

Список определений и формулировок, которые нужно знать для сдачи зачёта

22 декабря 2014 г.

1 Проективное пространство $\mathbb{R}P^n$.

Пусть V - (конечномерное) векторное пространство размерности $\dim V = n + 1$. Введем отношение эквивалентности на $V \setminus \{0\}$ следующим образом: $x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0 : x = \lambda y$. Обозначим $P(V) = (V \setminus \{0\}) / \sim$ фактор-множество относительно \sim . $P(V)$ называется проективным пространством над V . Тогда, если $V = \mathbb{R}^{n+1}$, $P(\mathbb{R}^{n+1}) := \mathbb{R}P^n$.

2 Двойственное пространство к линейному пространству, двойственное линейное отображение.

Пусть V - векторное пространство над полем \mathbb{F} . Рассмотрим $\mathcal{L}(V \mapsto \mathbb{R})$ - множество линейных функционалов на V . Его можно снабдить структурой векторного пространства над \mathbb{F} следующим образом:

1. $\forall f, g \in \mathcal{L}(V \mapsto \mathbb{R}), x \in V \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$
2. $\forall f \in \mathcal{L}(V \mapsto \mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{F}, x \in V \quad \lambda f(x) = f(\lambda x)$

Получившееся векторное пространство обозначается V^* и называется сопряженным, или двойственным векторным пространством.

Пусть $\mathcal{A} : V \mapsto W$ - линейное отображение. Тогда сопряженным к \mathcal{A} называется отображение $\mathcal{A}^* : W^* \mapsto V^*$, действующий следующим образом: $\forall \varepsilon \in W^*, v \in V \quad (\mathcal{A}^* \varepsilon)(v) = \varepsilon(\mathcal{A}v)$. Его линейность проверяется непосредственно.

3 Тензорное произведение векторных пространств (любое определение).

Пусть U, V, W - векторные пространства. Рассмотрим $\otimes : U \times V \mapsto W$ - билинейное отображение. Для краткости везде далее будем писать $x \otimes y := \otimes(x, y)$. Тогда пара (W, \otimes) называется тензорным произведением U на V , если $\{e_i \otimes f_j\}$ - базис W , где $\{e_i\}, \{f_j\}$ - базисы U, V соответственно. Обозначение: $U \otimes V$.

Утверждение. $U \otimes V$ существует и единственно с точностью до изоморфизма.

Утверждение. Пусть $\varphi : U \times V \mapsto Z$ - билинейное отображение. Тогда (W, \otimes) — тензорное произведение U на $V \Leftrightarrow$ существует и единственно линейное отображение $\psi : W \mapsto Z : \varphi(u, v) = \psi(u \otimes v)$.

Утверждение. Если U, V - векторные пространства. $\mathcal{L}(U \times V \mapsto \mathbb{R}) \cong U^* \otimes V^* \cong (U \otimes V)^*$.

4 Пространства $\text{Tens}_q^p(V)$. Операции над тензорами: сложение, умножение, свёртка, симметрирование, альтернирование.

Определение. $\text{Tens}_q^p(V) = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_p \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_q$ называется пространством тензоров типа (p, q) над V , или пространством тензоров, p раз контравариантных и q раз ковариантных.

Если $\{e_i\}$ - базис V , $\{\varepsilon^i\}$ — двойственный к нему базис V^* . Тогда $\text{Tens}_q^p(V) = \langle e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{j_q} \mid i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \in \overline{1, n} \rangle$. Каждый тензор $T \in \text{Tens}_q^p(V)$ можно записать в координатах $T = T_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{j_q}$.

Операции над тензорами

1. Линейная комбинация

Пусть $T, S \in \text{Tens}_q^p(V)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда $\alpha T + \beta S \in \text{Tens}_q^p(V)$, где $(\alpha T + \beta S)_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} = \alpha T_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} + \beta S_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}$.

2. Произведение тензоров

Пусть $T \in \text{Tens}_q^p(V)$, $S \in \text{Tens}_s^r(V)$. Тогда $T \otimes S \in \text{Tens}_{q+s}^{p+r}(V)$, причем $(T \otimes S)_{j_1, \dots, j_{q+s}}^{i_1, \dots, i_{p+r}} = T_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} S_{j_{q+1}, \dots, j_{q+s}}^{i_{p+1}, \dots, i_{p+r}}$.

3. Перестановка индексов

Пусть $\sigma \in S_p, \tau \in S_q$, где S_n - симметрическая группа порядка n , $T \in \text{Tens}_q^p(V)$. Тогда $R_\tau^\sigma T \in \text{Tens}_q^p(V)$, где $(R_\tau^\sigma T)_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} = T_{j_{\tau(1)}, \dots, j_{\tau(q)}}^{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(p)}}$.

4. Свёртка

Пусть $T \in \text{Tens}_q^p(V)$, $t \in \overline{1, p}, s \in \overline{1, q}$. Тогда $C_s^t T \in \text{Tens}_{q-1}^{p-1}(V)$, где $(C_s^t T)_{j_1, \dots, j_{s-1}, j_{s+1}, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_{t-1}, i_{t+1}, \dots, i_p} = \sum_{m=1}^{\dim V} T_{j_1, \dots, j_{s-1}, m, j_{s+1}, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_{t-1}, m, i_{t+1}, \dots, i_p}$.

5. Симметрирование

Пусть $T \in \text{Tens}_q^p(V)$. Тогда $\text{Sym} T \in \text{Tens}_q^p(V)$, где $(\text{Sym} T)_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} T_{j_{\sigma(1)}, \dots, j_{\sigma(q)}}^{i_1, \dots, i_p}$. Аналогичную операцию можно делать и с верхними индексами.

6. Альтернирование

Пусть $T \in \text{Tens}_q^p(V)$. Тогда $\text{Alt} T \in \text{Tens}_q^p(V)$, где $(\text{Alt} T)_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} (-1)^\sigma T_{j_{\sigma(1)}, \dots, j_{\sigma(q)}}^{i_1, \dots, i_p}$. Аналогичную операцию можно делать и с верхними индексами.

5 Гладкое многообразие, многообразие с краем, подмногообразие, ориентируемое многообразие.

Определение. (X, \mathcal{T}) — хаусдорфово, если

$$\forall x, y \in X, x \neq y, \exists U, V \in \mathcal{T} : x \in U, y \in V \quad U \cap V = \emptyset.$$

Определение. Гладкое многообразие размерности n — это пара (X, \mathcal{A}) , где X — хаусдорфово, со счетной базой топологическое пространство, а \mathcal{A} — атлас, т. е. $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$, где

- $U_\alpha \subset X$ — открытое,
- $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X$,
- $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ (φ_α — гомеоморфизм в область)
- $\forall \alpha, \beta \in A \quad \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ является бесконечно гладким.

Определение. Пусть N — многообразие размерности n .

Говорят, что $M \leq N$ — *подмногообразие* N размерности m , если $\forall x \in M \exists (U, \varphi)$ — карта на N , $x \in U$ и $\exists f = (f^1, \dots, f^{n-m}) : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ — гладкие функции, такие, что $\varphi(U \cap M) = \{x \in \varphi(U) : f(x) = 0\}$, причем

$$\text{rk} \left(\frac{\partial f^j}{\partial x^k} \right) = n - m$$

Определение. (С лекции) n -мерное гладкое многообразие называется многообразием с краем, если для каждой карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $\varphi_\alpha : U_\alpha \mapsto V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ V_α — либо диск $D^n = \{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 < 1\}$, либо $D^n \cap \{x_n \geq 0\}$. При этом, если координатный гомеоморфизм φ_α отображает точку в границу V_α , то она называется точкой края.

Определение. (Адекватное) n -мерное гладкое многообразие называется многообразием с краем, если для каждой карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $\varphi_\alpha : U_\alpha \mapsto V_\alpha \subseteq \mathbb{R}_+^n$ V_α — открытое в \mathbb{R}_+^n множество, а $\forall \alpha, \beta \in A \quad \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ — бесконечно гладкие в смысле дифференцирования по \mathbb{R}_+^n функции. При этом, если какая-то из локальных координат точки $P \in M = 0$, то она называется точкой края.

Утверждение. Край n -мерного гладкого многообразия является гладким многообразием размерности $n - 1$. Он обозначается ∂M .

Определение. Говорят, что на многообразии (M, \mathcal{A}) задана *ориентация*, если для каждой пары $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ задано число $\varepsilon_\alpha = \pm 1$, причем

$$\text{sgn} \left[\det \left(\frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j} \right) \right] = \varepsilon_\alpha \cdot \varepsilon_\beta.$$

Определение. Многообразие M называется *ориентируемым*, если на нем можно задать ориентацию.

6 Касательное пространство к многообразию.

Пусть M — гладкое многообразие, $\dim M = n$, $P_0 \in M$. Тогда касательным вектором к M в точке P_0 называется соответствие, которое каждой локальной системе координат $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ сопоставляет набор чисел $(\xi_\alpha^1, \dots, \xi_\alpha^n)$, для каждой пары локальных координат $(x_\alpha), (x_\beta)$ удовлетворяющих соотношению: $\xi_\alpha^i = \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j} \xi_\beta^j$. Числа $(\xi_\alpha^1, \dots, \xi_\alpha^n)$ называются координатами касательного вектора в локальной

системе координат (x_α) , а соотношение — тензорным законом преобразования координат касательного вектора при замене локальных координат. Множество всех касательных векторов к многообразию M в точке P_0 называется касательным пространством в точке P_0 и обозначается $T_{P_0}(M)$. Оно является векторным пространством размерности n . Совокупность всех касательных векторов к M , т.е.

$\bigcup_{P_0 \in M} T_{P_0}(M)$, называется касательным расслоением M и обозначается $T(M)$.

7 Гладкие тензорные поля (определение, в том числе формула пересчёта из одних координат в другие).

Определение. Говорят, что на гладком многообразии M задано гладкое тензорное поле типа (p, q) ранга $p + q$, если $\forall P \in M$ задан $T(x) \in \text{Tens}_q^p(T_P(M))$, причем в любой локальной системе координат $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ — гладкие функции, где $T(x) = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}$, т.е. в качестве базиса $T_P(M)$ выбираются $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$, в качестве базиса $T_P^*(M) := (T_P(M))^* = \{dx^i\}$.

Утверждение. Формула преобразования координат гладкого тензорного поля T типа (p, q) :

$$T_{j'_1 \dots j'_q}^{i'_1 \dots i'_p}(x) = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(x)$$

8 Дифференциальные формы на многообразии. Операция дифференцирования.

Определение. Дифференциальная форма ω на многообразии M порядка (степени) k — это кососимметричное тензорное поле типа $(0, k)$.

$\deg \omega := k$; говорят, что ω — k -форма.

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

Определение. Внешней производной (дифференциалом) формы $\omega = f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ называется форма

$$d\omega = df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} := \sum_l \frac{\partial f}{\partial x^l} dx^l \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Определение. Внешней производной (дифференциалом) формы $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ называется форма $d\omega$, такая, что

$$(d\omega)_{j_1 \dots j_{k+1}} = \sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s-1} \frac{\partial \omega_{j_1 \dots j_{s-1} j_{s+1} \dots j_{k+1}}}{\partial x^{j_s}}.$$

Утверждение. Определения эквивалентны.

Утверждение. $d^2 = 0$.

Утверждение. d не зависит от системы координат.

Определение. ω называется замкнутой, если $d\omega = 0$.

Определение. ω называется точной, если $\exists \alpha : \omega = d\alpha$.

9 Формула Стокса.

Определение. Пусть M — n -мерное гладкое ориентированное многообразие, ω — внешняя дифференциальная форма степени n , причем $\text{supp } \omega$ компактен и целиком лежит в U_α — карте M с координатами $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$. Тогда в карте U_α эта форма имеет вид $f(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n) dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^n$. В этом случае интегралом ω по M называют

$$\int_M \omega = \int \dots \int_{U_\alpha} f(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n) dx_\alpha^1 \dots dx_\alpha^n$$

Определение. Пусть X - метрическое пространство, $\{U_\alpha\}$ - его конечное открытое покрытие. Тогда существуют такие функции $\varphi_\alpha : X \mapsto \mathbb{R}$, что

1. $\forall \alpha \forall x \in X \ 0 \leq \varphi_\alpha(x) \leq 1$
2. $\text{supp } \varphi_\alpha \subseteq U_\alpha$
3. $\forall x \in X \ \sum_\alpha \varphi_\alpha(x) = 1$

Система функций $\{\varphi_\alpha\}$, удовлетворяющих этим условиям, называется разбиением единицы, подчиненным покрытию $\{U_\alpha\}$.

Определение. Пусть M - n -мерное ориентированное гладкое многообразие с краем, ω - внешняя дифференциальная n -форма с компактным носителем, $\{\varphi_\alpha\}$ - подчиненное атласу $M \bigcup_\alpha U_\alpha$ разбиение единицы. Тогда интегралом ω по M называют

$$\int_M \omega = \sum \int_{U_\alpha} \varphi_\alpha \omega$$

Формула Стокса

Пусть M - n -мерное ориентированное гладкое многообразие с краем ∂M , ω - внешняя дифференциальная форма степени $n - 1$ с компактным носителем. Тогда выполняется

$$(-1)^n \int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

10 Риманова метрика. Поднятие и опускание индекса. Форма объёма, согласованная с метрикой (формулировка).

Определение. Говорят, что на гладком многообразии M задана риманова метрика, если $\forall P \in M$ в $T_P(M)$ задано положительно определенное симметричное скалярное произведение, причем в каждой локальной системе координат (x_α) его матрица является гладкой функцией от (x_α) .

Замечание: из требований симметричности и положительной определенности следует невырожденность матрицы скалярного произведения. Также достаточно требовать гладкости в одной системе координат, в остальных свойство также выполнится, поскольку M - гладкое многообразие.

Пусть $T \in \text{Tens}_q^p(V)$, g — риманова метрика на V , что по определению означает, что $g \in \text{Tens}_2^0(V)$, g - симметричный тензор. Тогда $R \in \text{Tens}_{q+1}^{p-1}(V)$, где $R_{j_1, \dots, j_q, s}^{i_1, \dots, i_{p-1}} = g_{s, i_p} T_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}$. Эта операция называется опусканием индекса.

Определение. Тензор $h \in \text{Tens}_0^2(V)$ назовем обратным к g , если $h^{ij} g_{jk} = \delta_k^i$.

Тогда матрица h - обратная к матрице g . $R \in \text{Tens}_{q-1}^{p+1}(V)$, где $R_{j_1, \dots, j_{q-1}}^{i_1, \dots, i_{p+1}} = h^{s, j_q} T_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}$. Эта операция называется поднятием индекса.

Определение. Пусть M — гладкое многообразие, ω — n -форма, причем $\forall x \in M \ \omega|_x \neq 0$. Тогда ω называется формой объёма на M .

Утверждение. Если M — n -мерное ориентируемое риманово многообразие, $\{e_i\}_{i=1}^n$ — ортонормированный положительно ориентированный базис касательного пространства, то такая форма объёма ω , что $\omega(e_1, \dots, e_n) = 1$, существует и единственна.

11 Кривизна и кручение кривых в \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 , репер Френе (в том числе система дифференциальных уравнений для него).

Определение. Пусть s — длина дуги кривой γ от некоторой фиксированной точки. Тогда s называется натуральным параметром, а уравнение $\gamma(r(s) = (x(s), y(s)))$ называется натуральной параметризацией.

Утверждение. В натуральной параметризации $|\frac{dr}{ds}| = 1$.

Определение. Пусть кривая γ параметризована натуральным параметром s . Тогда ее кривизной в точке s называется $k(s) = |\frac{d^2r(s)}{ds^2}|$. Обратная величина называется радиусом кривизны в точке s и обозначается $R(s) = \frac{1}{k(s)}$.

Утверждение. Пусть кривая γ параметризована параметром t , не обязательно натуральным. Тогда $k(t) = \frac{||\dot{r} \times \ddot{r}||}{|\dot{r}|^3}$, где $[a \times b] = a_x b_y - a_y b_x$ — псевдовекторное произведение.

Определение. Пусть кривая задана в натуральной параметризации. Положим $v(s) = \frac{dr}{ds}$, $n(s) = \frac{d^2r/ds^2}{|d^2r/ds^2|}$. $(v(s), n(s))$ называются репером Френе в данной точке.

Утверждение. $v(s) \perp n(s)$.

Утверждение. (Формулы Френе)

$$\frac{dv(s)}{ds} = k(s)n(s), \quad \frac{dn(s)}{ds} = -k(s)v(s).$$

Определение. Пусть γ — гладкая кривая в \mathbb{R}^n , $r(s), s \in [a, b]$ — ее натуральная параметризация, причем $\forall s \in [a, b]$ $\frac{dr}{ds}, \dots, \frac{d^n r}{ds^n}$ линейно независимы. Построим в каждой точке s ортонормированный репер следующим образом. Положим $\tau_1 = \frac{dr}{ds}$. τ_k выберем как произвольный единичный вектор, ортогональный пространству, базисом которого являются $\tau_1, \dots, \tau_{k-1}$. Получившийся репер (τ_1, \dots, τ_n) называется репером Френе.

Утверждение. (Формулы Френе) Пусть (τ_1, \dots, τ_n) — репер Френе. Тогда $\exists k_2(s), \dots, k_n(s)$ — гладкие функции такие, что:

$$\begin{cases} \frac{d\tau_1(s)}{ds} = k_2(s)\tau_2(s) \\ \frac{d\tau_2(s)}{ds} = -k_2(s)\tau_1(s) + k_3(s)\tau_3(s) \\ \dots \\ \frac{d\tau_{n-1}(s)}{ds} = -k_{n-1}(s)\tau_{n-2}(s) + k_n(s)\tau_n(s) \\ \frac{d\tau_n(s)}{ds} = -k_n(s)\tau_{n-1}(s). \end{cases}$$

Определение. В \mathbb{R}^3 репер Френе имеет вид (v, n, b) , где $v(s) = \frac{dr}{ds}$, $n(s) = \frac{d^2r/ds^2}{|d^2r/ds^2|}$, $b(s) = [v(s) \times n(s)]$. В этом случае $k_2(s)$ называется кривизной и обозначается $k(s)$, а $k_3(s)$ — кручением и обозначается $\kappa(s)$.

Утверждение. Для кривизны и кручения в произвольной параметризации справедливы формулы $k(t) = \frac{||\dot{r} \times \ddot{r}||}{|\dot{r}|^3}$, $\kappa(t) = \frac{(\dot{r}, \ddot{r}, \ddot{\ddot{r}})}{||\dot{r} \times \ddot{r}||^2}$.

12 Первая и вторая квадратичные формы поверхности в \mathbb{R}^n , главные направления и главные кривизны. Гауссова и средняя кривизна.

Определение. Пусть $V \subseteq \mathbb{R}^n$, причем $\dim V = n - 1$, т.е. V - гиперповерхность, заданная набором гладких функций $r(u^1, \dots, u^{n-1})$. Тогда первой квадратичной формой называется форма $ds^2|_V = \sum_{k,p=1}^{n-1} g_{kp}(u) du^k du^p$, где $g_{kp}(u) = \langle \frac{\partial r}{\partial u^k}, \frac{\partial r}{\partial u^p} \rangle$. Она задает скалярное произведение на $T_P(V)$: $\forall a, b \in T_P(V) \quad \langle a, b \rangle = g_{kp} a^k b^p$.

Определение. Пусть V — гиперповерхность в \mathbb{R}^n , заданная набором гладких функций $r(u^1, \dots, u^{n-1})$. Пусть n — вектор нормали в точке P , т.е. единичный вектор, ортогональный поверхности, $a \in T_P(V)$ — произвольный касательный вектор. Определим $Q(a) = \langle \frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j} a^i a^j, n \rangle$. Тогда второй квадратичной формой называется симметричная билинейная форма, определяемая выражением $\forall a, b \in T_P(V) \quad Q(a, b) = \frac{Q(a+b) - Q(a) - Q(b)}{2}$.

Определение. Пусть V — гиперповерхность в \mathbb{R}^n . Тогда $\forall P \in V$ существует ортонормированный базис $T_P(V) \{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ такой, что $g(e_i, e_j) = \delta_j^i$, $Q(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \lambda_i, & i = j \end{cases}$. e_i называются главными направлениями, λ_i — главными кривизнами. $H(P) = \sum_i \lambda_i(P)$ называется средней кривизной в точке P , $K(P) = \prod_i \lambda_i(P)$ — гауссовой кривизной в точке P .