Calcul numeric

Elena PELICAN

Universitatea Ovidius Constanţa
Facultatea de Matematică şi Informatică

email: epelican@univ-ovidius.ro

- Curs (2h/săpt)

  Conf.Univ.Dr. Elena Pelican

  email: epelican@univ-ovidius.ro

  Canalul aferent disciplinei de pe MS Teams

- Laborator (2h/săpt)

  Specialist IT George Prodan

  email: george.prodan@365.univ-ovidius.ro

  Canalul aferent disciplinei de pe MS Teams

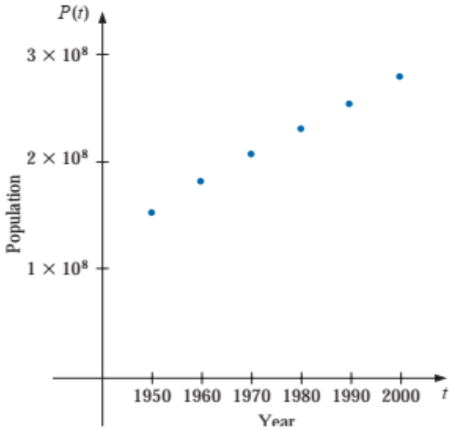
Astăzi:

- **Polinoame de aproximare şi interpolare**
    - Polinoame de aproximare Bernstein
    - Polinoame de interpolare Lagrange
    - Polinoame spline cubice

Exemplu

Recensământul populaţie în SUA se realizează o dată la 10 ani. Au fost înregistrate valorile din tabelul de mai jos.
Problemă: Folosind aceste date, se pot face predicţii cât mai bune despre populaţia din 1975? Sau cea din 2030?

Year	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Population (in thousands)	151,326	179,323	203,302	226,542	249,633	281,422


P(t)
3 × 10^8
2 × 10^8
1 × 10^8
Population
1950
1960
1970
1980
1990
2000
t
Year

Se vor analiza în cadrul acestui capitol următoarele două probleme importante:
Problema 1. Dată fiind o funcţie $f : [a, b] \to I\!R$ cu anumite proprietăţi, să se determine un polinom $P \in I\!R[X]$ astfel încât

$$\|f - P\| \leq \varepsilon, \tag{1}$$

unde $\| \cdot \|$ este o normă pe spaţiul vectorial al funcţiilor $f : [a, b] \to I\!R$, iar ε e o precizie dată.
Problema 2. Dată fiind o funcţie $f : [a, b] \to I\!R$, diviziunea $\triangle : (a = x_1 < x_2 < ... < x_n = b)$, să se determine o funcţie $\varphi : [a, b] \to I\!R$ polinomială sau polinomială pe bucăţi astfel încât

$$f(x_i) = \varphi(x_i), \ i = 1, ..., n \tag{2}$$

şi

$$\|f - \varphi\| \leq \varepsilon. \tag{3}$$

Problema 1 se referă la **aproximarea unei funcţii** prin funcţii polinomiale, iar cea de-a doua la **interpolarea şi aproximarea unor funcţii** prin polinoame sau funcţii ce sunt polinomiale pe intervale. Se folosesc funcţii polinomiale sau polinomiale pe bucăţi pentru că valoarea funcţiei într-un punct se poate calcula foarte simplu (vezi Capitolul 2, Schema lui Horner). În cazul Problemei 2, funcţia f este de cele mai multe ori cunoscută doar în punctele diviziunii $\triangle$.

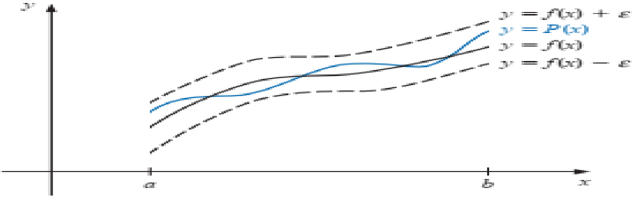


Figura: Polinom de aproximare

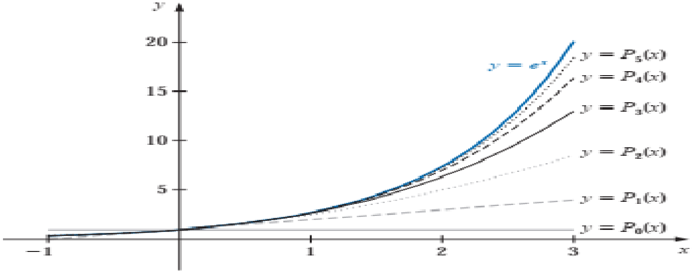


Figura: Polinoamele Taylor nu au proprietatea de aproximare

Polinoame de aproximare Bernstein

Theorem 1

Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, continuă şi $(B_n)_{n\geq 1}$ un şir de funcţii polinomiale definite prin

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \ \forall\ x \in [0,1]. \tag{4}$$

Atunci şirul $(B_n)_{n\geq 1}$ converge uniform la f pe $[0,1]$.

Polinomul $B_n(x)$ se numeşte **polinom Bernstein** de ordin n asociat funcţiei f pe intervalul $[0,1]$.

Exemplu

1. Construiţi polinomul Bernstein de ordin 3 şi 4 pentru funcţia $f(x) = x$ - cu ajutorul tabletei grafice.
Calculul combinărilor (în program) nu se realizează folosind factorialul! Este ineficient pt nre mai mari ca 10, de ex.
2. Cum interpretăm rezultatul din teorema anterioară?
3. La laborator veţi realiza un movie (folosind, de exemplu, *animation* din librăria *ffmeg*) care pentru o funcţie dată pe un interval arbitrar va reda pe câte un frame un polinom Bernstein de grad 1, 2 , 3 etc pentru a vizualiza proprietatea de aproximare. 4. Pt 3., cum se extindem rezultatul de la $[0, 1]$ la $[a, b]$? - cu ajutorul tabletei grafice (generalizare acasă la cazul 2D - ca in cazul editoarelor grafice din MS Word, MS Powerpoint etc).

Extinderea aproximării date de Teorema 1 la un interval arbitrar $[a, b]$ este prezentată în rezultatul următor.

Theorem 2

Fie $f : [a, b] \to I\!R$ continuă. Atunci există $(P_n)_{n \geq 1}$ un şir de polinoame cu coeficienţi reali astfel încât $\|f - P_n\|_\infty \longrightarrow 0$, $n \to \infty$.

Demonstraţie. Fie $(B_n)_{n \geq 1}$ polinoamele Bernstein din Teorema 1 asociate funcţiei $F : [0, 1] \to I\!R$, $F(t) = f(a + t(b - a))$ şi

$$P_n(x) = B_n\left(\frac{x - a}{b - a}\right), \ x \in [a, b].$$

Folosind Teorema 1 obţinem succesiv

$$\|f - B_n\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} | f(x) - P_n(x) | = \sup_{t \in [0,1]} | F(t) - B_n(t) | \longrightarrow 0, \ n \to \infty$$

ceea ce încheie demonstraţia teoremei.

Exemplu

Polinomul de tip Bernstein asociat lui $f : [5,7] \to I\!R,\ f(x) = x^2$ este

$$P_n : [5,7] \to I\!R \text{ cu } P_n(x) = B_n\left(\frac{x-5}{2}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} F\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k \left(\frac{x-5}{2}\right)^k \left(1 - \frac{x-5}{2}\right)^{n-k} =$$

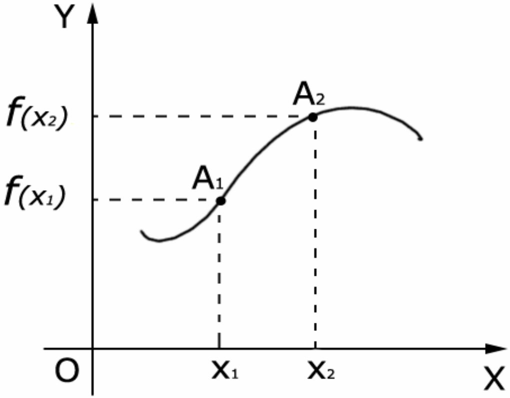
$$= \sum_{k=0}^{n} \left(5 + 2\frac{k}{n}\right)^2 C_n^k \left(\frac{x-5}{2}\right)^k \left(1 - \frac{x-5}{2}\right)^{n-k},$$

unde
$F : [0,1] \to I\!R,\ F(x) = f(5+2x) = (5+2x)^2$, iar
$B_n : [0,1] \to I\!R,\ B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} F\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$.

Teorema 2 poate fi extinsă în modul următor: dacă $f:[a,b]\rightarrow I\!R, f\in C^k\left([a,b]\right)$, atunci $\exists\ \left(P_n\right)_{n\geq 1}$ un şir de polinoame astfel încât $\|f^{(i)}-P_n^{(i)}\|_\infty\rightarrow 0$, pentru $\forall\ i=0,...,k$.

1. Cconvergenţa şirului $(B_n)_{n\geq 1}$ este foarte lentă, ceea ce reprezintă un dezavantaj pentru aproximarea cu polinoame Bernstein. În plus, nu avem posibilitatea evaluării a priori a diferenţei $\mid f - B_n \mid$. Dar, avantajul metodei constă în faptul că $\forall\ x \in [a, b],\ B_n(x)$ este o combinaţie convexă a valorilor $f\left(\frac{k}{n}\right), k = 0, ..., n$, proprietate ce păstrează "alura" (shape) funcţiei f (adică intervalele de convexitate şi concavitate).
2. Cum $B_n\left(\frac{k}{n}\right) \neq f\left(\frac{k}{n}\right)$, rezultă că polinomul Bernstein nu are proprietatea de interpolare (2), ci doar pe cea de aproximare dată de Teorema 1.

În această secţiune ne vom referi la Problema 2. Astfel, fiind date valorile lui f în n puncte distincte x_i, $i = 1, ..., n$, se pune problema aproximării printr-un polinom al cărui grafic să "treacă" prin punctele $A_i\left(x_i, f\left(x_i\right)\right), i = 1, ..., n$. Următorul rezultat ne asigură că există un astfel de polinom.



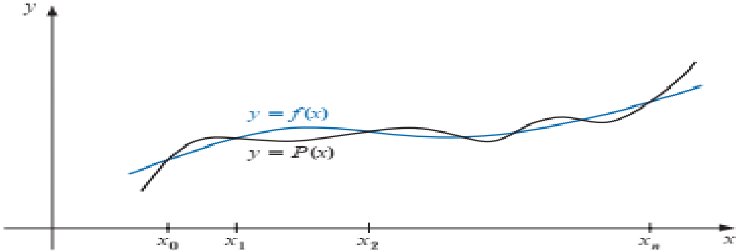
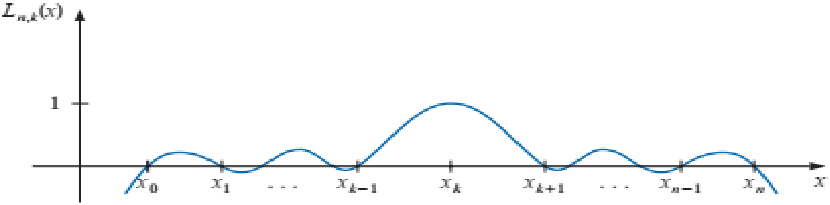


Figura: Polinom de interpolare


$L_{n,k}(x)$
1
x_0
x_1
. . .
x_{k-1}
x_k
x_{k+1}
. . .
x_{n-1}
x_n
x

Theorem 3

Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_1, ..., x_n \in A$ puncte distincte. Atunci există şi este unic determinat polinomul $P \in \mathbb{R}[X]$ de grad cel mult $n-1$ astfel încât

$$f(x_i) = P(x_i), \quad \forall \quad i = 1, ..., n. \tag{5}$$

Polinomul P poate fi reprezentat sub forma

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} f(x_i) \prod_{i=1}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}, x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Definition 4

Polinomul

$$L_n\left(f;x\right)=\sum_{j=1}^{n}f\left(x_j\right)L_{n,j}\left(x\right). \tag{7}$$

se numeşte **polinomul de interpolare al lui Lagrange** asociat funcţiei f şi punctelor x_i.

Fie $\omega : [a,b] \to I\!R$ polinomul unitar de grad n definit de dat de

$$\omega(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_n) . \tag{8}$$

În punctele $x_i,\ i = 1, \ldots, n,\ \ L_n(f;x)$ are proprietatea de interpolare (2); în celelalte puncte $x \in [a,b]$ are loc următorul rezultat (ce asigură în anumite condiţii şi proprietatea de aproximare).

Theorem 5

Dacă $f \in C^n([a,b])$, *atunci* $\forall\ x \in [a,b],\ x \neq x_i$, *pentru* $\forall\ i = 1, ..., n$, *există* $\xi_x \in [a,b]$ *astfel încât*

$$f(x) - L_n(f;x) = \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!} \omega(x) . \tag{9}$$

Theorem 6

Are loc relaţia

$$\|f - L_n(f;\cdot)\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{4n} h^n. \tag{10}$$

Dacă $f \in C^\infty([a,b])$, $\|f^{(n)}\|_\infty \leq M$, $\forall\, n \geq 1$ şi $h < 1$ atunci din (10) rezultă că

$$\|f - L_n(f;\cdot)\|_\infty \to 0, \; n \to \infty$$

adică şirul polinoamelor Lagrange converge uniform la f, ceea ce înseamnă ca aceste polinoame au si proprietatea de aproximare.

Exemplu 1

Determinaţi polinomul Lagrange care trece prin punctele (2,4) şi (5,1) - cu ajutorul tabletei grafice.

Intuitiv, care este cel mai cunoscut polinom al cărui grafic trece prin două puncte date?

Exemplu 2

1. Determinaţi polinomul Lagrange care trece prin punctele (2,4), (3.9) şi (5,25) - cu ajutorul tabletei grafice.

2. Pentru nodurile 2, 5, 8 şi func ctia $f(x) = 1/x$, construiţi polinomul Lagrange asociat lui f. Folosind acest polinom, aproximaţi valoarea funcţiei pt $x = 10$. Comentaţi rezultatul obţinut.

Polinomul de interpolare este unic, dar poate fi definit în mai multe forme, nu doar în forma Lagrange (diferenţe divizate Newton, Neville, Hermite etc) - detalii în cursul în format electronic.

Un mare dezavantaj al aproximării cu polinoame Bernstein sau Lagrange este faptul că gradul polinomului creşte odată cu numărul de puncte din $[a, b]$. Acest lucru face ca valoarea polinomului într-un punct să se calculeze cu mult efort şi erori de calcul mari. Acest inconvenient poate fi eliminat prin utilizarea funcţiilor polinomiale pe bucăţi.

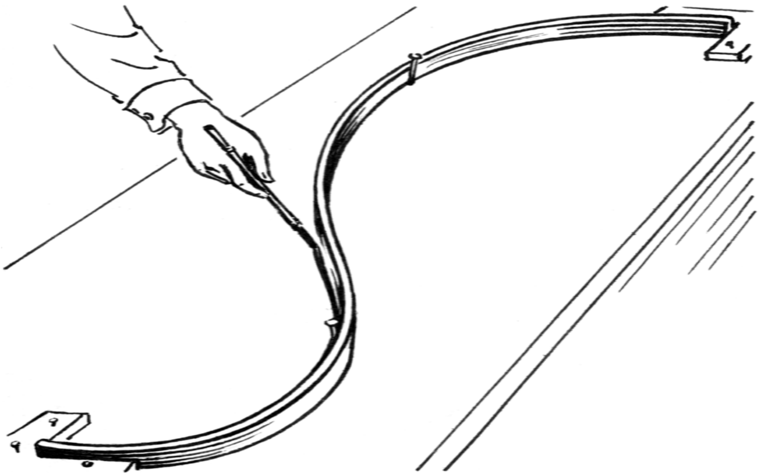


Figura: Obiectul spline (sursa Wikipedia)

Definition 7

Se numeşte **funcţie spline cubică** o funcţie g de clasă $C^2([a,b])$, polinomială de grad 3 pe bucăţi, cu următoarele propietăţi

$$g|_{[x_{i-1},x_i]}(x) = g_i(x) = \sum_{l=0}^{3} a_l^i (x_i - x)^l, \; i = 1, ..., n, \tag{11}$$

$$g(x_i) = f(x_i); \tag{12}$$

$$g'(x_i) = f'(x_i); \tag{13}$$

$$g''(x_i) = f''(x_i); \tag{14}$$

$$g''(a) = g''(b) = 0, \tag{15}$$

unde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ este o diviziune a intervalului $[a,b]$.

O funcţie g ce verifică relaţiile $(11)-(15)$ se numeşte **funcţie spline cubică liberă**, iar dacă în loc de relaţia (15) se impun condiţiile

$$g'(a) = f'(a), \quad g'(b) = f'(b), \tag{16}$$

g se numeşte **funcţie spline cubică fixată**.
Următorul rezultat asigură, în condiţiile date existenţa unei funcţii spline cubice (libere).

Theorem 8

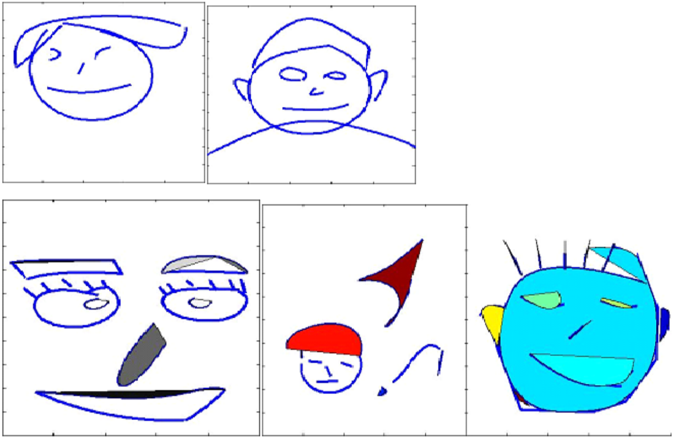
Există şi este unică o funcţie spline cubică liberă.

Un rezultat analog se demonstrează pentru existenţa unei funcţii spline cubice fixate. Pentru detalii şi extinderi ale noţiunii de funcţie spline se poate consulta Burden - Faires.

Ca temă de laborator, veţia avea să implementaţi aceşti algoritmi (pseudocodul va fi dat în temă) pentru a modela conturul unei răţuşte în zbor şi al unui căţeluş care stă culcat.

În grafica pe calculator se foloseste versiuni optimizate pentru aceste funcţii: B-spline, curbe Bezier, curbe Casteljau.

Curbe create cu functii de tip spline (spline cubice sau B-spline sau curbe Bezier)



La finalul acestui capitol veţi realiza un GUI care va permite utilizatorului să:

- aleagă dintr-un button group sau popup menu tipul de problemă pe care o doreşte să o rezolve: de aproximare sau de interpolare
- pentru polinoame Bernstein, se vor alege a, b, n, $f(x)$; se va construi polinomul respectiv şi se va calcula în punctul x dat de user şi valoarea $f(x)$ şi $B_n(x)$ şi apoi eroarea absolută şi cea relativă; se va rula filmul pentru $m = 1, 2, ..., n$.
- pentru polinoame Lagrange, se va interoga utilizatorul cum vor fi date setul de date: introduse de la tastatură în GUI, generate automat (de tip random), citite din fişier (.txt, .xlsx, .csv) sau alese cu mouse-ul pe ecran (folosind *plt.ginput*); apoi se calculează polinomul Lagrange de grad maximal posibil, se reprezintă etc
- (opţional) se pot crea sub-GUIs pentru polinoame sub forma Newton, Neville, Hermite, spline, B-spline, Bezier- sunt multe filme pe youtube pt formule şi construcţie, Casteljau etc.

Bibliografie

Este valabilă bibliografia din cursul (complet) în format electronic.
De bază este *NUMERICAL ANALYSIS, 9th Ed, R. Burden, J. Faires, Brooks Cole, 2011.*
EP - cărţile din 2005 şi 2006.