

Examen Ecuații Diferențiale

Universitatea X, Facultatea de Matematică
Semestrul I, Anul 2025

Instrucțiuni: Rezolvarea fiecărui subiect este obligatorie. Se acordă câte 2 puncte pentru fiecare subiect (total 10 puncte). Explicați clar toți pașii. Succes!

Partea I: Ecuații diferențiale de ordinul I

Subiectul 1 (Ecuații cu variabile separabile și factor integrator)

Rezolvați următoarea ecuație diferențială folosind metoda variabilelor separabile și verificați soluția utilizând factorul integrator:

$$x' = \frac{t^2}{x}, \quad x(1) = 1.$$

Subiectul 2 (Ecuații Bernoulli)

Rezolvați următoarea ecuație diferențială de tip Bernoulli:

$$x' = -2tx + 4tx^3, \quad x(0) = 1.$$

Partea a II-a: Ecuații liniare și sisteme de ecuații liniare

Subiectul 3 (Ecuație liniară omogenă de ordin superior)

Rezolvați următoarea ecuație diferențială omogenă cu coeficienți constanți:

$$x'' - 3x' + 2x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

Subiectul 4 (Sistem de ecuații liniare neomogene cu 2 necunoscute)

Rezolvați următorul sistem de ecuații diferențiale neomogene folosind metoda variației constantelor:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + e^t, \\ x_2' = -x_1 + x_2 + t, \\ x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1. \end{cases}$$

Partea a III-a: Teorema de existență și unicitate

Subiectul 5 (Metoda iterațiilor lui Picard)

Folosind metoda iterațiilor lui Picard, găsiți primele trei iterații $(x_0(t), x_1(t), x_2(t))$ pentru problema Cauchy:

$$x' = t + x^2, \quad x(0) = 0.$$