*Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования*

**Национальный исследовательский университет**

**ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ**

# КУРСОВАЯ РАБОТА

по теме:

«Статистический анализ результативности инвестиционных портфелей на независимой выборке»

*Выполнил: Богословский В.Д.*

*(студент группы МСМ211)*

*Руководитель: ст. пр. Курбангалеев М.З.*

Москва 2022

# Содержание

# Введение

Оценочный риск, то есть риск, возникающий при оценке параметров интересующей нас модели, является хорошо известной проблемой при эмпирическом моделировании портфеля. При заданном показателе результативности портфеля оценочный риск может привести к тому, что теоретически превосходящая портфельная стратегия будет уступать простым альтернативам, когда дело доходит до сравнения мер результативности, основанных на их выборочных аналогах. Наиболее ярким примером является выступающая в роли бенчмарка стратегия равновзвешенного ($1/N$) портфеля, для которой нулевая гипотеза о равной результативности на независимой выборке в сравнении с более сложной, основанной на теории стратегией часто не может быть отвергнута на обычных уровнях значимости [1].

В то время как литература, посвященная выбору портфеля, в значительной степени сосредоточена на робастности стратегий (например, [2], [3], [4]) в целях совершенствования эмпирической результативности, сравнительно мало внимания было уделено подробному вероятностному и статистическому анализу результативности с целью проверки того, значительно ли превосходит данная стратегия альтернативную. Насколько представляется известным, одной из немногих работ, в которой делается попытка пролить свет на различные тесты результативности портфеля, является статья [5]. Однако новизна конкретно моей работы продиктована реалиями российского фондового рынка, находящим такую особенность, как более высокая волотильность и низкая капитализация, а также более короткая история наблюдений по сравнению с тем же рынком Соединенных Штатов.

Подавляющее большинство исследований результативности портфеля основывается либо на тестах Jobson and Korkie [6] с их исправленной версией в соответствии с [7], либо на подходе бутстрапа [8]. Оба теста были первоначально разработаны для проверки различий в коэффициентах Шарпа доходности двух активов; однако они также могут быть применены для сравнения других мер результативности, таких как дисперсия [8] или гарантированный эквивалент (certainty equivalent), о котором мы и поговорим в данной работе. Certainty equivalent (в дальнейшем CE) - это гарантированная прибыль, которую инвестор готов принять вместо того, чтобы вложить средства в рискованный финансовый актив и получить возможно более высокую премию.

До сих пор мало что известно об основных причинах плохих результатов тестирования, когда теоретически превосходящие стратегии сравниваютя с бенчмарком в виде 1/N-стратегией. Поэтому мы внимательно рассмотрим стохастическую природу доходности портфеля на независимой выборки, где распределение доходности представляет собой нестандартное смешанное распределение, определяемое лежащим в основе истинным процессом доходности актива, а также распределением оцениваемых весов портфеля. Покажем, что нулевая гипотеза о нулевой разности результативностей двух альтернативных стратегий на независимой выборке совместно проверяет сумму трех разных компонент: (i) разность результативностей, вызванная лежащими в основе теоретическими стратегиями, (ii) разность результативностей, вызванная риском оценивания на тренировочной выборке, и (iii) разность результативностей в силу волатильности доходности портфеля на независимой выборке, которая является результатом дисперсии в оцениваемых весах портфеля. В частности, показывается, что наблюдаемые различия в результативности на независимой выборке обусловлены, главным образом, компонентой оценечного риска, что объясняет, как наивная и теоретически уступающая $1/N$-стратегия может легко превзойти подкрепленную теорией стратегию в силу высокого оценочного риска последней. В этой работе мы введем меру для оценки результативности портфеля и пронаблюдаем как математическое ожидание по этой мере результативности меняется при расчете теоретических и эмпирических показателей как на самой выборке, так и на независимой от нее.

# 1 Теоретические аспекты измерения результативности

Измерение и тестирование результативности портфеля по доходности на независимой выборке требует особого внимания из-за стохастического характера оцениваемых весов портфеля. Рассмотрим различные концепции для измерения результативности портфеля на зависимых и независимых выборках. В частности, мы выясним принципиальные различия между мерами результативности, основанными на истинных параметрах (раздел 1.1), концепциях зависимой (раздел 1.2) и независимой выборки (раздел 1.3), а также их соответствующие предельные распределения в зависимости от объема выборки и длины горизонта оценивания на независимой выборке (раздел 1.4).

## 1.1 Теоретическая результативность

Предположим, что портфель состоит из $N$ активов. Пусть $r_t$ – вектор доходностей в момент времени $t$ с математическим ожиданием $\mathbb{E}[r_t] = \mu$ и ковариационной матрицей $\mathbb{V}ar[r_t] = \Sigma$. Кроме того, пусть $\omega(s) = \omega_s(\mu, \Sigma)$ – $N \times 1$ - вектор весов портфеля для стратегии $s$. Например, $\omega(g) = \dfrac{\Sigma^{-1}\iota}{\iota^T\Sigma^{-1}\iota}$ для портфеля с минимальной дисперсией (GMVP), $\omega(e) = \frac{1}{N}\iota$ для равновесного портфеля, $\omega(tan) = \dfrac{\Sigma^{-1}\mu}{\iota^T\Sigma^{-1}\mu}$ для портфеля, касательного к границе эффективности, где $\iota$ обозначает вектор единиц размерности $N \times 1$ и $\omega(m) = \frac{1}{\gamma}\Sigma^{-1}\mu$ для современной портфельной теории, максимизирующей CE для заданного параметра непринятия риска $\gamma$.

Для стратегии s доходность портфеля в момент времени $t$ задается как $r_t^p(s) = \omega(s)^\mathsf{T} r_t$ со средним $\mu_p(s) = \mathbb{E}[r_t^p(s)] = \omega(s)^\mathsf{T}\mu$ и дисперсией $\sigma_p^2(s) = \mathbb{V}ar[r_t^p] = \omega(s)^\mathsf{T}\Sigma\omega(s)$. Кроме того, обозначим меру результативности, основанную на стратегии $s$ как $\mathcal{P}(\mu_p(s), \sigma_p^2(s))$ с разностью результативности

$$\Delta_0(s,\tilde{s}) = \mathcal{P}(\mu_p(s), \sigma_p^2(s)) - \mathcal{P}(\mu_p(\tilde{s}), \sigma_p^2(\tilde{s})). \tag{1}$$

Говорят, что $\tilde{s}$ уступает $s$, если $\Delta_0(s,\tilde{s}) \geqslant 0$.

*Замечание.* В дальнейшем мы ограничим наш анализ гарантированным эквивалентом (CE), но общие аргументы, выдвинутые для разности CE двух стратегий, справедливы и для других мер результативности, таких как коэффициент Шарпа и дисперсия портфеля. В случае CE мера результативности имеет вид

$$\mathrm{CE}(\omega(s)) = \mathcal{P}(\mu_p(s), \sigma_p^2(s)) = \mu_p(s) - \frac{\gamma}{2}\sigma_p^2(s). \tag{2}$$

Стоит обратить внимание, что $\Delta_0(s,\tilde{s})$ – это концепция, основанная на параметрах генеральной совокупности, где область, принимаемых ей значений, зависит от лежащей в основе меры результативности $\mathcal{P}(\cdot)$ и от конкретного выбора $s$ и $\tilde{s}$. Например, весьма очевидно, что для теста, сравнивающего результативности портфеля $(s = m)$ и некоторой другой стратегии $(\tilde{s} \neq m)$, разность результативности на основе CE всегда неотрицательна, $\Delta_0(m,\tilde{s}) \geqslant 0$. Аналогичные доводы справедливы для GMVP, если мера результативности основана на дисперсии портфеля, и для портфеля на границе эффективности, если сравнение основано на двух коэффициентах Шарпа. [5]

Роль оценочного риска становится ясной, когда мы рассматриваем меру результативности, рассчитанную по оценкам весов портфеля $\hat{\omega}(s) = \omega_{(s)}(\hat{\mu}, \hat{\Sigma})$. Для CE результативность на оцененых параметрах равна

$$\mathrm{CE}(\hat{\omega}(s)) = \hat{\omega}(s)^{\mathsf{T}}\mu - \frac{\gamma}{2}\hat{\omega}(s)^{\mathsf{T}}\ \Sigma\ \hat{\omega}(s). \tag{3}$$

Для любого заданного порождающего данные процесса, $\mathrm{CE}(\omega(m)) \geqslant \mathrm{CE}(\hat{\omega}(s))$ выполняется по определению. Однако эмпирические стратегии не могут быть упорядочены заранее из-за случайного характера $\mathrm{CE}(\hat{\omega}(s))$, т.е. $\forall s, \tilde{s}\ \mathrm{CE}(\hat{\omega}(s)) \lesseqqgtr \mathrm{CE}(\hat{\omega}(\tilde{s}))$. При условии, что оценка весов портфеля является несмещенной, математическое ожидание статистики $\mathrm{CE}(\hat{\omega}(s))$ принимает форму [11]:

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{CE}(\hat{\omega}(s))\right] = \mathrm{CE}(\omega(s)) - \frac{\gamma}{2} tr\left(\Sigma\, \mathbb{V}[\hat{\omega}(s)]\right). \tag{4}$$

Докажем это утверждение.

$$\triangleleft\ \mathbb{E}\left[\mathrm{CE}(\hat{\omega}(s))\right] = \mathbb{E}[\hat{\omega}^{\mathsf{T}}\mu] - \frac{\gamma}{2}\mathbb{E}\left[\hat{\omega}^{\mathsf{T}}\,\Sigma\,\hat{\omega}\right] = \omega^{\mathsf{T}}\mu - \frac{\gamma}{2}\mathbb{E}\left[\sum_{i\,j}\sigma_{ij}^2\hat{\omega}_i\hat{\omega}_j\right] =$$

$$= \omega^{\mathsf{T}}\mu - \frac{\gamma}{2}\sum_{i\,j}\sigma_{ij}^2\mathbb{E}\left[\hat{\omega}_i\hat{\omega}_j\right] = \omega^{\mathsf{T}}\mu - \frac{\gamma}{2}\left[\sum_{i\,j}\sigma_{ij}^2\Big(\mathrm{Cov}[\hat{\omega}_i\hat{\omega}_j] + \mathbb{E}[\hat{\omega}_i]\mathbb{E}[\hat{\omega}_j]\Big)\right] =$$

$$= \omega^{\mathsf{T}}\mu - \frac{\gamma}{2}\sum_{i\,j}\sigma_{ij}^2\mathrm{Cov}[\hat{\omega}_i\hat{\omega}_j] - \frac{\gamma}{2}\sum_{i\,j}\sigma_{ij}^2\omega_i\omega_j =$$

$$= \omega^{\mathsf{T}}\mu - \frac{\gamma}{2}\omega^{\mathsf{T}}\,\Sigma\,\omega - \frac{\gamma}{2}\sum_{i}\sum_{j}\sigma_{ij}^2\mathrm{Cov}[\hat{\omega}_i\hat{\omega}_j] =$$

$$= \mathrm{CE}(\omega(s)) - \frac{\gamma}{2}\,\mathrm{tr}\begin{pmatrix} \sum\limits_j \sigma_{1j}^2\mathrm{Cov}[\hat{\omega}_1\hat{\omega}_j] & \cdots & \cdots & \sum\limits_j \sigma_{1j}^2\mathrm{Cov}[\hat{\omega}_n\hat{\omega}_j] \\ \vdots & \sum\limits_j \sigma_{2j}^2\mathrm{Cov}[\hat{\omega}_2\hat{\omega}_j] & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_j \sigma_{nj}^2\mathrm{Cov}[\hat{\omega}_1\hat{\omega}_j] & \cdots & \cdots & \sum\limits_j \sigma_{ij}^2\mathrm{Cov}[\hat{\omega}_n\hat{\omega}_j] \end{pmatrix} =$$

$$= \mathrm{CE}(\omega(s)) - \frac{\gamma}{2}\,\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \cdots & \sigma_{1n}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1n}^2 & \cdots & \sigma_{nn}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{Cov}[\hat{\omega}_1\hat{\omega}_1] & \cdots & \mathrm{Cov}[\hat{\omega}_n\hat{\omega}_n] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}[\hat{\omega}_n\hat{\omega}_1] & \cdots & \mathrm{Cov}[\hat{\omega}_n\hat{\omega}_n] \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \mathrm{CE}(\omega(s)) - \frac{\gamma}{2}\,\mathrm{tr}\left(\Sigma\,\mathbb{V}[\hat{\omega}(s)]\right). \triangleright$$

Именно из-за волатильности оценки весов портфеля математическое ожидание $\mathbb{E}[\mathrm{CE}(\hat{\omega}(s))]$ ниже теоретического CE. Разница увеличивается с увеличением степени непринятия риска $\gamma$ и неопределенности оценивания, что отражается в дисперсии оцененных весов портфеля $\mathbb{V}[\hat{\omega}(s)]$. Измерение результативности, основанное на ожидаемом CE учитывает как компромисс между средним и дисперсией от финансового риска, так и риск оценивания. Кроме того, включение оценочного риска позволяет теоретически уступающей стратегии быть эмпирически превосходящей в силу более низкого оценочного риска. Следовательно, гипотеза, основанная на ожидаемых разностях результативности, например $\mathrm{H}_0 : \mathbb{E}[\mathrm{CE}(\hat{\omega}(s))] - \mathbb{E}[\mathrm{CE}(\hat{\omega}(\tilde{s}))] = 0$, имеет смысл, даже если в теории стратегия $s$ строго доминирует над $\tilde{s}$. Наконец, стоит отметить, что нулевая гипотеза, основанная на разности в ожидаемых эмпирических мерах результативности, тестирует сумму теоретических разностей в результативности и разностей в оценочном риске.

## 1.2 Выборочная результативность

Теперь рассмотрим случай, когда результативность измеряется оцененным CE, рассчитанными при оцененных весах портфеля, где среднее значение и дисперсия вектора доходности заменены их выборочными аналогами

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_t \quad \text{и} \quad \hat{\Sigma} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(r_t - \hat{\mu})(r_t - \hat{\mu})^{\mathsf{T}}.$$

Количество наблюдений в выборке (размер оценочного окна) обозначается как $T$. Для выборочной доходности портфеля, $\hat{r}_t^p(s) = \hat{\omega}(s)^{\mathsf{T}} r_t$, мы получаем эмпирический или выборочный гарантированный эквивалент $\widehat{\mathcal{P}}(\hat{\mu}_p(s), \hat{\sigma}_p^2(s))$:

$$\widehat{\mathrm{CE}}(\hat{\omega}(s)) = \hat{\mu}_p(s) - \frac{\gamma}{2}\hat{\sigma}_p^2(s), \tag{5}$$

где $\hat{\mu}_p(s) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{r}_t^p(s) = \hat{\omega}(s)^{\mathsf{T}}\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}_p^2(s) = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(\hat{r}_t^p(s) - \hat{\mu}_p(s))^2$.
Выборочная разность гарантированных эквивалентов определяется как $\widehat{\Delta}(s,\tilde{s}) = \widehat{\mathrm{CE}}(\hat{\omega}(s)) - \widehat{\mathrm{CE}}(\hat{\omega}(\tilde{s}))$. Поскольку $\widehat{\mathrm{CE}}(\hat{\omega}(s))$ – случайная величина, разность в результативности портфеля, основанная на эмпирических концепциях, также является случайной и может быть как больше, так и меньше нуля. Однако для состоятельных оценок истинных портфельных весов, $\widehat{\mathrm{CE}}(\hat{\omega}(s))$ есть состоятельная оценка $\mathrm{CE}(\omega(s))$, такая что $\operatorname*{plim}_{T\to\infty}\widehat{\Delta}(s,\tilde{s}) = \Delta_0(s,\tilde{s})$, т.е. задача тестирования параметрической границы при сравнении портфелей сохраняется для больших выборок.

Надлежащим образом определенные нулевая и альтернативная гипотезы с точки зрения фиксированных параметров, учитывающих риск оценивания, могут быть основаны на ожидаемой разности эмпирических мер результативности, $\mathbb{E}\left[\widehat{\mathcal{P}}(\hat{\mu}_p(s), \hat{\sigma}_p^2(s)) - \widehat{\mathcal{P}}(\hat{\mu}_p(\tilde{s}), \hat{\sigma}_p^2(\tilde{s}))\right]$. Для $\widehat{\mathrm{CE}}(\hat{\omega}(s))$ это будет

$$\mathbb{E}\left[\widehat{\mathrm{CE}}(\hat{\omega}(s))\right] = \mathbb{E}\left[\hat{\omega}(s)^{\mathsf{T}}\hat{\mu}\right] - \frac{\gamma}{2}\mathbb{E}\left[\hat{\omega}(s)^{\mathsf{T}}\,\widehat{\Sigma}\,\hat{\omega}(s)\right]. \tag{6}$$

В отличие от уравнения (3), которое зависит от неизвестных 1-го и 2-го моментов процесса доходности, $\widehat{\mathrm{CE}}(\hat{\omega}(s))$ может быть вычислено. Однако его среднее существенно отличается от среднего в уравнении (4) в силу его сильной нелинейности в $\widehat{\Sigma}$ и $\hat{\mu}$. В дополнение к различиям из-за теоретической результативности и риска оценки относительно $\omega(\cdot)$, нулевая гипотеза, основанная на уравнении (6) также включает риск оценивания, связанный с $\widehat{\mathcal{P}}$.

## 1.3 Результативность на независимой выборке

Далее мы рассмотрим типичную схему скользящего окна, в которой доходность портфеля на независимой выборке $\hat{r}^p_{t+1}(s)$ для периода $t+1$ основана на прогнозе весов портфеля $\omega_{t+1|t}(s)$ на один шаг вперед с периодом $\{t-T, \ldots, t\}$ в качестве оценочного окна. Мы принимаем стандартное предположение для статических моделей о том, что последняя доступная оценка $\hat{\omega}_t(s)$ используется для вычисления доходности следующего периода $\hat{r}^p_{t+1}(s) = \hat{\omega}_{t+1|t}(s)^{\mathsf{T}} r_{t+1} = \hat{\omega}_t(s)^{\mathsf{T}} r_{t+1}$. Предполагая независимость процесса доходности, $r_{t+1}$ и $\hat{\omega}_t(s)$ независимы. Для генеральной совокупности мат. ожидание и дисперсия доходности портфеля на независимой выборке (op) определяются выражениями:

$$\begin{aligned}
\mu_{op}(s) &= \mathbb{E}\left[\hat{r}^p_{t+1}(s)\right] = \mathbb{E}\left[\hat{\omega}_t(s)\right]^{\mathsf{T}}\mu \\
\sigma^2_{op}(s) &= \mathbb{V}\left[\hat{r}^p_{t+1}(s)\right] = \mathbb{E}\left[\hat{\omega}_t(s)^{\mathsf{T}}\Sigma\,\hat{\omega}_t(s)\right] + \mu^{\mathsf{T}}\mathbb{V}\left[\hat{\omega}_t(s)\right]\mu.
\end{aligned}$$

Дисперсия процесса доходности на независимой выборке $\sigma^2_{op}(s)$ обнаруживает двойной характер. Первый член представляет собой дополнительную волатильность, возникающую в результате недетерминированности статистики $\hat{\omega}(s)$, а второй член отражает волатильность, возникающую в результате того, что необходимо оценить математическое ожидание доходности на независимой выборке. Для несмещенной оценки весов портфеля теоретическая CE на независимой выборке принимает форму:

$$
\begin{aligned}
CE_{op}(\hat{\omega}_t(s)) = \mu_{op}(s) - \frac{\gamma}{2}\sigma^2_{op}(s) = \\
= \mathbb{E}\left[\hat{\omega}_t(s)\right]^\mathsf{T}\mu - \frac{\gamma}{2}\left[\mathbb{E}\left[\hat{\omega}_t(s)^\mathsf{T}\Sigma\,\hat{\omega}_t(s)\right] + \mu^\mathsf{T}\mathbb{V}\left[\hat{\omega}_t(s)\right]\mu\right] = \\
= \mathbb{E}\left(\hat{\omega}_t(s)^\mathsf{T}\mu - \frac{\gamma}{2}\hat{\omega}_t(s)^\mathsf{T}\Sigma\,\hat{\omega}_t(s)\right) + \frac{\gamma}{2}\mu^\mathsf{T}\mathbb{V}\left[\hat{\omega}_t(s)\right]\mu = \\
= \mathbb{E}\left[CE(\hat{\omega}_t(s))\right] - \frac{\gamma}{2}\mu^\mathsf{T}\mathbb{V}\left[\hat{\omega}_t(s)\right]\mu, \quad (7)
\end{aligned}
$$

где $\mathbb{E}\left[CE(\hat{\omega}_t(s))\right] = CE(\omega(s)) - \frac{\gamma}{2}tr\left(\Sigma\mathbb{V}[\hat{\omega}(s)]\right)$ задается уравнением (4). По сравнению с теоретическим CE, определенным в разделе 1.1, существует двойной штраф для теоретического CE на независимой выборке из-за риска оценивания на зависимой выборке, определяемого слагаемым $-\frac{\gamma}{2}tr\left(\Sigma\mathbb{V}[\hat{\omega}(s)]\right)$, и риска на независимой выборке, определяемого слагаемым $-\frac{\gamma}{2}\mu^\mathsf{T}\mathbb{V}\left[\hat{\omega}_t(s)\right]\mu$.

Разность в результативности портфелей на независимой выборке определяется как

$$
\begin{aligned}
\Delta_{op}(s,\tilde{s}) \equiv \Delta_0(s,\tilde{s}) - \frac{\gamma}{2}\Big[tr\big(\Sigma\mathbb{V}[\hat{\omega}_t(s)]\big) - tr\big(\Sigma\mathbb{V}[\hat{\omega}_t(\tilde{s})]\big)\Big] - \\
- \frac{\gamma}{2}\mu^\mathsf{T}\Big[\mathbb{V}[\hat{\omega}_t(s)] - \mathbb{V}[\hat{\omega}_t(\tilde{s})]\Big]\mu. \quad (8)
\end{aligned}
$$

Для случая, когда равновзвешенный портфель является бенчмарком, $\tilde{s} = e$, $\Delta_{op}(s,\tilde{s})$ упрощается, т.к. $\mathbb{V}[\hat{\omega}_t(\tilde{s})] = 0$.

$$
\Delta_{op}(s,e) \equiv \mu_p(s) - \mu_p(e) - \frac{\gamma}{2}\left[\sigma^2_p(s) - \sigma^2_p(e)\right] - \frac{\gamma}{2}\,\mathrm{tr}\left(\Sigma\mathbb{V}[\hat{\omega}_t(s)]\right) - \frac{\gamma}{2}\mu^\mathsf{T}\mathbb{V}[\hat{\omega}_t(s)]\mu.
$$

Это обеспечивает высокую результативность равновзвешенного портфеля на независимой выборке по сравнению с эмпирическими портфельными стратегиями, которые полагаются на неточно оцененные портфельные веса. В соответствии с [12] и [13] при нормально распределенной доходности $r_t$ дисперсия оцененных GMVP весов может быть записана как:

$$
\mathbb{V}[\hat{\omega}_t(g)] = \frac{1}{T-N-1}\frac{1}{\iota^\mathsf{T}\Sigma^{-1}\iota}\left(\Sigma^{-1} - \frac{\Sigma^{-1}\iota\iota^\mathsf{T}\Sigma^{-1}}{\iota^\mathsf{T}\Sigma^{-1}\iota}\right),
$$

где $\iota$ обозначает вектор единиц размерности $N \times 1$, $N$ – число активов и $T$ – длина оценочного окна.

Таким образом, выражение для разности CE между GMVP и равновзвешенным портфелем на независимой выборке упрощается до

$$\Delta_{op}(s,\tilde{s}) \equiv \Delta_0(s,\tilde{s}) - \frac{\gamma}{2}\frac{1}{T-N-1}\frac{1}{\iota^\mathsf{T}\Sigma^{-1}\iota} \times \left[N - 1 + \mu^\mathsf{T}\Sigma\mu - \frac{(\mu^\mathsf{T}\Sigma^{-1}\iota)^2}{\iota^\mathsf{T}\Sigma^{-1}\iota}\right]. \quad (9)$$

## 1.4 Эмпирическая результативность на независимой выборке

Эмпирическая мера результативности на независимой выборке широко используется в прикладных задачах для сравнения результативности различных стратегий формирования портфеля. Здесь $\mu_{op}(s)$ и $\sigma^2_{op}(s)$ заменены на свои выборочные аналоги основанные на данных из оценочной выборки размера $H$:

$$\widehat{\mathrm{CE}}_{\mathrm{op}}(\hat{\omega}_t(s)) = \hat{\mu}_{op}(s) - \frac{\gamma}{2}\hat{\sigma}^2_{op}(s), \quad (10)$$

где $\hat{\mu}_{op}(s) = \dfrac{1}{H}\displaystyle\sum_{h=1}^{H} \hat{r}^p_{t+h}(s) = \dfrac{1}{H}\displaystyle\sum_{h=1}^{H} \hat{\omega}_{t+h-1}(s)^\mathsf{T}\hat{r}_{t+h}$

и $\hat{\sigma}^2_{op}(s) = \dfrac{1}{H-1}\displaystyle\sum_{h=1}^{H} \left(\hat{r}^p_{t+h}(s) - \hat{\mu}_{op}(s)\right)^2$.

Свойства $\hat{\mu}_{op}(s)$ и $\hat{\sigma}^2_{op}(s)$ на большой выборке зависят от того, какой тип предельного поведения рассматривается. Очевидно, что при увеличении объема выборки T и фиксировании размера окна оценки получаем

$$\begin{aligned} \operatorname*{plim}_{\substack{T\to\infty \\ H=const}} \hat{\mu}_{op}(s) &= \omega(s)^\mathsf{T}\bar{r}_H, \\ \operatorname*{plim}_{\substack{T\to\infty \\ H=const}} \hat{\sigma}^2_{op}(s) &= \omega(s)^\mathsf{T}\hat{\Sigma}_H\omega(s), \end{aligned} \quad (11)$$

где $\bar{r}_H$ и $\hat{\Sigma}_H$ обозначают выборочное среднее и выборочную ковариацию для выборки объема $H$. Обе оценки сходятся к случайным величинам с дисперсиями, которые зависят от размера оценочного окна. Для $T \to \infty$ и фиксированного $H$, $\widehat{\mathrm{CE}}_{\mathrm{op}}(\hat{\omega}_t(s))$ остается случайной величиной из-за выборочной вариации, которая присутствует в $\bar{r}_H$ и $\hat{\Sigma}_H$. Таким образом, выбор исключительно большого размера выборки $T$ не очень полезен, если оценочное окно $H$ невелико. Более того, разумно также основывать оценки весов на более поздних образцах из-за наличия потенциальных структурных нарушений.

В качестве альтернативы рассмотрим предельный случай для оценочного окна, в котором $T$ удерживается фиксированным. В предположении независимости это дает:

$$\begin{aligned} \underset{\substack{T=const\\ H\to\infty}}{\text{plim}}\ \hat{\mu}_{op}(s) &= \mathbb{E}\left[\bar{r}^p_{t+h}(s)\right] = \mu_{op}(s), \\ \underset{\substack{T=const\\ H\to\infty}}{\text{plim}}\ \hat{\sigma}^2_{op}(s) &= \sigma^2_{op}(s), \end{aligned} \tag{12}$$

Только для случая $N \to \infty$ и $T \to \infty$ эмпирический $\widehat{\text{CE}}_{\text{op}}(\hat{\omega}_t(s))$ на независимой выборке сходится к $\text{CE}(\omega(s))$, поскольку риск оценивания исчезает с увеличением размера оценочной выборки.

Чтобы стабилизировать доходность портфеля на независимой выборке, оцененные веса портфеля часто фиксируются в определенном диапазоне оценочного окна [14]. Изменение весов менее частое, чем в предлагаемом выше сценарии скользящего окна, снижает волатильность процесса доходности на независимой выборке. Однако такая стратегия несколько проблематична, если целью является получение состоятельной оценки $\text{CE}_{op}$. Это становится очевидным, когда мы рассматриваем самый крайний случай, когда весь ряд доходнотей на независимой выборке основан на единственной оценке вектора весов. В отличие от уравнения (12) среднее и дисперсия доходности на независимой выборке остаются случайными величинами

$$\begin{aligned} \underset{\substack{T=const\\ H\to\infty}}{\text{plim}}\ \hat{\mu}_{op}(s) &= \hat{\omega}_t(s)^{\mathsf{T}}\mu, \\ \underset{\substack{T=const\\ H\to\infty}}{\text{plim}}\ \hat{\sigma}^2_{op}(s) &= \hat{\omega}_t(s)^{\mathsf{T}}\hat{\Sigma}\,\hat{\omega}_t(s). \end{aligned} \tag{13}$$

В этом случае соответствующий предельный CE остается случайной величиной, а $\hat{\omega}_t(s)$ служит стационарным случайным эффектом.

Таким образом, эмпирическая разность CE на независимой выборке имеет вид

$$\widehat{\Delta}_{op}(s, \tilde{s}) = \widehat{\text{CE}}_{\text{op}}(\hat{\omega}_t(s)) - \widehat{\text{CE}}_{\text{op}}(\hat{\omega}_t(\tilde{s})).$$

# 2 Расчеты результативности на реальных данных

Для определения роли оценочного риска в мере результативности портфеля на независимой выборке были собраны данные о месячных ценах закрытия 100 активов российского рынка за последние 10 лет. Всего выборочное пространство имеет 12 000 наблюдений по различным российским акциям в период с 2012 по 2022 года. Используя пакет прикладных программ MATLAB импортируем содержащиеся в csv-файлах данные в хранилище и рассчитаем месячные доходности за представленный период.

Для каждого фиксированного размера портфеля $N = 1, \ldots, 100$ по имеющейся матрице месячных доходностей вычислим разность гарантированных эквивалентов портфелей на тренировочной и независимой выборках. В данном случае будем сравнивать портфель, составленный на основе стратегии GMVP, с теоретически уступающим равновновзвешенным портфелем. Причем для устойчивости вычисляемой разности усредним каждое $\Delta_0(g, e)$ и $\Delta_{op}(g, e)$ по 5000 независимым репликациям.

В частности, для заданного размера портфеля $N$ случайным образом без возвращений генерируется целочисленный индекс, определяющий выбор активов из общего пула объемом 100. Затем мы вычисляем выборочное среднее и ковариационную матрицу из набора данных для всего временного промежутка выбранных активов и рассматриваем их как теоретические $\mu$ и $\Sigma$ соответственно. После мы вычисляем все составляющие разности CE на независимой выборке, следуя уравнению (8), и строим среднее из 5000 повторений для каждого $N$.

Следующие рисунки дают количественное представление о важности слагаемых в разности результативностей GMVP и равновзвешенного портфеля на независимой выборке при различных размерностях пространства активов в портфеле. Ограниченные точками области вокруг среднего соответствуют 95% доверительному интервалу для среднего по 5000 случайно выбранных портфелей.

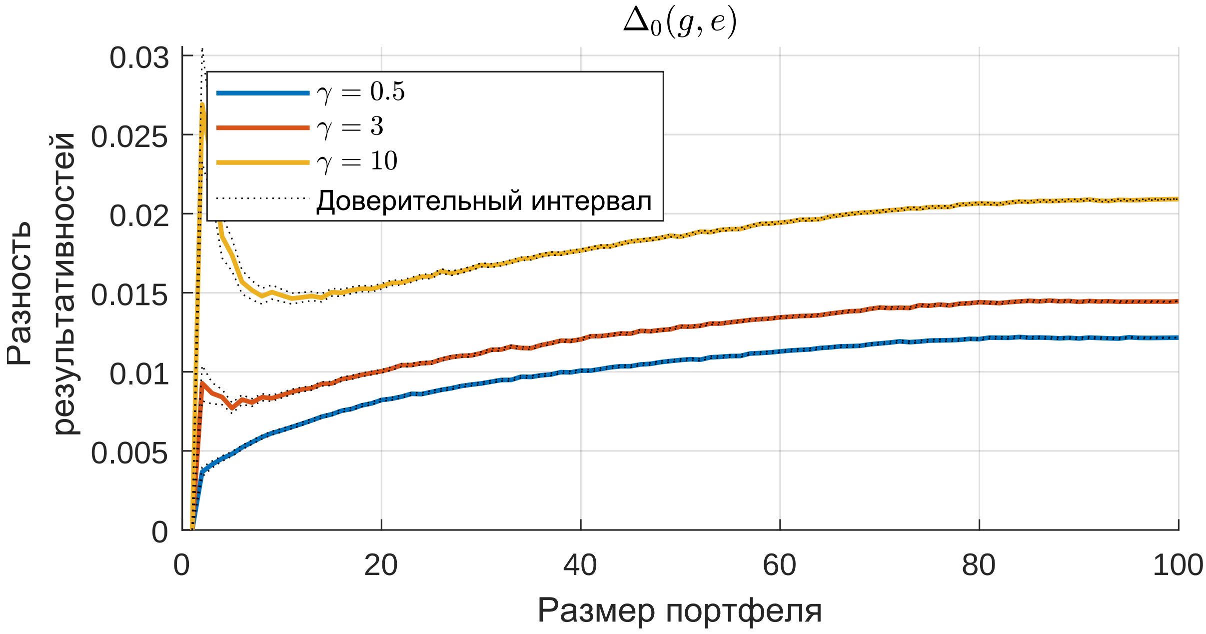


Рис. 1. Теоретическая разность CE

Графики на рис. 1 отображают различия в теоретическом CE для GMVP и равновзвешенного портфеля для разного числа активов $N$ и разных значений параметра непринятия риска $\gamma$. Неудивительно, что чем больше активов в портфеле, тем сильнее эффект диверсификации, поэтому превосходство теоретического CE для GMVP над CE равновзвешенного портфеля увеличивается. Превосходство также увеличивается с более высоким неприятием риска, поскольку эффект диверсификации становится более значимым с увеличением $\gamma$.

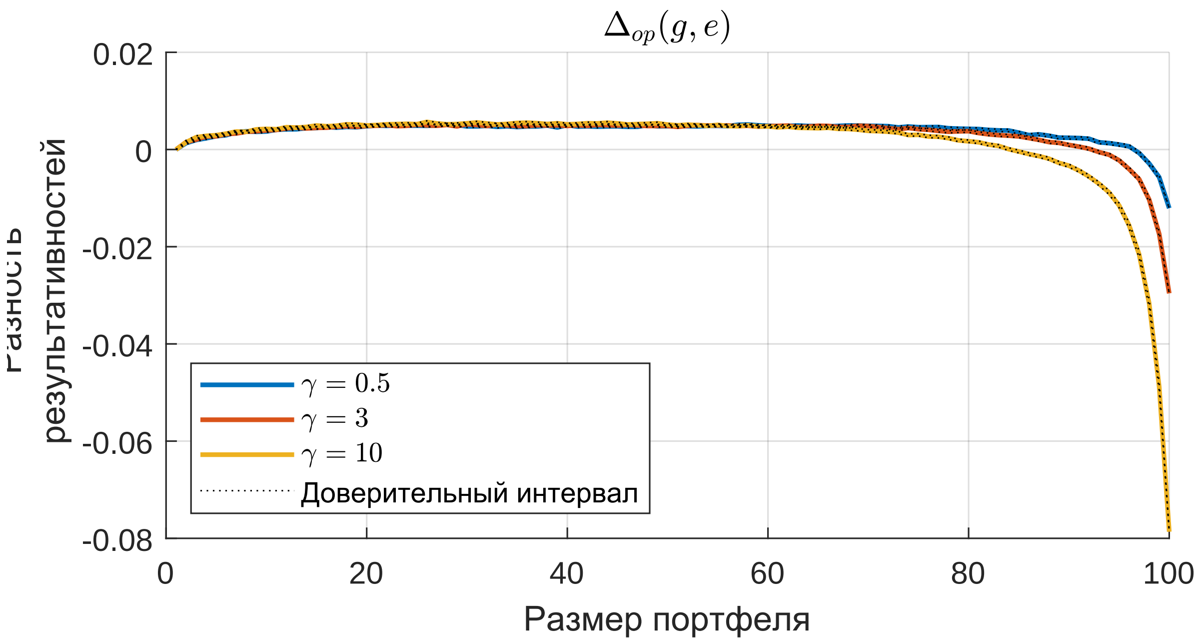


Рис. 2. Эмпирическая разность CE

Графики на рис. 2 показывают разность CE на независимой выборке для двух портфельных стратегий, как указано в ур. (8). Значения CE на независимой выборке существенно меньше, чем значения теоретического CE. Стратегия, дающая самый высокий теоретический CE ($\gamma = 3$, желтая линия), лишь незначительно доминирует над другими стратегиями и только в том случае, если совокупность активов невелика. С ростом размера портфеля эффект от использования оценки весов становится все более значимым, что в конце концов и приводит к тому, что теоретически превосходящая стратегия GMVP проигрывает при вычислении эмпирической результативности.

Следующие графики дают более полное представление о причинах такого результата. Графики на рис. 3 отображают величину риска оценивания внутри выборки (второй член уравнения (5)), который четко определяет форму теоретических кривых на независимой выборке из-за его относительного размера. Чем больше набор активов, тем ниже точность оценки весов.

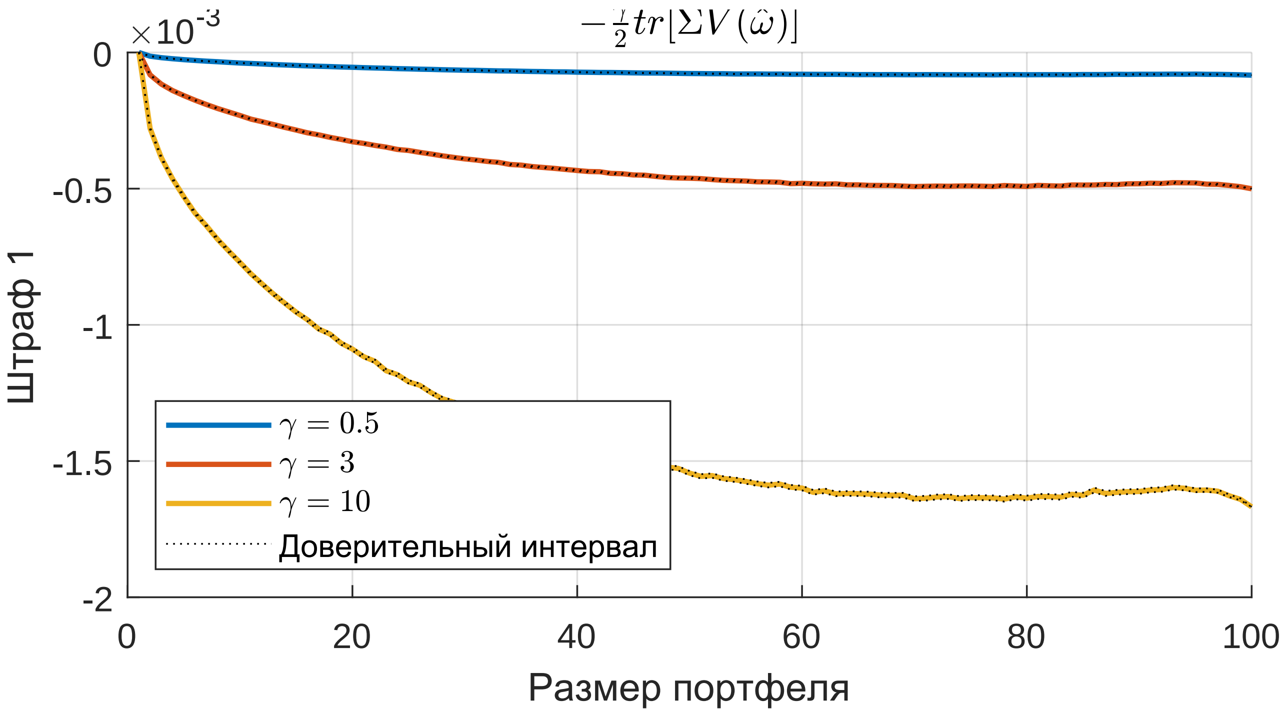


Рис. 3. Эмпирическая разность CE

Величина параметра непринятия риска играет решающую роль для результативности на независимой выборке, поскольку он определяет, насколько сильно CE на независимой выборке штрафуется наличием «шума» оценки. Следовательно, выбор очень низкого параметра неприятия риска является не только вопросом экономических соображений, но и серьезно приближает эмпирические результаты в сторону теоретического подхода. Таким образом, для научной ясности результаты эмпирических сравнений следует сообщать для диапазона значений $\gamma$.

Графики на рис. 4 изображают штраф за риск на независимой выборке. Этот эффект работает в том же направлении, что и эффект на внутри выборки; однако порядок этого эффекта значительно меньше.

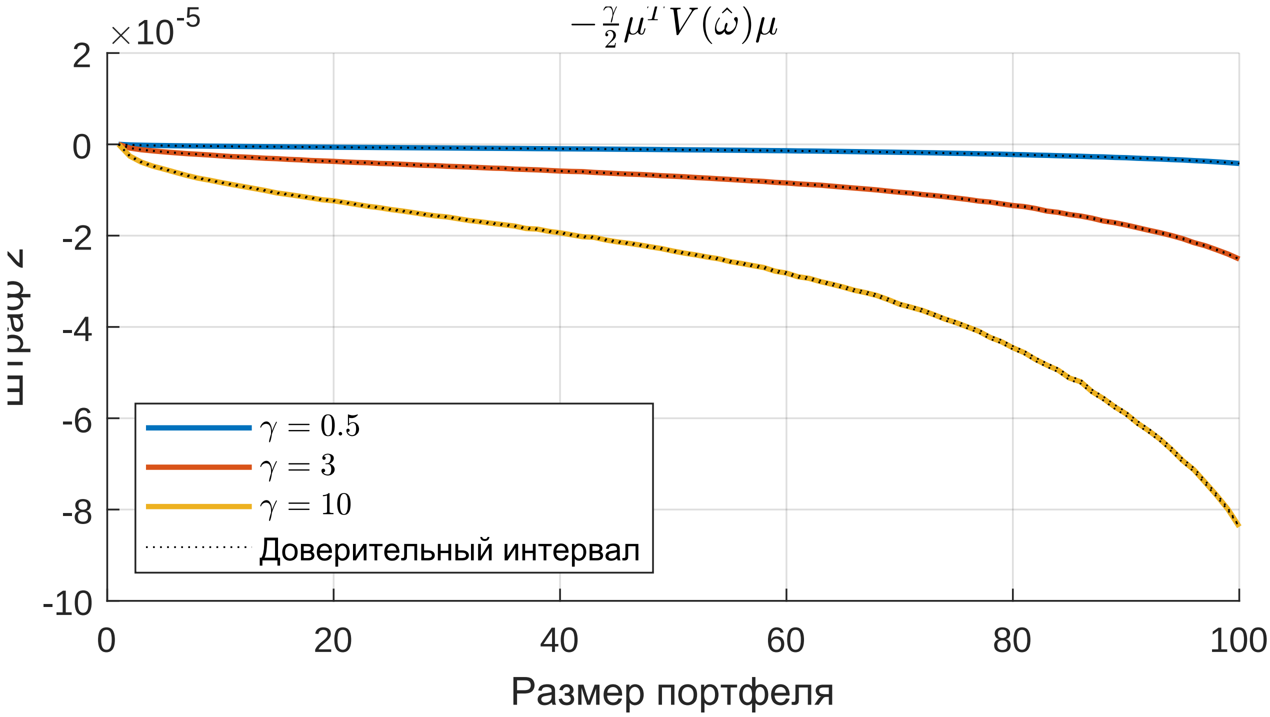


Рис. 4. Эмпирическая разность CE

В целом из рис. 1 – 4 мы можем сделать вывод, что на независимой выборке результативность тестов относительно стратегии равновзвешенного портфеля в значительной степени определяется риском оценивания. Результативность равновзвешенного портфеля в основном является результатом сведения оценочного риска к нулю при сравнительно небольшой плате за следование теоретически худшей стратегии.

# Заключение

В данной работе были подробно рассмотрены свойства мер результативности портфеля на независимой выборке. Показано, что вклад, обусловленный оценочным риском, намного превышает вклад, наблюдаемый из-за различий, лежащих в основе теоретических портфельных стратегий. Это объясняет, почему многие более сложные, теоретически обоснованные стратегии не способны превзойти простую портфельную стратегию с одинаковым весами. Стратегия равновзвешенного портфеля является весьма коварным бенчмарком в силу детерминированности весов, а как следствие, отсуствия штравных поправок для среднего результативности.

Как и в случае американского рынка, подробно рассмотренного в статье [5], наличие оценочного риска приводит к тому, что теоретически превосходящая портфельная стратегия уступает простой альтернативе, когда сравниваются меры результативности, рассчитанные по выборочным аналогам. Таким образом, результаты, отражающие данную особенность измерения результативности, инвариантны относиельно рынков различных стран и являются статистической особенностью оценки весов и мер перфоманса.

В будущих работах предполагается более внимательно рассмотреть распределение самого процесса дохоности, исследовать степень, в которой результаты могут быть обобщены для мер результативности, отличных от гарантированного эквивалента, а также построить статистические тесты проверяющие гипотезу о равной результативности портфелей с учетом обоснованной в этой работе роли оценочного риска.

# Список литературы

[1] DeMiguel, V., Garlappi, L., & Uppal, R. (2009). Optimal versus naive diversification: how inefficient is the 1/n Portfolio Strategy? The Review of Financial Studies, 22(5), 1915–1953.

[2] Brodie, J., Daubechies, I., Mol, C. D., Giannone, D., & Loris, I. (2009). Sparse and stable markowitz Portfolios. Proceedings of the National Academy of Sciences, 106(30), 12267–12272.

[3] DeMiguel, V., Garlappi, L., Nogales, F. J., & Uppal, R. (2009). A generalized approach to portfolio optimization: improving performance by constraining portfolio norms. Management Science, 55(5), 798–812.

[4] DeMiguel, V., & Nogales, F. J. (2009). Portfolio selection with robust estimation. Operations Research, 57(3), 560–577.

[5] Kazak E., Pohlmeier W. Testing out-of-sample portfolio performance //International Journal of Forecasting. – 2019. – Т. 35. – №. 2. – С. 540-554.

[6] Jobson, J. D., & Korkie, B. M. (1981). Performance hypothesis testing with the sharpe and Treynor Measures. The Journal of Finance, 36(4), 889–908.

[7] Memmel, C. (2003). Performance hypothesis testing with the sharpe Ratio. Finance Letters, 1, 21–23.

[8] Ledoit, O., & Wolf, M. (2003). Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection. Journal of Empirical Finance, 10(5), 603–621.

[9] Ledoit, O.,&Wolf, M. (2011). Robust performances hypothesis testing with the variance. Wilmott, 2011(55), 86–89.

[10] Ledoit, O., & Wolf, M. (2008). Robust performance hypothesis testing with the sharpe Ratio. Journal of Empirical Finance, 15(5), 850–859.

[11] Cho, D. D. (2011). Estimation risk in covariance. Journal of Asset Management, 12(4), 248–259.

[12] Kempf A., Memmel C. Estimating the global minimum variance portfolio //Schmalenbach Business Review. – 2006. – T. 58. – №. 4. – C. 332-348.

[13] Okhrin Y., Schmid W. Distributional properties of portfolio weights //Journal of econometrics. – 2006. – T. 134. – №. 1. – C. 235-256.

[14] Golosnoy V., Okhrin Y. Multivariate shrinkage for optimal portfolio weights //The European Journal of Finance. – 2007. – T. 13. – №. 5. – C. 441-458.

# A Код программной реализации

Листинг 1. Импортирование данных

```
ds = datastore('C:\Users\Admin\paper'); % Data import
data = readall(ds); % Read all data from the data store
Pool = zeros(120, 100); % Pool of 100 assets during 120 months
for k = 1:100
  Pool(:,k) = data{120*(k-1)+1:120*k,2};
end
r = diff(Pool)./Pool(2:end,:); % Assets return
```

Листинг 2. Инициализация переменных для цикла (for speed)

```
n_replic = 1000; % Number of replications
gamma = [0.5 3 10]; % Values of gamma
delta_0_re = zeros(n_replic,size(gamma,2)); % Replications of CE diff
delta_op_re = zeros(n_replic,size(gamma,2)); % Replications of out-of-sample CE diff
penal1_re = zeros(n_replic,size(gamma,2)); % Replications of penal due to estimation risk
penal2_re = zeros(n_replic,size(gamma,2)); % Replications of penal due to out-of-sample risk
delta_0 = zeros(size(r,2),size(gamma,2)); % Average CE diff
penal1 = zeros(size(r,2),size(gamma,2)); % Average penal due to estimation risk
penal2 = zeros(size(r,2),size(gamma,2)); % Average penal due to out-of-sample risk
delta_op = zeros(size(r,2),size(gamma,2)); % Average out-of-sample CE diff
  % Confidence Bounds (CB)
upperCB = zeros(size(r,2),size(gamma,2)); % Upper CB for CE diff
lowerCB = zeros(size(r,2),size(gamma,2)); % Lower CB for CE diff
upperCB_op = zeros(size(r,2),size(gamma,2)); % Upper CB for out-of-sample CE diff
lowerCB_op = zeros(size(r,2),size(gamma,2)); % Lower CB for out-of-sample CE diff
```

Листинг 3. Расчеты

```
sz = size(r,1); % Total number of observations
T = ceil(0.9*sz); % Training sample
H = sz-T; % Test sample
rp_g = zeros(1,H); % Return of the GMVP
rp_e = zeros(1,H); % Return of the equally-weighted portfolio
for g = 1:size(gamma,2)
  for N = 1:size(r,2) % N is a potfolio size
    i = ones(N, 1); % Vector of ones
    w_e = 1/N*i; % Weights of the equally-weighted portfolio
    for k = 1:n_replic
      idx = datasample(1:size(r,2),N,'Replace',false); % index for selection of assets
      shares = r(:,idx); % Selected assets' return
      mu = mean(shares)'; % Mean of selected assets' return
      sigm = cov(shares); % Covariance matrix of selected assets' return
      invsigm = inv(sigm);
      w_g = (sigm\i)/(i'*(sigm\i)); % Weights of the GMVP
      delta_0_re(k) = (w_g-w_e)'*mu + ...
         gamma(g)/2*(w_e'*sigm*w_e-w_g'*sigm*w_g);
      V = 1/(sz-N-1)/(i'*(sigm\i))*...
        (invsigm-(sigm\i*i'/sigm)/(i'*(sigm\i))); % Covariance of the GMVP weights
      penal1_re(k) = -gamma(g)/2*trace(sigm*V);
      penal2_re(k) = -gamma(g)/2*(mu'*V*mu);
      for t = 1:H
        shares = r(t:T+t-1,idx);
        mu = mean(shares)';
        sigm = cov(shares);
        w_g = (sigm\i)/(i'*(sigm\i));
        rp_g(t) = r(T+t,idx)*w_g;
        rp_e(t) = r(T+t,idx)*w_e;
      end
      CE_g = mean(rp_g)-gamma(g)/2*var(rp_g); % Out-of-sample CE of GMVP
      CE_e = mean(rp_e)-gamma(g)/2*var(rp_e); % Out-of-sample CE of 1/N-portfolio
      delta_op_re(k) = CE_g - CE_e;
    end
    delta_0(N,g) = mean(delta_0_re);
```

```
    upperCB(N,g) = delta_0(N,g) + ...
      1.96*sqrt(var(delta_0_re)/n_replic);
    lowerCB(N,g) = delta_0(N,g) - ...
      1.96*sqrt(var(delta_0_re)/n_replic);
    penal1(N,g) = mean(penal1_re);
    upper_pen1(N,g) = penal1(N,g) + ...
      1.96*sqrt(var(penal1_re)/n_replic);
    lower_pen1(N,g) = penal1(N,g) - ...
      1.96*sqrt(var(penal1_re)/n_replic);
    penal2(N,g) = mean(penal2_re);
    upper_pen2(N,g) = penal2(N,g) + ...
      1.96*sqrt(var(penal2_re)/n_replic);
    lower_pen2(N,g) = penal2(N,g) - ...
      1.96*sqrt(var(penal2_re)/n_replic);
    delta_op(N,g) = mean(delta_op_re);
    upperCB_op(N,g) = delta_op(N,g) + ...
      1.96*sqrt(var(delta_op_re)/n_replic);
    lowerCB_op(N,g) = delta_op(N,g) - ...
      1.96*sqrt(var(delta_op_re)/n_replic);
  end
end
```

Листинг 4. Графика

```
figure('Name','Results', 'NumberTitle','off');
subplot(2, 2, 1)
hold on
plot(1:N, delta_0,'LineWidth', 1.5)
plot(1:N, upperCB, 'k', 'LineStyle', ':')
plot(1:N, lowerCB, 'k', 'LineStyle', ':')
title('$\Delta_0(g, e)$', 'Interpreter',"latex")
xlabel('Portfolio size')
ylabel(sprintf('Perfomance \n difference'))
grid on
legend({'$\gamma = 0.5$','$\gamma = 3$','$\gamma = 10$',
   'Confidence interval',}, 'Location', 'northwest',
   'Interpreter',"latex")
hold off
subplot(2, 2, 2)
hold on
plot(1:N, delta_op, 'LineWidth',1.5)
plot(1:N, upperCB_op, 'k', 'LineStyle', ':')
```

```
plot(1:N, lowerCB_op, 'k', 'LineStyle', ':')
title('$\Delta_{op}(g, e)$', 'Interpreter',"latex")
xlabel('Portfolio size')
ylabel(sprintf('Perfomance \n difference'))
grid on
legend({'$\gamma = 0.5$','$\gamma = 3$','$\gamma = 10$',
    'Confidence interval',}, 'Location', 'southwest',
    'Interpreter',"latex")
hold off
subplot(2, 2, 3)
hold on
plot(1:N, penal1, 'LineWidth', 1.5)
plot(1:N, upper_pen1, 'k', 'LineStyle', ':')
plot(1:N, lower_pen1, 'k', 'LineStyle', ':')
title('$-\frac{\gamma}{2}tr[\Sigma V(\hat\omega)]$',
    'Interpreter',"latex")
xlabel('Portfolio size')
ylabel(sprintf('Penal 1'))
grid on
legend({'$\gamma = 0.5$','$\gamma = 3$','$\gamma = 10$',
    'Confidence interval',}, 'Location', 'southwest',
    'Interpreter',"latex")
hold off
subplot(2, 2, 4)
hold on
plot(1:N, penal2, 'LineWidth',1.5)
plot(1:N, upper_pen2, 'k', 'LineStyle', ':')
plot(1:N, lower_pen2, 'k', 'LineStyle', ':')
title('$-\frac{\gamma}{2}\mu^T V(\hat\omega)\mu$',
    'Interpreter',"latex")
xlabel('Portfolio size')
ylabel(sprintf('Penal 2'))
grid on
legend({'$\gamma = 0.5$','$\gamma = 3$','$\gamma = 10$',
    'Confidence interval',}, 'Location', 'southwest',
    'Interpreter',"latex")
hold off
```