1. Энергетическое разрешение ФЭУ

1.1. Простейший случай

N_{born} - число световых фотонов, родившихся в сцинтилляторе.

N_{cath_abs} - число световых фотонов, поглощенных в фотокатоде

$N_{p.e.}$ - число зарегистрированных фотоэлектронов

N_e - число электронов, собранных на последнем аноде ФЭУ

Все эти величины связаны следующими соотношениями:

$$N_{cath_abs} = \sum_{i=0}^{N_{born}} n_{cath_abs}$$

$$N_{p.e.} = \sum_{i=0}^{N_{cath_abs}} n_{p.e.}$$

$$N_e = \sum_{i=0}^{N_{p.e.}} G$$

n_{cath_abs} - число световых фотонов, поглощенных в фотокатоде, если в сцинтилляторе родился один световой фотон

$n_{p.e.}$ - число зарегистрированных фотоэлектронов, если в фотокатоде поглотился один световой фотон

G - число электронов, собранных на ФЭУ, при условии, что родился один фотоэлектрон

В процессе измерений мы регистрируем число электронов N_e. Энергетическое разрешение будет определяться следующим образом:

$$\delta E = \frac{\sqrt{Var[N_e]}}{E[N_e]}$$

В дальнейшем более удобно будет использовать квадрат этой величины δE^2.

Чтобы посчитать мат. ожидание и дисперсию величины, представляющей собой сумму флуктуирующих величин, где число слагаемых тоже является случайной величиной, необходимо воспользоваться тождеством Вальда. Данное тождество утверждает следующее:

$$E\left[\sum_{i=0}^{N} X_i\right] = E[N] * E[X]$$

Как следствие этого тождества получаем выражение для дисперсии:

$$Var\left[\sum_{i=0}^{N} X_i\right] = Var[N] * (E[X])^2 + Var[X] * E[N]$$

Воспользовавшись этими двумя выражениями, выразим квадрат энергетического разрешения δE^2 через базовые величины N_{born}, n_{cath_abs}, $n_{p.e.}$, G, которые описывают детектор:

$$\delta E^2 = \frac{Var[N_{born}]}{(E[N_{born}])^2} + \frac{Var[n_{cath_abs}]}{(E[n_{cath_abs}])^2} * \frac{1}{E[N_{born}]} + \frac{Var[n_{p.e.}]}{(E[n_{p.e.}])^2} * \frac{1}{E[N_{cath_abs}]} + \frac{Var[G]}{(E[G])^2} * \frac{1}{E[N_{p.e.}]}$$

Рассмотрим каждое из слагаемых подробнее.

Слагаемое $\frac{Var[N_{born}]}{(E[N_{born}])^2}$ описывает вклад флуктуации числа фотонов, рожденных в сцинтилляторе. Стоит заметить, что $Var[N_{born}] \neq E[N_{born}]$, то есть пуассоновская статистика не выполняется. Детальное описание факторов, влияющих на собственное энергетическое разрешение сцинтиллятора можно найти в [1].

Выражение $\frac{Var[n_{cath_abs}]}{(E[n_{cath_abs}])^2} * \frac{1}{E[N_{born}]}$ описывает вклад флуктуаций сбора света на фотокатод. Существует множество факторов, влияющих на величину флуктуации: разброс точки взаимодействия рентгеновского кванта и сцинтиллятора, флуктуации поглощения световых фотонов в толще сцинтиллятора, оптической смазки или фотокатода и т.д. Чтобы найти эту величину, необходимо смоделировать распространите света в сцинтилляторе. Также тут присутствует фактор подавления $\frac{1}{E[N_{born}]}$: чем больше число рожденных фотонов, тем меньше светосбор влияет на энергетическое разрешение.

Следующее слагаемое $\frac{Var[n_{p.e.}]}{(E[n_{p.e.}])^2} * \frac{1}{E[N_{cath_abs}]}$ описывает флуктуации числа регистрируемых фотонов, вызванные конечной конверсионной эффективностью фотокатода. Под конверсионной эффективностью понимается отношение числа зарегистрированных фотоэлектронов к числу фотонов, поглощенных в толще фотокатода. Конверсионная эффективность предполагается не зависящей от угла падения фотона, как было показано в [2]. Также для простоты мы предполагаем конверсионную эффективность не зависящей от длины волны падающего света, что работает лишь в приближении. Величина $n_{p.e.}$ имеет распределение Бернулли, причем мат. ожидание рано коэффициенту конверсии $E[n_{p.e.}] = Conv$ и $Var[n_{p.e.}] = Conv(1 - Conv)$. Таким образом, начальное выражение можно упростить до следующего: $\frac{1-Conv}{Conv} * \frac{1}{E[N_{cath_abs}]}$.

Последнее слагаемое $\frac{Var[G]}{(E[G])^2} * \frac{1}{E[N_{p.e.}]}$ описывает флуктуации усиления ФЭУ. Флуктуации усиления обычно не превышают $10 - 20\%$, а наличие фактора подавления $E[N_{p.e.}]$ делает вклад данного слагаемого в энергетическое разрешение еще меньше.

1.2. Учет собственных шумов ФЭУ и шумов электроники

В предыдущем разделе описана самая простая формула для энергетического разрешения. Однако, для полноты картины, следует учесть еще шум ФЭУ и шум электроники.

Если раньше предполагалось бесконечное время интегрирования сигнала,то теперь оно конечно. Обозначим его t_{gate}. Предположим, что время интегрирования в несколько раз больше характерного времени затухания сигнала, и мы собираем весть заряд от сигнала. Отличие от предыдущего случая будет в том, что теперь в итоговый заряд будет давать вклад не только сигнал, но и шум. Число регистрируемых шумовых фотоэлектронов N_{DC} будет подчиняться статистике Пуассона с параметром, равным произведению времени интегрирования t_{gate} на частоту шумовых импульсов ν_{DC}:

$$N_{p.e.} = \sum_{i=0}^{N_{cath_abs}} n_{p.e.} + N_{DC}$$

Таким образом, в формуле энергетического разрешения появится еще один член:

$$\delta E^2 = \frac{Var[N_{born}]}{(E[N_{born}])^2} + \frac{Var[n_{cath_abs}]}{(E[n_{cath_abs}])^2} * \frac{1}{E[N_{born}]} + \\ \frac{Var[n_{p.e.}]}{(E[n_{p.e.}])^2} * \frac{1}{E[N_{cath_abs}]} + \boldsymbol{\frac{E[N_{DC}]}{(E[N_{p.e.}])^2}} + \frac{Var[G]}{(E[G])^2} * \frac{1}{E[N_{p.e.}]},$$

причем $E[N_{DC}] = Var[N_{DC}] = t_{gate} * \nu_{DC}$

и поменяется определение величины $E[N_{p.e.}]$:

$$E[N_{p.e.}] = E[N_{cath_abs}] * E[n_{p.e.}] + E[N_{DC}]$$

2. Энергетическое разрешение SiPM

2.1. Учет послеимпульсов

С точки зрения энергетического разрешения SiPM отличается от ФЭУ наличием двух дополнительных факторов, влияющих на шум: послеимпульсами и кросстоками. Послеимпульс - сигнал, появляющийся через некоторый промежуток времени после основного сигнала. Причина появления послеимпульсов заключается в захвате электронов в ловушки во время лавины с их последующим высвобождение через промежуток времени, обычно длящийся от нескольких наносекунд до нескольких микросекунд [3]. После срабатывания основного сигнала напряжение на ячейке будет восстанавливаться к исходному значению к течение времени восстановления ячейки, которое мы обозначим τ_r. Таким образом, если послеимпульс произошел после основного сигнала через время Δt, то доля заряда в послеимпульсе относительно основного сигнала будет выражаться следующим образом: $\xi(\Delta t) = 1 - \exp\left(-\Delta t/\tau_r\right)$.

Чтобы учесть вклад послеимпульсов в энергетическое разрешение необходимо ввести посправку на число зарегистрированных электронов:

$$N_e = \sum_{i=0}^{N_{p.e.}} G \left[1 + \sum_{j=0}^{N_{ap}} \xi(\Delta t_j) \right]$$

Плотность вероятности величины Δt описывается двумя затухающими экспонентами [3]:

$$f(\Delta t) = A_s * \exp(-\Delta t/\tau_s) + A_f * \exp(-\Delta t/\tau_f),$$

где τ_s и τ_f среднее время, проходящее между двумя импульсами для быстрой и медленной компоненты, а A_s и A_f - нормировочные константы.

Величина N_{ap} описывает число послеимпульсов, приходящихся на один фотоэлектрон. Пусть вероятность того, что произошел послеимпульс равна a, тогда

2.2. Учет кросстоков

Кроссток или оптический кроссток - это эффект срабатывания соседних ячеек SiPM из-за излучения оптических фотонов во время образования лавины в исходном пикселе. Поскольку свет распространяется практически мгновенно, то данный эффект не приводит к каким-либо временным сдвигам. Чтобы учесть влияние кросстока на энергетическое разрешение, необходимо модифицировать функцию плотности вероятности величины $n_{p.e.}$. Если раньше данная величина имела распределение Бернулли с параметром $E[n_{p.e.}]$, то теперь распределение будет другим. Чтобы найти это распределение нужно знать квантовую эффективность регистрации (или коэффициент конверсии, т.к. все зависит от того, какую величину рассматривать в качестве базовой) и вероятность срабатывания соседней ячейки из-за кросстока. Детальное описание вероятностей срабатывания ячеек из-за кросстока можно найти в [4]. В этой статье рассматриваются несколько моделей распространения фотонов, но утверждается, что для большинства моделей SiPM наиболее правдоподобной является модель 4-х соседей. Вероятность срабатывания N ячеек выражается через параметр p, который описывает вероятность того, что соседний пиксель сработает из-за кросстока. Вычислить параметр p можно, зная полную вероятность кросстока p_{total} (одно или больше кросстоковых событий): $(1-p)^4 = 1 - p_{total}$. Таким образом, зная квантовую эффективность ε и вероятность кросстока p, получим следующую плотность вероятности в модели 4-х соседей.

суммарное число сработавших ячеек	плотность вероятности $n_{p.e.}$
1	q^4
2	$\varepsilon * 4pq^6$
3	$\varepsilon * 18p^2q^8$
4	$\varepsilon * p^3q^8[1 + 3q + 18q^2]$
5	$\varepsilon * 5p^4q^{10}[8 + 24q + 55q^2]$
$N > 5$	$\simeq \varepsilon * P(5)\left[1 - \frac{P(5)}{1-\sum\limits_{k=1}^{4} P(k)}\right]^{N-5}$

Чтобы учесть вклад кросстоков в энергетическое разрешение, необходимо модифицировать величину $N_{p.e.}$:

$$N_{p.e.} = \sum_{i=0}^{N_{cath_{abs}}} n_{p.e.} + \sum_{i=0}^{N_{DC}} n_{p.e.}^{DC},$$

где величина $n_{p.e.}^{DC}$ - число зарегистрированных фотоэлектронов, если произошел одиночный шумовой (тепловой) импульс. Данная величина имеет тоже распределение,что и $n_{p.e.}$, только с параметром $\varepsilon = 1$.

Список литературы

[1] TOWARD A USER'S TOOLKIT FOR MODELING SCINTILLATOR PROPORTIONALITY AND LIGHT YIELD

[2] M.D. Lay, Nucl. Instr. and Meth. A 383 (1996) 485; M.D. Lay, M.J. Lyon, Nucl. Instr. and Meth. A 383 (1996) 495.

[3] Characterisation Studies of Silicon Photomultipliers Patrick Eckert, Hans-Christian Schultz-Coulon, Wei Shen, Rainer Stamen, Alexander Tadday

[4] Modeling crosstalk in silicon photomultipliers L. Gallego, J. Rosado, F. Blanco and F. Arqueros