Энергетическое разрешение детектора

Одним из самых важных параметров детектора является энергетическое разрешение. В этой главе мы найдем предельное энергетическое разрешение детектора и найдем основные факторы, препятствующие его улучшению.

1. Детектор на основе ФЭУ и сцитиллятора

Детектор на основе ФЭУ и сцинтиллятора - одни из самых простых детекторов, но в тоже время обладающий высоким энергетическим и временным разрешением. Процесс распространения света в детекторе представлен на . Сначала происходит поглощение рентгеновского фотона в толще сцинтиллятора. Это приводит к появлению N_{born} световых фотонов. Распространяясь, свет может отражаться от стенок сцинтиллятора, поглощаться, преломляться и выходить наружу (в отсутствие отражателя) или же преломляться и проходить в оптическую смазку. После оптической смазки свет падает на стекло ФЭУ и лишь после этого достигает фотокатода. Достигнув фотокатода, часть света отразится от границы стекло-фотокатод. Коэффициент отражения фотокатода обзначим r_{cath}. Таким образом, лишь некоторая часть N_{abs} фотонов поглотится в фотокатоде. Фотокатод имеет некоторую конверсионную эффективность $Conv$. Под конверсионной эффективностью понимается отношение среднего числа испущенных фотоэлектронов к среднего числу фотонов, поглощенных в толще фотокатода. После прохождения фотокатода свет преобразуется в $N_{p.e.}^{init}$ фотоэлектронов. Однако из-за неидеальности сбора фотоэлектронов (преимущественно на первый динод) лишь некоторая доля фотоэлектронов $N_{p.e.}$ сможет развить электронную лавину. Неидеальность сбора фотоэлектронов описывается параметром η, который характеризует отношение среднего числа зарегистрированных фотоэлектронов $E[N_{p.e.}]$ к среднему числу испущенных фотоэлектронов $N_{p.e.}^{init}$. Далее при взаимодействии с динодами произойдет усиление и образуются N_e электронов.

Величины r_{cath}, $Conv$, η зависят от длины волны падающего света и характеризуют конкретный ФЭУ. Однако на практике обычно измеряют производную от них величину - квантовую эффективность. Для этого ФЭУ освещают нормальным пучком света и считают число зарегистрированных фотоэлектронов $E[N_{p.e.}]$. Если известно число падающих фотонов $E[N_0]$, то квантовая эффективность определяется следующим образом: $\varepsilon = E[N_{p.e.}]/E[N_0]$. При сборе света со сцинтиллятора угол падения света на фотокатод не будет нормальным, однако, как было показано в [1], если угол падения не превышает $40°$, то r_{cath} остается практически константой, а $Conv$ и вовсе не зависит от угла падения света [3], поэтому в первом приближении можно описывать ФУЭ лишь одной характеристикой ε.

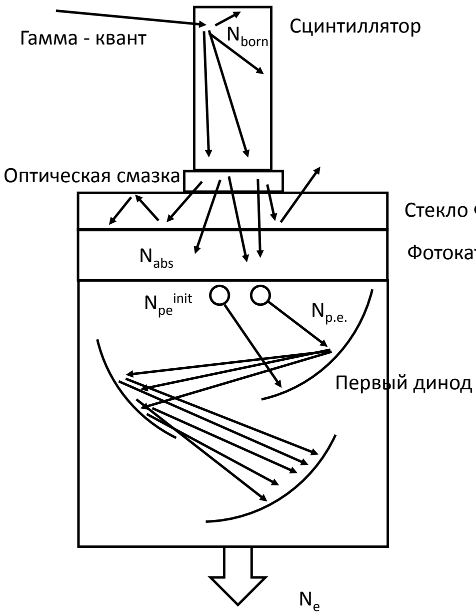

Рис. 1. Детектор на основе ФЭУ и сцинтиллятора со схематичным представлением распространения фотонов и электронов.

1.1. ФЭУ без шумов

Чтобы написать формулу для энергетического разрешения, рассмотрим подробно процесс формирования сигнала. Основные используемые величины:

N_{born} - число световых фотонов, родившихся в сцинтилляторе.

N_{abs} - число световых фотонов, поглощенных в фотокатоде

$N_{p.e.}$ - число зарегистрированных фотоэлектронов

N_e - число электронов, собранных на последнем аноде ФЭУ

Все эти величины связаны следующими соотношениями:

$$N_{abs} = \sum_{i=0}^{N_{born}} n_{abs_i}$$

$$N_{p.e.} = \sum_{i=0}^{N_{abs}} n_{p.e._i}$$

$$N_e = \sum_{i=0}^{N_{p.e.}} G_i$$

n_{abs} - число световых фотонов, поглощенных в фотокатоде, если в сцинтилляторе родился один световой фотон, $n_{abs} \in \{0, 1\}$.

$n_{p.e.}$ - число зарегистрированных фотоэлектронов, если в фотокатоде поглотился один световой фотон, $n_{p.e.} \in \{0, 1\}$.

G - число электронов, собранных на ФЭУ, при условии, что регистрируется один фотоэлектрон

В процессе измерений мы регистрируем число электронов N_e. Энергетическое разрешение будет определяться следующим образом:

$$\delta E = \Delta \cdot \frac{\sqrt{Var[N_e]}}{E[N_e]},$$

где $\Delta = 2 \cdot \sqrt{2 \cdot \ln(2)} \approx 2.36$. В дальнейшем более удобно будет использовать квадрат этой величины δE^2, деленный на Δ^2.

Сцинтиллятор имеет некий спектр излучения с плотностью вероятности $P(\lambda)$, поэтому необходимо проинтегрировать сигнал и шум:

$$\delta E^2/\Delta^2 = \frac{\int Var[N_e] \cdot P(\lambda)^2 d\lambda}{\left(\int E[N_e] \cdot P(\lambda) d\lambda\right)^2}$$

Рассмотрим для простоты случай, когда сцинтиллятор излучает свет на одной длине волны.

Чтобы посчитать мат. ожидание и дисперсию величины, представляющей собой сумму флуктуирующих величин, где число слагаемых тоже является случайной величиной, необходимо воспользоваться тождеством Вальда. Данное тождество утверждает следующее:

$$E\left[\sum_{i=0}^{N} X_i\right] = E[N] \cdot E[X]$$

Как следствие этого тождества получаем выражение для дисперсии:

$$Var\left[\sum_{i=0}^{N} X_i\right] = Var[N] \cdot (E[X])^2 + Var[X] \cdot E[N]$$

Воспользовавшись этими двумя выражениями, выразим величину $\delta E^2/\Delta^2$ через базовые величины N_{born}, n_{abs}, $n_{p.e.}$, G, которые описывают детектор:

$$\delta E^2/\Delta^2 = \frac{Var[N_{born}]}{(E[N_{born}])^2} + \frac{Var[n_{abs}]}{(E[n_{abs}])^2} \cdot \frac{1}{E[N_{born}]} + \frac{Var[n_{p.e.}]}{(E[n_{p.e.}])^2} \cdot \frac{1}{E[N_{abs}]} + \frac{Var[G]}{(E[G])^2} \cdot \frac{1}{E[N_{p.e.}]} \tag{1}$$

Рассмотрим каждое из слагаемых подробнее.

Слагаемое $\frac{Var[N_{born}]}{(E[N_{born}])^2}$ описывает вклад флуктуации числа фотонов, рожденных в сцинтилляторе. Стоит заметить, что $Var[N_{born}] \neq E[N_{born}]$, то есть пуассоновская статистика не выполняется. Детальное описание факторов, влияющих на собственное энергетическое разрешение сцинтиллятора можно найти в [2].

Выражение $\frac{Var[n_{abs}]}{(E[n_{abs}])^2} \cdot \frac{1}{E[N_{born}]}$ описывает вклад флуктуаций сбора света на фотокатод. Существует множество факторов, влияющих на величину флуктуации: разброс точки взаимодействия рентгеновского кванта и сцинтиллятора, флуктуации поглощения световых фотонов в толще сцинтиллятора, оптической смазки или фотокатода и т.д. Чтобы найти эту величину, необходимо смоделировать распространите света в сцинтилляторе. Также тут присутствует фактор подавления $\frac{1}{E[N_{born}]}$: чем больше число рожденных фотонов, тем меньше светосбор влияет на энергетическое разрешение.

Следующее слагаемое $\frac{Var[n_{p.e.}]}{(E[n_{p.e.}])^2} \cdot \frac{1}{E[N_{abs}]}$ описывает флуктуации числа регистрируемых фотонов, вызванные конечной квантовой эффективностью ФЭУ. Это слагаемое можно упростить до следующего вида: $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{E[N_{abs}]}$.

Последнее слагаемое $\frac{Var[G]}{(E[G])^2} \cdot \frac{1}{E[N_{p.e.}]}$ описывает флуктуации усиления. Флуктуации усиления $\frac{\sqrt{Var[G]}}{E[G]}$ обычно не превышают $10-20\%$ [6], а наличие фактора подавления $E[N_{p.e.}]$ делает вклад данного слагаемого в энергетическое разрешение еще меньше.

Рассмотрим теперь вклад каждого слагаемого в энергетическое разрешение в зависимости от энергии регистрируемого гамма кванта. Для примера возьмем сцинтиллятор LYSO:Ce и ФЭУ с квантовой эффективностью 28%. Данные о непропорциональности световыхода и собственное энергетическое разрешение сцинтиллятора LYSO:Ce взяты из [4]. Чтобы получить флуктуации светосбора $\frac{\sqrt{Var[n_{abs}]}}{E[n_{abs}]}$, в программе GEANT4 был смоделирован детектор, аналогичный тому, что представлен на рис. 1. Флуктуации составили около 10%. Также из моделирования была получена величина $E[n_{abs}]$, варьирующаяся в зависимости от размера сцинтиллятора и материала отражателя от 0.2 до 0.6. В дальнейшем будем считать для определенности, что $E[n_{abs}] = 0.5$. Флуктуации усиления $\frac{\sqrt{Var[G]}}{E[G]}$ примем за 10%. Таким образом, получим следующие зависимости факторов от энергии гамма-кванта (рис. 2). На рис. 2 не представлены вклады флуктуации светосбора и коэффициента усиления, т.к. они пренебрежимо малы относительно собственного энергетического разрешения сцинтиллятора и флуктуаций, связанных с неэффективностью детектора.

Итого, пренебрегая вкладами флуктуаций светосбора и усиления и пользуясь тем, что $E[n_{p.e.}] = \varepsilon$, с достаточно хорошей точность можно использовать следующую формулу для вычисления энергетического разрешения:

$$\delta E^2/\Delta^2 \approx \frac{Var[N_{born}]}{(E[N_{born}])^2} + \frac{1-\varepsilon}{N_{p.e.}} \tag{2}$$

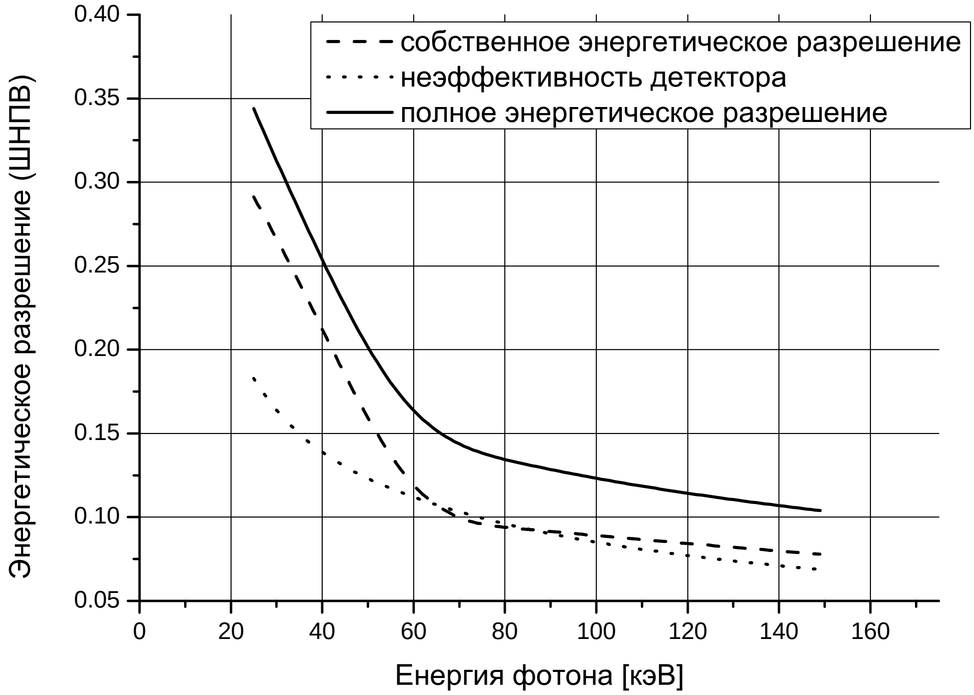

Рис. 2. Энергетическое разрешение детектора на основе YAP:Ce и ФЭУ с квантовой эффективностью 28%. Светосбор равен 50%.

1.2. Учет собственных шумов ФЭУ и шумов электроники

В предыдущем разделе описана самая простая формула для энергетического разрешения. Однако, для полноты картины, следует учесть еще шум ФЭУ и шум электроники.

Отличие от предыдущего случая будет в том, что теперь в итоговый заряд будет давать вклад не только сигнал, но и шум. Чтобы выделить сигнал, необходимо вычесть шум из измерений:

$$N_e^{signal} = N_e^{signal+noise} - N_e^{noise}$$

При вычислении мат. ожидания вклад шумов сократится, а дисперсия сигнала будет зависеть от дисперсии шумов. Шум может быть обусловлен темновыми токами ФЭУ N_e^{DC} и шумом электроники $N_e^{electronics}$. При работе с ФЭУ или SiPM усиление обычно достаточно велико и вкладом шума электроники можно пренебречь. Таким образом, получим следующую формулу для вычисления энергетического разрешения:

$$\delta E = \Delta \cdot \frac{\sqrt{Var[N_e^{signal}] + 2 \cdot Var[N_e^{DC}]}}{E[N_e^{signal}]}$$

Если раньше предполагалось бесконечное время интегрирования сигнала, то теперь оно конечно. Обозначим его t_{gate}. Предположим, что время интегрирования в несколько раз больше характерного времени затухания сигнала и мы собираем практически весь заряд от сигнала, т.е. величина N_e^{signal} не зависит от t_{gate}. Число регистрируемых шумовых фотоэлектронов $N_{p.e.}^{DC}$ будет подчиняться статистике Пуассона с параметром, равным произведению времени интегрирования t_{gate} на частоту шумовых импульсов ν_{DC}. В этом случае величина N_e^{DC} будет вычисляться следующим образом:

$$N_e^{DC} = \sum_{i=0}^{N_{p.e.}^{DC}} G_i,$$

причем $E[N_{p.e.}^{DC}] = Var[N_{p.e.}^{DC}] = t_{gate} \cdot \nu_{DC}$.

На рис. 3 изображена зависимость энергетического разрешения детектора на основе ФЭУ и сцинтиллятора YAP:Ce от величины темновых токов.

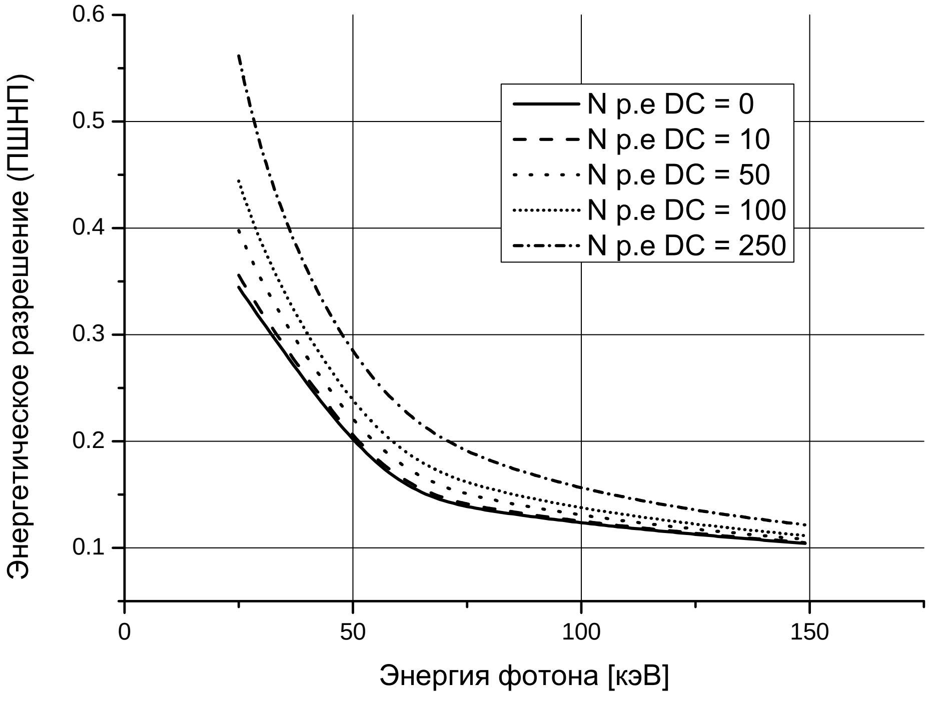

Рис. 3. Энергетическое разрешение детектора на основе YAP:Ce и ФЭУ с квантовой эффективностью 28%. Светосбор равен 50%. Различные графики соответствуют различным значениям зарегистрированных темновых токов.

Время высвечивания сцинтиллятора YAP:Ce составляет около 25 нс, а шумы ФЭУ при комнатной температуре не превышают 1 кГц, поэтому вклад темновых токов в энергетическое разрешение пренебрежимо мал. Если рассмотреть в качестве детектора SiPM у которого шум при комнатной температуре около 1 МГц / 1 $мм^2$ и пренебречь кросcстоками и послеимпульсами, то и в этом случае вклад в энергетическое разрешение шумов будет мал.

2. Энергетическое разрешение SiPM

С точки зрения энергетического разрешения SiPM отличается от ФЭУ наличием двух дополнительных факторов, влияющих на шум: послеимпульсами и кросстоками.

2.1. Учет кросстоков

Кроссток или оптический кроссток - это эффект срабатывания соседних ячеек SiPM из-за излучения оптических фотонов во время образования лавины в исходном пикселе. Поскольку свет распространяется практически мгновенно, то данный эффект не приводит к каким-либо временным сдвигам. Чтобы учесть влияние кросстока на энергетическое разрешение, необходимо модифицировать функцию плотности вероятности величины $n_{p.e.}$. Если раньше данная величина имела распределение Бернулли с параметром $E[n_{p.e.}]$, то теперь распределение будет другим. Чтобы найти это распределение нужно знать квантовую эффективность регистрации (или коэффициент конверсии, т.к. все зависит от того, какую величину рассматривать в качестве базовой) и вероятность срабатывания соседней ячейки из-за кросстока. Детальное описание вероятностей срабатывания ячеек из-за кросстока можно найти в [8]. В этой статье рассматриваются несколько моделей распространения фотонов, но утверждается, что для большинства моделей SiPM наиболее правдоподобной является модель 4-х соседей. Вероятность срабатывания N ячеек выражается через параметр p, который описывает вероятность того, что соседний пиксель сработает из-за кросстока. Вычислить параметр p можно, зная полную вероятность кросстока p_{total} (одно или больше кросстоковых событий): $(1-p)^4 = 1 - p_{total}$. В дальнейшем удобно будет ввести величину $q = 1 - p$. Таким образом, зная квантовую эффективность ε и вероятность кросстока p, получим следующую плотность вероятности в модели 4-х соседей.

суммарное число сработавших ячеек	плотность вероятности $n_{p.e.}$
1	$\varepsilon \cdot q^4$
2	$\varepsilon \cdot 4p \cdot q^6$
3	$\varepsilon \cdot 18p^2 \cdot q^8$
4	$\varepsilon \cdot 4p^3 \cdot q^8[1 + 3q + 18q^2]$
5	$\varepsilon \cdot 5p^4 \cdot q^{10}[8 + 24q + 55q^2]$
$N > 5$	$\simeq \varepsilon \cdot P(5) \left[1 - \frac{P(5)}{1 - \sum\limits_{k=1}^{4} P(k)}\right]^{N-5}$

На Рис. 4 показана зависимость среднего числа регистрируемых ячеек в зависимости от величины кросстока.

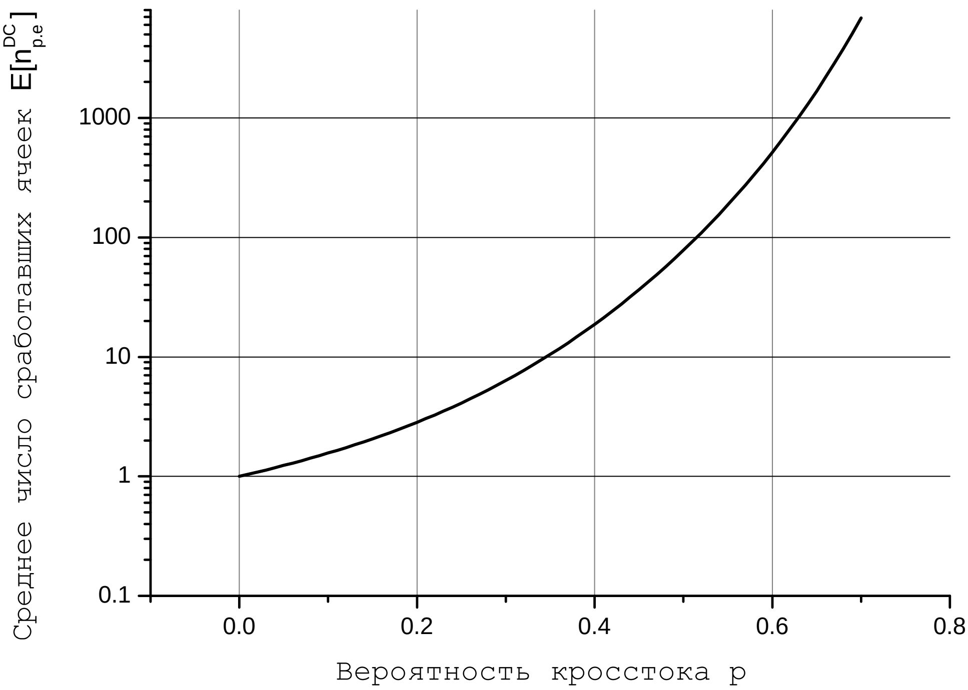

Рис. 4. Зависимость среднего числа регистрируемых ячеек в зависимости от величины кросстока.

Чтобы учесть вклад кросстоков в энергетическое разрешение необходимо пересчитать $E[n_{p.e}]$ и $Var[n_{p.e.}]$с учетом модифицированной плотности вероятности.

Если учесть еще и собственные шумы SiPM при наличии кросстока, то необходимо изменить величину $N^{DC}_{p.e.}$:

$$N^{DC}_{p.e.} = \sum_{i=0}^{N^{DC}} n^{DC}_{p.e._i},$$

где величина $n_{p.e.}^{DC}$ - число зарегистрированных фотоэлектронов, если произошел одиночный шумовой (тепловой) импульс. Данная величина имеет тоже распределение,что и $n_{p.e.}$, только с параметром $\varepsilon = 1$. Величина N^{DC} имеет распределение Пуассона с параметром $t_{gate} \cdot \nu_{DC}$. Таким образом, получим следующие значения для мат. ожидания и дисперсии:

$$E[N_{p.e.}] = E[n_{p.e.}] \cdot E[N_{abs}]$$

$$E[N_{p.e.}^{DC}] = E[n_{p.e.}^{DC}] \cdot E[N^{DC}]$$

$$Var[N_{p.e.}] = Var[N_{abs}] \cdot (E[n_{p.e.}])^2 + Var[n_{p.e.}] \cdot E[N_{abs}]$$

$$Var[N_{p.e.}^{DC}] = Var[N^{DC}] \cdot \left(E[n_{p.e.}^{DC}]\right)^2 + Var[n_{p.e.}^{DC}] \cdot E[N^{DC}]$$

На рис. 5 представлена зависимость энергетического разрешения от энергии фотона при различных значениях кросстока.

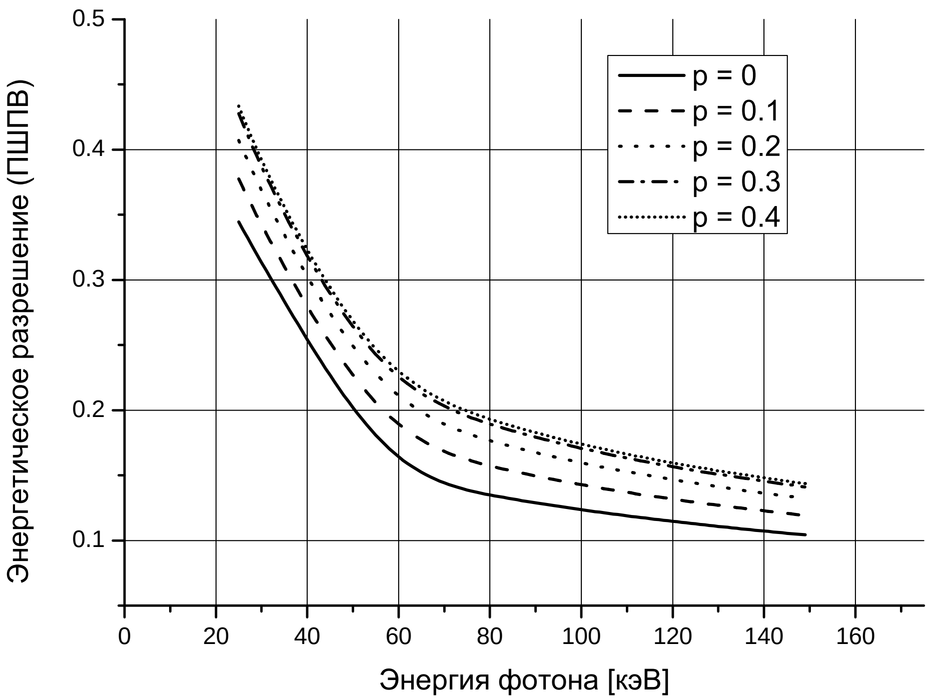

Рис. 5. Энергетическое разрешение детектора на основе YAP:Ce и SiPM с квантовой эффективностью 28%. Светосбор равен 50%. Различные графики соответствуют различным значениям вероятности кросстока. Темновые токи отсутствуют.

2.2. Учет послеимпульсов

Послеимпульс - сигнал, появляющийся через некоторый промежуток времени после основного сигнала. Причина появления послеимпульсов заключается в захвате электронов в ловушки во время лавины с их последующим высвобождение через промежуток времени, обычно длящийся от нескольких наносекунд до нескольких микросекунд [5]. После срабатывания основного сигнала напряжение на ячейке будет восстанавливаться к исходному значению к течение времени восстановления ячейки, которое мы обозначим τ_r. Таким образом, если послеимпульс произошел после основного сигнала через время Δt, то доля заряда в послеимпульсе относительно основного сигнала будет выражаться следующим образом: $\xi(\Delta t) = 1 - \exp(-\Delta t/\tau_r)$. Плотность вероятности величины Δt описывается двумя затухающими экспонентами [7]:

$$f(\Delta t) = A_s \cdot \exp(-\Delta t/\tau_s) + A_f \cdot \exp(-\Delta t/\tau_f),$$

где τ_s и τ_f среднее время, проходящее между двумя импульсами для быстрой и медленной компоненты, а A_s и A_f - нормировочные константы.

В большинстве приложений время интегрирования t_{gate} выбирают в несколько раз больше времени восстановления ячейки τ_r. Мы предположим что, t_{gate} достаточно большое и в несколько раз превышает и τ_f. Также для простоты пренебрежем вкладом медленной компоненты послеимпульса, т.к. её вероятность намного меньше вероятности быстрой компоненты.

Чтобы учесть вклад послеимпульсов в энергетическое разрешение необходимо ввести поправку на число зарегистрированных электронов:

$$N_e = \sum_{i=0}^{N_{p.e.}} (G_i + A_i)$$

Случайная величина G имеет распределение Гаусса и описывает по-прежнему флуктуации усиления, а величина A описывает послеимпульсы. На данный момент мы не знаем точную форму плотности вероятности величины A, поэтому найдем из эксперимента мат. ожидание и дисперсию суммарной величины $G_{tot} = G + A$.

Итого, если сцинтиллятор излучает на одной длине волны, а в качестве детектора используется SiPM, то можно написать следующее выражение для энергетического разрешения:

$$\delta E^2/\Delta^2 = \frac{Var[N_{p.e.}]}{(E[N_{p.e.}])^2} + \frac{Var[G_{tot}]}{(E[G_{tot}])^2} \cdot \frac{1}{E[N_{p.e.}]},$$

где определения величин $E[N_{p.e.}]$ и $Var[N_{p.e.}]$ берутся из формул (**??**) и (**??**).

Список литературы

[1] D. Motta, S. Schonert Optical properties of bialkali photocathodes Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A 539 (2005) 217–235

[2] TOWARD A USER‘S TOOLKIT FOR MODELING SCINTILLATOR PROPORTIONALITY AND LIGHT YIELD

[3] M.D. Lay, Nucl. Instr. and Meth. A 383 (1996) 485; M.D. Lay, M.J. Lyon, Nucl. Instr. and Meth. A 383 (1996) 495.

[4] Light output and energy resolution of $Lu_{0.7}Y_{0.3}AlO_3 : Ce$ and $Lu_{1.95}Y_{0.05}SiO_5 : Ce$ scintillators

[5] Characterisation Studies of Silicon Photomultipliers Patrick Eckert, Hans-Christian Schultz-Coulon, Wei Shen, Rainer Stamen, Alexander Tadday

[6] Characterization and Simulation of the Response of Multi Pixel Photon Counters to Low Light Levels A. Vacheretc, G.J. Barkerh arXiv:1101.1996v1 [physics.ins-det] 11 Jan 2011

[7] Y. Du, F. Retiere, Nucl. Instr. and Meth. A 596 (2008) 396-401

[8] Modeling crosstalk in silicon photomultipliers L. Gallego, J. Rosado, F. Blanco and F. Arqueros