Список определений и формулировок, которые нужно знать для сдачи зачёта

22 декабря 2014 г.

1 Проективное пространство $\mathbb{R}P^n$.

Пусть V - (конечномерное) векторное пространство размерности $\dim V = n+1$. Введем отношение эквивалентности на $V\backslash\{0\}$ следующим образом: $x \sim y \Leftrightarrow \exists\lambda \neq 0 : x = \lambda y$. Обозначим $P(V) = (V\backslash\{0\})/_\sim$ фактор-множество относительно $\sim$. $P(V)$ называется проективным пространством над V. Тогда, если $V = \mathbb{R}^{n+1}$, $P(\mathbb{R}^{n+1}) := \mathbb{R}P^n$.

2 Двойственное пространство к линейному пространству, двойственное линейное отображение.

Пусть V - векторное пространство над полем $\mathbb{F}$. Рассмотрим $\mathcal{L}(V \mapsto \mathbb{R})$ - множество линейных функционалов на V. Его можно снабдить структурой векторного пространства над $\mathbb{F}$ следующим образом:

1. $\forall f, g \in \mathcal{L}(V \mapsto \mathbb{R}), x \in V \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$
2. $\forall f \in \mathcal{L}(V \mapsto \mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{F}, x \in V \quad \lambda f(x) = f(\lambda x)$

Получившееся векторное пространство обозначается V^* и называется сопряженным, или двойственным векторным пространством.

Пусть $\mathcal{A} : V \mapsto W$ - линейное отображение. Тогда сопряженным к $\mathcal{A}$ называется отображение $\mathcal{A}^* : W^* \mapsto V^*$, действующий следующим образом: $\forall \varepsilon \in W^*, v \in V \quad (\mathcal{A}^*\varepsilon)(v) = \varepsilon(\mathcal{A}v)$. Его линейность проверяется непосредственно.

3 Тензорное произведение векторных пространств (любое определение).

Пусть $U,\ V,\ W$ - векторные пространства. Рассмотрим $\otimes : U \times V \mapsto W$ - билинейное отображение. Для краткости везде далее будем писать $x \otimes y := \otimes(x, y)$. Тогда пара $(W, \otimes)$ называется тензорным произведением U на V, если $\{e_i \otimes f_j\}$ - базис W, где $\{e_i\}, \{f_j\}$ - базисы U, V соответственно. Обозначение: $U \otimes V$.

Утверждение. *$U \otimes V$ существует и единственно с точностью до изоморфизма.*

Утверждение. *Пусть $\varphi : U \times V \mapsto Z$ - билинейное отображение. Тогда $(W, \otimes)$ — тензорное произведение U на $V \Leftrightarrow$ существует и единственно линейное отображение $\psi : W \mapsto Z : \varphi(u, v) = \psi(u \otimes v)$.*

Утверждение. *Если $U,\ V$ - векторные пространства. $\mathcal{L}(U \times V \mapsto \mathbb{R}) \cong U^* \otimes V^* \cong (U \otimes V)^*$.*

4 Пространства $\mathrm{Tens}^p_q(V)$. Операции над тензорами: сложение, умножение, свёртка, симметрирование, альтернирование.

Определение. $\mathrm{Tens}^p_q(V) = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{p} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{q}$ называется пространством тензоров типа (p, q) над V, или пространством тензоров, p раз контравариантных и q раз ковариантных.

Если $\{e_i\}$ - базис V, $\{\varepsilon^i\}$ — двойственный к нему базис V^*. Тогда $\mathrm{Tens}^p_q(V) =< e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{j_q} \mid \ i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q \in \overline{1, n} >$. Каждый тензор $T \in \mathrm{Tens}^p_q(V)$ можно записать в координатах $T = T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{j_q}$.

Определение. Тензор называется симметричным, если при перестановке любых двух индексов одного типа его координата не меняется, и кососимметричным, если она при этом меняет знак.

Операции над тензорами

1. Линейная комбинация

   Пусть $T, S \in \mathrm{Tens}^p_q(V)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда $\alpha T + \beta S \in \mathrm{Tens}^p_q(V)$, где $(\alpha T + \beta S)^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} = \alpha T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} + \beta S^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q}$.

2. Произведение тензоров

   Пусть $T \in \mathrm{Tens}^p_q(V)$, $S \in \mathrm{Tens}^r_s(V)$. Тогда $T \otimes S \in \mathrm{Tens}^{p+r}_{q+s}(V)$, причем $(T \otimes S)^{i_1,\ldots,i_{p+r}}_{j_1,\ldots,j_{q+s}} = T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} S^{i_{p+1},\ldots,i_{p+r}}_{j_{q+1},\ldots,j_{q+s}}$.

3. Перестановка индексов

   Пусть $\sigma \in S_p, \tau \in S_q$, где S_n - симметрическая группа порядка n, $T \in \mathrm{Tens}^p_q(V)$. Тогда $R^\sigma_\tau T \in \mathrm{Tens}^p_q(V)$, где $(R^\sigma_\tau T)^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} = T^{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(p)}}_{j_{\tau(1)},\ldots,j_{\tau(q)}}$.

4. Свертка

   Пусть $T \in \mathrm{Tens}^p_q(V), t \in \overline{1, p}, s \in \overline{1, q}$. Тогда $C^t_s T \in \mathrm{Tens}^{p-1}_{q-1}(V)$, где $(C^t_s T)^{i_1,\ldots,i_{t-1},i_{t+1},\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_{s-1},j_{s+1},\ldots,j_q} = \sum\limits_{m=1}^{dimV} T^{i_1,\ldots,i_{t-1},m,i_{t+1},\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_{s-1},m,j_{s+1},\ldots j_q}$.

5. Симметрирование

   Пусть $T \in \mathrm{Tens}^p_q(V)$. Тогда $SymT \in \mathrm{Tens}^p_q(V)$, где $(SymT)^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} = \frac{1}{q!} \sum\limits_{\sigma \in S_q} T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_{\sigma(1)},\ldots,j_{\sigma(q)}}$. Аналогичную операцию можно делать и с верхними индексами.

6. Альтернирование

   Пусть $T \in \mathrm{Tens}^p_q(V)$. Тогда $AltT \in \mathrm{Tens}^p_q(V)$, где $(AltT)^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} = \frac{1}{q!} \sum\limits_{\sigma \in S_q} (-1)^\sigma T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_{\sigma(1)},\ldots,j_{\sigma(q)}}$. Аналогичную операцию можно делать и с верхними индексами.

5 Гладкое многообразие, многообразие с краем, подмногообразие, ориентируемое многообразие.

Определение. $(X, \mathscr{T})$ — хаусдорфово, если

$$\forall x,\, y \in X,\ x \neq y,\ \exists U, V \in \mathscr{T} : x \in U,\ y \in V \quad U \cap V = \varnothing.$$

Определение. *Гладкое многообразие* размерности n — это пара $(X, \mathscr{A})$, где X — хаусдорфово, со счетной базой топологическое пространство, а $\mathscr{A}$ — атлас, т. е. $\mathscr{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$, где

- $U_\alpha \subset X$ — открытое,
- $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X$,
- $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ (φ_α — гомеоморфизм в область)
- $\forall \alpha, \beta \in A \quad \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ является бесконечно гладким.

Определение. Пусть N — многообразие размерности n.
Говорят, что $M \leq N$ — *подмногообразие* N размерности m, если $\forall x \in M \; \exists (U, \varphi)$ — карта на N, $x \in U$ и $\exists f = \left(f^1, \ldots, f^{n-m}\right) : \varphi(U) \to \mathbb{R}^{n-m}$ — гладкие функции, такие, что $\varphi(U \cap M) = \{x \in \varphi(U) : f(x) = 0\}$, причем

$$\operatorname{rk}\left(\frac{\partial f^j}{\partial x^k}\right) = n - m$$

Определение. (С лекции) n-мерное гладкое многообразие называется многообразием с краем, если для каждой карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $\varphi_\alpha : U_\alpha \mapsto V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \quad V_\alpha$ — либо диск $D^n = \{(x^1)^2 + \ldots (x^n)^2 < 1\}$, либо $D^n \bigcap \{x_n \geqslant 0\}$. При этом, если координатный гомеоморфизм φ_α отображает точку в границу V_α, то она называется точкой края.

Определение. (Адекватное) n-мерное гладкое многообразие называется многообразием с краем, если для каждой карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $\varphi_\alpha : U_\alpha \mapsto V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n_+ \quad V_\alpha$ — открытое в $\mathbb{R}^n_+$ множество, а $\forall \alpha, \beta \in A \quad \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ — бесконечно гладкие в смысле дифференцирования по $\mathbb{R}^n_+$ функции. При этом, если какая-то из локальных координат точки $P \in M = 0$, то она называется точкой края.

Утверждение. *Край n-мерного гладкого многообразия является гладким многообразием размерности $n - 1$. Он обозначается ∂M.*

Определение. Говорят, что на многообразии $(M, \mathscr{A})$ задана *ориентация*, если для каждой пары $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathscr{A}$ задано число $\varepsilon_\alpha = \pm 1$, причем

$$\operatorname{sgn}\left[\det\left(\frac{\partial x^i_\alpha}{\partial x^j_\beta}\right)\right] = \varepsilon_\alpha \cdot \varepsilon_\beta.$$

Определение. Многообразие M называется *ориентируемым*, если на нем можно задать ориентацию.

Утверждение. *Если M — многообразие с краем, то и ∂M является ориентируемым многообразием.*

Определение. Если M — ориентированное гладкое многообразие размерности n,
$\mathscr{A} = \left\{\left(U_\alpha, \varphi_\alpha = (x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha)\right)\right\}_{\alpha \in A}$ — атлас карт на нем, то ориентация ∂M, задаваемая атласом $\{U_\alpha \bigcap \partial M, (x^1_\alpha, \ldots, x^{n-1}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$, называется ориентацией, согласованной с ориентацией на M.

6 Касательное пространство к многообразию.

Пусть M - гладкое многообразие, $\dim M = n$, $P_0 \in M$. Тогда касательным вектором к M в точке P_0 называется соответствие, которое каждой локальной системе координат $(x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha)$ сопоставляет набор чисел $(\xi^1_\alpha, \ldots, \xi^n_\alpha)$, для каждой пары локальных координат $(x_\alpha), (x_\beta)$ удовлетворяющих соотношению: $\xi^i_\alpha = \frac{\partial x^i_\alpha}{\partial x^j_\beta} \xi^j_\beta$. Числа $(\xi^1_\alpha, \ldots, \xi^n_\alpha)$ называются координатами касательного вектора в локальной системе координат (x_α), а соотношение - тензорным законом преобразования координат касательного вектора при замене локальных координат. Множество всех касательных векторов к многообразию M в точке P_0 называется касательным пространством в точке P_0 и обозначается $T_{P_0}(M)$. Оно является векторным пространством размерности n. Совокупность всех касательных векторов к M, т.е. $\bigcup\limits_{P_0 \in M} T_{P_0}(M)$, называется касательным расслоением M и обозначается $T(M)$.

7 Гладкие тензорные поля (определение, в том числе формула пересчёта из одних координат в другие).

Определение. Говорят, что на гладком многообразии M задано гладкое тензорное поле типа (p, q) ранга $p+q$, если $\forall P \in M$ задан $T(x) \in \mathrm{Tens}^p_q(T_P(M))$, причем в любой локальной системе координат $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ — гладкие функции, где $T(x) = T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_q}$, т.е. в качестве базиса $T_P(M)$ выбираются $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$, в качестве базиса $T^*_P(M) := (T_P(M))^*$ — $\{dx^i\}$.

Утверждение. *Формула преобразования координат гладкого тензорного поля T типа (p, q):*

$$T^{i'_1 \ldots i'_p}_{j'_1 \ldots j'_q}(x) = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \ldots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \ldots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}(x)$$

8 Дифференциальные формы на многообразии. Операция дифференцирования.

Определение. *Дифференциальная форма* ω на многообразии M порядка (степени) k — это кососимметричное тензорное поле типа $(0, k)$.
$\deg \omega := k$; говорят, что ω - k-форма.

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \omega_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

Определение. *Внешней производной (дифференциалом)* формы $\omega = f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ называется форма

$$d\omega = df \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} := \sum_l \frac{\partial f}{\partial x^l} dx^l \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

Для формы $\omega = \sum\limits_{i_1, \ldots, i_k} w_{i_1, \ldots, i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ дифференциал определяется исходя из свойства линейности, а именно $d\omega = \sum\limits_{i_1, \ldots, i_k} d(w_{i_1, \ldots, i_k}) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$.

Внимание: последнее утверждение использовать на свой страх и риск, но это единственное известное мне объяснение, почему в определении форма записана именно так.

Определение. *Внешней производной (дифференциалом)* формы $\omega = \sum\limits_{i_1 < \ldots < i_k} \omega_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ называется форма $d\omega$, такая, что

$$(d\omega)_{j_1 \ldots j_{k+1}} = \sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s-1} \frac{\partial \omega_{j_1 \ldots j_{s-1} j_{s+1} \cdots j_{k+1}}}{\partial x^{j_s}}.$$

Утверждение. *Определения эквивалентны.*

Утверждение. $d^2 = 0$.

Утверждение. *d не зависит от системы координат.*

Определение. ω называется *замкнутой*, если $d\omega = 0$.

Определение. ω называется *точной*, если $\exists \alpha : \omega = d\alpha$.

9 Формула Стокса.

Определение. Пусть M - n-мерное гладкое ориентированное многообразие, ω - внешняя дифференциальная форма степени n, причем $\mathbf{supp}\,\omega$ компактен и целиком лежит в U_α - карте M с координатами $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ и ориентацией ε_α. Тогда в карте U_α эта форма имеет вид $f(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n) dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^n$. В этом случае интегралом ω по M называют

$$\int\limits_M \omega = \varepsilon_\alpha \int\!\!\cdots\!\!\int\limits_{U_\alpha} f(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n) dx_\alpha^1 \dots dx_\alpha^n$$

Определение. Пусть X - метрическое пространство, $\{U_\alpha\}$ - его конечное открытое покрытие. Тогда существуют такие функции $\varphi_\alpha : X \mapsto \mathbb{R}$, что

1. $\forall \alpha\ \forall x \in X\ 0 \leqslant \varphi_\alpha(x) \leqslant 1$
2. $\mathbf{supp}\ \varphi_\alpha \subseteq U_\alpha$
3. $\forall x \in X\ \sum\limits_\alpha \varphi_\alpha(x) = 1$

Система функций $\{\varphi_\alpha\}$, удовлетворяющих этим условиям, называется разбиением единицы, подчиненным покрытию $\{U_\alpha\}$.

Определение. Пусть M - n-мерное ориентированное гладкое многообразие с краем, ω - внешняя дифференциальная n-форма с компактным носителем, $\{\varphi_\alpha\}$ - подчиненное атласу $M\ \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$ разбиение единицы. Тогда интегралом ω по M называют

$$\int\limits_M \omega = \sum \int\limits_{U_\alpha} \varphi_\alpha \omega$$

Формула Стокса

Пусть M - n-мерное ориентированное гладкое многообразие с краем ∂M с согласованной ориентацией, ω - внешняя дифференциальная форма степени $n-1$ с компактным носителем. Тогда выполняется

$$(-1)^n \int\limits_M d\omega = \int\limits_{\partial M} \omega$$

10 Риманова метрика. Поднятие и опускание индекса. Форма объёма, согласованная с метрикой (формулировка).

Определение. Говорят, что на гладком многообразии M задана риманова метрика, если $\forall P \in M$ в $T_P(M)$ задано положительно определенное симметричное скалярное произведение, причем в каждой локальной системе координат (x_α) его матрица является гладкой функцией от (x_α).

Замечание: из требований симметричности и положительной определенности следует невырожденность матрицы скалярного произведения. Также достаточно требовать гладкости в одной системе координат, в остальных свойство также выполнится, поскольку M - гладкое многообразие.

Пусть $T \in \mathrm{Tens}^p_q(V)$, g — риманова метрика на V, что по определению означает, что $g \in \mathrm{Tens}^0_2(V)$, g - симметричный тензор. Тогда $R \in \mathrm{Tens}^{p-1}_{q+1}(V)$, где $R^{i_1,\dots,i_{p-1}}_{j_1,\dots,j_q,s} = g_{s,i_p} T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}$. Эта операция называется опусканием индекса.

Определение. Тензор $h \in \mathrm{Tens}^2_0(V)$ назовем обратным к g, если $h^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$.

Тогда матрица h - обратная к матрице g. $R \in \mathrm{Tens}^{p+1}_{q-1}(V)$, где $R^{i_1,\dots,i_p,s}_{j_1,\dots,j_{q-1}} = h^{s,j_q} T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}$. Эта операция называется поднятием индекса.

Определение. Пусть M — гладкое многообразие, ω — n-форма, причем $\forall x \in M$ $\omega\ |_x \neq 0$. Тогда ω называется формой объема на M.

Утверждение. *Если M — n-мерное ориентируемое риманово многообразие, $\{e_i\}_{i=1}^n$ — ортонормированный положительно ориентированный базис касательного пространства, то такая форма объема ω, что $\omega(e_1, \dots, e_n) = 1$, существует и единственна. Она называется формой объема, согласованной с (римановой) метрикой на M.*

11 Кривизна и кручение кривых в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$, репер Френе (в том числе система дифференциальных уравнений для него).

Определение. Пусть s — длина дуги кривой γ от некоторой фиксированой точки. Тогда s называется натуральным параметром, а уравнение γ $r(s) = (x(s), y(s))$ называется натуральной парамертизацией.

Утверждение. *В натуральной параметризации* $|\frac{dr}{ds}| = 1$.

Определение. Пусть кривая γ параметризована наутральным параметром s. Тогда ее кривизной в точке s называется $k(s) = |\frac{d^2r(s)}{ds^2}|$. Обратная величина называется радиусом крвиизны в точке s и обозначается $R(s) = \frac{1}{k(s)}$.

Утверждение. *Пусть кривая γ параметризована параметром t, не обязательно натуральным. Тогда $k(t) = \frac{|[\dot{r} \times \ddot{r}]|}{|\dot{r}|^3}$, где $[a \times b] = a_x b_y - a_y b_x$ - псевдовекторное произведение.*

Определение. Пусть кривая задана в натуральной параметризации. Положим $v(s) = \frac{dr}{ds}$, $n(s) = \frac{d^2r/ds^2}{|d^2r/ds^2|}$. $(v(s), n(s))$ называютмя репером Френе в данной точке.

Утверждение. $v(s) \perp n(s)$.

Утверждение. ***(Формулы Френе)***
$\frac{dv(s)}{ds} = k(s)n(s)$, $\frac{dn(s)}{ds} = -k(s)v(s)$.

Определение. Пусть γ — гладкая кривая в $\mathbb{R}^n$, $r(s), s \in [a, b]$ — ее натуральная параметризация, причем $\forall s \in [a, b]$ $\frac{dr}{ds}, \dots, \frac{d^n r}{ds^n}$ линейно независимы. Построим в кажой точке s ортонормированный репер следующим образом. Положим $\tau_1 = \frac{dr}{ds}$. τ_k выберем как произвольный единичный вектор, ортогональный пространству, базисом которого являются $\tau_1, \dots, \tau_{k-1}$. Получившийся репер $(\tau_1, \dots, \tau_n)$ называется репером Френе.

Утверждение. ***(Формулы Френе)*** *Пусть $(\tau_1, \dots, \tau_n)$ - репер Френе. Тогда $\exists k_2(s), \dots, k_n(s)$ - гладкие функции такие, что:*

$$\begin{cases} \frac{d\tau_1(s)}{ds} = k_2(s)\tau_2(s) \\ \frac{d\tau_2(s)}{ds} = -k_2(s)\tau_1(s) + k_3(s)\tau_3(s) \\ \dots \\ \frac{d\tau_{n-1}(s)}{ds} = -k_{n-1}(s)\tau_{n-2}(s) + k_n(s)\tau_n(s) \\ \frac{db(s)}{ds} = -k_n(s)\tau_{n-1}(s). \end{cases}$$

Определение. В $\mathbb{R}^3$ репер Френе имеет вид (v, n, b), где $v(s) = \frac{dr}{ds}$, $n(s) = \frac{d^2r/ds^2}{|d^2r/ds^2|}$, $b(s) = [v(s) \times n(s)]$. В этом случае $k_2(s)$ называется кривизной и обозначается $k(s)$, а $k_3(s)$ - кручением и обозначается $\varkappa(s)$.

Утверждение. *Для кривизны и кручения в произвольной параметризации справедливы формулы $k(t) = \frac{|[\dot{r} \times \ddot{r}]|}{|\dot{r}|^3}$, $\varkappa(t) = \frac{(\dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r})}{|[\dot{r} \times \ddot{r}]|^2}$.*

12 Первая и вторая квадратичные формы поверхности в $\mathbb{R}^n$, главные направления и главные кривизны. Гауссова и средняя кривизна.

Определение. Пусть $V \subseteq \mathbb{R}^n$, причем $dimV = n - 1$, т.е. V - гиперповерхность, заданная набором гладких функций $r(u^1, \dots, u^{n-1})$. Тогда первой квадратичной формой называется форма $ds^2 \mid_V = \sum\limits_{k,p=1}^{n-1} g_{kp}(u) du^k du^p$, где $g_{kp}(u) =< \frac{\partial r}{\partial u^k}, \frac{\partial r}{\partial u^p} >$. Она задает скалярное произведение на $T_P(V)$: $\forall a, b \in T_P(V)$ $< a, b >= g_{kp} a^k b^p$.

Определение. Пусть V — гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$, заданная набором гладких функций $r(u^1, \dots, u^{n-1})$. Пусть n — вектор нормали в точке P, т.е. единичный вектор, ортогональный поверхности, $a \in T_P(V)$ — произвольный касательный вектор. Определим $Q(a) =< \frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j} a^i a^j, n >$. Тогда второй квадратичной формой называется симметричная билинейная форма, определяемая выражением $\forall a, b \in T_P(V)$ $Q(a, b) = \frac{Q(a+b) - Q(a) - Q(b)}{2}$. В одних и тех же координатах матрицы этих квадратичной и билинейной форм совпадают: $(q_{ij}) = (< \frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j}, n >)$.

Определение. Пусть V — гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\forall P \in V$ существует ортонормированный базис $T_P(V)$ $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ такой, что $g(e_i, e_j) = \delta^i_j$, $Q(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \lambda_i, & i = j \end{cases}$. e_i называются главными направлениями, λ_i — главными кривизнами. $H(P) = \sum\limits_i \lambda_i(P)$ называется средней кривизной в точке P, $K(P) = \prod\limits_i \lambda_i(P)$ — гауссовой кривизной в точке P.