

Examen de Ecuații Diferențiale

Profesor:

Data:

Partea 1: Ecuații de Ordinul I

Subiectul 1 (EVS + Soluții Staționare)

Rezolvați următoarea ecuație diferențială cu variabile separabile și analizați soluțiile staționare:

$$\frac{dx}{dt} = t^2 \cdot (x - 1)^3, \quad x(0) = 2.$$

- (a) Separați variabilele și integrați pentru a găsi soluția generală.
- (b) Identificați soluțiile staționare și discutați stabilitatea lor.
- (c) Determinați soluția particulară care satisface condiția inițială dată.

Subiectul 2 (EB + EL)

Rezolvați ecuația diferențială Bernoulli:

$$x' + 2tx = tx^2.$$

- (a) Aduceți ecuația la forma standard Bernoulli și identificați coeficienții.
- (b) Aplicați substituția adecvată pentru a o transforma într-o ecuație liniară.
- (c) Rezolvați ecuația liniară obținută și găsiți soluția generală pentru $x(t)$.

Partea 2: Ecuatii Liniare de Ordin Superior și Sisteme

Subiectul 3 (Ecuatii Liniare Omogene)

Rezolvați ecuația diferențială liniară omogenă de ordinul 2:

$$x'' - 4x' + 4x = 0.$$

- (a) Scrieți ecuația caracteristică și determinați rădăcinile ei.
- (b) Clasificați natura rădăcinilor (reale distincte, complexe, multiple).
- (c) Scrieți soluția generală și analizați comportamentul ei asimptotic ($t \rightarrow \infty$).

Subiectul 4 (Sisteme de Ecuatii Liniare)

Rezolvați sistemul de ecuații diferențiale liniare neomogen:

$$\begin{cases} x' = 3x - y + e^t, \\ y' = x + y + 2e^t. \end{cases}$$

- (a) Scrieți sistemul în formă matricială și găsiți soluția sistemului omogen asociat.
- (b) Determinați o soluție particulară folosind metoda coeficienților nedeterminați.
- (c) Obțineți soluția generală a sistemului neomogen.

Partea 3: Teorema de Existență și Unicitate

Subiectul 5 (Metoda Picard)

Fie problema Cauchy:

$$x' = t + x^2, \quad x(0) = 1.$$

- (a) Verificați dacă funcția $f(t, x) = t + x^2$ este Lipschitz continuă în raport cu x pe un interval ce conține $t = 0$.

- (b) Aplicați metoda iterațiilor lui Picard pentru a calcula primele două aproximații $x_1(t)$ și $x_2(t)$.
- (c) Discutați convergența șirului $\{x_n(t)\}$ către soluția exactă.

Instrucțiuni

- Timp de lucru: 2 ore.
- Toate calculele și justificările trebuie prezentate clar.
- Punctaj: 20 puncte (4 puncte per subiect).