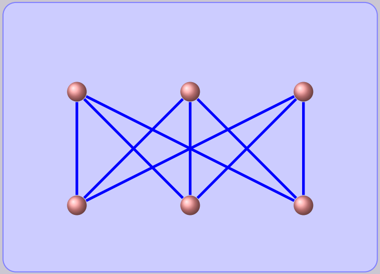
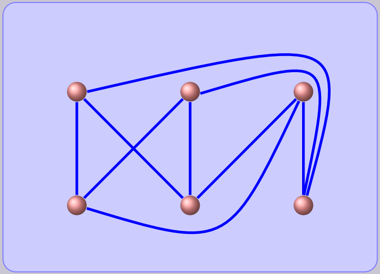
1. 平面图
   - 平面图的定义
   - Euler公式
   - 对偶图
   - Kuratowski定理
   - 例子

平面图— Example (1/2)

$K_{3,3}$不是平面图



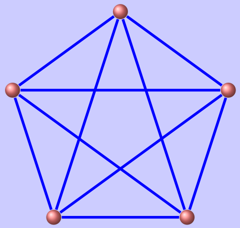
$K_{3,3}$



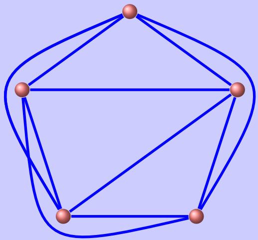
$K_{3,3}$的同构图

平面图— Example (2/2)

K_5不是平面图



K_5



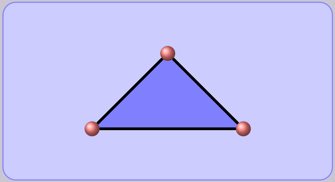
K_5的同构图

平面图

Definition

- 无向图G能图示在一个平面上，并且边与边仅在结点处相交的图称为平面图(Planar graph)；
- 在平面图中由边所围成的一个连通的区域称为面(Region).

Example



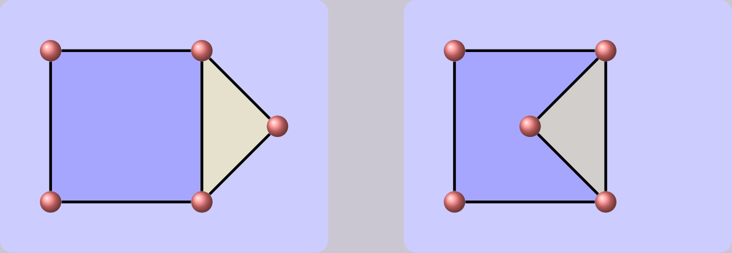
两个面：一个是无限面(unbounded Region)

面与基本回路的关系

Propostion

- 每个面的边界一定是一个基本回路;
- 平面图的面数不会因为保持平面图的同构变换而改变, 是一个几何常量.

Example



(a) 面数为3

(b) 同构变换后面数面数仍为3

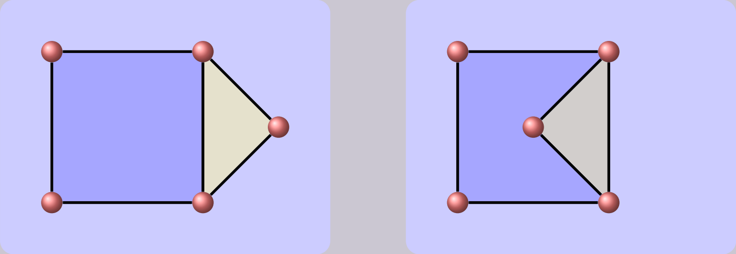
Euler公式

Theorem (Euler公式)

设G是连通平面图，k是G的面数，则：

$$n - m + k = 2$$

Example



$$n = 5,\ m = 6,\ k = 3,\ 5 - 6 + 3 = 2$$

Euler公式的相关推论

Corollary

设G是平面图，k是G的面数，设G的围长为p，则：

$$pk \leqslant 2m$$

$$m \leqslant \frac{p}{p-2}(n-2)$$

若 G是简单图，则每个基本回路的长度$\geqslant 3$，这样：

$$m \leqslant 3n-6$$

Example

- $K_{3,3}$不是平面图：

  $\because p=4,\ m=9,\ n=6,\ \frac{p}{p-2}(n-2)=8<m=9;$

- K_5不是平面图，

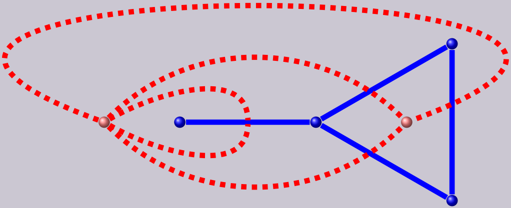
  $\because p=3,\ m=10,\ n=5,\ 3n-6=9<m=10;$

对偶图

Definition

设图G是平面图，则G的对偶图G^*是以G的面为结点，且若$e \in E(G)$且e的两边分别对应面x和y，则x和y在G^*中有边相连.

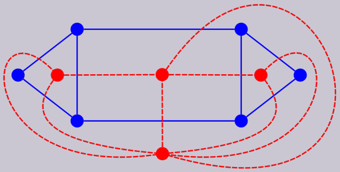
Example

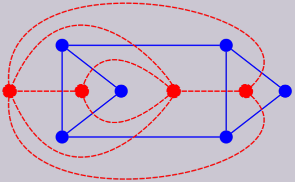


不同的对偶

若G是平面图，则由于G有不同的平面作图法，可导致G有不同的对偶.

Example: 两个不同的对偶不同构





Example

设G是平面图，G^*是其对偶. 则

1. G^*也是平面图，且G^*是连通图;
2. 若G连通，则G^*的每个面包含且仅包含G唯一一个结点;
3. G连通当且仅当$G^{**} \cong G$.

Proof

Example

设G是平面图，G^*是其对偶. 则

1. G^*也是平面图，且G^*是连通图；
2. 若G连通，则G^*的每个面包含且仅包含G唯一一个结点;
3. G连通当且仅当$G^{**} \cong G$.

Proof

- G^*的边仅需跨越一条原图G的边，因此是平面图；设u, v是G^*的点，则它们是原图G的面，则在原图上有条不经过G的结点由面u到v的曲线，该曲线在G^*中即是(u, v)路径.
- 设$u \in G$，考虑按逆时针方向u引出的所有的边，在其对偶图中应是逆时针围住u的回路，即G^*的面，且u在其中. 若G连通，设v是G的另一点，则有(u, v)路径，该路径在G^*正好是跨越面的曲线. 因此G^*的每个面最多G的一个点. 而G和G^*均是连通平面图，都满足Euler公式，由于G^*的结点数与G的面数相同，且两者边数相同，故G^*的面数与G的结点数一致. 这样每个G^*的面一定含且仅包含G唯一一个结点.

Example (contd)

设G是平面图，G^*是其对偶. 则

1. G^*也是平面图，且G^*是连通图；
2. 若G连通，则G^*的每个面包含且仅包含G唯一一个结点；
3. G连通当且仅当$G^{**} \cong G$.

Proof

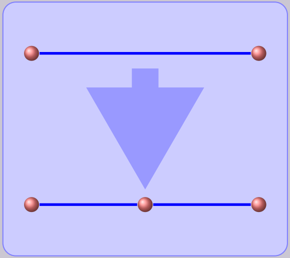
- 充分性：设$G^{**} \cong G$. 即G是G^*的对偶图. 由①有G^{**}连通.
- 必要性：设u'是G^*的一个面，也是G^{**}的一结点，则u'含且仅含唯一的G的结点 u. 由②，G^{**}和G的结点一一对应. 设 uv 是 G 的一边. 则根据对偶图的定义 G^* 有且仅有一条边 e^* 跨越 uv. 在图 G^* 中该边把 u 和 v 分离在两个不同的面中，且其面对应的 G^{**} 的点分别是 u' 和 v'. 这样 $u'v'$ 是图 G^{**} 中唯一的跨越 e^* 的边. 即 $u'v'$ 与 uv 一一对应. 故 G 与 G^{**} 同构.

两度结点同构

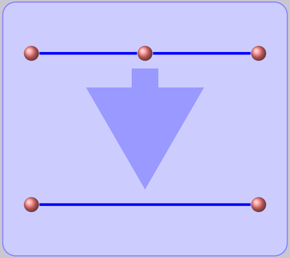
Definition

图G和图G'称为两度结点同构，iff，对G和G'增加或删除两度结点之后所得到的图是同构图.

增加和删除操作

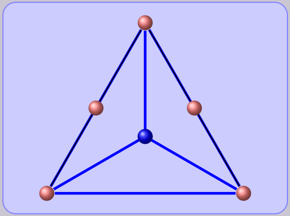


(a) 增加两度结点

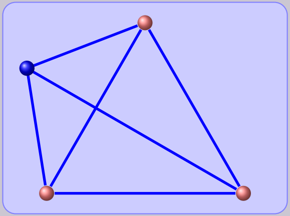


(b) 删除两度结点

Example



(a) 原图



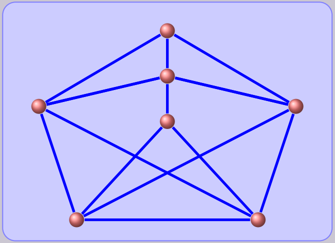
(b) 删除两度结点后同构K_4

平面图的充要条件

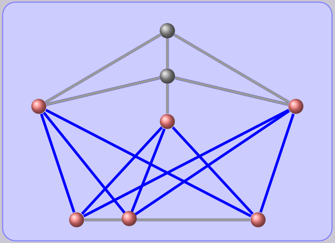
Theorem (Kuratowski)

G是平面图，iff，G中不含有与$K_{3,3}$和K_5两度结点同构的子图.

Example (1/2)



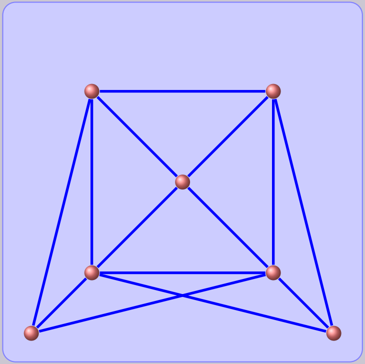
(a) 非平面图



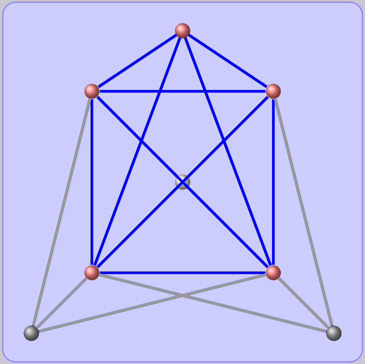
(b) $K_{3,3}$子图

Example (2/2)

Example



(a) 非平面图



(b) 两度同构K_5的子图

Example

Example

小于30条边的简单平面图中一定有一个结点的度数$\leqslant 4$.

Proof(反证法).

设所有的结点的度数均$\geqslant 5(\delta > 5)$；则：

$$5n \leqslant 2m < 60$$

即：

$$n < 12$$

又：

$$m \leqslant 3n - 6$$

$\therefore$

$$5n \leqslant 2m \leqslant 6n - 12$$

即：

$$n \geqslant 12$$

矛盾. □

本章小节

1. 平面图
   - 平面图的定义
   - Euler公式
   - 对偶图
   - Kuratowski定理
   - 例子