

## Часть I

# Энергетическое разрешение детектора

Одним из самых важных параметров детектора является энергетическое разрешение. В этой главе мы найдем предельное энергетическое разрешение детектора и найдем основные факторы, препятствующие его улучшению.

## 1. Детектор на основе ФЭУ и сцинтиллятора

Детектор на основе ФЭУ и сцинтиллятора - один из самых простых детекторов, но в тоже время обладающий высоким энергетическим и временным разрешением. Процесс распространения света в детекторе представлен на . Сначала происходит поглощение рентгеновского фотона в толще сцинтиллятора. Это приводит к появлению  $N_{born}$  световых фотонов. Распространяясь, свет может отражаться от стенок сцинтиллятора, поглощаться, преломляться и выходить наружу (в отсутствие отражателя) или же преломляться и проходить в оптическую смазку. После оптической смазки свет падает на стекло ФЭУ и лишь после этого достигает фотокатода. Достигнув фотокатода, часть света отразится от границы стекло-фотокатод. Коэффициент отражения фотокатода обозначим  $r_{cath}$ . Таким образом, лишь некоторая часть  $N_{abs}$  фотонов поглотится в фотокатод. Фотокатод имеет некоторую конверсионную эффективность  $Conv$ . Под конверсионной эффективностью понимается отношение среднего числа испущенных фотоэлектронов к среднему числу фотонов, поглощенных в толще фотокатода. После прохождения фотокатода свет преобразуется в  $N_{p.e.}^{init}$  фотоэлектронов. Однако из-за неидеальности сбора фотоэлектронов (преимущественно на первый динод) лишь некоторая доля фотоэлектронов  $N_{p.e.}$  сможет развить электронную лавину. Неидеальность сбора фотоэлектронов описывается параметром  $\eta$ , который характеризует отношение среднего числа зарегистрированных фотоэлектронов  $E[N_{p.e.}]$  к среднему числу испущенных фотоэлектронов  $N_{p.e.}^{init}$ . Далее при взаимодействии с динодами произойдет усиление и образуются  $N_e$  электронов.

Величины  $r_{cath}$ ,  $Conv$ ,  $\eta$  зависят от длины волны падающего света и характеризуют конкретный ФЭУ. Однако на практике обычно измеряют производную от них величину - квантовую эффективность. Для этого ФЭУ освещают нормальным пучком света и считают число зарегистрированных фотоэлектронов  $E[N_{p.e.}]$ . Если известно число падающих фотонов  $E[N_0]$ , то квантовая эффективность определя-

ется следующим образом:  $\varepsilon = E[N_{p.e.}]/E[N_0]$ . При сборе света со сцинтиллятора угол падения света на фотокатод не будет нормальным, однако, как было показано в [1], если угол падения не превышает  $40^\circ$ , то  $r_{cath}$  остается практически константой, а  $Conv$  и вовсе не зависит от угла падения света [3], поэтому в первом приближении можно описывать ФЭУ лишь одной характеристикой  $\varepsilon$ .

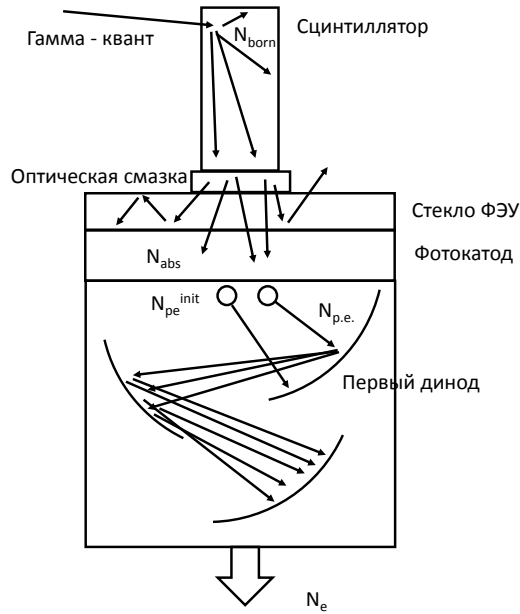


Рис. 1. Детектор на основе ФЭУ и сцинтиллятора со схематичным представлением распространения фотонов и электронов.

### 1.1. ФЭУ без шумов

Чтобы написать формулу для энергетического разрешения, рассмотрим подробно процесс формирования сигнала. Основные используемые величины:

$N_{born}$  - число световых фотонов, родившихся в сцинтилляторе.

$N_{abs}$  - число световых фотонов, поглощенных в фотокатод

$N_{p.e.}$  - число зарегистрированных фотоэлектронов

$N_e$  - число электронов, собранных на последнем аноде ФЭУ

Все эти величины связаны следующими соотношениями:

$$N_{abs} = \sum_{i=0}^{N_{born}} n_{abs_i}$$

$$N_{p.e.} = \sum_{i=0}^{N_{abs}} n_{p.e._i}$$

$$N_e = \sum_{i=0}^{N_{p.e.}} G_i$$

$n_{abs}$  - число световых фотонов, поглощенных в фотокатоде, если в сцинтилляторе родился один световой фотон,  $n_{abs} \in \{0, 1\}$ .

$n_{p.e.}$  - число зарегистрированных фотоэлектронов, если в фотокатоде поглотился один световой фотон,  $n_{p.e.} \in \{0, 1\}$ .

$G$  - число электронов, собранных на ФЭУ, при условии, что регистрируется один фотоэлектрон

В процессе измерений мы регистрируем число электронов  $N_e$ . Энергетическое разрешение будет определяться следующим образом:

$$\delta E = \Delta \cdot \frac{\sqrt{Var[N_e]}}{E[N_e]},$$

где  $\Delta = 2 \cdot \sqrt{2 \cdot \ln(2)} \approx 2.36$ . В дальнейшем более удобно будет использовать квадрат этой величины  $\delta E^2$ , деленный на  $\Delta^2$ .

Сцинтиллятор имеет некий спектр излучения с плотностью вероятности  $P(\lambda)$ , поэтому необходимо проинтегрировать сигнал и шум:

$$\delta E^2 / \Delta^2 = \frac{\int Var[N_e] \cdot P(\lambda)^2 d\lambda}{\left( \int E[N_e] \cdot P(\lambda) d\lambda \right)^2}$$

Рассмотрим для простоты случай, когда сцинтиллятор излучает свет на одной длине волны.

Чтобы посчитать мат. ожидание и дисперсию величины, представляющей собой сумму флуктуирующих величин, где число слагаемых тоже является случайной величиной, необходимо воспользоваться тождеством Вальда. Данное тождество утверждает следующее:

$$E \left[ \sum_{i=0}^N X_i \right] = E[N] \cdot E[X]$$

Как следствие этого тождества получаем выражение для дисперсии:

$$Var \left[ \sum_{i=0}^N X_i \right] = Var[N] \cdot (E[X])^2 + Var[X] \cdot E[N]$$

Воспользовавшись этими двумя выражениями, выразим величину  $\delta E^2 / \Delta^2$  через базовые величины  $N_{born}$ ,  $n_{abs}$ ,  $n_{p.e.}$ ,  $G$ , которые описывают детектор:

$$\begin{aligned} \delta E^2 / \Delta^2 = & \frac{Var[N_{born}]}{(E[N_{born}])^2} + \frac{Var[n_{abs}]}{(E[n_{abs}])^2} \cdot \frac{1}{E[N_{born}]} + \\ & \frac{Var[n_{p.e.}]}{(E[n_{p.e.}])^2} \cdot \frac{1}{E[n_{abs}]} + \frac{Var[G]}{(E[G])^2} \cdot \frac{1}{E[n_{p.e.}]} \end{aligned} \quad (1)$$

Рассмотрим каждое из слагаемых подробнее.

Слагаемое  $\frac{Var[N_{born}]}{(E[N_{born}])^2}$  описывает вклад флуктуации числа фотонов, рожденных в сцинтилляторе. Стоит заметить, что  $Var[N_{born}] \neq E[N_{born}]$ , то есть пуассоновская статистика не выполняется. Детальное описание факторов, влияющих на собственное энергетическое разрешение сцинтиллятора можно найти в [2].

Выражение  $\frac{Var[n_{abs}]}{(E[n_{abs}])^2} \cdot \frac{1}{E[N_{born}]}$  описывает вклад флуктуаций сбора света на фотокатод. Существует множество факторов, влияющих на величину флуктуации: разброс точки взаимодействия рентгеновского кванта и сцинтиллятора, флуктуации поглощения световых фотонов в толще сцинтиллятора, оптической смазки или фотокатода и т.д. Чтобы найти эту величину, необходимо смоделировать распространение света в сцинтилляторе. Также тут присутствует фактор подавления  $\frac{1}{E[N_{born}]}$ : чем больше число рожденных фотонов, тем меньше светосбор влияет на энергетическое разрешение.

Следующее слагаемое  $\frac{Var[n_{p.e.}]}{(E[n_{p.e.}])^2} \cdot \frac{1}{E[N_{abs}]}$  описывает флуктуации числа регистрируемых фотонов, вызванные конечной квантовой эффективностью ФЭУ. Это слагаемое можно упростить до следующего вида:  $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{E[N_{abs}]}$ .

Последнее слагаемое  $\frac{Var[G]}{(E[G])^2} \cdot \frac{1}{E[N_{p.e.}]}$  описывает флуктуации усиления. Флуктуации усиления  $\frac{\sqrt{Var[G]}}{E[G]}$  обычно не превышают 10 – 20% [6], а наличие фактора подавления  $E[N_{p.e.}]$  делает вклад данного слагаемого в энергетическое разрешение еще меньше.

Рассмотрим теперь вклад каждого слагаемого в энергетическое разрешение в зависимости от энергии регистрируемого гамма кванта. Для примера возьмем сцинтиллятор LYSO:Ce и ФЭУ с квантовой эффективностью 28%. Данные о пропорциональности световыхода и собственное энергетическое разрешение сцинтиллятора LYSO:Ce взяты из [4]. Чтобы получить флуктуации светосбора  $\frac{\sqrt{Var[n_{abs}]}}{E[n_{abs}]}$ , в программе GEANT4 был смоделирован детектор, аналогичный тому, что представлен на рис. 1. Флуктуации составили около 10%. Также из моделирования была получена величина  $E[n_{abs}]$ , варьирующаяся в зависимости от размера сцинтиллятора и материала отражателя от 0.2 до 0.6. В дальнейшем будем считать для определенности, что  $E[n_{abs}] = 0.5$ . Флуктуации усиления  $\frac{\sqrt{Var[G]}}{E[G]}$  примем за 10%. Таким образом, получим следующие зависимости факторов от энергии гамма-кванта (рис. 2). На рис. 2 не представлены вклады флуктуации светосбора и коэффициента усиления, т.к. они пренебрежимо малы относительно собственного энергетического разрешения сцинтиллятора и флуктуаций, связанных с неэффективностью детектора.

Итого, пренебрегая вкладами флуктуаций светосбора и усиления и пользуясь тем, что  $E[n_{p.e.}] = \varepsilon$ , с достаточно хорошей точностью можно использовать следующую

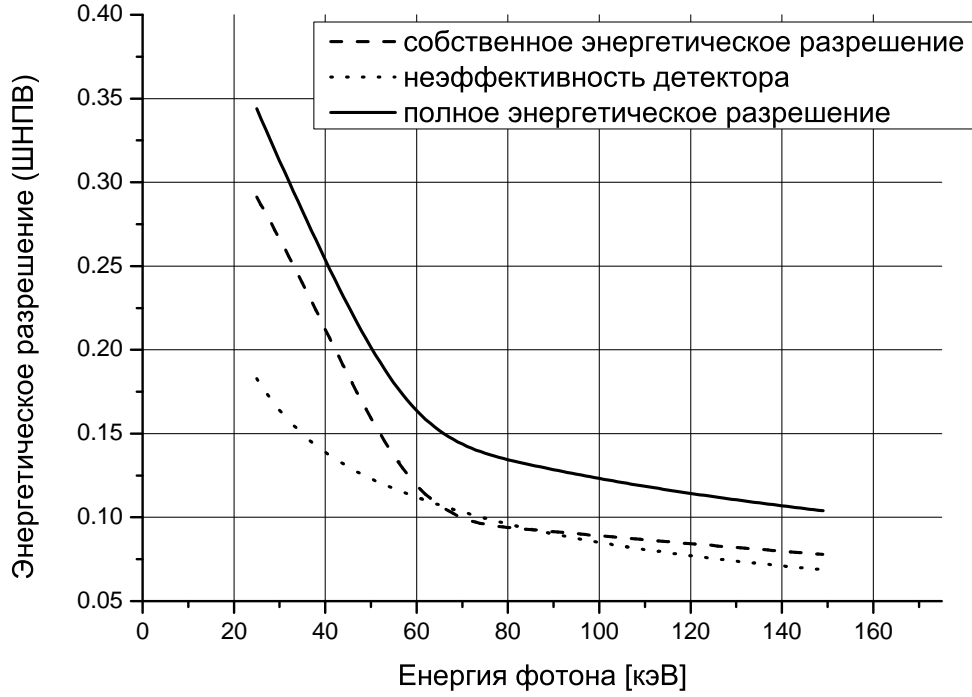


Рис. 2. Энергетическое разрешение детектора на основе YAP:Ce и ФЭУ с квантовой эффективностью 28%. Светосбор равен 50%.

щую формулу для вычисления энергетического разрешения:

$$\delta E^2 / \Delta^2 \approx \frac{\text{Var}[N_{born}]}{(E[N_{born}])^2} + \frac{1 - \varepsilon}{N_{p.e.}} \quad (2)$$

## 1.2. Учет собственных шумов ФЭУ и шумов электроники

В предыдущем разделе описана самая простая формула для энергетического разрешения. Однако, для полноты картины, следует учесть еще шум ФЭУ и шум электроники.

Отличие от предыдущего случая будет в том, что теперь в итоговый заряд будет давать вклад не только сигнал, но и шум. Чтобы выделить сигнал, необходимо вычесть шум из измерений:

$$N_e^{signal} = N_e^{signal+noise} - N_e^{noise}$$

При вычислении мат. ожидания вклад шумов сократится, а дисперсия сигнала будет зависеть от дисперсии шумов. Шум может быть обусловлен темновыми токами ФЭУ  $N_e^{DC}$  и шумом электроники  $N_e^{electronics}$ . При работе с ФЭУ или SiPM усиление обычно достаточно велико и вкладом шума электроники можно пренебречь.

Таким образом, получим следующую формулу для вычисления энергетического разрешения:

$$\delta E = \Delta \cdot \frac{\sqrt{\text{Var}[N_e^{signal}] + 2 \cdot \text{Var}[N_e^{DC}]}}{E[N_e^{signal}]}$$

Если раньше предполагалось бесконечное время интегрирования сигнала, то теперь оно конечно. Обозначим его  $t_{gate}$ . Предположим, что время интегрирования в несколько раз больше характерного времени затухания сигнала и мы собираем практически весь заряд от сигнала, т.е. величина  $N_e^{signal}$  не зависит от  $t_{gate}$ . Число регистрируемых шумовых фотоэлектронов  $N_{p.e.}^{DC}$  будет подчиняться статистике Пуассона с параметром, равным произведению времени интегрирования  $t_{gate}$  на частоту шумовых импульсов  $\nu_{DC}$ . В этом случае величина  $N_e^{DC}$  будет вычисляться следующим образом:

$$N_e^{DC} = \sum_{i=0}^{N_{p.e.}^{DC}} G_i,$$

причем  $E[N_{p.e.}^{DC}] = \text{Var}[N_{p.e.}^{DC}] = t_{gate} \cdot \nu_{DC}$ .

На рис. 3 изображена зависимость энергетического разрешения детектора на основе ФЭУ и сцинтиллятора YAP:Ce от величины темновых токов.

Время высвечивания сцинтиллятора YAP:Ce составляет около 25 нс, а шумы ФЭУ при комнатной температуре не превышают 1 кГц, поэтому вклад темновых токов в энергетическое разрешение пренебрежимо мал. Если рассмотреть в качестве детектора SiPM у которого шум при комнатной температуре около 1 МГц /  $1 \text{ мм}^2$  и пренебречь кросстоками и послеимпульсами, то и в этом случае вклад в энергетическое разрешение шумов будет мал.

## 2. Энергетическое разрешение SiPM

С точки зрения энергетического разрешения SiPM отличается от ФЭУ наличием двух дополнительных факторов, влияющих на шум: послеимпульсами и кросстоками.

### 2.1. Учет кросстоков

Кроссток или оптический кроссток - это эффект срабатывания соседних ячеек SiPM из-за излучения оптических фотонов во время образования лавины в исходном пикселе. Поскольку свет распространяется практически мгновенно, то данный эффект не приводит к каким-либо временным сдвигам. Чтобы учесть влияние кросстока на энергетическое разрешение, необходимо модифицировать функцию плотности вероятности величины  $n_{p.e.}$ . Если раньше данная величина имела

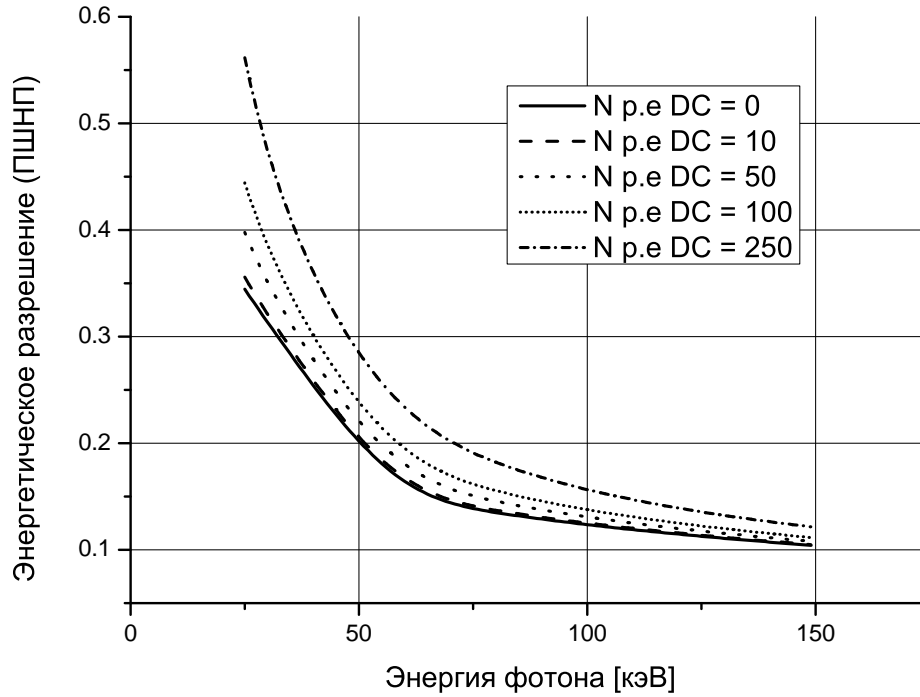


Рис. 3. Энергетическое разрешение детектора на основе YAP:Ce и ФЭУ с квантовой эффективностью 28%. Светосбор равен 50%. Различные графики соответствуют различным значениям зарегистрированных темновых токов.

распределение Бернулли с параметром  $E[n_{p.e.}]$ , то теперь распределение будет другим. Чтобы найти это распределение нужно знать квантовую эффективность регистрации (или коэффициент конверсии, т.к. все зависит от того, какую величину рассматривать в качестве базовой) и вероятность срабатывания соседней ячейки из-за кросстока. Детальное описание вероятностей срабатывания ячеек из-за кросстока можно найти в [8]. В этой статье рассматриваются несколько моделей распространения фотонов, но утверждается, что для большинства моделей SiPM наиболее правдоподобной является модель 4-х соседей. Вероятность срабатывания  $N$  ячеек выражается через параметр  $p$ , который описывает вероятность того, что соседний пиксель сработает из-за кросстока. Вычислить параметр  $p$  можно, зная полную вероятность кросстока  $p_{total}$  (одно или больше кросстоковых событий):  $(1 - p)^4 = 1 - p_{total}$ . В дальнейшем удобно будет ввести величину  $q = 1 - p$ . Таким образом, зная квантовую эффективность  $\varepsilon$  и вероятность кросстока  $p$ , получим следующую плотность вероятности в модели 4-х соседей.

суммарное число сработавших ячеек	плотность вероятности $n_{p.e.}$
1	$\varepsilon \cdot q^4$
2	$\varepsilon \cdot 4p \cdot q^6$
3	$\varepsilon \cdot 18p^2 \cdot q^8$
4	$\varepsilon \cdot 4p^3 \cdot q^8[1 + 3q + 18q^2]$
5	$\varepsilon \cdot 5p^4 \cdot q^{10}[8 + 24q + 55q^2]$
$N > 5$	$\simeq \varepsilon \cdot P(5) \left[ 1 - \frac{P(5)}{1 - \sum_{k=1}^4 P(k)} \right]^{N-5}$

На Рис. 4 показана зависимость среднего числа регистрируемых ячеек в зависимости от величины кросстока.

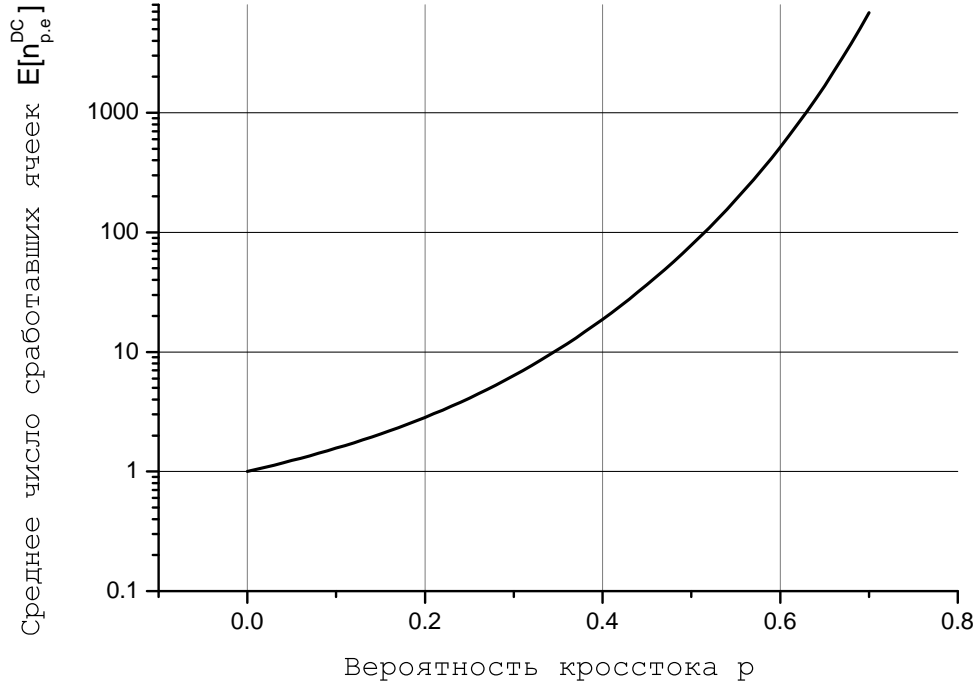


Рис. 4. Зависимость среднего числа регистрируемых ячеек в зависимости от величины кросстока.

Чтобы учесть вклад кросстоков в энергетическое разрешение необходимо пересчитать  $E[n_{p.e.}]$  и  $Var[n_{p.e.}]$  с учетом модифицированной плотности вероятности.

Если учесть еще и собственные шумы SiPM при наличии кросстока, то необходимо изменить величину  $N_{p.e.}^{DC}$ :

$$N_{p.e.}^{DC} = \sum_{i=0}^{N^{DC}} n_{p.e.,i}^{DC},$$



где величина  $n_{p.e.}^{DC}$  - число зарегистрированных фотоэлектронов, если произошел одиночный шумовой (тепловой) импульс. Данная величина имеет тоже распределение, что и  $n_{p.e.}$ , только с параметром  $\varepsilon = 1$ . Величина  $N^{DC}$  имеет распределение Пуассона с параметром  $t_{gate} \cdot \nu_{DC}$ . Таким образом, получим следующие значения для мат. ожидания и дисперсии:

$$E[N_{p.e.}] = E[n_{p.e.}] \cdot E[N_{abs}]$$

$$E[N_{p.e.}^{DC}] = E[n_{p.e.}^{DC}] \cdot E[N^{DC}]$$

$$Var[N_{p.e.}] = Var[N_{abs}] \cdot (E[n_{p.e.}])^2 + Var[n_{p.e.}] \cdot E[N_{abs}]$$

$$Var[N_{p.e.}^{DC}] = Var[N^{DC}] \cdot (E[n_{p.e.}^{DC}])^2 + Var[n_{p.e.}^{DC}] \cdot E[N^{DC}]$$

На рис. 5 представлена зависимость энергетического разрешения от энергии фотона при различных значениях кросстока.

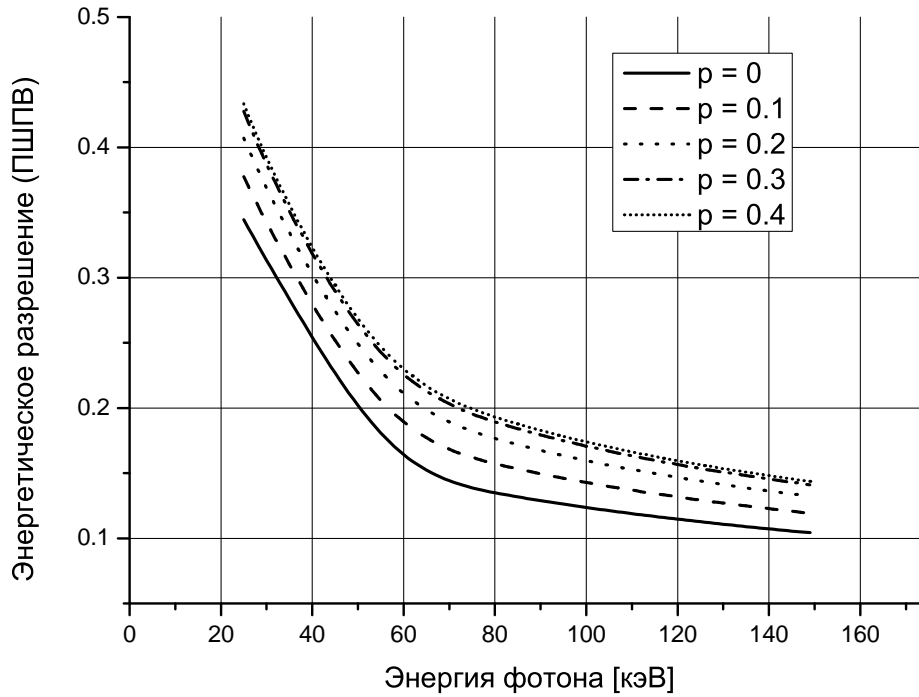


Рис. 5. Энергетическое разрешение детектора на основе YAP:Ce и SiPM с квантовой эффективностью 28%. Светосбор равен 50%. Различные графики соответствуют различным значениям вероятности кросстока. Темновые токи отсутствуют.

## 2.2. Учет послеимпульсов

Послеимпульс - сигнал, появляющийся через некоторый промежуток времени после основного сигнала. Причина появления послеимпульсов заключается в захвате электронов в ловушки во время лавины с их последующим высвобождением через промежуток времени, обычно длящийся от нескольких наносекунд до нескольких микросекунд [5]. После срабатывания основного сигнала напряжение на ячейке будет восстанавливаться к исходному значению к течению времени восстановления ячейки, которое мы обозначим  $\tau_r$ . Таким образом, если послеимпульс произошел после основного сигнала через время  $\Delta t$ , то доля заряда в послеимпульсе относительно основного сигнала будет выражаться следующим образом:  $\xi(\Delta t) = 1 - \exp(-\Delta t/\tau_r)$ . Плотность вероятности величины  $\Delta t$  описывается двумя затухающими экспонентами [7]:

$$f(\Delta t) = A_s \cdot \exp(-\Delta t/\tau_s) + A_f \cdot \exp(-\Delta t/\tau_f),$$

где  $\tau_s$  и  $\tau_f$  среднее время, проходящее между двумя импульсами для быстрой и медленной компоненты, а  $A_s$  и  $A_f$  - нормировочные константы.

В большинстве приложений время интегрирования  $t_{gate}$  выбирают в несколько раз больше времени восстановления ячейки  $\tau_r$ . Мы предположим что,  $t_{gate}$  достаточно большое и в несколько раз превышает и  $\tau_f$ . Также для простоты пренебрежем вкладом медленной компоненты послеимпульса, т.к. её вероятность намного меньше вероятности быстрой компоненты.

Чтобы учесть вклад послеимпульсов в энергетическое разрешение необходимо ввести поправку на число зарегистрированных электронов:

$$N_e = \sum_{i=0}^{N_{p.e.}} (G_i + A_i)$$

Случайная величина  $G$  имеет распределение Гаусса и описывает по-прежнему флуктуации усиления, а величина  $A$  описывает послеимпульсы. На данный момент мы не знаем точную форму плотности вероятности величины  $A$ , поэтому найдем из эксперимента мат. ожидание и дисперсию суммарной величины  $G_{tot} = G + A$ .

Итого, если сцинтиллятор излучает на одной длине волны, а в качестве детектора используется SiPM, то можно написать следующее выражение для энергетического разрешения:

$$\delta E^2/\Delta^2 = \frac{Var[N_{p.e.}]}{(E[N_{p.e.}])^2} + \frac{Var[G_{tot}]}{(E[G_{tot}])^2} \cdot \frac{1}{E[N_{p.e.}]},$$

где определения величин  $E[N_{p.e.}]$  и  $Var[N_{p.e.}]$  берутся из формул (??) и (??).

## Часть II

# Измерение характеристик SiPM

В качестве исследуемого детектора был выбран SiPM KETEK PM3325NP-SB0 Pin. Наиболее важной характеристикой SiPM является напряжение пробоя. Напряжение пробоя - это напряжение, при котором коэффициент усиления равен нулю.

В различных работах было показано, что коэффициент усиления различных SiPM имеет линейную зависимость как от температуры, так и от напряжения [9], [10], [11], [12]. Таким образом, можно записать следующее выражение для коэффициента усиления  $G(V, T)$ :

$$G(V, T) = \frac{dG}{dV} (V - V_{BD}(T)) ,$$

где  $V_{BD}$  - напряжение пробоя.

Чтобы вычислить напряжения пробоя можно измерить расстояние между пиками (величина  $\Delta$ ) в спектре SiPM (рис. 6) и построить зависимость среднего значения этой величины (усреднение по всем пикам) от напряжения. Если аппроксимировать данную зависимость прямой, то можно будет узнать при каком напряжении коэффициент усиления равен нулю.

Зависимость напряжения пробоя от температуры изображена на рис. 7. Как можно заметить, для данного типа SiPM практически отсутствует зависимость напряжения пробоя от температуры.

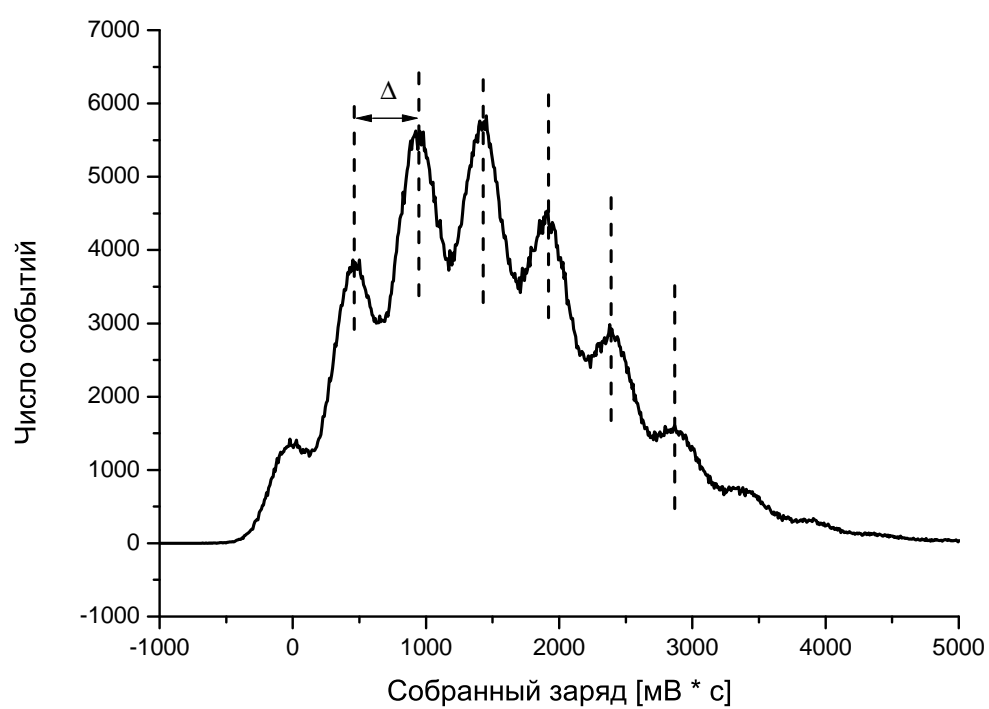


Рис. 6. Спектр SiPM KETEK PM3325NP-SB0 Pin при напряжении 23.4 В и температуре 265 К при облучении светодиодом. Штриховыми линиями показано положение пиков. Время интегрирования 1 мкс.

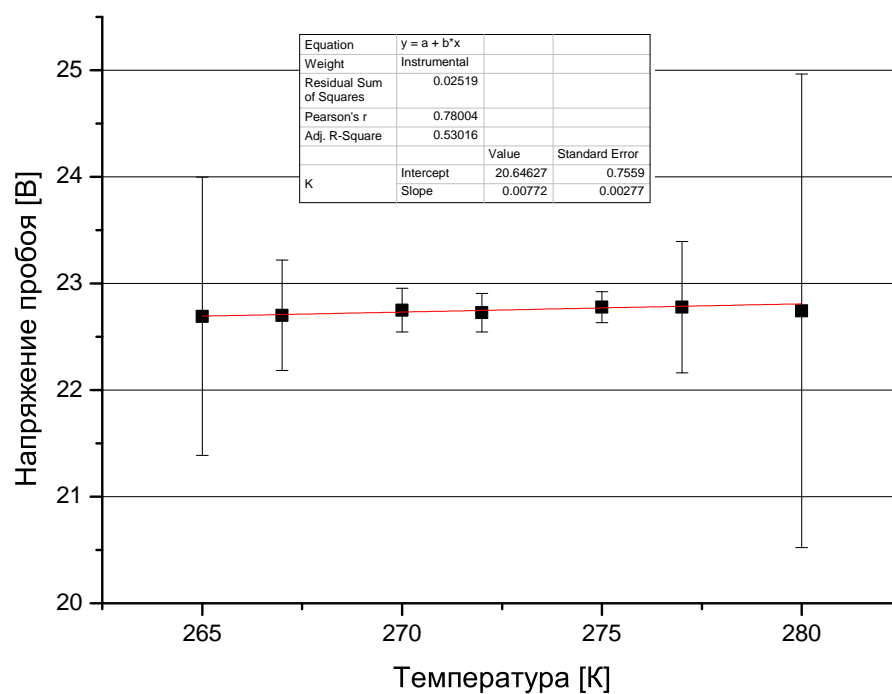


Рис. 7. Напряжение пробоя SiPM KETEK PM3325NP-SB0 Pin в зависимости от температуры. Время интегрирования 1 мкс.

## Список литературы

- [1] D. Motta, S. Schonert Optical properties of bialkali photocathodes Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A 539 (2005) 217–235
- [2] TOWARD A USER'S TOOLKIT FOR MODELING SCINTILLATOR PROPORTIONALITY AND LIGHT YIELD
- [3] M.D. Lay, Nucl. Instr. and Meth. A 383 (1996) 485; M.D. Lay, M.J. Lyon, Nucl. Instr. and Meth. A 383 (1996) 495.
- [4] Light output and energy resolution of  $Lu_{0.7}Y_{0.3}AlO_3 : Ce$  and  $Lu_{1.95}Y_{0.05}SiO_5 : Ce$  scintillators
- [5] Characterisation Studies of Silicon Photomultipliers Patrick Eckert, Hans-Christian Schultz-Coulon, Wei Shen, Rainer Stamen, Alexander Tadday
- [6] Characterization and Simulation of the Response of Multi Pixel Photon Counters to Low Light Levels A. Vacheretc, G.J. Barkerh arXiv:1101.1996v1 [physics.ins-det] 11 Jan 2011
- [7] Y. Du, F. Retiere, Nucl. Instr. and Meth. A 596 (2008) 396-401
- [8] Modeling crosstalk in silicon photomultipliers L. Gallego, J. Rosado, F. Blanco and F. Arqueros
- [9] Silicon Photomultiplier's Gain Stabilization by Bias Correction for Compensation of the Temperature Fluctuations P. Dorosz, M. Baszczyk, S. Glab, W. Kucewicz, L. Mik, M. Sapor
- [10] Temperature and Bias Voltage Dependence of the MPPC Detectors N. Dinu, C. Bazin. V. Chaumat, C. Cheikali, A. Para, Member, IEEE, V. Puill, C. Sylvia, J.F. Vagnucci
- [11] Characterization of SiPM: temperature dependencies. Marco Ramilli
- [12] Characterisation of a silicon photomultiplier device for applications in liquid argon based neutrino physics and dark matter searches P.K. Lightfoot , G.J. Barker b, K. Mavrokoridis , Y.A. Ramachers , N.J.C. Spooner