图的染色

School of Computer
Wuhan University

1. 结点染色
   - 结点染色的定义
   - 团
   - 贪心染色算法

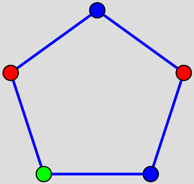
1. 结点染色
   - 结点染色的定义
   - 团
   - 贪心染色算法

定义

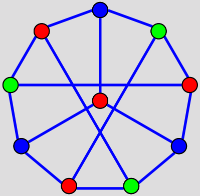
定义

1. 图 G 的 k 染色 π 是结点集 V 到 $\{1, 2, \ldots, k\}$(颜色编号)上的映射. 使得相邻的结点染色均不同.
2. 即相同染色的结点不相邻，这样 $V_i = \{ v \mid v \in V \wedge \pi(v) = i \}$ 是独立集或空集，即 V 可划分为不大于 k 个的独立集.
3. 若图 G 存在 k 染色，则称 G 是 k 色可染的.

Example



(a) C_5

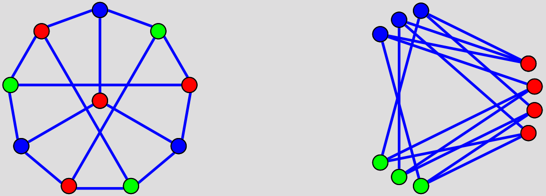


(b) Petersen图

性质

1. 若图G有自回路，则G是不可染色的；图的重边不影响染色；因此仅考虑简单无向图.
2. 若图G是k色可染的，则图G也是$k+1$色可染的，最小的k，使得图G是k色可染的，称为图G的色数，记为$\chi(G)$. 图G也称k色图.
3. $\chi(G) \leqslant n$; $\chi(K_n) = n$; $\chi(C_{2n}) = 2$; $\chi(C_{2n+1}) = 3 (n \geqslant 1)$.
4. 若G是k色可染的当且仅当G是k部图. 可染色图主要用于优化问题求解，而k部主要用于图的结构.

Example

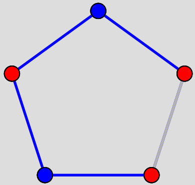


(c) Petersen图　　(d) Petersen同构图

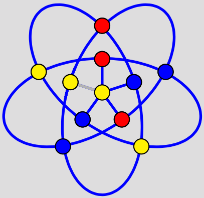
临界性

1. 若$H \subseteq G$. 则$\chi(H) \leqslant \chi(G)$.
2. 若对G的任意真子图$H \subsetneq G$, 有$\chi(H) < \chi(G) = k$, 则称G为临界k色图.
3. 并不是所有的图都有临界性质，如$\chi(C_4) = 2$, 但是$P_3 \subsetneq C_4$, $\chi(P_3) = 2$. 即C_4没有临界性.
4. 临界1色图只有K_1, 临界2色图只有K_2. 临界3色图只有奇圈C_{2n+1}.
5. 临界4色图还没有很好的特征. 即没有好方法判断3色可染.

Example



(a) C_5

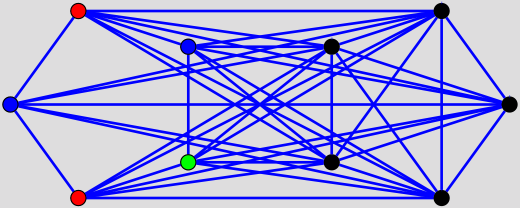


(b) Grötzsch图

团

1. 若$K_i \subseteq G$. 则$\chi(G) \geqslant i$.
2. 设$S \subseteq V$, S中的任意两结点都相邻，即以S为支撑的子图是完全图，称S为团. G中最大团的基数记为$\omega(G)$，则$\omega \leqslant \chi$.
3. S是G的团当且仅当S是$\overline{G}$的独立集.
4. 因α是图G最大独立集的基数，而相同的染色结点集必须是由独立集组成的划分，这样划分的基数不少于n/α，即$\chi \geqslant n/\alpha$.

Example

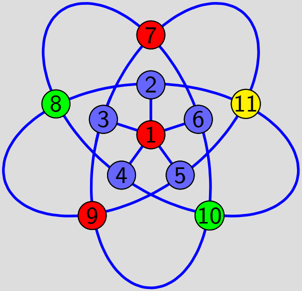


(a) $C_5 \vee K_5, \omega = 7, \chi > 7$

贪心染色算法

1. 选择一结点序列$v_1, v_2, \ldots, v_n$. 颜色序号初值置1.
2. for $i := 1$ to n step 1 do:
   则尽可能染v_i为序号最小且没有被其以染色相邻结点($\{v_1, v_2, \ldots v_{i-}\}$)用过的颜色. 否则染新色且颜色序号加1

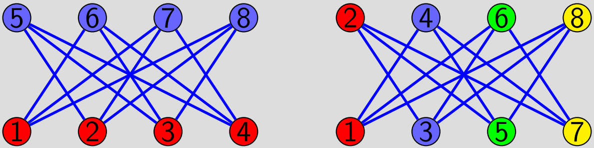
动态演示



贪心染色算法

1. 贪心染色算法并不能保证一定是最优解，即$\chi(G)$.
2. 不同的结点序的选择对结果影响特别大，甚至可能得到最坏的结果.
3. 设$\Delta(G)$是结点度数的最大值，则算法保证每次对v_i染色时，其颜色序号一定不会超过$\Delta+1$，即$\chi \leq \Delta+1$.

例：结点排序对染色的影响



本章小节

1. 结点染色
   - 结点染色的定义
   - 团
   - 贪心染色算法