1. Энергетическое разрешение ФЭУ

1.1. Простейший случай

N_{born} - число световых фотонов, родившихся в сцинтилляторе.

N_{cath_abs} - число световых фотонов, поглощенных в фотокатоде

$N_{p.e.}$ - число зарегистрированных фотоэлектронов

N_e - число электронов, собранных на последнем аноде ФЭУ

Все эти величины связаны следующими соотношениями:

$$N_{cath_abs} = \sum_{i=0}^{N_{born}} n_{cath_abs}$$

$$N_{p.e.} = \sum_{i=0}^{N_{cath_abs}} n_{p.e.}$$

$$N_e = \sum_{i=0}^{N_{p.e.}} G$$

n_{cath_abs} - число световых фотонов, поглощенных в фотокатоде, если в сцинтилляторе родился один световой фотон

$n_{p.e.}$ - число зарегистрированных фотоэлектронов, если в фотокатоде поглотился один световой фотон

G - число электронов, собранных на ФЭУ, при условии, что родился один фотоэлектрон

В процессе измерений мы регистрируем число электронов N_e. Энергетическое разрешение будет определяться следующим образом:

$$\delta E = \frac{\sqrt{Var[N_e]}}{E[N_e]}$$

В дальнейшем более удобно будет использовать квадрат этой величины δE^2.

Чтобы посчитать мат. ожидание и дисперсию величины, представляющей собой сумму флуктуирующих величин, где число слагаемых тоже является случайной величиной, необходимо воспользоваться тождеством Вальда. Данное тождество утверждает следующее:

$$E\left[\sum_{i=0}^{N} X_i\right] = E[N] * E[X]$$

Как следствие этого тождества получаем выражение для дисперсии:

$$Var\left[\sum_{i=0}^{N} X_i\right] = Var[N] * (E[X])^2 + Var[X] * E[N]$$

Воспользовавшись этими двумя выражениями, выразим квадрат энергетического разрешения δE^2 через базовые величины N_{born}, n_{cath_abs}, $n_{p.e.}$, G, которые описывают детектор:

$$\delta E^2 = \frac{Var[N_{born}]}{(E[N_{born}])^2} + \frac{Var[n_{cath_abs}]}{(E[n_{cath_abs}])^2} * \frac{1}{E[N_{born}]} + \frac{Var[n_{p.e.}]}{(E[n_{p.e.}])^2} * \frac{1}{E[N_{cath_abs}]} + \frac{Var[G]}{(E[G])^2} * \frac{1}{E[N_{p.e.}]}$$

Рассмотрим каждое из слагаемых подробнее.

Слагаемое $\frac{Var[N_{born}]}{(E[N_{born}])^2}$ описывает вклад флуктуации числа фотонов, рожденных в сцинтилляторе. Стоит заметить, что $Var[N_{born}] \neq E[N_{born}]$, то есть пуассоновская статистика не выполняется. Детальное описание факторов, влияющих на собственное энергетическое разрешение сцинтиллятора можно найти в [1].

Выражение $\frac{Var[n_{cath_abs}]}{(E[n_{cath_abs}])^2} * \frac{1}{E[N_{born}]}$ описывает вклад флуктуаций сбора света на фотокатод. Существует множество факторов, влияющих на величину флуктуации: разброс точки взаимодействия рентгеновского кванта и сцинтиллятора, флуктуации поглощения световых фотонов в толще сцинтиллятора, оптической смазки или фотокатода и т.д. Чтобы найти эту величину, необходимо смоделировать распространите света в сцинтилляторе. Также тут присутствует фактор подавления $\frac{1}{E[N_{born}]}$: чем больше число рожденных фотонов, тем меньше светосбор влияет на энергетическое разрешение.

Следующее слагаемое $\frac{Var[n_{p.e.}]}{(E[n_{p.e.}])^2} * \frac{1}{E[N_{cath_abs}]}$ описывает флуктуации числа регистрируемых фотонов, вызванные конечной конверсионной эффективностью фотокатода. Под конверсионной эффективностью понимается отношение числа зарегистрированных фотоэлектронов к числу фотонов, поглощенных в толще фотокатода. Конверсионная эффективность предполагается не зависящей от угла падения фотона, как было показано в [2]. Также для простоты мы предполагаем конверсионную эффективность не зависящей от длины волны падающего света, что работает лишь в приближении. Величина $n_{p.e.}$ имеет распределение Бернулли, причем мат. ожидание рано коэффициенту конверсии $E[n_{p.e.}] = Conv$ и $Var[n_{p.e.}] = Conv(1 - Conv)$. Таким образом, начальное выражение можно упростить до следующего: $\frac{1-Conv}{Conv} * \frac{1}{E[N_{cath_abs}]}$.

Последнее слагаемое $\frac{Var[G]}{(E[G])^2} * \frac{1}{E[N_{p.e.}]}$ описывает флуктуации усиления ФЭУ. Флуктуации усиления обычно не превышают $10 - 20\%$, а наличие фактора подавления $E[N_{p.e.}]$ делает вклад данного слагаемого в энергетическое разрешение еще меньше.

1.2. Учет собственных шумов ФЭУ и шумов электроники

В предыдущем разделе описана самая простая формула для энергетического разрешения. Однако, для полноты картины, следует учесть еще шум ФЭУ и шум электроники.

Если раньше предполагалось бесконечное время интегрирования сигнала,то теперь оно конечно. Обозначим его t_{gate}. Предположим, что время интегрирования в несколько раз больше характерного времени затухания сигнала, и мы собираем весть заряд от сигнала. Отличие от предыдущего случая будет в том, что теперь в итоговый заряд будет давать вклад не только сигнал, но и шум. Число регистрируемых шумовых фотоэлектронов N_{DC} будет подчиняться статистике Пуассона с параметром, равным произведению времени интегрирования t_{gate} на частоту шумовых импульсов ν_{DC}:

$$N_{p.e.} = \sum_{i=0}^{N_{cath_abs}} n_{p.e.} + N_{DC}$$

Таким образом, в формуле энергетического разрешения появится еще один член:

$$\delta E^2 = \frac{Var[N_{born}]}{(E[N_{born}])^2} + \frac{Var[n_{cath_abs}]}{(E[n_{cath_abs}])^2} * \frac{1}{E[N_{born}]} + \frac{Var[n_{p.e.}]}{(E[n_{p.e.}])^2} * \frac{1}{E[N_{cath_abs}]} + \boldsymbol{\frac{E[N_{DC}]}{(E[N_{p.e.}])^2}} + \frac{Var[G]}{(E[G])^2} * \frac{1}{E[N_{p.e.}]},$$

причем $E[N_{DC}] = Var[N_{DC}] = t_{gate} * \nu_{DC}$

2. Энергетическое разрешение SiPM

С точки зрения энергетического разрешения SiPM отличается от ФЭУ наличием двух дополнительных факторов: послеимпульсами и кросстоками.

Список литературы

[1] TOWARD A USER‘S TOOLKIT FOR MODELING SCINTILLATOR PROPORTIONALITY AND LIGHT YIELD

[2] M.D. Lay, Nucl. Instr. and Meth. A 383 (1996) 485; M.D. Lay, M.J. Lyon, Nucl. Instr. and Meth. A 383 (1996) 495.