Seminar 9

Ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți

Să se determine soluțiile generale ale următoarelor ecuații diferențiale:

(a) $x^{(3)} + x' = t + 1$

Soluție Pasul 1: Determinăm soluția ecuației omogene

$x^{(3)} + x = 0$; ecuația caracteristică este

$r^3 + 1 = 0 \iff (r+1)(r^2 - r + 1) = 0 \Rightarrow r_1 = -1$

$\Delta = -3 \Rightarrow r_{2,3} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{Re} r_2 = \frac{1}{2}$

$\operatorname{Im} r_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \left\{ e^{-t},\ e^{\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t,\ e^{\frac{t}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right\}$

bază în spațiul soluțiilor ec. omogene

$x_0(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{t/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + c_3 e^{t/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$

Pasul 2 $f(t) = t + 1$, $x_p(t) = at + b$ (0 nu e rădăcină a ecuației carac.)

Pentru a determina a, b, înlocuim x_p în ec.

$$\left.\begin{array}{l} x_p^{(3)} + x_p = t+1 \\ x_p^{(3)} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{a}}\,t + \underline{b} = \underline{\underline{1}}\cdot t + \underline{1}$$

$$\Downarrow$$

$$a = b = 1 \Rightarrow x_p(t) = t+1$$

Soluția generală a ecuației ⓐ este

$$x(t) = x_0(t) + x_p(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{t/2} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + $$
$$+ C_3 e^{t/2} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t + t + 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

ⓑ $x^{(3)} - 3x'' + 3x' - x = t + e^t$

Soluție:

Pasul 1 Rezolvăm ecuația omogenă:

$$x^{(3)} - 3x'' + 3x' - x = 0$$
$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$$
$$(r-1)^3 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = r_3 = 1$$

Obțin mulțimea sol. ec. omogene $\{e^t, \underline{\underline{t}}\,e^t, t^2 e^t\}$ (1 are $\underline{\underline{\ }}$ multipl. 3)

$\Rightarrow \quad x_o(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t$

Pasul 2 Calculăm o soluție particulară

$f(t) = t + e^t$

$x_p(t) = \underbrace{at+b}_{} + c\,t^3 e^t$ (1)

(0 nu e răd. a ecuației caracteristice)

(1 e rădăcină cu multipl. 3 a ec. caracteristice!)

Pt. a calcula a, b, c înlocuim x_p în ecuația (2)

$x_p^{(3)} - 3x_p'' + 3x_p' - x_p = 0$

$x_p' = a + 3ct^2e^t + ct^3e^t$

$x_p'' = ce^t(3t^2+t^3) = ce^t(3t^2+t^3)$

$+ ce^t(6t+3t^2)$

$= ce^t(t^3+6t^2+6t)$

$x_p^{(3)} = ce^t(t^3+6t^2+6t)$

$+ ce^t(3t^2+12t+6)$

$= ce^t(t^3+9t^2+18t+6)$

$ce^t(\cancel{t^3}+\cancel{9t^2}+\cancel{18t}+6) - 3ce^t(\cancel{t^3}+\cancel{6t^2}+\cancel{6t})$

$+3ce^t(\cancel{t^3}+\cancel{3t^2}) - at - b - \cancel{ct^3e^t}$

$= t + e^t$

$b = 0, \quad a = -1$

$6ce^t = e^t \Rightarrow 6c = 1 \Rightarrow c = 1/6$

$x_p(t) \underset{(1)}{=} -t + \frac{t^3e^t}{6}$

$\Rightarrow x(t) = x_o(t) + x_p(t) = c_1e^t + c_2te^t + c_3t^2e^t - t + \frac{t^3e^t}{6}$

(c) $x^{(4)} + 8x'' + 16x = \sin t$

Soluție: Pasul 1. Ecuația omogenă

$x^{(4)} + 8x'' + 16x = 0.$

$r^4 + 8r^2 + 16 = 0$ $\Big\}$ $\Rightarrow$

$s = r^2$

$s^2 + 8s + 16 = 0 \Leftrightarrow (s+4)^2 \Rightarrow s_1 = -4 = s_2$

$r^2 = -4 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 2i$ $\qquad r_1 = 2i$

$r_{3,4} = \pm 2i$

$\operatorname{Re} r_1 = 0$
$\operatorname{Im} r_1 = 2$ $\Rightarrow$ o bază în mulțimea soluțiilor ec. omogene este

$\{\cos 2t, \sin 2t, t\cos 2t, t\sin 2t\}$

$\Rightarrow x_0(t) = c_1\cos 2t + c_2\sin 2t + c_3 t\cos 2t + c_4 t\sin 2t$ $\quad \forall t \in \mathbb{R}$

Pasul 2: Calculăm o soluție particulară; $f(t) = \sin t$

$x_p(t) = a\sin t + b\cos t$; Pentru a și b înlocuim

x_p în ecuația (c) și obținem
$$x_p^{(4)} + 8x_p'' + 16x_p = \sin t$$

$$a\sin t + b\cos t - 8a\sin t - 8b\cos t$$
$$+ 16a\sin t + 16b\cos t = \sin t$$

$x_p = a\sin t + b\cos t$

$x_p^{(4)} = a\sin t + b\cos t$

$x_p'' = -a\sin t - b\cos t$

$$\left.\begin{array}{l} 9a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{9} \\ b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_p(t) = \frac{\sin t}{9}$$

Soluția generală: $x(t) = x_o(t) + x_p(t)$

$$= C_1\cos 2t + C_2\sin 2t + C_1 t\cos 2t + C_2 t\sin 2t + \frac{\sin t}{9} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(d) $x^{(3)} + x' = \frac{\sin t}{\cos^2 t}$

$f(t) = \frac{\sin t}{\cos^2 t}$

Soluție

Pasul 1. Ecuația omogenă

$x^{(3)} + x' = 0$; ecuația caracteristică $r^3 + r = 0$

$r_1 = 0$, $r_{2,3} = \pm i$, $r_2 = i$, $\operatorname{Re} r_2 = 0$, $\operatorname{Im} r_2 = 1$ / $r(r^2+1) = 0$

O bază în mulțimea soluțiilor ecuației omogene este:

$\{1, \cos t, \sin t\}$.

$x_o(t) = C_1 + C_2 \cos t + C_3 \sin t$

metoda variației constantelor

Pasul 2 Căutăm $x_p(t) = C_1(t) + C_2(t) \cos t + C_3(t) \sin t$

Știm că C_1', C_2', C_3' verifică sistemul.

$$\begin{cases} C_1' \cdot 1 + C_2' \sin t + C_3' \cos t = 0 \\ C_1' \cdot 1' + C_2' (\sin t)' + C_3' (\cos t)' = 0 \\ C_1' \cdot 1'' + C_2' (\sin t)'' + C_3' (\cos t)'' = \dfrac{\sin t}{\cos^2 t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1' + C_2' \sin t + C_3' \cos t = 0 \\ C_2' \cos t - C_3' \sin t = 0 \quad / \sin t \quad / \cos t \\ -C_2' \sin t - C_3' \cos t = \dfrac{\sin t}{\cos^2 t} \quad / \cos t \quad / -\sin t \end{cases}$$

(2) (+) (3)

$$-C_3' (\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{=1}) = \frac{\sin t}{\cos t} \Rightarrow C_3' = -\frac{\sin t}{\cos t}$$

$$C_2' (\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{=1}) = -\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} \Rightarrow C_2' = -\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}$$

Ec. (2) (+) (3) $\Rightarrow C_1' = \dfrac{\sin t}{\cos^2 t} \Rightarrow C_1(t) = \displaystyle\int \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt = \int \frac{-(\cos t)'}{\cos^2 t}\,dt$

$$= \frac{1}{\cos t} + \underbrace{C}_{=0} \Rightarrow C_1(t) = \frac{1}{\cos t}$$

$$c_2' = -\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{-1+\cos^2 t}{\cos^2 t}$$

$$= 1 - \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$\Rightarrow c_2(t) = \int \left(1 - \frac{1}{\cos^2 t}\right) dt = t - tg\, t + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{c}}$$

$$c_2(t) = t - tg\, t$$

$$c_3'(t) = -\frac{\sin t}{\cos t} \Rightarrow c_3(t) = -\int \frac{\sin t}{\cos t} dt \Rightarrow c_3(t) = \ln|\cos t|$$

Avem $x_p(t) = \frac{1}{\cos t} + (t - tg\, t)\cos t + \ln|\cos t| \sin t$.

Soluția generală a ec. (d) este

$$x(t) = x_0(t) + x_p(t) = c_1 + c_2 \cos t + c_3 \sin t + \frac{1}{\cos t} + (t - tg\, t)\cos t) + \ln|\cos t| \cdot \sin t$$

$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.