

# 1. Энергетическое разрешение ФЭУ

## 1.1. Простейший случай

$N_{born}$  - число световых фотонов, родившихся в сцинтиляторе.

$N_{cathabs}$  - число световых фотонов, поглощенных в фотокатоде

$N_{p.e.}$  - число зарегистрированных фотоэлектронов

$N_e$  - число электронов, собранных на последнем аноде ФЭУ

Все эти величины связаны следующими соотношениями:

$$N_{cathabs} = \sum_{i=0}^{N_{born}} n_{cathabs}$$

$$N_{p.e.} = \sum_{i=0}^{N_{cathabs}} n_{p.e.}$$

$$N_e = \sum_{i=0}^{N_{p.e.}} G$$

$n_{cathabs}$  - число световых фотонов, поглощенных в фотокатоде, если в сцинтиляторе родился один световой фотон

$n_{p.e.}$  - число зарегистрированных фотоэлектронов, если в фотокатоде поглотился один световой фотон

$G$  - число электронов, собранных на ФЭУ, при условии, что родился один фотоэлектрон

В процессе измерений мы регистрируем число электронов  $N_e$ . Энергетическое разрешение будет определяться следующим образом:

$$\delta E = \frac{\sqrt{Var[N_e]}}{E[N_e]}$$

В дальнейшем более удобно будет использовать квадрат этой величины  $\delta E^2$ .

Сцинтилятор имеет некий спектр излучения с плотностью вероятности  $P(\lambda)$ , поэтому необходимо проинтегрировать сигнал и шум:

$$\delta E^2 = \frac{\int Var[N_e] * P(\lambda) d\lambda}{\left( \int E[N_e] P(\lambda) d\lambda \right)^2}$$

Рассмотрим для простоты случай, когда сцинтилятор излучает свет на одной длине волны.

Чтобы посчитать мат. ожидание и дисперсию величины, представляющей собой сумму флуктуирующих величин, где число слагаемых тоже является случайной

величиной, необходимо воспользоваться тождеством Вальда. Данное тождество утверждает следующее:

$$E \left[ \sum_{i=0}^N X_i \right] = E[N] * E[X]$$

Как следствие этого тождества получаем выражение для дисперсии:

$$Var \left[ \sum_{i=0}^N X_i \right] = Var[N] * (E[X])^2 + Var[X] * E[N]$$

Воспользовавшись этими двумя выражениями, выразим квадрат энергетического разрешения  $\delta E^2$  через базовые величины  $N_{born}$ ,  $n_{cathabs}$ ,  $n_{p.e.}$ ,  $G$ , которые описывают детектор:

$$\begin{aligned} \delta E^2 = & \frac{Var[N_{born}]}{(E[N_{born}])^2} + \frac{Var[n_{cathabs}]}{(E[n_{cathabs}])^2} * \frac{1}{E[N_{born}]} + \\ & \frac{Var[n_{p.e.}]}{(E[n_{p.e.}])^2} * \frac{1}{E[N_{cathabs}]} + \frac{Var[G]}{(E[G])^2} * \frac{1}{E[N_{p.e.}]} \end{aligned} \quad (1)$$

Рассмотрим каждое из слагаемых подробнее.

Слагаемое  $\frac{Var[N_{born}]}{(E[N_{born}])^2}$  описывает вклад флуктуации числа фотонов, рожденных в сцинтилляторе. Стоит заметить, что  $Var[N_{born}] \neq E[N_{born}]$ , то есть пуассоновская статистика не выполняется. Детальное описание факторов, влияющих на собственное энергетическое разрешение сцинтиллятора можно найти в [1].

Выражение  $\frac{Var[n_{cathabs}]}{(E[n_{cathabs}])^2} * \frac{1}{E[N_{born}]}$  описывает вклад флуктуаций сбора света на фотокатод. Существует множество факторов, влияющих на величину флуктуации: разброс точки взаимодействия рентгеновского кванта и сцинтиллятора, флуктуации поглощения световых фотонов в толще сцинтиллятора, оптической смазки или фотокатода и т.д. Чтобы найти эту величину, необходимо смоделировать распространение света в сцинтилляторе. Также тут присутствует фактор подавления  $\frac{1}{E[N_{born}]}$ : чем больше число рожденных фотонов, тем меньше светосбор влияет на энергетическое разрешение.

Следующее слагаемое  $\frac{Var[n_{p.e.}]}{(E[n_{p.e.}])^2} * \frac{1}{E[N_{cathabs}]}$  описывает флуктуации числа регистрируемых фотонов, вызванные конечной конверсионной эффективностью фотокатода. Под конверсионной эффективностью понимается отношение числа зарегистрированных фотоэлектронов к числу фотонов, поглощенных в толще фотокатода. Конверсионная эффективность предполагается не зависящей от угла падения фотона, как было показано в [2]. Величина  $n_{p.e.}$  имеет распределение Бернулли, причем мат. ожидание равно коэффициенту конверсии  $E[n_{p.e.}] = Conv$  и  $Var[n_{p.e.}] = Conv(1 - Conv)$ . Таким образом, начальное выражение можно упростить до следующего:  $\frac{1-Conv}{Conv} * \frac{1}{E[N_{cathabs}]}$ .

Последнее слагаемое  $\frac{Var[G]}{(E[G])^2} * \frac{1}{E[N_{p.e.}]}$  описывает флуктуации усиления ФЭУ. Флуктуации усиления обычно не превышают 10 – 20%, а наличие фактора подавления  $E[N_{p.e.}]$  делает вклад данного слагаемого в энергетическое разрешение еще меньше.

## 1.2. Учет собственных шумов ФЭУ и шумов электроники

В предыдущем разделе описана самая простая формула для энергетического разрешения. Однако, для полноты картины, следует учесть еще шум ФЭУ и шум электроники.

Если раньше предполагалось бесконечное время интегрирования сигнала, то теперь оно конечно. Обозначим его  $t_{gate}$ . Предположим, что время интегрирования в несколько раз больше характерного времени затухания сигнала, и мы собираем весь заряд от сигнала. Отличие от предыдущего случая будет в том, что теперь в итоговый заряд будет давать вклад не только сигнал, но и шум. Число регистрируемых шумовых фотоэлектронов  $N_{DC}$  будет подчиняться статистике Пуассона с параметром, равным произведению времени интегрирования  $t_{gate}$  на частоту шумовых импульсов  $\nu_{DC}$ :

$$N_{p.e.} = \sum_{i=0}^{N_{cathabs}} n_{p.e.} + N_{DC}$$

При наличии шумов формулу для энергетического разрешения уже не получится записать в таком же простом виде как и раньше:

$$\delta E^2 = \frac{Var[N_{p.e.}]}{(E[N_{p.e.}])^2} + \frac{Var[G]}{(E[G])^2} \frac{1}{E[N_{p.e.}]}$$

причем  $E[N_{DC}] = Var[N_{DC}] = t_{gate} * \nu_{DC}$

$$E[N_{p.e.}] = E[N_{cathabs}] * E[n_{p.e.}] + E[N_{DC}]$$

$$Var[N_{p.e.}] = Var[N_{cathabs}](E[n_{p.e.}])^2 + Var[N_{DC}]$$

## 2. Энергетическое разрешение SiPM

### 2.1. Учет послеимпульсов

С точки зрения энергетического разрешения SiPM отличается от ФЭУ наличием двух дополнительных факторов, влияющих на шум: послеимпульсами и кросстоками. Послеимпульс - сигнал, появляющийся через некоторый промежуток времени после основного сигнала. Причина появления послеимпульсов заключается

в захвате электронов в ловушки во время лавины с их последующим высвобождением через промежуток времени, обычно длящийся от нескольких наносекунд до нескольких микросекунд [3]. После срабатывания основного сигнала напряжение на ячейке будет восстанавливаться к исходному значению к течению времени восстановления ячейки, которое мы обозначим  $\tau_r$ . Таким образом, если послеимпульс произошел после основного сигнала через время  $\Delta t$ , то доля заряда в послеимпульсе относительно основного сигнала будет выражаться следующим образом:  $\xi(\Delta t) = 1 - \exp(-\Delta t/\tau_r)$ .

Чтобы учесть вклад послеимпульсов в энергетическое разрешение необходимо ввести поправку на число зарегистрированных электронов:

$$N_e = \sum_{i=0}^{N_{p.e.}} G \left[ 1 + \sum_{j=0}^{N_{ap}} \xi(\Delta t_j) \right]$$

Плотность вероятности величины  $\Delta t$  описывается двумя затухающими экспонентами [3]:

$$f(\Delta t) = A_s * \exp(-\Delta t/\tau_s) + A_f * \exp(-\Delta t/\tau_f),$$

где  $\tau_s$  и  $\tau_f$  среднее время, проходящее между двумя импульсами для быстрой и медленной компоненты, а  $A_s$  и  $A_f$  - нормировочные константы.

Величина  $N_{ap}$  описывает число послеимпульсов, приходящихся на один фотон-электрон. Пусть вероятность того, что произошел послеимпульс равна  $a$ , тогда

## 2.2. Учет кросстоков

Кроссток или оптический кроссток - это эффект срабатывания соседних ячеек SiPM из-за излучения оптических фотонов во время образования лавины в исходном пикселе. Поскольку свет распространяется практически мгновенно, то данный эффект не приводит к каким-либо временным сдвигам. Чтобы учесть влияние кросстока на энергетическое разрешение, необходимо модифицировать функцию плотности вероятности величины  $n_{p.e.}$ . Если раньше данная величина имела распределение Бернулли с параметром  $E[n_{p.e.}]$ , то теперь распределение будет другим. Чтобы найти это распределение нужно знать квантовую эффективность регистрации (или коэффициент конверсии, т.к. все зависит от того, какую величину рассматривать в качестве базовой) и вероятность срабатывания соседней ячейки из-за кросстока. Детальное описание вероятностей срабатывания ячеек из-за кросстока можно найти в [4]. В этой статье рассматриваются несколько моделей распространения фотонов, но утверждается, что для большинства моделей SiPM наиболее правдоподобной является модель 4-х соседей. Вероятность срабатывания  $N$  ячеек выражается через параметр  $p$ , который описывает вероятность того, что соседний пиксель сработает из-за кросстока. Вычислить параметр  $p$  можно, зная

полную вероятность кросстока  $p_{total}$  (одно или больше кросстоковых событий):  $(1 - p)^4 = 1 - p_{total}$ . В дальнейшем удобно будет ввести величину  $q = 1 - p$ . Таким образом, зная квантовую эффективность  $\varepsilon$  и вероятность кросстока  $p$ , получим следующую плотность вероятности в модели 4-х соседей.

суммарное число сработавших ячеек	плотность вероятности $n_{p.e.}$
1	$\varepsilon * q^4$
2	$\varepsilon * 4pq^6$
3	$\varepsilon * 18p^2q^8$
4	$\varepsilon * p^3q^8[1 + 3q + 18q^2]$
5	$\varepsilon * 5p^4q^{10}[8 + 24q + 55q^2]$
$N > 5$	$\simeq \varepsilon * P(5) \left[ 1 - \frac{P(5)}{1 - \sum_{k=1}^4 P(k)} \right]^{N-5}$

Чтобы учесть вклад кросстоков в энергетическое разрешение необходимо пересчитать  $E[n_{p.e.}]$  и  $Var[n_{p.e.}]$  с учетом модифицированной плотности вероятности, причем в отсутствии шумов SiPM формула для энергетического разрешения останется прежней (1).

Если учесть еще и собственные шумы SiPM, то необходимо изменить величину  $N_{p.e.}$ :

$$N_{p.e.} = \sum_{i=0}^{N_{cath_{abs}}} n_{p.e.} + \sum_{i=0}^{N_{DC}} n_{p.e.}^{DC},$$

где величина  $n_{p.e.}^{DC}$  - число зарегистрированных фотоэлектронов, если произошел одиночный шумовой (тепловой) импульс. Данная величина имеет тоже распределение, что и  $n_{p.e.}$ , только с параметром  $\varepsilon = 1$ . Таким образом, получим следующие значения для мат. ожидания и дисперсии:

$$E[N_{p.e.}] = E[n_{p.e.}^{DC}] \{ \varepsilon * E[N_{cath}] + E[N_{DC}] \}$$

$$Var[N_{p.e.}] = \{ Var[N_{cath_{abs}}] * (E[n_{p.e.}^{DC}])^2 + Var[n_{p.e.}^{DC}] * E[N_{cath_{abs}}] \} \varepsilon^2 + \{ (E[n_{p.e.}^{DC}])^2 + Var[n_{p.e.}^{DC}] \} E[N_{DC}]$$

## Список литературы

- [1] TOWARD A USER'S TOOLKIT FOR MODELING SCINTILLATOR PROPORTIONALITY AND LIGHT YIELD
- [2] M.D. Lay, Nucl. Instr. and Meth. A 383 (1996) 485; M.D. Lay, M.J. Lyon, Nucl. Instr. and Meth. A 383 (1996) 495.
- [3] Characterisation Studies of Silicon Photomultipliers Patrick Eckert, Hans-Christian Schultz-Coulon, Wei Shen, Rainer Stamen, Alexander Tadday
- [4] Modeling crosstalk in silicon photomultipliers L. Gallego, J. Rosado, F. Blanco and F. Arqueros