

Examen de Ecuatii Diferentiale – Varianta 2

Profesor:

Data:

Partea 1: Ecuatii de Ordinul I

Subiectul 1 (ED Exactă + Factor Integrant)

Se dă ecuația diferențială:

$$(2xy + y^2)dx + (x^2 + 2xy)dy = 0.$$

- (a) Verificați dacă ecuația este exactă. Dacă nu, determinați un factor integrant de forma $\mu(x)$.
- (b) Rezolvați ecuația folosind factorul integrant găsit.
- (c) Identificați soluția particulară care trece prin punctul $(1, 1)$.

Subiectul 2 (Riccati)

Rezolvați ecuația Riccati:

$$x' = x^2 - \frac{2}{t}x - \frac{1}{t^2}, \quad t > 0.$$

- (a) Demonstrați că $x_p(t) = \frac{1}{t}$ este o soluție particulară.
- (b) Folosiți substituția $x = x_p + \frac{1}{z}$ pentru a reduce ecuația la una liniară.
- (c) Determinați soluția generală.

Partea 2: Ecuații Liniare și Sisteme

Subiectul 3 (Ecuație Neomogenă cu Coeficienți Constanti)

Rezolvați ecuația:

$$x'' - 3x' + 2x = te^{2t}.$$

- (a) Determinați soluția generală a ecuației omogene asociate.
- (b) Aplicați metoda coeficienților nedeterminați pentru a găsi o soluție particulară.
- (c) Scrieți soluția generală a ecuației neomogene.

Subiectul 4 (Sistem Omogen cu 3 Necunoscute)

Rezolvați sistemul:

$$\begin{cases} x' = x + y - z, \\ y' = 2y + z, \\ z' = 2z. \end{cases}$$

- (a) Scrieți matricea sistemului și valorile proprii asociate.
- (b) Determinați vectorii proprii și soluția generală.
- (c) Discutați stabilitatea soluției nule.

Partea 3: Teorema de Existență și Unicitate

Subiectul 5 (Picard)

Fie problema Cauchy:

$$x' = \sqrt{x} + t, \quad x(0) = 0.$$

- (a) Verificați dacă funcția $f(t, x) = \sqrt{x} + t$ este Lipschitz continuă în x pe $[0, a] \times [0, b]$.
- (b) Calculați primele trei iterații Picard (x_0, x_1, x_2) .
- (c) Există soluții nesingulare? Justificați.

Instrucțiuni

- Timp de lucru: 2 ore.
- Punctaj: 20 puncte (4 puncte/subiect).
- Se acordă punctaje parțiale pentru pași intermediari.