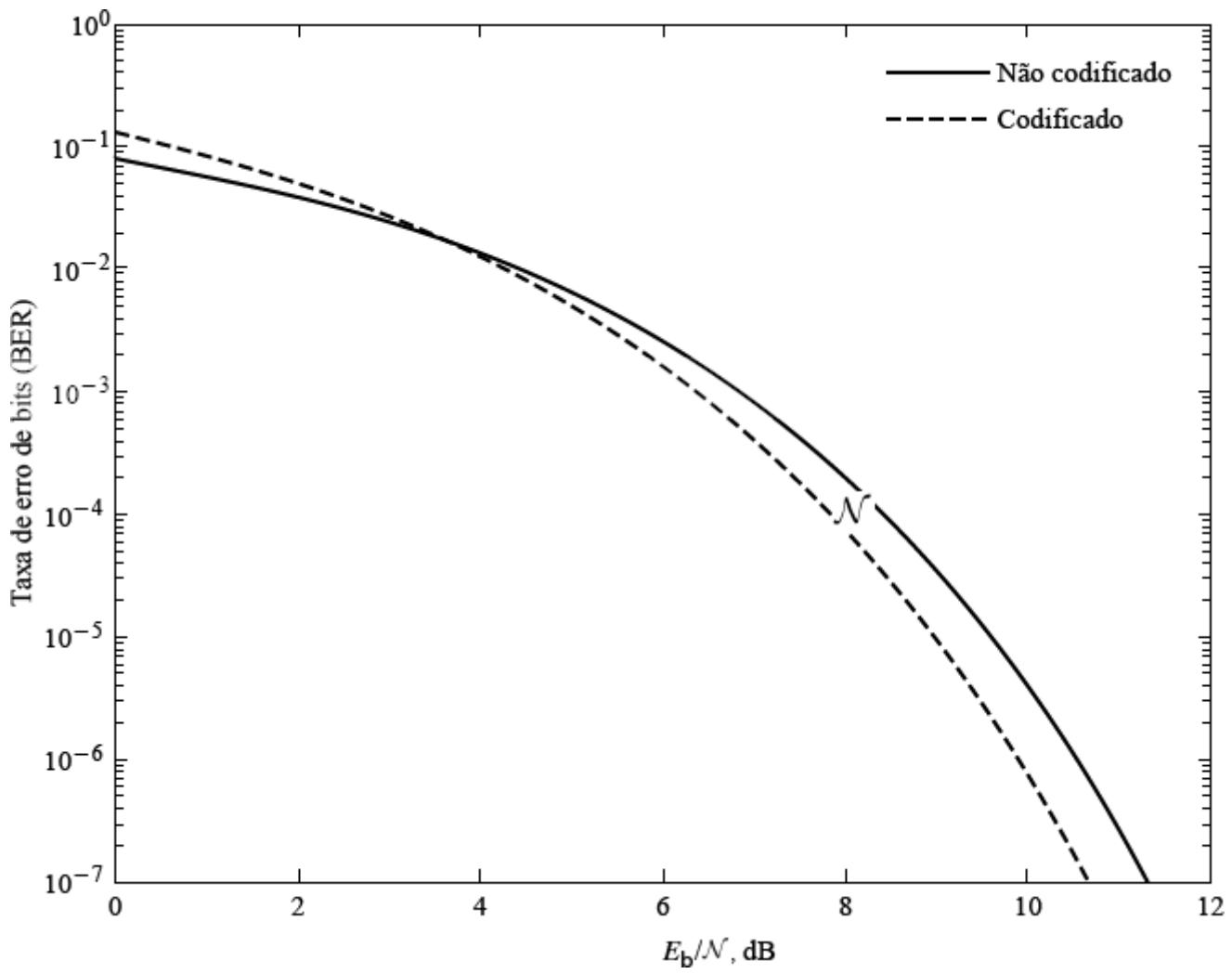


Figura 14.3

Comparação de desempenho de sistemas codificado (linha tracejada) e não codificado (linha cheia).

Vale ressaltar que, na Fig. 14.3, o desempenho do sistema codificado é, na verdade, uma aproximação ligeiramente otimista. A razão é que, na análise da taxa de erro de bits, admitimos que o decodificador não tomará qualquer ação quando o número de erros em cada palavra de código for maior que t . Na prática, o decodificador jamais sabe quantos erros existem em uma palavra de código. Assim, o decodificador sempre tentará corrigir a palavra de código, supondo que não existam mais que t erros de bit. Isso significa que, quando há mais que t erros de bit, o processo de decodificação pode até aumentar o número de erros. Esse efeito contraprodutivo da decodificação é mais provável para alta P_e em baixa E_b/\mathcal{N} . Esse efeito será explorado mais adiante, na Seção 14.13, um exercício com o MATLAB.

Exemplo 14.6 Comparemos o desempenho de um BSC com AWGN que usa um código (15, 11) corretor de erro simples com o de um sistema similar que usa transmissão não codificada, dado que o sistema não codificado tem $E_b/\mathcal{N} = 9,0946$ e PSK coerente é usada na transmissão dos dados nos dois casos.

Da Eq. (14.31b),

$$P_{\text{eu}} = Q(\sqrt{18,1892}) = 1,0 \times 10^{-5}$$

e da Eq. (14.31a),

$$\begin{aligned} P_{\text{ec}} &= 14 \left[Q\left(\sqrt{\frac{11}{15}(18,1892)}\right) \right]^2 \\ &= 14(1,3 \times 10^{-4})^2 = 2,03 \times 10^{-7} \end{aligned}$$

Reparemos que, no sistema codificado, a probabilidade de erro de palavra é reduzida por um fator de 50. Se, com o sistema não codificado, desejarmos alcançar a mesma probabilidade de erro da transmissão codificada ($2,03 \times 10^{-7}$), devemos aumentar a potência transmitida. Seja o novo valor de E_b para alcançar $P_{eu} = 2,03 \times 10^{-7}$,

$$P_{eu} = Q\left(\sqrt{\frac{2E'_b}{N}}\right) = 2,03 \times 10^{-7}$$

O que requer $E'_b/N = 13,5022$. Em comparação com o valor original de 9,0946, isso significa o aumento por um fator 1,4846 ou 1,716 dB.

Códigos para Detecção e Correção de Erros em Rajada

Até aqui, consideramos a detecção ou correção de erros que ocorrem em posições de dígitos de modo independente ou aleatório. Em alguns canais, perturbações podem eliminar todo um bloco de dígitos. Por exemplo, uma queda de raio ou uma perturbação elétrica produzida pelo homem pode afetar vários dígitos transmitidos adjacentes. Em sistemas de armazenamento magnético, defeitos em materiais magnéticos podem afetar um bloco de dígitos. Erros em rajada são aqueles que apagam alguns ou todos os dígitos de um conjunto sequencial. Em geral, códigos corretores de erros aleatórios não são eficientes para a correção de erros em rajada. Portanto, **códigos corretores de erros em rajada** especiais são usados para esse propósito.

Uma rajada de comprimento b é definida como uma sequência de dígitos em que o primeiro e o b -ésimo dígitos estão, seguramente, em erro, e os $b - 2$ dígitos intermediários podem ser corretos ou estar em erro. Por exemplo, um vetor de erro $e = 0010010100$ tem uma rajada de comprimento 6.



Figura 14.4
Detecção de erros em rajada.

Pode ser mostrado que, para a detecção de todos os erros em rajada de comprimento b ou menor com um código de blocos linear de comprimento n , b bits de verificação de paridade são necessários e suficientes.³ Para provar a suficiência desse teorema, construimos um código de comprimento n , com b dígitos de verificação de paridade, que detecte uma rajada de comprimento b .

Para construir um código como esse, agrupemos k dígitos de dados em segmentos de b dígitos de comprimento (Fig. 14.4). A isso, adicionamos um último segmento de b dígitos de verificação de paridade, determinados como mostrado a seguir. A soma em módulo 2 dos i -ésimos dígitos de cada segmento (incluindo o segmento de verificação de paridade) deve ser zero. Por exemplo, os primeiros dígitos nos cinco segmentos de dados são 1, 0, 1, 1 e 1. Portanto, para que a soma em módulo 2 seja zero, devemos adicionar um 0 como o primeiro dígito de verificação de paridade. Prosseguimos dessa forma com o segundo dígito, com o terceiro dígito, e assim por diante, até o b -ésimo dígito. Como os dígitos de verificação de paridade são uma combinação linear de dígitos de dados, esse é um código de blocos linear. Além disso, é um código sistemático.

É uma tarefa simples comprovar que, se uma sequência de comprimento b ou menor estiver em erro, a paridade será violada e o erro será detectado (mas não será corrigido), e o receptor pode solicitar retransmissão dos dígitos perdidos. Uma das interessantes propriedades desse código é que b , o número de dígitos de verificação de paridade, independe de k (ou de n), o que o torna um código muito útil para sistemas como comutação por pacotes, em que os dígitos de dados podem variar de pacote a pacote. Pode ser mostrado que um código linear com b dígitos de verificação de paridade detecta não apenas todas as rajadas de comprimento b ou menor, mas também uma alta porcentagem de rajadas mais longas.³

Caso nosso interesse seja a correção e não a detecção de erros em rajada, precisaremos do dobro do número de dígitos de verificação de paridade. Segundo o raciocínio baseado na esfera de Hamming, para corrigir todos os erros em rajada de comprimento b ou menor, um código de blocos linear deve ter pelo menos $2b$ dígitos de verificação de paridade.³

14.6 CÓDIGOS CONVOLUCIONAIS

Códigos convolucionais (ou recorrentes), introduzidos em 1955,⁴ diferem de códigos de blocos pelos aspectos comentados a seguir. Em um bloco de código, o bloco de n dígitos de código gerado pelo codificador em uma dada unidade de tempo depende apenas do bloco de k dígitos de dados de entrada na unidade de tempo em questão. Em um código convolucional, o bloco de n dígitos de código gerado pelo codificador em uma dada unidade de tempo depende não apenas do bloco de k dígitos de mensagem na unidade de tempo em questão, mas também dos dígitos de dados em um intervalo anterior de $N - 1$ ($N > 1$) unidades de tempo. Em códigos convolucionais, k e n são, em geral, pequenos. A codificação é implementada com facilidade por meio de registradores de deslocamento. Como uma classe, códigos convolucionais são de codificação mais simples.

14.6.1 Codificador Convolucional

Um codificador convolucional com **comprimento de restrição** N consiste em um registrador de deslocamento de N estágios e ℓ somadores em módulo 2. A Fig. 14.5 mostra um codificador para o caso $N = 3$ e $\ell = 2$. Os dígitos de mensagem são aplicados à entrada do registrador de deslocamento. A sequência de dígitos codificados é obtida na saída do comutador. O comutador amostra os ℓ somadores em módulo 2 em sequência, uma vez a cada intervalo de bit de entrada. Para explicar essa operação, consideremos **11010** como dígitos de entrada.

Inicialmente, todo o conteúdo do registrador é de **0s**. No tempo $k = 1$, o primeiro dígito de dado **1** entra no registrador. O conteúdo d_k mostra **1** e todos os outros conteúdos $d_{k-1} = 0$ e $d_{k-2} = 0$ permanecem inalterados. Os dois somadores em módulo 2 mostram a saída do codificador $v_{k,1} = 1$ e $v_{k,2} = 1$ para esse dado de entrada. O comutador amostra essa saída. Assim, a saída do codificador é **11**. Em $k = 2$, o segundo bit de mensagem **1** entra no registrador. Esse bit entra no registrador no estágio d_k ; o conteúdo anterior **1** de d_k é, agora, deslocado para d_{k-1} , e d_{k-2} permanece **0**. Com isso, os somadores em módulo 2 mostram $v_{k,1} = 0$ e $v_{k,2} = 1$. Logo, a saída do codificador é **01**. Da mesma forma, quando o dígito seguinte **0** entra no registrador, temos $d_k = 0$, $d_{k-1} = 1$ e $d_{k-2} = 1$, de modo que a saída do decodificador é **01**.

Observemos que cada dígito de dado influencia N grupos de ℓ dígitos na saída (no caso em consideração, três grupos de dois dígitos). O processo continua até que o último dígito de dado entre no estágio d_k ^{*}. No entanto, não podemos parar por aqui. Adicionamos $N - 1$ **0s** à sequência de entrada (dados fictícios ou aumentados) para garantir que o último dígito de dado (**0**, nesse exemplo) siga todo o caminho pelo registrador de deslocamento e influencie N grupos de ℓ dígitos. Assim, quando os dígitos de entrada forem **11010**, aplicamos (da esquerda para a direita) **1101000**, que contém $N - 1$ zeros aumentados à entrada do registrador de deslocamento. Podemos ver que, quando o último dígito da sequência de mensagem aumentada entrar em d_k , o último dígito da sequência de mensagem terá passado por todos os N estágios do registrador. O leitor pode comprovar que a saída do codificador é dada por **11010100101100**. Portanto, para cada k dígitos de dados, existe um total de $n = (N + k - 1)\ell$ dígitos na saída codificada. Na prática, $k \gg N$ e há, então, aproximadamente $k\ell$ dígitos de saída codificada para cada k dígitos de dados, o que corresponde a uma taxa $\eta \approx 1/\ell$ ^{**}.

Pode ser visto que, em contraste com o codificador de blocos, o codificador convolucional opera de modo contínuo, e cada dígito de dado influencia N grupos de ℓ dígitos na saída.

Árvore de Código

O processo de codificação e decodificação é consideravelmente facilitado pela chamada **árvore de código**, que mostra a saída codificada para qualquer sequência possível de dígitos de dados. A árvore de código para o codificador na Fig. 14.5, com $k = 5$, é mostrada na Fig. 14.6. Quando o primeiro dígito for **0**, a saída do codificador será **00**; quando for **1**, a saída será **11**. Isso é mostrado pelos dois ramos da árvore que nascem no nó inicial. O ramo superior representa **0** e o inferior, **1**. Essa convenção será obedecida daqui em diante. No nó terminal de cada um dos dois ramos, seguimos um procedimento similar, correspondente ao segundo dígito de dado. Assim, dois ramos nascem de cada nó: o ramo superior para **0** e o inferior, para **1**. Isso tem prosseguimento até o k -ésimo dígito de dado. A partir daí, todos os dígitos de entrada são **0** (dígitos aumentados), e teremos apenas um ramo até o fim. Portanto, há um total de 32 (ou 2^k) saídas, correspondentes aos 2^k possíveis vetores de dados. A saída codificada para a entrada **11010** pode ser lida com facilidade dessa árvore (percurso em linha tracejada na Fig. 14.6).

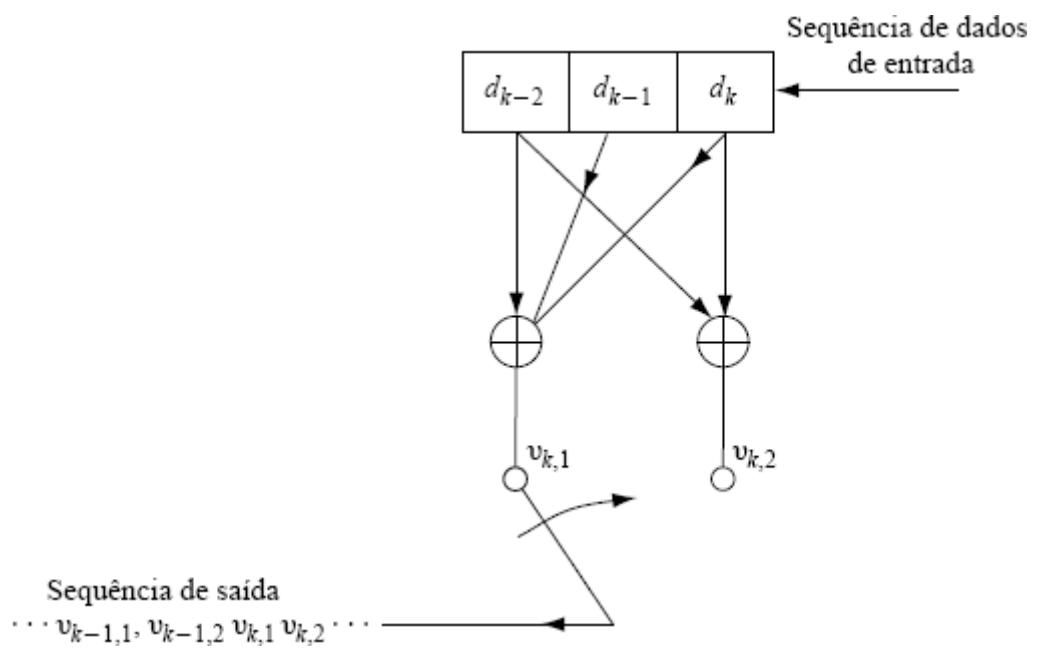


Figura 14.5
Codificador convolucional.

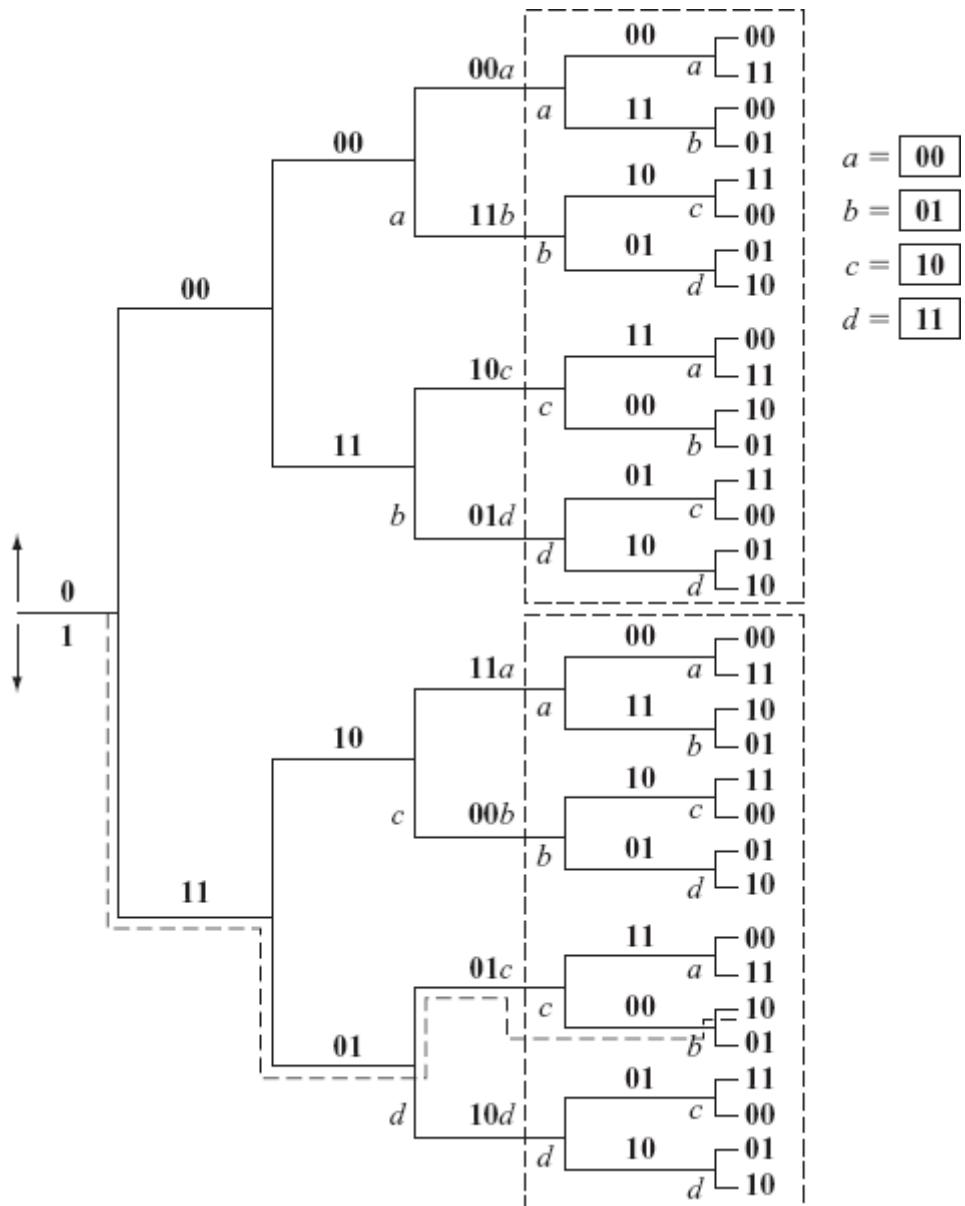


Figura 14.6
Árvore de código para o codificador na Fig. 14.5.

A Fig. 14.6 mostra que a árvore de código se torna repetitiva após o terceiro ramo. Podemos chegar a essa conclusão observando que os dois blocos envolvidos por linhas tracejadas são idênticos. Isso significa que a saída correspondente ao quarto dígito de entrada é a mesma, seja o primeiro dígito **1** ou **0**. Esse resultado não é surpresa, pois, quando o quarto dígito de entrada chega ao registrador de deslocamento, o primeiro dígito de entrada é deslocado para fora do registrador e deixa de influenciar os dígitos de saída. Em outras palavras, o vetor de dados $1x_1x_2x_3x_4\dots$ e o vetor de dados $0x_1x_2x_3x_4\dots$ geram a mesma saída após o terceiro grupo de dígitos de saída. É conveniente marcar os quatro nós de terceiro nível (os nós que aparecem no início do terceiro ramo) como *a*, *b*, *c* e *d* (Fig. 14.6). A estrutura repetitiva tem início nos nós de quarto nível e continua nos nós de quinto nível, cujo comportamento é semelhante aos dos nós *a*, *b*, *c* e *d* no terceiro nível. Assim, marcamos os nós nos quarto e quinto níveis como *a*, *b*, *c* ou *d*. Isso significa que, nos nós de quinto nível, os primeiros dois dígitos de dados se tornaram irrelevantes; ou seja, qualquer uma das quatro combinações (**11**, **10**, **01** ou **00**) para os primeiros dois dígitos de dados resultará na mesma saída após o quinto nó.

Representação em Diagrama de Transição de Estados

O desempenho do codificador pode ser visto da perspectiva de uma máquina de estado finito com seu diagrama de transição de estados. Quando um bit de dado entra no registrador de deslocamento (em d_k), os bits de saída são determinados não apenas pelo bit de dado em d_k , mas também pelos dois bits de dados anteriores, que se encontram em d_{k-2} e d_{k-1} . Há quatro possíveis combinações dos dois dígitos anteriores (em d_{k-2} e d_{k-1}): **00**, **01**, **10** e **11**. Denominemos esses quatro estados *a*, *b*, *c* e *d*, respectivamente, como indicado na Fig. 14.7a. Portanto, quando os dois dígitos anteriores forem **01** ($d_{k-2} = 0$ e $d_{k-1} = 1$), o estado será *b*, e assim por diante. O número de estado é igual a 2^{N-1} .

Um bit de dado **0** ou **1** gera quatro saídas distintas, dependendo do estado do codificador. Se o bit de dado for **0**, a saída do decodificador será **00**, **10**, **11** ou **01** dependendo se o estado do codificador for *a*, *b*, *c* ou *d*. Do mesmo modo, se o bit de dado for **1**, a saída do decodificador será **11**, **01**, **00** ou **10** dependendo se o estado do codificador for *a*, *b*, *c* ou *d*. Esse comportamento pode ser expresso de forma concisa por meio do diagrama de transição de estados (Fig. 14.7b), um gráfico direcionado de quatro estados que representa a relação entrada-saída do codificador sem qualquer ambiguidade. Rotulemos cada rota de transição um rótulo constituído pelo bit de entrada sobre os bits de saída com:

$$\{d_k\}/\{v_{k,1} v_{k,2}\}$$

Assim, saberemos exatamente o bit de informação de entrada d_k para cada transição de estado e seus correspondentes bits da saída do codificador, $\{v_{k,1} v_{k,2}\}$.

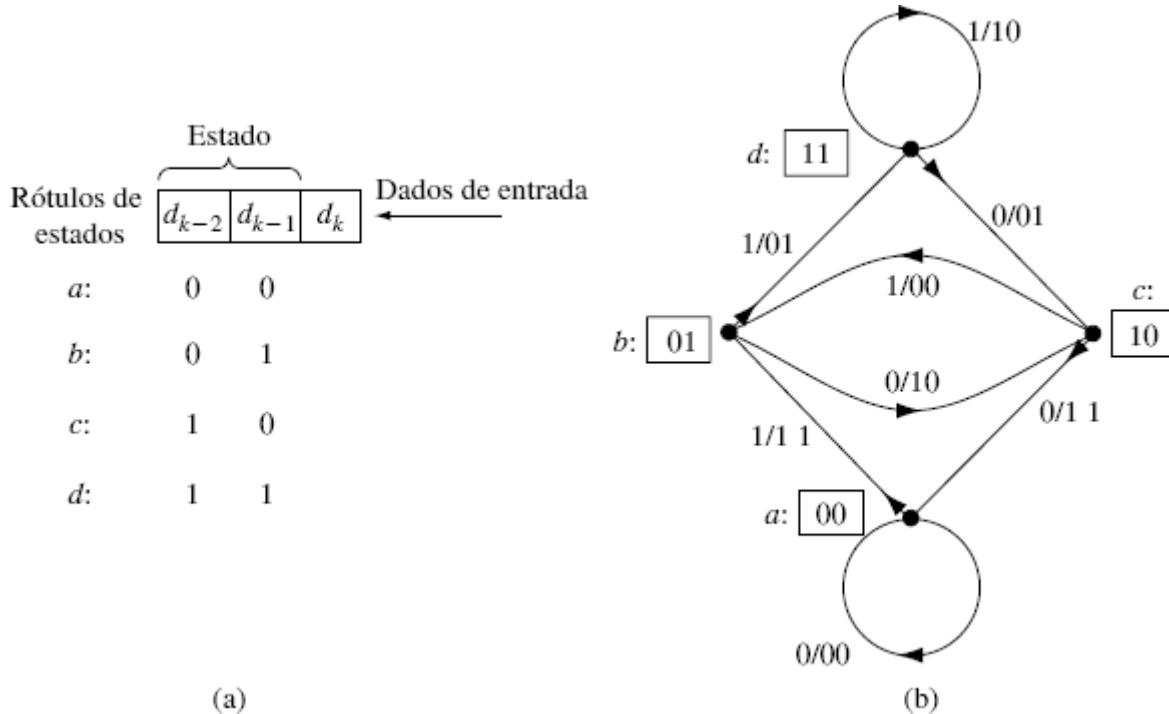


Figura 14.7

Diagramas de (a) estado e (b) de transição de estados do codificador na Fig. 14.5.

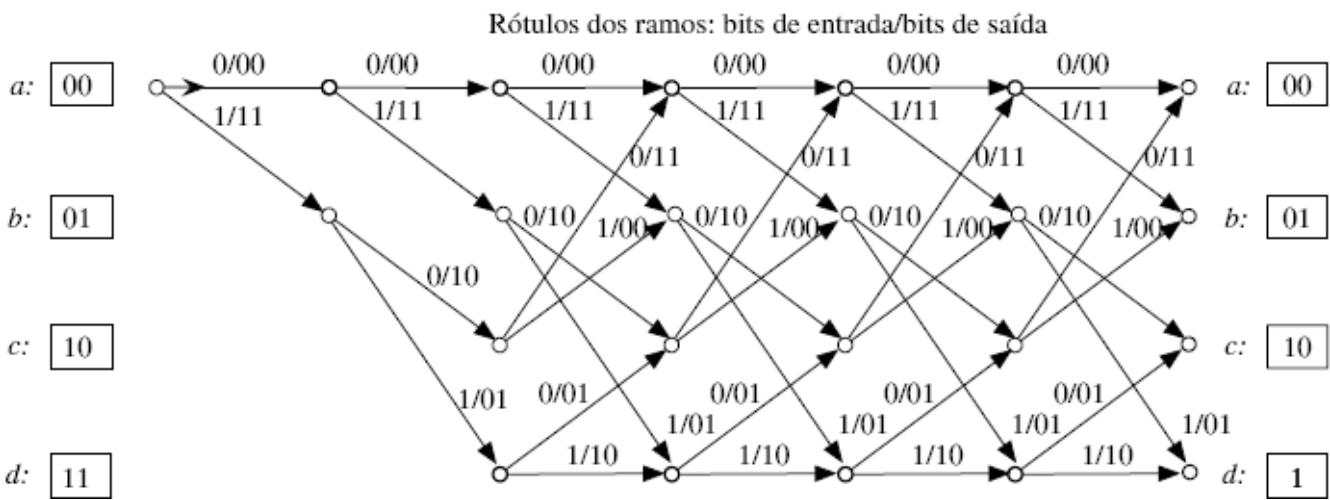


Figura 14.8

Diagrama em treliças para o codificador na Fig. 14.5.

Por exemplo, quando o codificador estiver no estado a e o bit de entrada for **1**, a saída do codificador será **11**. A rota de transição é marcada com o rótulo **1/11**. O codificador, então, passa ao estado b para o próximo bit de dado, pois, nesse ponto, os dois bits anteriores são $d_{k-2} = 0$ e $d_{k-1} = 1$. Dessa maneira, quando o codificador estiver no estado a e a entrada for **0**, a saída será **00** (linha cheia) e o codificador permanecerá no estado a . Reparemos que o codificador não pode passar diretamente do estado a para o estado c ou d . A partir de um dado estado qualquer, com a entrada de um bit de dado, o codificador pode passar apenas a dois estados diretamente. Essa é uma observação extremamente importante, e a usaremos mais adiante. O codificador passa do estado a ao estado b (quando a entrada é **1**) ou ao estado a (quando a entrada é **0**), e assim por diante. Todavia, o codificador não pode, em um único passo, ir de a para c : deve ir de a para b para c ou de a para b para d , e assim por diante. Esses fatos também podem ser comprovados da árvore de código. A Fig. 14.7c contém a informação completa da árvore de código.

Diagrama em Treliças

Outra forma útil de representar a árvore de código é o diagrama em treliças (Fig. 14.8). O diagrama começa da situação inicial (**0** em todos os registradores de deslocamento; ou seja, estado a) e faz as transições correspondentes a cada dígito de dado de entrada. Esses **ramos** de transição são rotulados como no diagrama de transição de estados. Assim, quando o primeiro dígito de entrada for **0**, a saída do codificador será **00** e o ramo da treliça recebe o rótulo **0/00**. Isso é visto com clareza na Fig. 14.7b. Prosseguimos dessa maneira com o segundo dígito de entrada. Após os dois primeiros dígitos de entrada, o codificador estará em um dos quatro estados a, b, c ou d , como indicado na Fig. 14.8. Se o codificador estiver no estado a (dois dígitos de entrada anteriores foram **00**), passará ao estado b se o próximo bit de entrada for **1**, e permanecerá no estado a se o próximo bit de entrada for **0**. Com isso, a saída do codificador será **11** (de a para b) ou **00** (de a para a). Reparemos que a estrutura do diagrama em treliças é completamente repetitiva, como esperado, e pode ser prontamente desenhado com o uso do diagrama de estados na Fig. 14.7b.

Vale ressaltar que o codificador convolucional pode ter ramos de realimentação. Na verdade, no codificador convolucional, a realimentação gera o chamado código recursivo. Como ilustrado na Fig. 14.9, o bit de dado pode ter a uma rota direta ao bit de saída. Os bits no ramo superior serão os bits de informação diretamente da entrada. Portanto, esse código é sistemático. Esse codificador leva ao código convolucional **sistemático** recursivo (RSC – *Recursive Systematic Convolutional code*). Pode ser mostrado (Exercício 14.5-3) que também é possível representar o codificador RSC por meio de um diagrama de transição de estados e por um diagrama em treliças. Por conseguinte, um código convolucional recursivo pode ser decodificado com uso dos métodos descritos a seguir para códigos convolucionais não recursivos.

14.6.2 Decodificação de Códigos Convencionais

Consideraremos duas técnicas importantes: (1) decodificação de máxima verossimilhança (algoritmo de Viterbi) e (2) decodificação sequencial. Embora as duas sejam conhecidas como decodificação de decisão rígida, o algoritmo de Viterbi (AV) é muito mais flexível e pode ser facilmente adaptado para acomodar entradas suaves e gerar decisões de saída suaves, a serem descritas mais adiante neste capítulo.

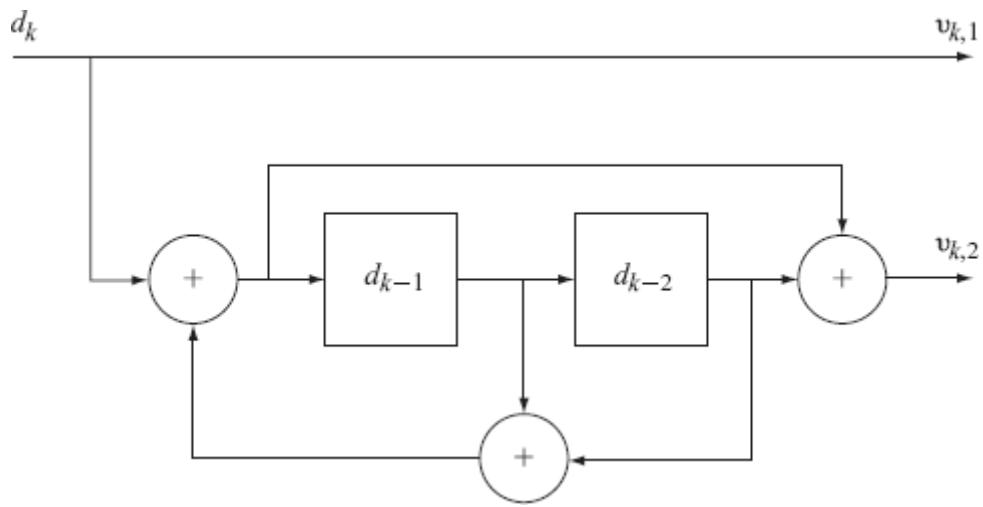


Figura 14.9

Codificador convolucional sistemático recursivo (RSC).

Decodificação de Máxima Verossimilhança: Algoritmo de Viterbi

Entre os vários métodos de decodificação para códigos convolucionais, o algoritmo de máxima verossimilhança de Viterbi⁵ é uma das melhores técnicas para comunicações digitais em que a complexidade computacional tem importância dominante. A técnica permite grande simplificação de equipamentos e, ao mesmo tempo, garante todos os benefícios de desempenho da decodificação de máxima verossimilhança. A estrutura do decodificador é relativamente simples para curtos comprimentos de restrição N , viabilizando a decodificação de taxas de até 10 Gbit/s.

Em canais AWGN, a máxima verossimilhança requer a seleção da palavra de código mais próxima da palavra recebida. Para uma longa sequência de dados recebidos, representando k bits de mensagem e 2^k palavras de código, a implementação direta da decisão de máxima verossimilhança (MLD – *maximum likelihood decision*) envolve o armazenamento de 2^k palavras e a comparação das mesmas com a sequência recebida. Essa exigência computacional representa uma grande carga para receptores MLD, pois, no caso de grandes valores de k , o número de bits em quadros de dados codificados convolucionalmente é, em geral, da ordem de centenas de milhares de bits!

Viterbi obteve uma grande simplificação para a MLD. Usemos o exemplo de código convolucional das Figs. 14.5 e 14.7 para ilustrar a operação básica do algoritmo de Viterbi. Primeiro, ressaltamos que cada rota no diagrama em treliças representa uma palavra de código válida. O objetivo da MLD é a determinação da melhor rota ao longo das treliças que seja **mais próxima** da sequência de bits recebida. Para entender isso, consideremos, mais uma vez, o diagrama em treliças na Fig. 14.8. O problema é o seguinte: dada uma sequência de bits recebida, precisamos encontrar a rota no diagrama em treliças cuja sequência de dígitos de saída apresente a melhor concordância com a sequência recebida. A rota correspondente à mínima distância (de Hamming) representa a sequência de máxima verossimilhança até o estágio i .

Como mostrado na Fig. 14.8, cada palavra de código é uma rota em treliça que deve ter início no estado **a (00)**. Como cada rota no estágio i deve crescer a partir de rotas no estágio $i - 1$, a rota ótima para cada estado no estágio i deve conter uma das melhores rotas a cada um dos quatro estados no estágio $i - 1$. Em resumo, a rota ótima a cada estado no estágio i descende das predecessoras no estágio $i - 1$. Todas as rotas ótimas no estágio $i + i_0$ descendem da rota ótima no estágio i . Portanto, em um dado estágio, apenas a **rota ótima** a cada estado deve ser armazenada. Não há razão para, em cada estágio, armazenar uma rota que não seja a ótima a cada estado, pois rotas não ótimas apenas aumentariam a métrica de distância de rota para a sequência de dados recebida.

No exemplo especial da Fig. 14.7, o correspondente diagrama em treliças (Fig. 14.8) mostra que cada um dos quatro estados (a , b , c , e d) tem somente dois predecessores; ou seja, cada estado pode ser alcançado a partir de apenas dois dos estados anteriores. Mais importante ainda, dado que, no estágio $i - 1$, existem apenas as quatro melhores rotas sobreviventes (uma para cada estado), no estágio i haverá somente duas rotas possíveis para cada estado. Portanto, com a comparação das distâncias totais de Hamming das duas rotas (em relação à sequência recebida), podemos determinar a rota ótima com a mínima distância de Hamming para cada estado no estágio i que corresponde a palavra de código mais próxima da sequência recebida, até o estágio i . A rota ótima a cada estado é conhecida como **rota sobrevivente**.

Exemplo 14.7 A seguir, estudaremos um exemplo de decodificação do algoritmo de Viterbi para a decodificação de máxima verossimilhança do código convolucional gerado pelo codificador da Fig. 14.5. Sejam **01 10 11 00 00 00** os primeiros 12 dígitos recebidos, como ilustrado na Fig. 14.10a–e. O cálculo da distância de Hamming em cada estágio fica facilitado se mostrarmos os dígitos recebidos juntamente com os bits de saída dos ramos.

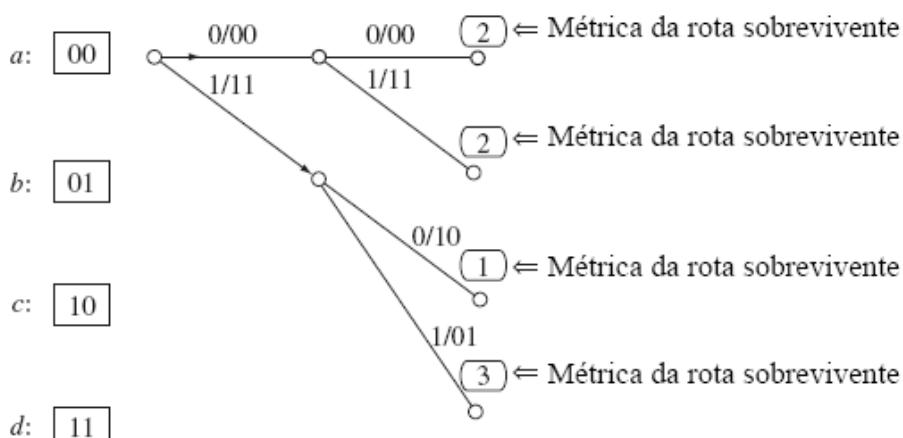
Começamos com o estado inicial a (**00**). Cada estágio do processo de decodificação consiste em determinar a rota ótima aos quatro estados, dados os 2 bits recebidos durante o estágio. Há dois estados possíveis que levam a cada estado em qualquer dos estágios. A rota sobrevivente com mínima distância de Hamming é mantida (linha cheia), enquanto outras rotas com distâncias maiores são descartadas (linha tracejada). No final de um estágio, a distância de Hamming da rota sobrevivente a cada um dos quatro estados é rotulada.

- Após dois estágios, há exatamente uma rota (sobrevivente) ótima a cada estado (Fig. 14.10a). As distâncias de Hamming das rotas sobreviventes são rotuladas como 2, 2, 1 e 3, respectivamente.
- Cada estado no estágio 3 tem duas rotas possíveis (Fig. 14.10b). Mantemos a rota ótima com a distância mínima (linha cheia). As distâncias das duas rotas possíveis (de cima para baixo) que chegam a cada estado recebem o rótulo de minimização. Por exemplo, para o estado a , a primeira rota (linha tracejada partindo de a) tem distância de Hamming $2 + 2 = 4$, enquanto a segunda rota (linha cheia partindo de c) tem distância $1 + 0 = 1$.
- Repetimos o segundo passo para os estágios 4, 5 e 6, como ilustrado na Fig. 14.10c-e.
- A rota ótima **final**, após o estágio 6, é identificada como a rota em linha cheia sombreada, com distância mínima 2 e terminando no estado a , como mostrado na Fig. 14.10e. Assim, a saída MLD deve ser

$$\text{Palavra de código: } \mathbf{11\ 10\ 11\ 00\ 00\ 00} \quad (14.32a)$$

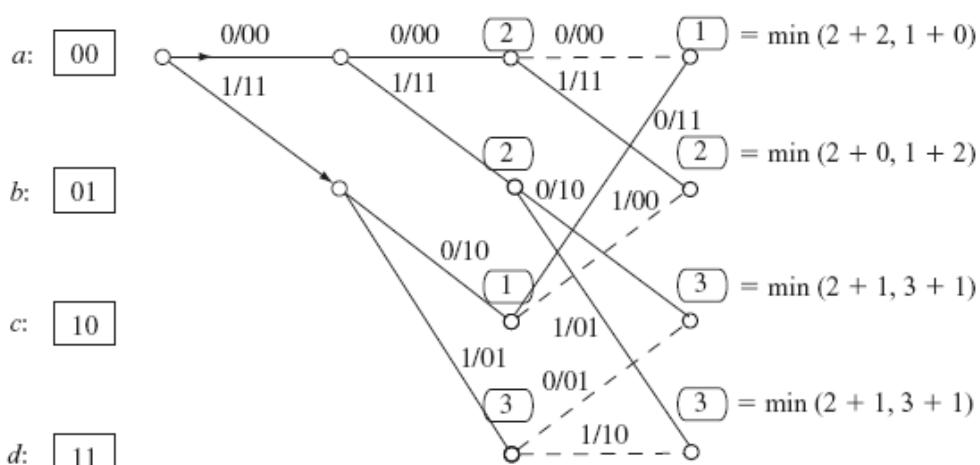
$$\text{Bits de informação: } \mathbf{1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0} \quad (14.32b)$$

Bits recebidos	01	10	11	10	00	00	...
----------------	----	----	----	----	----	----	-----



(a)

Bits recebidos	01	10	1	1	10	00	00	...
----------------	----	----	---	---	----	----	----	-----



(b)

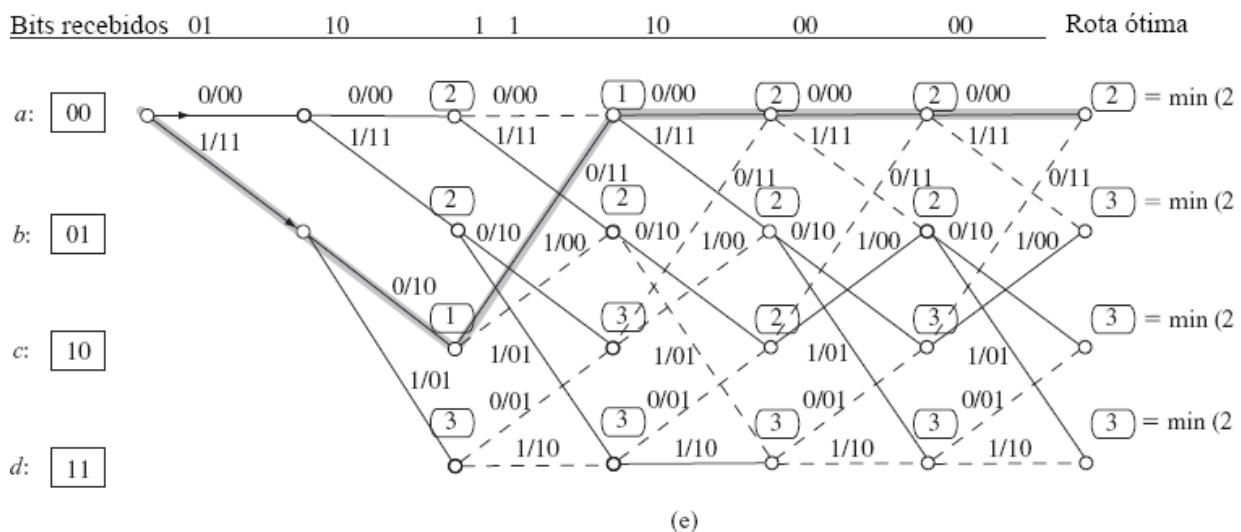
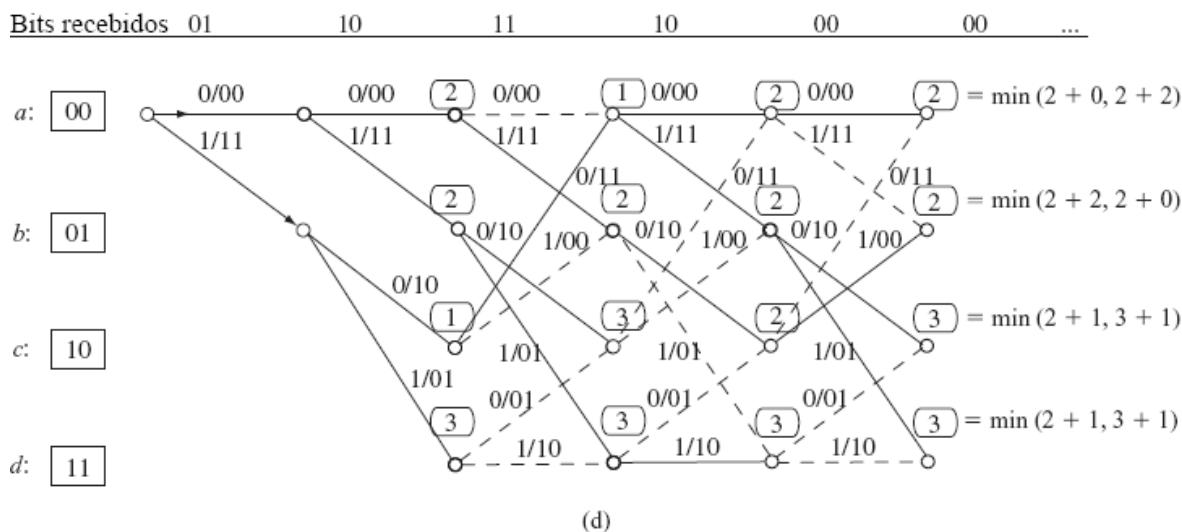
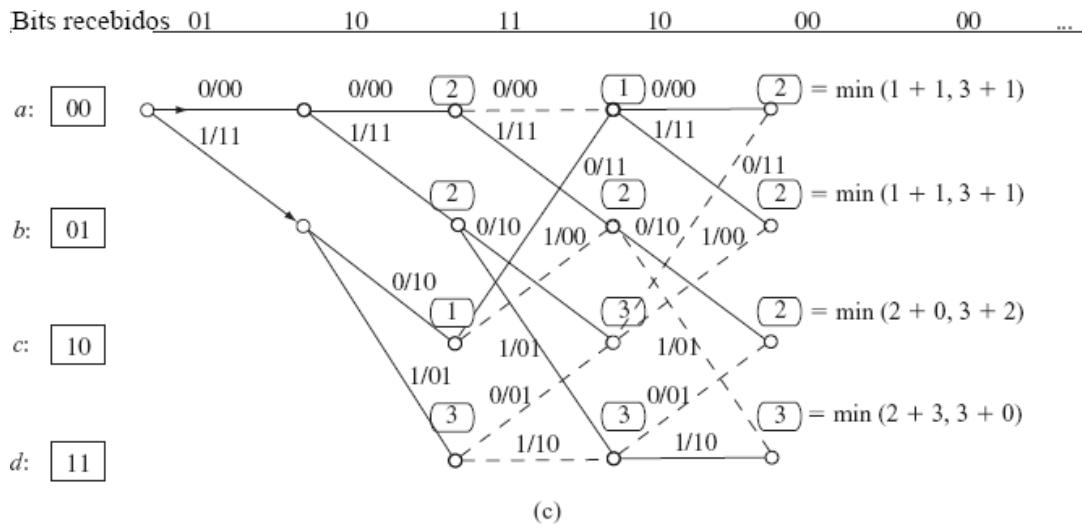


Figura 14.10

Decodificação de Viterbi do exemplo na Fig. 14.5: (a) estágios 1 e 2; (b) estágio 3; (c) estágio 4; (d) estágio 5; (e) estágio 6.

Reparemos que, até o final do estágio 6, há apenas quatro rotas competidoras (as quatro sobreviventes nos estados *a*, *b*, *c* e *d*). Até o estágio 3, todas as quatro rotas se fundem. Isso significa que as primeiras três seleções de ramos são as mais confiáveis. Na verdade, a continuação do algoritmo de Viterbi com dígitos recebidos adicionais **não** alterará os primeiros três ramos e as correspondentes saídas do decodificador.

No exemplo anterior, ilustramos como avançar de um estágio ao seguinte por meio da determinação da rota ótima (sobrevivente) que leva a cada um dos estados. Quando as rotas sobreviventes se fundem, os ramos fundidos representam as saídas MLD **mais confiáveis**. No caso dos últimos estágios, que não apresentam uma rota fundida, podemos tomar uma decisão de máxima verossimilhança com base nos bits recebidos até o estágio em questão. Esse processo, conhecido como truncamento, é projetado para forçar uma decisão por uma das rotas sobreviventes sem resultar em grande atraso de decodificação. Uma forma de tomar uma decisão truncada consiste em selecionar a rota de distância mínima, como na Eq. (14.32). Uma alternativa é tirar proveito de informação adicional de palavra de código. Na Fig. 14.10e, se o decodificador sempre forçar que os dois últimos dígitos sejam **00**, podemos considerar apenas a rota sobrevivente que termina no estado a .

Com o algoritmo de Viterbi, as complexidades de armazenamento e de computação são proporcionais a 2^{N-1} e são muito atraentes para comprimentos de restrição $N < 10$. Para alcançar probabilidades de erros muito baixas, é necessário o uso de comprimentos de restrição mais longos, o que pode tornar a decodificação sequencial (discutida a seguir) interessante.

Decodificação Sequencial

Na decodificação sequencial, uma técnica proposta por Wozencraft, a complexidade do decodificador aumenta linearmente e não exponencialmente. Para explicar essa técnica, consideremos um codificador com $N = 4$ e $\ell = 3$ (Fig. 14.11). A árvore de código para esse codificador é mostrada na Fig. 14.12. Cada dígito de dado gera três ($\ell = 3$) dígitos de saída, mas afeta quatro grupos de três dígitos (12 dígitos) ao todo.

No esquema de decodificação, para tomar uma decisão, observamos apenas três (ou ℓ) dígitos de cada vez, com disposição para alterar a decisão caso a mesma crie dificuldades mais adiante. Um detector sequencial age como um motorista que, ocasionalmente, toma uma decisão errada em uma bifurcação na estrada, mas logo se dá conta do erro (devido aos sinais na beira da estrada), retorna e segue pela outra rota.

Aplicando essa ideia a nosso problema de decodificação, o procedimento análogo seria o descrito a seguir. Examinamos os primeiros três dígitos. Há apenas duas rotas de três dígitos a partir do nó inicial n_1 . Escolhemos a rota cuja sequência estiver à menor distância de Hamming dos primeiros três dígitos recebidos. Com isso, avançamos para o nó mais provável. Partindo desse nó, há duas rotas de três dígitos. Examinamos o segundo grupo de três dígitos recebidos e escolhemos a rota cuja sequência for a mais próxima dos dígitos recebidos. Progridimos dessa forma até o quarto nó. Se tivermos a infelicidade de cometer um grande número de erros em certo grupo recebido de ℓ dígitos, tomaremos uma rota errada e, a partir daí, teremos crescente dificuldade para casar os dígitos recebidos com os encontrados ao longo das rotas disponíveis do nó em erro. Essa é a pista para reconhecer que um erro foi cometido. Expliquemos isso com um exemplo.

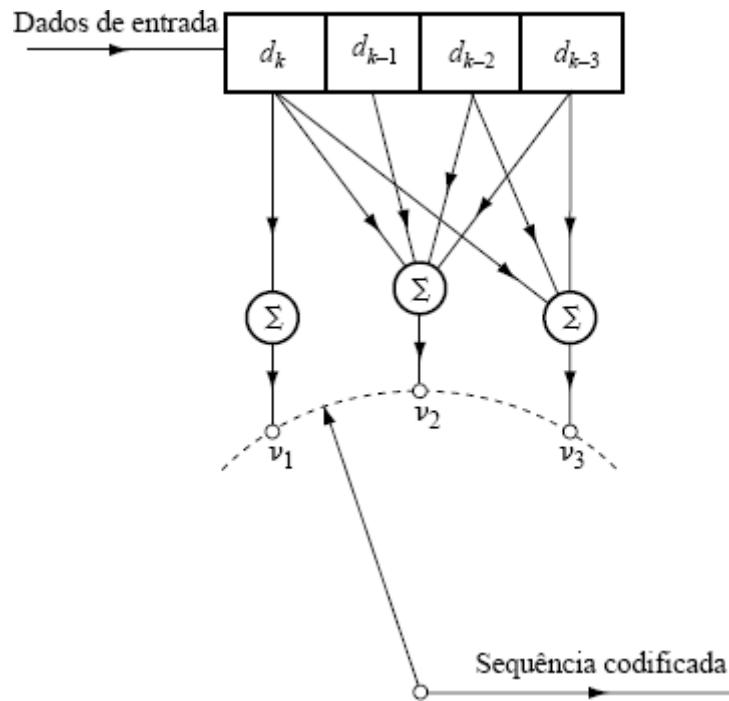


Figura 14.11
Codificador convolucional.

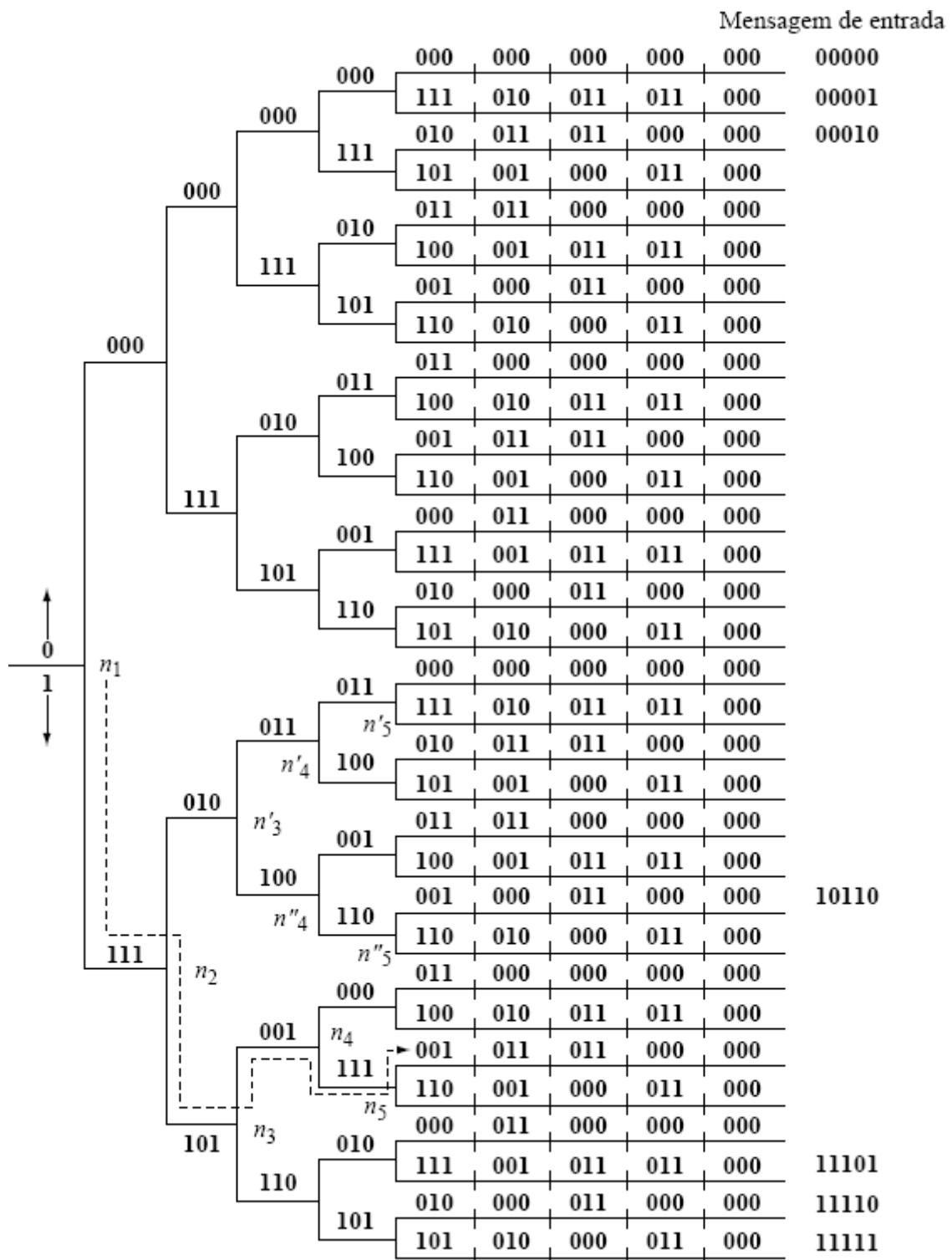


Figura 14.12
Árvore de código para o codificador na Fig.14.11.

Suponhamos que a sequência de dados **11010** seja codificada pelo codificador na Fig. 14.11. Como $N = 4$, adicionamos três **0s** fictícios a essa sequência, de modo que a sequência aumentada é **11010000**. A sequência codificada será (ver árvore de código na Fig. 14.12)

111 101 001 111 001 011 011 000

Admitamos que a sequência recebida seja

101 011 001 111 001 011 011 000

Há três bits em erro: um no primeiro grupo e dois no segundo. Começamos com o nó inicial n_1 . Como o primeiro grupo recebido **101** (um erro) é mais próximo de **111**, tomamos a decisão correta e passamos ao nó n_2 . O segundo grupo (dois erros) é mais próximo de **010** que de **101**, e nos levará ao nó errado e não ao nó n_3 . A partir daí, estamos no caminho errado e, portanto, os

dígitos recebidos não casarão qualquer rota com início em n'_3 . O terceiro grupo recebido é **001**, que não casa com qualquer sequência com início em (**011** e **100**), mas é mais próximo de **011**. Assim, passamos ao nó n'_4 . Aqui, o quarto grupo recebido **111** também não casa com qualquer grupo com início em (**011** e **100**), mas é mais próximo de **011**. Isso nos leva ao nó n'_5 . Podemos ver que a distância de Hamming entre a sequência de 12 dígitos ao longo da rota $n_1 n_2 n'_3 n'_4 n'_5$ e os primeiros 12 dígitos é 4, indicando 4 erros em 12 dígitos (caso nossa quarta rota esteja correta). Esse grande número de erros deveria nos deixar desconfiados. Denotando a probabilidade de erro por P_e , o esperado número de erros em d dígitos fica dado por $P_e d$. Como P_e é da ordem de 10^{-4} a 10^{-6} , não é razoável obter quatro erros em 12 dígitos. Portanto, retornamos ao n'_3 e tentamos o ramo inferior, o que nos leva a n''_5 . Essa rota, $n_1 n_2 n'_3 n''_4 n''_5$, é ainda pior que a anterior: produz cinco erros em 12 dígitos. Assim, retornamos um pouco mais, até o nó n_2 , e tentamos a rota que leva a n_3 e além. Observamos que a rota $n_1 n_2 n_3 n_4 n_5$ produz três erros. Isso nos permite decodificar o primeiro dígito transmitido como **1**. A seguir, iniciamos no nó n_2 , descartamos os três primeiros dígitos recebidos e repetimos o procedimento para decodificar o segundo dígito transmitido. Repetimos isso até que todos os dígitos sejam decodificados.

A próxima questão importante diz respeito ao critério de decisão no caso da escolha de uma rota errada. O gráfico do número esperado de erros n_e em função do número de dígitos decodificados d é uma linha reta ($n_e = P_e d$), com inclinação P_e , como mostrado na Fig. 14.13. O real número de erros ao longo da rota também é representado nessa figura. Caso os erros permaneçam dentro de certo limite (o nível de descarte), a decodificação prossegue. Caso, em algum ponto, os erros ultrapassem o nível de descarte, retornamos ao mais próximo nó de decisão e tentamos uma rota alternativa. Caso o número de erros ainda ultrapasse o nível de descarte, retornamos mais um nó ao longo da rota e tentamos uma rota alternativa. O processo continua até que os erros fiquem dentro do limite especificado. Se tomarmos um nível de descarte muito restritivo (próximo à curva de erro esperado), reduzimos o número médio de cálculos. Todavia, se o nível de descarte for demasiadamente restritivo, em alguns casos, extremamente raros de um número excessivo de erros devido a ruído, o decodificador descartará todas as rotas possíveis. Em geral, essa dificuldade é resolvida iniciando com um nível de descarte restritivo. Se, em raras ocasiões, o decodificador rejeitar todas as rotas, o nível de descarte pode ser relaxado, pouco a pouco, até que uma das rotas seja aceitável.

Pode ser mostrado que, nesse esquema, a probabilidade de erro decresce exponencialmente com N , enquanto a complexidade do sistema cresce linearmente com k . A taxa de código é $\eta \approx 1/\ell$. Também pode ser mostrado que, para $\eta < \eta_o$, o número médio de ramos incorretos explorados por dígito decodificado é limitado, mas deixa de ser quando $\eta > \eta_o$; por isso, η_o recebe a denominação de taxa de corte computacional.

A decodificação sequencial tem diversas desvantagens:

1. O número de ramos de rotas incorretas e, consequentemente, a complexidade computacional são variáveis aleatórias que dependem do ruído de canal.
2. Para aliviar os requisitos de armazenagem, a velocidade de decodificação pode ser mantida de 10 a 20 vezes maior que a taxa de dados de entrada. Isso limita a capacidade máxima de taxa de dados.
3. O número médio de ramos pode, ocasionalmente, se tornar muito grande e resultar em *overflow* de armazenagem, fazendo com que sequências longas sejam apagadas.

Uma terceira técnica para a decodificação de códigos convolucionais é a **decodificação com realimentação**, da qual a decodificação por limiar⁶ é uma subclasse. Decodificadores de limiar são implementados com facilidade. Contudo, o desempenho dos mesmos não se compara favoravelmente com os dos dois métodos anteriores.

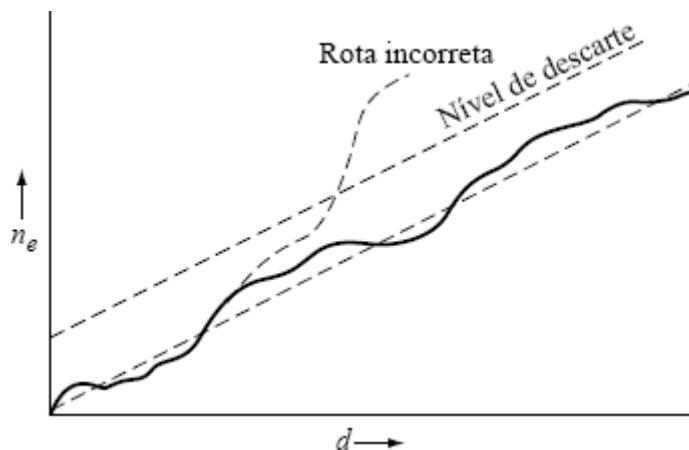


Figura 14.13
Estabelecimento do limiar na decodificação sequencial.

Assim como diagrama em treliças guarda uma relação simples e direta com código convolucional, um diagrama em treliças de síndrome pode ser construído para um código de blocos (n, k) linear binário, segundo sua matriz de verificação de paridade⁷ \mathbf{H} . A construção pode ser enunciada da seguinte maneira:

- Seja (c_1, c_2, \dots, c_n) uma palavra de código do código de blocos.
- Seja \mathbf{H} = a matriz de verificação de paridade $(n - k) \times n$, de colunas .
- Há $\min(2^k, 2^{n-k})$ estados possíveis no diagrama em treliças.
- O estado de uma palavra de código no instante i é determinado pela palavra de código e pela matriz de verificação de paridade, do primeiro ao i -ésimo bit da palavra de código:

$$z_i = c_1 \vec{h}_i \oplus c_2 \vec{h}_2 \oplus \cdots \oplus c_i \vec{h}_i. \quad (14.33)$$

Reparemos que, em geral, esse diagrama em treliças de síndrome, em contraste com o diagrama em treliças do código convolucional, não é repetitivo. Na verdade, o diagrama sempre tem início no estado “zero” e termina no estado “zero”. Esse diagrama em treliças é, de fato, um diagrama em treliças variante no tempo. Usemos um exemplo para ilustrar a construção de um diagrama em treliças de síndrome.

Exemplo 14.8 Consideremos um código $(7, 4, 3)$ de Hamming, com matriz de verificação de paridade

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14.34)$$

Esbocemos o diagrama em treliças para esse código de blocos.

Para esse código, há 3 bits de síndrome de erro, definindo um total de $2^3 = 8$ estados. Denotemos os oito estados por $(S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7)$. Há um total de $2^k = 2^4 = 16$ palavras de código de 7 bits de códigos no espaço nulo da matriz de verificação de paridade \mathbf{H} . Se numerarmos as 16 palavras de códigos, podemos seguir a Eq. (14.33) para determinar todas as rotas no diagrama em treliças.

O correspondente diagrama em treliças variante no tempo é mostrado na Fig. 14.14. Reparemos que cada rota está associada a uma palavra de código. Sempre iniciamos no estado S_0 e terminamos no estado S_0 . Aqui, em contraste com o caso do código convolucional, não é necessário rotular os ramos em treliça. Sempre que há uma transição entre estados distintos, o ramo automaticamente corresponde a um bit de código “1”. Quando o estado permanece inalterado, o ramo de transição corresponde a um bit de código “0”.

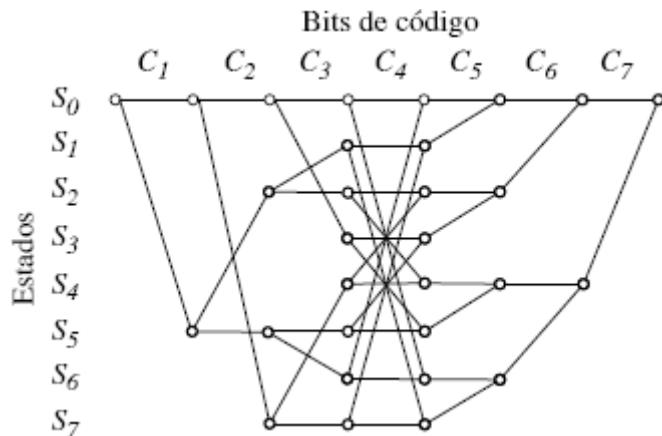


Figura 14.14

Diagrama em treliças de um código $(7, 4, 3)$ de Hamming com a matriz de verificação de paridade da Eq. (14.34).

Uma vez que tenhamos um diagrama em treliças, o algoritmo de Viterbi pode ser implementado para a MLD do código de blocos com complexidade reduzida. A detecção de máxima verossimilhança de códigos de blocos pode ter desempenho melhor que o da decodificação baseada em síndrome. Devemos ter em mente que o exemplo anterior corresponde a um código curto, que não se beneficia da decodificação de Viterbi. É claro que o algoritmo de Viterbi faz mais sentido na decodificação de um código longo.

14.8 COMBINAÇÃO E ENTRELAÇAMENTO DE CÓDIGOS

Códigos simples e curtos podem ser combinados de várias maneiras para gerar códigos mais longos e poderosos. Há, sem dúvida, numerosas formas possíveis para a combinação de múltiplos códigos. Nesta seção, apresentamos uma breve descrição dos métodos mais comuns para a construção de códigos pela combinação de códigos.

Entrelaçamento de Códigos para a Correção de Erros em Rajada e Aleatórios

Uma das ferramentas mais simples e efetivas para a combinação de códigos é o entrelaçamento, o processo de reordenar ou embaralhar (múltiplas) palavras de códigos geradas pelo codificador. Com isso, uma rajada de erros de bits afetará múltiplas palavras de código e não apenas uma. O propósito do entrelaçamento é a dispersão de uma grande rajada de erros em diversas palavras de código, de modo que cada palavra de código precise corrigir somente uma fração dos erros em rajada. A motivação para isso é que, em geral, códigos corretores de erros aleatórios são projetados para tratar erros esporádicos em cada palavra de código. No entanto, na maioria dos sistemas práticos, ocorrem os dois tipos de erro. Entre os métodos propostos para a correção simultânea de erros aleatórios e em rajada, o entrelaçamento é simples e eficaz.

Para um código (n, k) , se entrelaçarmos λ palavras de código, obteremos o chamado **código entrelaçado** ($\lambda n, \lambda k$). Em vez de transmitir uma palavra de código de cada vez, agrupamos λ palavras de código e as entrelaçamos. Consideremos, por exemplo, o caso $\lambda = 3$ e um código $(15, 8)$ corretor de dois erros. Cada palavra de código tem 15 dígitos. Agrupamos palavras de código para que sejam transmitidas em grupos de três. Suponhamos que as três primeiras palavras de código a serem transmitidas sejam $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{15})$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{15})$ e $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_{15})$. Ao invés de transmitirmos \mathbf{xyz} em sequência como $x_1, x_2, \dots, x_{15}, y_1, y_2, \dots, y_{15}, z_1, z_2, \dots, z_{15}$, transmitimos $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, \dots, x_{15}, y_{15}, z_{15}$. Isso pode ser explicado graficamente como na Fig. 14.15, em que λ palavras de código (no caso em questão, três) são organizadas em linhas. Na transmissão normal, transmitimos uma linha após a outra. No caso de entrelaçamento, transmitimos colunas (cada um com λ elementos) em sequência. Após a transmissão de todas as 15 (n) colunas, repetimos o procedimento para as próximas λ palavras de código a serem transmitidas.

Para explicar a capacidade de correção de erro desse código entrelaçado, observemos que o decodificador, primeiro, removerá o entrelaçamento e reagrupará os dígitos recebidos como $x_1, x_2, \dots, x_{15}, y_1, y_2, \dots, y_{15}, z_1, z_2, \dots, z_{15}$. Suponhamos que, na Fig. 14.15, os dígitos nos quadrados sombreados estejam em erro. Como se trata de um código corretor de dois erros, até dois erros serão corrigidos em cada linha. Portanto, todos os erros na Fig. 14.15 são corrigíveis. Vemos que, nos 45 dígitos transmitidos, há dois erros aleatórios, ou independentes, e uma rajada de comprimento 4. Em geral, se o código (n, k) original for um código corretor de t erros, o código entrelaçado poderá corrigir qualquer combinação de t rajadas de comprimento λ ou menor.

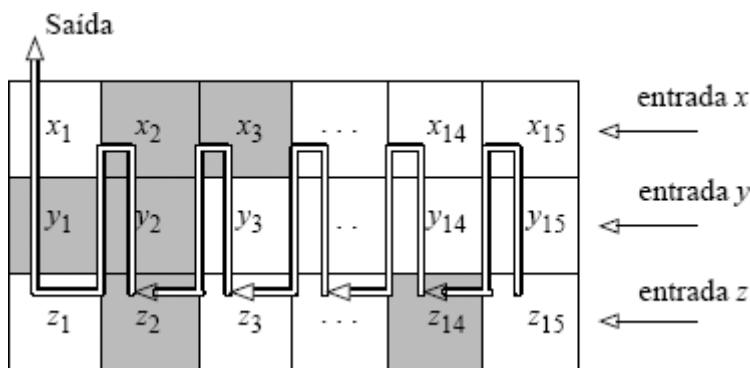


Figura 14.15 Entrelaçador (não aleatório) de blocos para correção de erros aleatórios e em rajada.

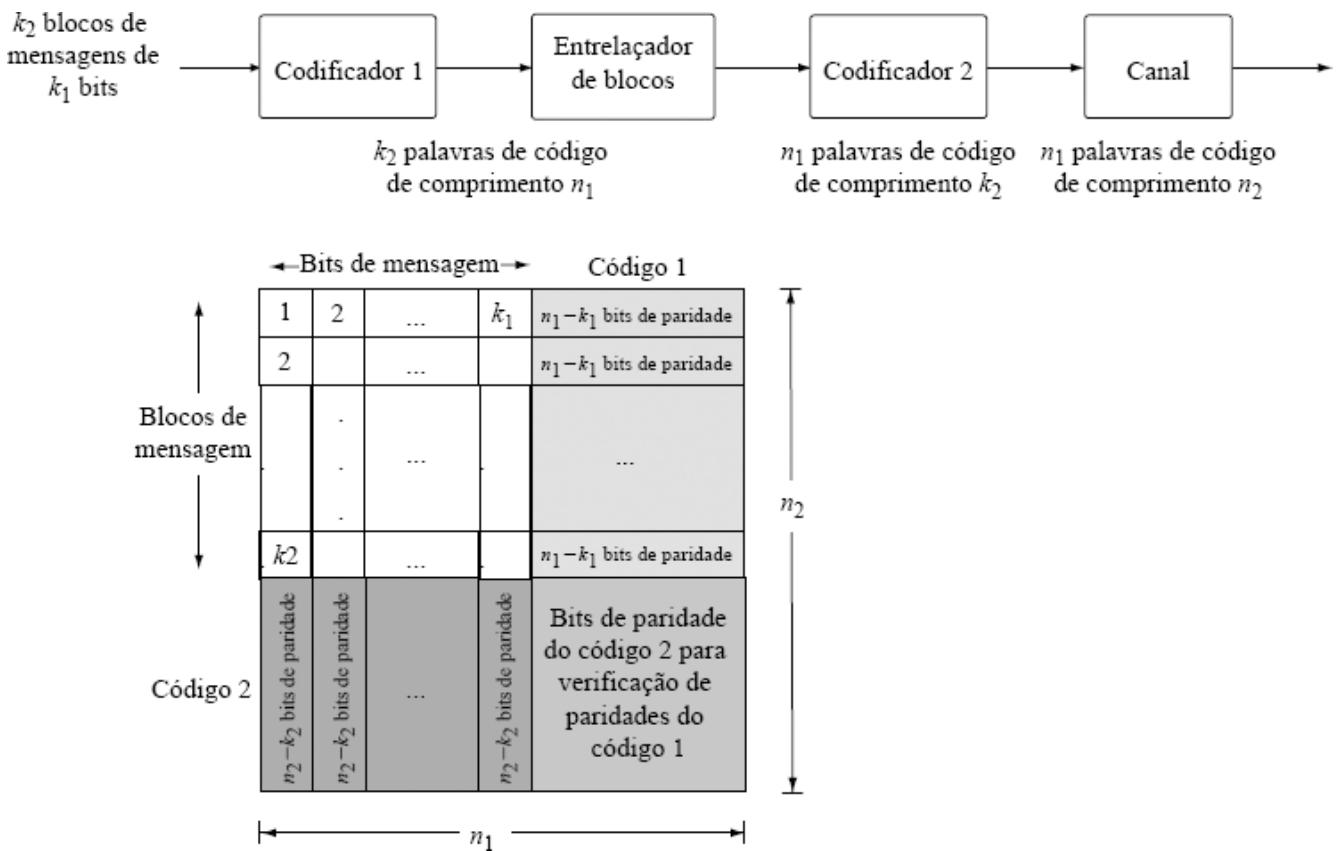


Figura 14.16 Código-produto formado por dois codificadores separados por um entrelaçador de blocos.

Entrelaçadores como o descrito na Fig. 14.15, que toma um bloco de bits e gera a sequência de saída de forma ordenada e fixa, são conhecidos como **entrelaçadores de blocos**. O comprimento total de memória do entrelaçador é conhecido como **profundidade de entrelaçamento**. Entrelaçadores com maiores profundidades podem atacar rajadas mais longas de erros, ao custo de maior memória e maiores atrasos de codificação e decodificação. Um entrelaçador mais geral pode reordenar pseudoaleatoriamente os bits de dados no entrelaçador e liberar os bits em uma ordem conhecida pelo transmissor e pelo receptor. Um entrelaçador desse tipo é conhecido como **entrelaçador aleatório**. Em geral, entrelaçadores aleatórios são mais eficazes no combate de erros aleatórios e em rajada. Como não geram saídas segundo uma ordem fixa, a probabilidade da recepção de uma rajada de erros em uma palavra de código devido a um dado padrão de erro é muito menor.

Código-Produto

Código entrelaçado pode ser generalizado por codificação das palavras de códigos entrelaçadas. O código resultante pode ser visto como uma grande palavra de código que deve satisfazer duas verificações de paridade (restrições). A Fig. 14.16 ilustra como formar um código-produto a partir de dois códigos de blocos sistemáticos, conhecidos como códigos componentes. O primeiro é um código (n_1, k_1) e o segundo, um código (n_2, k_2) . Especificamente, um bloco retangular de $k_1 \times k_2$ bits de mensagem é codificado por dois codificadores. Inicialmente, k_2 blocos de k_1 bits de mensagem são codificados pelo primeiro codificador em k_2 palavras de código (n_1, k_1) . A seguir, um entrelaçador de blocos $n_1 \times k_2$ envia n_1 blocos de k_2 bits ao segundo codificador. Esse codificador (n_2, k_2) adiciona $n_2 - k_2$ bits de paridade a cada um dos n_1 blocos, gerando n_1 palavras de código (n_2, k_2) para transmissão pelo canal.

O uso de um código-produto é uma forma simples de combinar dois códigos de blocos em um código mais poderoso. Em um código-produto, cada bit de código é restrinido por dois conjuntos de paridades, um de cada código componente.



Figura 14.17 Código concatenado com código externo não binário e código interno binário.

Códigos Concatenados

Do diagrama em blocos de um código-produto, reparemos que um entrelaçador de blocos conecta os dois códigos componentes. De modo mais geral, como mostrado na Fig. 14.17, não é necessário que os dois códigos componentes sejam limitados a códigos

binários, e um entrelaçador Π mais genérico pode ser usado. O código resultante é conhecido como código concatenado. De fato, Forney⁸ propôs a concatenação de um código binário e um não binário para a construção de um código muito mais poderoso. Fica claro que códigos-produto são uma classe especial de códigos concatenados, em que os códigos componentes e o entrelaçador de blocos são binários.

Nessa concatenação serial, o codificador 2 é conhecido como código interno e o codificador 1, como código externo. A concatenação mais bem sucedida, como proposto por Forney⁸, usa um código externo de Reed-Solomon e um código interno convolucional binário. O código concatenado pode ser decodificado separadamente: primeiro, o código interno é decodificado e, então, são feitos o desentrelaçamento e a decodificação do código externo. São possíveis formas mais complexas de decodificação iterativa, que podem alcançar melhor desempenho.

14.9 DECODIFICAÇÃO SUAVE

Até aqui, focamos métodos de decodificação que geram decisões rígidas com base na máxima verossimilhança ou em decodificação algébrica fundamentada na síndrome. Decodificação com decisão rígida significa que o decodificador gera **somente** a palavra de código mais provável, sem a confiabilidade da palavra de código decodificada em relação a outras possibilidades. Assim, uma palavra de código decodificada sob decisão rígida não indica o grau de confiança do decodificador em relação à decisão que tomou. Um decodificador independente pode funcionar como um decodificador de decisão rígida, pois seu objetivo é prover a melhor candidata como a palavra de código decodificada. Esse decodificador não precisa indicar o grau de confiança a ser associado à decisão.

Na prática, no entanto, um decodificador opera em conjunto com outros decodificadores e unidades receptoras. Isso significa que a palavra de código decodificada deve não apenas atender às restrições da atual matriz de verificação de paridade, mas também satisfazer outras restrições como, no caso de um código corretor de erro concatenado, as impostas pelas paridades dos distintos códigos componentes. Ao prover mais que apenas uma decisão rígida, um decodificador de decisão suave pode produzir múltiplas possíveis palavras de código de saída, cada uma associada a uma métrica de confiabilidade (verossimilhança). Esse tipo de decodificação suave permite que outras unidades no receptor selezionem conjuntamente a melhor palavra de código, utilizando a informação “suave” (de confiabilidade) do decodificador em paralelo com outras restrições relevantes a serem satisfeitas pela palavra de código.

O conceito de decisão suave é ilustrado de forma mais conveniente por meio de um exemplo de modulação BPSK. Recordemos o receptor ótimo da Seção 10.6. Foquemos o caso especial de modulação binária com símbolo de dado modulado representado por $b_i = \pm 1$ e sujeito a ruído de canal gaussiano branco aditivo. Seja $c_{j,i}$ o i -ésimo bit de código da j -ésima palavra de código \mathbf{c}_j . Como a modulação é BPSK, a relação entre o bit de código $c_{j,i}$ e o correspondente símbolo modulado $b_{j,i}$ é simplesmente

$$b_{j,i} = 2 \cdot c_{j,i} - 1$$

Admitindo que o sinal de saída do filtro receptor seja livre de ISI, as amostras do sinal recebido r_i correspondentes à transmissão da palavra de código (n, k) de n bits $[c_{j,1} \ c_{j,2} \ \dots \ c_{j,n}]$ podem ser escritas como

$$\mathbf{r}_i = \sqrt{E_b} b_{j,i} + \mathbf{w}_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (14.35)$$

Nessa expressão, \mathbf{w}_i é uma amostra AWGN. Usamos C para denotar a coleção de todas as palavras de código válidas. Com base no receptor ótimo da Seção 10.6 [Eq. (10.91) e Fig. 10.18], a decodificação de máxima verossimilhança (MLD) do sinal recebido com codificação corresponde a

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \arg \max_{\mathbf{c}_j \in C} \sum r_i b_{j,i} \\ &= \arg \max_{\mathbf{c}_j \in C} \sum r_i (2c_{j,i} - 1) \\ &= \arg \max_{\mathbf{c}_j \in C} 2 \sum r_i c_{j,i} - \sum r_i \\ &= \arg \max_{\mathbf{c}_j \in C} \sum r_i c_{j,i} \end{aligned} \quad (14.36)$$

Entre as 2^k palavras de código, a MLD suave pode não apenas determinar a palavra de código mais provável como saída, mas também preserva a métrica

$$M_j = \sum r_i b_{j,i}$$

como a **verossimilhança relativa** da palavra de código c_j durante o processo de decodificação. Embora seja equivalente à medida de distância, essa métrica (correlação) deve ser maximizada para MLD. Ao contrário da distância, a métrica de correlação pode ser positiva ou negativa.

Embora a MLD suave pareça ser um algoritmo de implementação simples, sua complexidade computacional é afetada pelo tamanho do código. Na verdade, quando o código é longo, com grande valor de k , a complexidade computacional cresce exponencialmente, pois 2^k métricas devem ser calculadas. Para muitos códigos de blocos práticos, essa exigência se torna intratável quando o comprimento do código ultrapassa algumas centenas de bits.

Para simplificar esse decodificador ótimo, Chase propôs vários tipos de algoritmos subótimos de detecção suave⁹, que são eficazes a um custo computacional significativamente reduzido. O primeiro passo dos algoritmos de Chase consiste em obter decisões rígidas temporárias com base nas amostras recebidas r_i . Esses bits temporários não formam necessariamente uma palavra de código. Devemos determinar

$$\bar{\mathbf{y}} = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n] \quad (14.37a)$$

em que

$$y_i = \text{sign}(r_i) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (14.37b)$$

Cada um dos bits de decisão tem confiabilidade $|r_i|$. Os bits temporários $\{y_i\}$ são enviados a um decodificador algébrico baseado em, por exemplo, síndromes de erro. O resultado é uma palavra de código inicial $\bar{\mathbf{C}}_0 = [\bar{\mathbf{C}}_{0,1} \bar{\mathbf{C}}_{0,2} \cdots \bar{\mathbf{C}}_{0,n}]$. Esse passo é exatamente o mesmo que uma decisão rígida convencional. Todavia, os algoritmos de Chase permitem modificações adicionais à entrada \mathbf{y} do decodificador rígido, com a troca (*flipping*) dos dígitos menos confiáveis. Trocar significa substituir um bit de código **1** por **0** e **0** por **1**.

A ideia de decodificação suave é prover múltiplas palavras de código candidatas, cada uma associada a uma medida de confiabilidade. Algoritmos de Chase geram padrões mais prováveis de troca a serem usados para a modificação da entrada \mathbf{y} do decodificador rígido. Cada padrão de troca e_i consiste em **1s** em posições de bit a serem trocados e **0s** nas posições de bit restantes. Para cada padrão de troca e_i , construímos

$$\bar{c}_i = \text{decisão rígida } (y_i) \oplus e_i \quad (14.38a)$$

e calculamos a correspondente métrica de confiabilidade

$$M_i = \sum_{j=1}^n r_j \cdot (2\bar{c}_{i,j} - 1) \quad (14.38b)$$

A palavra de código com máxima M_i é a saída decodificada.

Há três tipos de algoritmo de Chase. Primeiro, ordenamos a confiabilidade de bit da baixa para a alta:

$$|r_{i_1}| \leq |r_{i_2}| \leq \cdots \leq |r_{i_n}| \quad (14.39)$$

Tipo 1 Testar todos os padrões de troca de peso menor ou igual a $(d_{\min} - 1)$.

Tipo 2 Identificar as posições de bit $\lfloor d_{\min}/2 \rfloor$ menos confiáveis $\{i_1 \ i_2 \dots \ i_{\lfloor d_{\min}/2 \rfloor}\}$. Testar todos os padrões de troca de peso menor ou igual a $\lfloor d_{\min}/2 - 1 \rfloor^*$.

Tipo 3 Testar padrões de troca de peso $w = 1, 3, \dots, d_{\min} - 1$, colocando **1s** nas w posições de bit menos confiáveis.

O diagrama em blocos dos algoritmos de Chase é mostrado na Fig. 14.18. Os três algoritmos de Chase diferem apenas na forma em que os padrões de troca são gerados. Devemos notar, ainda, que decodificadores de Chase podem trocar informação de confiabilidade e verossimilhança com outras unidades receptoras em um esforço conjunto para melhorar o desempenho da decodificação. No lado de entrada, o conjunto de padrões de troca pode aceitar sugestões de outras unidades receptoras. No lado de saída, múltiplas palavras de código candidatas, juntamente com suas métricas de confiabilidade, podem ser enviadas a unidades adicionais de decodificação para processamento complementar e eventual eliminação.

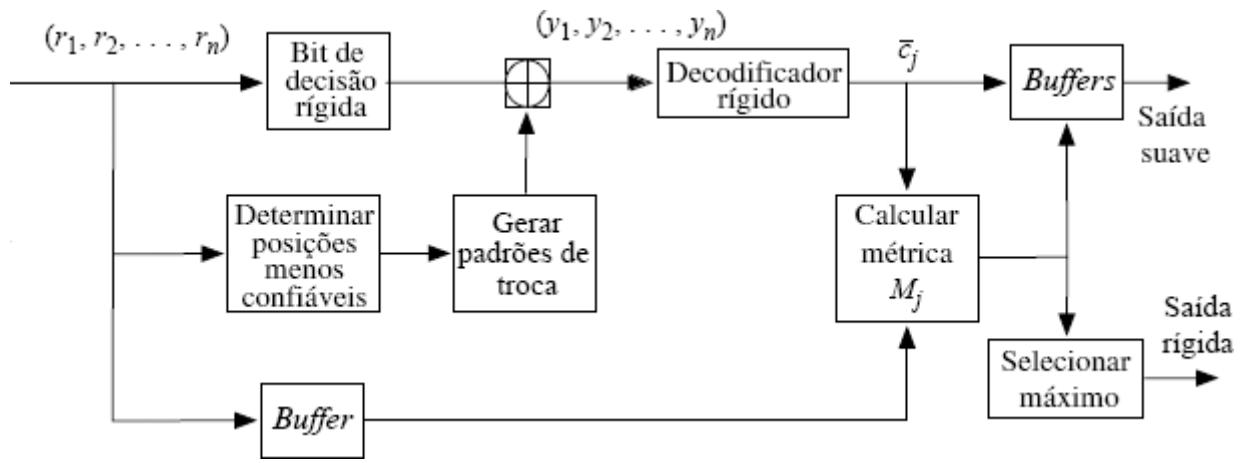


Figura 14.18 Diagrama em blocos dos algoritmos decodificação suave de Chase.

14.10 ALGORITMO DE VITERBI COM SAÍDA SUAVE (SOVA)

Algoritmos de Chase podem gerar múltiplas palavras de código candidatas e as associadas métricas de confiabilidade. A informação de métrica pode ser explorada por outras unidades receptoras para determinar a palavra de código decodificada final. Caso seja capaz de produzir informação de confiabilidade suave para cada bit decodificado, o decodificador pode ter melhor utilização em conjunto com outros decodificadores e processadores com saída suave. Em contraste com os algoritmos de Chase, os algoritmos de Viterbi com saída suave (SOVA – *soft-output Viterbi algorithms*)¹⁰ e algoritmos de *máximo a posteriori* (MAP – *maximum a posteriori*) são dois métodos mais gerais de decodificação suave e produzem informação de confiabilidade de bit. Iniciamos com a descrição dos princípios de SOVA.

A informação de bit mais confiável e instrutiva é a razão log-verossimilhança (LLR – *Log-Likelihood Ratio*) de um particular bit de código c_i com base no vetor de sinal recebido

$$\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$$

Em outras palavras, a LLR¹¹ definida por

$$\Lambda(c_i) = \log \frac{P[c_i = 1 | \mathbf{r} = \mathbf{r}]}{P[c_i = 0 | \mathbf{r} = \mathbf{r}]}$$
 (14.40)

indica o grau de certeza do decodificador quanto à decisão de $c_i = 1$. O grau de certeza varia de $-\infty$ quando $P[c_i = 0 | \mathbf{r}] = 1$ a $+\infty$ quando $P[c_i = 0 | \mathbf{r}] = 0$.

Mais uma vez, consideremos o caso BPSK em que o dado transmitido é $(2c_i - 1) = \pm 1$ e

$$r_i = (2c_i - 1) + w_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$
 (14.41)

em que w_i é a amostra AWGN. Como nos algoritmos de Chase, a métrica de rota é computada pela correlação entre $\{r_i\}$ e o sinal BPSK $\{c_i\}$. Portanto, com base nas amostras dos dados recebidos $\{r_i\}$, podemos estimar

$$\text{métrica de rota entre estágios } n_1 \text{ e } n_2 = \sum_{j=n_1+1}^{n_2} r_j \cdot (2\bar{c}_j - 1)$$
 (14.42)

Como no algoritmo de Viterbi tradicional, o decodificador SOVA opera nas correspondentes treliças do código (convolucional ou de blocos). O SOVA consiste em um passo à frente e um passo a trás. Durante o **passo à frente**, como no algoritmo de Viterbi (AV) convencional, o SOVA determina, primeiro, a sequência de maior verossimilhança (rota sobrevivente). Em contraste com AV, que armazena apenas métricas da rota sobrevivente nos estados do estágio em consideração, o SOVA armazena a métrica de cada rota sobrevivente que leve a um estado para todos os estágios.

Para formular a ideia formalmente, seja

$$S_\ell(i) = \text{estado } \ell \text{ no estágio (tempo) } i$$

Para cada rota sobrevivente no estado S_ℓ no estágio i , determinamos a métrica da rota à frente que leva a esse estado. A métrica à frente que termina no estado ℓ , no tempo i , é denotada por $M_{\ell}^f(i)$. A máxima métrica de rota total no estado final do AV à frente, denotada por M_{\max} , corresponde à rota ótima à frente. Durante o passo para trás, SOVA aplica AV para trás, a partir do estado terminal (final) no estágio K , e termina no estado inicial no estágio 0; a métrica para trás que termina no estado ℓ , no estágio i , é armazenada como $M_{\ell}^b(i)$.

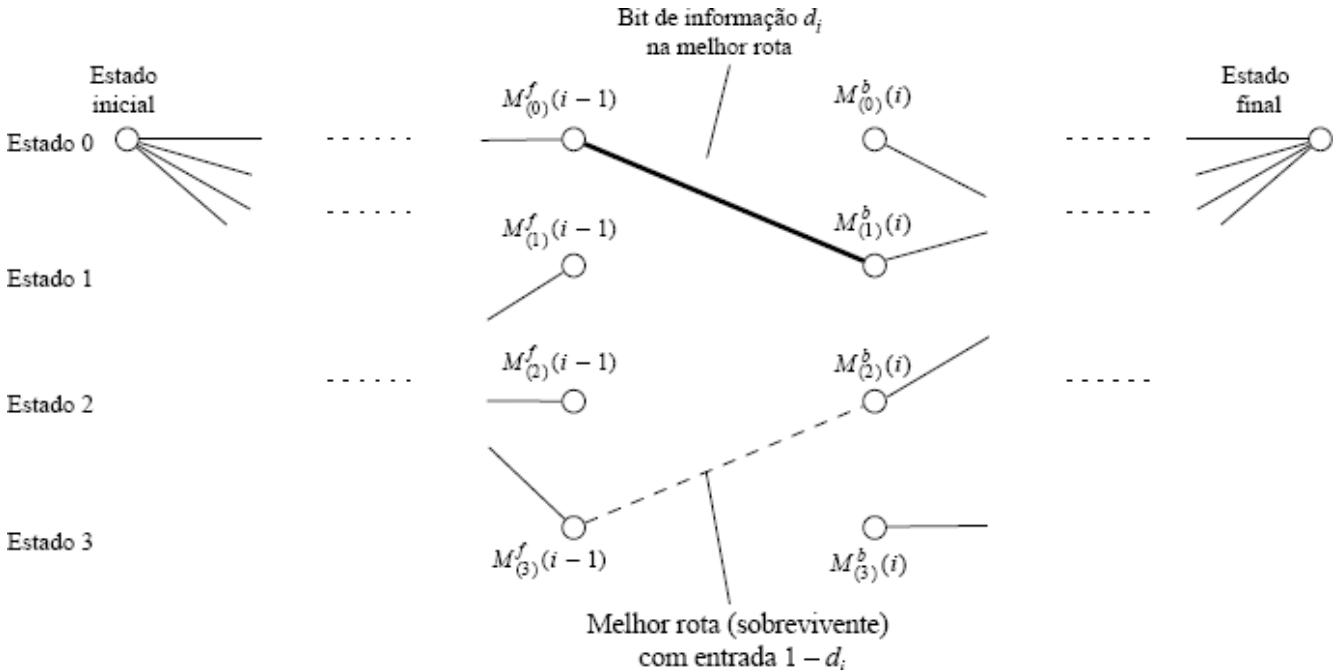


Figura 14.19 Diagrama em blocos de algoritmos de Chase para decodificação suave.

Como o valor provável do bit de informação $d_i = 0, 1$ que leva à transição entre os estados $S_{l_a}(i-1)$ e $S_{l_b}(i)$ foi identificado por AV durante o passo à frente, a métrica do bit de informação $M_i(d_i)$ pode ser fixada como a métrica de rota total

$$M_i(d_i) = M_{\max}$$

A próxima tarefa consiste em determinar a melhor rota e a correspondente máxima métrica de rota $M_i(1 - d_i)$ se o valor oposto ao do bit de informação $1 - d_i$ for escolhido no lugar de d_i no estágio i

$$M_i(1 - d_i) = \max_{\substack{1-d_i \\ \ell_a \rightarrow \ell_b}} \left[M_{\ell_a}^f(S_{\ell_a}(i-1)) + B_{\ell_a, \ell_b} + M_{\ell_b}^b(S_{\ell_b}(i)) \right] \quad (14.43)$$

em que B_{ℓ_a, ℓ_b} é a distância de rota da transição de estado ℓ_a a ℓ_b , em relação à amostra recebida r_i . A maximização é feita sobre todas as transições de estado, denotadas por $M_i(d_i) = M_{\max}$, que podem ser causadas pelo valor de bit de informação $1 - d_i$ no estágio i .

Esse passo nos permite determinar a melhor rota alternativa pelas treliças, caso o valor alternativo $1 - d_i$ seja selecionado. Agora que temos $M_i(d_i)$ e $M_i(1 - d_i)$ para cada estágio i , a verossimilhança de cada bit de informação é proporcional à diferença das métricas

$$\begin{aligned} \Lambda_i &= M_i(1) - M_i(0) = (2d_i - 1) [M_i(d_i) - M_i(1 - d_i)] \\ &= (2d_i - 1) [M_{\max} - M_i(1 - d_i)] \end{aligned} \quad (14.44)$$

Portanto, a razão log-verossimilhança Λ_i pode ser gerada por SOVA, para cada bit de informação d_i . Podemos, então, usar a rota sobrevivente para determinar a LLR [Eq. (14.40)] para cada bit nessa sequência de maior verossimilhança. O conceito básico da determinação da melhor rota sobrevivente alternativa causada por um bit de informação de valor $1 - d_i$ é ilustrado na Fig. 14.19.

14.11 CÓDIGOS-TURBO

Como mencionamos brevemente na Seção 14.1, códigos-turbo representam uma das maiores inovações¹² na teoria da codificação ao longo das últimas décadas. O mecanismo que viabilizou os códigos-turbo foi o decodificador simplificado.

Códigos-turbo não seriam possíveis sem um algoritmo de decodificação suave. Na verdade, um artigo curto publicado há mais de 30 anos por Bahl, Cocke, Jelinek e Raviv¹³ teve um papel fundamental. O algoritmo de máximo *a posteriori* (MAP) introduzido por esses autores ficou conhecido como algoritmo BCJR. Antes da descrição da essência de códigos-turbo, apresentaremos os fundamentos do algoritmo BCJR.

Algoritmo BCJR para Detecção MAP

A descrição que apresentaremos do algoritmo MAP BCJR é baseada no trabalho de Bahl, Cocke, Jelinek e Raviv.¹³ Primeiro, admitamos uma sequência de bits de dados de informação, denotada por

$$d_1 \ d_2 \ \cdots \ d_N \quad (14.45)$$

Os bits de informação $\{d_i\}$ são codificados em bits de palavras de código $\{v_i\}$, que são modulados em símbolos de dados modulados (complexos) $\{b_i\}$. No caso geral, simplesmente notamos que existe um mapeamento

$$\{d_i\} \longrightarrow \{b_i\} \quad (14.46)$$

No caso especial BPSK, $b_i = \pm 1$.

Os símbolos de dados modulados são transmitidos em um canal de ruído i.i.d., e as amostras de sinal recebido são

$$\mathbf{r}_i = b_i + \mathbf{w}_i \quad (14.47)$$

em que \mathbf{w}_i são amostras de ruído i.i.d. Seguindo a notação de MATLAB, representemos os dados recebidos por

$$\begin{aligned} \vec{r}_{k_1:k_2} &= (r_{k_1}, r_{k_1+1}, \dots, r_{k_2}) \\ \vec{r} &= (r_1, r_2, \dots, r_N) \end{aligned}$$

Como os símbolos de dados e o ruído de canal são i.i.d., concluímos que a probabilidade condicional depende somente do símbolo modulado em consideração

$$p(r_i | b_i, \vec{r}_{1:i-1}) = p(r_i | b_i) \quad (14.48)$$

O código (convolucional ou de blocos) é representado por um diagrama em treliças, no qual $S_i = m$ denota o evento em que o estado das treliças é m no tempo i . A probabilidade de transição entre os estados m' e m do estágio $i - 1$ para o estágio i é representado por

$$P[S_i = m | S_{i-1} = m']$$

A definição de treliça de estado significa que S_i é um processo de Markov.* Com base nas propriedades de processos de Markov e sabendo que $\vec{r}_{i+1:N}$ e $\vec{r}_{1:i}$ são independentes, obtemos as seguintes simplificações das probabilidades condicionais:

$$p(\vec{r}_{i+1:N} | S_i = m, S_{i-1} = m', \vec{r}_{1:i}) = p(\vec{r}_{i+1:N} | S_i = m) \quad (14.49a)$$

$$p(r_i, S_i = m | S_{i-1} = m', \vec{r}_{1:i-1}) = p(r_i, S_i = m | S_{i-1} = m') \quad (14.49b)$$

O detector MAP precisa determinar a razão de log-verossimilhança

$$\Lambda(d_i) \triangleq \log \frac{P[d_i = 1 | \vec{r}]}{P[d_i = 0 | \vec{r}]} = \log \frac{p(d_i = 1, \vec{r})}{p(d_i = 0, \vec{r})} \quad (14.50)$$

Agora, estamos aptos a explicar o funcionamento do algoritmo BCJR. Primeiro, seja $\Omega_i(u)$ o conjunto de todas as possíveis transições de estados de $S_{i-1} = m'$ a $S_i = m$, quando $d_i = u$ ($u = 0, 1$). Existem apenas dois desses conjuntos para $d_i = 1$ e $d_i = 0$. Podemos ver que

$$\begin{aligned}
p(d_i = 1, \vec{r}) &= \sum_{(m', m) \in \Omega_i(1)} p(S_{i-1} = m', S_i = m, \vec{r}) \\
&= \sum_{(m', m) \in \Omega_i(1)} p(S_{i-1} = m', \vec{r}_{1:i}, S_i = m, \vec{r}_{i+1:N}) \\
&= \sum_{(m', m) \in \Omega_i(1)} p(S_{i-1} = m', \vec{r}_{1:i-1}, S_i = m, r_i) \\
&\quad \cdot p(\vec{r}_{i+1:N} | S_{i-1} = m', \vec{r}_{1:i}, S_i = m)
\end{aligned} \tag{14.51}$$

Aplicando as Eqs. (14.49a) e (14.49b) à última igualdade, obtemos

$$\begin{aligned}
p(d_i = 1, \vec{r}) &= \sum_{(m', m) \in \Omega_i(1)} p(S_{i-1} = m', \vec{r}_{1:i-1}, S_i = m, r_i) \cdot p(\vec{r}_{i+1:N} | S_i = m) \\
&= \sum_{(m', m) \in \Omega_i(1)} p(S_{i-1} = m', \vec{r}_{1:i-1}) \cdot p(S_i = m, r_i | S_{i-1} = m') \\
&\quad \cdot p(\vec{r}_{i+1:N} | S_i = m)
\end{aligned} \tag{14.52}$$

Aplicando a notação usada por Bahl *et al.*,¹³ definimos

$$\alpha_{i-1}(m') \triangleq p(S_{i-1} = m', \vec{r}_{1:i-1}) \tag{14.53a}$$

$$\beta_i(m) \triangleq p(\vec{r}_{i+1:N} | S_i = m) \tag{14.53b}$$

$$\gamma_i(m', m) \triangleq p(S_i = m, r_i | S_{i-1} = m') \tag{14.53c}$$

Dada a notação na Eq. (14.53), podemos usar as Eqs. (14.50) a (14.52) para escrever a LLR de cada bit de informação d_i como

$$\Lambda(d_i) = \log \frac{\sum_{(m', m) \in \Omega_i(1)} \alpha_{i-1}(m') \gamma_i(m', m) \beta_i(m)}{\sum_{(m', m) \in \Omega_i(0)} \alpha_{i-1}(m') \gamma_i(m', m) \beta_i(m)} \tag{14.54}$$

Isso provê a informação de decodificação suave para o i -ésimo bit de informação d_i . A decodificação MAP pode gerar uma decisão rígida simplesmente a partir do sinal da LLR

$$u = \text{sign}[\Lambda(d_i)]$$

Para implementar o algoritmo BCJR, aplicamos uma recursividade à frente para obter $\alpha_i(m)$:

$$\begin{aligned}
\alpha_i(m) &\triangleq p(S_i = m, \vec{r}_{1:i}) \\
&= \sum_{m'} p(S_i = m, S_{i-1} = m', \vec{r}_{1:i-1}, r_i) \\
&= \sum_{m'} p(S_i = m, r_i | S_{i-1} = m', \vec{r}_{1:i-1}) \cdot p(S_{i-1} = m', \vec{r}_{1:i-1}) \\
&= \sum_{m'} \gamma_i(m', m) \cdot \alpha_{i-1}(m')
\end{aligned} \tag{14.55}$$

A última igualdade advém da Eq. (14.49b). O estado inicial do decodificador deve ser $S_0 = 0$. Em outras palavras,

$$\alpha_0(m) = P[S_0 = m] = \delta[m] = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases}$$

da qual a recursividade à frente pode ter prosseguimento. A recursividade para trás é usada para calcular $\beta_{i-1}(m')$ de $\beta_i(m)$:

$$\begin{aligned} \beta_{i-1}(m') &= p(\vec{r}_{i:N} | S_{i-1} = m') \\ &= \sum_m p(S_i = m, r_i, \vec{r}_{i+1:N} | S_{i-1} = m') \\ &= \sum_m p(\vec{r}_{i+1:N} | S_{i-1} = m', S_i = m, r_i) \cdot p(S_i = m, r_i | S_{i-1} = m') \\ &= \sum_m p(\vec{r}_{i+1:N} | S_i = m) \cdot \gamma_i(m', m) \\ &= \sum_m \beta_i(m) \cdot \gamma_i(m', m) \end{aligned} \tag{14.56}$$

Para um codificador com estado terminal conhecido $S_N = 0$, podemos iniciar a recursividade para trás de

$$\beta_N(m) = \delta[m]$$

da qual a recursividade para trás pode ser inicializada.

Reparemos que as recursividades à frente e para trás dependem da função $\gamma_i(m', m)$. Na verdade, $\gamma_i(m', m)$ já está em uma forma matricial simples. A entrada $\gamma_i(m', m)$ pode ser simplificada e deduzida da informação básica de modulação e do canal:

$$\begin{aligned} \gamma_i(m', m) &\triangleq p(S_i = m, r_i | S_{i-1} = m') \\ &= p(r_i | S_{i-1} = m', S_i = m) \cdot P[S_i = m | S_{i-1} = m'] \\ &= p(r_i | c_i[m', m]) \cdot P[d_i = u] \end{aligned} \tag{14.57}$$

em que $c_i[m', m]$ é a palavra de código da saída do codificador que corresponde à transição de estado de m' para m , e $d_i = u$ é o correspondente bit de entrada. Para determinar $\gamma_i(m', m)$ para $d_i = u$ segundo a Eq. (14.57), $P[r_i | c_i[m', m]]$ é determinada com o mapeamento da saída do codificador $c_i[m', m]$ ao símbolo modulado b_i e à distribuição de ruído de canal w_i .

No caso especial do código convolucional na Fig. 14.5, para cada símbolo de dado d_i , o codificador convolucional gera dois bits codificados $\{v_{i,1}, v_{i,2}\}$. O mapeamento dos bits codificados $\{v_{i,1}, v_{i,2}\}$ ao(s) símbolo(s) modulado(s) b_i depende da modulação. Em BPSK, cada bit codificado é mapeado a ± 1 e b_i tem duas entradas

$$b_i = \begin{bmatrix} 2v_{i,1} - 1 \\ 2v_{i,2} - 1 \end{bmatrix}$$

Se for aplicada a modulação QPSK, podemos usar um mapeamento de Gray

$$b_i = e^{j\phi_i}$$

em que

$$\phi_i = \begin{cases} 0, & \{v_{i,1}, v_{i,2}\} = \{0, 0\} \\ \pi/2, & \{v_{i,1}, v_{i,2}\} = \{0, 1\} \\ \pi, & \{v_{i,1}, v_{i,2}\} = \{1, 1\} \\ -\pi/2, & \{v_{i,1}, v_{i,2}\} = \{1, 0\} \end{cases}$$

Assim, em um canal AWGN em banda-base, a amostra de sinal recebido sob QPSK é

$$r_i = \sqrt{E_s} e^{j\phi_i} + w_i \tag{14.58}$$

em que w_i é o ruído de canal i.i.d. complexo, com função densidade de probabilidade

$$p_w(x) = \frac{1}{\pi\mathcal{N}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{\mathcal{N}}\right)$$

Em consequência, neste caso,

$$\begin{aligned} p(r_i | c_i[m', m]) &= p(r_i | d_i = u) \\ &= p(r_i | b_i = e^{j\phi_i}) \\ &= p_w(r_i - \sqrt{E_s}e^{j\phi_i}) \\ &= \frac{1}{\pi\mathcal{N}} \exp\left(-\frac{|r_i - \sqrt{E_s}e^{j\phi_i}|^2}{\mathcal{N}}\right) \end{aligned} \quad (14.59)$$

O algoritmo MAP BCJR calcula a LLR de cada bit de informação segundo

$$\begin{aligned} \Lambda(d_i) &= \log \frac{\sum_{(m', m) \in \Omega_i(1)} \alpha_{i-1}(m') p(r_i | c_i[m', m]) P[d_i = 1] \beta_i(m)}{\sum_{(m', m) \in \Omega_i(0)} \alpha_{i-1}(m') p(r_i | c_i[m', m]) P[d_i = 0] \beta_i(m)} \\ &= \underbrace{\log \frac{P[d_i = 1]}{P[d_i = 0]}}_{\Lambda^{(a)}(d_i)} + \underbrace{\log \frac{\sum_{(m', m) \in \Omega_i(1)} \alpha_{i-1}(m') c_i[m', m] \beta_i(m)}{\sum_{(m', m) \in \Omega_i(0)} \alpha_{i-1}(m') c_i[m', m] \beta_i(m)}}_{\Lambda^{(\ell)}(d_i)} \end{aligned} \quad (14.60)$$

A Eq. (14.60) mostra que a LLR de um dado símbolo de informação d_i consiste em duas partes:

- A informação *a priori* $\Lambda_i^{(a)}$ de probabilidade anterior do símbolos de dado d_i , que pode ser fornecida *a priori* ou externamente por outro codificador.
- A informação local $\Lambda_i^{(\ell)}$ que é especificada pelos sinais recebidos e pelas restrições do código em treliças (ou transições de estado).

Com essa visão de decomposição da LLR, estamos prontos para explicar o conceito de códigos-turbo ou, o que é mais apropriado, decodificação-turbo.

Códigos-Turbo

O conceito de códigos-turbo foi proposto por Berrou, Glavieux e Thitimajshima¹² em 1993, na *IEEE International Conference on Communications* [Conferência Internacional de Comunicações do IEEE]. A asserção dos autores sobre desempenho de correção de erro próximo do limite de Shannon foi inicialmente recebida com ceticismo. Tal reação era natural, pois o proposto código-turbo apresentava desempenho de BER a até 1 dB do limite de Shannon, o que era considerado algo extremamente difícil, se não impossível, de obter com complexidade computacional razoável. Além disso, a construção dos chamados códigos-turbo não assumia uma forma particularmente estruturada. Foram precisos quase dois anos para que a comunidade de códigos se convencesse do extraordinário desempenho de BER de códigos-turbo e começasse a entender os princípios dos mesmos. Atualmente, códigos-turbo permearam diversos aspectos de comunicações digitais e, muitas vezes, assumem formas especializadas. Nessa parte da seção, apresentaremos uma breve introdução sobre os princípios básicos de códigos-turbo.

Um diagrama em blocos do primeiro codificador-turbo é mostrado na Fig. 14.20a. Esse código-turbo consiste em dois códigos RSC convolucionais sistemáticos e recursivos. Representando um atraso unitário por D , a matriz geradora 1×2 do código RSC de taxa 1/2 assume a forma

$$G(D) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{g_2(D)}{g_1(D)} \end{bmatrix}$$

Em particular, o exemplo de código-turbo de Berrou *et al.*¹² foi especificado por

$$G(D) = \left[1 \quad \frac{1+D^2+D^3+D^4}{1+D+D^4} \right]$$

A implementação simples do codificador é mostrada na Fig. 14.20b.

Nesse exemplo, um quadro de bits de informação d_i passa por dois codificadores RSC. Os dois códigos convolucionais têm taxa 1/2 e são sistemáticos. Assim, o primeiro codificador RSC gera um quadro de bits codificados $p_i^{(1)}$ de comprimento igual ao do quadro de informação. Antes de entrar no segundo codificador RSC, os bits de informação são entrelaçados por um entrelaçador aleatório de blocos Π . Em consequência, mesmo com estrutura idêntica à do primeiro codificador, o segundo codificador gerará um quadro de bits codificados diferente $p_i^{(2)}$. O código-turbo global consiste nos bits de informação e as duas sequências de bits codificados (de paridade). A taxa de código é 1/3, pois o código-turbo tem dois quadros codificados para o mesmo quadro de informação. Então, $\{d_i, p_i^{(1)}, p_i^{(2)}\}$ são modulados e transmitidos através dos canais de comunicação. Entrelaçadores adicionais e codificadores RSC podem ser empregados para a obtenção de códigos com taxas menores e mais poderosos.

Para a construção de códigos-turbo com taxas mais elevadas, as saídas dos dois codificadores convolucionais $p_i^{(1)}$ e $p_i^{(2)}$ podem ser descartadas de forma seletiva e sistemática (por exemplo, mantendo somente metade dos bits em $p_i^{(1)}$ e $p_i^{(2)}$). Esse processo, comumente referido como perfuração (*puncturing*), cria dois códigos RSC mais eficientes, cada um com taxa 2/3. A taxa total do código-turbo, portanto, é 1/2, pois, para cada bit de informação, há dois bits codificados (um bit de informação e um de paridade).

Assim, a essência de códigos-turbo é uma simples combinação de dois códigos RSC componentes. Embora cada código componente tenha poucos estados e possa ser decodificado via algoritmos com AV, SOVA e BCJR, o entrelaçador aleatório em muito dificulta a decodificação exata do código-turbo global, pois o mesmo consiste em número demais de estados para ser decodificado por meio de decodificadores tradicionais MAP ou AV. Como cada código componente pode ser decodificado com o emprego de decodificadores simples, o verdadeiro mérito de códigos-turbo reside na decodificação iterativa, um conceito que permite que os dois decodificadores componentes troquem informação de forma iterativa.

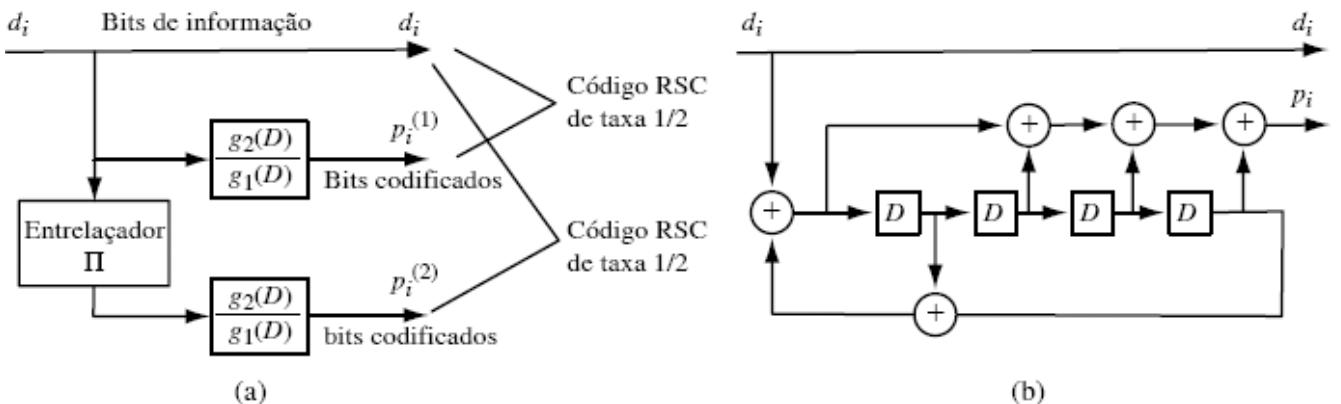


Figura 14.20 Código-turbo paralelo concatenado: (a) codificador-turbo 1/3; (b) implementação de codificador convolucional sistemático e recursivo (RSC) $g_1(D) = 1 + D + D^4$, $g_2(D) = 1 + D^2 + D^3 + D^4$.

Decodificação Iterativa para Códigos-Turbo

É importante ressaltar que a simples iteração entre dois decodificadores (rígidos) não é capaz de garantir a convergência ao resultado do altamente complexo e exato decodificador-turbo. O algoritmo BCJR discutido anteriormente (ou alguma de suas variantes) viabiliza a decodificação-turbo e a torna poderosa. Cada código componente pode ser decodificado via algoritmo BCJR de decodificação suave, que permite que a decodificação-turbo iterativa troque informação suave entre os dois decodificadores suaves.

A ideia da decodificação iterativa pode ser descrita de modo simples, como feito a seguir. Dada a saída do canal, os dois decodificadores podem gerar a informação suave $\Lambda(d_i)$ segundo a Eq. (14.60):

$$\Lambda_1(d_i) = \Lambda_1^{(a)}(d_i) + \Lambda_1^{(\ell)}(d_i) \quad (14.61a)$$

$$\Lambda_2(d_i) = \Lambda_2^{(a)}(d_i) + \Lambda_2^{(\ell)}(d_i) \quad (14.61b)$$

Reparemos que $\Lambda_1^{(a)}(d_i)$ e $\Lambda_2^{(a)}(d_i)$ são a informação *a priori* a respeito do bit de informação d_i nos decodificadores 1 e 2, respectivamente. Sem qualquer conhecimento prévio, os decodificadores as tratariam simplesmente como 0, pois $d_i = \pm 1$ são equiprováveis.

A decodificação iterativa deve permitir que os dois decodificadores de baixa complexidade troquem informação. Para isso, o decodificador 1 pode aplicar o algoritmo BCJR para determinar a informação de LLR sobre d_i , e, então, passar essa informação deduzida ao decodificador 2 como a LLR *a priori*. Reparemos que essa informação deduzida não é disponibilizada ao decodificador 2 por seu próprio decodificador ou por outros sinais de entrada. Para prover informação inovadora, o decodificador 1 deve remover qualquer informação redundante para gerar sua informação extrínseca $\Lambda_{1 \rightarrow 2}^{(e)}(d_i)$ a ser passada ao decodificador 2. Do mesmo modo, o decodificador 2 determinará sua informação extrínseca $\Lambda_{2 \rightarrow 1}^{(e)}(d_i)$ (até então, indisponível ao decodificador 1) e a passará ao decodificador 1 como uma informação *a priori*, para que o decodificador 1 **refresque/atualize** sua LLR sobre d_i . Essa iteração em malha fechada é repetida até haver convergência satisfatória. O diagrama em bloco conceitual dessa decodificação-turbo iterativa é ilustrado na Fig. 14.21.

A seguir, exploremos um exemplo dado por Bahl *et al.*¹³ para explicar como atualizar a informação extrínseca para a troca de informação entre os dois decodificadores suaves. A Fig. 14.21 ilustra o fluxo básico de sinal no decodificador-turbo iterativo. Há dois decodificadores MAP BCJR interconectados. Foquemos um dos decodificadores (o decodificador 1) e sua implementação BCJR. Para o primeiro código RSC sistemático, os bits codificados de saída correspondentes ao bit de informação d_i são

$$c_i[m', m] = (d_i, p_i^{(1)})$$

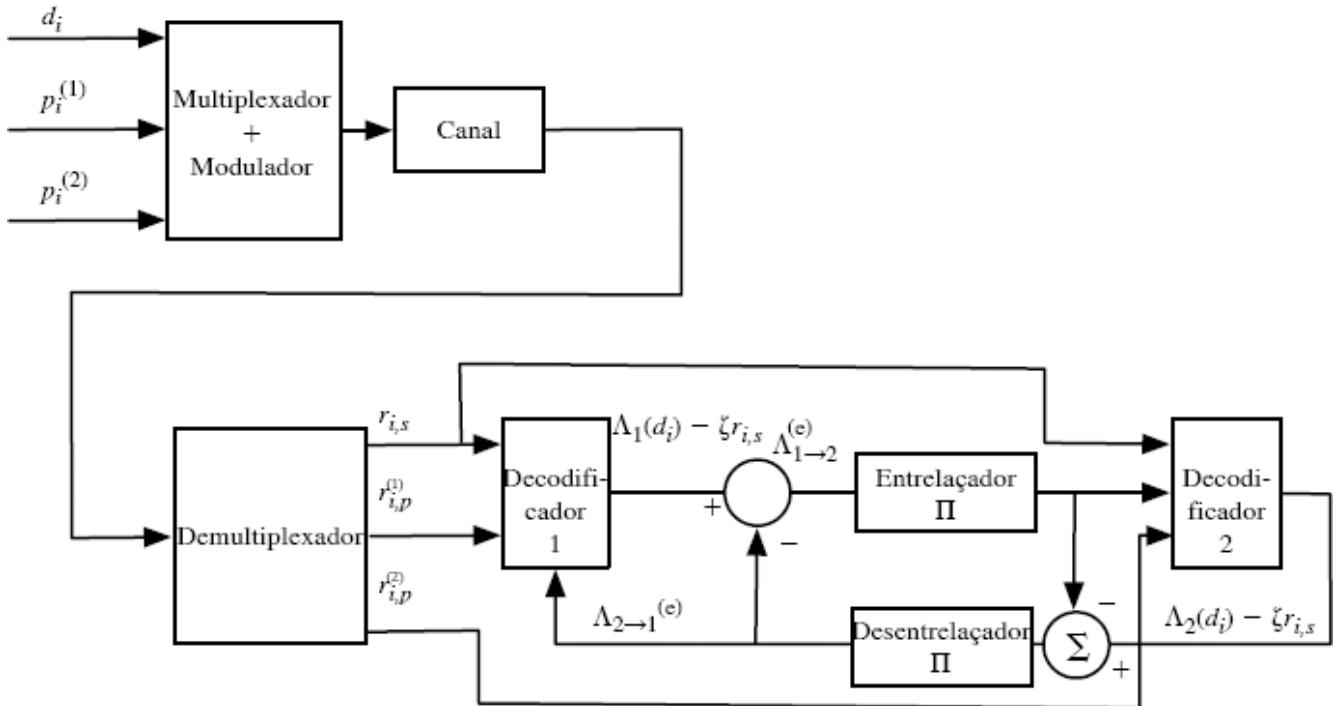


Figura 14.21 Troca de informação extrínseca entre dois decodificadores componentes BCJR para decodificação-turbo iterativa.

Para determinar $p(r_i | c_i[m', m])$, é necessário especificar o formato de modulação e o modelo do canal.

Consideremos o caso especial e simples de modulação BPSK sob ruído de canal aditivo, branco e gaussiano. Nesse caso, há duas amostras de sinal recebido como resultado dos bits codificados $c_i[m', m] = (d_i, p_i^{(1)})$. Mais precisamente, do codificador 1, a saída do canal consiste em duas sequências de sinal

$$r_{i,s} = \sqrt{E_b}(2d_i - 1) + w_i \quad (14.62a)$$

$$r_{i,p}^{(1)} = \sqrt{E_b}(2p_i^{(1)} - 1) + w_{i,1} \quad (14.62b)$$

enquanto do codificador 2, as saídas do canal são

$$r_{i,s} = \sqrt{E_b}(2d_i - 1) + w_i \quad (14.63a)$$

$$r_{i,p}^{(2)} = \sqrt{E_b}(2p_i^{(2)} - 1) + w_{i,2} \quad (14.63b)$$

Reparemos que os ruídos gaussianos w_i , $w_{i,1}$ e $w_{i,2}$ são independentes, com igual distribuição gaussiana de média zero e variância $N/2$. O primeiro decodificador BCJR deve decodificar os sinais $r_{i,s}$ e $r_{i,p}^{(1)}$, enquanto o segundo decodificador deve decodificar os sinais $r_{i,s}$ e $r_{i,p}^{(2)}$.

Seja, em um decodificador, $p_i[m', m]$ o i -ésimo bit de paridade correspondente ao bit de mensagem d_i . Naturalmente, esse bit de paridade corresponde à transição do estado m' ao estado m . Para cada decodificador, os sinais de saída do canal recebidos $\mathbf{r}_i = [r_{i,s}, r_{i,p}]$ especificam $\gamma_i(m', m)$ via

$$\begin{aligned}\gamma_i(m', m) &= p(\mathbf{r}_i | c_i[m', m]) P(d_i) \\ &= p(r_{i,s}, r_{i,p} | d_i, p_i[m', m]) P(d_i) \\ &= \frac{1}{\pi N} \exp \left[-\frac{|r_{i,s} - \sqrt{E_b}(2d_i - 1)|^2 + |r_{i,p} - \sqrt{E_b}(2p_i[m', m] - 1)|^2}{N} \right] P(d_i) \\ &= \frac{1}{\pi N} \exp \left[-\frac{r_{i,s}^2 + r_{i,p}^2 + 2E_b|^2}{N} \right] \exp \left\{ \frac{2\sqrt{E_b}}{N} [r_{i,s}(2d_i - 1) + r_{i,p}(2p_i[m', m] - 1)] \right\} \\ &\quad \times P(d_i)\end{aligned}\tag{14.64}$$

Reparemos que o primeiro termo na Eq. (14.64) independe da palavra de código ou transição de m' a m . Assim, a LLR neste decodificador passa a

$$\begin{aligned}\Lambda(d_i) &= \log \frac{\sum_{(m', m) \in \Omega_i(1)} \alpha_{i-1}(m') p(\mathbf{r}_i | c_i[m', m]) P[d_i = 1] \beta_i(m)}{\sum_{(m', m) \in \Omega_i(0)} \alpha_{i-1}(m') p(\mathbf{r}_i | c_i[m', m]) P[d_i = 0] \beta_i(m)} \\ &= \log \frac{P[d_i = 1]}{P[d_i = 0]} + \log \frac{\sum_{(m', m) \in \Omega_i(1)} \alpha_{i-1}(m') \exp \left\{ \frac{2\sqrt{E_b}}{N} [r_{i,s} + 2r_{i,p} p_i[m', m]] \right\} \beta_i(m)}{\sum_{(m', m) \in \Omega_i(0)} \alpha_{i-1}(m') \exp \left\{ \frac{2\sqrt{E_b}}{N} [-r_{i,s} + 2r_{i,p} p_i[m', m]] \right\} \beta_i(m)}\end{aligned}\tag{14.65}$$

Definindo o parâmetro de ganho $\zeta = 4\sqrt{E_b}/N$, podemos simplificar a LLR como

$$\Lambda(d_i) = \underbrace{\log \frac{P[d_i = 1]}{P[d_i = 0]}}_{\Lambda^{(a)}} + \underbrace{\zeta \cdot r_{i,s}}_{\Lambda^{(c)}} + \underbrace{\log \frac{\sum_{(m', m) \in \Omega_i(1)} \alpha_{i-1}(m') \exp (\zeta \cdot r_{i,p} p_i[m', m]) \beta_i(m)}{\sum_{(m', m) \in \Omega_i(0)} \alpha_{i-1}(m') \exp (\zeta \cdot r_{i,p} p_i[m', m]) \beta_i(m)}}_{\Lambda^{(e)}}\tag{14.66}$$

Em outras palavras, para cada bit de informação d_i , as LLRs dos dois decodificadores podem ser decompostas em três partes:

$$\Lambda_j(d_i) = \Lambda_j^{(a)}(d_i) + \Lambda_j^{(c)}(d_i) + \Lambda_j^{(e)}(d_i) \quad j = 1, 2$$

em que $\Lambda_j^{(a)}(d_i)$ é a informação *a priori* provida pelo outro decodificador, $\Lambda_j^{(c)}(d_i)$ é a informação de saída do canal compartilhada pelos dois decodificadores e é a **informação extrínseca** obtida pelo j -ésimo decodificador e usada pelo outro decodificador como informação *a priori*. Isso significa que, a cada iteração, o decodificador 1 precisa calcular

$$\Lambda_1(d_i) = \Lambda_{2 \rightarrow 1}^{(e)}(d_i) + \zeta \cdot r_{i,s} + \Lambda_{1 \rightarrow 2}^{(e)}(d_i)\tag{14.67a}$$

em que $\Lambda_{2 \rightarrow 1}^{(e)}(d_i)$ é a informação extrínseca passada pelo decodificador 2 e $\Lambda_{1 \rightarrow 2}^{(e)}(d_i)$ é a nova informação extrínseca a ser enviada ao decodificador 2 para que o mesmo atualize sua LLR via

$$\Lambda_2(d_i) = \Lambda_{1 \rightarrow 2}^{(e)}(d_i) + \zeta \cdot r_{i,s} + \Lambda_{2 \rightarrow 1}^{(e)}(d_i) \quad (14.67b)$$

Nos dois decodificadores, a atualização da informação extrínseca requer a atualização de $\alpha_i(m)$ e $\beta_i(m)$ antes do cálculo da informação extrínseca

$$\Lambda^{(e)} = \log \frac{\sum_{(m', m) \in \Omega_i(1)} \alpha_{i-1}(m') \exp(\zeta \cdot r_{i,p} p_i[m', m]) \beta_i(m)}{\sum_{(m', m) \in \Omega_i(0)} \alpha_{i-1}(m') \exp(\zeta \cdot r_{i,p} p_i[m', m]) \beta_i(m)} \quad (14.68)$$

Para refrescar $\alpha_i(m)$ e $\beta_i(m)$ com base na informação extrínseca $\Lambda^{(e)}$, precisamos recalcular, em cada decodificador,

$$\gamma_i(m', m) = p(r_i | d_i) P(d_i) \quad (14.69)$$

$$\sim \left\{ (1 - d_i) + d_i \exp[\Lambda^{(e)}] \right\} \exp(0.5 \zeta \cdot r_{i,s}) \exp(\zeta \cdot r_{i,p} p_i[m', m]) \quad (14.70)$$

Uma vez que tenha terminado a decodificação BCJR, o decodificador 1 pode fornecer sua saída suave como informação *a priori* sobre d_i ao decodificador 2. Ao terminar sua decodificação BCJR, fazendo uso da informação *a priori* fornecida pelo decodificador 1, o decodificador 2 deve prover sua nova informação suave sobre d_i de volta ao decodificador 1. Para assegurar que o decodificador 2 não realmente informa “velha” originalmente vindas do decodificador 1, devemos subtrair a informação velha antes da realimentação e, dessa forma, devolver ao decodificador 1 somente a informação extrínseca $\Lambda_{2 \rightarrow 1}^{(e)}(d_i)$ como informação “anterior” a ser usada pelo decodificador 1 na próxima iteração. Da mesma forma, na próxima iteração, o decodificador 1 atualizará sua saída suave e dela subtrairá a informação velha originalmente vindas do decodificador 2, de modo a fornecer informação extrínseca fresca $\Lambda_{2 \rightarrow 1}^{(e)}(d_i)$ como informação *a priori* para o decodificador 2. Essa troca de informação extrínseca é ilustrada na Fig. 14.21.

Como exemplo, o desempenho de decodificação original do código-turbo proposto por Berrou *et al.*¹² é reproduzido na Fig. 14.22. O resultado demonstra, na decodificação suave iterativa, a progressiva melhora de desempenho de iterações sucessivas. Após 18 iterações, o desempenho de taxa de erro de bit está a apenas 0,7 dB do limite teórico.

14.12 CÓDIGOS VERIFICADORES DE PARIDADE DE BAIXA DENSIDADE (LDPC)

Após a descoberta de códigos-turbo, pesquisadores se empenharam em grande atividade com o objetivo de determinar códigos corretores de erro igualmente poderosos, se não mais poderosos, que fossem adequados à decodificação iterativa suave. Logo após, em 1995, outra classe de códigos com capacidade próxima do limite teórico – conhecidos como códigos verificadores de paridade de baixa densidade (LDPC – *low-density parity check codes*) e originalmente introduzidos por Gallager¹⁵ em 1963 – foi redescoberta por MacKay e Neal.^{16, 17} Desde então, implementações de códigos LDPC e formas eficientes de decodificação LDPC têm sido alvos de intensas pesquisas na comunidade de códigos. Um grande número de códigos LDPC foi proposto como fortes competidores dos códigos-turbos e, muitas vezes, com melhor desempenho e comparáveis comprimentos de códigos, taxas de códigos e complexidade de decodificação.

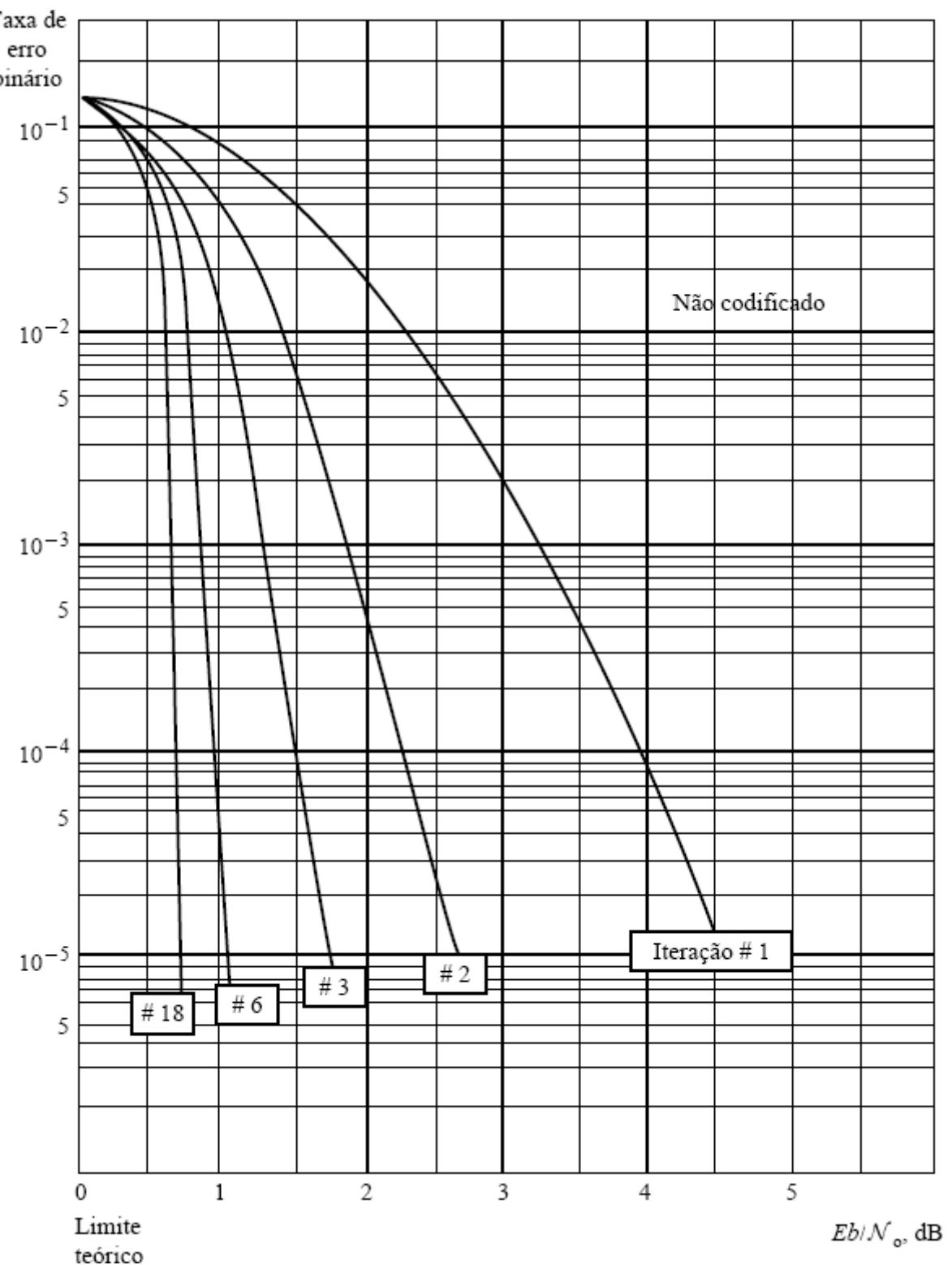


Figura 14.22 O desempenho da decodificação de um código-turbo de taxa 1/2 é muito próximo do limite teórico.
[Reproduzido da Ref. 14 com permissão do IEEE.]

Códigos LDPC são códigos de blocos lineares com matrizes de verificação de paridade esparsas. Essencialmente, a matriz de verificação de paridade \mathbf{H} consiste em uma maioria de 0s e poucos 1s, formando uma matriz de verificação de paridade de **baixa densidade**. Códigos LDPC são, em geral, muito longos (normalmente, têm comprimentos maiores que 1.000 bits) e não cíclicos. Assim, uma implementação exata do algoritmo de decodificação MAP BCJR se torna muito complexa e, na maioria das vezes, impraticável. Por sorte, há diversos métodos bem estabelecidos para a decodificação de códigos LDPC capazes de alcançar desempenho próximo do ótimo.

O projeto do código LDPC equivale ao de uma matriz de paridade esparsa \mathbf{H} . Uma vez que \mathbf{H} tenha sido definida, o código LDPC é o espaço nulo da matriz de paridade \mathbf{H} . O número de 1s na i -ésima linha de \mathbf{H} é conhecido como o peso da linha, ρ_i , enquanto o número de 1s na j -ésima coluna é o peso da coluna, γ_j . Em códigos LDPC, os pesos das linhas e das colunas são muito menores que o comprimento do código n , ou seja,

$$\rho_i \ll n \quad \gamma_j \ll n$$

Para códigos LDPC **regulares**, todas as linhas têm o mesmo peso $\rho_i = \rho$ e todas as colunas, o mesmo peso $\gamma_j = \gamma$. No caso de códigos LDPC **irregulares**, os pesos das linhas e das colunas variam e, em geral, exibem certas distribuições. Códigos regulares são de geração mais simples, enquanto códigos irregulares de grandes comprimentos de código têm melhor desempenho.

Gráfico Bipartido (de Tanner)

Um gráfico de Tanner é uma representação gráfica que permite a descrição conveniente de um código de blocos linear. Esse gráfico bipartido, com matriz de incidência H , foi introduzido por R. M. Tanner em 1981.¹⁸ Consideremos um código de blocos linear (n, k) . Há n bits codificados e $n - k$ bits de paridade. O gráfico de Tanner desse código de blocos linear tem n nós de variáveis correspondentes aos n bits de código. Os n nós variáveis são conectados a seus respectivos nós de paridade (ou nós de verificação), segundo os 1s na matriz de verificação de paridade H . Um nó de variável (uma coluna) e um nó de verificação (uma linha) são conectados se o correspondente elemento em H for um 1. Como H é esparsa, existem poucas conexões a cada nó de variável ou nó de verificação. Estas conexões são conhecidas como fronteiras (*edges*). Cada linha representa a conexão a um nó de verificação e cada coluna, a conexão a um nó de variável. Para códigos LDPC, se a i -ésima linha de H tiver peso de linha ρ_i , o nó de verificação terá ρ_i fronteiras. Se a coluna j tiver peso de coluna γ_j , o nó de variável terá γ_j fronteiras. Usemos um exemplo para ilustrar a relação entre H e o gráfico de Tanner.

Exemplo 14.9 Consideremos um código $(7, 4, 3)$ de Hamming com a seguinte matriz de verificação de paridade

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14.71)$$

Determinemos o gráfico de Tanner para este código.

Este código tem 7 nós de variável e 3 nós de verificação. Com base nas entradas em H , cada nó de verificação é conectado a 4 nós de variável. A primeira linha de H corresponde à conexão ao nó de verificação 1. As entradas não nulas de H marcam os nós de variável conectados. O resultante gráfico de Tanner é mostrado na Fig. 14.23.

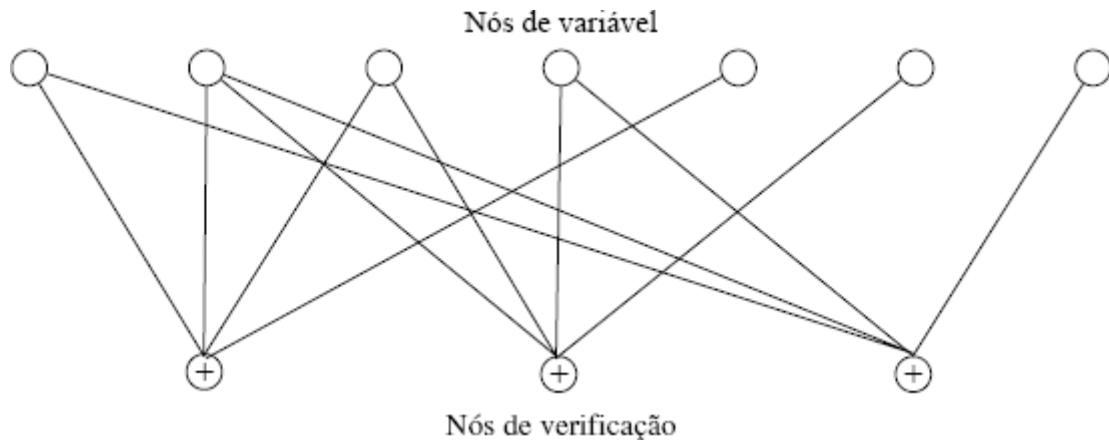


Figura 14.23 Gráfico de Tanner do código $(7, 4, 3)$ de Hamming.

Como códigos LDPC, em geral, têm mais de 1000 bits de comprimento, seus gráficos de Tanner são demasiadamente grandes para serem ilustrados na prática. Todavia, o conceito básico de gráfico de Tanner é muito útil no entendimento de códigos LDPC e de sua decodificação iterativa.

Um **ciclo** no gráfico de Tanner é marcado por uma malha fechada de fronteiras conectadas. A malha se origina e termina no mesmo nó de variável (ou de verificação). O comprimento de um ciclo é definido pelo número de fronteiras. No Exemplo 14.9, existem vários ciclos de comprimento 4 e de comprimento 6. Ciclos de comprimentos 4 e 6 são considerados ciclos **curtos**. Ciclos curtos são indesejáveis em alguns algoritmos de decodificação iterativa para códigos LDPC. Quando um gráfico de Tanner não tem ciclos curtos, a decodificação iterativa de códigos LDPC com base no chamado algoritmo soma-produto pode

convergir e gerar resultados próximos ao do decodificador MAP completo, que é demasiado complexo para ser implementado na prática.

Para evitar um ciclo de comprimento 4, a implementação do código LDPC impõe, em geral, uma restrição adicional à matriz de paridade \mathbf{H} : **Duas linhas ou colunas não podem ter mais que um componente comum**. Essa propriedade, conhecida como “restrição linha-coluna (LC)”, é suficiente e necessária para evitar ciclos de comprimento 4. A presença de ciclos é inevitável na maioria das implementações de códigos LDPC com base em buscas em computador. Um número significativo de pesquisadores se dedica ao estudo do desafiador problema de reduzir o número de, ou eliminar, ciclos curtos de comprimento 4, 6 e possivelmente 8. Aos leitores interessados, recomendamos o livro de Lin e Costello.²

A seguir, descreveremos dois métodos de decodificação para códigos LDPC.

Decodificação LDPC por Troca de Bits

O grande comprimento de códigos LDPC torna a decodificação um problema altamente desafiador. Dois dos mais comuns algoritmos de decodificação são o algoritmo de troca de bits (BF – *bit-flipping*) de decisão rígida e o algoritmo soma-produto (SPA – *sum-product algorithm*) de decisão suave.

O algoritmo de troca de bits (BF) opera em uma sequência de bits de decisão rígida $\mathbf{r} = 011010\dots010$. A verificação de paridade em \mathbf{r} gera o vetor de síndrome

$$\mathbf{s} = \mathbf{r}\mathbf{H}^T$$

Os bits de síndrome de valor 1 indicam falha de paridade. O algoritmo BF tenta trocar um bit em \mathbf{r} com base em como a troca afetaria os bits de síndrome.

Quando um bit de código participa em apenas uma verificação de paridade falhada, a troca desse bit, na melhor das hipóteses, corrigirá 1 verificação de paridade, mas causará $\gamma - 1$ novas falhas de paridade. Por essa razão, BF apenas troca bits que afetem um grande número de verificações de paridade falhadas. Um algoritmo BF simples consiste nos seguintes passos:²

Passo 1: Calcular as verificações de paridade $\mathbf{s} = \mathbf{r}\mathbf{H}^T$. Se todas as síndromes forem zero, interromper a decodificação.

Passo 2: Determinar o número de verificações de paridade falhadas para cada bit

$$f_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Passo 3: Identificar o conjunto de bits F_{\max} com maior f_i e trocar os bits em F_{\max} para gerar uma nova palavra de código \mathbf{r}' .

Passo 4: Fazer $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ e repetir os passos 1 a 3 até que o máximo número de iterações tenha sido alcançado.

Algoritmo Soma-Produto para a Decodificação LDPC

O algoritmo soma-produto (SPA) é o mais usado método para decodificação LDPC. Trata-se de um eficiente algoritmo de decodificação com entrada suave e saída suave, baseado na propagação de crença iterativa. O gráfico de Tanner facilita a interpretação de SPA. O algoritmo soma-produto é semelhante a uma gangorra. Em um passo, cada nó de variável passa informação, via suas fronteiras, aos nós de verificação conectados no fluxo de cima para baixo. No próximo passo, no fluxo de baixo para cima, cada nó de verificação devolve informação a todos os nós de variável a ele conectados.

Para entender o SPA, admitamos que a matriz de paridade \mathbf{H} seja de ordem $J \times n$, em que $J = n - k$ para um código de blocos LDPC (n, k) . Representemos a palavra de código pelos bits dos nós de variável $\{v_j, j = 1, \dots, n\}$. Para o j -ésimo nó de variável v_j , usemos

$$\mu_j = \{i : h_{ij} = 1, 1 \leq i \leq J\}$$

para denotar o conjunto de nós de variável conectados a v_j . Para o i -ésimo nó de verificação z_i , usemos

$$\sigma_i = \{j : h_{ij} = 1, 1 \leq j \leq n\}$$

para denotar o conjunto de nós de variável conectados a z_i .

Primeiro, definamos a probabilidade de satisfazer o nó de verificação $z_i = 0$ quando $v_j = u$ como

$$R_{i,j}(u) = P[z_i = 0 | v_j = u] \quad u = 0, 1 \quad (14.72)$$

Denotemos o vetor dos bits de paridade por v . Podemos usar o teorema de Bayes sobre probabilidade condicional (Seção 8.1) para mostrar que

$$\begin{aligned} R_{i,j}(u) &= \sum_{v: v_j=u} P[z_i = 0 | v] \cdot P[v | v_j = u] \\ &= \sum_{v_\ell: \ell \in \sigma_i, \ell \neq j} P[z_i = 0 | v_j = u, \{v_\ell : \ell \in \sigma_i, \ell \neq j\}] \cdot P[\{v_\ell : \ell \in \sigma_i, \ell \neq j\} | v_j = u] \end{aligned} \quad (14.73)$$

Essa é a mensagem passada na direção de baixo para cima.

Para que o nó de verificação z_i estime a probabilidade $P[\{v_\ell : \ell \in \sigma_i, \ell \neq j\} | v_j = u]$, o mesmo deve colher informação do conjunto de nós de variável σ_i . Definamos a probabilidade de $v_\ell = x$ obtida de seus nós de verificação, excetuando o i -ésimo nó, como

$$Q_{i,\ell}(x) = P[v_\ell = x | \{z_m = 0 : m \in \mu_\ell, m \neq i\}] \quad x = 0, 1 \quad (14.74)$$

Além disso, admitamos que as probabilidades dos nós de variável sejam aproximadamente independentes. Podemos estimar

$$P[\{v_\ell : \ell \in \sigma_i, \ell \neq j\} | v_j = u] = \prod_{\ell \in \sigma_i, \ell \neq j} Q_{i,\ell}(v_\ell) \quad (14.75)$$

Isso significa que os nós de verificação podem atualizar a mensagem via

$$R_{i,j}(u) = \sum_{v_\ell: \ell \in \sigma_i, \ell \neq j} P[z_i = 0 | v_j = u, \{v_\ell : \ell \in \sigma_i, \ell \neq j\}] \cdot \prod_{\ell \in \sigma_i, \ell \neq j} Q_{i,\ell}(v_\ell) \quad (14.76)$$

Reparemos que a probabilidade de $P[z_i = 0 | v_j = u, \{v_\ell : \ell \in \sigma_i, \ell \neq j\}]$ é 0 ou 1; ou seja, o nó de verificação $z_i = 0$ tem sucesso ou falha. A relação na Eq. (14.76) permite que $R_{i,j}(u)$ seja atualizada quando o i -ésimo nó de verificação receber $Q_{i,\ell}(v_\ell)$.

Uma vez que $R_{i,j}(u)$ tenha sido atualizada, pode ser passada aos nós de variável na direção de baixo para cima, para atualizar $Q_{i,\ell}(x)$. Usando, mais uma vez, o teorema de Bayes (Seção 8.1), temos

$$Q_{i,\ell}(x) = \frac{P[v_\ell = x] P[\{z_m = 0 : m \in \mu_\ell, m \neq i\} | v_\ell = x]}{P[\{z_m = 0 : m \in \mu_\ell, m \neq i\}]} \quad (14.77)$$

Supondo que as verificações de paridade sejam independentes, podemos escrever

$$P[\{z_m = 0 : m \in \mu_\ell, m \neq i\} | v_\ell = x] = \prod_{m \in \mu_\ell, m \neq i} R_{m,\ell}(x) \quad (14.78)$$

Agora, definamos a probabilidade de bit de variável *a priori* como $p_\ell(x) = P(v_\ell = x)$. Seja $\alpha_{i,\ell}$ o fator de normalização tal que $Q_{i,\ell}(1) + Q_{i,\ell}(0) = 1$. Com base na Eq. (14.76), podemos atualizar $Q_{i,\ell}(x)$ no nó de variável:

$$Q_{i,\ell}(x) = \alpha_{i,\ell} \cdot p_\ell(x) \prod_{m \in \mu_\ell, m \neq i} R_{m,\ell}(x) \quad (14.79)$$

Essa mensagem será, então, passada de volta na direção de cima para baixo aos nós de verificação. A Fig. 14.24 ilustra, no algoritmo soma-produto, o funcionamento básico da passagem de mensagem nas direções de baixo para cima e de cima para baixo. O SPA pode ser resumido da seguinte forma:

Inicialização: Seja $m = 0$ e seja m_{\max} o número máximo de iterações. Para cada $h_{i,\ell} = 1$ em H , usar as probabilidades anteriores para especificar

$$Q_{i,\ell}^{(0)}(1) = p_\ell(1) \quad \text{e} \quad Q_{i,\ell}^{(0)}(0) = p_\ell(0)$$

Passo 1: Nô de verificação i atualiza sua informação

$$R_{i,j}^{(m)}(1) = \sum_{v_\ell: \ell \in \sigma_i, \ell \neq j} P[z_i = 0 | v_j = 1, \{v_\ell\}] \cdot \prod_{\ell \in \sigma_i, \ell \neq j} Q_{i,\ell}^{(m)}(v_\ell) \quad (14.80a)$$

$$R_{i,j}^{(m)}(0) = \sum_{v_\ell: \ell \in \sigma_i, \ell \neq j} P[z_i = 0 | v_j = 0, \{v_\ell\}] \cdot \prod_{\ell \in \sigma_i, \ell \neq j} Q_{i,\ell}^{(m)}(v_\ell) \quad (14.80b)$$

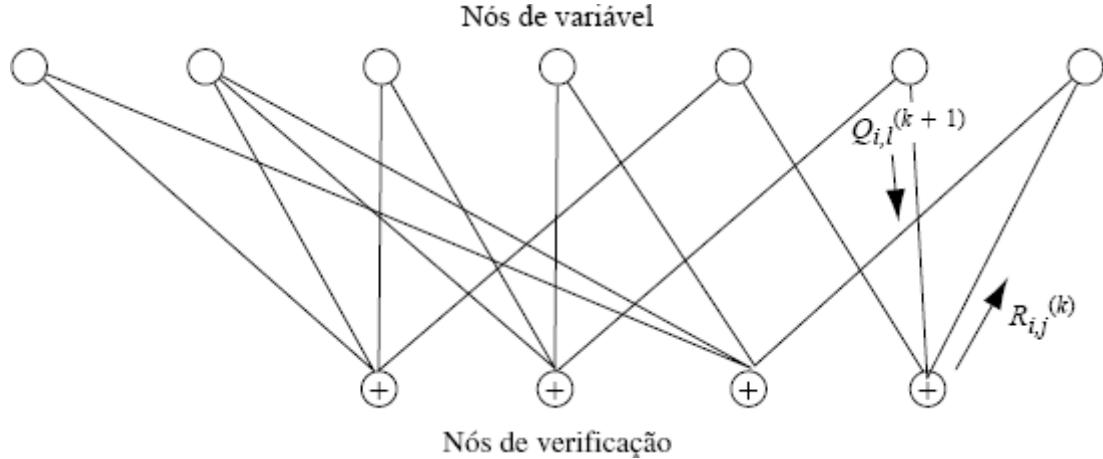


Figura 14.24 Passagem de mensagem no algoritmo soma-produto.

Passo 2: Para cada nó de variável (indexado por ℓ), atualizar

$$Q_{i,\ell}^{(m+1)}(0) = \alpha_{i,\ell}^{(m+1)} \cdot p_\ell(0) \prod_{m \in \mu_\ell, m \neq i} R_{m,\ell}^{(m)}(0) \quad (14.81a)$$

$$Q_{i,\ell}^{(m+1)}(1) = \alpha_{i,\ell}^{(m+1)} \cdot p_\ell(1) \prod_{m \in \mu_\ell, m \neq i} R_{m,\ell}^{(m)}(1) \quad (14.81b)$$

em que o fator de normalização $\alpha_{i,\ell}^{(m+1)}$ é selecionado de modo que

$$Q_{i,\ell}^{(m+1)}(0) + Q_{i,\ell}^{(m+1)}(1) = 1$$

Passo 3: Nos nós de variável, estimar as probabilidades *a posteriori*

$$P^{(m+1)}[v_\ell = 0 | \mathbf{r}] = \alpha_{i,\ell}^{(m+1)} \cdot p_\ell(0) \prod_{m \in \mu_\ell} R_{m,\ell}^{(m)}(0) \quad (14.82a)$$

$$P^{(m+1)}[v_\ell = 1 | \mathbf{r}] = \alpha_{i,\ell}^{(m+1)} \cdot p_\ell(1) \prod_{m \in \mu_\ell} R_{m,\ell}^{(m)}(1) \quad (14.82b)$$

em que o fator de normalização $\alpha_{i,\ell}^{(m+1)}$ é selecionado de modo que

$$P^{(m+1)}[v_\ell = 0 | \mathbf{r}] + P^{(m+1)}[v_\ell = 1 | \mathbf{r}] = 1$$

Passo 4: Tomar decisões rígidas de cada bit codificado

$$\hat{v}_\ell = \text{sign} \left\{ \log \frac{P^{(m+1)}[v_\ell = 1 | \mathbf{r}]}{P^{(m+1)}[v_\ell = 0 | \mathbf{r}]} \right\}$$

Se a palavra decodificada satisfizer todas as verificações de paridade, interromper a decodificação. Caso contrário, retornar ao passo 1 para mais uma iteração.

Reparemos que os sinais de entrada externos $\{r_i\}$ são envolvidos somente durante a estimação das probabilidades *a priori* $p_\ell(1)$ e $p_\ell(0)$. SPA usa as probabilidades *a priori* da seguinte forma:

$$p_\ell(1) = \frac{p(\mathbf{r}|v_\ell = 1)}{p(\mathbf{r}|v_\ell = 1) + p(\mathbf{r}|v_\ell = 0)} \quad \text{e} \quad p_\ell(0) = \frac{p(\mathbf{r}|v_\ell = 0)}{p(\mathbf{r}|v_\ell = 1) + p(\mathbf{r}|v_\ell = 0)}$$

Para um exemplo mais concreto, consideremos o caso de um canal AWGN com modulação BPSK. Para v_ℓ , a amostra do sinal recebido é

$$\mathbf{r}_\ell = \sqrt{E_b}(2v_\ell - 1) + \mathbf{w}_\ell$$

em que \mathbf{w}_ℓ é gaussiano com média zero e variância $N/2$. Como $\{r_\ell\}$ é independente, quando recebemos $\mathbf{r}_\ell = r_\ell$, podemos usar

$$p_\ell(1) = \frac{1}{1 + \exp\left(-4\frac{\sqrt{E_b}}{N}r_\ell\right)} \quad \text{e} \quad p_\ell(0) = \frac{1}{1 + \exp\left(4\frac{\sqrt{E_b}}{N}r_\ell\right)}$$

Isso completa a apresentação do algoritmo soma-produto para a decodificação de códigos LDPC.

14.13 EXERCÍCIOS COM O MATLAB

Nesta seção, apresentamos programas MATLAB para ilustrar alguns exemplos de codificadores e decodificadores de blocos. Focamos o caso simples de decodificação de decisão rígida com base em síndromes.

EXERCÍCIO COMPUTACIONAL 14.1

Neste primeiro experimento, apresentamos um programa para a decodificação do código de blocos linear (6, 3) do Exemplo 14.1.

```
% Matlab Program <Ex14_1.m>
% para ilustrar a codificação e a decodificação do código de blocos (6, 3)
```

```

0 1 1
1 1 0
1 0 0
0 1 0
0 0 1];
E=[0 0 0 0 0 0 %Lista de erros corrigíveis
    1 0 0 0 0 0
    0 1 0 0 0 0
    0 0 1 0 0 0
    0 0 0 1 0 0
    0 0 0 0 1 0
    0 0 0 0 0 1
    1 0 0 0 1 0];
K=size(E,1);
Syndrome=mod(mtimes(E,H'),2); %Determina Lista de Síndromes
r=[1 1 1 0 1 1] %Palavra de código recebida
display(['Síndrome ','Padrão de Erro'])
display(num2str([Syndrome E]))
x=mod(r*H',2); %Calcula a síndrome
for kk=1:K,
    if Syndrome(kk,:)==x,
        idxe=kk; %Determina o índice da síndrome
    end
end
syndrome=Syndrome(idxe,:); %Exibe a síndrome
error=E(idxe,:); %Correção de erro
cword=xor(r,error)

```

A execução deste programa MATLAB gerará os seguintes resultados, que incluem a palavra de código errada, a síndrome, o padrão de erro e a palavra de código corrigida:

```

Ex14_2
    Síndrome Padrão de Erro
    0 0 0 0 0 0 0 0 0
    1 0 1 1 0 0 0 0 0
    0 1 1 0 1 0 0 0 0
    1 1 0 0 0 1 0 0 0
    1 0 0 0 0 0 1 0 0
    0 1 0 0 0 0 0 1 0
    0 0 1 0 0 0 0 0 1
    1 1 1 1 0 0 0 1 0

    syndrome =
        0 1 1

    error =
        0 1 0 0 0 0

    cword =
        1 0 1 0 1 1

```

No próximo exercício, apresentamos um programa para decodificar o código (7, 4) de Hamming do Exemplo 14.3.

```

% Matlab Program <Ex14_3.m>
% para ilustrar a codificação e a decodificação de um código (7,4) de Hamming
%
G=[1 0 0 0 1 0 1 % Gerador de Código
   0 1 0 0 1 1 1
   0 0 1 0 1 1 0
   0 0 0 1 0 1 1];
H=[G(:,5:7)', eye(3,3)]; %Matriz de Verificação de Paridade
E=[1 0 0 0 0 0 0 %Lista de erros corrigíveis
   0 1 0 0 0 0 0
   0 0 1 0 0 0 0
   0 0 0 1 0 0 0
   0 0 0 0 1 0 0
   0 0 0 0 0 1 0
   0 0 0 0 0 0 1];
K=size(E,1);
Syndrome=mod(mtimes(E,H'),2); %Determina Lista de Síndromes
r=[1 0 1 0 1 1 1] %Palavra de código recebida
display(['Síndrome ','Padrão de Erro'])
display(num2str([Syndrome E]))
x=mod(r*H',2); %Calcula a síndrome
for kk=1:K,
    if Syndrome(kk,:)==x,
        idxe=kk; %Determina o índice da síndrome
    end
end
syndrome=Syndrome(idxe,:); %Exibe a síndrome
error=E(idxe,:); %Correção de erro
cword=xor(r,error)

```

A execução do programa MATLAB Ex14_3.m gerará uma palavra de código errônea r, sua síndrome, o padrão de erro e a palavra de código corrigida:

```

Ex14_3
r =
      1   0   1   0   1   1   1
      1   0   1   1   0   0   0   0   0
      1   1   1   0   1   0   0   0   0
      1   1   0   0   0   1   0   0   0
      0   1   1   0   0   0   1   0   0
      1   0   0   0   0   0   0   1   0
      0   1   0   0   0   0   0   0   1
      0   0   1   0   0   0   0   0   1
syndrome =
      1   0   0
error =
      0   0   0   0   1   0   0
cword =
      1   0   1   0   0   1   1

```

EXERCÍCIO COMPUTACIONAL 14.2

Em um exemplo mais realista, usaremos o código (7, 4) de Hamming para codificar uma longa sequência de bits de mensagem binária. Os bits codificados serão transmitidos em sinalização polar em um canal com ruído gaussiano branco aditivo (AWGN). A saída do canal será detectada usando o decodificador (7, 4) de Hamming, que é capaz de corrigir 1 erro de bit em cada palavra de código de comprimento 7.

Esse resultado é comparado com o da transmissão polar não codificada. Para sermos justos, a mesma razão E_b/N é considerada para cada bit de informação nos dois casos. O programa MATLAB Sim74Hamming.m é dado; a resultante comparação das BERs é mostrada na Fig. 14.25.

```
% Matlab Program <Sim74Hamming.m>
% Simulação do desempenho de um código (7, 4) de Hamming
% com sinalização em um canal AWGN e comparação
% de desempenho com sinalização polar sem codificação
clf;clear sigcw BER_uncate BER_coded
G=[1 0 0 0 1 0 1 % Gerador de Código
   0 1 0 0 1 1 1
   0 0 1 0 1 1 0
   0 0 0 1 0 1 1];
H=[1 1 1 0 1 0 0 % Matriz de Verificação de Paridade
   0 1 1 1 0 1 0
   1 1 0 1 0 0 1];
E=[1 0 0 0 0 0 0 % Padrões de erros
   0 1 0 0 0 0 0
   0 0 1 0 0 0 0
   0 0 0 1 0 0 0
   0 0 0 0 1 0 0
   0 0 0 0 0 1 0
   0 0 0 0 0 0 1
   0 0 0 0 0 0 0];
K2=size(E,1);
Syndrome=mod(mtimes(E,H'),2); % Lista de Síndromes
L1=25000;K=4*L1; % Decide o número de palavras de código
sig_b=round(rand(1,K)); % Gera bits de mensagem
sig_2=reshape(sig_b,4,L1); % 4 por coluna para FEC
xig_1=mod(G'*sig_2,2); % Codifica coluna por coluna
xig_2=2*reshape(xig_1,1,7*L1)-1; % Conversão P/S
AWnoisel=randn(1,7*L1); % Gera AWGN para Tx codificado
AWnoise2=randn(1,4*L1); % Gera AWGN para Tx não codificado
% Altera SNR e calcula BER
for ii=1:14
    SNRdb=ii;
```

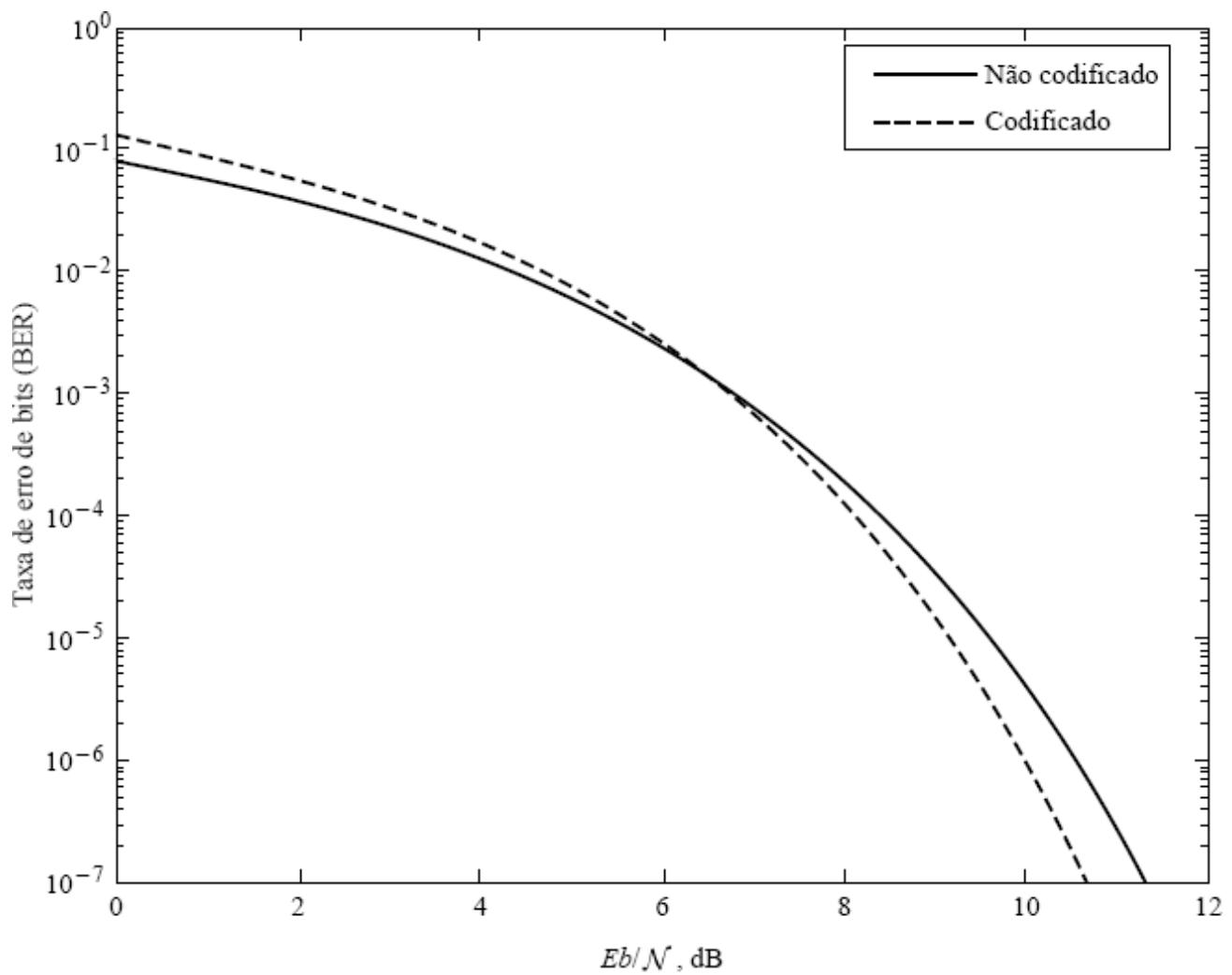


Figura 14.25 Comparação de taxas de erro de bits de transmissões de bits de mensagem por sinalização polar não codificada (linha cheia) e por sinalização polar codificada por código (7, 4) de Hamming (linha tracejada).

```

SNR=10^(SNRdb*0.1);
xig_n=sqrt(SNR*4/7)*xig_2+AWnoise1; %Adiciona AWGN e ajusta SNR
rig_1=(1+sign(xig_n))/2; %Decisão rígida
r=reshape(rig_1,7,L1)'; %S/P para formar palavras de código de 7 bits
x=mod(r*H',2); % Gera síndromes de erro
for k1=1:L1,
    for k2=1:K2,
        if Syndrome(k2,:)==x(k1,:),
            idxe=k2; %Determina o índice da síndrome
        end
    end
    error=E(idxe,:); %Examina padrão de erro
    cword=xor(r(k1,:),error); %Correção de erro
    sigcw(:,k1)=cword(1:4); %mantém bits de mensagem
end
cw=reshape(sigcw,1,K);
BER_coded(ii)=sum(abs(cw-sig_b))/K; % BER codificada em bits de informação

% Simulação sem codificação, sem código de Hamming
xig_3=2*sig_b-1; % Sinalização polar
xig_m=sqrt(SNR)*xig_3+AWnoise2; % Adiciona AWGN e ajusta SNR
rig_1=(1+sign(xig_m))/2; % Decisão rígida
BER_uncode(ii)=sum(abs(rig_1-sig_b))/K; % Calcula BER
end
EboverN=[1:14]-3; % Precisa notar que SNR = 2 Eb/N

```

Naturalmente, quando E_b/N é baixa, há uma tendência de mais que 1 erro por palavra de código. Assim, quando há mais de 1 erro de bit, o decodificador ainda considerará a palavra de código como corrompida por apenas erro de bit. A tentativa de corrigir 1 erro de bit pode, na verdade, adicionar um erro de bit. Quando E_b/N é alta, é mais provável que a palavra de código tenha, no máximo, 1 erro de bit. Isso explica por que a BER codificada é pior para baixos valores de E_b/N e melhor para altos valores de E_b/N . A Fig. 14.3 dá uma aproximação otimista ao pressupor que um decodificador cognitivo não agirá quando o número de erros de bit em cada palavra de código for maior que 1. Seu desempenho é marginalmente melhor para baixos valores da razão E_b/N .

REFERÊNCIAS

1. C. E. Shannon, "A Mathematical Theory of Communication," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 27, pp. 379–423, 623–656, 1948.
2. S. Lin and D. Costello, *Error Control Coding: Fundamentals and Applications*, 2nd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2004.
3. W.W. Peterson and E. J. Weldon, Jr., *Error Correcting Codes*, 2nd ed., Wiley, New York, 1972.
4. P. Elias, "Coding for Noisy Channels," *IRE Natl. Convention Rec.*, vol. 3, part 4, pp. 37–46, 1955.
5. A. J. Viterbi, "Convolutional Codes and Their Performance in Communications Systems," *IEEE Trans. Commun. Technol.*, vol. CT-19, pp. 751–771, Oct. 1971.
6. J. L. Massey, *Threshold Decoding*, MIT Press, Cambridge, MA, 1963.
7. J. K. Wolf, "Efficient Maximum-Likelihood Decoding of Linear Block Codes Using a Trellis," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-24, pp. 76–80, Jan. 1978.
8. G. D. Forney, Jr., *Concatenated Codes*, MIT Press, Cambridge, MA, 1966.
9. D. Chase, "A Class of Algorithms for Decoding Block Codes with Channel Measurement Information," *IEEE Trans. Inform. Theory*, IT-18, pp. 170–182, 1972.
10. J. Hagenauer and P. Hoeher, "A Viterbi Algorithm with Soft-Decision Outputs and Its Applications," *Proc. of IEEE Globecom*, pp. 1680–1686, Nov. 1989.
11. H. L. Van Trees, *Detection, Estimation, and Modulation Theory*, Part I, Wiley InterScience, 2001 (reprint), Hoboken, NJ.
12. C. Berrou, A. Glavieux, and P. Thitimajshima, "Near Shannon Limit Error Correcting Coding and Decoding: Turbo Codes," *Proc. 1993 IEEE International Conference on Communications*, pp. 1064–1070, Geneva, Switzerland, May 1993.

13. L. R. Bahl, J. Cocke, F. Jelinek, and J. Raviv, "Optimum Decoding of Linear Codes for Minimizing Symbol Error Rate," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-20, pp. 284–287, March 1974.
14. C. Berrou and A. Glavieux, "Near Optimum Error Correcting Coding and Decoding: Turbo-Codes," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 44, no. 10, pp. 1261–1271, Oct. 1996.
15. R. G. Gallager, *Low Density Parity Check Codes*, Monograph, MIT Press, Cambridge, MA, 1963.
16. David J. C. MacKay and R. M. Neal, "Good Codes Based on Very Sparse Matrices," *Fifth IMA Conference on Cryptography and Coding, Lecture Notes on Computer Science no. 1025*, Colin Boyd, Ed., Springer, Berlin, 1995 pp. 100–111.
17. D. J. C. MacKay and R. M. Neal, "Near Shannon Limit Performance of Low Density Parity Check Codes," *Electron. Lett.*, vol. 33, March 13, 1997.
18. R. M. Tanner, "A Recursive Approach to Low Complexity Codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, IT-27, pp. 533–547, Sept. 1981.

EXERCÍCIOS

- 14.1-1** Códigos (23, 12) de Golay são códigos corretores de três erros. Comprove que $n = 23$ e $k = 12$ satisfazem o limite de Hamming exatamente para $t = 3$.
- 14.1-2** (a) Determine o limite de Hamming para um código ternário (cujos três símbolos são 0, 1, 2).
(b) Um código (11, 6) ternário existe e é capaz de corrigir até dois erros. Comprove que esse código satisfaz o limite de Hamming exatamente.
- 14.1-3** Confirme a possibilidade de um código binário (18, 7) corrigir até três erros. Esse código será capaz de corrigir até quatro erros?

- 14.2-1** Se \mathbf{G} e \mathbf{H} forem as matrizes geradora e de verificação de paridade, respectivamente, mostre que

$$\mathbf{G} \mathbf{H}^T = 0$$

- 14.2-2** Dada a matriz geradora

$$\mathbf{G} = [1 \quad 1 \quad 1]$$

construa um código (3, 1). Quantos erros esse código é capaz de corrigir? Determine a palavra de código para os vetores de dados $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{d} = \mathbf{1}$. Comente o resultado.

- 14.2-3** Refaça o Exercício 14.2-2 para

$$\mathbf{G} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

Isso produz um código (5, 1).

- 14.2-4** Uma matriz geradora

$$\mathbf{G} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

gera um código (4,2).

- (a) Esse código é sistemático?
- (b) Qual é a matriz de verificação de paridade desse código?
- (c) Determine as palavras de código para todas as entradas possíveis.
- (d) Determine a distância mínima do código e o número de erros de bit que esse código é capaz de corrigir.

14.2-5 Considere o seguinte código de blocos linear sistemático $(k+1, k)$, com dígito de verificação de paridade c_{k+1} dado por

$$c_{k+1} = d_1 + d_2 + \cdots + d_k \quad (14.83)$$

- (a) Construa uma adequada matriz geradora para esse código.
- (b) Construa o código gerado por essa matriz para $k=3$.
- (c) Determine a capacidade de detecção ou correção de erros desse código.
- (d) Mostre que

$$\mathbf{c}\mathbf{H}^T = 0$$

e

$$\mathbf{r}\mathbf{H}^T = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{se não ocorrer erro} \\ \mathbf{1} & \text{se ocorrer um único erro} \end{cases}$$

14.2-6 Considere uma matriz geradora \mathbf{G} para um código $(6, 3)$ não sistemático

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Construa o código para essa \mathbf{G} e mostre que d_{\min} , a mínima distância entre palavras de código, é 3. Em consequência, esse código é capaz de corrigir pelo menos um erro.

14.2-7 Refaça o Exercício 14.2-6 para

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

14.2-8 Determine uma matriz geradora \mathbf{G} para um código de blocos linear $(15, 11)$ detector de um erro. Determine a palavra de código para o vetor de dados **10111010101**.

14.2-9 Para um código de blocos linear sistemático $(6, 3)$, os três dígitos de verificação de paridade c_4 , c_5 e c_6 são

$$c_4 = d_1 + d_2 + d_3$$

$$c_5 = d_1 + d_2$$

$$c_6 = d_1 + d_3$$

- (a) Construa uma adequada matriz geradora para esse código.
- (b) Construa o código gerado por essa matriz.
- (c) Determine a capacidade de correção de erros desse código.
- (d) Prepare uma tabela de decodificação apropriada.
- (e) Decodifique as seguintes palavras recebidas: **101100**, **000110**, **101010**.

14.2-10 (a) Construa uma tabela de código para o código $(6, 3)$ gerado pela matriz \mathbf{G} no Exercício 14.2-6.
 (b) Prepare uma tabela de decodificação apropriada.

14.2-11 Construa um código de blocos linear $(7, 4)$ corretor de um erro (código de Hamming) e a correspondente tabela de decodificação.

14.2-12 Para o código $(6, 3)$ no Exemplo 14.1, a tabela de decodificação é dada na Tabela 14.3. Mostre que, se usarmos essa tabela de decodificação e ocorrer um padrão de dois erros **010100** ou **001001**, os erros não serão corrigidos. Caso seja desejado corrigir um único padrão de dois erros **010100** (e seis padrões de um erro), construa uma tabela de decodificação apropriada e comprove que a mesma, de fato, corrige o padrão de dois erros **010100** e não é capaz de corrigir quaisquer outros padrões de dois erros.

14.2-13 (a) Dado $k = 8$, determine o mínimo valor de n para um código capaz de corrigir pelo menos um erro.

(b) Escolha uma matriz geradora \mathbf{G} para esse código.

(c) Quantos erros duplos esse código é capaz de corrigir?

(d) Construa uma tabela de decodificação (síndromes e correspondentes padrões de erro corrigíveis).

14.2-14 Considere um código $(6, 2)$ gerado pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Construa a tabela de código para esse código e determine a mínima distância entre palavras de código.

(b) Prepare uma tabela de decodificação apropriada.

Sugestão: Esse código é capaz de corrigir todos os padrões de erro simples, sete padrões de dois erros e dois padrões de erros triplos. Escolha os desejados sete padrões de erros duplos e os dois padrões de erros triplos.

14.3-1 (a) Use o polinômio gerador $g(x) = x^3 + x + 1$ para construir um código cíclico $(7, 4)$ sistemático.

(b) Qual é a capacidade de correção de erros desse código?

(c) Construa a tabela de decodificação.

(d) Se a palavra recebida for **1101100**, determine a palavra de dados transmitida.

14.3-2 Um código de Golay $(23, 12)$ corretor de três erros é um código cíclico com um polinômio gerador

$$g(x) = x^{11} + x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x + 1$$

Determine as palavras de código para os vetores de dados **000011110000**, **101010101010** e **1100010101110**.

14.3-3 Fatore o polinômio

$$x^3 + x^2 + x + 1$$

Sugestão: Um polinômio de terceira ordem deve ter um fator de primeiro grau. Os únicos polinômios de primeiro grau que são primos (não fatoráveis) são x e $x + 1$. Como x não é um fator do polinômio dado, tente $x + 1$. Divida $x^3 + x^2 + x + 1$ por $x + 1$.

14.3-4 O conceito explicado no Exercício 14.3-3 pode ser estendido para fatorar um polinômio de grau arbitrário. Usando essa técnica, fatore

$$x^5 + x^4 + x^2 + 1$$

Sugestão: Deve haver pelo menos um fator de primeiro grau. Tente dividir pelos dois polinômios primos de primeiro grau x e $x + 1$. O dado polinômio do quinto grau pode agora ser expresso como $\varphi_1(x)\varphi_4(x)$,

em que $\varphi_1(x)$ é um polinômio de primeiro grau e $\varphi_4(x)$, um polinômio de quarto grau que pode ou não conter um fator de primeiro grau. Tente dividir $\varphi_4(x)$ por x e $x + 1$. Se não funcionar, deve haver dois polinômios do segundo grau que sejam primos. Os possíveis polinômios do segundo grau são x^2 , $x^2 + 1$, $x^2 + x$ e $x^2 + x + 1$. Determine quais são primos (não divisíveis por x ou $x + 1$). A seguir, tente dividir $\varphi_4(x)$ por esses polinômios primos do segundo grau. Se nenhum for um fator, $\varphi_4(x)$ deve ser um polinômio primo do quarto grau, com fatores $\varphi_1(x)$ e $\varphi_4(x)$.

- 14.3-5** Use o conceito explicado no Exercício 14.3-4 para fatorar um polinômio de sétimo grau $x^7 + 1$.

Sugestão: Determine os fatores primos do primeiro, segundo e terceiro graus. Os possíveis polinômios do terceiro grau são x^3 , $x^3 + 1$, $x^3 + x$, $x^3 + x + 1$, $x^3 + x^2$, $x^3 + x^2 + 1$, $x^3 + x^2 + x$ e $x^3 + x^2 + x + 1$. Veja a sugestão para o Exercício 14.3-4.

- 14.3-6** A Eq. (14.16) sugere um método para construir uma matriz geradora \mathbf{G}' para um código cíclico,

$$\mathbf{G}' = \begin{bmatrix} x^{k-1}g(x) \\ x^{k-2}g(x) \\ \vdots \\ g(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_{n-k+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_{n-k+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g_1 & g_2 & \cdots & g_{n-k+1} \end{bmatrix}$$

em que $g(x) = g_1x^{n-k} + g_2x^{n-k-1} + \dots + g_{n-k+1}$ é o polinômio gerador. Em geral, esse é um código cíclico não sistemático.

- (a) Para um código cíclico (7, 4) corretor de um erro simples com um polinômio gerador $g(x) = x^3 + x^2 + 1$, determine \mathbf{G}' e construa esse código.
 (b) Comprove que esse código é idêntico ao deduzido no Exemplo 14.3 (Tabela 14.4).

- 14.3-7** A matriz geradora \mathbf{G} para um código cíclico sistemático (Exercício 14.3-6) pode ser obtida da observação de que a adição de qualquer linha de uma matriz geradora a qualquer outra linha produz uma nova matriz geradora válida, pois a palavra de código é formada por combinações lineares de dígitos de dados. Além disso, para um código sistemático, a matriz geradora deve ter uma matriz identidade I_k nas primeiras k colunas. Uma matriz desse tipo é formada passo a passo, como indicado a seguir. Observe que, no Exercício 14.3-6, cada linha em \mathbf{G}' é um deslocamento à esquerda da linha imediatamente abaixo, e a última linha é $g(x)$. Inicie com a k -ésima (última) linha $g(x)$. Como $g(x)$ é de grau $n - k$ essa linha tem o elemento 1 na k -ésima coluna, como necessário. Para a $(k - 1)$ -ésima linha, use a última linha com um deslocamento à esquerda. Para formar I_k , é necessário que a $(k - 1)$ -ésima linha tenha um 0 na k -ésima coluna. Se houver um 0 na k -ésima coluna dessa $(k - 1)$ -ésima linha, a mesma deve ser aceita como uma $(k - 1)$ -ésima linha válida. Caso contrário, a k -ésima linha deve ser adicionada à $(k - 1)$ -ésima linha para que um 0 seja obtido na k -ésima coluna. A linha resultante é a $(k - 1)$ -ésima linha final. Essa linha, com um deslocamento à esquerda, produzirá a $(k - 2)$ -ésima linha. Caso a nova $(k - 2)$ -ésima linha não tenha um 0 na k -ésima coluna, a ela deve ser adicionada a k -ésima (última) linha para que o desejado 0 seja obtido. Esse procedimento é repetido até que todas as k linhas tenham sido formadas. Isso produz a matriz geradora para um código cíclico (n, k) sistemático.

- (a) Para um código cíclico (7, 4) sistemático corretor de erro simples, com polinômio gerador $g(x) = x^3 + x^2 + 1$, determine G e construa o código.
 (b) Comprove que esse código é idêntico ao na Tabela 14.5 (Exemplo 14.4).
 (a) Use o polinômio gerador $g(x) = x^3 + x + 1$ para determinar a matriz geradora G' para um código cíclico (7, 4) não sistemático.
 (b) Determine o código gerado por esta matriz \mathbf{G}' .
 (c) Determine a capacidade de correção de erros desse código.

14.3-9 Use o polinômio gerador $g(x) = x^3 + x + 1$ (Exercício 14.3-8) para determinar a matriz geradora G para um código cíclico $(7, 4)$ sistemático.

14.3-10 Discuta a capacidade de correção de erros de um código cíclico $(\lambda n, \lambda k)$ entrelaçado, com $\lambda = 10$ e usando um código BCH $(31, 16)$ corretor de três erros.

14.3-11 O polinômio gerador

$$g(x) = x^{10} + x^8 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$$

gera um código $(15, 5)$ BCH cíclico.

- (a) Determine a matriz geradora de código (cíclico).
- (b) Para o dado de entrada do codificador $d = 10110$, determine a correspondente palavra de código.
- (c) Determine quantos erros esse código é capaz de corrigir.

14.4-1 Um dado não codificado é transmitido com uso de PSK em um canal AWGN com $E_b/N = 9$. Este dado é, então, codificado com um código de Golay $(23, 12)$ corretor de três erros (Exercício 14.1-1) e transmitido pelo mesmo canal, às mesmas taxa de dados e potência de transmissão.

- (a) Determine as probabilidades de erro P_{eu} e P_{ec} para os sistemas não codificado e codificado, respectivamente.
- (b) Caso seja desejado alcançar a probabilidade de erro P_{ec} calculada na parte com o sistema não codificado via aumento da potência transmitida, determine o necessário valor de E_b/N .

14.4-2 O código simples para detecção de erros em rajada (Fig. 14.4) também pode, com pequena modificação, ser usado como código corretor de erro simples. Os k dígitos de dados são divididos em grupos de b dígitos de comprimento, como na Fig. 14.4. A cada grupo é adicionado um dígito de verificação de paridade, de modo que cada segmento tenha $b + 1$ dígitos (b dígitos de dados e um dígito de verificação de paridade). O dígito de verificação de paridade é escolhido para assegurar que o número total de 1s em cada segmento de $b + 1$ dígitos seja par. Considere esses dígitos como novos dados e os aumente com o último segmento de $b + 1$ dígitos de verificação de paridade, como feito na Fig. 14.4. Os dados serão transmitidos da seguinte forma:

10111 01010 11011 10001 11000 01111

Mostre que esse código $(30, 20)$ é capaz de corrigir erros simples e, também, de detectar uma rajada de comprimento 5.

14.5-1 Para o codificador convolucional na Fig. 14.5, os bits recebidos são **01 00 01 00 10 11 11 00**. Use o algoritmo de Viterbi e o diagrama em treliças na Fig. 14.8 para decodificar essa sequência.

14.5-2 Para o codificador convolucional na Fig. E.14.5-2,

- (a) Desenhe os diagramas de estado e em treliças, e determine a sequência de dígitos de saída para os dígitos de dados **11010100**.
- (b) Use o algoritmo de Viterbi para decodificar as seguintes sequências recebidas

- (i) **100 110 111 101 001 101 001 010**
- (ii) **010 110 111 101 101 101 001 010**
- (iii) **111 110 111 111 001 101 001 101**

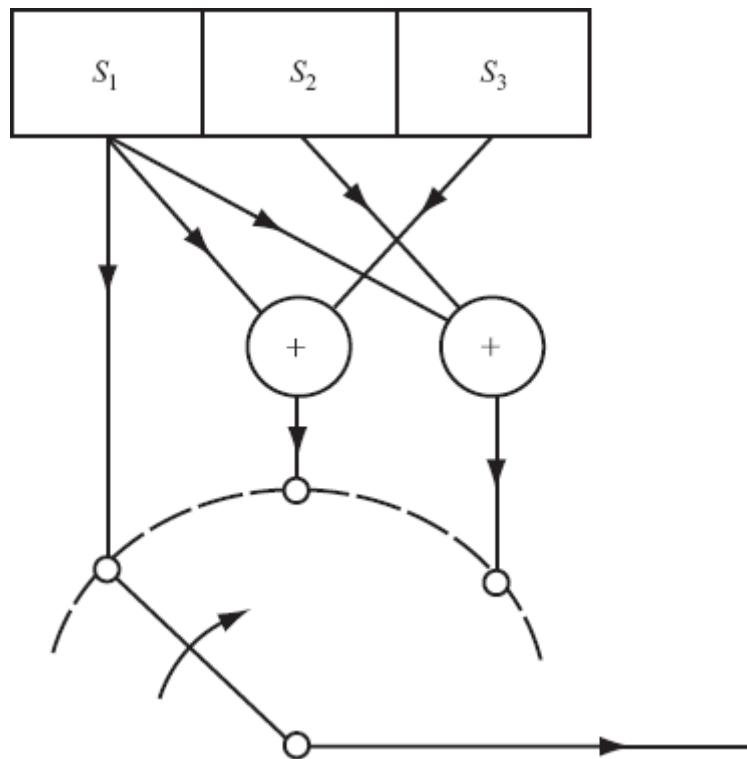


Figura E.14.5-2

14.5-3 Um codificador convolucional recursivo e sistemático (Fig. E.14.5-3) gera um código de taxa 1/2. Em contraste com exemplos anteriores, esse codificador é recursivo, com ramos de alimentação. Todavia, é possível o uso de simples diagramas de estado e em treliças para representar esse codificador. O decodificador de Viterbi de máxima verossimilhança também se aplica. Denote o valor de estado como (d_{k-1}, d_{k-2}) .

- (a) Ilustre o diagrama de transições de estados desse codificador.
- (b) Determine o correspondente diagrama em treliças.
- (c) Para uma sequência de dados de entrada **0100110100**, determine a correspondente palavra de código.

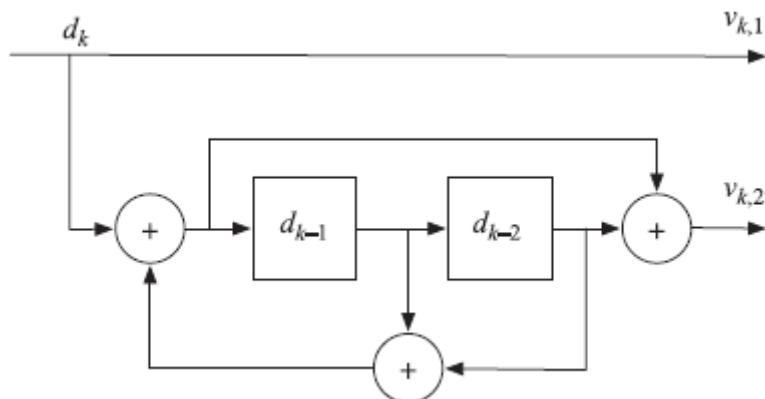


Figura E.14.5-3

14.6-1 Um código de blocos tem a seguinte matriz de verificação de paridade

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Determine a matriz geradora de código para esse código.
- (b) Determine a distância mínima.

(c) Determine o diagrama em treliças.

14.6-2 Para o código de blocos do Exercício 14.2-9,

(a) Determine a matriz geradora de código.

(b) Determine a distância mínima.

(c) Determine o diagrama em treliças.

-
- * Distância de Hamming e esfera de Hamming são definidas no Capítulo 13.
 - * Pode ser mostrado que, para códigos cíclicos, o polinômio gerador deve ter essa forma.
 - * Para um código sistemático, um dos dígitos de saída deve ser o próprio dígito de dado.
 - ** Em geral, em vez de deslocar um dígito por vez, b dígitos podem ser deslocados ao mesmo tempo. Nesse caso, $\eta \approx b/\ell$.
 - * A operação $[\cdot]$ é conhecida como “piso”. Em particular, $[x]$ significa o maior inteiro menor ou igual a x .
 - * Um processo aleatório x_k é um processo de Markov se sua probabilidade condicional satisfizer

$$p_{x_k|x_{k-1},\dots}(x_k|x_{k-1},\dots) = p_{x_k|x_{k-1}}(x_k|x_{k-1})$$

Em outras palavras, um processo de Markov tem uma memória muito curta. Toda a informação relevante a x_k , correspondente a toda sua história, é disponível em seu passado imediato x_{k-1} .

APÊNDICE A

ORTOGONALIDADE DE ALGUNS CONJUNTOS DE SINAIS

A.1 Ortogonalidade do Conjunto de Sinais Trigonométricos

Consideremos a integral I definida por

$$I = \int_{T_0} \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt \quad (\text{A.1a})$$

em que \int_{T_0} significa integração em qualquer intervalo contíguo de $T_0 = 2\pi/\omega_0$ segundos. Usando uma identidade trigonométrica (Apêndice E), a Eq. (A.1a) pode ser expressa como

$$I = \frac{1}{2} \left[\int_{T_0} \cos(n+m)\omega_0 t dt + \int_{T_0} \cos(n-m)\omega_0 t dt \right] \quad (\text{A.1b})$$

Como $\cos \omega_0 t$ executa um ciclo completo em qualquer intervalo de T_0 segundos, $\cos(n+m)\omega_0 t$ executa $(n+m)$ ciclos completos em qualquer intervalo com duração de T_0 segundos. Portanto, a primeira integral na Eq. (A.1b), que representa a área sob $(n+m)$ ciclos completos de uma senoide, é igual a zero. O mesmo argumento mostra que a segunda integral na Eq. (A.1b) também é zero, exceto quando $n = m$. Portanto, I na Eq. (A.1b) é zero para todo $n \neq m$. Quando $n = m$, a primeira integral na Eq. (A.1b) continua igual a zero, mas a segunda integral fornece

$$I = \frac{1}{2} \int_{T_0} dt = \frac{T_0}{2}$$

Assim,

$$\int_{T_0} \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{T_0}{2} & m = n \neq 0 \end{cases} \quad (\text{A.2a})$$

Podemos usar argumento similar para mostrar que

$$\int_{T_0} \sin n\omega_0 t \sin m\omega_0 t dt = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{T_0}{2}, & n = m \neq 0 \end{cases} \quad (\text{A.2b})$$

e

$$\int_{T_0} \sin n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt = 0 \quad \text{para todo } n \text{ e } m \quad (\text{A.2c})$$

A.2 Ortogonalidade do Conjunto de Sinais Exponenciais

O conjunto de exponenciais $e^{jn\omega_0 t}$ ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) é ortogonal em qualquer intervalo de duração T_0 , ou seja

$$\int_{T_0} e^{jm\omega_0 t} (e^{jn\omega_0 t})^* dt = \int_{T_0} e^{j(m-n)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T_0 & m = n \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Seja I a integral no lado esquerdo da Eq. (A.3):

$$\begin{aligned} I &= \int_{T_0} e^{jm\omega_0 t} (e^{jn\omega_0 t})^* dt \\ &= \int_{T_0} e^{j(m-n)\omega_0 t} dt \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

O caso $m = n$ é trivial: o integrando é a unidade, de modo que $I = T_0$. Todavia, quando $m \neq n$,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{j(m-n)\omega_0} e^{j(m-n)\omega_0 t} \Big|_{t_1}^{t_1+T_0} \\ &= \frac{1}{j(m-n)\omega_0} e^{j(m-n)\omega_0 t_1} [e^{j(m-n)\omega_0 T_0} - 1] = 0 \end{aligned}$$

O último resultado advém de $\omega_0 T_0 = 2\pi$ e $e^{j2\pi k} = 1$ para todos os valores inteiros de k .

APÊNDICE B

DESIGUALDADE DE CAUCHY-SCHWARZ

Provemos a seguinte desigualdade de Cauchy-Schwarz para um par de sinais de energia finita $f(t)$ e $g(t)$:

$$\left[\int_a^b f(t)g(t) dt \right]^2 \leq \left[\int_a^b f^2(t) dt \right] \left[\int_a^b g^2(t) dt \right] \quad (\text{B.1})$$

em que a igualdade ocorre somente se $g(t) = cf(t)$, sendo c uma constante arbitrária.

A desigualdade de Cauchy-Schwarz para funções de valores complexos e energia finita $X(\omega)$ e $Y(\omega)$ é dada por

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)Y(\omega) d\omega \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{B.2})$$

em que a igualdade ocorre somente se $Y(\omega) = cX^*(\omega)$, sendo c uma constante arbitrária.

Podemos provar a Eq. (B.1) da seguinte maneira: para qualquer valor real de λ , sabemos que

$$\int_a^b [\lambda f(t) - g(t)]^2 dt \geq 0 \quad (\text{B.3})$$

ou

$$\lambda^2 \int_a^b f^2(t) dt - 2\lambda \int_a^b f(t)g(t) dt + \int_a^b g^2(t) dt \geq 0 \quad (\text{B.4})$$

Como essa equação quadrática em λ é não negativa para qualquer valor de λ , seu discriminante deve ser não positivo, e a Eq. (B.1) segue. Se o discriminante for zero, então, para algum valor de $\lambda = c$, a forma quadrática se torna igual a zero. Isso é possível somente se $cf(t) - g(t) = 0$, e o resultado segue.

Para provar a Eq. (B.2), observemos que $|X(\omega)|$ e $|Y(\omega)|$ são funções reais, de modo que a desigualdade na Eq. (B.1) se aplica. Logo,

$$\left[\int_a^b |X(\omega)Y(\omega)| d\omega \right]^2 \leq \int_a^b |X(\omega)|^2 d\omega \int_a^b |Y(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{B.5})$$

em que a igualdade ocorre somente se $|Y(\omega)| = c|X(\omega)|$, sendo c uma constante arbitrária. Agora, recordemos que

$$\left| \int_a^b X(\omega)Y(\omega) d\omega \right| \leq \int_a^b |X(\omega)||Y(\omega)| d\omega = \int_a^b |X(\omega)Y(\omega)| d\omega \quad (\text{B.6})$$

em que a igualdade ocorre somente se $Y(\omega) = cX^*(\omega)$, sendo c uma constante arbitrária. A Eq. (B.2) segue imediatamente das Eq. (B.5) e (B.6).

APÊNDICE C

ORTOGONALIZAÇÃO DE GRAM-SCHMIDT DE UM CONJUNTO DE VETORES

Definimos a dimensionalidade de um espaço vetorial como o máximo número de vetores independentes no espaço. Assim, em um espaço de N dimensões, não pode haver mais que N vetores independentes. Alternativamente, sempre é possível encontrar um conjunto de N vetores independentes. Uma vez que um conjunto tenha sido escolhido, qualquer vetor nesse espaço pode ser expresso em termos dos vetores nesse conjunto (como uma combinação linear dos mesmos). Esse conjunto forma o que comumente chamamos de conjunto de base, que define o sistema de coordenadas. Tal conjunto de N vetores independentes não é, de modo algum, único. O leitor deve ter familiaridade com essa propriedade no espaço físico de três dimensões, no qual é possível encontrar um número infinito de conjuntos independentes de três vetores. Isso fica claro pelo fato de ser possível definir um número infinito de sistemas de coordenadas. Um conjunto ortogonal, no entanto, é de interesse especial, por ser de tratamento mais fácil que um conjunto não ortogonal. Se tivermos um conjunto de N vetores independentes, a partir deles, é possível obter outro conjunto de N vetores independentes que é ortogonal. Isso é feito com o procedimento de ortogonalização de Gram-Schmidt.

Na dedução a seguir, usamos o resultado [obtido na Eq. (2.27)] que diz que a projeção (ou componente) de um vetor \mathbf{x}_2 na direção de outro vetor \mathbf{x}_1 (Fig. C.1) é $c_{12}\mathbf{x}_1$, em que

$$c_{12} = \frac{\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle}{\|\mathbf{x}_1\|^2} \mathbf{y}_1 \quad (\text{C.1})$$

O erro nessa aproximação é o vetor $\mathbf{x}_2 - c_{12}\mathbf{x}_1$, ou seja,

$$\text{vetor de erro} = \mathbf{x}_2 - \frac{\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle}{\|\mathbf{x}_1\|^2} \mathbf{x}_1 \quad (\text{C.2})$$

O vetor de erro, mostrado tracejado na Fig. C.1, é ortogonal ao vetor \mathbf{x}_1 .

Para um entendimento físico desse procedimento, consideremos um caso simples de espaço bidimensional. Sejam \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 dois vetores independentes em um espaço bidimensional (Fig. C.1). Desejamos gerar, a partir de \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 , um novo conjunto de dois vetores ortogonais \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 . Por conveniência, escolhamos

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 \quad (\text{C.3})$$

Agora, busquemos um vetor \mathbf{y}_2 que seja ortogonal a \mathbf{y}_1 (e a \mathbf{x}_1). A Fig. C.1 mostra que o vetor de erro na aproximação de \mathbf{x}_2 por \mathbf{y}_1 (linhas tracejadas) é ortogonal a \mathbf{y}_1 e pode ser tomado como \mathbf{y}_2 .

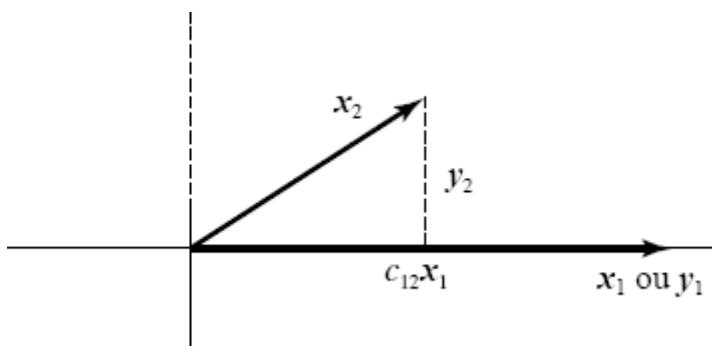


Figura C.1 Procedimento de Gram-Schmidt para um caso bidimensional.

Logo,

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_2 &= \mathbf{x}_2 - \frac{\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle}{\|\mathbf{x}_1\|^2} \mathbf{x}_1 \\ &= \mathbf{x}_2 - \frac{\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2 \rangle}{\|\mathbf{y}_1\|^2} \mathbf{y}_1\end{aligned}\tag{C.4}$$

As Eqs. (C.3) e (C.4) fornecem o desejado conjunto ortogonal. Reparemos que esse conjunto não é único. Há um número infinito de conjuntos de vetores ortogonais ($\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$) que podem ser gerados de ($\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$). Em nossa dedução, poderíamos ter começado com $\mathbf{y} = \mathbf{x}_2$, em vez de $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1$. Esse ponto de partida produziria um conjunto totalmente diferente.

O leitor pode estender esses resultados ao caso tridimensional. Se vetores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ e \mathbf{x}_3 formarem um conjunto independente nesse espaço, podemos formar vetores \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 como nas Eqs. (C.3) e (C.4). Para determinar \mathbf{y}_3 , aproximamos \mathbf{x}_3 em termos dos vetores \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 . O erro nessa aproximação deve ser ortogonal a \mathbf{y}_1 e a \mathbf{y}_2 e, portanto, pode ser tomado como o vetor ortogonal \mathbf{y}_3 . Assim,

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_3 &= \mathbf{x}_3 - \text{soma das projeções de } \mathbf{x}_3 \text{ em } \mathbf{y}_1 \text{ e } \mathbf{y}_2 \\ &= \mathbf{x}_3 - \frac{\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_3 \rangle}{\|\mathbf{y}_1\|^2} \mathbf{y}_1 - \frac{\langle \mathbf{y}_2, \mathbf{x}_3 \rangle}{\|\mathbf{y}_2\|^2} \mathbf{y}_2\end{aligned}\tag{C.5}$$

Esses resultados podem ser estendidos a um espaço de N dimensões. Em geral, dados N vetores independentes $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$, se procedermos por linhas semelhantes às anteriores, podemos obter um conjunto ortogonal $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_N$, em que

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1\tag{C.6}$$

e

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{x}_j - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\langle \mathbf{y}_k, \mathbf{x}_j \rangle}{\|\mathbf{y}_k\|^2} \mathbf{y}_k \quad j = 2, 3, \dots, N\tag{C.7}$$

Reparemos que esse é um dos infinitos conjuntos ortogonais que podem ser obtidos a partir de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$. Além disso, esse não é um conjunto ortonormal. O conjunto ortonormal $\hat{\mathbf{y}}_1, \hat{\mathbf{y}}_2, \dots, \hat{\mathbf{y}}_N$ pode ser obtido por normalização dos comprimentos dos respectivos vetores:

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \frac{\mathbf{y}_k}{\|\mathbf{y}_k\|}$$

Podemos aplicar esses conceitos ao espaço de sinais, pois existe uma correspondência biunívoca entre sinais e vetores. Se tivermos N sinais independentes $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$, podemos formar um conjunto de N sinais ortogonais $y_1(t), y_2(t), \dots, y_N(t)$,

$$\begin{aligned}y_1(t) &= x(t) \\ y_j(t) &= x_j(t) - \sum_{k=1}^{j-1} c_{kj} y_k(t) \quad j = 2, 3, \dots, N\end{aligned}\tag{C.8}$$

em que

$$c_{kj} = \frac{\int y_k(t) x_j(t) dt}{\int y_k^2(t) dt}\tag{C.9}$$

Reparemos que esse é um dos infinitos conjuntos ortogonais que podem ser formados a partir do conjunto $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$. O conjunto pode ser normalizado dividindo cada sinal $y_j(t)$ por sua energia.

Exemplo C.1 Os sinais exponenciais

$$g_1(t) = e^{-pt}u(t)$$

$$g_2(t) = e^{-2pt}u(t)$$

⋮

$$g_N(t) = e^{-Npt}u(t)$$

formam um conjunto de sinais independentes no espaço de N dimensões, em que N pode ser um inteiro qualquer. Todavia, esse conjunto não é ortogonal. Podemos usar o procedimento de Gram-Schmidt para obter um conjunto ortogonal para esse espaço. Seja $y_1(t), y_2(t), \dots, y_N(t)$ o desejado conjunto de base ortogonal; escolhamos

$$y_1(t) = g_1(t) = e^{-pt}u(t)$$

Das Eqs. (C.8) e (C.9), temos

$$y_2(t) = x_2(t) - c_{12}y_1(t)$$

em que

$$\begin{aligned} c_{12} &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y_1(t)x_2(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} y_1^2(t) dt} \\ &= \frac{\int_0^{\infty} e^{-pt}e^{-2pt} dt}{\int_0^{\infty} e^{-2pt} dt} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Logo,

$$y_2(t) = (e^{-2pt} - \frac{2}{3}e^{-pt})u(t) \quad (\text{C.10})$$

Do mesmo modo, prosseguimos com a determinação das funções restantes $y_3(t), \dots, y_N(t)$, e assim por diante. O leitor pode comprovar que esse é um conjunto mutuamente ortogonal.

APÊNDICE D

PROPRIEDADES BÁSICAS MATRIZES E OPERAÇÕES COM MATRIZES

D.1 Notação

Um vetor-coluna \mathbf{x} $n \times 1$ consiste em n entradas e é formado por

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (\text{D.1a})$$

O transposto de \mathbf{x} é um vetor-linha, representado por

$$\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n] \quad (\text{D.1b})$$

O transposto conjugado de \mathbf{x} também é um vetor-linha, escrito como

$$\mathbf{x}^H = (\mathbf{x}^*)^T = [x_1^* \ x_2^* \ \cdots \ x_n^*] \quad (\text{D.1c})$$

\mathbf{x}^H também é conhecido como hermitiano de \mathbf{x} .

Uma matriz $m \times n$ consiste em n vetores-coluna

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n] \quad (\text{D.2a})$$

$$= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \quad (\text{D.2b})$$

Também definimos a transposta e a hermitiana de \mathbf{A} como, respectivamente,

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^H = \begin{bmatrix} a_{1,1}^* & a_{2,1}^* & \cdots & a_{m,1}^* \\ a_{1,2}^* & a_{2,2}^* & \cdots & a_{m,2}^* \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1,n}^* & a_{2,n}^* & \cdots & a_{m,n}^* \end{bmatrix} \quad (\text{D.2c})$$

- Se $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, dizemos que \mathbf{A} é uma matriz simétrica.
- Se $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$, dizemos que \mathbf{A} é uma matriz hermitiana.

- Se $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$ e \mathbf{A} tiver apenas entradas reais, será hermitiana e simétrica.

D.2 Produto de Matrizes e Suas Propriedades

Para uma matriz \mathbf{A} $m \times n$ e uma matriz \mathbf{B} $n \times \ell$, com

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,\ell} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,\ell} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,\ell} \end{bmatrix} \quad (\text{D.3})$$

a matriz resultante do produto $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ tem dimensão $m \times \ell$ e é dada por

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & a_{1,\ell} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & a_{2,\ell} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m,1} & c_{m,2} & \cdots & a_{m,\ell} \end{bmatrix} \quad \text{em que} \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \quad (\text{D.4})$$

Em geral, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Na verdade, os produtos podem nem mesmo ser bem definidos. Para que possamos multiplicar \mathbf{A} e \mathbf{B} , o número de colunas de \mathbf{A} deve ser igual ao número de linhas de \mathbf{B} .

Em particular, o produto de um vetor-linha por um vetor-coluna é

$$\mathbf{y}^H \mathbf{x} = \sum_{k=1}^n y_k^* x_k \quad (\text{D.5a})$$

$$= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad (\text{D.5b})$$

Portanto, $\mathbf{x}^H \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$.

Dois vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} são ortogonais de $\mathbf{y}^H \mathbf{x} = \mathbf{x}^H \mathbf{y} = 0$.

O produto de matrizes tem diversas propriedades de uso frequente:

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \quad (\text{D.6a})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} \quad (\text{D.6b})$$

$$(\mathbf{AB})^* = \mathbf{A}^* \mathbf{B}^* \quad (\text{D.6c})$$

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \quad (\text{D.6d})$$

$$(\mathbf{AB})^H = \mathbf{B}^H \mathbf{A}^H \quad (\text{D.6e})$$

D.3 Matrizes Identidade e Diagonal

Uma matriz quadrada $n \times n$ é diagonal se todas as entradas fora da diagonal forem zero:

$$D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n) \quad (\text{D.7a})$$

$$= \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & d_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{bmatrix} \quad (\text{D.7b})$$

Uma matriz identidade \mathbf{I}_n tem entradas diagonais unitárias:

$$\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Para uma matriz quadrada \mathbf{A} $n \times n$, se existir uma matriz quadrada \mathbf{B} $n \times n$ tal que

$$\mathbf{BA} = \mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$$

então

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} \quad (\text{D.9})$$

é a inversa de \mathbf{A} . Por exemplo, dada uma matriz diagonal,

$$\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$$

$$\mathbf{D}^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \dots, \frac{1}{d_n}\right)$$

D.4 Determinante de Matriz Quadrada

O **determinante** de uma matriz quadrada \mathbf{A} $n \times n$ é definido recursivamente por

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \mathbf{M}_{i,j} \quad (\text{D.10})$$

em que \mathbf{M}_{ij} é um matriz $(n-1) \times (n-1)$, conhecida como o **menor** de \mathbf{A} , obtida pela eliminação da i -ésima linha e j -ésima coluna de \mathbf{A} . Especificamente, para uma matriz 2×2 ,

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

Como base na definição de determinante, para um escalar α ,

$$\det(\alpha \mathbf{A}) = \alpha^n \det(\mathbf{A}) \quad (\text{D.11a})$$

$$\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A}) \quad (\text{D.11b})$$

Para uma matriz identidade,

$$\det(\mathbf{I}) = 1 \quad (\text{D.11c})$$

Para duas matrizes quadradas \mathbf{A} e \mathbf{B} ,

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}) \quad (\text{D.11d})$$

Portanto,

$$\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = 1 \quad (\text{D.11e})$$

Para uma matriz A $m \times n$ e uma matriz B $n \times m$, temos

$$\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA) \quad (\text{D.12})$$

D.5 Traço

O traço de uma matriz quadrada A é a soma de suas entradas diagonais:

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} \quad (\text{D.13})$$

Para uma matriz A $m \times n$ e uma matriz B $n \times m$, temos

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA) \quad (\text{D.14})$$

D.6 Autodecomposição

Se uma matriz quadrada A $n \times n$ for hermitiana, a equação

$$Au = \lambda u \quad (\text{D.15})$$

especifica um autovalor λ e o associado autovetor u .

Quando A é hermitiana, seus autovalores são números reais. Além disso, A pode ser decomposta como

$$A = U \Lambda U^H \quad (\text{D.16})$$

em que a matriz

$$U = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n] \quad (\text{D.17})$$

consiste em autovetores ortogonais, tal que

$$UU^H = I_n \quad (\text{D.18})$$

Matrizes que satisfazem essa igualdade são denominadas matrizes unitárias.

Além disso, a matriz diagonal

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \ \lambda_2 \ \cdots \ \lambda_n) \quad (\text{D.19})$$

consiste nos correspondentes autovalores de A .

Como

$$U^H U = U U^H = I_n \quad (\text{D.20})$$

também podemos escrever

$$U^H A U = \Lambda \quad (\text{D.21})$$

Os autovalores de A têm características muito úteis. Em particular,

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad (\text{D.22a})$$

$$\text{Trace}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (\text{D.22b})$$

D.7 Matrizes Quadradas Hermitianas Especiais

Seja uma matriz \mathbf{A} $n \times n$ hermitiana. \mathbf{A} é **positiva definida** se, para qualquer vetor $\mathbf{x} \neq 0$ $n \times 1$, tivermos

$$\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \quad (\text{D.23})$$

\mathbf{A} é **positiva semidefinida** se, para qualquer vetor \mathbf{x} $n \times 1$, tivermos

$$\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0 \quad (\text{D.24})$$

\mathbf{A} é **negativa definida** se, para qualquer vetor $\mathbf{x} \neq 0$ $n \times 1$, tivermos

$$\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x} < 0 \quad (\text{D.25})$$

\mathbf{A} é positiva definida se e somente se todos seus autovalores forem positivos.

APÊNDICE E

MISCELÂNEA

E.1 Regra de L'Hôpital

Caso $\lim f(x)/g(x)$ resulte na forma indeterminada $0/0$ ou ∞/∞ ,

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{\dot{f}(x)}{\dot{g}(x)} \quad (\text{E.1})$$

E.2 Séries de Taylor e de Maclaurin

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} \dot{f}(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} \ddot{f}(a) + \dots$$

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} \dot{f}(0) + \frac{x^2}{2!} \ddot{f}(0) + \dots$$

E.3 Séries de Potências

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \quad x^2 < \frac{\pi^2}{4}$$

$$Q(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1 \cdot 3}{x^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{x^6} + \dots \right)$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + \binom{n}{k}x^k + \dots + x^n$$
$$\approx 1 + nx \quad |x| \ll 1$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad |x| < 1$$

E.4 Somas

$$\sum_{m=0}^k r^m = \frac{r^{k+1} - 1}{r - 1} \quad r \neq 1$$

$$\sum_{m=M}^N r^m = \frac{r^{N+1} - r^M}{r - 1} \quad r \neq 1$$

$$\sum_{m=0}^k \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{b^k(a - b)} \quad a \neq b$$

E.5 Números Complexos

$$e^{\pm j\pi/2} = \pm j$$

$$e^{\pm jn\pi} = \begin{cases} 1 & n \text{ par} \\ -1 & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

$$e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \sin \theta$$

$$a + jb = re^{j\theta} \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right)$$

$$(re^{j\theta})^k = r^k e^{jk\theta}$$

$$(r_1 e^{j\theta_1})(r_2 e^{j\theta_2}) = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

E.6 Identidades Trigonométricas

$$e^{\pm jx} = \cos x \pm j \sin x$$

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx})$$

$$\sin x = \frac{1}{2j}(e^{jx} - e^{-jx})$$

$$\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin x$$

$$\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos x$$

$$2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(3 \cos x + \cos 3x)$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin 3x)$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) + \cos(x + y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x - y) + \sin(x + y)]$$

$$a \cos x + b \sin x = C \cos(x + \theta)$$

$$\text{em que } C = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{-b}{a}\right)$$

E.7 Integrais Indefinidas

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx$$

$$\int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax$$

$$\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax$$

$$\int \sin^2 ax \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a}$$

$$\int \cos^2 ax \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}$$

$$\int x \sin ax \, dx = \frac{1}{a^2} (\sin ax - ax \cos ax)$$

$$\int x \cos ax \, dx = \frac{1}{a^2} (\cos ax + ax \sin ax)$$

$$\int x^2 \sin ax \, dx = \frac{1}{a^3} (2ax \sin ax + 2 \cos ax - a^2 x^2 \cos ax)$$

$$\int x^2 \cos ax \, dx = \frac{1}{a^3} (2ax \cos ax - 2 \sin ax + a^2 x^2 \sin ax)$$

$$\int \sin ax \sin bx \, dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \quad a^2 \neq b^2$$

$$\int \sin ax \cos bx \, dx = - \left[\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} \right] \quad a^2 \neq b^2$$

$$\int \cos ax \cos bx \, dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \quad a^2 \neq b^2$$

$$\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$\int x e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1)$$

$$\int x^2 e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^3} (a^2 x^2 - 2ax + 2)$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx)$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx)$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} \, dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x}{x^2 + a^2} \, dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2)$$