

Отчет по научно-исследовательской работе

Тема: **Классификация текстов**

Направление: 010400 (01.03.02) – Прикладная математика и информатика

Выполнил студент гр. 222 _____ Мамаев Владислав Викторович

Научный руководитель,

к. ф.-м. н, доцент _____ Голяндина Нина Эдуардовна

Оглавление

1.	Введение	3
2.	Основная часть	3
2.1.	Постановка задачи обучения с учителем	3
2.2.	Сведение задачи к задаче оптимизации	4
2.3.	Построение алгоритма классификации	7
2.4.	Оценка результатов работы алгоритма	16
2.5.	Метод главных компонент	25
2.6.	Оценка результатов работы модифицированного алгоритма	25
3.	Заключение	26
	Список литературы	28

1. Введение

Цель работы — познакомиться с методами машинного обучения на примере задачи классификации текстов.

Задачи:

- Описать и реализовать алгоритм, который будет различать тексты двух авторов на основе двух признаков.
- Описать и реализовать алгоритм получения двух наиболее подходящих для применения предыдущего алгоритма признаков из большого числа признаков.

2. Основная часть

2.1. Постановка задачи обучения с учителем

Сформулируем задачу машинного обучения с учителем:

X - множество описаний некоторых объектов, “описания объектов” будем отождествлять с *объектами*, подразумевая представление объектов в виде элементов множества X . В дальнейшем в качестве объектов будем рассматривать $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ — m -мерные вещественные векторы.

Предполагается, что существует *целевая зависимость* — отображение

$$y^* : X \rightarrow Y$$

в некоторое множество ответов Y , и значения этого отображения на некотором конечном множестве известны.

$X^n = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n$ — объекты для которых известны значения целевой функции.
 $Y^n = \{y_i = y^*(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_i \in X^n\}_{i=1}^n$ — известные значения функции y^* на этих объектах.

$T^n = \{(\mathbf{x}_i, y_i)\}_{i=1}^n$ — набор пар “объект - ответ” будем называть *обучающей выборкой*.

В задаче классификации в качестве множества ответов Y выступает некоторое конечное множество, определяющее принадлежность объекта классу. Далее будем рассматривать задачу бинарной классификации: $|Y| = 2$ и кодировать принадлежность классам *метками* $Y = \{-1, 1\}$. Обозначим:

$$C_1 = \{\mathbf{x}_i \in X^n : y_i = 1\}$$

$$C_2 = \{\mathbf{x}_i \in X^n : y_i = -1\},$$

объекты выборки принадлежащие первому и второму классу соответственно. Задача обучения заключается в построении *алгоритма* или *решающей функции* $a(\mathbf{x}) : X \rightarrow Y$, который приближает целевую зависимость y^* .^[1]

2.2. Сведение задачи к задаче оптимизации

Одним из подходов к построению $a(x)$ является метод *минимизации эмпирического риска*. Для построения алгоритма рассматривается:

$$A = \{a(\mathbf{x})\}$$

— *модель алгоритмов*, некоторое семейство функций, вводится

$$L(y, y') : Y^2 \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad (1)$$

— *функция потерь*, некоторая функция характеризующая величину отклонения ответа $y = a(\mathbf{x})$ от правильного ответа $y' = y^*(\mathbf{x})$ на произвольном объекте $x \in X$, и

$$Q(a, T^n) = \frac{1}{n} \sum_1^n L(a(\mathbf{x}_i), y_i) \quad (2)$$

— *эмпирический риск*, средняя ошибка a на выборке T^n . Метод заключается в нахождении алгоритма a_{opt} , для которого средняя ошибка на выборке будет минимальна:^[2]

$$a_{opt} = \operatorname{argmin}_{a \in A} Q(a, T^n) = \operatorname{argmin}_{a \in A} \frac{1}{n} \sum_1^n L(a(\mathbf{x}_i), y_i) \quad (3)$$

Перейдём к описанию используемой модели.

Модель алгоритмов

В качестве модели A будем рассматривать функции вида:

$$a_{\mathbf{w},b}(\mathbf{x}) := \text{sign}(\mathbf{w}^T \mathbf{x} - b),$$

где $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}$. Уравнение

$$\mathbf{w}^T \mathbf{x} - b = 0 \tag{4}$$

задаёт гиперплоскость в пространстве \mathbb{R}^m , а выражение $\text{sign}(\mathbf{w}^T \mathbf{x} - b)$ показывает в каком из полупространств, полученных при разделении исходного пространства этой гиперплоскостью лежит \mathbf{x} .

Определенные таким образом алгоритмы, показывают по какую сторону гиперплоскости лежит объект, а задача обучения при таком семействе алгоритмов — построение оптимальной гиперплоскости.

На рисунке 1 построенная гиперплоскость(прямая) "разделяет" два класса объектов. Выборку для которой возможно построить гиперплоскость, такую что объекты одного класса лежат в одном полупространстве, полученном при разделении гиперплоскостью, будем называть *линейно разделимой*:

$$\exists \mathbf{w} : \left[\begin{cases} \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i - b < 0, \forall \mathbf{x}_i \in C_1 \\ \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i - b > 0, \forall \mathbf{x}_i \in C_2 \end{cases} \right]$$

Для того чтобы окончательно сформулировать задачу оптимизации, необходимо выбрать функцию потерь L (1).

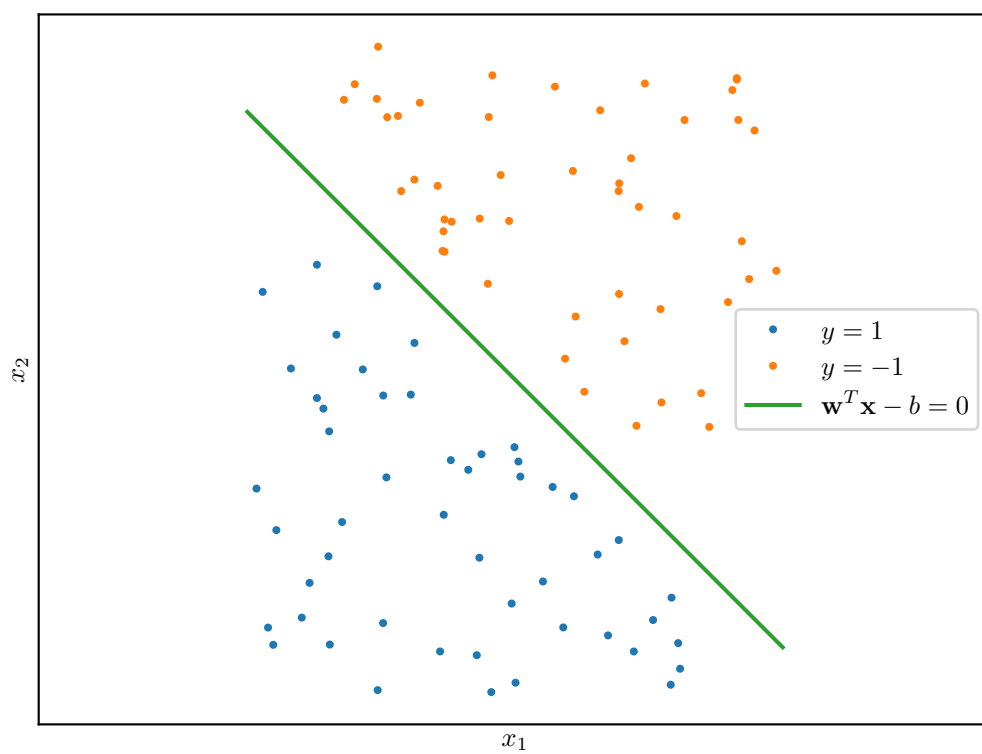


Рис. 1. Линейно разделимая выборка

Функция потерь

Естественным выбором функции потерь в задаче классификации будет:

$$L(y, y') := [y \neq y'] := \begin{cases} 1, y \neq y' \\ 0, y = y' \end{cases} \quad (5)$$

— *пороговая функция потерь*, индикатор ошибки. Функционал эмпирического риска (2) при использовании пороговой функции потерь — это доля неверно классифицированных объектов обучающей выборки:

$$Q(a, T^n) = \frac{1}{n} \sum_1^n L(a(\mathbf{x}_i), y_i) = \frac{1}{n} \sum_1^n [a(\mathbf{x}_i) \neq y_i] = \frac{1}{n} \sum_1^n [a(\mathbf{x}_i) \neq y_i] \quad (6)$$

При использовании пороговой функции потерь, задача обучения — минимизация числа неверно классифицируемых объектов обучающей выборки.

2.3. Построение алгоритма классификации

Для алгоритмов из выбранного ранее семейства и множества $Y = \{-1, 1\}$ пороговая функция потерь (5), записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} L(a(\mathbf{x}_i), y_i) &= [\text{sign}(\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i - b) \neq y_i] \\ &= [\text{sign}(\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i - b) y_i = -1] \\ &= [(\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i - b) y_i < 0] \end{aligned} \quad (7)$$

Обозначим:

$$M_a(\mathbf{x}_i) = M_{a_{\mathbf{w},b}}(\mathbf{x}_i) = M_{\mathbf{w},b}(\mathbf{x}_i) = (\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i - b) y_i$$

— *отступ* объекта \mathbf{x}_i относительно алгоритма $a = a_{\mathbf{w},b}$. При $|\mathbf{w}| = 1$, отступ — расстояние от объекта до построенной гиперплоскости, взятое с отрицательным знаком, в случае, если объект классифицирован неверно. Функция потерь переписывается в виде:

$$L(a(\mathbf{x}_i), y_i) = [M_a(\mathbf{x}_i) < 0], \quad (8)$$

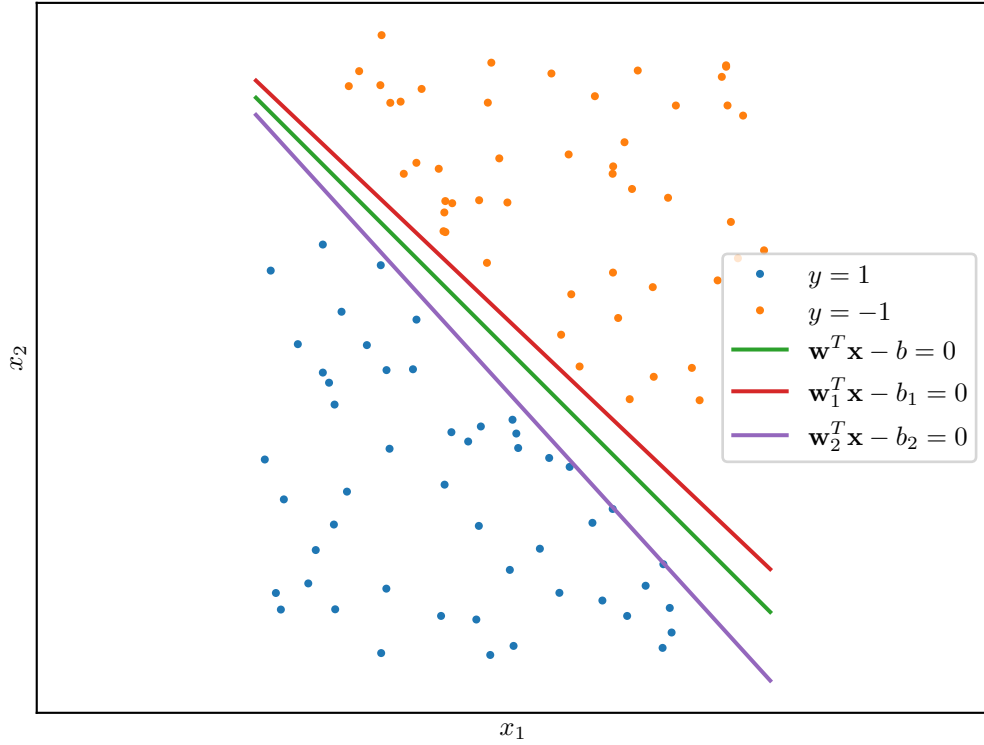


Рис. 2. Несколько разделяющих прямых

а функционал эмпирического риска и задача оптимизации:

$$Q(a_{\mathbf{w},b}, T^n) = \frac{1}{n} \sum_1^n [M_a(\mathbf{x}_i) < 0] \quad (9)$$

$$a_{opt} = \operatorname{argmin}_{a_{\mathbf{w},b} \in A} Q(a_{\mathbf{w},b}, T^n) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}} \frac{1}{n} \sum_1^n [(\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i - b)y_i < 0] \quad (10)$$

Заметим, что уравнение плоскости 4 может быть домножено на некоторое число. В этом случае $w' = \alpha w$ и $b' = \alpha b$ задают ту же гиперплоскость, и решение задачи оптимизации не единственно. Этого можно избежать, задав ограничение на норму \mathbf{w} , однако это не решит проблему единственности.

На рисунке 2 можно увидеть, что несколько прямых разделяют выборку с нулевой ошибкой: $\forall x : M(x) > 0$.

Попробуем обеспечить единственность в случае линейно разделимой выборки.

Для этого добавим следующее условие на оптимальные \mathbf{w}', b' :

$$(\mathbf{w}', b)' = \operatorname{argmax}_{\mathbf{w}, b} \left(\min_{\mathbf{x} \in X^n} \frac{M_{\mathbf{w}, b}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{w}\|} \right) = \operatorname{argmax}_{\mathbf{w}, b} \left(\frac{1}{\|\mathbf{w}\|} \min_{\mathbf{x} \in X^n} M_{\mathbf{w}, b}(\mathbf{x}) \right)$$

— оптимальные \mathbf{w}', b' должны максимизировать минимальное расстояние от объекта до разделяющей гиперплоскости.

Отметим, что минимальные для каждого из классов значения отступов, при выполнении этого условия, совпадают:

$$\begin{cases} (\mathbf{w}', b') = \operatorname{argmax}_{\mathbf{w}, b} \min_{\mathbf{x} \in X^n} \frac{M_{\mathbf{w}, b}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{w}\|} \\ \forall i : M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_i) > 0 \end{cases} \implies \min_{\mathbf{x} \in C_1} M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x} \in C_2} M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x})$$

Доказательство. Предположим, что это не так, для определённости пусть:

$$\min_{\mathbf{x} \in C_1} M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}) > \min_{\mathbf{x} \in C_2} M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}),$$

Существуют объекты разных классов на которых достигаются минимумы:

$$\exists \mathbf{x}_1 \in C_1, \mathbf{x}_2 \in C_2, \mathbf{x}_1 = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in C_1} M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}), \mathbf{x}_2 = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in C_2} M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x})$$

При этом:

$$M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_1) > M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_2)$$

Тогда положив $b'' = b' - \frac{M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_1) - M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_2)}{2}$:

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{w}', b''}(\mathbf{x}_i) &= (\mathbf{w}'^T \mathbf{x}_i - b'') y_i \\ &= (\mathbf{w}'^T \mathbf{x}_i - b' - \frac{M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_1) - M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_2)}{2}) y_i \\ &= M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_i) - \frac{M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_1) - M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_2)}{2} y_i \end{aligned}$$

$$M_{\mathbf{w}', b''}(\mathbf{x}_1) = \frac{M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_1) + M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_2)}{2}$$

$$M_{\mathbf{w}', b''}(\mathbf{x}_2) = \frac{M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_1) + M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_2)}{2}$$

— получим равенство отступов. Покажем, что минимальность для каждого из классов сохраняется:

$$\begin{aligned}\min_{\mathbf{x}_i \in C_1} M_{\mathbf{w}', b''}(\mathbf{x}_i) &= \min_{\mathbf{x}_i \in C_1} \left(M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_i) - \frac{M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_1) - M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_2)}{2} y_i \right) \\ &= \min_{\mathbf{x}_i \in C_1} \left(M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_i) - \frac{M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_1) - M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_2)}{2} \right) \\ &= \min_{\mathbf{x}_i \in C_1} (M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_i)) - \frac{M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_1) - M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_2)}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\min_{\mathbf{x}_i \in C_2} c &= \min_{\mathbf{x}_i \in C_2} \left(M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_i) - \frac{M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_1) - M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_2)}{2} y_i \right) \\ &= \min_{\mathbf{x}_i \in C_2} \left(M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_i) + \frac{M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_1) - M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_2)}{2} \right) \\ &= \min_{\mathbf{x}_i \in C_2} (M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_i)) + \frac{M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_1) - M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_2)}{2}\end{aligned}$$

Из этого следует, что (\mathbf{w}, b'') оптимальнее (\mathbf{w}, b') :

$$\min_{\mathbf{x} \in X} M_{\mathbf{w}', b''}(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x} \in C_1} M_{\mathbf{w}', b''}(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x} \in C_2} M_{\mathbf{w}', b''}(\mathbf{x}_i) > \min_{\mathbf{x} \in C_2} M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_i) = \min_{\mathbf{x} \in X} M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x})$$

□

Положим:

$$\min_{\mathbf{x} \in X^n} M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}) = 1$$

тогда задача оптимизации преобразуется

$$\begin{aligned}& \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{w}', b') = \operatorname{argmax}_{\mathbf{w}, b} \min_{\mathbf{x} \in X^n} \frac{M_{\mathbf{w}, b}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{w}\|} \\ \forall i : M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_i) > 0 \\ \min_{\mathbf{x} \in X^n} M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}) = 1 \end{array} \right. \implies \\ & \implies \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{w}', b') = \operatorname{argmax}_{\mathbf{w}, b} \frac{1}{\|\mathbf{w}\|} \\ \forall i : M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_i) \geq 1 \end{array} \right. \implies \\ & \implies \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{w}', b') = \operatorname{argmin}_{\mathbf{w}, b} \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 \\ \forall i : M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_i) \geq 1 \end{array} \right.\end{aligned}$$

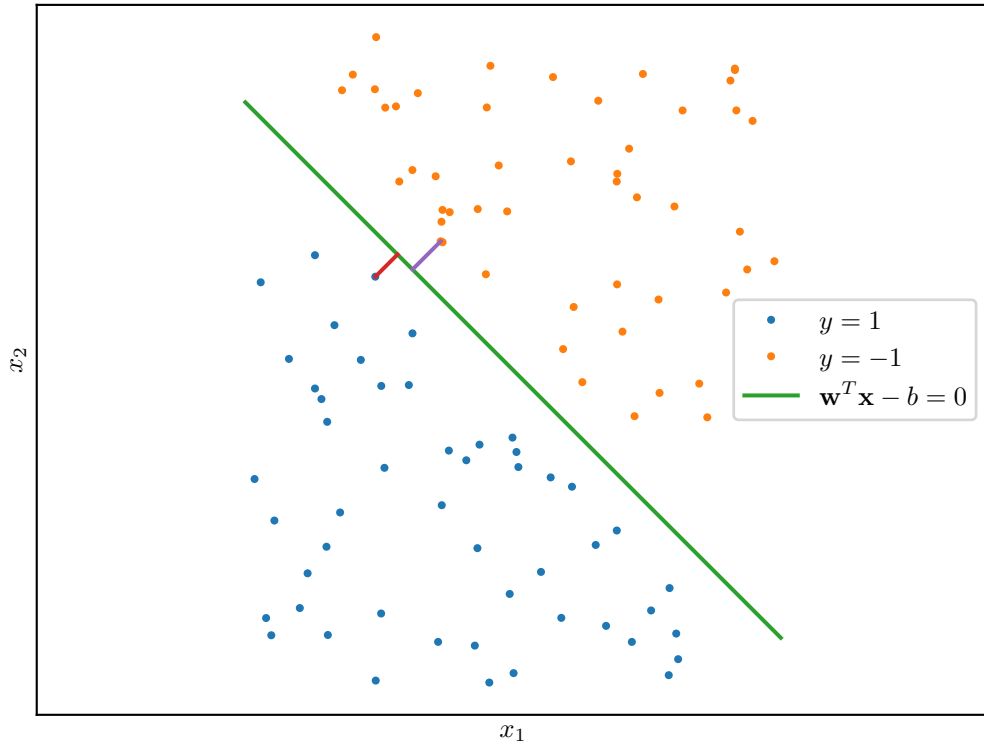


Рис. 3. Наименьшие отступы

Рассмотрев случай линейно разделимой выборки, попробуем адаптировать поставленную задачу для выборки не являющейся линейно разделимой. Для этого ослабим ограничения, позволив отступам быть меньше единицы и даже отрицательными. Разрешив ошибки построенного алгоритма на обучающей выборке, добавим к минимизируемой функции сумму этих ошибок. Получим следующую задачу:

$$\begin{cases} (\mathbf{w}', b') = \operatorname{argmin}_{\mathbf{w}, b, \xi} \frac{1}{2}(\|\mathbf{w}\|^2 + C \sum_1^n \xi_i) \\ \forall i : M_{\mathbf{w}', b'}(\mathbf{x}_i) \geq 1 - \xi_i \\ \forall i : \xi_i \geq 0 \end{cases}$$

Применим построенный алгоритм и оценим результаты.

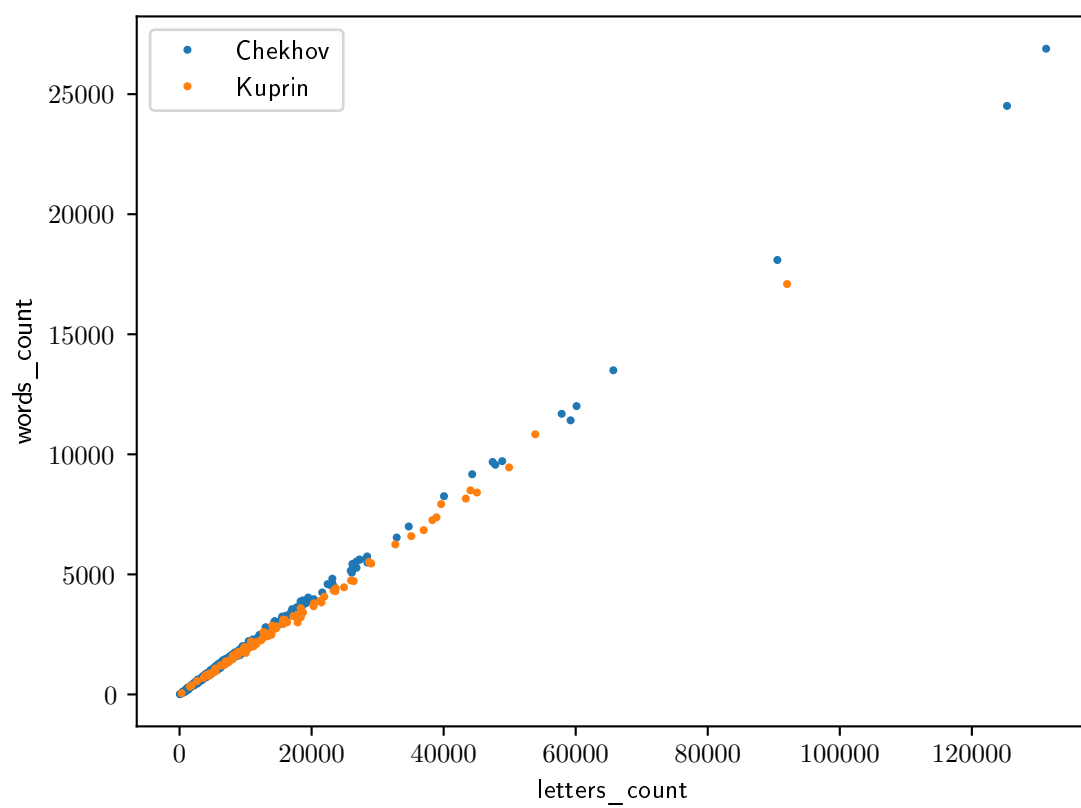


Рис. 4. Диаграмма рассеяния по количеству букв и количеству слов

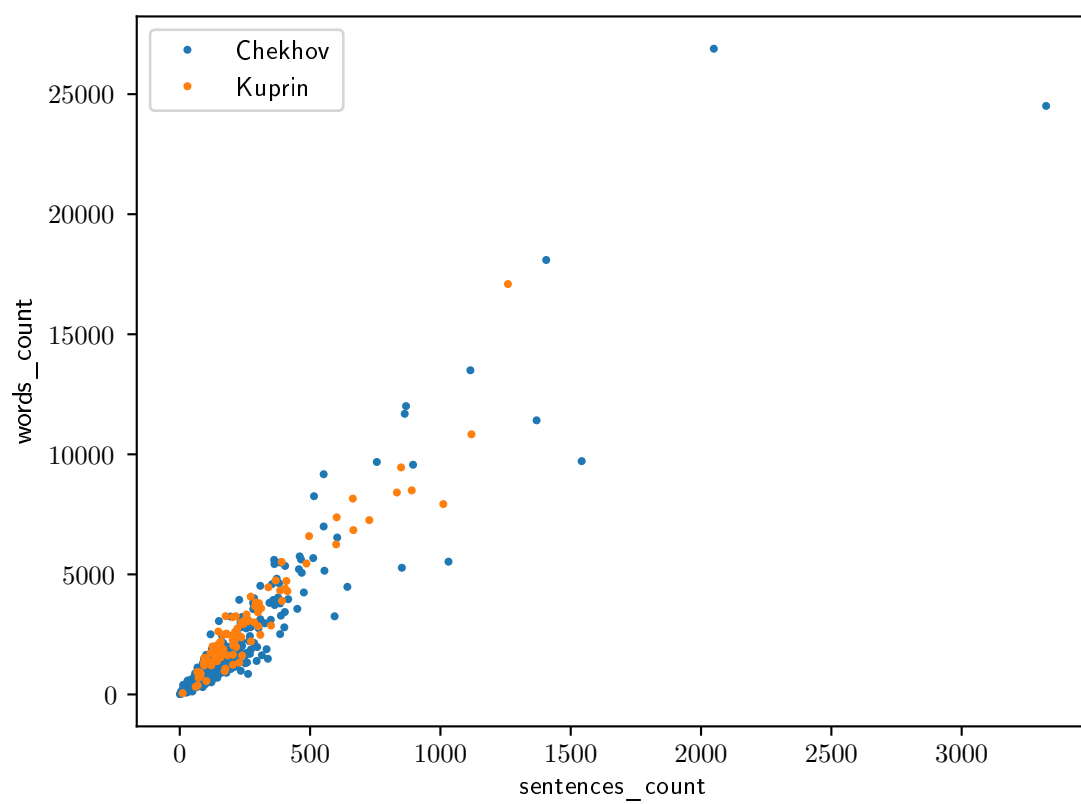


Рис. 5. Диаграмма рассеяния по количеству слов и количеству предложений

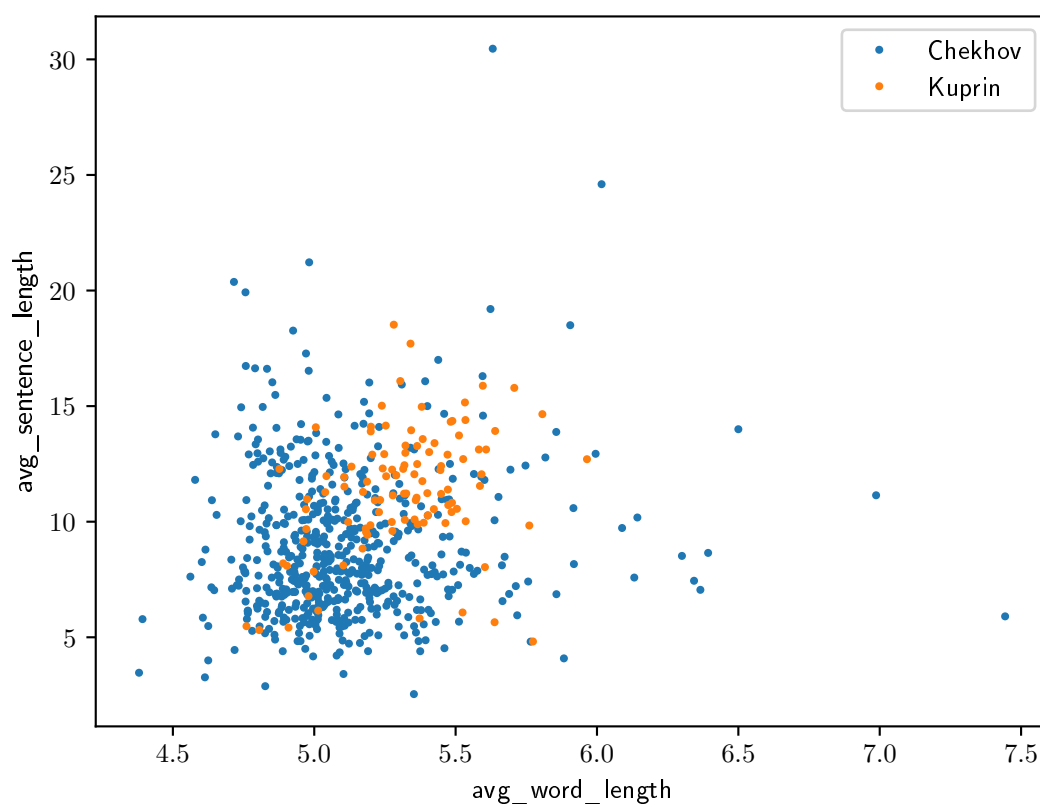


Рис. 6. Диаграмма рассеяния по средней длине слова и средней длине предложения

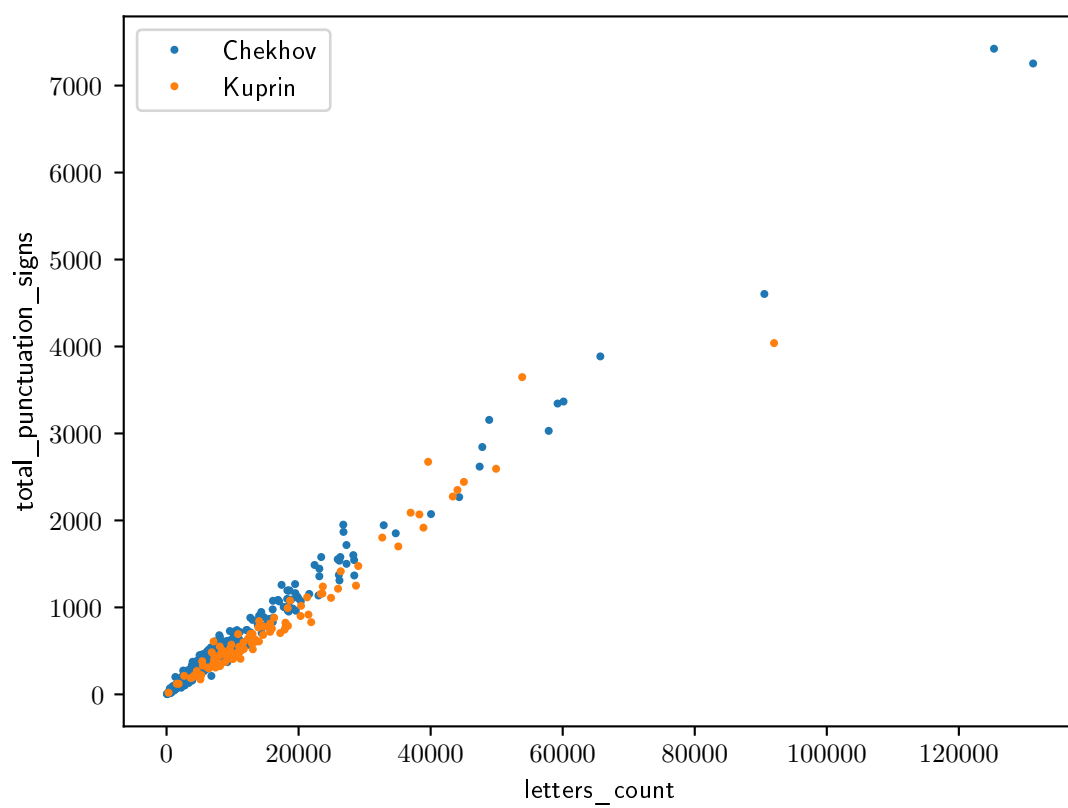


Рис. 7. Диаграмма рассеяния по количеству букв и количеству знаков препинания

2.4. Оценка результатов работы алгоритма

Для применения построенного алгоритма были собраны 669 рассказов А. П. Чехова и А. И. Куприна. И посчитаны некоторые численные характеристики каждого из рассказов. Для оценки результатов, все рассказы разбиты на обучающую и тестовые выборки. Построив диаграммы рассеяния рисунки 4,5,6,7 по некоторым признакам, было решено провести обучение на некоторых парах признаков. Рисунки 8,9,10,11 демонстрируют построенные разделяющие прямые. Таблицы 1,2,3,4 демонстрируют точность классификации на тестовой выборке при $C = 1$. Таблицы 5,6,7,8 демонстрируют точность классификации на тестовой выборке при использовании скользящего контроля для выбора C .

Таблица 1. Результаты работы алгоритма для признаков: количество букв, количество слов, число слов. $C=1$

	presision	recall	count
class1	0.85	0.97	170
class2	0.38	0.10	31
average	0.61		
accuracy	0.84		

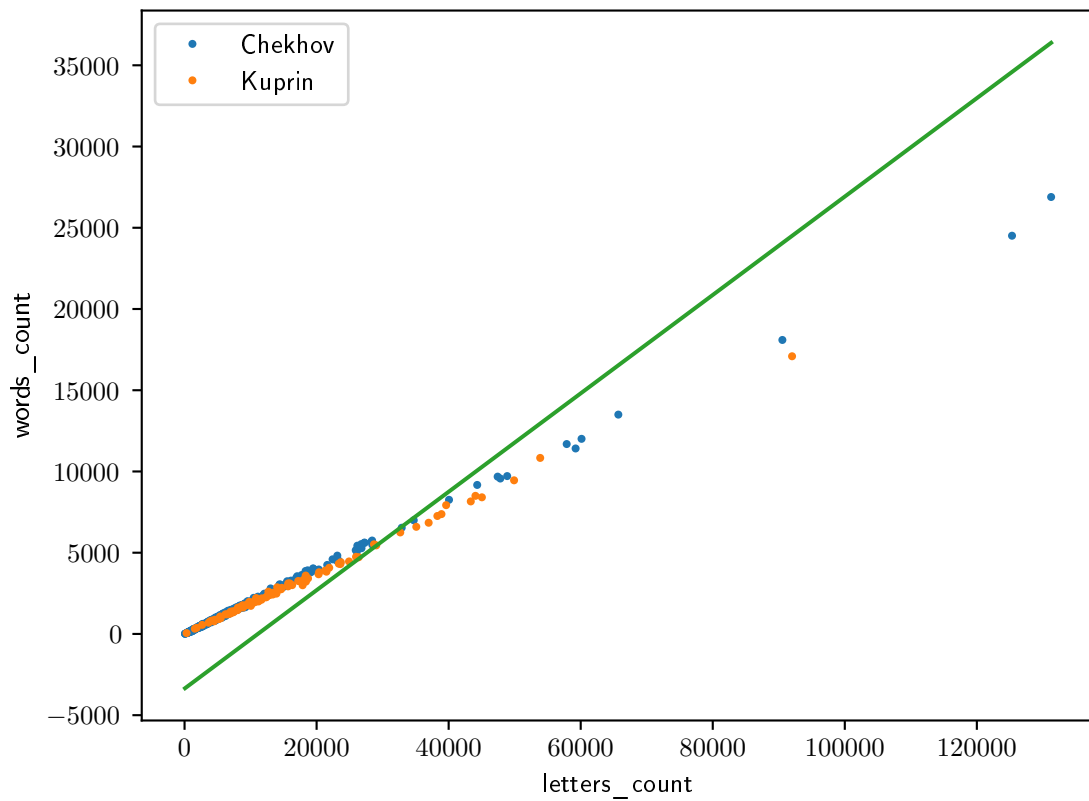


Рис. 8. Диаграмма рассеяния по количеству букв и количеству слов и разделяющая прямая

Таблица 2. Результаты работы алгоритма для признаков: количество предложений, количество слов. $C=1$

	presision	recall	count
class1	0.85	0.97	170
class2	0.29	0.06	31
average	0.57		
accuracy	0.83		

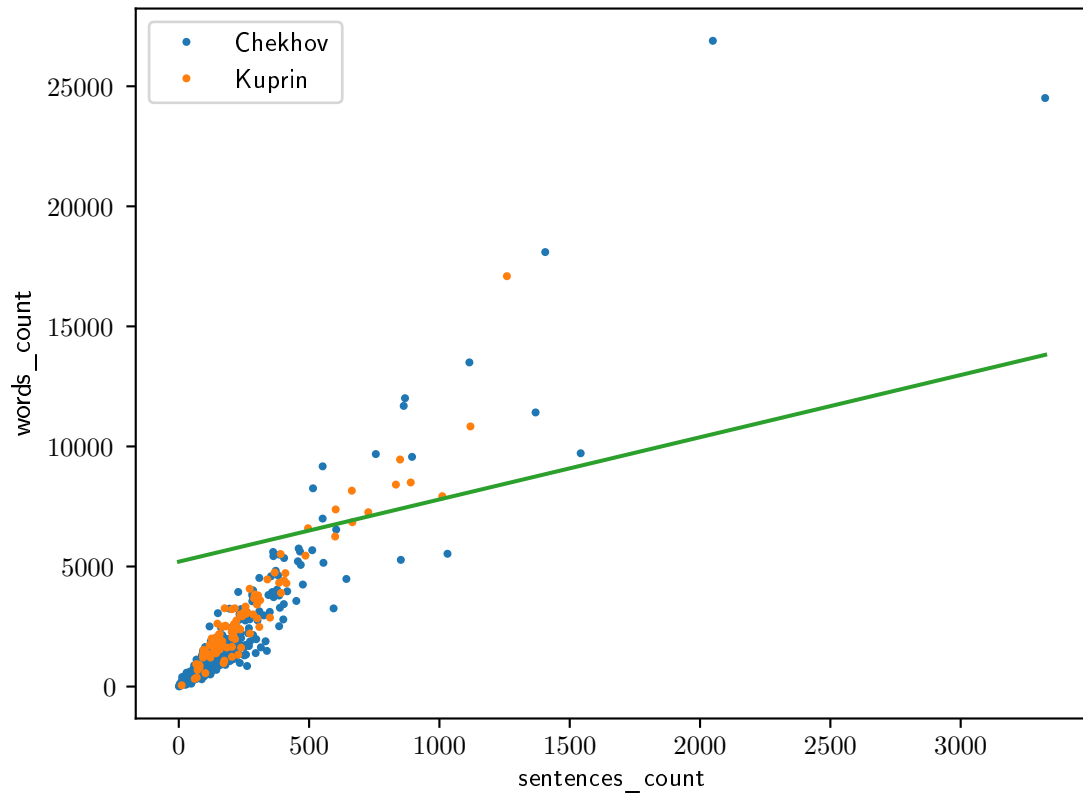


Рис. 9. Диаграмма рассеяния по количеству слов и количеству предложений и разделяющая прямая

Таблица 3. Результаты работы алгоритма для признаков: средняя длина слова, средняя длина предложения. $C=1$

	presision	recall	count
class1	0.86	0.94	170
class2	0.38	0.19	31
average	0.62		
accuracy	0.83		

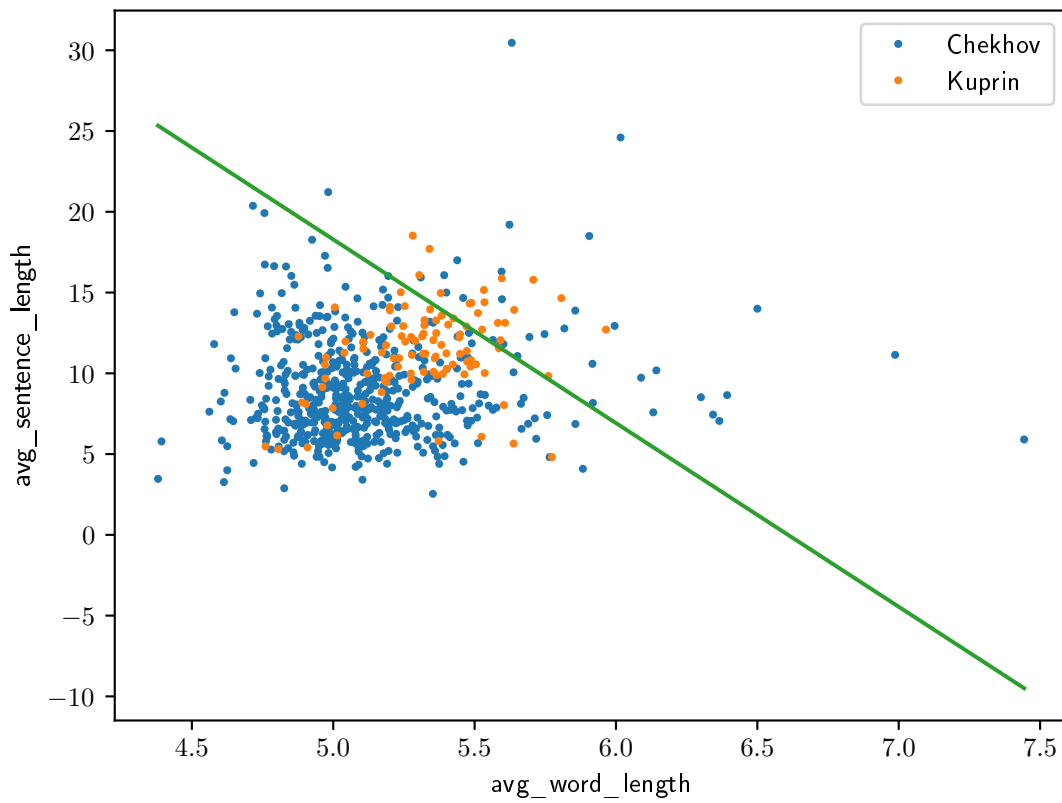


Рис. 10. Диаграмма рассеяния по средней длине слова и средней длине предложения и разделяющая прямая

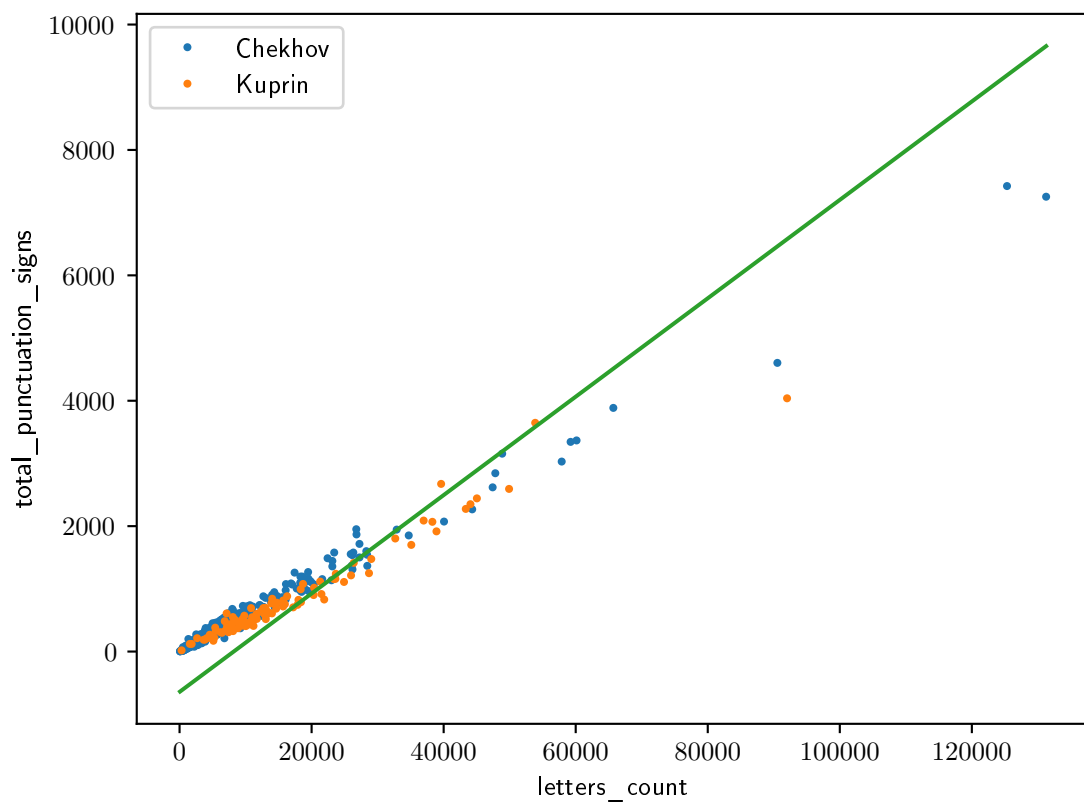


Рис. 11. Диаграмма рассеяния по количеству букв и количеству знаков препинания и разделяющая прямая

Таблица 4. Результаты работы алгоритма для признаков: количество букв, количество знаков пунктуации. $C = 1$

	presision	recall	count
class1	0.87	0.96	170
class2	0.50	0.23	31
average	0.69		
accuracy	0.85		

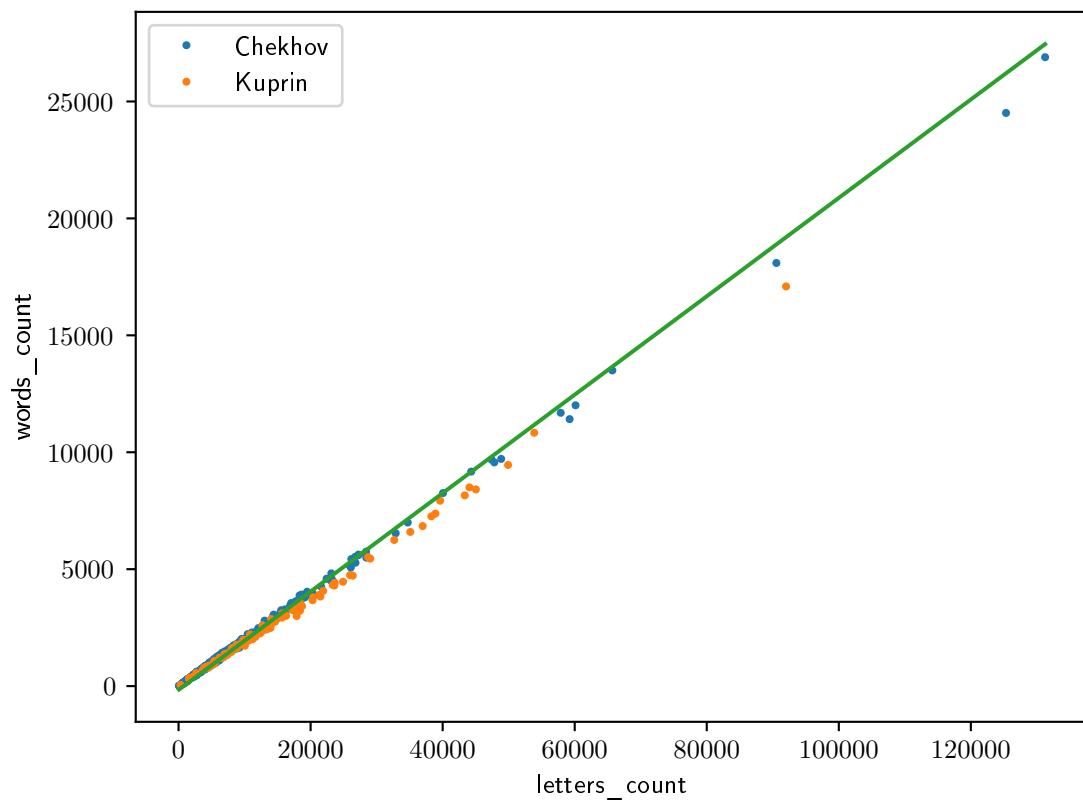


Рис. 12. Диаграмма рассеяния по количеству букв и количеству слов и разделяющая прямая.
 C выбрано используя скользящий контроль

Таблица 5. Результаты работы алгоритма для признаков: количество букв, количество слов.
 C выбрано используя скользящий контроль

	presision	recall	count
class1	0.96	0.86	170
class2	0.52	0.81	31
average	0.74		
accuracy	0.86		

Таблица 6. Результаты работы алгоритма для признаков: количество предложений, количество слов. C выбрано используя скользящий контроль

	presision	recall	count
class1	0.94	0.88	170
class2	0.50	0.68	31
average	0.72		
accuracy	0.85		

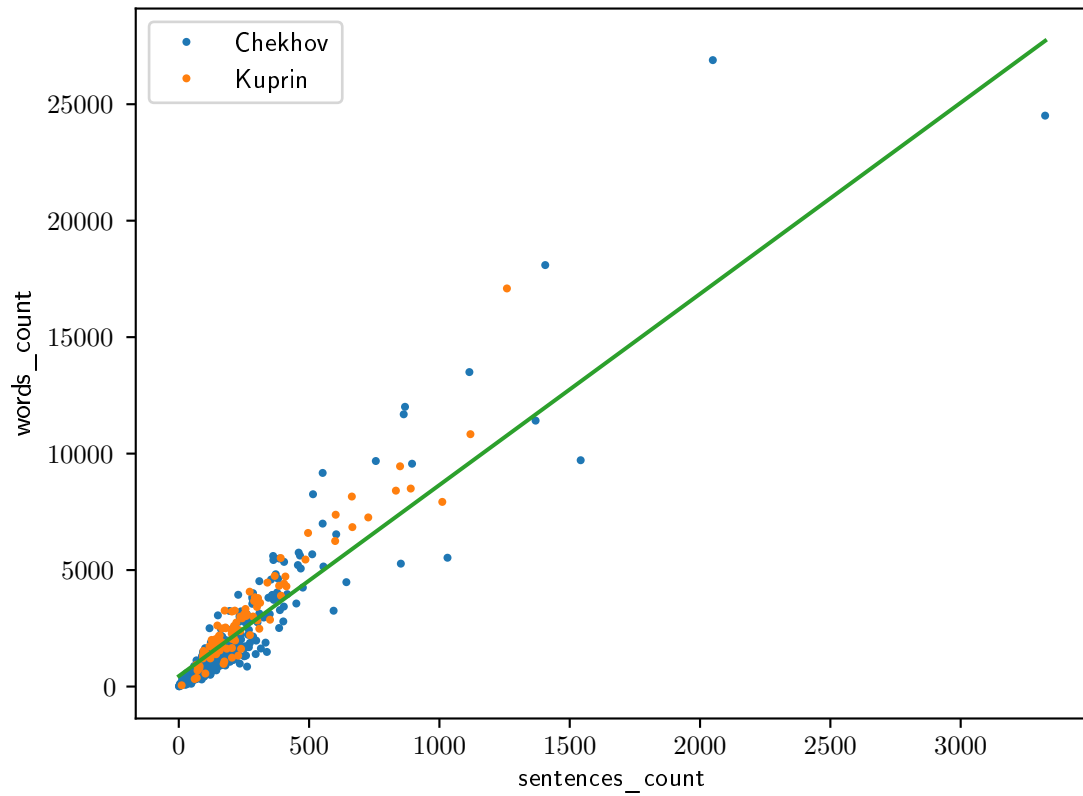


Рис. 13. Диаграмма рассеяния по количеству слов и количеству предложений и разделяющая прямая. C выбрано используя скользящий контроль

Таблица 7. Результаты работы алгоритма для признаков: средняя длина слова, средняя длина предложения. C выбрано используя скользящий контроль

	precision	recall	count
class1	0.91	0.88	170
class2	0.43	0.52	31
average	0.67		
accuracy	0.82		

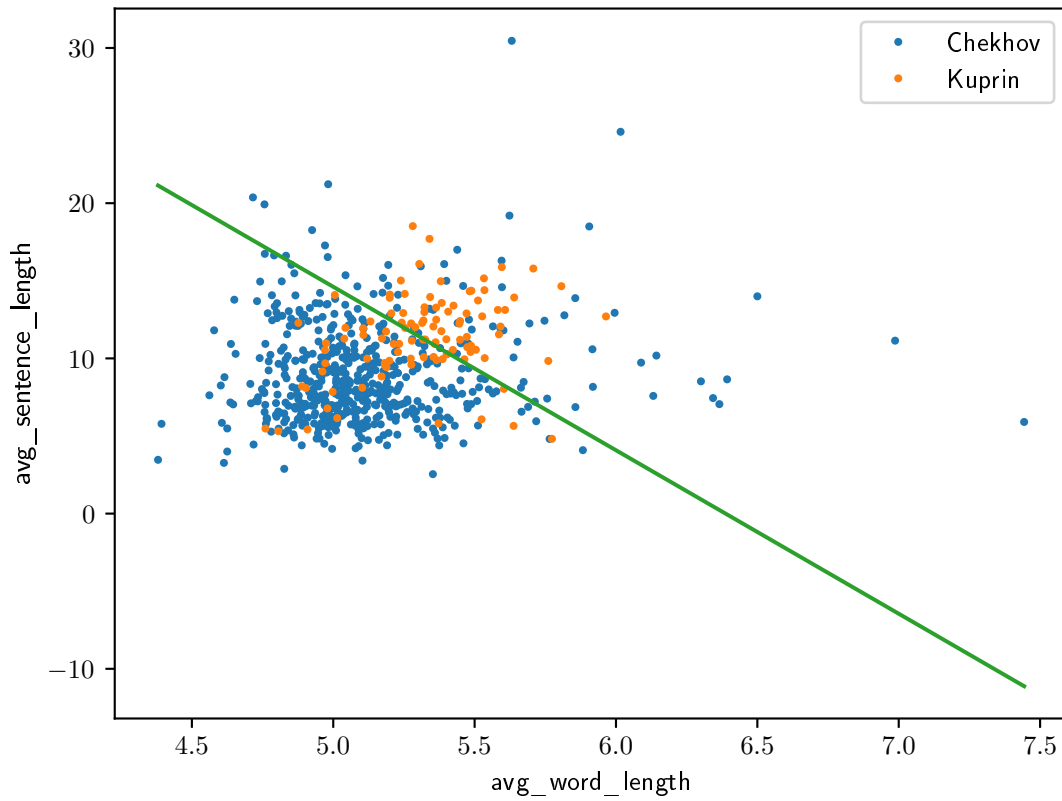


Рис. 14. Диаграмма рассеяния по средней длине слова и средней длине предложения и разделяющая прямая. C выбрано используя скользящий контроль

Таблица 8. Результаты работы алгоритма для признаков: количество букв количество знаков пунктуации. C выбрано используя скользящий контроль

	presision	recall	count
class1	0.95	0.91	170
class2	0.59	0.74	31
average	0.77		
accuracy	0.88		

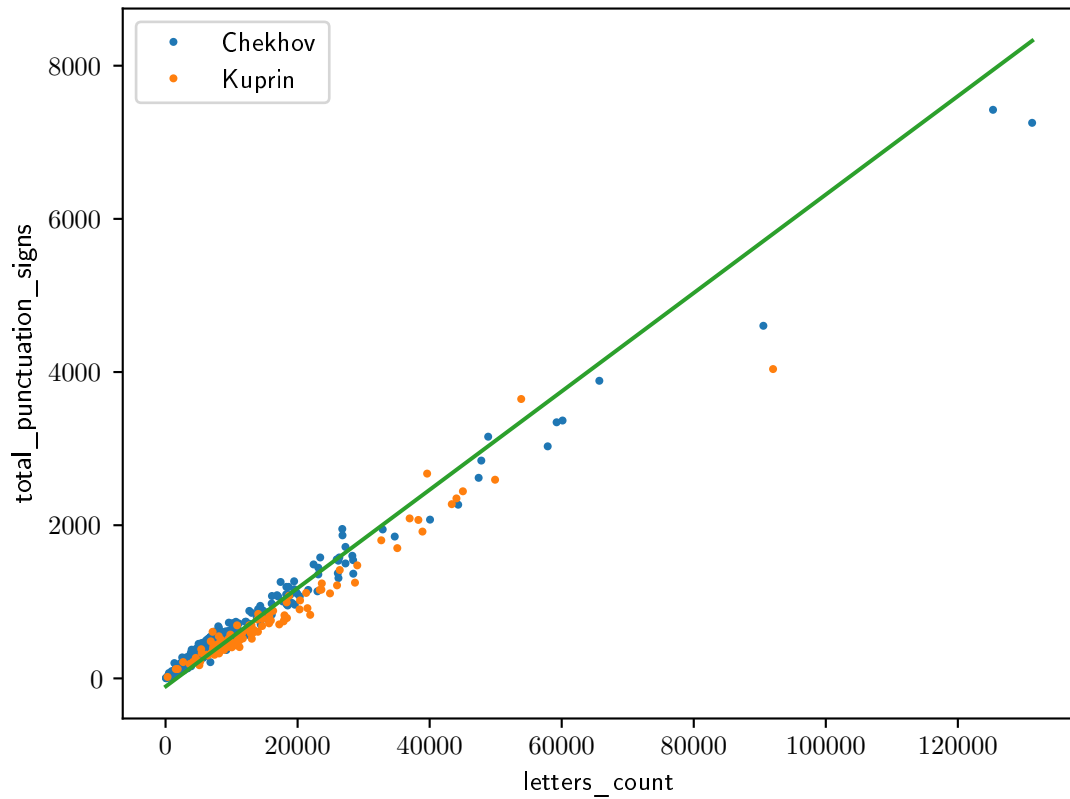


Рис. 15. Диаграмма рассеяния по количеству букв и количеству знаков препинания и разделяющая прямая. C выбрано используя скользящий контроль

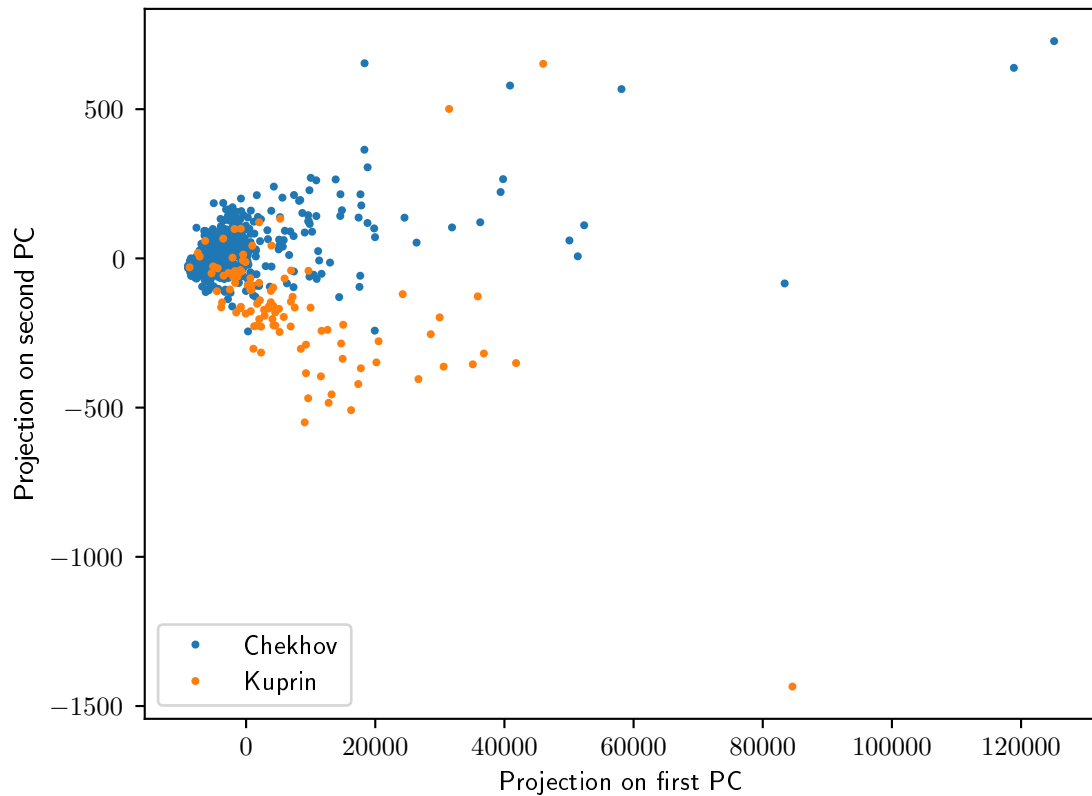


Рис. 16. Проекция на главные компоненты.

2.5. Метод главных компонент

Попробуем из m признаков получить 2, которые лучше других описывают объекты обучающей выборки: для этого вычислим сингулярное разложение центрированной и транспонированной матрицы объектов обучающей выборки и построим проекции объектов обучающей выборки на сингулярные вектора соответствующие двум наибольшим сингулярным числам.[3] Полученный на обучающей выборке вектор средних и матрицу проекции на сингулярные вектора используются при тестировании алгоритма: каждый тестовый объект смещается на вектор средних, и проекция строится используя ту же матрицу.

2.6. Оценка результатов работы модифицированного алгоритма

Рисунок 17 и таблица 9 демонстрируют результаты работы алгоритма с предварительным построением двух признаков.

Таблица 9. Результаты работы модифицированного алгоритма

	presision	recall	count
class1	0.97	0.89	170
class2	0.59	0.84	31
average	0.78		
accuracy	0.89		

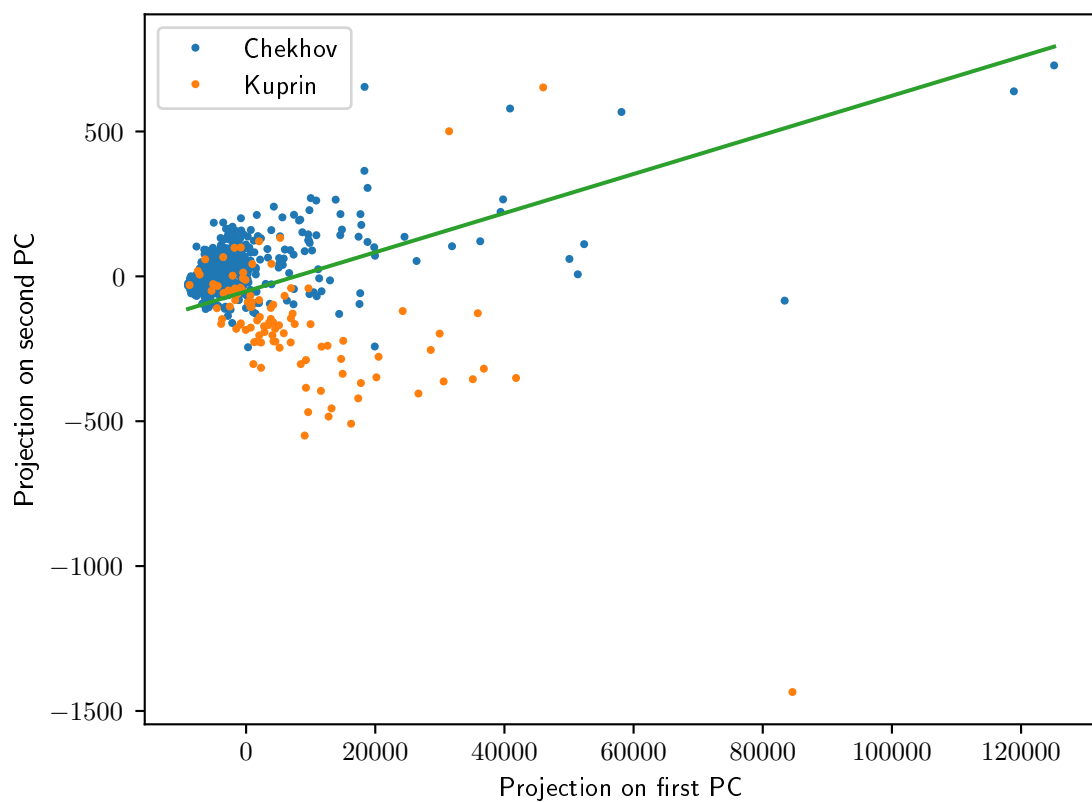


Рис. 17. Проекция на главные компоненты и разделяющая прямая

3. Заключение

В рамках работы мною изучены темы:

- классификация, как задача машинного обучения;
- метод оптимизации эмпирического риска;
- линейные модели классификации;

- оценка моделей машинного обучения;
- применение скользящего контроля;
- метод главных компонент;
- сингулярное разложение;

Список литературы

1. Обучение по прецедентам. — URL: http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=%D0%9E%D0%B1%D1%83%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%BL8%D0%B5_%D0%BF%D0%BE_%D0%BF%D1%80%D0%B5%D1%86%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D1%82%D0%B0%D0%BC.
2. Минимизация эмпирического риска. — URL: http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=%D0%9C%D0%B8%D0%BD%D0%B8%D0%BC%D0%B8%D0%B7%D0%B0%D1%86%D0%B8%D1%8F_%D1%8D%D0%BC%D0%BF%D0%B8%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B3%D0%BE_%D1%80%D0%B8%D1%81%D0%BA%D0%B0.
3. *Н.Э. Г.* Метод "Гусеница"-SSA: Анализ временных рядов. Учебное пособие. — Санкт-Петербург, 2004. — URL: http://www.gistatgroup.com/gus/ssa_an.pdf.