

## Энергетическое разрешение детектора

Одним из самых важных параметров детектора является энергетическое разрешение. В этой главе мы найдем предельное энергетическое разрешение детектора и найдем основные факторы, препятствующие его улучшению.

## 1. Детектор на основе ФЭУ и сцинтиллятора

Детектор на основе ФЭУ и сцинтиллятора - один из самых простых детекторов, но в тоже время обладающий высоким энергетическим и временным разрешением. Процесс распространения света в детекторе представлен на . Сначала происходит поглощение рентгеновского фотона в толще сцинтиллятора. Это приводит к появлению  $N_{born}$  световых фотонов. Распространяясь, свет может отражаться от стенок сцинтиллятора, поглощаться, преломляться и выходить наружу (в отсутствие отражателя) или же преломляться и проходить в оптическую смазку. После оптической смазки свет падает на стекло ФЭУ и лишь после этого достигает фотокатода. Достигнув фотокатода, часть света отразится от границы стекло-фотокатод. Коэффициент отражения фотокатода обозначим  $r_{cath}$ . Таким образом, лишь некоторая часть  $N_{abs}$  фотонов поглотится в фотокатод. Фотокатод имеет некоторую конверсионную эффективность  $Conv$ . Под конверсионной эффективностью понимается отношение среднего числа испущенных фотоэлектронов к среднему числу фотонов, поглощенных в толще фотокатода. После прохождения фотокатода свет преобразуется в  $N_{p.e.}^{init}$  фотоэлектронов. Однако из-за неидеальности сбора фотоэлектронов (преимущественно на первый динод) лишь некоторая доля фотоэлектронов  $N_{p.e.}$  сможет развить электронную лавину. Неидеальность сбора фотоэлектронов описывается параметром  $\eta$ , который характеризует отношение среднего числа зарегистрированных фотоэлектронов  $E[N_{p.e.}]$  к среднему числу испущенных фотоэлектронов  $N_{p.e.}^{init}$ . Далее при взаимодействии с динодами произойдет усиление и образуются  $N_e$  электронов.

Величины  $r_{cath}$ ,  $Conv$ ,  $\eta$  зависят от длины волны падающего света и характеризуют конкретный ФЭУ. Однако на практике обычно измеряют производную от них величину - квантовую эффективность. Для этого ФЭУ освещают нормальным пучком света и считают число зарегистрированных фотоэлектронов  $E[N_{p.e.}]$ . Если известно число падающих фотонов  $E[N_0]$ , то квантовая эффективность определяется следующим образом:  $\varepsilon = E[N_{p.e.}]/E[N_0]$ . При сборе света со сцинтиллятора угол падения света на фотокатод не будет нормальным, однако, как было показано в [1], если угол падения не превышает  $40^\circ$ , то  $r_{cath}$  остается практически константой, а  $Conv$  и вовсе не зависит от угла падения света [3], поэтому в первом приближении можно описывать ФЭУ лишь одной характеристикой  $\varepsilon$ .

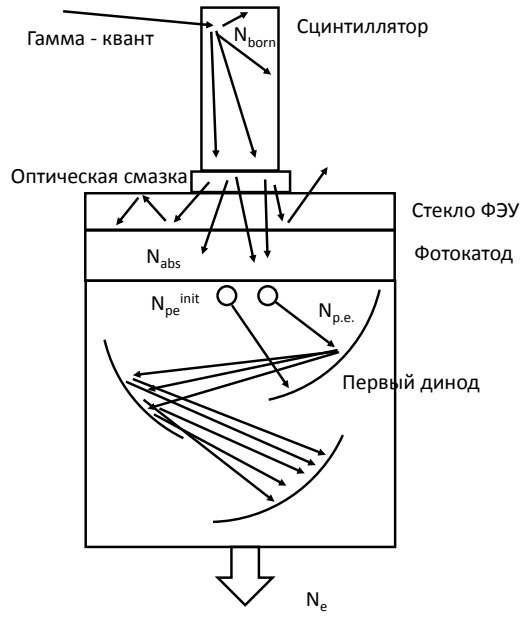


Рис. 1. Детектор на основе ФЭУ и сцинтиллятора со схематичным представлением распространения фотонов и электронов.

### 1.1. ФЭУ без шумов

Чтобы написать формулу для энергетического разрешения, рассмотрим подробно процесс формирования сигнала. Основные используемые величины:

$N_{born}$  - число световых фотонов, родившихся в сцинтилляторе.

$N_{abs}$  - число световых фотонов, поглощенных в фотокатодe

$N_{p.e.}$  - число зарегистрированных фотоэлектронов

$N_e$  - число электронов, собранных на последнем аноде ФЭУ

Все эти величины связаны следующими соотношениями:

$$N_{abs} = \sum_{i=0}^{N_{born}} n_{abs_i}$$

$$N_{p.e.} = \sum_{i=0}^{N_{abs}} n_{p.e.i}$$

$$N_e = \sum_{i=0}^{N_{p.e.}} G_i$$

$n_{abs}$  - число световых фотонов, поглощенных в фотокатодe, если в сцинтилляторе родился один световой фотон,  $n_{abs} \in \{0, 1\}$ .

$n_{p.e.}$  - число зарегистрированных фотоэлектронов, если в фотокатодe поглотился один световой фотон,  $n_{p.e.} \in \{0, 1\}$ .

$G$  - число электронов, собранных на ФЭУ, при условии, что регистрируется один фотозлектрон

В процессе измерений мы регистрируем число электронов  $N_e$ . Энергетическое разрешение будет определяться следующим образом:

$$\delta E = \Delta \cdot \frac{\sqrt{Var[N_e]}}{E[N_e]},$$

где  $\Delta = 2 \cdot \sqrt{2 \cdot \ln(2)} \approx 2.36$ . В дальнейшем более удобно будет использовать квадрат этой величины  $\delta E^2$ , деленный на  $\Delta^2$ .

Сцинтиллятор имеет некий спектр излучения с плотностью вероятности  $P(\lambda)$ , поэтому необходимо проинтегрировать сигнал и шум:

$$\delta E^2 / \Delta^2 = \frac{\int Var[N_e] \cdot P(\lambda)^2 d\lambda}{\left(\int E[N_e] \cdot P(\lambda) d\lambda\right)^2}$$

Рассмотрим для простоты случай, когда сцинтиллятор излучает свет на одной длине волны.

Чтобы посчитать мат. ожидание и дисперсию величины, представляющей собой сумму флуктуирующих величин, где число слагаемых тоже является случайной величиной, необходимо воспользоваться тождеством Вальда. Данное тождество утверждает следующее:

$$E \left[ \sum_{i=0}^N X_i \right] = E[N] \cdot E[X]$$

Как следствие этого тождества получаем выражение для дисперсии:

$$Var \left[ \sum_{i=0}^N X_i \right] = Var[N] \cdot (E[X])^2 + Var[X] \cdot E[N]$$

Воспользовавшись этими двумя выражениями, выразим величину  $\delta E^2 / \Delta^2$  через базовые величины  $N_{born}$ ,  $n_{abs}$ ,  $n_{p.e.}$ ,  $G$ , которые описывают детектор:

$$\begin{aligned} \delta E^2 / \Delta^2 = & \frac{Var[N_{born}]}{(E[N_{born}])^2} + \frac{Var[n_{abs}]}{(E[n_{abs}])^2} \cdot \frac{1}{E[N_{born}]} + \\ & \frac{Var[n_{p.e.}]}{(E[n_{p.e.}])^2} \cdot \frac{1}{E[N_{abs}]} + \frac{Var[G]}{(E[G])^2} \cdot \frac{1}{E[N_{p.e.}]} \end{aligned} \quad (1)$$

Рассмотрим каждое из слагаемых подробнее.

Слагаемое  $\frac{Var[N_{born}]}{(E[N_{born}])^2}$  описывает вклад флуктуации числа фотонов, рожденных в сцинтилляторе. Стоит заметить, что  $Var[N_{born}] \neq E[N_{born}]$ , то есть пуассоновская статистика не выполняется. Детальное описание факторов, влияющих на собственное энергетическое разрешение сцинтиллятора можно найти в [2].

Выражение  $\frac{Var[n_{abs}]}{(E[n_{abs}])^2} \cdot \frac{1}{E[N_{born}]}$  описывает вклад флуктуаций сбора света на фотокатод. Существует множество факторов, влияющих на величину флуктуации: разброс точки взаимодействия рентгеновского кванта и сцинтиллятора, флуктуации поглощения световых фотонов в толще сцинтиллятора, оптической смазки или фотокатода и т.д. Чтобы найти эту величину, необходимо смоделировать распространение света в сцинтилляторе. Также тут присутствует фактор подавления  $\frac{1}{E[N_{born}]}$ : чем больше число рожденных фотонов, тем меньше светосбор влияет на энергетическое разрешение.

Следующее слагаемое  $\frac{Var[n_{p.e.}]}{(E[n_{p.e.}])^2} \cdot \frac{1}{E[N_{abs}]}$  описывает флуктуации числа регистрируемых фотонов, вызванные конечной квантовой эффективностью ФЭУ. Это слагаемое можно упростить до следующего вида:  $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{E[N_{abs}]}$ .

Последнее слагаемое  $\frac{Var[G]}{(E[G])^2} \cdot \frac{1}{E[N_{p.e.}]}$  описывает флуктуации усиления. Флуктуации усиления  $\frac{\sqrt{Var[G]}}{E[G]}$  обычно не превышают 10 – 20% [6], а наличие фактора подавления  $E[N_{p.e.}]$  делает вклад данного слагаемого в энергетическое разрешение еще меньше.

Рассмотрим теперь вклад каждого слагаемого в энергетическое разрешение в зависимости от энергии регистрируемого гамма кванта. Для примера возьмем сцинтиллятор LYSO:Ce и ФЭУ с квантовой эффективностью 28%. Данные о непропорциональности световых выхода и собственное энергетическое разрешение сцинтиллятора LYSO:Ce взяты из [4]. Чтобы получить флуктуации светосбора  $\frac{\sqrt{Var[n_{abs}]}}{E[n_{abs}]}$ , в программе GEANT4 был смоделирован детектор, аналогичный тому, что представлен на рис. 1. Флуктуации составили около 10%. Также из моделирования была получена величина  $E[n_{abs}]$ , варьирующаяся в зависимости от размера сцинтиллятора и материала отражателя от 0.2 до 0.6. В дальнейшем будем считать для определенности, что  $E[n_{abs}] = 0.5$ . Флуктуации усиления  $\frac{\sqrt{Var[G]}}{E[G]}$  примем за 10%. Таким образом, получим следующие зависимости факторов от энергии гамма-кванта (рис. 2). На рис. 2 не представлены вклады флуктуации светосбора и коэффициента усиления, т.к. они пренебрежимо малы относительно собственного энергетического разрешения сцинтиллятора и флуктуаций, связанных с неэффективностью детектора.

## 1.2. Учет собственных шумов ФЭУ и шумов электроники

В предыдущем разделе описана самая простая формула для энергетического разрешения. Однако, для полноты картины, следует учесть еще шум ФЭУ и шум электроники.

Отличие от предыдущего случая будет в том, что теперь в итоговый заряд будет давать вклад не только сигнал, но и шум. Чтобы выделить сигнал, необходимо

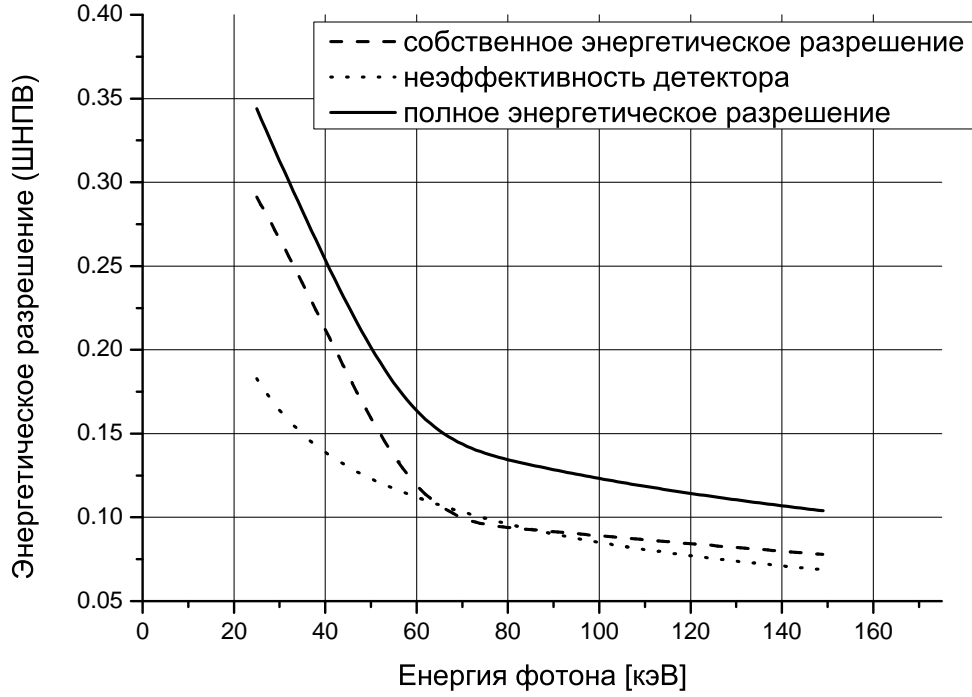


Рис. 2. Энергетическое разрешение детектора на основе YAP:Ce и ФЭУ с квантовой эффективностью 28%. Светосбор равен 50%.

вычесть шум из измерений:

$$N_e^{signal} = N_e^{signal+noise} - N_e^{noise}$$

Предположим, что время интегрирования при измерении шума  $t_{gate}$  достаточно большое и

Если раньше предполагалось бесконечное время интегрирования сигнала, то теперь оно конечно. Обозначим его  $t_{int}$ . Предположим, что время интегрирования в несколько раз больше характерного времени затухания сигнала, и мы собираем весь заряд от сигнала.

Число регистрируемых шумовых фотоэлектронов  $N_{DC}$  будет подчиняться статистике Пуассона с параметром, равным произведению времени интегрирования  $t_{gate}$  на частоту шумовых импульсов  $\nu_{DC}$ :

$$N_{p.e.} = \sum_{i=0}^{N_{abs}} n_{p.e.i} + N_{DC}$$

При наличии шумов в формуле для энергетического разрешения уже не получится сократить некоторые члены в числителе и знаменателе как в (1) и в наиболее простом виде формула будет записываться следующим образом:

$$\delta E^2 / \Delta^2 = \frac{Var[N_{p.e.}]}{(E[N_{p.e.}])^2} + \frac{Var[G]}{(E[G])^2} \cdot \frac{1}{E[N_{p.e.}]},$$

причем  $E[N_{DC}] = Var[N_{DC}] = t_{gate} \cdot \nu_{DC}$

$$E[N_{p.e.}] = E[N_{abs}] \cdot E[n_{p.e.}] + E[N_{DC}]$$

$$Var[N_{p.e.}] = Var[N_{abs}] \cdot (E[n_{p.e.}])^2 + Var[n_{p.e.}] \cdot E[N_{abs}] + Var[N_{DC}]$$

## 2. Энергетическое разрешение SiPM

С точки зрения энергетического разрешения SiPM отличается от ФЭУ наличием двух дополнительных факторов, влияющих на шум: послеимпульсами и кросстоками.

### 2.1. Учет кросстоков

Кроссток или оптический кроссток - это эффект срабатывания соседних ячеек SiPM из-за излучения оптических фотонов во время образования лавины в исходном пикселе. Поскольку свет распространяется практически мгновенно, то данный эффект не приводит к каким-либо временным сдвигам. Чтобы учесть влияние кросстока на энергетическое разрешение, необходимо модифицировать функцию плотности вероятности величины  $n_{p.e.}$ . Если раньше данная величина имела распределение Бернулли с параметром  $E[n_{p.e.}]$ , то теперь распределение будет другим. Чтобы найти это распределение нужно знать квантовую эффективность регистрации (или коэффициент конверсии, т.к. все зависит от того, какую величину рассматривать в качестве базовой) и вероятность срабатывания соседней ячейки из-за кросстока. Детальное описание вероятностей срабатывания ячеек из-за кросстока можно найти в [8]. В этой статье рассматриваются несколько моделей распространения фотонов, но утверждается, что для большинства моделей SiPM наиболее правдоподобной является модель 4-х соседей. Вероятность срабатывания  $N$  ячеек выражается через параметр  $p$ , который описывает вероятность того, что соседний пиксель сработает из-за кросстока. Вычислить параметр  $p$  можно, зная полную вероятность кросстока  $p_{total}$  (одно или больше кросстоковых событий):  $(1 - p)^4 = 1 - p_{total}$ . В дальнейшем удобно будет ввести величину  $q = 1 - p$ . Таким образом, зная квантовую эффективность  $\varepsilon$  и вероятность кросстока  $p$ , получим следующую плотность вероятности в модели 4-х соседей.

суммарное число сработавших ячеек	плотность вероятности $n_{p.e.}$
1	$\varepsilon \cdot q^4$
2	$\varepsilon \cdot 4p \cdot q^6$
3	$\varepsilon \cdot 18p^2 \cdot q^8$
4	$\varepsilon \cdot 4p^3 \cdot q^8[1 + 3q + 18q^2]$
5	$\varepsilon \cdot 5p^4 \cdot q^{10}[8 + 24q + 55q^2]$
$N > 5$	$\simeq \varepsilon \cdot P(5) \left[ 1 - \frac{P(5)}{1 - \sum_{k=1}^4 P(k)} \right]^{N-5}$

На Рис. 3 показана зависимость среднего числа регистрируемых ячеек в зависимости от величины кросстока.

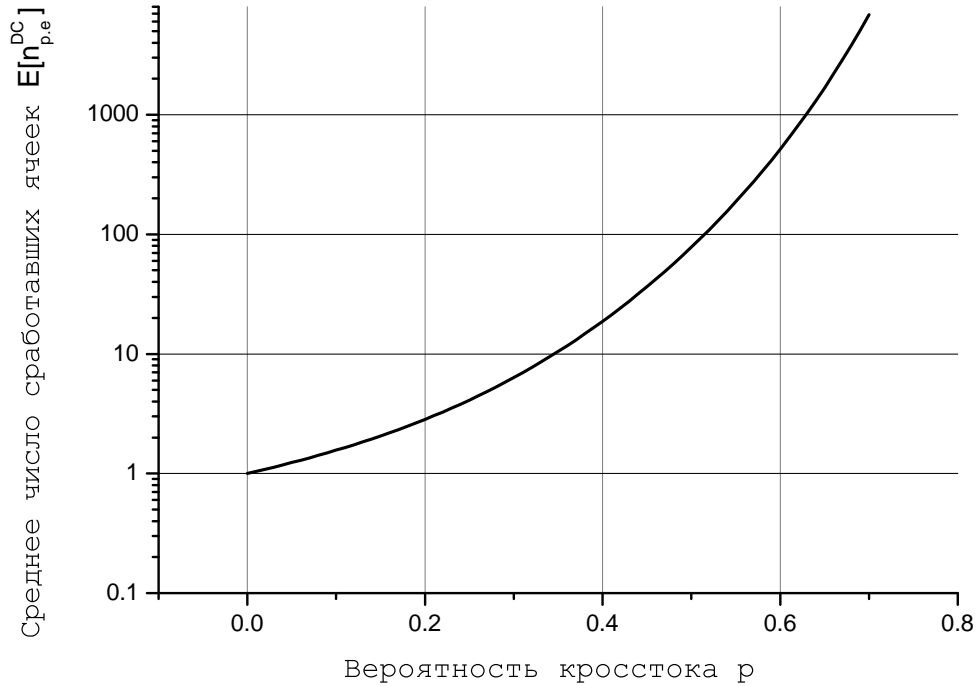


Рис. 3. Зависимость среднего числа регистрируемых ячеек в зависимости от величины кросстока.

Чтобы учесть вклад кросстоков в энергетическое разрешение необходимо пересчитать  $E[n_{p.e.}]$  и  $Var[n_{p.e.}]$  с учетом модифицированной плотности вероятности, причем в отсутствии шумов SiPM формула для энергетического разрешения останется прежней (1).

Если учесть еще и собственные шумы SiPM, то необходимо изменить величину

$N_{p.e.}$ :

$$N_{p.e.} = \sum_{i=0}^{N_{abs}} n_{p.e.i} + \sum_{i=0}^{N_{DC}} n_{p.e.i}^{DC},$$

где величина  $n_{p.e.}^{DC}$  - число зарегистрированных фотоэлектронов, если произошел одиночный шумовой (тепловой) импульс. Данная величина имеет тоже распределение, что и  $n_{p.e.}$ , только с параметром  $\varepsilon = 1$ . Таким образом, получим следующие значения для мат. ожидания и дисперсии:

$$E[N_{p.e.}] = E[n_{p.e.}^{DC}] \cdot \{\varepsilon \cdot E[N_{abs}] + E[N_{DC}]\} \quad (2)$$

$$Var[N_{p.e.}] = \{Var[N_{abs}] \cdot (E[n_{p.e.}^{DC}])^2 + Var[n_{p.e.}^{DC}] \cdot E[N_{abs}]\} \cdot \varepsilon^2 + \{(E[n_{p.e.}^{DC}])^2 + Var[n_{p.e.}^{DC}]\} \cdot E[N_{DC}] \quad (3)$$

## 2.2. Учет послеимпульсов

Послеимпульс - сигнал, появляющийся через некоторый промежуток времени после основного сигнала. Причина появления послеимпульсов заключается в захвате электронов в ловушки во время лавины с их последующим высвобождением через промежуток времени, обычно длящийся от нескольких наносекунд до нескольких микросекунд [5]. После срабатывания основного сигнала напряжение на ячейке будет восстанавливаться к исходному значению к течению времени восстановления ячейки, которое мы обозначим  $\tau_r$ . Таким образом, если послеимпульс произошел после основного сигнала через время  $\Delta t$ , то доля заряда в послеимпульсе относительно основного сигнала будет выражаться следующим образом:  $\xi(\Delta t) = 1 - \exp(-\Delta t/\tau_r)$ . Плотность вероятности величины  $\Delta t$  описывается двумя затухающими экспонентами [7]:

$$f(\Delta t) = A_s \cdot \exp(-\Delta t/\tau_s) + A_f \cdot \exp(-\Delta t/\tau_f),$$

где  $\tau_s$  и  $\tau_f$  среднее время, проходящее между двумя импульсами для быстрой и медленной компоненты, а  $A_s$  и  $A_f$  - нормировочные константы.

В большинстве приложений время интегрирования  $t_{gate}$  выбирают в несколько раз больше времени восстановления ячейки  $\tau_r$ . Мы предположим что,  $t_{gate}$  достаточно большое и в несколько раз превышает и  $\tau_f$ . Также для простоты пренебрежем вкладом медленной компоненты послеимпульса, т.к. её вероятность намного меньше вероятности быстрой компоненты.



Чтобы учесть вклад послеимпульсов в энергетическое разрешение необходимо ввести поправку на число зарегистрированных электронов:

$$N_e = \sum_{i=0}^{N_{p.e.}} (G_i + A_i)$$

Случайная величина  $G$  имеет распределение Гаусса и описывает по-прежнему флуктуации усиления, а величина  $A$  описывает послеимпульсы. На данный момент мы не знаем точную форму плотности вероятности величины  $A$ , поэтому найдем из эксперимента мат. ожидание и дисперсию суммарной величины  $G_{tot} = G + A$ .

Итого, если сцинтиллятор излучает на одной длине волны, а в качестве детектора используется SiPM, то можно написать следующее выражение для энергетического разрешения:

$$\delta E^2 / \Delta^2 = \frac{Var[N_{p.e.}]}{(E[N_{p.e.}])^2} + \frac{Var[G_{tot}]}{(E[G_{tot}])^2} \cdot \frac{1}{E[N_{p.e.}]},$$

где определения величин  $E[N_{p.e.}]$  и  $Var[N_{p.e.}]$  берутся из формул (2) и (3).

## Список литературы

- [1] D. Motta, S. Schonert Optical properties of bialkali photocathodes Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A 539 (2005) 217–235
- [2] TOWARD A USER'S TOOLKIT FOR MODELING SCINTILLATOR PROPORTIONALITY AND LIGHT YIELD
- [3] M.D. Lay, Nucl. Instr. and Meth. A 383 (1996) 485; M.D. Lay, M.J. Lyon, Nucl. Instr. and Meth. A 383 (1996) 495.
- [4] Light output and energy resolution of  $Lu_{0.7}Y_{0.3}AlO_3 : Ce$  and  $Lu_{1.95}Y_{0.05}SiO_5 : Ce$  scintillators
- [5] Characterisation Studies of Silicon Photomultipliers Patrick Eckert, Hans-Christian Schultz-Coulon, Wei Shen, Rainer Stamen, Alexander Tadday
- [6] Characterization and Simulation of the Response of Multi Pixel Photon Counters to Low Light Levels A. Vacheretc, G.J. Barkerh arXiv:1101.1996v1 [physics.ins-det] 11 Jan 2011
- [7] Y. Du, F. Retiere, Nucl. Instr. and Meth. A 596 (2008) 396-401
- [8] Modeling crosstalk in silicon photomultipliers L. Gallego, J. Rosado, F. Blanco and F. Arqueros