二部图及匹配

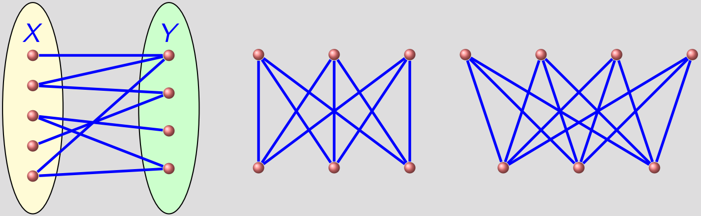
School of Computer
Wuhan University

二部图

Definition

1. 如果V能划分为两个不相交的两个非空子集合X和Y，且每个子集合的中的任意两个结点都无边相连，称这样的无向图为二部图.
2. 如果X中的任一结点与Y中的任一结点均有边相连，称为完全二部图，记为$K_{m,n}$（其中$m = |X|$, $n = |Y|$ $m \leqslant n$).
3. $K_{1,n-1}$称为星.

Example



(a) 二部图 (b) $K_{3,3}$ (c) $K_{3,4}$

引理

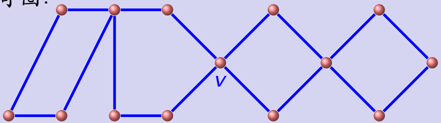
引理

每个长度为奇数的回路一定包含一长度为奇数的基本回路(奇圈).

证明

对回路W的长度l用归纳法.

1. $l = 1$, 则W是自回路, 即长度为1的回路.
2. $l > 1$. 设结论对所有的长度$< l$的回路都成立. 设回路$|W| = l$, 则
3. 若W没有重复的内部点, 则W本身是一个奇圈.
4. 若W有重复的内点v. 则W进出v两次. 将v看成W的起点, 则W是两个回路的并. 由于$|W|$是奇数, 则两回路之一的长度必为奇数. 因此由W得到一个长度比l还小的奇回路. 根据归纳假设, 该回路有一个奇圈. 即W也有奇圈.



(a) 奇回路的分解

(b) 偶回路不成立: uvu

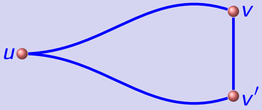
二部图的充要条件

定理

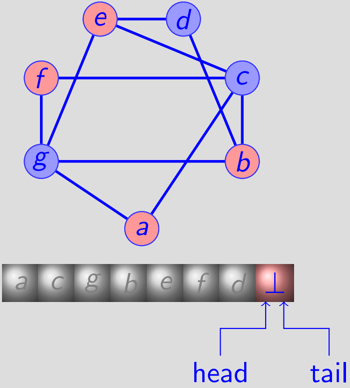
G是二部图当且仅当G没有奇圈.

证明

1. 必要性：设$G(X,Y)$是二部图，则G的路径所经历的点序列一定在X和Y交错，这样长度为奇数的路径其端点一定在不同的结点划分中，不可能形成回路.
2. 充分性：G是二部图当且仅当G的每个连通分支都是. 设H是G的一个非平凡分支，则
3. 设$u \in V(H)$，定义$X = \{v \mid d(u,v)是奇数\}$，$Y = \{v \mid d(u,v)是偶数\}$. 则X和Y是$V(H)$的一个划分. 需证明H所有边的端点分别落在X和Y中.
4. 设有边vv'，其端点同在X或Y. 设(u,v)和(u,v')是u到v和v'的最短路. 两个路长同奇偶，这样$(u,v)+vv'+(v',u)$是一个奇回路. 这样根据引理存在奇圈. 矛盾.



BFS二部图判别算法动态演示



已遍历结点: a c g b e f d

BFS二部图判别算法

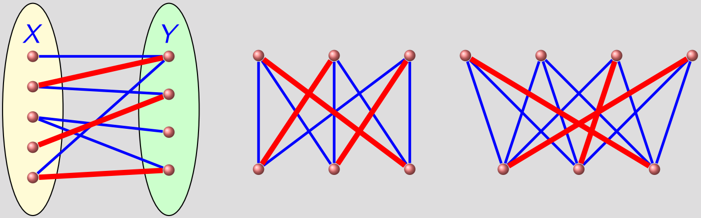
```
function Bipartiteness(Start)
{
  setcolor(Start, red);
  enqueue(Queue, Start);
  while notEmpty(Queue) {
    Node := dequeue(Queue);
    color := Node.color;
    for each Child in Expand(Node) do
      if (Child.color == none) then {
        setcolor(Child, oppsite(color));
        enqueue(Queue, Child);
      } else
      if (Child.color == color)
        Error("the graph is not bipartited");
  }
}
```

匹配

Definition

1. 一个没有自回路的边的集合$M \subseteq E$称为匹配，当且仅当M中的任意两条边都没有共同的端点.
2. 与M关联的结点称为M饱和点. $X \subseteq V$中的每个点都饱和，称M饱和X.
3. 若M饱和V，则称M为完备匹配.

Example

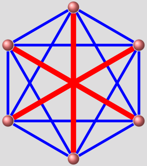


(a) 匹配　(b) 完备匹配　(c) 无完备匹配

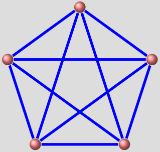
Example: 完全图的完备匹配

1. M中每个边贡献两个不同的点，因此$|V(M)|$是偶数.
2. M能饱和V必要条件是$|V|$为偶数，因此阶数为奇数的完全图没有完备匹配.
3. K_{2n}完备匹配数为：第1点可选$2n-1$个点来配对，第3点可选剩下$2n-3$点配对，如此下去．共$(2n-1)(2n-3)\cdots 1 = (2n)!/(2^n n!)$个.

Example



(a) K_6有15个



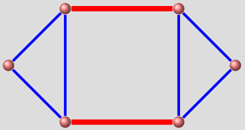
(b) 奇数阶图

极大匹配与最大匹配

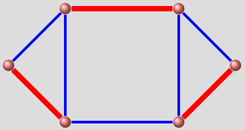
Definition

1. 若向M增加边，就破坏了匹配，称M为极大匹配.
2. 所有匹配中基数最大的匹配称为最大匹配.
3. 对所有的匹配M有：$|M| \leqslant n/2$.
4. 完备匹配一定是最大匹配，最大匹配不唯一.

Example



(a) 极大匹配



(b) 最大

交错路与增广路

Definition

1. 由在匹配M的边与不在匹配M的边组成的路径称为M交错路.
2. 两个端点均不是M的饱和点的交错路称为M增广路.
3. 将增广路的中的M中的边从M中删除，同时将其非M边加入到M将得到一个比原M更大的匹配M'.

Example

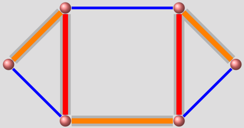
(a) 增广路　　(b) 交错路

对称差

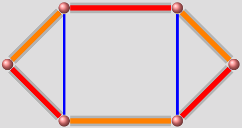
Definition

1. 设H和H'是图G的子图，H和H'的对称差$H\Delta H'$定义为由仅在H和H'其中之一的边导出的子图.
2. 若M和M'是匹配，则$M\Delta M=(M-M')\cup(M'-M)$.

Example



(a) 对称差是路



(b) 对称差是回路

匹配对称差引理

引理

两个匹配M和M'的对称差$M\Delta M'$的每个连通分支一定是条路或长度为偶数的回路.

证明

设$F = M\Delta M'$. 设$v \in V(F)$. 且$\deg_F(v) \geqslant 3$. 则从v引出的三边必有两边同属于 M 或 M', 而匹配中的边是不允许有共同的结点. 矛盾. 因此$\deg_F(v) \leqslant 2$, 即 $\Delta(F) \leqslant 2$. 这样F的每个连通分支是路或回路. 更进一步该路或回路一定在 M 和 M' 中交错. 因此回路中M和M'的边数相等, 即偶圈.

Example

(a) 对称差是路　(b) 对称差是圈

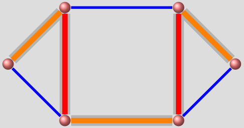
Berge定理

Theorem (Berge)

若M是图G的最大匹配当且仅当G没有M增广路.

证明(反证法)

1. 必要性：设M是最大匹配. 若M有增广路，则将增广路的M边与非M边替换得到一个边数更多的匹配，矛盾.
2. 充分性：设M是没有增广路且M不是最大匹配. 设M'是最大匹配，则$|M| < |M'|$. 则$M \Delta M'$由路或圈连通分支组成. 由于$|M| < |M'|$，因此$M \Delta M'$中M'的边更多，这样$M \Delta M'$中一定有个连通分支其M'的边更多. 即该分支不可能是回路，且端点均饱和M. 即一条M增广路. 矛盾.

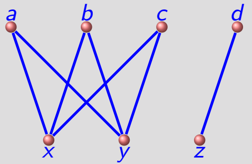


匹配与相邻结点的关系

定义

1. 为什么在求职时，岗位少，求职者多，则每个岗位都招到；反之，每个求职者都可找到岗位；
2. 但也可能在岗位少时，求职者的条件苛刻，存在招不满的情况；
3. 即二部图$G(X, Y)$的某一划分X是否对某一匹配饱和与结点集合和与该结点集合相邻的结点集合的关系；
4. 设$S \subseteq V$，S的邻集$N_G(S) = \{ u \,|\, \exists s \in S \wedge su \in E \}$.

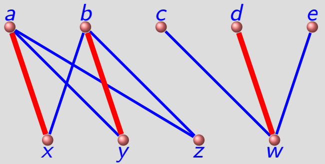
Example



$\{x, y, z\}$可饱和，$\{a, b, c\}$不可饱和

$N(\{x, y\}) = \{a, b, c\}$

$N(\{a, b, c\}) = \{x, y\}$



$\{x, y, z\}$不可饱和，$\{a, b\}$可饱和

$N(\{x, y, z\}) = \{a, b\}$

$N(\{a, b\}) = \{x, y, z\}$

Hall定理

Theorem (Hall)

设$G(X,Y)$是二部图，X可饱和的充要条件是对任意的X的子集合 S 有 $|S| \leqslant |N(S)|$.

证明(König)

1. 必要性：设M是饱和X的匹配，设$S \subseteq X$. 则M将S中的每个点都映射到Y中的不同的点，即$|S| \leqslant |N(S)|$.
2. 充分性：由于饱和X的匹配一定是最大匹配，其基数为$|X|$，由König定理，需证明X是最小点覆盖.
3. 设V是G的任意点覆盖. 设$S = X - V$，则$N(S) \subseteq Y \cup V$.
4. $|V| = |V \cup X| + |V \cup Y| \geqslant |V \cup X| + |N(S)| \geqslant |V \cup X| + ||V - X| = |X|$.
5. 即所有点覆盖的基数不小于$|X|$，而X是G的点覆盖，因此X是最小点覆盖.
6. 由König定理存在结点落在S上的最大匹配M. 即M饱和X.

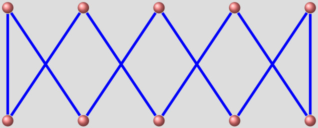
Marriage定理

Corollary

设$k>0$, 则任意的k正则二部图一定存在完备匹配.

证明

1. 设$G(X,Y)$是k正则的, 则$m=k|X|=k|Y|$. 即$|X|=|Y|$. 这样如果一匹配饱和X, 则它也饱和Y.
2. 设$S\subseteq X$. 设S到$N(S)$的总边数为p. 则$p=k|S|$.
3. 另一方面可将这p条边也可看成由$N(S)$中的点引出, 而每个点仅能引k条边, 这样$p\leqslant k|N(S)|$.
4. 即$k|S|\leqslant k|N(S)|$, 故$|S|\leqslant|N(S)|$. Hall条件成立.



Example

8×8的棋盘，若移去一对角上的两个方格后，则不能有1×2的长方形填满而不重叠.

证明

等价与有红点和蓝点组成的二部图是否有完备匹配. 但红点比蓝点少2个，因此不可能.