

Examen Ecuații Diferențiale (Sesiune suplimentară)

Universitatea X, Facultatea de Matematică
Semestrul I, Anul 2025

Instrucțiuni: Rezolvarea fiecărui subiect este obligatorie. Fiecare subiect valorează 2 puncte (total 10 puncte). Explicați clar toți pașii și metodele utilizate. Succes!

Partea I: Ecuații diferențiale de ordinul I

Subiectul 1 (Ecuații liniare și factor integrator)

Rezolvați următoarea ecuație diferențială liniară folosind metoda factorului integrator:

$$x' + \frac{2}{t}x = t^2, \quad x(1) = 2.$$

Subiectul 2 (Ecuații exacte)

Verificați dacă următoarea ecuație diferențială este exactă și, dacă da, găsiți soluția generală:

$$(2xt + t^2)dt + (x^2 + 2t)dx = 0.$$

Partea a II-a: Ecuații liniare și sisteme de ecuații liniare

Subiectul 3 (Ecuație liniară neomogenă de ordin superior)

Rezolvați următoarea ecuație diferențială neomogenă cu coeficienți constanți folosind metoda coeficienților nedeterminați:

$$x'' + 4x = \sin(2t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

Subiectul 4 (Sistem de ecuații liniare omogene cu 3 necunoscute)

Rezolvați următorul sistem de ecuații diferențiale omogene:

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 + x_3, \\ x_2' = -x_1 + 3x_2 - x_3, \\ x_3' = x_1 - x_2 + 2x_3. \end{cases}$$

Partea a III-a: Teorema de existență și unicitate

Subiectul 5 (Metoda iterațiilor lui Picard)

Folosind metoda iterațiilor lui Picard, găsiți primele trei iterații $(x_0(t), x_1(t), x_2(t))$ pentru problema Cauchy:

$$x' = 1 + tx, \quad x(0) = 1.$$