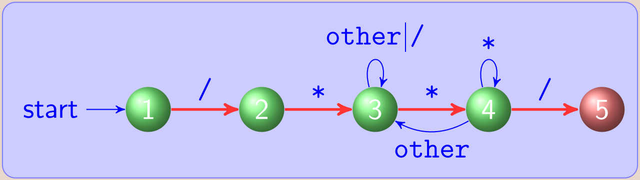
作图软件

1. graphviz (http://www.graphviz.org/).
2. aisee (http://www.aisee.com/).
3. uDraw (http://www.informatik.uni-bremen.de/uDrawGraph/en/home.html).
4. Visio (http://office.microsoft.com/zh-cn/visio/).
5. Mathematica (http://www.wolfram.com/mathematica/).
6. boost graph: C++ source libraries(see boost home).
7. pgf/tikz: Graphic systems for TEX(http://sourceforge.net/projects/pgf/).
8. more... (http://www.ics.uci.edu/~eppstein/gina/gdraw.html).

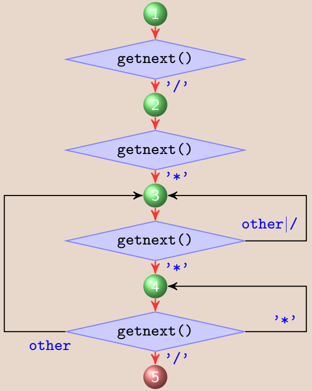
状态图

识别C语言注释的状态图



状态图 ⟺ 流程图

识别C语言注释流程图

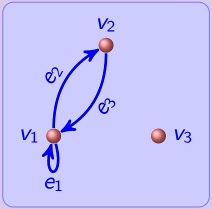


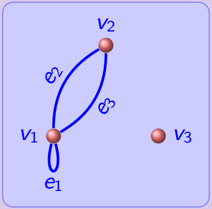
C语言源程序

```
void comment(void)
{
  int c;
  if (getnext() == '/' && getnext() == '*')
    for ( ; ;) { /*  state 3 */
      while ( (c = getnext()) != '*' && (c != EOI));
      if ( c == '*' ) {
        while ( (c = getnext()) == '*') ;
                                /*  state 4 */
        if ( c == '/')
          break; /*  state 5 */
        }
      if ( c == EOI ) {
        error ("end of input reached in comments! ");
        break;
        }
      }   /*  state 3 */
}
```

图的定义

Definition

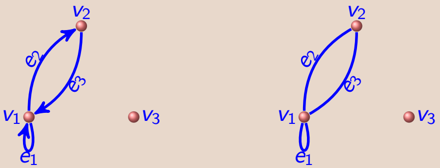




设$G = \langle V, E, \psi \rangle$是三重组，其中有限集合$V$的元素称为结点(vertices)，集合 V 也称结点集；有限集合 E 的元素称为边(edges)，集合 E 也称边集；ψ 是边和结点对应关系函数，也称关联函数:

1. $\psi : E \longrightarrow V^2$, $e \longmapsto \langle x, y \rangle$，称为有向图(Directed graph, Digraph)；x是边 e 的起点(head)；y是边e的终点(tail)；有向边也称为：弧(directed edges, arcs, or arrows)；
2. $\psi : E \longrightarrow \{\, \{x, y\} \mid x, y \in V \,\}$, $e \longmapsto \{x, y\}$，称为无向图(Undirected graph, graph)；x和y称为边e的端点(endpoints)。

Example



(a) D (b) G

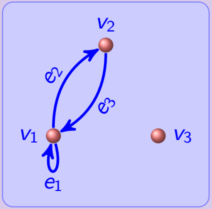
1. D: $\psi: e_1 \longmapsto \langle v_1, v_1\rangle,\ e_2 \longmapsto \langle v_1, v_2\rangle,\ e_3 \longmapsto \langle v_2, v_1\rangle$;
2. e_2和e_3是对称边，e_1是自回路(环，loop).
3. G: $\psi: e_1 \longmapsto \{v_1, v_1\},\ e_2 \longmapsto \{v_1, v_2\},\ e_3 \longmapsto \{v_2, v_1\}$;
4. e_2和e_3是重边(平行边)，e_1是自回路(环，loop).

Notation

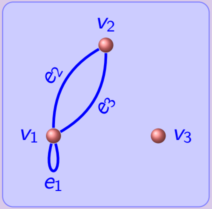
☞ $n = |V|$ (阶数，结点数)，$m = |E|$ (边数). 阶数为1的图称为平凡图.

☞ 用$[x, y]$表示e对应结点，G为有向图时表示$\langle x, y\rangle$，G为无向图时表示$\{x, y\}$.

相关定义



(a) G_1



(b) G_2

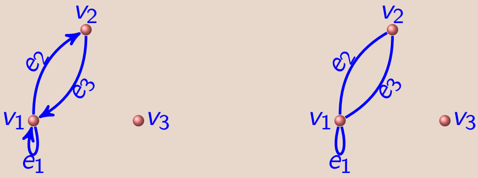
1. 结点a和b是相邻(adjacent), iff, $\exists e\ \psi(e) = [a, b] \vee \psi(e) = [b, a]$;
2. 边e和f是相邻的, iff, $\psi(e) = [a, b] \wedge \psi(f) = [b, c]$;
3. 如果结点v不和任何结点(包括自己)相邻, 称之为孤立点(Isolated vertex);
4. 有平行边的图称为多重图(Multigraph);
5. 没有平行边和环的图(有向或无向)称为简单图(simple); 此时ψ是单射, 所以可以直接用$[x, y]$或xy表示边;
6. if $E = \emptyset$, 称为空图(empty graph, or null graph);
7. 在图中增加一个函数$\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$, 即每条边都赋上权值称为赋权图(Weighted graph).

基础图与定向图

Definition

1. 设D是有向图，将图D所有边的方向去掉所的到的无向称为图D的底图(基础图).
2. 设G是无向图，将图G的每条边都指定一个方向所得到的有向图称为图G的定向图.

Example



(a) D (b) G

图G是图D底图，图D也是图G的定向图.

完全图

Definition

1. 设$G = \langle V, E\rangle$是简单图，称为G是完全图，iff，每对结点都有边相连.
2. n个结点的完全无向图记为K_n，n个结点的完全有向图记为K_n^*.
3. $m(K_n) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$，$K_n^* = 2\binom{n}{2} = n(n-1)$.

Example

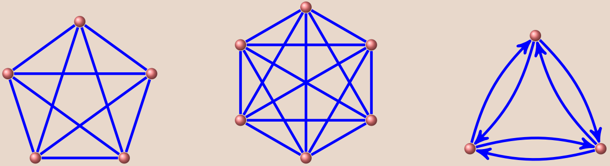
(a) K_5 (b) K_6 (c) K_3^*

完全图

Definition

1. 设$G=\langle V,E\rangle$是简单图，称为G是完全图，iff，每对结点都有边相连.
2. n个结点的完全无向图记为K_n，n个结点的完全有向图记为K_n^*.
3. $m(K_n)=\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$，$K_n^*=2\binom{n}{2}=n(n-1)$.

Example



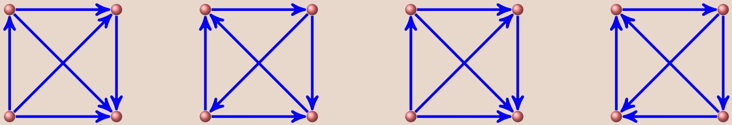
(a) K_5 (b) K_6 (c) K_3^*

竞赛图

Definition

完全图的定向图称为竞赛图.

Example (K_4 的不同的竞赛图)

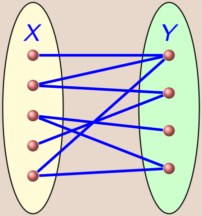


二部图

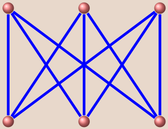
Definition

1. 如果V能划分为两个不相交的两个非空子集合X和Y，且每个子集合的中的任意两个结点都无边相连，称这样的无向图为二部图.
2. 如果X中的任一结点与Y中的任一结点均有边相连，称为完全二部图，记为$K_{m,n}$（其中$m = |X|$, $n = |Y|$ $m \leqslant n$).
3. $K_{1,n-1}$称为星.

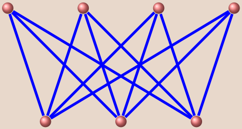
Example



(a) 二部图

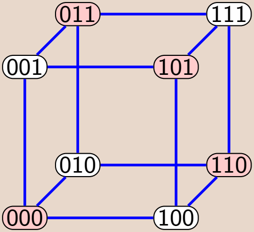


(b) $K_{3,3}$

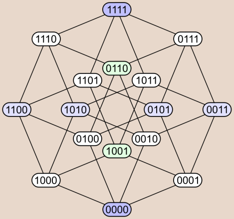


(c) $K_{3,4}$

Example: n维超立方体



(a) Q_3



(b) Q_4

Definition

$Q_n = (V_n, E_n)$, 其中:

$$V_n = \{ x_1x_2\cdots x_n \mid x_i \in \{0,1\},\ i = 1,2,\ldots n \}$$

设$x = x_1x_2\cdots x_n$, $y = y_1y_2\cdots y_n$,

$$xy \in E_n \text{ iff } \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 1 \text{ (Hamming distance)}$$

1. $n = 2^n$, $m = 2^{n-1}n$.
2. Q_n一定是二部图.

度数

Definition (度数)

1. 有向图中, $v \in V$:
   — 以v为始点的边的个数称为出度(out-degree), 记为: $\deg^+(v)$;
   — 以v为终点的边的个数称为入度(in-degree), 记为: $\deg^-(v)$;
   — $\deg(v) = \deg^+(v) + \deg^-(v)$;
2. 无向图中, $\deg(v) =$ 以v为端点的边的个数.
3. 最大结点度数: $\Delta(G) = \max\{\deg(i) \mid i \in V\}$.
4. 最小结点度数: $\delta(G) = \min\{\deg(i) \mid i \in V\}$.

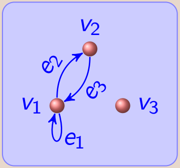
公式

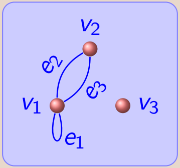
图$G(V,E)$中:

$$\sum_{i \in V} \deg(v_i) = 2m$$

$$\sum_{i \in V} \deg^+(v_i) = \sum_{i \in V} \deg^-(v_i) = m$$

Example





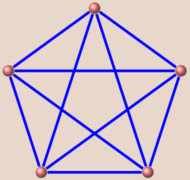
1. 左图中: $\deg^+(v_1) = 2$, $\deg^-(v_1) = 2$, $\deg(v_1) = 4$, $\deg^+(v_2) = 1$, $\deg^-(v_2) = 1$, $\deg(v_1) = 2$, $\deg(v_3) = 0$; $\Delta = 4$, $\delta = 0$.
2. 右图中: $\deg(v_1) = 4$, $\deg(v_2) = 2$, $\deg(v_3) = 0$. $\Delta = 4$, $\delta = 0$.
3. 孤立点的度数为零.
4. 度数为奇数的结点的个数一定是偶数个, 否则所有结点的度数之和不是偶数, 与度数之和是边的倍数矛盾.

正则图

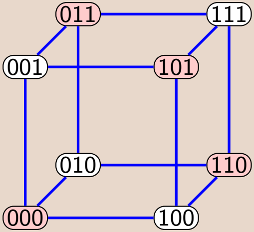
Definition

1. 无向图G是k正则的, iff $\forall v \in V$, $\deg(v) = k$.
2. 完全图K_n是$n-1$正则的.
3. 完全二部图$K_{n,n}$是n正则的.
4. 超立方体Q_n是n正则的.
5. G是k正则的, 则$m = k * n/2$.

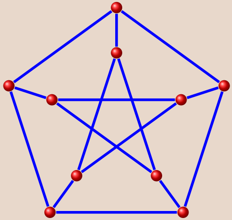
Example



(a) K_5



(b) Q_3

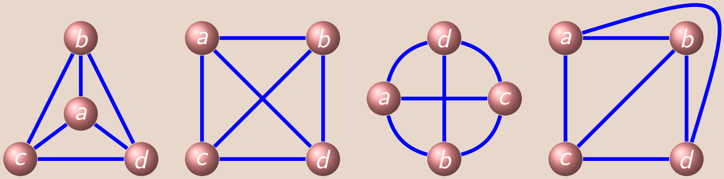


(c) Petersen图

图的同构：Examples

Example

图中 G_1，G_2，G_3，G_4 都是K_4的不同图形表示.



(a) G_1 (b) G_2 (c) G_3 (d) G_4

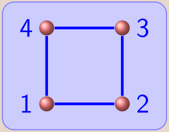
图的同构的定义

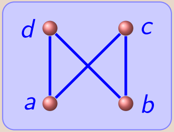
Definition

称图 $G = \langle V, E\rangle$ 和图 $G' = \langle V', E'\rangle$ 是同构的, iff, 存在双射 $\Phi : V \longrightarrow V'$ 和 $\Psi : E' \longrightarrow E'$, 使得 $\forall e \in E$:

$$\psi(e) = [a, b] \Longrightarrow \psi'(\Psi(e)) = [\Phi(a), \Phi(b)]$$

Example





$\Phi : 1 \longmapsto a,\ 2 \longmapsto c,\ 3 \longmapsto b,\ 4 \longmapsto d$

$\Psi : (1, 2) \longmapsto (a, c),\ (2, 3) \longmapsto (c, b),\ (3, 4) \longmapsto (b, d),\ (4, 1) \longmapsto (d, a)$

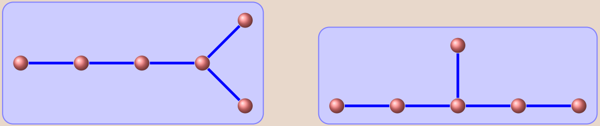
图同构的性质

Theorem

设G和G'同构，则:

1. *两图的结点数相同;*
2. *两图的边数相同;*
3. *对应结点的度数相同.*

Example (上述结论不是同构的充分条件)

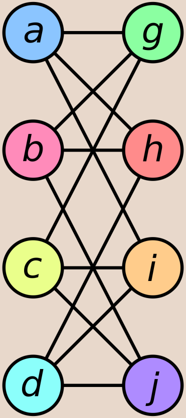


两个图结点，边数和度数相同，但是不同构.

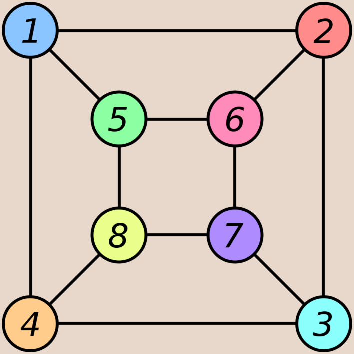
注释

Graph isomorphism problem is in NP (see: http://en.wikipedia.org/wiki/Graph_isomorphism_problem).

Example 1

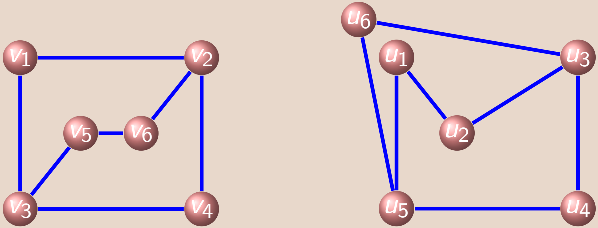


(a) Q_3



(b) Q_3

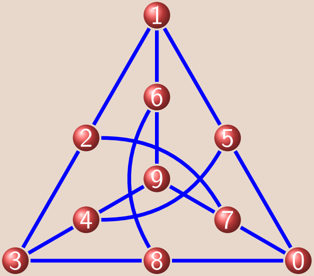
Example 2



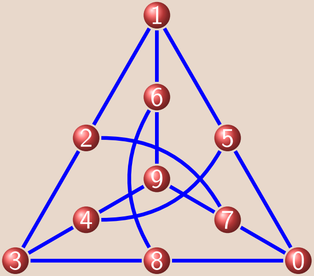
(a) G_1 (b) G_2

Example 3

与Petersen图同构



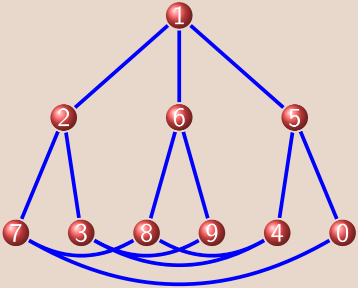
(a) G_1



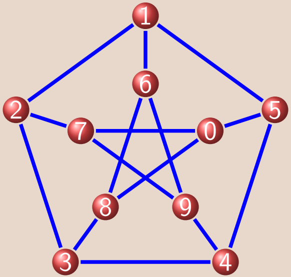
(b) Petersen图

Example 4

与Petersen图同构



(a) G_1



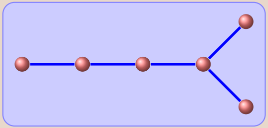
(b) Petersen图

度序列

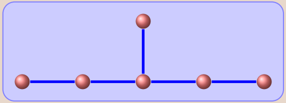
Definition

1. 设G是n个结点的无向图，则将n个结点的度数按照非递增方式排列所得到的n元序列称为图G的度序列.
2. 如果一个非负非递增的整数序列S可表示为某个图的度序列，则称S是可绘图的.

Example



(a) G_1



(b) G_2

1. 不同构的图G_1和G_2的度序列均为: $3, 2, 2, 1, 1, 1$.
2. 序列$3, 2, 2, 1, 1, 1$和序列$2, 2, 2, 2, 2$是可绘图的.
3. 序列$5, 1$和序列$1, 1, 1, 1, 1$是不可绘图的(后者度数之和为奇数).

可绘图度序列的判定算法

算法

1. 如果S的第一个数是0，则度序列是可绘图的；否则，从序列S中删除第一个数k.
2. 如果S的第一个数后的k个数都不小于1，则将这k个数都分别减去1得到新的序列S',；否则，原度序列是不可绘图的，停止.
3. 将S'重新排序得到新的序列S^*.
4. 令$S = S^*$，转移到步骤①.

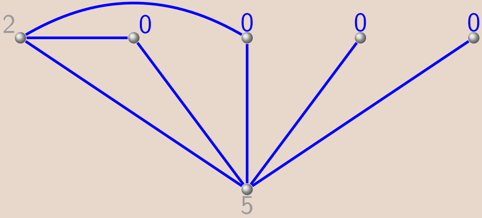
Theorem

设S'是由上述算法所得到的序列，则S是可绘图的当且仅当S'是可绘图的.

算法演示

度序列$S = 5,3,2,2,1,1$是可绘图的.

1. $S_1 = 5,3,2,2,1,1$, $S_1' = 2,1,1,0,0$;
2. $S_2 = 2,1,1,0,0$, $S_2' = 0,0,0,0$;
3. $S_3 = 0,0,0,0$, 停止.
4. 本例所绘制的图在同构意义下是唯一的. 但在一般情况下并不唯一.



子图

Definition

设$G = \langle V, E\rangle$和$G' = \langle V', E'\rangle$是两图，称$G'$是$G$的子图(Subgraph)，记为$G' \subseteq G$，iff:

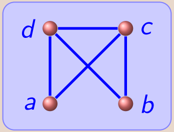
$$V' \subseteq V \ \wedge \ E' \subseteq E \ \wedge \varphi|_{E'} = \varphi'$$

更进一步:

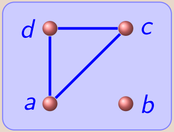
1. if $V' \subsetneq V \ \vee \ E' \subsetneq E$，称$G'$是$G$的真子图;
2. if $V' = V$，G'称为生成子图(支撑子图);
3. if $V' \subseteq V$，并且E'是由E中边的端点落在V'的边组成，称为由V'导出的子图;
4. if $E' \subseteq E$，并且V'是由E'中边的端点组成的集合，称为由E'导出的子图.

Example

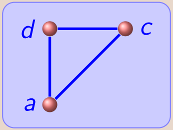
Example



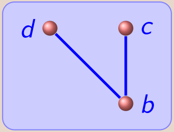
原图



生成子图



由结点导出的子图



由边导出的子图

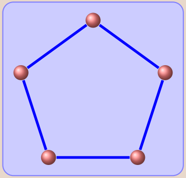
图的运算

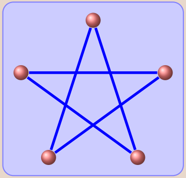
Definition

设$G_1 = \langle V_1, E_1\rangle$和$G_2 = \langle V_2, E_2\rangle$是两图:

- $G_1 \cup G_2 \triangleq \langle V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2\rangle$;
- $G_1 \cap G_2 \triangleq \langle V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2\rangle$;
- $G_1 - G_2 \triangleq$ 由$E_1 - E_2$导出的子图;
- G_1和G_2都是简单无向图, 称G_1和G_2互补, iff:
  $$V_1 = V_2 = V \wedge G_1 \cap G_2 = \langle V, \varnothing\rangle \wedge G_1 \cup G_2 = K_{|V|}$$
  记为: $G_2 \cong \overline{G_1}$.

Example (自补图— G与$\overline{G}$同构)

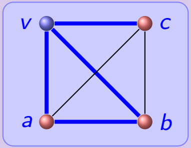


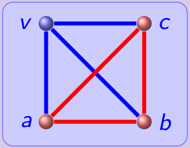


Example

对K_6的每条边任意地着上红色或蓝色，则一定存在一个颜色一致的三角形.

Solution.





- 设v是K_6中的任一结点；则$\deg(v) = 5$，所以从v引出的5条边一定有三条边是相同的颜色，不妨设为篮色，记为(v, a)，(v, b)和(v, c)；
- if (a, b)，(b, c)和(c, a)其中之一是蓝色，如(a, b)，则(v, a, b, v)是一条蓝色的基本回路；否则：
- (a, b)，(b, c)和(c, a)均为红色，此时，(a, b, c, a)是一条红色的基本回路.

□

Example 1

Example

设G是一个简单无向图且没有三角形，试证明：$m \leqslant \frac{1}{4}n^2$.

Solution.

- 如果G是空图，则$m = 0$，结论成立.
- 设$n \geqslant 2$，则$\forall xy \in E, x \neq y$，则$\forall z \in V, z \neq x \wedge z \neq y$，$xy$和$yz$最多有一个边属于$E$. 这样从$x$和$y$引出的到其他结点边的总数不大于$n-2$，$\therefore$
$$\deg(x) - 1 + \deg(y) - 1 \leqslant n - 2.$$
即
$$\deg(x) + $$
- $$\sum_{xy \in E} (\deg(x) + $$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$
取$x_i = \deg(v) \wedge y_i = 1$

- $$\sum_{v \in V} \deg^2(v) \leqslant mn.$$
- by Cauchy inequality 有
$$\frac{1}{n}\left(\sum_{v \in V} \deg(v)\right)^2 \leqslant \sum_{v \in V} \deg^2(v) \leqslant mn$$

Example 2

Example

无环图G存在一个二部支撑子图H使得每个结点x都有$\deg_G(x) \leqslant 2\deg_H(x)$. 因此$m(G) \leqslant 2m(H)$.

Solution. [反证法]

1. 设H是G的一个边数最多的支撑二部子图. H的结点集二部划分为$\{X, Y\}$
2. 设$\forall x \in V = X \cup Y$, 不妨设$x \in X$. 设结论的反面成立: $2\deg_H(x) < \deg_G(x)$.
3. 即x作为图G的结点连接X的边比连接Y的边要多.
4. 设$X' = X - \{x\}, Y' = Y \cup \{x\}$. 将图$H$中$x$连接$Y$的边替换为$x$连接$X$的边得到一个新的支撑子图$H'$.
5. 则$m(H') = m(H) - \deg_H(x) + (\deg_G(x) - \deg_H(x)) = m(H) + \deg_G(x) - 2\deg_H(x) > m(H)$.
6. 与H是边数最大的支撑二部子图矛盾.
7. 对②求和即有结论.

本章小节

1. 基本概念
   - 例子
   - 图的定义
   - 基础图与定向图
   - 完全图
   - 竞赛图
   - 二部图
2. 度数
   - 度数
   - 正则图
3. 图的同构
   - 图的同构
   - 例题
   - 度序列
4. 子图及图的运算
   - 子图
   - 图的运算
   - 例题