集 合 的 基 数

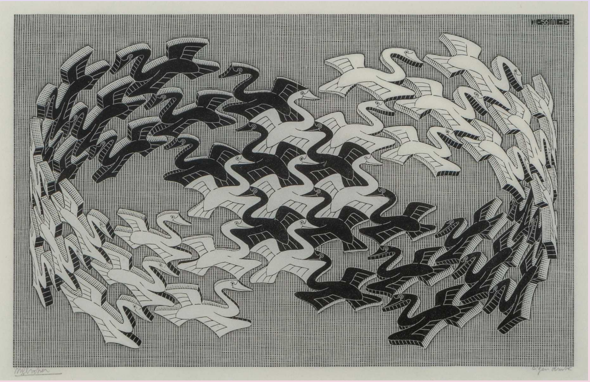
School of Computer
Wuhan University

本章内容

Outline

1. 可数集合和不可数集合
   - 自然数的定义
   - 等势
   - 有限集和无限集
   - 可数集
   - 不可数集

Journey to infinity



基数

- 从一到无穷大
- 一一对应——双射

自然数的定义

Definition (后继(Successor ordinal))

- 任意集合S的后继集合定义为：$S^+ = S \cup \{S\}$

例

- $\{a, b\}^+ = \{a, b\} \cup \{\{a, b\}\} = \{a, b, \{a, b\}\}$
- $\varnothing^+ = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$
- $(\varnothing^+)^+ = \{\varnothing\}^+ = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $\cdots\cdots$

自然数的构造

Theorem (自然数公理)

存在集合$\mathbb{N}$满足以下条件:

1. $\varnothing \in \mathbb{N}$;
2. *if* $n \in \mathbb{N}$, $n \cup \{n\} \in \mathbb{N}$.

自然数集合

集合	编号
$\varnothing$	0
$\{\varnothing\}$	1
$\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$	2
$\cdots\cdots$	$\cdot\cdot$
$\cdots\cdots$	n
$n \cup \{n\}$	$n+1$
$\cdots\cdots$	$\cdot\cdot$

自然数

Theorem (Peano自然数公理)

1. $0 \in \mathbb{N}$;
2. 如果$n \in \mathbb{N}$,则存在唯一的n的后继$n' \in \mathbb{N}$;(后继唯一性)
3. 0不是任何自然数的后继;
4. 如果$n' = m'$,那么$n = m$;(直接前驱唯一性)

Remark

常以❷和❹来检验一个序列有没有“自然数性质”,如:

- 序列 $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots$
- 序列 $0, 2, 4, 6, \ldots\ldots, 1, 3, 5, 7, \ldots\ldots$

自然数的大于和小于

Definition (小于)

- 若$m, n \in \mathbb{N}$,使得$m \in n$,则称m小于n(或n大于m),记为$m < n$(or: $n > m$).

Definition (自然数的初始段)

- 集合$\mathbb{N}_n = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$,称为自然数的前$n$初始段.

等势

Definition (等势(Equinumerous))

- 定义：集合A和集合B等势，iff，集合A和B之间存在双射，记为$A \sim B$; 否则，称集合A, B不等势，记为$A \nsim B$.
- 等势关系是一个等价关系.

例

- 例：试证明：集合$(-1,1)$与$(-\infty,\infty)$等势.
- 证：令$f: (-1,1) \to (-\infty,\infty), f(x) = \tan(\frac{\pi}{2}x)$
  $\forall y \in (-\infty,\infty), x = \arctan(y) * \frac{2}{\pi}, f(x) = y \ \therefore f$是满射;
  又$\because$若$x_1 \neq x_2$，则$f(x_1) = \tan(\frac{\pi}{2}x_1) \neq \tan(\frac{\pi}{2}x_2) = f(x_2)$,$\therefore f$是单射;

有限集和无限集

Definition (有限集(Finite set)和无限集(Infinite set))

- 集合A为有限集, iff, $\exists n \in \mathbb{N}$, 使得$\mathbb{N}_n \sim A$, 称集合A的基数(Cardinal)为n,记为$|A| = n$; 反之,集合A称为无限集.

例

- 例:试证明自然数集$\mathbb{N}$是无限集.
- 证明:(反证法)

  设$\mathbb{N}$为有限集,则$\exists f : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}, (n \in \mathbb{N})$,是双射,

  设$k \in \max(f(0), \ldots, f(n-1)) + 1$,则$k \in \mathbb{N}$,但不存在$x$, 使$f(x) = k$,

  $\therefore f$不是满射,与f是双射矛盾.

  $\therefore$自然数集$\mathbb{N}$是无限集.

有限集和无限集的性质

性质

- 任何有限集都不能与其真子集等势.
- 任何无限集都能与其真子集等势.
- 有限集的子集都是有限集.
- 无限集的父集一定是无限集.

性质

Theorem

有限集的子集都是有限集.

Proof.

设A是有限集,$C \subseteq A$. 分两种情况:

- 若C是$\varnothing$,则C是有限集;
- 若C非空,则A也非空,可将A中的元素列为:
  $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{n-1}$,其中$n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$
  现构造一个双射函数$g : \mathbb{N}_j \to C, (j \in \mathbb{N})$,算法如下:
  1. $i = 0,\ j = 0$;
  2. 检查a_i是否在子集C中,若$a_i \in C$, 转❸; 否则转❹;
  3. $g(j) = a_i,\ j{+}{+},\ i{+}{+}$; 若$i < n$, 转❷; 否则结束;
  4. $i{+}{+}$; 若$i < n$, 转❷; 否则结束.

  由此构造的g是从$N_j = \{0, 1, ..., j-1\}$到C的双射,所以C是有限集.

□

可数集和不可数集

Definition (可数无限集(Countably infinite set))

- 集合A为可数无限集，iff，集合A与自然数集$\mathbb{N}$等势，其基数用$\aleph_0$表示(读作阿列夫零)，记为$|A| = \aleph_0$.

例

- 集合$\mathbb{N}$，$\mathbb{Z}^+$，$\mathbb{Z}$的基数均为$\aleph_0$.

Definition (不可数集(Uncountable set))

- 集合A是不可数集，iff，A不是有限集且不是可数无限集.

集合分类

- $$\text{可数集}\begin{cases}\text{有限集}\\ \text{可数无限}\end{cases}$$
- 不可数集

可数无限集判别

Theorem

无限集合A为可数无限集，iff，A的全部元素可以无重复地排列为一个序列 $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$

Proof.

- $\Longleftarrow$
  集合A可表示为$A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots\}$，则$a_n$与自然数$n$对应，
  即可定义从A到$\mathbb{N}$的双射，$f: A \to \mathbb{N}, f(a_n) = n$，
  $\therefore A$ 为可数无限集.
- $\Longrightarrow$
  若A为可数无限集，则存在双射$f: \mathbb{N} \to A, f(n) = a_n$，
  即$f(n)$对应的元素为a_n，$\therefore A$ 的元素可以无重复地排列为
  $f(0), f(1), \ldots, f(n), \ldots$，即排列为$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$

$\square$

注

- “重复排列”等价于“无重复排列”.(构造算法)
- 此序列具有“自然数性质”.

枚举

Definition (枚举(Enumeration))

集合A的枚举是从自然数集$\mathbb{N}$($\mathbb{N}$的初始段)到A的一个满射函数;

- 若该满射也是单射,则是一个无重复枚举;
- 若为非单射,则是重复枚举.

性质

- 通常,枚举 f 表示为 $\langle f(0), f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots \rangle$
- 集合A是可数的, iff, 集合A可枚举.

枚举

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$的枚举

$\langle 0, 0\rangle$	$\langle 0, 1\rangle$	$\langle 0, 2\rangle$	$\dots$	$\dots$
$\langle 1, 0\rangle$	$\langle 1, 1\rangle$	$\langle 1, 2\rangle$	$\dots$	$\dots$
$\langle 2, 0\rangle$	$\langle 2, 1\rangle$	$\langle 2, 2\rangle$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\langle m, n\rangle$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

例

- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$是可数无限集.
- $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(m, n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m$

例子

$\mathbb{Q}^+$的枚举(一)

$1/1$	$1/2$	$1/3$	$\ldots$
$2/1$	$2/2$	$2/3$	$\ldots$
$3/1$	$3/2$	$3/3$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	m/n	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

$\mathbb{Q}^+$的枚举(二)

$1/1$	$1/2$	$1/3$	$\ldots$
$2/1$	$2/2$	$2/3$	$\ldots$
$3/1$	$3/2$	$3/3$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	m/n	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

例

- $\mathbb{Q}^+$是可数无限集.
- 是有重复的序列,等价于无重复的序列.

字典序(Lexicographic order)

例

- 字母表$\Sigma = \{a, b\}$，其中$a \prec b$，则Σ^*是可数无限集.
  Σ^*的元素可以排成序列$\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, \ldots$，则$|\Sigma^*| = \aleph_0$

Definition (字典序和标准序)

设有限字母表Σ指定了字母线序，对于$s, t \in \Sigma^*$

- 字典序$\preccurlyeq$ $(s \prec t)$
  1. s是空串；
  2. s是t的前缀；
  3. $s = zu, t = zv$,($z \in \Sigma^*$是s, t的最长公共前缀)，且在字母线序中u的第一个字符前于v的第一个字符.
- 标准序$\preccurlyeq$ $(s \prec t)$
  1. $||s|| < ||t||$, or
  2. $||s|| = ||t||$, 且在字典序中s前于t.

可数集的性质(I)

性质

1. 可数集的任何子集都是可数集.
2. 可数个可数集的并集是可数集.

证明:分两种情况:见下表

有限个可数集

A_0	a_{00}	a_{01}	a_{02}	$\dots$
A_1	a_{10}	a_{11}	a_{12}	$\dots$
A_2	a_{20}	a_{21}	a_{22}	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_n	a_{n0}	$\dots$	$\dots$	$\dots$

可数无限个可数集

A_0	a_{00}	a_{01}	a_{02}	$\dots$
A_1	a_{10}	a_{11}	a_{12}	$\dots$
A_2	a_{20}	a_{21}	a_{22}	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_n	a_{n0}	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

可数集例子

Theorem

- 若A, B是可数集，则$A \times B$是可数集;
- 若A是可数集，则A^n是可数集.

Example

- $\mathbb{Q}$是可数集;
- $\mathbb{N}^2, \mathbb{Z}^n, \mathbb{Q}^n$是可数集;
- 有理系数的所有(n次)多项式的集合是可数集;
- 以有理数为元素的所有$m \times n$矩阵(任意有限维的矩阵)的集合是可数集.

可数集性质(II)

Theorem

任一无限集A,必会有可数无限子集.

Proof.

- 若A为无限集,则A非空,可任取出一元素$a_1 \in A$,
- $A - \{a_1\}$仍为无限集,再取出一元素$a_2 \in A - \{a_1\}$,
- 所得集合仍为无限集;
- 如此继续,得A的可数无限子集$\{a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\}$. $\square$

可数集性质(III)

Theorem

任一无限集M，必与自己的某真子集等势.

Proof.

- 由上可得M有可数无限子集$A = \{a_0, a_1, a_2, ...\}$，
- 令$M - A = B$,
- 定义函数$f: M \to M - \{a_0\}$;
  1. $f(a_n) = a_{n+1} \quad (a_n \in A)$;
  2. $f(b) = b \quad (b \in B)$.
- 则，易证f是双射. $\therefore M \sim M - \{a_0\}$.

$\square$

可数集和不可数集

Definition (可数无限集(Countably infinite set))

- 集合A为可数无限集，iff，集合A与自然数集$\mathbb{N}$等势，其基数用$\aleph_0$表示(读作阿列夫零)，记为$|A| = \aleph_0$.

例

- 集合$\mathbb{N}$，$\mathbb{Z}^+$，$\mathbb{Z}$的基数均为$\aleph_0$.

Definition (不可数集(Uncountable set))

- 集合A是不可数集，iff，A不是有限集且不是可数无限集.

集合分类

- $$\text{可数集}\begin{cases}\text{有限集}\\ \text{可数无限}\end{cases}$$
- 不可数集

不可数集

Definition (连续统势)

- 任一集合A具有连续统(Continuum)势，iff，A与集合$[0,1]$等势，A的基数为$\mathfrak{c}$，即$|A| = \mathfrak{c}$.

Example-具有连续统势的集合

1. $[a, b]$
2. $(0, 1)$
3. $\mathbb{R}$

不可数集

Example

- 试证明：集合$(0,1)$与$[0,1]$等势.
- 证明：

  令$A=\{0,1,1/2,1/3,......,1/n,......\}$，则 $A\subseteq[0,1]$,

  设$f:[0,1]\longrightarrow(0,1)$

$$f(x)=\begin{cases}1/2 & \text{if} \quad x=0\\ 1/(n+2) & \text{if} \quad x=1/n,(n\geqslant 1,n\in\mathbb{N})\\ x & \text{if} \quad x\in[0,1]-A\end{cases}$$

  容易证明 f 是双射，$\therefore$集合$(0,1)$与$[0,1]$等势.

Continuum hypothesis

连续统假设

- 连续统假设——在$\aleph_0$和$\mathfrak{c}$之间不存在其它的“无穷大”基数?
- 连续统假设是否成立,依赖于集合论的公理如何选择.
- https://en.wikipedia.org/wiki/Continuum_hypothesis

本章内容

1. 可数集合和不可数集合
   - 自然数的定义
   - 等势
   - 有限集和无限集
   - 可数集
   - 不可数集

Reference books

Kenneth H. Rosen.
《离散数学及其应用》(原书第8版).
机械工业出版社.

刘玉珍
《离散数学》.
武汉大学出版社.

王汉飞
《离散数学》讲义.