一阶谓词逻辑

School of Computer
Wuhan University

Jacques Herbrand (1908 — 1931)

1. 谓词与量词
   - 谓词
   - 符号化
   - 一阶逻辑公式的语义
2. 公式间的关系式
   - 逻辑等价和永真蕴涵关系
   - 量词的逻辑关系
   - 前束范式
3. 谓词公式的自然推理
   - 相关概念的复习
   - 量词的推理规则
   - 形式证明的例子
   - Mechanized Reasoning

Limitations of Propositional Logic

Example

- Every man is mortal (P). Since Confucius is a man (Q), he is mortal (R).
- 直观上看，R是P和Q的有效结论；
- 但是，如果用命题逻辑来表达则不成立：$P, Q \nvdash R$；
- 原因：P, Q和R所描述的对象是相关的，但是，在抽象为原子后，彼此不再相关.
- 命题逻辑不能表达上述逻辑规律；
- 解决方法：让原子中有对象的信息：引入**项**，**谓词**和**量词**，使得语句的真假和对象相关；
- $(\forall x(MAN(x) \to MORTAL(x))) \land MAN(Confucius) \Rightarrow MORTAL(Confucius)$.

Extensions to First-order Logic

Idea

- 真假值的运算规则和命题逻辑一致;
- 真假值与对象相关;
- 有足够的表达能力，数学语言完全能够用一阶逻辑表达;
- 注意: 计算机中很多的现象不能用一阶逻辑表达;
- Logic in computer science: Combinatory Logic, Hoare Logic, Temporal Logic, Dynamic Logic, Linear Logic, High Order Logic, etc.

Terms (1/2)

Example

1. "x大于3";　$P(x)$
2. "x大于y";　$Q(x,y)$
3. "x+1大于x";　$R(x)$
4. 三句话所描述的对象不同，但是对象之间的关系是相同的($GREATER$).

Example

1. 引入表示对象关系的函数$plus$和常数对象3，上述关系可表示为：
2. "x大于3";　$GREATER(x,3)$
3. "x大于y";　$GREATER(x,y)$
4. "x+1大于x";　$GREATER(plus(x,1),x)$
5. 这样在谓词中出现的对象可以是通过常数，变量和函数符号组合成的对象，称之为项(terms).

Terms (2/2)

Example

1. “x loves y”: $Love(x, y)$
2. “x’s father loves x”: $Love(father(x), x)$
3. “John loves Mary”: $Love(John, Mary)$
4. “Mary’s father loves Mary”: $Love(father(Mary), Mary)$

Remark

1. *也可以在谓词中不使用项，这样需要引入更多的谓词，使得谓词公式过于复杂，如：*
2. *“x is y’ father”:* $FATHER(x, y)$
3. *“x’s father loves x”:* $FATHER(y, x) \wedge LOVE(y, x)$

谓词公式形式系统中使用的符号

Definition

- 常数符号(constant symbol): 3, *John*, *Mary*, ...
- 变量符号(variables): x, y, z, ...
- 函数符号(functions): *plus*, *father*, f, g, ...
- 谓词符号(predicate): *MAN*, *GREATER*, *LOVE*, P, Q, R, ...
- 各种符号应和具体形式化对象相关.

参数问题

Remark

- 每个函数符号都固定参数的个数, f 的参数的个数为n, 称为n元函数(n-ary function), 如: $plus$是2元函数, $father$是1元函数;
- 0元函数退化为常数;
- 每个谓词符号都固定参数的个数, P的参数的个数为n, 称为n元谓词(n-ary predicate), 如: $LOVE$ 和 $GREATER$ 是2元谓词, MAN 和 $MORTAL$ 是1元谓词;
- 0元谓词退化为命题.

项的形式定义

Definition (递归定义)

1. 常数符号，变量符号是项;
2. if f 是 n-ary function symbol, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是已经定义的项，则 $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 也是项;
3. 所有的项都是由以上规则在有限步生成.

Example

1. x, 1 是项； by Def①
2. $plus(x, 1)$ 是项； by Def②
3. $plus(plus(x, 1), 1)$ 是项； by Def②

谓词

Definition (递归定义)

If P is an n-ary predicate symbol, and $t_1, t_2, \ldots, t_n$ are terms, then $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$是原子.

Example

1. $MAN(x)$, $MORTAL(Confucius)$;
2. $LOVE(father(MARY), MARY)$;
3. $GREATER(plus(plus(x, 1), 1), 1)$.

Remark

- 谓词原子和命题一样有唯一的真假值;
- 将命题公式中的原子换为谓词原子所得到的公式称为谓词公式;
- 这样的谓词公式同样也满足命题公式的所有运算规律, 如:
  $P(t_1) \to Q(t_2, t_3) \Leftrightarrow \neg P(t_1) \vee Q(t_2, t_3)$

量词(1/2)

Example (How to express these reasons?)

- 每个有理数都是实数;
- There exists a number that is prime;
- For every number x, there exists a number y such that $x < y$.

Remark (特点)

- *不涉及到某个特定的个体;*
- *对个体所在的对象全体的整体性质进行描述;*
- *引入新的逻辑符号— 量词(Quantifier) — 描述对象的整体性质.*

量词(2/2)

量词

全称量词(Universal)	特称量词(Existential)
for all x for every x for each x	there exists an x for some x for at least one x
$\forall$	$\exists$

Example

1. 每个有理数都是实数: $\forall x(Q(x) \to R(x))$;
2. There exists a number that is prime: $\exists x Prime(x)$;
3. For every number x, there exists a number y such that $x < y$: $\forall x(\exists y Less(x, y))$.

合式公式(Well Formed Formulas)

Definition (递归定义)

1. Base: $\mathbb{T}$, $\mathbb{F}$ & Atoms are WFF;
2. Induction Rule: if F & G are WFF, then $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \to G)$, $(F \leftrightarrow G)$ are WFF;
   F & G称为递归定义中的元变量(metavariable);
3. if F is WFF, x is variable symbol, then $(\forall x F)$ & $(\exists x F)$ are WFF;
4. 极小性条款：由以上规则在有限步生成的都是WFF, 称为谓词公式, 简称为公式.

Example

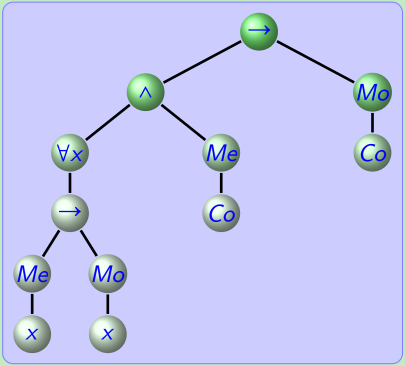
Example

1. $MAN(x)$, $MORTAL(x)$, $MAN(Confucius)$, $MORTAL(Confucius)$是WFF； by Def①
2. $(MAN(x) \to MORTAL(x))$是WFF； by Def②+①
3. $(\forall x(MAN(x) \to MORTAL(x)))$是WFF； by Def③+②
4. $((\forall x(MAN(x) \to MORTAL(x))) \wedge MAN(Confucius))$是WFF； by Def②+③①
5. $(((\forall x(MAN(x) \to MORTAL(x))) \wedge MAN(Confucius)) \to MORTAL(Confucius))$是WFF； by Def②+④①

公式的语法树

Example

$(((\forall x(MAN(x) \to MORTAL(x))) \wedge MAN(Confucius)) \to MORTAL(Confucius))$



省略括号的约定

- 最外层的括号可以去掉;
- 运算的优先级别由高到低:

  括号, $\forall$, $\exists$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

- 同一二元运算符号按从左到右进行结合.

Example

1. $\forall x \exists y \forall z P(x,y,z) \equiv (\forall x(\exists y(\forall z P(x,y,z))))$;
2. $\forall x(MAN(x) \rightarrow MORTAL(x)) \wedge MAN(Confucius) \rightarrow MORTAL(Confucius)$
3. $\forall x P(x) \rightarrow Q(x) \equiv (\forall x P(x)) \rightarrow Q(x) \neq \forall x \underline{(P(x) \rightarrow Q(x))}$.

符号化谓词公式(1/5)

Example

- 这个班的每个学生都去过北京;
- $C(x)$: x是这个班的学生;
- $B(x)$: x去过北京;
- $\forall x(C(x) \rightarrow B(x))$.

Remark (Why not $\forall x(C(x) \wedge B(x))$)

- 如果该断言为真，表示这个班的学生涵盖在去过北京的人中；没有涉及到不是这个班学生的情况，即：如果张三不是这个班的学生，也能保证该全称量词公式是真；
- $\forall x(C(x) \rightarrow B(x))$能正确反映上述关系；
- $\forall x(C(x) \wedge B(x))$则不能，因为，如果张三不是这个班的学生，则：$C(张三) \wedge B(张三)$为假，$\forall x(C(x) \wedge B(x))$亦假；
- “$C(x) \rightarrow$”称为全称限定条件.

符号化谓词公式(2/5)

Example

- 这个班的有些学生都去过北京;
- $C(x)$: x是这个班的学生;
- $B(x)$: x去过北京;
- $\exists x(C(x) \wedge B(x))$.

Remark (Why not $\exists x(C(x) \rightarrow B(x))$)

- 如果该断言为假，表示这个班的学生都没有去过北京；没有涉及到不是这个班学生的情况，即：如果张三不是这个班的学生，也能保证该特称量词公式是假；
- $\exists x(C(x) \wedge B(x))$能正确反映上述关系；
- $\exists x(C(x) \rightarrow B(x))$则不能，因为，如果张三不是这个班的学生，则：$C(\text{张三}) \rightarrow B(\text{张三})$为真，$\exists x(C(x) \rightarrow B(x))$亦真；
- "$C(x) \wedge$"称为特称限定条件.

符号化谓词公式(3/5)

喝酒者悖论

- There is someone in the pub such that, if he is drinking, everyone in the pub is drinking.
- $\exists x(D(x) \rightarrow \forall y D(y))$.

符号化谓词公式(4/5)

Example (唯一性的表述)

- Everyone has exactly one best friend.
- $B(x,y)$: y是x的最好的朋友;
- $Inequal(x,y)$: x和y是不同的对象;
- 唯一性: “y是唯一的”等价于“对任意的z, 如果z不等于y, 则x和z不是最好的朋友”;
- $\forall x\exists y(B(x,y) \wedge \forall z(Inequal(z,y) \to \neg B(x,z)))$;
- 中缀谓词的引入”$\neq$: $Inequal(x,y) \triangleq x \neq y$
- $\forall x\exists y(B(x,y) \wedge \forall z(z \neq y \to \neg B(x,z)))$;
- 数学常用记号$\exists!$表示存在唯一: $\forall x\exists! yB(x,y)$.

符号化谓词公式(5/5)

Example (Peano自然数公理)

A_1 每个数都有唯一的直接后继数(immediate successor);

A_2 There is no number for which 0 is the immediate successor;

A_3 For every number other than 0, there is one and only one immediate predecessor.

Example (Peano自然数公理)

✎ 引入函数符号: $succ(x)$表示x的直接后继, $pred(x)$表示x的直接前驱;

A_1 $\forall x\exists y((y = succ(x)) \wedge \forall z(z = succ(x) \to y = z))$;

A_2 $\neg\exists x(0 = succ(x))$;

A_3 $\forall x(x \neq 0 \to \exists y((y = pred(x)) \wedge \forall z(z = pred(x) \to y = z)))$.

辖域(Scope)

Definition

- 形如: $\forall x(F)(\exists x(F))$的子公式, F称为全称(特称)量词$\forall x(\exists x)$的辖域;
- 设子公式F是全称(特称)量词$\forall x(\exists x)$的辖域, F中出现的x称为约束出现(bound occurrence), x也称为约束变量(bound variable)
- 子公式F没有被约束的变量称为自由出现(free occurrence), x也称为自由变量(free variable).

Example

- $\forall x \exists y P(x, y) \wedge Q(x)$
- Scope of $\forall x$ is $\exists y P(x, y)$;
- Scope of $\exists y$ is $P(x, y)$;
- P中的x和y是约束变量;
- Q中的x是自由变量.

谓词的语义(1/2)

Remark

- *谓词$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$的语义解释和对象$x_1, x_2, \ldots, x_n$相关*
- *解释一个谓词公式需要解释：对象和谓词原子两个部分.*

Definition

F是一谓词公式，F的一个解释I包含一个集合$\mathcal{D}$(称为全总个体域(Domain, 论域))及：

1. 每个常量符号对应于$\mathcal{D}$中的一个元素；
2. 每个n元函数对应于一个$\mathcal{D}^n \longrightarrow \mathcal{D}$的函数($\mathcal{D}^n \triangleq \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \mid x_i \in \mathcal{D}, i = 1, 2, \ldots, n\}$);
3. 每个n元谓词对应于个$\mathcal{D}^n \longrightarrow \{0, 1\}$的函数.

谓词的语义(2/2)

Definition

F是一谓词公式，F的一个解释I的真值(记为：$F|_I$)递归定义如下：

1. 设$F=P(t_1,t_2,\ldots,t_n)$，设$t_1|_I,t_2|_I,\ldots,t_n|_I$是项$t_1,t_2,\ldots,t_n$ 在I下的取值，$F|_I=P|_I(t_1|_I,t_2|_I,\ldots,t_n|_I)$；
2. $$F|_I=\begin{cases}\neg(G|_I) & \textit{if } F=\neg G\\ (G|_I)\wedge(H|_I) & \textit{if } F=G\wedge H\\ (G|_I)\vee(H|_I) & \textit{if } F=G\vee H\\ (G|_I)\to(H|_I) & \textit{if } F=G\to H\\ (G|_I)\leftrightarrow(H|_I) & \textit{if } F=G\leftrightarrow H\end{cases}$$
3. 设$F=\forall xG$，$F|_1=1$，iff，对每个约束变量x在$\mathcal{D}$中的取值$d\in\mathcal{D}$，都有$G(d/x)|_I=1$；否则$F|_I=0$；
4. 设$F=\exists xG$，$F|_1=1$，iff，对存在$d\in\mathcal{D}$，使得$G(d/x)|_I=1$；否则$F|_I=0$；
5. 对于含有自由变量的公式，只有在每个自由变量都取定$\mathcal{D}$中的值时公式才有解释.

Example(1/2)

Example

1. 公式$\forall x P(x)$和$\exists x \neg P(x)$;
2. $\mathcal{D} = \{1, 2\}$
3.

$P\vert_I(1)$	$P\vert_I(2)$
1	0

4. $(\forall x P(x))|_I = 0$, because $P|_I(2) = 0$;
5. $(\exists x \neg P(x))|_I = 1$, because $P|_I(2) = 0, (\neg P)|_I(2) = 1$.

Example(2/2)

Example

1. 公式$G = \forall x(P(x) \rightarrow Q(f(x), a))$;
2. $\mathcal{D} = \{1, 2\}$
3.

a	$f(1)$	$f(2)$
1	2	1

4.

$P\|_I(1)$	$P\|_I(2)$	$Q\|_I(1,1)$	$Q\|_I(1,2)$	$Q\|_I(2,1)$	$Q\|_I(2,2)$
0	1	1	1	0	1

5. $(P(x) \rightarrow Q(f(x), a))|_{I,x=1} = P|_I(1) \rightarrow Q|_I(2, 1) = 1$;
6. $(P(x) \rightarrow Q(f(x), a))|_{I,x=2} = P|_I(2) \rightarrow Q|_I(1, 1) = 1$;
7. $(\forall x(P(x) \rightarrow Q(f(x), a)))|_I = 1$.

谓词公式的形态

Definition

- A formula G is consistent (satisfiable, 相容的，可满足的), iff, 存在解释I，使得: $G|_I = 1$, 这时，称I是G的模型(model);
- G is inconsistent (unsatisfiable, 永假的，矛盾的), iff, 对所有的解释I, $G|_I = 0$;
- G is valid (永真的), iff, 对所有的解释I, $G|_I = 1$.

Example

- $(\exists x \neg P(x))|_I = 1$, 所以该公式是可满足的; 但是不是永真的;
- $\forall x P(x) \leftrightarrow \neg(\exists x \neg P(x))$是永真的;
- $\exists x(D(x) \rightarrow \forall y D(y))$ (喝酒者悖论) 是永真的;
- 由于对每个公式有无限多的解释，因此计算一个谓词公式是否永真是不可能的; 但是有一类公式(Horn Clause)是否永假是可计算的，因为只要在一个特殊的解释下(Herbrand Universe)解释为假，该公式就永假.

逻辑等价和永真蕴涵关系(1/2)

Definition (逻辑等价关系的等价定义)

- $F \Leftrightarrow G$;
- iff $F \leftrightarrow G$ 是永真的;
- iff $\forall I\ (F \leftrightarrow G)|_I = 1$;
- iff $\forall I\ F|_I = G|_I$.

Definition (永真蕴涵关系的等价定义)

- $F \Rightarrow G$;
- iff $F \rightarrow G$ 是永真的;
- iff $\forall I\ (F \rightarrow G)|_I = 1$;
- iff $\forall I\ F|_I \leqslant G|_I$;
- iff $\forall I\ F|_I = 1, \text{then } G|_I = 1$;
- iff $\forall I\ G|_I = 0, \text{then } F|_I = 0$.

逻辑等价和永真蕴涵关系(2/2)

Remark

- *所有的命题公式有关恒等式和不等式的结论均在谓词公式中成立;*
- *谓词公式特有的性质是有关量词的逻辑规律.*

Example

- $\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x, y) \Leftrightarrow \neg(\forall x P(x)) \vee \exists x Q(x, y)$
- 代入规则和替换规则
- 恒等式的自反性，对称性和传递性，不等式的传递性等.

更名规则

Theorem (更名规则)

设$F(x)$表示含自由变量x的公式，设变量y不出现在公式$F(x)$中，则：

$$\forall x F(x) \Leftrightarrow \forall y F(y)$$
$$\exists x F(x) \Leftrightarrow \exists y F(y)$$

Remark

- $\forall x P(x,y) \not\Leftrightarrow \forall y P(y,y)$
- $\forall x \forall y P(x,y) \not\Leftrightarrow \forall y \forall y P(y,y)$
- 因为上述更名使约束与非约束的关系发生了变化.

量词的解消

Theorem (量词的解消)

设F是不含自由变量x的公式，则：

$$\forall x\ F \Leftrightarrow F$$
$$\exists\ x\ F \Leftrightarrow F$$

Theorem (特例与量词的关系)

$$\forall x F(x) \Rightarrow F(x)$$
$$F(a) \Rightarrow \exists x F(x)$$

Remark

注意特例化没有恒等关系：当$\mathcal{D} = \{1, 2\}$，$a = 1$，$F(1) = 0$，$F(2) = 1$时，$F(a)$为假，但是，$\exists x F(x)$为真.

量词的否定

Theorem (量词的否定)

$$\neg(\forall x F(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x)$$
$$\neg(\exists x F(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$

Proof.

对任意的解释I有：

$$\begin{aligned} & (\neg(\forall x F(x)))|_I = 1 \\ \textit{iff} \;\; & (\forall x F(x))|_I = 0 \\ \textit{iff} \;\; & \text{存在} d \in \mathcal{D} \wedge F(d)|_I = 0 \\ \textit{iff} \;\; & \text{存在} d \in \mathcal{D} \wedge \neg F(d)|_I = 1 \\ \textit{iff} \;\; & (\exists x \neg F(x))|_I = 1 \end{aligned}$$

$\square$

Example — 极限和发散的定义

Example (极限的定义)

- 对任意的$\epsilon > 0$,存在$\delta > 0$, 使得对任意的x，当$0 < |x - x_0| \leqslant \delta$时，有$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon$;
- 存在$\epsilon > 0$, 并且对任意的$\delta > 0$, 存在x, 使得$0 < |x - x_0| \leqslant \delta$和$|f(x) - f(x_0)| > \epsilon$同时成立.

Example

$$\neg(\forall\epsilon\exists\delta\forall x(\epsilon > 0 \wedge \delta > 0 \wedge 0 < |x - x_0| \leqslant \delta \to |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon));$$

$$\Leftrightarrow \neg(\forall\epsilon\exists\delta\forall x(\neg(\epsilon > 0 \wedge \delta > 0 \wedge 0 < |x - x_0| \leqslant \delta) \vee |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon));$$

$$\Leftrightarrow \exists\epsilon\forall\delta\exists x((\epsilon > 0 \wedge \delta > 0 \wedge 0 < |x - x_0| \leqslant \delta) \wedge |f(x) - f(x_0)| > \epsilon).$$

辖域的扩张与收缩

Theorem (辖域的扩张与收缩(extension & restriction))

设x不在公式G中出现，则：

$$(\forall x F(x)) \wedge G \Leftrightarrow \forall x(F(x) \wedge G)$$
$$(\forall x F(x)) \vee G \Leftrightarrow \forall x(F(x) \vee G)$$
$$(\exists x F(x)) \wedge G \Leftrightarrow \exists x(F(x) \wedge G)$$
$$(\exists x F(x)) \vee G \Leftrightarrow \exists x(F(x) \vee G)$$

Example

$$\forall x \forall y(P(x) \vee P(y)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall y P(y)$$

$$\begin{aligned} & \forall x \forall y(P(x) \vee P(y)) \\ \Leftrightarrow\ & \forall x(P(x) \vee \forall y P(y)) && \text{(代入+替换)} \\ \Leftrightarrow\ & \forall x P(x) \vee \forall y P(y) && \text{(代入)} \end{aligned}$$

量词的分配形式

Theorem (量词的分配形式)

设$F(x)$和$G(x)$是两谓词公式，则：

1. $\forall x(F(x) \wedge G(x)) \Leftrightarrow \forall xF(x) \wedge \forall xG(x)$
2. $\exists x(F(x) \vee G(x)) \Leftrightarrow \exists xF(x) \vee \exists xG(x)$
3. $\forall xF(x) \vee \forall xG(x) \boxed{\Rightarrow} \forall x(F(x) \vee G(x))$
4. $\exists x(F(x) \wedge G(x)) \boxed{\Rightarrow} \exists xF(x) \wedge \exists xG(x)$

Remark

- ③和④没有恒等式;
- 如，$F(x)$: x是偶数，$G(x)$: x是奇数，则，在自然数集合的解释下: $\forall x(F(x) \vee G(x))$ 为真，但是，$\forall xF(x) \vee \forall xG(x)$为假;
- 同样，$\exists xF(x) \wedge \exists xG(x)$为真，但是，$\exists x(F(x) \wedge G(x))$为假.

→和↔的处理

Example

$$\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$$

$$\begin{aligned}
& \exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) & \\
\Leftrightarrow\ & \exists x(\neg P(x) \vee Q(x)) & \text{(代入＋替换)} \\
\Leftrightarrow\ & \exists x(\neg P(x)) \vee \exists x Q(x) & \text{(代入＋分配形式)} \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\forall x P(x)) \vee \exists x Q(x) & \text{(替换＋量词的否定)} \\
\Leftrightarrow\ & \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x) & \text{(代入＋蕴涵表达式)}
\end{aligned}$$

多个量词的处理

Theorem (多个量词的处理)

1. $\forall x \forall y F(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x F(x,y)$
2. $\exists x \exists y F(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x F(x,y)$
3. $\forall x \forall y F(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x F(x,y)$
4. $\exists y \forall x F(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y F(x,y)$
5. $\forall x \exists y F(x,y) \Rightarrow \exists y \exists x F(x,y)$

Example (④不是逻辑恒等关系的反例)

- $\forall x \exists y\, LOVE(x,y) \nRightarrow \exists y \forall x LOVE(x,y)$;
- $\forall x \exists y\, (x+y=0) \nRightarrow \exists y \forall x (x+y=0)$

对偶原理

Definition

设G是一个仅含有$\forall$, $\exists$, $\neg$, $\wedge$和$\vee$运算符号的公式；G的对偶公式G^*是将G中的$\forall$, $\exists$, $\wedge$, $\vee$, $\mathbb{T}$和$\mathbb{F}$等符号分别替换为$\exists$, $\forall$, $\vee$, $\wedge$, $\mathbb{F}$和$\mathbb{T}$，并且保持原有的运算关系所得到的公式.

Theorem

设F和G是仅含有$\forall$, $\exists$, $\neg$, $\wedge$和$\vee$运算符号的公式；则：

$$F \Leftrightarrow G \quad \text{iff} \quad F^* \Leftrightarrow G^*$$

Theorem

设F和G是仅含有$\forall$, $\exists$, $\neg$, $\wedge$和$\vee$运算符号的公式；则：

$$F \Rightarrow G \quad \text{iff} \quad G^* \Rightarrow F^*$$

Example(1/2)

Example

- $\forall x F(x) \vee \forall x G(x) \Rightarrow \forall x (F(x) \vee G(x))$
- $\exists x (F(x) \wedge G(x)) \Rightarrow \exists x F(x) \vee \exists x G(x)$

Example

- $\forall x \exists y F(x, y) \Rightarrow \exists y \exists x F(x, y)$
- $\forall y \forall x F(x, y) \Rightarrow \exists x \forall y F(x, y)$

Example(2/2)

Example

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \to \neg Q(x)) \to \forall x(R(x) \to \neg P(x))$$

Proof.

用CP规则等价证明：

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \to \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \to \neg P(x))$$

$$\begin{aligned}
&\text{左边}\\
&\Leftrightarrow \forall x((P(x) \to Q(x)) \wedge (R(x) \to \neg Q(x)))\\
&\Leftrightarrow \forall x((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg R(x) \vee \neg Q(x)))\\
&\Rightarrow \forall x((\neg P(x) \vee \neg R(x)) \vee \boxed{})\\
&\Leftrightarrow \forall x(\neg P(x) \vee \neg R(x)) \vee \forall x B(x)\\
&\Leftrightarrow \forall x(\neg P(x) \vee \neg R(x))\\
&\Leftrightarrow \forall x(R(x) \to \neg P(x))
\end{aligned}$$

Example(2/2)

Example

$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$

Proof.

用CP规则等价证明：

$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))$

$$
\begin{aligned}
& \text{左边} \\
\Leftrightarrow\ & \forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (R(x) \rightarrow \neg Q(x))) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg R(x) \vee \neg Q(x))) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x((\neg P(x) \vee \neg R(x)) \wedge \boxed{B(x)}) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x(\neg P(x) \vee \neg R(x)) \wedge \forall x B(x) \\
\Rightarrow\ & \forall x(\neg P(x) \vee \neg R(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x))
\end{aligned}
$$

□

Example(2/2)(上例的补充证明)

Example

存在B使得: $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg R) \wedge B$

Proof.

$$
\begin{aligned}
& \underbrace{(\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q)}_{B} \\
\Leftrightarrow\ & B \wedge ((\neg P \vee \neg R) \vee (P \wedge R)) \\
\Leftrightarrow\ & \underbrace{(B \wedge (\neg P \vee \neg R))}_{C} \vee (B \wedge (P \wedge R)) \\
\Leftrightarrow\ & C \vee ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \wedge P \wedge R) \\
\Leftrightarrow\ & C \vee ((\neg P \wedge P \vee Q \wedge P) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \wedge R) \\
\Leftrightarrow\ & C \vee (Q \wedge P \wedge (\neg R \wedge R \vee \neg Q \wedge R)) \\
\Leftrightarrow\ & C \vee (Q \wedge P \wedge \neg Q \wedge R) \\
\Leftrightarrow\ & C \vee \mathbb{F} \\
\Leftrightarrow\ & C
\end{aligned}
$$

□

Example(2/2)(一个有问题的证明)

Proof.

用CP规则等价证明:

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \wedge \forall x(R(x) \to \neg Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \to \neg P(x))$$

左边

$$\begin{array}{ll} 1 & \Leftrightarrow \forall x((P(x) \to Q(x)) \wedge (R(x) \to \neg Q(x))) \\ 2 & \Leftrightarrow \forall x((P(x) \to Q(x)) \wedge (Q(x) \to \neg R(x))) \\ 3 & \Rightarrow \forall x(R(x) \to \neg P(x)) \end{array}$$

第3步推倒出错: 局部变换中对不等式使用替换规则!

if $A(x) \Rightarrow B(x)$ then $\forall x A(x) \Rightarrow \forall x B(x)$?

Proof.

设 $A(x) \Rightarrow B(x)$

则 对任意的指派I, 任意的$d \in \mathcal{D}$, if $A|_I(d)$为真, then $B|_I(d)$为真.

设 $(\forall x A(x))|_I$为真,

则 $\forall d \in \mathcal{D}$, 有$A|_I(d)$为真, 所以$B|_I(d)$为真.

即 $(\forall x B(x))|_I$为真. □

Example(错误使用替换规则)

Example

$$
\begin{aligned}
& \forall x(P(x) \vee Q(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \neg\exists x\neg(P(x) \vee Q(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \neg \underbrace{\exists x(\neg P(x) \wedge \neg Q(x))}_{C(x)} \\
\boxed{\Rightarrow}\ & \neg(\underbrace{\exists x\neg P(x) \wedge \exists x\neg Q(x)}_{D(x)}) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)
\end{aligned}
$$

局部变换中对不等式使用替换规则!

$$C(x) \Rightarrow D(x) \not\Longrightarrow \neg C(x) \Rightarrow \neg D(x)$$

前束范式的定义

Definition

形如：$Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n(M)$的公式称为前束范式(Prenex Normal Form)，其中：

$$Q_ix_i = \begin{cases} \forall x_i \\ \exists x_i \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

M是不含有量词的公式.

称$Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n$为前束词，$M$为母式(Matrix).

Example

- $\forall x\forall y(P(x,y) \land Q(x))$
- $\forall x\forall y\exists z(P(x,y) \to Q(x,z))$

Definition

设公式$F \Leftrightarrow G$，其中G是前束范式，称G为公式F的前束范式.

前束范式求解

Theorem

对任意的公式F，存在公式G，使得G是F的前束范式.

求解步骤.

1. 消除$\rightarrow$, $\leftrightarrow$;
2. 用De Morgan律消除对非原子子公式的否定;
3. 对约束变量的重新命名;
4. 量词的外提(量词的吸收，扩张和分配等定律的使用).

$\square$

Example

Example

$$
\begin{aligned}
& \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \\
\not\Leftrightarrow\ & \forall x (P(x) \vee Q(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x P(x) \vee \forall y Q(y) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x (P(x) \vee \forall y Q(y)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))
\end{aligned}
$$

Example

$$
\begin{aligned}
& & \forall x P(x) \to \exists x Q(x) \\
1 & \Leftrightarrow & \exists x \neg P(x) \vee \exists x Q(x) \\
& \Leftrightarrow & \exists x (\neg P(x) \vee x Q(x)) \\
2 & \Leftrightarrow & \exists x \neg P(x) \vee \exists y Q(y) \\
& \Leftrightarrow & \exists x \exists y (\neg P(x) \vee Q(y))
\end{aligned}
$$

一个公式的前束范式不唯一！

有效结论和证明

Definition

设$H_1, H_2, \ldots, H_n$, C是公式，称C是$H_1, H_2, \ldots, H_n$的有效结论(Valide consequence), iff, 对任意的指派I，如果, $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n)|_I = 1$，则：$C|_I = 1$. 记为：$H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$.

Theorem

下述条件彼此等价：

1. $H_1, H_2, \ldots, H_n \vdash C$;
2. $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \Rightarrow C$
3. $\neg((H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \to C)$是矛盾式;
4. $H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \vdash \mathbb{F}$.

证明序列

Definition

设，$H_1, H_2, \ldots, H_n$是一组条件，一个证明序列是一组形如：$C_1, C_2, \ldots, C_m$ 的公式序列，其中每个C_i 满足下述条件中的一个：

1. 存在H_j, 使得: $C_i = H_j$; (引入条件)
2. $C_i = \mathbb{T}$;
3. 存在$C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$, 其中：$i_j \leqslant i$, 并且：$C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{i_k} \Leftrightarrow C_i$; (恒等变换)
4. 存在$C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_k}$, 其中：$i_j \leqslant i$, 并且：$C_{i_1} \wedge C_{i_2} \wedge \cdots \wedge C_{i_k} \Rightarrow C_i$; (不等变换)

证明有效结论的方法

Remark

1. *恒等和不等变换;*
2. *设I为任意的语义解释，并且在该解释下结论为假，证明条件亦假;*
3. *设设I为任意的语义解释，并且在该解释下条件为真，证明结论亦真;*
4. *证明序列.*

相关记号

Notation

$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$表示变量为: $x_1, x_2, \ldots, x_n$在公式F自由出现.

Example

- $\forall y P(y) \vee Q(x) \vee R(z) \triangleq F(x, z)$;
- $\forall y P(x, y) \vee Q(x, y) \Leftrightarrow \forall z P(x, z) \vee Q(x, y) \triangleq G(x, y)$;

Remark

- 命题公式的推理规则和证明方法对谓词公式全都可用;
- 谓词公式特有的对处理量词的4规则: 两个量词的分离和两个量词的引入;
- 在处理量词时切记: 约束与非约束的关系不能改变!
- 同命题逻辑一样, 一阶逻辑的自然推理系统也具有正确性与完备性(Gödel's completeness theorem).

全称指定规则

全称指定规则(Universal Specification).

$$\frac{\forall x F(x)}{F(y)}\ (US) \qquad \frac{\forall x F(x)}{F(c)}\ (US)$$

☞y一定不是在公式A中出现的约束变量

☞对应的不等式: $\forall x F(x) \Rightarrow F(y)$

□

Example

- $\forall x \forall y P(x,y) \vdash \forall y P(x,y)$, 其中: $F(x) \triangleq \forall y P(x,y)$;
- $\forall x \exists y P(x,y) \nvdash \exists y P(y,y)$, y在$\forall y P(x,y)$中约束出现;
- $\forall x P(x) \to Q \nvdash P(x) \to Q$;
- 原因: US规则中的量词的辖域是整个公式, 而不是局部的子公式.

特称指定规则

特称指定规则(Existential Specification).

$$\frac{\exists x F(x)}{F(c)}\ (ES)$$

☞c是新引入的常量符号

☞对应的不等式: $\exists x F(x) \Rightarrow F(c)$

□

Example

- $\exists x \exists y P(x,y) \vdash \exists y P(a,y)$, 其中: $F(x) \triangleq \forall y P(x,y)$;
- $\exists x P(x,a) \nvdash P(a,a)$, a在$P(x,a)$中已经出现;
- $\exists x P(x) \rightarrow Q(x) \nvdash P(a) \rightarrow Q(x)$;
- 原因: ES规则中的量词的辖域是整个公式, 而不是局部的子公式.

特称推广规则

特称推广规则(Existential Generalization).

$$\frac{F(c)}{\exists y F(y)}\ (EG) \qquad \frac{F(x)}{\exists y F(y)}\ (EG)$$

☞y是新引入的变量符号

☞对应的不等式：$F(c) \Rightarrow \exists y F(y)$

□

Example

- $\exists x P(x,a) \vdash \exists y \exists x P(x,y)$，其中：$F(y) \triangleq \exists x P(x,y)$;
- $\exists x P(x,a) \nvdash \exists x \exists x P(x,x)$，$x$在$\exists x P(x,a)$中已经约束出现;
- $P(a) \to \exists y Q(y) \nvdash \exists x P(x) \to \exists y Q(y)$，$\exists x$的辖域是$P(x)$，而不是整个公式.

全称推广规则

全称推广规则(Universal Generalization).

$$\frac{F(x)}{\forall x F(x)}\ (UG)$$

☞x不在F中约束出现

☞对应的不等式：$F(x) \Rightarrow \forall y F(y)$

□

Example

- $P(x,a) \vdash \forall x P(x,a)$，其中：$F(x) \triangleq P(x,a)$;
- $P(x) \to \exists y Q(y) \nvdash \forall x P(x) \to \exists y Q(y)$，$\forall x$的辖域是$P(x)$，而不是整个公式;
- $P(x,a) \nvdash \forall y P(x,y)$，$a$是常量符号，不能用UG规则.

注释(1/2)

Example

1. $\forall x \exists y F(x,y)$ (P)
2. $\exists y F(x,y)$ (①+US)
3. $F(x,c_x)$ (②+ES)
4. $\boxed{\forall x F(x,c_x)}$ (③+UG)
5. $\exists y \forall x F(x,y)$ (④+EG)

Remark

- $\exists y \forall x F(x,y) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \forall x \exists y F(x,y)$
- *US + ES后ES引入的常量符号应和US引入的变量符号相关;*
- *这样, US+ES后不能再对US中引入的变量符号用UG规则.*

注释(2/2)

Example

❶ $\forall x(P(x) \to Q(x))$	(P)	❶ $\exists y P(y)$	(P)
❷ $P(c) \to Q(c)$	(①+US)	❷ $P(c)$	(①+ES)
❸ $\exists y P(y)$	(P)	❸ $\forall x(P(x) \to Q(x))$	(P)
❹ $\boxed{P(c)}$	(③+ES)	❹ $P(c) \to Q(c)$	(②+US)
❺ $Q(c)$	(②④+MP)	❺ $Q(c)$	(②④+MP)
❻ $\exists x Q(x)$	(⑤+EG)	❻ $\exists x Q(x)$	(⑤+EG)

Remark

- *④用ES规则时必须是新引入的常量(和推导过程中出现的常量没有关系);*
- *US如果引入常量符号可以是推导过程中出现的常量;*
- *特殊和一般的关系: 先特殊(ES), 后一般(US).*

形式证明的主要步骤

主要步骤.

- 证明方法的选择：直接证明；间接证明(CP规则，反证法等)；
- ES+ US 去掉量词(注意：引入的变量和常量的限定条件)；
- 处理好特殊和一般的关系；
- 等同写命题公式的证明序列；
- UG和EG加量词(if 结论中有量词)，注意：避免US+ES后再UG.

Example(1/2)

Example

1. H_1 : $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$
2. H_2 : $P(a)$
3. C : $\exists x P(f(x))$

1. $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
2. $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①+US)
3. $P(a) \rightarrow P(f(a))$ (①+ T)
4. $P(a)$ (P)
5. $P(f(a))$ (③④+MP)
6. $\exists x P(f(x))$ (⑤+EG)

Example(2/2)

Example

条件: 纪检人员审查了该部门的每一个非VIP人员，该部门有腐败分子存在并且仅被同类审查过，VIP不是腐败分子；

结论: 一定有纪检人员是腐败分子.

$E(x)$: x是该部门的人员；

$V(x)$: x是VIP;

$S(x,y)$: x被y审查；

$C(x)$: x是纪检人员；

$P(x)$: x是腐败分子.

1. $H_1 : \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \to \exists y(S(x,y) \wedge C(y)))$
2. $H_2 : \exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x,y) \to P(y))))$
3. $H_3 : \forall x(P(x) \to \neg V(x))$
4. $C : \exists x(P(x) \wedge C(x))$

1. $H_1 : \forall x(E(x) \wedge \neg V(x) \rightarrow \exists y(S(x,y) \wedge C(y)))$
2. $H_2 : \exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall y(S(x,y) \rightarrow P(y))))$
3. $H_3 : \forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$
4. $C : \exists x(P(x) \wedge C(x))$

1. $\exists x(P(x) \wedge E(x) \wedge (\forall x(S(x,y) \rightarrow P(y))))$ (P)
2. $P(a) \wedge E(a) \wedge (\forall y(S(a,y) \rightarrow P(y)))$ (①+ES)
3. $P(a)$ (②+简化式)
4. $E(a)$ (②+简化式)
5. $\forall y(S(a,y) \rightarrow P(y))$ (②+...)
6. $\forall x(P(x) \rightarrow \neg V(x))$ (P)
7. $P(a) \rightarrow \neg V(a)$ (⑥+US)
8. $\neg V(a)$ (③⑦+US)
9. $\forall x(E(x) \wedge \neg V(x) -> \exists y(S(x,y) \wedge C(y)))$ (P)
10. $E(a) \wedge \neg V(a) -> \exists y(S(a,y) \wedge C(y))$ (⑨+US)
11. $E(a) \wedge \neg V(a)$ (④+⑧)
12. $\exists y(S(a,y) \wedge C(y))$ (⑩⑪+MP)
13. $(S(a,b) \wedge C(b))$ (⑫+ES)
14. $S(a,b) \rightarrow P(b)$ (⑤+US)
15. $C(b)$ (⑬+简化式)
16. $S(a,b)$ (⑬+简化式)
17. $P(b)$ (⑭⑯+MP)
18. $C(b) \wedge P(b)$ (⑮+⑰)
19. $\exists x(P(x) \wedge C(x))$ (⑱+EG)

Mechanized Reasoning Systems

- Coq — a proof assistant base on the calculus of inductive constructions.
- HOL — an interactive environment for machine-assisted theorem-proving in higher-order logic.
- Isabelle — a generic theorem prover in which logics can be specified and used.

一阶逻辑的求解

Resolution of First Order Logic(FOL)

- 判断一个谓词公式是否永真是不可计算的;
- 但是其一些特殊子集合是可计算的;
- 如: Prolog(https://www.tutorialspoint.com/prolog/index.htm) 中的Horn子句(Clause)是可计算的.

Definition

形如: $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n (L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_m)$的公式称为Horn Clause, 其中$L_i$是原子或原子的否定.

Theorem

设$C_1, C_2, \ldots, C_k, C$是Horn Clauses, 则, $C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k \wedge C$的可满足性是可计算的; If unsatisfiable, then $C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k \vdash \neg C$.

Example

$$\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))), P(a) \vdash \exists x P(f(x))$$
$$\Longleftrightarrow \forall x(\neg P(x) \vee P(f(x))), P(a), \forall x \neg P(f(x)) \vdash \mathbb{F}$$

反证法

1. $\forall x(\neg P(x) \vee P(f(x)))$ (P)
2. $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①+US)
3. $P(a) \rightarrow P(f(a))$ (①+ T)
4. $P(a)$ (P)
5. $P(f(a))$ (③④+MP)
6. $\forall x \neg P(f(x))$ (附加P)
7. $\neg P(f(a))$ (⑥+US)
8. $\mathbb{F}$ (⑤⑦)

Resolution

1. $\neg P(x) \vee P(f(x))$ (P)
2. $P(a)$ (P)
3. $\neg P(a) \vee P(f(a))$ (①②+合一)
4. $P(f(a))$ (②③+删除)
5. $\neg P(f(x))$ (附加P)
6. $\neg P(f(a))$ (④⑤+ 合一)
7. $\square$ (④⑥+删除，矛盾)

本章小节

1. 谓词与量词
    - 谓词
    - 符号化
    - 一阶逻辑公式的语义
2. 公式间的关系式
    - 逻辑等价和永真蕴涵关系
    - 量词的逻辑关系
    - 前束范式
3. 谓词公式的自然推理
    - 相关概念的复习
    - 量词的推理规则
    - 形式证明的例子
    - Mechanized Reasoning