

# Список определений и формулировок, которые нужно знать для сдачи зачёта

23 декабря 2014 г.

## 1 Проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ .

Пусть  $V$  - (конечномерное) векторное пространство размерности  $\dim V = n + 1$ . Введем отношение эквивалентности на  $V \setminus \{0\}$  следующим образом:  $x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0 : x = \lambda y$ . Обозначим  $P(V) = (V \setminus \{0\}) / \sim$  фактор-множество относительно  $\sim$ .  $P(V)$  называется проективным пространством над  $V$ . Тогда, если  $V = \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $P(\mathbb{R}^{n+1}) := \mathbb{R}P^n$ .

## 2 Двойственное пространство к линейному пространству, двойственное линейное отображение.

Пусть  $V$  - векторное пространство над полем  $\mathbb{F}$ . Рассмотрим  $\mathcal{L}(V \mapsto \mathbb{R})$  - множество линейных функционалов на  $V$ . Его можно снабдить структурой векторного пространства над  $\mathbb{F}$  следующим образом:

1.  $\forall f, g \in \mathcal{L}(V \mapsto \mathbb{R}), x \in V \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$
2.  $\forall f \in \mathcal{L}(V \mapsto \mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{F}, x \in V \quad \lambda f(x) = f(\lambda x)$

Получившееся векторное пространство обозначается  $V^*$  и называется сопряженным, или двойственным векторным пространством.

Пусть  $\mathcal{A} : V \mapsto W$  - линейное отображение. Тогда сопряженным к  $\mathcal{A}$  называется отображение  $\mathcal{A}^* : W^* \mapsto V^*$ , действующий следующим образом:  $\forall \varepsilon \in W^*, v \in V \quad (\mathcal{A}^* \varepsilon)(v) = \varepsilon(\mathcal{A}v)$ . Его линейность проверяется непосредственно.

## 3 Тензорное произведение векторных пространств (любое определение).

Пусть  $U, V, W$  - векторные пространства. Рассмотрим  $\otimes : U \times V \mapsto W$  - билинейное отображение. Для краткости везде далее будем писать  $x \otimes y := \otimes(x, y)$ . Тогда пара  $(W, \otimes)$  называется тензорным произведением  $U$  на  $V$ , если  $\{e_i \otimes f_j\}$  - базис  $W$ , где  $\{e_i\}, \{f_j\}$  - базисы  $U, V$  соответственно. Обозначение:  $U \otimes V$ .

**Утверждение.**  $U \otimes V$  существует и единственно с точностью до изоморфизма.

**Утверждение.** Пусть  $\varphi : U \times V \mapsto Z$  - билинейное отображение. Тогда  $(W, \otimes)$  — тензорное произведение  $U$  на  $V \Leftrightarrow$  существует и единственно линейное отображение  $\psi : W \mapsto Z : \varphi(u, v) = \psi(u \otimes v)$ .

**Утверждение.** Если  $U, V$  - векторные пространства.  $\mathcal{L}(U \times V \mapsto \mathbb{R}) \cong U^* \otimes V^* \cong (U \otimes V)^*$ .

#### 4 Пространства $\text{Tens}_q^p(V)$ . Операции над тензорами: сложение, умножение, свёртка, симметрирование, альтернирование.

**Определение.**  $\text{Tens}_q^p(V) = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_p \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_q$  называется пространством тензоров типа  $(p, q)$  над  $V$ , или пространством тензоров,  $p$  раз контравариантных и  $q$  раз ковариантных.

Если  $\{e_i\}$  - базис  $V$ ,  $\{\varepsilon^i\}$  — двойственный к нему базис  $V^*$ . Тогда  $\text{Tens}_q^p(V) = \langle e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{j_q} \mid i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \in \overline{1, n} \rangle$ . Каждый тензор  $T \in \text{Tens}_q^p(V)$  можно записать в координатах  $T = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{j_q}$ .

**Определение.** Тензор называется симметричным, если при перестановке любых двух индексов одного типа его координата не меняется, и кососимметричным, если она при этом меняет знак.

#### Операции над тензорами

##### 1. Линейная комбинация

Пусть  $T, S \in \text{Tens}_q^p(V)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Тогда  $\alpha T + \beta S \in \text{Tens}_q^p(V)$ , где  $(\alpha T + \beta S)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \alpha T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + \beta S_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ .

##### 2. Произведение тензоров

Пусть  $T \in \text{Tens}_q^p(V)$ ,  $S \in \text{Tens}_s^r(V)$ . Тогда  $T \otimes S \in \text{Tens}_{q+s}^{p+r}(V)$ , причем  $(T \otimes S)_{j_1 \dots j_{q+s}}^{i_1 \dots i_{p+r}} = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} S_{j_{q+1} \dots j_{q+s}}^{i_{p+1} \dots i_{p+r}}$ .

##### 3. Перестановка индексов

Пусть  $\sigma \in S_p$ ,  $\tau \in S_q$ , где  $S_n$  - симметрическая группа порядка  $n$ ,  $T \in \text{Tens}_q^p(V)$ . Тогда  $R_\tau^\sigma T \in \text{Tens}_q^p(V)$ , где  $(R_\tau^\sigma T)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T_{j_{\tau(1)} \dots j_{\tau(q)}}^{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(p)}}$ .

##### 4. Свёртка

Пусть  $T \in \text{Tens}_q^p(V)$ ,  $t \in \overline{1, p}$ ,  $s \in \overline{1, q}$ . Тогда  $C_s^t T \in \text{Tens}_{q-1}^{p-1}(V)$ , где  $(C_s^t T)_{j_1 \dots j_{s-1} j_{s+1} \dots j_q}^{i_1 \dots i_{t-1} i_{t+1} \dots i_p} = \sum_{m=1}^{\dim V} T_{j_1 \dots j_{s-1} m j_{s+1} \dots j_q}^{i_1 \dots i_{t-1} m i_{t+1} \dots i_p}$ .

##### 5. Симметрирование

Пусть  $T \in \text{Tens}_q^p(V)$ . Тогда  $\text{Sym} T \in \text{Tens}_q^p(V)$ , где  $(\text{Sym} T)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} T_{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(q)}}^{i_1 \dots i_p}$ . Аналогичную операцию можно делать и с верхними индексами.

##### 6. Альтернирование

Пусть  $T \in \text{Tens}_q^p(V)$ . Тогда  $\text{Alt} T \in \text{Tens}_q^p(V)$ , где  $(\text{Alt} T)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} (-1)^\sigma T_{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(q)}}^{i_1 \dots i_p}$ . Аналогичную операцию можно делать и с верхними индексами.

##### 7. Внешнее произведение

Пусть  $T \in \text{Tens}_p^0(V)$ ,  $S \in \text{Tens}_q^0(V)$  — кососимметричные тензоры. Тогда  $T \wedge S \in \text{Tens}_q^p(V)$ , где  $(T \wedge S) = \frac{(p+q)!}{p!q!} \text{Alt}(T \otimes S)$ .

5 Гладкое многообразие, многообразие с краем, подмногообразие, ориентируемое многообразие.

**Определение.**  $(X, \mathcal{T})$  — хаусдорфово, если

$$\forall x, y \in X, x \neq y, \exists U, V \in \mathcal{T} : x \in U, y \in V \quad U \cap V = \emptyset.$$

**Определение.** Гладкое многообразие размерности  $n$  — это пара  $(X, \mathcal{A})$ , где  $X$  — хаусдорфово, со счетной базой топологическое пространство, а  $\mathcal{A}$  — атлас, т. е.  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ , где

- $U_\alpha \subset X$  — открытое,
- $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X$ ,
- $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$  ( $\varphi_\alpha$  — гомеоморфизм в область)
- $\forall \alpha, \beta \in A \quad \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  является бесконечно гладким.

**Определение.** Пусть  $N$  — многообразие размерности  $n$ .

Говорят, что  $M \leq N$  — *подмногообразие*  $N$  размерности  $m$ , если  $\forall x \in M \exists (U, \varphi)$  — карта на  $N$ ,  $x \in U$  и  $\exists f = (f^1, \dots, f^{n-m}) : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  — гладкие функции, такие, что  $\varphi(U \cap M) = \{x \in \varphi(U) : f(x) = 0\}$ , причем

$$\text{rk} \left( \frac{\partial f^j}{\partial x^k} \right) = n - m$$

**Определение. (С лекции)**  $n$ -мерное гладкое многообразие называется многообразием с краем, если для каждой карты  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ,  $\varphi_\alpha : U_\alpha \mapsto V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$   $V_\alpha$  — либо диск  $D^n = \{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 < 1\}$ , либо  $D^n \cap \{x_n \geq 0\}$ . При этом, если координатный гомеоморфизм  $\varphi_\alpha$  отображает точку в границу  $V_\alpha$ , то она называется точкой края.

**Определение. (Адекватное)**  $n$ -мерное гладкое многообразие называется многообразием с краем, если для каждой карты  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ,  $\varphi_\alpha : U_\alpha \mapsto V_\alpha \subseteq \mathbb{R}_+^n$   $V_\alpha$  — открытое в  $\mathbb{R}_+^n$  множество, а  $\forall \alpha, \beta \in A \quad \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  — бесконечно гладкие в смысле дифференцирования по  $\mathbb{R}_+^n$  функции. При этом, если какая-то из локальных координат точки  $P \in M = 0$ , то она называется точкой края.

**Утверждение.** Край  $n$ -мерного гладкого многообразия является гладким многообразием размерности  $n - 1$ . Он обозначается  $\partial M$ .

**Определение.** Говорят, что на многообразии  $(M, \mathcal{A})$  задана *ориентация*, если для каждой пары  $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$  задано число  $\varepsilon_\alpha = \pm 1$ , причем

$$\text{sgn} \left[ \det \left( \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j} \right) \right] = \varepsilon_\alpha \cdot \varepsilon_\beta.$$

**Определение.** Многообразие  $M$  называется *ориентируемым*, если на нем можно задать ориентацию.

**Утверждение.** Если  $M$  — многообразие с краем, то и  $\partial M$  является ориентируемым многообразием.

**Определение.** Если  $M$  — ориентированное гладкое многообразие размерности  $n$ ,  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n))\}_{\alpha \in A}$  — атлас карт на нем, то ориентация  $\partial M$ , задаваемая атласом  $\{U_\alpha \cap \partial M, (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^{n-1})\}_{\alpha \in A}$ , называется ориентацией, согласованной с ориентацией на  $M$ .

## 6 Касательное пространство к многообразию.

Пусть  $M$  - гладкое многообразие,  $\dim M = n$ ,  $P_0 \in M$ . Тогда касательным вектором к  $M$  в точке  $P_0$  называется соответствие, которое каждой локальной системе координат  $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$  сопоставляет набор чисел  $(\xi_\alpha^1, \dots, \xi_\alpha^n)$ , для каждой пары локальных координат  $(x_\alpha), (x_\beta)$  удовлетворяющих соотношению:  $\xi_\alpha^i = \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j} \xi_\beta^j$ . Числа  $(\xi_\alpha^1, \dots, \xi_\alpha^n)$  называются координатами касательного вектора в локальной системе координат  $(x_\alpha)$ , а соотношение - тензорным законом преобразования координат касательного вектора при замене локальных координат. Множество всех касательных векторов к многообразию  $M$  в точке  $P_0$  называется касательным пространством в точке  $P_0$  и обозначается  $T_{P_0}(M)$ . Оно является векторным пространством размерности  $n$ . Совокупность всех касательных векторов к  $M$ , т.е.  $\bigcup_{P_0 \in M} T_{P_0}(M)$ , называется касательным расслоением  $M$  и обозначается  $T(M)$ .

## 7 Гладкие тензорные поля (определение, в том числе формула пересчёта из одних координат в другие).

**Определение.** Говорят, что на гладком многообразии  $M$  задано гладкое тензорное поле типа  $(p, q)$  ранга  $p + q$ , если  $\forall x \in M$  задан  $T(x) \in \text{Tens}_q^p(T_x(M))$ , причем в любой локальной системе координат  $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$  — гладкие функции, где  $T(x) = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}$ , т.е. в качестве базиса  $T_x(M)$  выбираются  $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ , в качестве базиса  $T_x^*(M) := (T_x(M))^* = \{dx^i\}$ .

**Утверждение.** Формула преобразования координат гладкого тензорного поля  $T$  типа  $(p, q)$ :

$$T_{j'_1 \dots j'_q}^{i'_1 \dots i'_p}(x) = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(x)$$

## 8 Дифференциальные формы на многообразии. Операция дифференцирования.

**Определение.** Дифференциальная форма  $\omega$  на многообразии  $M$  порядка (степени)  $k$  — это кососимметричное тензорное поле типа  $(0, k)$ .

$\deg \omega := k$ ; говорят, что  $\omega$  -  $k$ -форма.

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

**Определение.** Внешней производной (дифференциалом) формы  $\omega = f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$  называется форма

$$d\omega = df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} := \sum_l \frac{\partial f}{\partial x^l} dx^l \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Для формы  $\omega = \sum_{i_1, \dots, i_k} w_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$  дифференциал определяется исходя из свойства линейности, а именно  $d\omega = \sum_{i_1 \dots i_k} d(w_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = d(w_{i_1 \dots i_k}) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ .

**Внимание:** последнее утверждение использовать на свой страх и риск, но это единственное известное мне объяснение, почему в определении форма записана именно так.

**Определение.** Внешней производной (дифференциалом) формы  $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$  называется форма  $d\omega$ , такая, что

$$(d\omega)_{j_1 \dots j_{k+1}} = \sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s-1} \frac{\partial \omega_{j_1 \dots j_{s-1} j_{s+1} \dots j_{k+1}}}{\partial x^{j_s}}.$$

**Утверждение.** Определения эквивалентны.

**Утверждение.**  $d^2 = 0$ .

**Утверждение.**  $d$  не зависит от системы координат.

**Определение.**  $\omega$  называется замкнутой, если  $d\omega = 0$ .

**Определение.**  $\omega$  называется точной, если  $\exists \alpha : \omega = d\alpha$ .

## 9 Формула Стокса.

**Определение.** Пусть  $M$  -  $n$ -мерное гладкое ориентированное многообразие,  $\omega$  - внешняя дифференциальная форма степени  $n$ , причем **supp**  $\omega$  компактен и целиком лежит в  $U_\alpha$  - карте  $M$  с координатами  $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$  и ориентацией  $\varepsilon_\alpha$ . Тогда в карте  $U_\alpha$  эта форма имеет вид  $f(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n) dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^n$ . В этом случае интегралом  $\omega$  по  $M$  называют

$$\int_M \omega = \varepsilon_\alpha \int_{U_\alpha} f(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n) dx_\alpha^1 \dots dx_\alpha^n$$

**Определение.** Пусть  $X$  - метрическое пространство,  $\{U_\alpha\}$  - его конечное открытое покрытие. Тогда существуют такие функции  $\varphi_\alpha : X \mapsto \mathbb{R}$ , что

1.  $\forall \alpha \forall x \in X \ 0 \leq \varphi_\alpha(x) \leq 1$
2. **supp**  $\varphi_\alpha \subseteq U_\alpha$
3.  $\forall x \in X \sum_\alpha \varphi_\alpha(x) = 1$

Система функций  $\{\varphi_\alpha\}$ , удовлетворяющих этим условиям, называется разбиением единицы, подчиненным покрытию  $\{U_\alpha\}$ .

**Определение.** Пусть  $M$  -  $n$ -мерное ориентированное гладкое многообразие с краем,  $\omega$  - внешняя дифференциальная  $n$ -форма с компактным носителем,  $\{\varphi_\alpha\}$  - подчиненное атласу  $M \bigcup_\alpha U_\alpha$  разбиение единицы. Тогда интегралом  $\omega$  по  $M$  называют

$$\int_M \omega = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \varphi_\alpha \omega$$

## Формула Стокса

Пусть  $M$  -  $n$ -мерное ориентированное гладкое многообразие с краем  $\partial M$  с согласованной ориентацией,  $\omega$  - внешняя дифференциальная форма степени  $n - 1$  с компактным носителем. Тогда выполняется

$$(-1)^n \int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

# 10 Риманова метрика. Поднятие и опускание индекса. Форма объема, согласованная с метрикой (формулировка).

**Определение.** Говорят, что на гладком многообразии  $M$  задана риманова метрика, если  $\forall P \in M$  в  $T_P(M)$  задано положительно определенное симметричное скалярное произведение, причем в каждой локальной системе координат  $(x_\alpha)$  его матрица является гладкой функцией от  $(x_\alpha)$ .

Замечание: из требований симметричности и положительной определенности следует невырожденность матрицы скалярного произведения. Также достаточно требовать гладкости в одной системе координат, в остальных свойство также выполнится, поскольку  $M$  - гладкое многообразие.

Пусть  $T \in \text{Tens}_q^p(V)$ ,  $g$  — риманова метрика на  $V$ , что по определению означает, что  $g \in \text{Tens}_2^0(V)$ ,  $g$  - симметричный тензор. Тогда  $R \in \text{Tens}_{q+1}^{p-1}(V)$ , где  $R_{j_1, \dots, j_q, s}^{i_1, \dots, i_{p-1}} = g_{s, i_p} T_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}$ . Эта операция называется опусканием индекса.

**Определение.** Тензор  $h \in \text{Tens}_0^2(V)$  назовем обратным к  $g$ , если  $h^{ij} g_{jk} = \delta_k^i$ .

Тогда матрица  $h$  - обратная к матрице  $g$ .  $R \in \text{Tens}_{q-1}^{p+1}(V)$ , где  $R_{j_1, \dots, j_{q-1}}^{i_1, \dots, i_p, s} = h^{s, j_q} T_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}$ . Эта операция называется поднятием индекса.

**Определение.** Пусть  $M$  — гладкое многообразие,  $\omega$  —  $n$ -форма, причем  $\forall x \in M \ \omega|_x \neq 0$ . Тогда  $\omega$  называется формой объема на  $M$ .

**Утверждение.** Если  $M$  —  $n$ -мерное ориентируемое риманово многообразие,  $\{e_i\}_{i=1}^n$  — ортонормированный положительно ориентированный базис касательного пространства, то такая форма объема  $\omega$ , что  $\omega(e_1, \dots, e_n) = 1$ , существует и единственна. Она называется формой объема, согласованной с (римановой) метрикой на  $M$ .

# 11 Кривизна и кручение кривых в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ , репер Френе (в том числе система дифференциальных уравнений для него).

**Определение.** Пусть  $s$  — длина дуги кривой  $\gamma$  от некоторой фиксированной точки. Тогда  $s$  называется натуральным параметром, а уравнение  $\gamma \ r(s) = (x(s), y(s))$  называется натуральной параметризацией.

**Утверждение.** В натуральной параметризации  $|\frac{dr}{ds}| = 1$ .

**Определение.** Пусть кривая  $\gamma$  параметризована натуральным параметром  $s$ . Тогда ее кривизной в точке  $s$  называется  $k(s) = |\frac{d^2 r(s)}{ds^2}|$ . Обратная величина называется радиусом кривизны в точке  $s$  и обозначается  $R(s) = \frac{1}{k(s)}$ .

**Утверждение.** Пусть кривая  $\gamma$  параметризована параметром  $t$ , не обязательно натуральным. Тогда  $k(t) = \frac{||\dot{r} \times \ddot{r}||}{|\dot{r}|^3}$ , где  $[a \times b] = a_x b_y - a_y b_x$  - псевдовекторное произведение.

**Определение.** Пусть кривая задана в натуральной параметризации. Положим  $v(s) = \frac{dr}{ds}$ ,  $n(s) = \frac{d^2 r/ds^2}{|d^2 r/ds^2|}$ .  $(v(s), n(s))$  называются репером Френе в данной точке.

**Утверждение.**  $v(s) \perp n(s)$ .

**Утверждение. (Формулы Френе)**

$$\frac{dv(s)}{ds} = k(s)n(s), \quad \frac{dn(s)}{ds} = -k(s)v(s).$$

**Определение.** Пусть  $\gamma$  — гладкая кривая в  $\mathbb{R}^n$ ,  $r(s), s \in [a, b]$  — ее натуральная параметризация, причем  $\forall s \in [a, b] \frac{dr}{ds}, \dots, \frac{d^n r}{ds^n}$  линейно независимы. Построим в каждой точке  $s$  ортонормированный репер следующим образом. Положим  $\tau_1 = \frac{dr}{ds}$ .  $\tau_k$  выберем как произвольный единичный вектор, ортогональный пространству, базисом которого являются  $\tau_1, \dots, \tau_{k-1}$ . Получившийся репер  $(\tau_1, \dots, \tau_n)$  называется репером Френе.

**Утверждение. (Формулы Френе)** Пусть  $(\tau_1, \dots, \tau_n)$  — репер Френе. Тогда  $\exists k_2(s), \dots, k_n(s)$  — гладкие функции такие, что:

$$\begin{cases} \frac{d\tau_1(s)}{ds} = k_2(s)\tau_2(s) \\ \frac{d\tau_2(s)}{ds} = -k_2(s)\tau_1(s) + k_3(s)\tau_3(s) \\ \dots \\ \frac{d\tau_{n-1}(s)}{ds} = -k_{n-1}(s)\tau_{n-2}(s) + k_n(s)\tau_n(s) \\ \frac{d\tau_n(s)}{ds} = -k_n(s)\tau_{n-1}(s). \end{cases}$$

**Определение.** В  $\mathbb{R}^3$  репер Френе имеет вид  $(v, n, b)$ , где  $v(s) = \frac{dr}{ds}$ ,  $n(s) = \frac{d^2 r / ds^2}{|d^2 r / ds^2|}$ ,  $b(s) = [v(s) \times n(s)]$ . В этом случае  $k_2(s)$  называется кривизной и обозначается  $k(s)$ , а  $k_3(s)$  — кручением и обозначается  $\kappa(s)$ .

**Утверждение.** Для кривизны и кручения в произвольной параметризации справедливы формулы  $k(t) = \frac{||\dot{r} \times \ddot{r}||}{|\dot{r}|^3}$ ,  $\kappa(t) = \frac{(\dot{r}, \ddot{r}, \ddot{\ddot{r}})}{||\dot{r} \times \ddot{r}||^2}$ .

## 12 Первая и вторая квадратичные формы поверхности в $\mathbb{R}^n$ , главные направления и главные кривизны. Гауссова и средняя кривизна.

**Определение.** Пусть  $V \subseteq \mathbb{R}^n$ , причем  $\dim V = n - 1$ , т.е.  $V$  — гиперповерхность, заданная набором гладких функций  $r(u^1, \dots, u^{n-1})$ . Тогда первой квадратичной формой называется форма  $ds^2|_V = \sum_{k,p=1}^{n-1} g_{kp}(u) du^k du^p$ , где  $g_{kp}(u) = \langle \frac{\partial r}{\partial u^k}, \frac{\partial r}{\partial u^p} \rangle$ . Она задает скалярное произведение на  $T_P(V)$ :  $\forall a, b \in T_P(V) \langle a, b \rangle = g_{kp} a^k b^p$ .

**Определение.** Пусть  $V$  — гиперповерхность в  $\mathbb{R}^n$ , заданная набором гладких функций  $r(u^1, \dots, u^{n-1})$ . Пусть  $n$  — вектор нормали в точке  $P$ , т.е. единичный вектор, ортогональный поверхности,  $a \in T_P(V)$  — произвольный касательный вектор. Определим  $Q(a) = \langle \frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j} a^i a^j, n \rangle$ . Тогда второй квадратичной формой называется симметричная билинейная форма, определяемая выражением  $\forall a, b \in T_P(V) Q(a, b) = \frac{Q(a+b) - Q(a) - Q(b)}{2}$ . В одних и тех же координатах матрицы этих квадратичной и билинейной форм совпадают:  $(q_{ij}) = (\langle \frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j}, n \rangle)$ .

**Определение.** Пусть  $V$  — гиперповерхность в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда  $\forall P \in V$  существует ортонормированный базис  $T_P(V) \{e_1, \dots, e_{n-1}\}$  такой, что  $g(e_i, e_j) = \delta_j^i$ ,  $Q(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \lambda_i, & i = j \end{cases}$ .  $e_i$  называются главными направлениями,  $\lambda_i$  — главными кривизнами.  $H(P) = \sum_i \lambda_i(P)$  называется средней кривизной в точке  $P$ ,  $K(P) = \prod_i \lambda_i(P)$  — гауссовой кривизной в точке  $P$ .