Seminar 7.

Ecuații diferențiale liniare, de ordinul doi cu coeficienți constanți.

$x' = p(t)x + q(t)$

A. Cazul omogen:

$(EL)_0$: $x''(t) + a_1 \cdot x'(t) + a_2 \cdot x(t) = 0$ ↳ omogena

Considerăm ecuația caracteristică asociată ecuației $(EL)_0$ (este o ecuație algebrică în r)

(1) $r^2 + a_1 r + a_2 \cdot 1 = 0$

Determinăm soluțiile ecuației (1):

Cazul 1. $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$ soluțiile ec. (1)

Soluția generală a $(EL)_0$ este

$$x(t) = C_1 \cdot e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, C_1, C_2$$

constante reale.

(Dacă vom căuta soluții particulare ale $(EL)_0$ de forma $\alpha \in \mathbb{R}: t \to e^{\alpha t} \overset{(EL)_0}{\Longrightarrow} \alpha^2 \cancel{e^{\alpha t}} + a_1 \alpha \cancel{e^{\alpha t}} + a_2 \cancel{e^{\alpha t}} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + a_1 \alpha + a_2 = 0$)

Cazul 2. Ecuația (1) are rădăcina $r = r_1 = r_2$

Soluția generală a $(EL)_0$ este

$$x(t) = C_1 e^{rt} + C_2 t e^{rt} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Cazul 3 Ecuația (1) are rădăcini complexe conjugate

$r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

$$= C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)t}$$

$$= C_1 e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$$

$$+ C_2 e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t)$$

$\not\in \mathbb{R}$

Nu utilizăm scrierea deoarece $x(t) \notin \mathbb{R}$

$e^{u+iv} := e^u(\cos v + i\sin v)$

$u, v \in \mathbb{R}$ formula lui Euler

$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = u + iv$

$\mathrm{Re}\, z = u$, $\mathrm{Im}\, z = v$

Soluția în acest caz este $x(t) = C_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + C_2 e^{\alpha t}\sin\beta t$.

Exemple: să se determine soluțiile ale următoarelor ec. diferențiale:

a) $x'' + 2x' + 1 = 0$; b) $x'' + x = 0$;

c) $x'' - 4x' = 0$; d) $x'' + 4x = 0$.

Soluție a) $x'' + 2x' + 1 = 0$; ecuația caracteristică este

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \iff (r+1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad r_1 = r_2 = -1$$

$\Rightarrow$ soluția generală a ecuației a) este

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} \quad (\text{Cazul } 2) \quad (2)$$

Dacă dorim să determinăm soluția care verifică condițiile inițiale $\begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$ atunci din (2) avem

$t = 0$

$0 = x(0) = C_1 + C_2 \cdot 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$1 = x'(0) = (C_2 e^{t} + C_2 t e^{-t})(0) = C_2$

$\Rightarrow x(t) = t e^{-t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

(b) $x'' + x = 0$; ecuația caracteristică

$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r^2 = -1 \Rightarrow r_1 = i$ și $r_2 = -i$

$$\begin{cases} \operatorname{Re} r_1 = 0 \\ \operatorname{Im} r_1 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(t) = C_1 e^{0t} \sin 1 \cdot t + C_2 e^{0t} \cos 1 \cdot t$$

$$= C_1 \sin t + C_2 \cos t \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (\text{Cazul } 3)$$

soluția generală

(c) $x'' - 4x' = 0$; ecuația caracteristică este

$$\left.\begin{aligned} r^2 - 4r &= 0 \\ r(r-4) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow r_1 = 4, \; r_2 = 0$$

(Cazul 1)

$$\Rightarrow x(t) = C_1 e^{4t} + C_2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

(d) $x'' + 4x = 0$; ecuația caracteristică

$r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r^2 = -4 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 2i$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Re} r_1 &= 0 \\ \operatorname{Im} r_1 &= 2 \end{aligned}\right| \Rightarrow x(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Referat 2 – a doua variantă.

De ales două din cele 4 metode din documentul PDF → moodle (Metode_RK) și pentru o problemă Cauchy aleasă de voi aproximați soluția folosind cele două metode! De preferat și grafic!