命 题 逻 辑

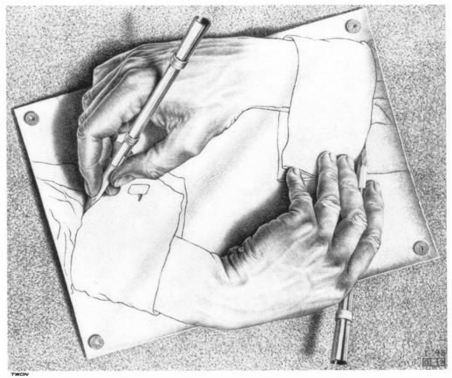
School of Computer
Wuhan University

本章内容

Outline

1. 命题符号化
   - 命题
   - 符号化
   - 合式公式的形式文法
   - 合式公式的形式语义
2. 永真公式
3. 范式
4. 联结词的扩充和归约
5. 推理和证明方法

Drawing hands



True or False

- 左手画右手,右手画左手;
- paradox

逻辑

logic

- 自然语言是对客观世界的描述,因此有“真”有“假”;
- 逻辑学是研究“真假”的普遍规律的学科;
- 形式逻辑是用符号化的方法研究逻辑,也称符号逻辑,是数理逻辑的基础;
- 数理逻辑的主要研究内容:公理集合论、证明论、模型论、递归论.

命题(Proposition)

推理和证明

- 数学中的重要问题是“推理”,即构造正确的论证(证明).
- 数理逻辑用符号化的方法,来研究推理.
- 用命题逻辑表达的推理,其基本要素即为命题.

Definition 命题

- 有唯一真假值的陈述句(Declarative Sentence).

例

Example

- 糖是碳水化合物; – (简单命题)
- 武汉大学是最美丽的大学; – (简单命题)
- 如果不下雨,就开运动会; – (复合命题)

Example (非命题)

- 现在几点? – (疑问句)
- 请不要讲话! – (祈使句)
- $x + y \leq 4$

Example (Paradox)

- 我正在说谎.

符号化

命题符号化

- 每个具体命题有惟一真假值,称为命题的**真值**.
- 对于真命题,称命题真值为"真";假命题,称其真值为"假".
- 但符号化只关心命题的真假,不关心其具体含义.
- 将不能再分的最小命题单位称为**原子**(atom),用英文字母表示:
  - 命题常元–真命题:$\mathbb{T}$,假命题:$\mathbb{F}$;
  - 命题变元–可以代表真命题或假命题,常用大写字母表示:$P, Q, R, \ldots$
- 原子通过**联结词**(connectives)按照一定的规则组成**复合命题**.

逻辑联结词

常用的逻辑联结词

名称	英文	符号	解释
否定词	negation	$\neg P$	非P,否定P
析取词	disjunction	$P \vee Q$	P或者Q(兼或)
合取词	conjunction	$P \wedge Q$	P并且Q
蕴含词	implication	$P \rightarrow Q$	如果P,则Q P是Q的充分条件 Q是P的必要条件 P是前提,Q是结论 当P,则Q(仅当Q,有P)
等值词	bicondition	$P \leftrightarrow Q$	P等值于Q P是Q的充分必要条件 P当且仅当Q

逻辑联结词

联结词含义

- 原子命题的真值有“真”和“假”，由原子和联结词组成的复合命题也有“真”和“假”.
- 复合命题的真值由其中的原子和联结词的含义决定.

逻辑联结词的含义

P	Q	$\neg P$	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

蕴含式

Example

- 如果上天再给一次重来机会，我一定要...

- 若前件为真，后件为假，则该蕴含式不成立，即为假；
- 若前件为假，后件为真或假，都为真.

形式蕴含

- 由于简单命题在符号化为原子时，剥离了原子之间可能存在的语义关系，蕴含式的真假仅与条件和结论的真假有关，而与条件和结论是否有语意关联无关.

Example

- If today is Friday, then $2+3=5$. (True)
- If today is Friday, then $2+3=6$. (True, except for Friday)

符号化

Example (命题)

你可以上网,仅当你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生.

符号化命题中的原子

- A: 你可以上网;
- C: 你是计算机专业的学生;
- F: 你是一年级的学生.

用联结词合成原命题

- 你不是一年级的学生: $\neg F$
- 你是计算机专业的学生或者你不是一年级的学生: $C \vee \neg F$
- 原命题: $A \to (C \vee \neg F)$

合式公式(Well-Formed Formulas, WFFs)

Desription

- 命题符号化的结果是合式公式,是命题“语言”中的“句子”.

字母表

- 常元: $\mathbb{T}, \mathbb{F}$
- 变元: $P, Q, R, \ldots$
- 联结词: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
- 辅助符号: $(,)$

Definition (合式公式WFFs)

1. 递归基础: 常元和变元是WFFs;
2. 递归规则: 若A, B是WFFs, 则
   $(\neg A), (A \vee B), (A \wedge B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$是WFFs;
3. 极小性条款: 由以上规则在有限步生成的都是WFFs.

例

Example

- $(A \to (C \vee (\neg F)))$是公式.

Proof.

1. $A, C, F,$是公式，根据规则①;
2. $(\neg F)$是公式，根据❶和规则②;
3. $(C \vee (\neg F))$，根据❶和规则②;
4. $(A \to (C \vee (\neg F)))$是公式，根据❶❸和规则②. □

Example

- $(\to (C \vee \neg F))$不是公式，因为没有生成$(\to A)$的规则;
- $(A \Rightarrow (C \vee \neg F))$不是公式，因为$\Rightarrow$不是联结词.

公式简化规则

约定

- 最外层的括号可以省略;
- 运算的优先级别由高到低:括号,$\neg$,$\wedge$,$\vee$,$\rightarrow$,$\leftrightarrow$;
- 同一二元运算符号从左到右进行结合.

Example

- $(A \rightarrow (C \vee (\neg F)))$可以简化为:$A \rightarrow C \vee \neg F$
- $((P \vee Q) \vee R)$可以简化为:$P \vee Q \vee R$

注意

- $P \vee Q \wedge R \equiv P \vee (Q \wedge R) \neq (P \vee Q) \wedge R$
- $P \rightarrow Q \rightarrow R \equiv (P \rightarrow Q) \rightarrow R \neq P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

逻辑运算的基本法则

Description

- 每个命题都可以符号化为一个公式;
- 每个命题中的原子的真假一旦确定,则该命题的真假也惟一确定,即对应公式的真假值也惟一确定.

真值表

表示公式中原子的真假和公式真假值之间关系.为方便书写,用0表示假值,1表示真值.

逻辑联结词的含义

P	Q	$\neg P$	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

一般公式的语义

记号

- 记含n个原子$P_1, P_2, \ldots, P_n$的公式G为：$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$.

Definition (指派(assignment))

设$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$是一公式：对$P_1, P_2, \ldots, P_n$的一次取值$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle, x_i \in \{0, 1\}$，称为一个指派(assignment). 记$P_1, P_2, \ldots, P_n$的指派$I = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$为： $I = x_1 x_2 \ldots x_n$

Property

- 公式$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$一共有2^n种不同的指派.
- 注意：指派的下标与对应指派间的关系.

Example

- $G(P, Q) = \neg((P \vee Q) \wedge P)$的4个指派是：
  $I_0 = 00,\ I_1 = 01,\ I_2 = 10,\ I_3 = 11$.

解释(Interpretation)

Definition (G在解释I下的真值$I(G)$)

设$I = x_1 x_2 \ldots x_n$为公式$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$的一个指派,则公式G在指派I下的值记为: $I(G)$, 其递归定义如下:

- $I(\mathbb{T}) = 1, \quad I(\mathbb{F}) = 0$;
- $I(G) = x_i, \quad \text{if} \quad G \equiv P_i$;
- $$I(G) = \begin{cases} \neg I(A), & \text{if} \quad G = \neg A \\ I(A) \wedge I(B), & \text{if} \quad G = A \wedge B \\ I(A) \vee I(B), & \text{if} \quad G = A \vee B \\ I(A) \to I(B), & \text{if} \quad G = A \to B \\ I(A) \leftrightarrow I(B), & \text{if} \quad G = A \leftrightarrow B \end{cases}$$

Example

真值表

- 公式$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$在2^n的指派下的值所构成的表称为公式G的真值表.

Example

- 公式$G = \neg((P \vee Q) \wedge P)$的真值表:

指派	P	Q	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \wedge P$	G
$I_0 = 00$	0	0	0	0	1
$I_1 = 01$	0	1	1	0	1
$I_2 = 10$	1	0	1	1	0
$I_3 = 11$	1	1	1	1	0

Remarks(1/2)

- 公式$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$的语义解释实际上是一个函数:

$$\underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}}_{n\text{次}} \to \{0,1\}$$

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \mapsto G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- 这样的函数称为布尔函数(Boolean Function);
- 真值表的指派排列次序最好按二进制数从小到大的次序;
- 形式系统的构成:"形式结构+语义"
- 逻辑问题转化为"计算问题".

Remarks(2/2)

计算问题

- 计算一个n个原子的真值表需要2^n次计算;
- 计算能力为$1\,T(2^{40})$Flops，计算100个原子的公式的真值表所用的时间是:

$$\begin{aligned}2^{100}(\text{次}) &= 2^{100} \div 2^{40} = 2^{60}(\text{秒})\\ &= 2^{60} \div (365 * 24 * 3600) = 3.6558901 \times 10^{10}(\text{年})\end{aligned}$$

- Boolean Satisfiability problem(SAT):NP-complete problem.

Outline

1. 命题符号化

2. 永真公式
   - 公式的分类
   - 逻辑等价
   - 永真蕴含
   - 恒等变换和不等变换
   - 对偶性

3. 范式

4. 联结词的扩充和归约

5. 推理和证明方法

重言式(Tautology)

Definition

设G是公式:

- 如果对G的任意一个解释I, 都有$I(G)=1$, 称G 为重言式(永真式);
- 如果存在G的一个解释I, 有$I(G)=1$, 称G为可满足式(satisfiable);
- 如果对G的任意一个解释I, 都有$I(G)=0$, 称G 为矛盾式(invalid).

Example

公式$G=\neg((P\vee Q)\wedge P)\leftrightarrow\neg P$ 为重言式.

指派	P	Q	$P\vee Q$	$(P\vee Q)\wedge P$	$\neg((P\vee Q)\wedge P)$	$\neg P$	G
$I_0=00$	0	0	0	0	1	1	1
$I_1=01$	0	1	1	0	1	1	1
$I_2=10$	1	0	1	1	0	0	1
$I_3=11$	1	1	1	1	0	0	1

逻辑等价(Logical Equivalences)

Definition

称公式F和G逻辑等价, iff, 公式$(F) \leftrightarrow (G)$是重言式, 记为: $F \Leftrightarrow G$.

Example

- 公式$G = \neg((P \vee Q) \wedge P) \leftrightarrow \neg P$为重言式,
  则, $\neg((P \vee Q) \wedge P) \Leftrightarrow \neg P$.

Properties

- $A \Leftrightarrow A$;
- if $A \Leftrightarrow B$, then $B \Leftrightarrow A$;
- if $A \Leftrightarrow B$ and $B \Leftrightarrow C$, then $A \Leftrightarrow C$.

常用的逻辑等价式

$\neg\neg P \Leftrightarrow P$	双重否定律
$P \wedge P \Leftrightarrow P$ $P \vee P \Leftrightarrow P$	幂等律
$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$ $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	交换律
$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$ $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$	结合律
$(P \wedge Q) \vee P \Leftrightarrow P$ $(P \vee Q) \wedge P \Leftrightarrow P$	吸收律
$(P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ $(P \vee Q) \wedge R \Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$	分配律
$P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$	蕴含恒等式
$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$ $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$	De Morgan律
$(P \to Q) \wedge (P \to \neg Q) \Leftrightarrow \neg P$	归谬律
$(P \vee \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{T}$	排中律

永真蕴含关系(Logical Implication)

Definition

- 称公式F 永真蕴含公式G, iff, 公式$(F) \to (G)$是重言式, 记为: $F \Rightarrow G$.
- 注: 对F 和G 中原子的所有指派I, 都有$I(F) \leqslant I(G)$, 即F 为真时G 一定为真, 相当于代数中的不等式.

Example

- 公式 $G = P \wedge (P \to Q) \to Q$为重言式,
  则, $P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$.

Properties

- $A \Rightarrow A$;
- if $A \Rightarrow B$ and $B \Rightarrow A$, then $A \Leftrightarrow B$;
- if $A \Rightarrow B$ and $B \Rightarrow C$, then $A \Rightarrow C$;
- if $A \Rightarrow B$, then $\neg B \Rightarrow \neg A$.

常用的永真蕴含式

$P \Rightarrow P \vee Q$	加法式
$P \wedge Q \Rightarrow P$	简化式
$(P \rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$	假言推理
$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg p$	拒取式
$(P \vee Q) \wedge \neg P \Rightarrow Q$	析取三段论
$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow (P \rightarrow R)$	前提三段论
$(P \rightarrow Q) \Rightarrow (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$	
$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \Rightarrow (P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge S)$	

逻辑恒等式与不等式的证明

方法

- 真值表法：判断$A \leftrightarrow B$或$A \to B$的真值是否恒为1;
- 对不等式$A \Rightarrow B$: 判断A为真时B亦真；或者，B为假时A亦假；
- 恒等、不等变换.

Example: $P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$

Method 1:

1. 设，$P \wedge (P \to Q)$为真；
2. 则，P为真，$P \to Q$亦真；
3. 所以，Q为真. □

Method 2:

1. 设，Q为假；
2. 分情况讨论：
   - P为真，则，$P \to Q$为假，所以，$P \wedge (P \to Q)$为假；
   - P为假，则，$P \wedge (P \to Q)$为假. □

代入规则

Definition (代入(Substitution))

设$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$是一公式，F是另一公式，设P_i是公式G中的某一原子，将公式G中的P_i的每个出现用F替换,称为代入，代入后所得的公式$G(P_1, \ldots, F/P_i, \ldots, P_n)$称为原公式的代入实例.

Example

1. $G(P, Q) = (P \wedge Q) \vee P, \ F = \neg P \vee R;$
2. $G(F/P, Q) = ((\neg P \vee R) \wedge Q) \vee (\neg P \vee R)$
3. $G(F/P, Q) \neq (\neg P \vee R \wedge Q) \vee \neg P \vee R$

Theorem (代入规则)

设公式$G(P_1, P_2, \ldots, P_n)$是重言式，则其任意的一个代入实例$G(P_1, \ldots, P_{i-1} F/P_i, P_{i+1}, \ldots, P_n)$也是重言式.

Corollary (代入规则)

1. $A \Leftrightarrow B$, 则 $A(F/P) \Leftrightarrow B(F/P)$;
2. $A \Rightarrow B$, 则 $A(F/P) \Rightarrow B(F/P)$.

替换规则

Definition (替换(Replacement))

设G是一公式，A是在G的某个位置出现的子公式，将该子公式A用公式B置换，称为替换.

Example

1. $G = (P \to Q) \land P$, $B = (\neg P \lor Q)$;
2. $G' = (\neg P \lor Q) \land P$.

Theorem (替换规则)

设，G'是公式G中的某个子公式A用B替换后得到的公式，如果$A \Leftrightarrow B$，则$G \Leftrightarrow G'$.

Example

$$\overbrace{\underbrace{(P \to Q)}_{A} \land P}^{G} \Leftrightarrow \overbrace{\underbrace{(\neg P \lor Q)}_{B} \land P}^{G'}$$

替换规则

注意

- 替换规则只能对恒等式$A \Leftrightarrow B$成立，对不等式不成立！
- 即：if $A \Rightarrow B$, $G \nRightarrow G'$.

Example

$$\underbrace{P \wedge Q}_{A} \Rightarrow \underbrace{P}_{B}$$

$$\underbrace{\neg(P \wedge Q)}_{G} \nRightarrow \underbrace{\neg P}_{G'}$$

Example(1/3)

Example

$$(P \to Q) \to (Q \vee R) \Leftrightarrow P \vee Q \vee R$$

Proof.

$$
\begin{array}{lll}
 & \underline{(P \to Q)} \to (Q \vee R) & \\
1 & \Leftrightarrow \underline{(\neg P \vee Q) \to (Q \vee R)} & \text{(替换+蕴含表达式)} \\
2 & \Leftrightarrow \underline{\neg(\neg P \vee Q)} \vee (Q \vee R) & \text{(代入+蕴含表达式)} \\
3 & \Leftrightarrow (\underline{\neg\neg P} \wedge \neg Q) \vee (Q \vee R) & \text{(代入+替换+De Morgan)} \\
4 & \Leftrightarrow \underline{(P \wedge \neg Q) \vee (Q \vee R)} & \text{(替换+双重否定)} \\
5 & \Leftrightarrow \underline{((P \wedge \neg Q) \vee Q)} \vee R & \text{(代入+结合律)} \\
6 & \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge \underline{(\neg Q \vee Q)}) \vee R & \text{(代入+替换+分配律)} \\
7 & \Leftrightarrow \underline{((P \vee Q) \wedge \mathbb{T})} \vee R & \text{(替换+排中律)} \\
8 & \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R & \text{(替换+简化式)} \\
9 & = \mathit{RHS} & \square
\end{array}
$$

Example(2/3)

Example

$$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$$

等价于:$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \rightarrow \neg P$永真;
等价于:$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \rightarrow \neg P \Leftrightarrow \mathbb{T}$;
等价于:$\neg((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \rightarrow \neg P) \Leftrightarrow \mathbb{F}$.

Proof.

$$\begin{array}{rlr}
& \neg(\underline{(P \rightarrow Q)} \wedge \neg Q \rightarrow \neg P) & \\
1 & \Leftrightarrow \neg\underline{((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q \rightarrow \neg P)} & (\text{替换+蕴含表达式}) \\
2 & \Leftrightarrow \underline{\neg(\neg((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q) \vee \neg P)} & (\text{代入+替换+蕴含表达式}) \\
3 & \Leftrightarrow \underline{\neg\neg((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q)} \wedge \underline{\neg\neg P} & (\text{代入+替换+De Morgan}) \\
4 & \Leftrightarrow \underline{(\neg P \vee Q) \wedge \neg Q} \wedge P & (\text{代入+替换+双重否定}) \\
5 & \Leftrightarrow ((\neg P \wedge \neg Q) \vee \underline{(Q \wedge \neg Q)}) \wedge P & (\text{代入+替换+分配律}) \\
6 & \Leftrightarrow \underline{((\neg P \wedge \neg Q) \vee \mathbb{F})} \wedge P & (\text{替换+排中律}) \\
7 & \Leftrightarrow \underline{(\neg P \wedge \neg Q) \wedge P} & (\text{替换+简化式}) \\
8 & \Leftrightarrow \underline{(\neg P \wedge P)} \wedge \neg Q & (\text{结合律}) \\
9 & \Leftrightarrow \underline{\mathbb{F} \wedge \neg Q} & (\text{替换+排中律}) \\
10 & \Leftrightarrow \mathbb{F} & (\text{简化式})
\end{array}$$

Example(3/3)

Example

化简公式: $(P \to Q \vee \neg R) \wedge \neg P \wedge Q$

解:

$$
\begin{aligned}
& \underline{(P \to Q \vee \neg R)} \wedge \neg P \wedge Q & \\
1 \quad \Leftrightarrow\ & \underline{(\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge \neg P} \wedge Q & (\text{代入+替换+蕴含表达式}) \\
2 \quad \Leftrightarrow\ & \neg P \wedge Q & (\text{代入+替换+吸收律})
\end{aligned}
$$

Example

化简公式: $(P \to Q) \wedge (P \to R)$

解:

$$
\begin{aligned}
& \underline{(P \to Q)} \wedge \underline{(P \to R)} & \\
1 \quad \Leftrightarrow\ & \underline{(\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)} & (\text{替换+蕴含表达式}) \\
2 \quad \Leftrightarrow\ & \underline{\neg P \vee (Q \wedge R)} & (\text{代入+分配律}) \\
3 \quad \Leftrightarrow\ & P \to (Q \wedge R) & (\text{代入+蕴含表达式})
\end{aligned}
$$

恒等变换和不等变换

Remarks

1. 公式的整体变换：代入+基本恒等式；
2. 公式的局部变换：替换+基本恒等式；
3. 局部变换的子公式和基本恒等式的形式不完全一样：代入+替换+基本恒等式；
4. 蕴含表达式的使用；
5. 所有的恒等式和不等式，都能用基本恒等式和不等式通过代入和替换推出.

对偶性(Duality)

Definition (对偶公式)

设G是一个仅含有$\neg$, $\wedge$和$\vee$运算符号的公式；G的对偶公式是将G中的$\wedge$, $\vee$, $\mathbb{T}$, $\mathbb{F}$分别替换为$\vee$, $\wedge$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{T}$，并且保持原有的运算关系所得到的公式.

Example

$$\begin{aligned} & (P \wedge Q \vee \neg R)^* \\ = & (P \vee Q) \wedge \neg R \\ \neq & P \vee Q \wedge \neg R \\ = & P \vee (Q \wedge \neg R) \end{aligned}$$

Property

$$A^{**} = A.$$

广义De Morgan定理

Theorem

设是一个仅含有¬, ∧和∨运算符号的公式,则:

$$\neg G(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$$

Proof (对公式的递归结构用归纳法证明).

1. Base: 若G是P, $\mathbb{T}$, $\mathbb{F}$, 则原恒等式成立;
2. 设$G(P_1, P_2, \ldots, P_n) = A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \wedge B(P_1, P_2, \ldots, P_n)$, 并且$A$和$B$满足上述恒等式, 则:

$$\begin{aligned}
& \neg G(P_1, P_2, \ldots, P_n) \\
= & \neg(A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \wedge B(P_1, P_2, \ldots, P_n)) && \text{(假设)} \\
\Leftrightarrow & \neg A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \vee \neg B(P_1, P_2, \ldots, P_n) && \text{(De Morgan)} \\
\Leftrightarrow & A^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \vee B^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) && \text{(归纳假设)} \\
= & (A(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \wedge B(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n))^* && \text{(定义)} \\
= & G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)
\end{aligned}$$

3. 同理, 对$G = \neg A$和$G = A \vee B$有相同的结论.

□

相关推论(1/2)

Theorem

设F和G是仅含有$\neg$, $\wedge$和$\vee$运算符号的公式,则:

$$F \Leftrightarrow G \quad \textit{iff} \quad F^* \Leftrightarrow G^*$$

Proof.

$$
\begin{array}{lll}
 & F \Leftrightarrow G & \\
\text{iff} & \neg F \Leftrightarrow \neg G & \\
\text{iff} & F^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) & (\text{广义DeMorgan}) \\
\text{iff} & F^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \ldots, \neg\neg P_n) \Leftrightarrow G^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \ldots, \neg\neg P_n) & (\text{代入}) \\
\text{iff} & F^*(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow G^*(P_1, P_2, \ldots, P_n) & (\text{双重否定})
\end{array}
$$

□

相关推论(2/2)

Theorem

设F和G是仅含有$\neg$，$\wedge$和$\vee$运算符号的公式，则：

$$F \Rightarrow G \quad \text{iff} \quad G^* \Rightarrow F^*$$

Proof.

$F \Rightarrow G$

iff $\neg G \Rightarrow \neg F$

iff $\neg G \rightarrow \neg F \Leftrightarrow \mathbb{T}$

iff $G^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \rightarrow F^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow \mathbb{T}$ (广义DeMorgan)

iff $G^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \ldots, \neg\neg P_n) \rightarrow F^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \ldots, \neg\neg P_n) \Leftrightarrow \mathbb{T}$ (代入)

iff $G^*(P_1, P_2, \ldots, P_n) \rightarrow G^*(F_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow \mathbb{T}$ (双重否定)

iff $G^* \Rightarrow F^*$ (定义)

□

Outline

内容

逻辑等价的公式

逻辑等价

- $A \Leftrightarrow B$, 即, 公式A恒等值于B, A和B逻辑等价.
- e.g.: $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q \Leftrightarrow \ldots$
- e.g.: $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow \ldots$
- 为了便于讨论, 有必要将公式的形式规范化, 即将公式转换为与其等价的标准形式.

析取范式和合取范式

Definition 基本积、基本和

- 基本积 是合式公式中的变元或变元的否定的合取;
- 基本和 是合式公式中的变元或变元的否定的析取;

Example

- 基本积: $P,\ \neg P \wedge Q,\ Q \wedge \neg P,\ P \wedge \neg P,\ Q \wedge P \wedge \neg P$
- 基本和: $P,\ \neg P \vee Q,\ Q \vee \neg P,\ P \vee \neg P,\ Q \vee P \vee \neg P$

析取范式

Definition 析取范式

- 一个形为基本积的析取的公式，若与命题公式A 等价，则称其为公式A的析取范式，记为：$A \Leftrightarrow A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n$，($n \geq 1$，$A_i$是基本积)

Example 析取范式

- $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
- $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

注意

- 析取范式中只含有联结词$\neg$，$\wedge$，$\vee$.

析取范式的求解

求解方法: 公式恒等变换

1. 消去联结词$\rightarrow$, $\leftrightarrow$;
2. 利用DeMorgen律将联结词$\neg$移至变元前, 并消去双重否定;
3. 利用分配律、结合律等将公式化为析取范式.

Example求解析取范式

- 求公式$P \wedge (P \rightarrow Q)$的析取范式:

$$\begin{aligned} P \wedge (P \rightarrow Q) &\Leftrightarrow P \wedge (\neg P \vee Q) \\ &\Leftrightarrow (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q) \\ &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \end{aligned}$$

注意

- 公式的析取范式不唯一.

主析取范式-极小项

Definition 极小项

- 有n个命题变元$P_1, P_2, ..., P_n$ 的基本积，称之为极小项，当且仅当，每个变元与其否定不同时出现，且二者之一出现且仅出现一次.

Example

- 变元P, Q: 则$P \wedge \neg Q$, $P \wedge Q$是极小项；
- 变元P_1, P_2, P_3: 则$P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3$, $\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3$是极小项；
- 问题：对于给定的n个变元，一共有多少个不同的极小项？

极小项的性质

3个变元极小项

- 对于3个命题变元P, Q, R, 共有$2^3 = 8$个极小项;
- 对于每个极小项, 有且仅有一个指派使之真值为真.
- 标记法: 用使极小项为真的指派对应的数字作为它的下标.

极小项	所有指派	唯一指派	标记
$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	000	m_0
$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	$000 \sim 111$	001	m_1
$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	010	m_2
$\neg P \wedge Q \wedge R$	$000 \sim 111$	011	m_3
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	100	m_4
$P \wedge \neg Q \wedge R$	$000 \sim 111$	101	m_5
$P \wedge Q \wedge \neg R$	$000 \sim 111$	110	m_6
$P \wedge Q \wedge R$	$000 \sim 111$	110	m_7

n个变元的极小项

n个变元的极小项

- n个变元$P_1, P_2, ..., P_n$的极小项共2^n项：

$m_0: \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge ... \wedge \neg P_n$

$m_1: \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge ... \wedge P_n$

......

$m_{2^n-1}: P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n$

极小项性质

- 极小项的下标对应的指派，唯一使得该极小项真值为1.

主析取范式

Definition 主析取范式

- 一个公式称之为公式A的主析取范式，当且仅当，其与公式A逻辑等价，且由极小项之和组成.

Example

- 公式$P \leftrightarrow Q$的主析取范式:

$$\begin{aligned} P \leftrightarrow Q &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \\ &\Leftrightarrow m_3 \vee m_0 \\ &\Leftrightarrow \sum(0,\ 3) \end{aligned}$$

主析取范式的求解

公式的主析取范式的求法

- 恒等变换法: $A \Leftrightarrow$析取范式$\Leftrightarrow$主析取范式
  1. 去掉析取范式中的永假的基本积;
  2. 合并相同的变元(变元的否定)和基本积;
  3. 对每个基本积补入未出现的命题变元, 再展开化简至主析取范式.
- 真值表法

主析取范式求解–Example(I)

恒等变换法

- 用恒等变换法求公式A的主析取范式
- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \qquad \text{(补入)}$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$
$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \qquad \text{(展开)}$$

$$\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_3 \vee m_1 \qquad \text{(极小项标记)}$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \qquad \text{(化简)}$$

$$\Leftrightarrow \sum(1,3,5,6,7)$$

001仅使m_1为真 | 011仅使m_3为真 | 101 | 110 | 111

思考: 求出的主析取范式是否是唯一的?(考虑极小项的性质)

- 有且仅有一个指派使得某个极小项为真.

主析取范式的唯一性

Remark

- 主析取范式是否是唯一的?(考虑极小项的性质)
- 极小项的性质: 有且仅有一个指派使得某个极小项真值为1.
- 公式A的主析取范式中, 出现的极小项的下标对应的二进制编码, 就是使得公式真值为1的指派;未出现的极小项的下标对应于使公式真值为0的指派.
- 结论: 公式的主析取范式是唯一的.

主析取范式求解–Example(II)

Example

- 用真值表法求公式$A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$的主析取范式.

	P	Q	R	$P \wedge Q \vee R$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

真值表法

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

  $\Leftrightarrow \sum(1,3,5,6,7)$
- 使得公式真值为1的指派，对应于公式A的主析取范式中的某个极小项的下标.

主析取范式个数

问题

- n个变元的命题公式可以有无限多个，但一共有多少个不同的主析取范式呢？

分析

- 已知对于n个变元，有2^n个极小项；
- 对任一个主析取范式，可能含有的某个极小项，或者不含有某个极小项；
- 所以，一共可构造$\boxed{2^{2^n}}$个主析取范式.

主析取范式个数–Example

Example

- $n=1$一个变元的主析取范式，共有$2^{2^1}=4$ 个:
  1. $\sum(\varnothing) \Leftrightarrow \mathbb{F}$ (不含任何极小项)
  2. $\sum(0) \Leftrightarrow \neg P$
  3. $\sum(1) \Leftrightarrow P$
  4. $\sum(0,1) \Leftrightarrow \neg P \vee P \Leftrightarrow \mathbb{T}$ (含所有极小项)
- $n=2$含两个变元的主析取范式，共有$2^{2^2}=16$个;
- $n=3$含三个变元的主析取范式，共有$2^{2^3}=256$个.

主析取范式和主合取范式–对偶性

Canonical Forms

- 主析取范式–Canonical Disjunctive Normal Form(CDNF)
- 主合取范式–Canonical Conjunctive Normal Form(CCNF)

主析取范式	**主合取范式**
基本积	基本和
析取范式(基本积之和)	合取范式(基本和之积)
极小项 n个变元有2^n个极小项 其下标使该极小项为真	极大项 n个变元有2^n个极大项 其下标使该极大项为假
主析取范式是极小项的和	主合取范式是极大项的积
其中的所有的极小项的下标对应使该公式为真的解释	其中的所有的极大项的下标对应使该公式为假的解释

极小项、极大项性质

极小项

- n个变元可以构成2^n个极小项；
- 每个极小项其下标编码对应的指派，唯一使得其真值为1;
- 任意两个极小项的合取式真值为0;
- 全体极小项的析取式真值为1.

极大项

- n个变元可以构成2^n个极大项；
- 每个极大项其下标编码对应的指派，唯一使得其真值为0;
- 任意两个极大项的析取式真值为1;
- 全体极大项的合取式真值为0.

主合取范式求解–Example

恒等变换法求CDNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \underline{(R \vee \neg R)} \vee \underline{(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)} \wedge R \quad (补入)$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R$$
$$\vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \quad (展开)$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \quad (化简)$$

$$\Leftrightarrow \sum(1,3,5,6,7)$$

恒等变换法求CCNF

- $A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R) \quad (合取范式)$

$$\Leftrightarrow (P \vee R \vee \underline{(Q \wedge \neg Q)}) \wedge (Q \vee R \vee \underline{(P \wedge \neg P)}) \quad (补入)$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \quad (展开化简)$$

$$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \Leftrightarrow \prod(0,2,4) \quad (标记)$$

Outline

1. 命题符号化
2. 永真公式
3. 范式
4. 联结词的扩充和归约
   - 联结词的扩充
   - 联结词的归约
5. 推理和证明方法

内容

联结词的扩充

Remark(n个原子的公式共有2^{2^n}个不同的运算)

- 一元运算：$2^{2^1}=4$个：恒为1，恒为0，恒等，否定；
- 二元运算：$2^{2^2}=16$个：恒为1，恒为0，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$，...
- 在数字电路和程序设计中还常用到一些二元逻辑运算，可以定义相应的运算符(联结词)，即为对联结词的扩充.

Example (二元运算的扩充)

		与非(NAND)	或非(NOR)	异或(XOR)
P	Q	$P\uparrow Q$	$P\downarrow Q$	$P\oplus Q$
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
等价式		$\neg(P\wedge Q)$	$\neg(P\vee Q)$	$(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$

程序设计中的位运算

Example

C语言的位运算(bitwise operator):

~(取否), &(合取), |(析取), ^(异或), <<(左位移), >>(右位移)

Example

	0	1	0	1	x
&	1	0	1	1	-x
	0	0	0	1	x &-x
	0	1	0	1	x
	0	1	0	0	x^(x&-x)

Programming Example

计算正整数二进制表示中1出现的次数

```
int cardinal(unsigned long x)
{
  int count = 0;
  while (x != (unsigned long) 0) {
    x ^= x & -x;
    count++;
    }
  return count;
}
```

联结词的全功能集

Definition

- 一个联结词的集合的全功能的，iff，所有的运算均能用该集合中的联结词表示；
- 极小全功能联结词集合，iff，该集合中删除任意的一个联结词后不再是全功能的.

Example

- $\{\neg, \wedge, \vee\}$是全功能的；
- $\{\neg, \wedge\}$和$\{\neg, \vee\}$是极小全功能的；
- $\{\neg, \rightarrow\}$是极小全功能的；
- $\{\neg, \leftrightarrow\}$不是全功能的，因为：$\leftrightarrow + \neg$永远只能有8个公式(CCNF)；
- $\{\wedge, \vee\}$不是全功能的，因为：$\wedge + \vee$的组合中对每个原子都取真值的指派只能取真.

Example

Example

- $\{\downarrow\}$是全功能的.
  1. $P \downarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$;
  2. $\neg P \Leftrightarrow P \downarrow P$;
  3. 考虑$P \rightarrow Q$:

$$
\begin{aligned}
& P \rightarrow Q \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee Q \\
\Leftrightarrow\ & \neg\neg((P \downarrow P) \vee Q) \\
\Leftrightarrow\ & \neg((P \downarrow P) \downarrow Q) \\
\Leftrightarrow\ & ((P \downarrow P) \downarrow Q) \downarrow ((P \downarrow P) \downarrow Q)
\end{aligned}
$$

$\square$

Outline

有效结论

Definition

设$H_1, H_2, \ldots, H_n, C$是公式，称C是$H_1, H_2, \ldots, H_n$的有效结论(Valid consequence), iff, 对任意的指派I, 如果$I(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) = 1$, 则有：$I(C) = 1$. 记为$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$.

Theorem

下述条件彼此等价：

1. $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$;
2. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \to C$是重言式;
3. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \Rightarrow C$;
4. $\neg((H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \to C)$是矛盾式;
5. $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C$是矛盾式;
6. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \to \mathbb{F}$是永真;
7. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg C) \Rightarrow \mathbb{F}$.

Example

A, B, C和D参加球赛,条件如下:

1. A参加,则B或C也参加;
2. B参加,则A不参加;
3. D参加,则C不参加.

证明:"如果A参加,则D不参加"是上述条件的有效结论.

将条件和结论符号化为:

1. $H_1 = A \to B \vee C$;
2. $H_2 = B \to \neg A$;
3. $H_3 = D \to \neg C$;
4. 结论: $A \to \neg D$

方法1

等价于: $(A \to B \vee C) \wedge (B \to \neg A) \wedge (D \to \neg C) \Rightarrow (A \to \neg D)$

$$
\begin{array}{ll}
 & (A \to B \vee C) \wedge \underline{(B \to \neg A)} \wedge (D \to \neg C) \\
1 \Leftrightarrow & \underline{(A \to B \vee C) \wedge (A \to \neg B)} \wedge (D \to \neg C) \\
2 \Leftrightarrow & (A \to \underline{(B \vee C) \wedge \neg B}) \wedge (D \to \neg C) \\
3 \Leftrightarrow & \underline{(A \to (C \wedge \neg B))} \wedge (D \to \neg C) \\
4 \Leftrightarrow & (A \to C) \wedge (A \to \neg B) \wedge \underline{(D \to \neg C)} \\
5 \Leftrightarrow & \underline{(A \to C) \wedge (A \to \neg B) \wedge (C \to \neg D)} \\
6 \Rightarrow & (A \to C) \wedge (C \to \neg D) \\
7 \Rightarrow & A \to \neg D
\end{array}
$$

(注意:不等变换不能使用替换规则) □

Example

方法2

真值表法(略).

方法3

$$(A \to B \vee C) \wedge (B \to \neg A) \wedge (D \to \neg C) \Rightarrow (A \to \neg D)$$

1. 设结论为假,即$(A \to \neg D)$为假;
2. 所以, A, D为真;
3. 设B为真: $(B \to \neg A)$为假,所以前提为假;
4. 设B为假:
   - 当C为真时: $(D \to \neg C)$为假;
   - 当C为假时: $(A \to B \vee C)$为假;
5. 由❸❹得: 前提为假.

□

Example

方法4

$$(A \to B \vee C) \wedge (B \to \neg A) \wedge (D \to \neg C) \Rightarrow (A \to \neg D)$$

1. 设前提为真,即$(A \to B \vee C)$, $(B \to \neg A)$, $(D \to \neg C)$为真;
2. $\therefore\ A \to \neg B$为真;
3. $\therefore\ (A \to \neg B) \wedge (A \to B \vee C)$为真;
4. $\therefore\ A \to (\neg B \wedge (B \vee C))$为真;
5. $\therefore\ A \to (\neg B \wedge C)$为真;
6. $\therefore\ A \to C$为真;
7. 由❶得: $C \to \neg D$为真;
8. 由❻❼得: $A \to \neg D$为真.

$\square$

证明有效结论的方法

Remark

1. 恒等和不等变换;
2. 真值表;
3. 设结论为假,证明条件亦假;
4. 设前提为真,证明结论亦真;
5. 证明序列.

Example

Example

$$A \to B \vee C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

证明序列

1. $A \to B \vee C$ (P)
2. $B \to \neg A$ (P)
3. $A \to \neg B$ (②+T)
4. $A \to (B \vee C) \wedge \neg B$ (①③+复合式)
5. $A \to C \wedge \neg B$ (④+T)
6. $(A \to C) \wedge (A \to \neg B)$ (⑤+T)
7. $A \to C$ (⑥+简化式)
8. $D \to \neg C$ (P)
9. $C \to \neg D$ (⑧+T)
10. $A \to \neg D$ (⑦⑨+前提三段论) $\square$

说明

证明说明中用P(Premise)表示引入前提,用T(Tautology)表示恒等变换.

证明序列

Definition

设,$H_1, H_2, \ldots, H_n$是一组条件,一个证明序列是一组形如:
$C_1, C_2, \ldots, C_m$的公式序列,其中每个C_i满足下述条件中的一个:

1. 存在H_j, 使得: $C_i = H_j$; (引入条件)
2. $C_i = \mathbb{T}$; (引入永真)
3. 存在$C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$, 其中: $i_j \leq i$, 并且:
$C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \ldots \wedge C_{i_k} \Leftrightarrow C_i$; (恒等变换)
4. 存在$C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$, 其中: $i_j \leq i$, 并且:
$C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \ldots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C_i$; (不等变换)

自然推理的正确性与完备性

Theorem (Soundness & Completeness)

设，$C_1, C_2, \ldots, C_m$是关于条件$H_1, H_2, \ldots, H_n$的一证明序列，则对每个C_i都有：

$$(H_1 \land H_2 \land \ldots \land H_n \Rightarrow C_i)$$

即：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C_i$. 反之亦然.

Proof.(正确性)对证明序列的下标用归纳法证明.

1. 由于C_1满足定义中的条件，所以结论成立；
2. 假设对任意的$j < i$，C_j都是前提的有效结论，则：
   1. if $C_i = H_j$: (引入条件) $(H_1 \land H_2 \land \ldots \land H_n \Rightarrow H_j)$;
   2. if $C_i = \mathbb{T}$: (引入永真) $(H_1 \land H_2 \land \ldots \land H_n \Rightarrow \mathbb{T})$;
   3. if $C_{i_1} \land C_{i_2} \land \ldots \land C_{i_k} \Rightarrow C_i$, 由归纳假设：
      $(H_1 \land H_2 \land \ldots \land H_n \Rightarrow C_{i_j})$, $(i_j < i)$
      $\therefore (H_1 \land H_2 \land \ldots \land H_n) \Rightarrow C_{i_1} \land C_{i_2} \land \ldots \land C_{i_k} \Rightarrow C_i$
   4. 同理可证，当$C_{i_1} \land C_{i_2} \land \ldots \land C_{i_k} \Leftrightarrow C_i$时结论成立；
3. 故结论成立.

□

推理规则

Definition

常用的永真蕴含关系的竖式表示称为推理规则(Inference Rule).

Example (三段论)

$$P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$$

其对应的推理规则表示为:

$$\frac{P \qquad (P \to Q)}{Q} \ (\text{三段论})$$

Remark

推理过程中的不等变换仅能使用代入规则,即对公式的整体进行变换.

常用的推理规则(1/2)

推理规则

名称	推理规则	对应的永真蕴含关系
加法式	$\dfrac{P}{P \vee Q}$	$P \Rightarrow P \vee Q$
简化式	$\dfrac{P \wedge Q}{P}$	$P \wedge Q \Rightarrow P$
拒取式 Modus Tollens(MT)	$\dfrac{\neg Q \qquad P \to Q}{\neg P}$	$\neg Q \wedge (P \to Q) \Rightarrow \neg P$
前提三段论 Hypothetical syllogism	$\dfrac{P \to Q \qquad Q \to R}{P \to R}$	$(P \to Q) \wedge (Q \to R) \Rightarrow P \to R$
复合式 Composition	$\dfrac{P \to Q \qquad P \to R}{P \to Q \wedge R}$	$(P \to Q) \wedge (P \to R) \Rightarrow (P \to Q \wedge R)$

常用的推理规则(2/2)

推理规则

名称	推理规则	对应的永真蕴含关系
合取式	$\dfrac{P \qquad Q}{P \wedge Q}$	$P \wedge Q \Rightarrow Q \wedge P$
析取三段论 Disjunctive syllogism	$\dfrac{P \vee Q \qquad \neg Q}{P}$	$(P \vee Q) \wedge \neg Q \Rightarrow P$
构造性二难 Constructive dilemma	$\dfrac{P \rightarrow Q \quad R \rightarrow S \quad P \vee R}{Q \vee S}$	$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (P \vee R)$ $\Rightarrow Q \vee S$
破坏性二难 Destructive dilemma	$\dfrac{P \rightarrow Q \quad R \rightarrow S \quad \neg Q \vee \neg S}{\neg P \vee \neg R}$	$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (\neg Q \vee \neg S)$ $\Rightarrow \neg P \vee \neg R$

Example

Example

$$A \to B \vee C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

证明序列

1. $A \to B \vee C$ (P)
2. $B \to \neg A$ (P)
3. $A \to \neg B$ (②+T)
4. $A \to (B \vee C) \wedge \neg B$ (①③+复合式)
5. $A \to C \wedge \neg B$ (④+T)
6. $(A \to C) \wedge (A \to \neg B)$ (⑤+T)
7. $A \to C$ (⑥+简化式)
8. $D \to \neg C$ (P)
9. $C \to \neg D$ (⑧+T)
10. $A \to \neg D$ (⑦⑨+前提三段论)

$\square$

说明

证明说明中用P(Premise)表示引入前提,用T(Tautology)表示恒等变换.

证明方法

Remark

1. 直接对结论写证明序列;
2. 间接证明:条件和结论的等价变换,如,CP规则(Conditional Proof), 反证法等.

Theorem

$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash P \to Q$, iff, $H_1, H_2, \ldots, H_n, P \vdash Q$.

Proof.

设$\mathbf{H} = H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n$, 则:

$$\begin{aligned} & \mathbf{H} \to (P \to Q) \\ \Leftrightarrow\ & \neg\mathbf{H} \vee \neg P \vee Q \\ \Leftrightarrow\ & \neg(\mathbf{H} \wedge P) \vee Q \\ \Leftrightarrow\ & (\mathbf{H} \wedge P) \to Q \end{aligned}$$

So, $\mathbf{H} \to (P \to Q)$永真, iff, $(\mathbf{H} \wedge P) \to Q$永真. □

Example

Example

$$A \to B \vee C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

方法2(CP规则)

1. A (附加前提)
2. $A \to B \vee C$ (P)
3. $B \vee C$ (①②+MP)
4. $B \to \neg A$ (P)
5. $A \to \neg B$ (④+T)
6. $\neg B$ (①⑤+MP)
7. C (③⑥+析取三段论)
8. $D \to \neg C$ (P)
9. $C \to \neg D$ (⑧+T)
10. $\neg D$ (⑦⑨+前提三段论) □

反证法

Remark

由有效结论的等价定理有：

$$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C \quad \text{iff} \quad H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$$

称这样的条件和结论的变换为反证法.

Example

$$A \to B \vee C,\ B \to \neg A,\ D \to \neg C \vdash A \to \neg D$$

方法3(反证法)

用反证法等价于: H_1, H_2, H_3 $\neg(A \to \neg D) \vdash \mathbb{F}$.

1. $\neg(A \to \neg D)$ (否定前提)
2. $A \wedge D$ (①+T)
3. A (②+简化式)
4. D (②+简化式)
5. $D \to \neg C$ (P)
6. $\neg C$ (④⑤+MP)
7. $A \to B \vee C$ (P)
8. $B \vee C$ (③⑦+MP)
9. B (⑥⑧+析取三段论)
10. $B \to \neg A$ (P)
11. $\neg A$ (⑨⑩+MP)
12. $\mathbb{F}$ (③⑪+合取式)

□

证明方法和策略

Definition (定理)

- 一个定理是一个能够被证明为真的语句.

证明方法

- 直接证明法: $P \to Q$为真;
- 反证法(proof by contraposition): $P \to Q$等价于$\neg Q \to \neg P$;
- 归谬法(proof by contradiction): P等价于$\neg P \to \mathbb{F}$;
- 等价证明法、反例证明,......

证明策略

- 穷举法;
- 分情形证明;
- 正向推理、逆向推理;
- ......

本章小结

1. 命题符号化
   - 命题
   - 符号化
   - 合式公式的形式文法
   - 合式公式的形式语义
2. 永真公式
   - 公式的分类
   - 逻辑等价
   - 永真蕴含
   - 恒等变换和不等变换
   - 对偶性
3. 范式
   - 析取范式和合取范式
   - 主析取范式
4. 联结词的扩充和归约
   - 联结词的扩充
   - 联结词的归约
5. 推理和证明方法
   - 有效结论
   - 自然推理的形式证明
   - 证明方法

Reference books

Kenneth H. Rosen.
《离散数学及其应用》(原书第8版).
机械工业出版社.

刘玉珍
《离散数学》.
武汉大学出版社.

王汉飞
《离散数学》讲义.