1. Энергетическое разрешение ФЭУ

1.1. Простейший случай

N_{born} - число световых фотонов, родившихся в сцинтилляторе.

N_{abs} - число световых фотонов, поглощенных в фотокатоде

$N_{p.e.}$ - число зарегистрированных фотоэлектронов

N_e - число электронов, собранных на последнем аноде ФЭУ

Все эти величины связаны следующими соотношениями:

$$N_{abs} = \sum_{i=0}^{N_{born}} n_{abs}$$

$$N_{p.e.} = \sum_{i=0}^{N_{abs}} n_{p.e.}$$

$$N_e = \sum_{i=0}^{N_{p.e.}} G$$

n_{abs} - число световых фотонов, поглощенных в фотокатоде, если в сцинтилляторе родился один световой фотон

$n_{p.e.}$ - число зарегистрированных фотоэлектронов, если в фотокатоде поглотился один световой фотон

G - число электронов, собранных на ФЭУ, при условии, что родился один фотоэлектрон

В процессе измерений мы регистрируем число электронов N_e. Энергетическое разрешение будет определяться следующим образом:

$$\delta E = \frac{\sqrt{Var[N_e]}}{E[N_e]}$$

В дальнейшем более удобно будет использовать квадрат этой величины δE^2.

Сцинтиллятор имеет некий спектр излучения с плотностью вероятности $P(\lambda)$, поэтому необходимо проинтегрировать сигнал и шум:

$$\delta E^2 = \frac{\int Var[N_e] * P(\lambda) d\lambda}{\left(\int E[N_e] P(\lambda) d\lambda\right)^2}$$

Рассмотрим для простоты случай, когда сцинтиллятор излучает свет на одной длине волны.

Чтобы посчитать мат. ожидание и дисперсию величины, представляющей собой сумму флуктуирующих величин, где число слагаемых тоже является случайной величиной, необходимо воспользоваться тождеством Вальда. Данное тождество утверждает следующее:

$$E\left[\sum_{i=0}^{N} X_i\right] = E[N] * E[X]$$

Как следствие этого тождества получаем выражение для дисперсии:

$$Var\left[\sum_{i=0}^{N} X_i\right] = Var[N] * (E[X])^2 + Var[X] * E[N]$$

Воспользовавшись этими двумя выражениями, выразим квадрат энергетического разрешения δE^2 через базовые величины N_{born}, n_{abs}, $n_{p.e.}$, G, которые описывают детектор:

$$\delta E^2 = \frac{Var[N_{born}]}{(E[N_{born}])^2} + \frac{Var[n_{abs}]}{(E[n_{abs}])^2} * \frac{1}{E[N_{born}]} + \frac{Var[n_{p.e.}]}{(E[n_{p.e.}])^2} * \frac{1}{E[N_{abs}]} + \frac{Var[G]}{(E[G])^2} * \frac{1}{E[N_{p.e.}]} \quad (1)$$

Рассмотрим каждое из слагаемых подробнее.

Слагаемое $\frac{Var[N_{born}]}{(E[N_{born}])^2}$ описывает вклад флуктуации числа фотонов, рожденных в сцинтилляторе. Стоит заметить, что $Var[N_{born}] \neq E[N_{born}]$, то есть пуассоновская статистика не выполняется. Детальное описание факторов, влияющих на собственное энергетическое разрешение сцинтиллятора можно найти в [1].

Выражение $\frac{Var[n_{abs}]}{(E[n_{abs}])^2} * \frac{1}{E[N_{born}]}$ описывает вклад флуктуаций сбора света на фотокатод. Существует множество факторов, влияющих на величину флуктуации: разброс точки взаимодействия рентгеновского кванта и сцинтиллятора, флуктуации поглощения световых фотонов в толще сцинтиллятора, оптической смазки или фотокатода и т.д. Чтобы найти эту величину, необходимо смоделировать распространите света в сцинтилляторе. Также тут присутствует фактор подавления $\frac{1}{E[N_{born}]}$: чем больше число рожденных фотонов, тем меньше светосбор влияет на энергетическое разрешение.

Следующее слагаемое $\frac{Var[n_{p.e.}]}{(E[n_{p.e.}])^2} * \frac{1}{E[N_{abs}]}$ описывает флуктуации числа регистрируемых фотонов, вызванные конечной конверсионной эффективностью фотокатода. Под конверсионной эффективностью понимается отношение числа зарегистрированных фотоэлектронов к числу фотонов, поглощенных в толще фотокатода. Конверсионная эффективность предполагается не зависящей от угла падения фотона, как было показано в [2]. Величина $n_{p.e.}$ имеет распределение Бернулли, причем мат. ожидание рано коэффициенту конверсии $E[n_{p.e.}] = Conv$ и $Var[n_{p.e.}] = Conv(1 - Conv)$. Таким образом, начальное выражение можно упростить до следующего: $\frac{1-Conv}{Conv} * \frac{1}{E[N_{abs}]}$.

Последнее слагаемое $\frac{Var[G]}{(E[G])^2} * \frac{1}{E[N_{p.e.}]}$ описывает флуктуации усиления. Флуктуации усиления обычно не превышают $10-20\%$ [4], а наличие фактора подавления $E[N_{p.e.}]$ делает вклад данного слагаемого в энергетическое разрешение еще меньше.

1.2. Учет собственных шумов ФЭУ и шумов электроники

В предыдущем разделе описана самая простая формула для энергетического разрешения. Однако, для полноты картины, следует учесть еще шум ФЭУ и шум электроники.

Если раньше предполагалось бесконечное время интегрирования сигнала,то теперь оно конечно. Обозначим его t_{gate}. Предположим, что время интегрирования в несколько раз больше характерного времени затухания сигнала, и мы собираем весть заряд от сигнала. Отличие от предыдущего случая будет в том, что теперь в итоговый заряд будет давать вклад не только сигнал, но и шум. Число регистрируемых шумовых фотоэлектронов N_{DC} будет подчиняться статистике Пуассона с параметром, равным произведению времени интегрирования t_{gate} на частоту шумовых импульсов ν_{DC}:

$$N_{p.e.} = \sum_{i=0}^{N_{abs}} n_{p.e.} + N_{DC}$$

При наличии шумов формулу для энергетического разрешения уже не получится записать в таком же простом виде как и раньше:

$$\delta E^2 = \frac{Var[N_{p.e.}]}{(E[N_{p.e.}])^2} + \frac{Var[G]}{(E[G])^2}\frac{1}{E[N_{p.e.}]}$$

причем $E[N_{DC}] = Var[N_{DC}] = t_{gate} * \nu_{DC}$

$$E[N_{p.e.}] = E[N_{abs}] * E[n_{p.e.}] + E[N_{DC}]$$

$$Var[N_{p.e.}] = Var[N_{abs}](E[n_{p.e.}])^2 + Var[N_{DC}]$$

2. Энергетическое разрешение SiPM

С точки зрения энергетического разрешения SiPM отличается от ФЭУ наличием двух дополнительных факторов, влияющих на шум: послеимпульсами и кросстоками.

2.1. Учет кросстоков

Кросссток или оптический кросссток - это эффект срабатывания соседних ячеек SiPM из-за излучения оптических фотонов во время образования лавины в исходном пикселе. Поскольку свет распространяется практически мгновенно, то данный эффект не приводит к каким-либо временным сдвигам. Чтобы учесть влияние кросстока на энергетическое разрешение, необходимо модифицировать функцию плотности вероятности величины $n_{p.e.}$. Если раньше данная величина имела распределение Бернулли с параметром $E[n_{p.e.}]$, то теперь распределение будет другим. Чтобы найти это распределение нужно знать квантовую эффективность регистрации (или коэффициент конверсии, т.к. все зависит от того, какую величину рассматривать в качестве базовой) и вероятность срабатывания соседней ячейки из-за кросстока. Детальное описание вероятностей срабатывания ячеек из-за кросстока можно найти в [6]. В этой статье рассматриваются несколько моделей распространения фотонов, но утверждается, что для большинства моделей SiPM наиболее правдоподобной является модель 4-х соседей. Вероятность срабатывания N ячеек выражается через параметр p, который описывает вероятность того, что соседний пиксель сработает из-за кросстока. Вычислить параметр p можно, зная полную вероятность кросстока p_{total} (одно или больше кросстоковых событий): $(1-p)^4 = 1 - p_{total}$. В дальнейшем удобно будет ввести величину $q = 1 - p$. Таким образом, зная квантовую эффективность ε и вероятность кросстока p, получим следующую плотность вероятности в модели 4-х соседей.

суммарное число сработавших ячеек	плотность вероятности $n_{p.e.}$
1	$\varepsilon * q^4$
2	$\varepsilon * 4pq^6$
3	$\varepsilon * 18p^2q^8$
4	$\varepsilon * p^3q^8[1+3q+18q^2]$
5	$\varepsilon * 5p^4q^{10}[8+24q+55q^2]$
$N > 5$	$\simeq \varepsilon * P(5)\left[1 - \frac{P(5)}{1-\sum\limits_{k=1}^{4} P(k)}\right]^{N-5}$

Чтобы учесть вклад кросстоков в энергетическое разрешение необходимо пересчитать $E[n_{p.e}]$ и $Var[n_{p.e.}]$с учетом модифицированной плотности вероятности, причем в отсутствии шумов SiPM формула для энергетического разрешения останется прежней (1).

Если учесть еще и собственные шумы SiPM, то необходимо изменить величину $N_{p.e.}$:

$$N_{p.e.} = \sum_{i=0}^{N_{abs}} n_{p.e.} + \sum_{i=0}^{N_{DC}} n_{p.e.}^{DC},$$

где величина $n_{p.e.}^{DC}$ - число зарегистрированных фотоэлектронов, если произошел одиночный шумовой (тепловой) импульс. Данная величина имеет тоже распределение,что и $n_{p.e.}$, только с параметром $\varepsilon = 1$. Таким образом, получим следующие значения для мат. ожидания и дисперсии:

$$E[N_{p.e.}] = E[n_{p.e.}^{DC}] \left\{\varepsilon * E[N_{cath}] + E[N_{DC}]\right\} \tag{2}$$

$$\begin{split} Var[N_{p.e.}] = \left\{Var[N_{abs}] * (E[n_{p.e.}^{DC}])^2 + Var[n_{p.e.}^{DC}] * E[N_{abs}]\right\} \varepsilon^2 + \\ \left\{(E[n_{p.e.}^{DC}])^2 + Var[n_{p.e.}^{DC}]\right\} E[N_{DC}] \end{split} \tag{3}$$

2.2. Учет послеимпульсов

Послеимпульс - сигнал, появляющийся через некоторый промежуток времени после основного сигнала. Причина появления послеимпульсов заключается в захвате электронов в ловушки во время лавины с их последующим высвобождение через промежуток времени, обычно длящийся от нескольких наносекунд до нескольких микросекунд [3]. После срабатывания основного сигнала напряжение на ячейке будет восстанавливаться к исходному значению к течение времени восстановления ячейки, которое мы обозначим τ_r. Таким образом, если послеимпульс произошел после основного сигнала через время Δt, то доля заряда в послеимпульсе относительно основного сигнала будет выражаться следующим образом: $\xi(\Delta t) = 1 - \exp\left(-\Delta t/\tau_r\right)$. Плотность вероятности величины Δt описывается двумя затухающими экспонентами [5]:

$$f(\Delta t) = A_s * \exp(-\Delta t/\tau_s) + A_f * \exp(-\Delta t/\tau_f),$$

где τ_s и τ_f среднее время, проходящее между двумя импульсами для быстрой и медленной компоненты, а A_s и A_f - нормировочные константы.

В большинстве приложений время интегрирования t_{gate} выбирают в несколько раз больше времени восстановления ячейки τ_r. Мы предположим что, t_{gate} достаточно большое и в несколько раз превышает и τ_f. Также для простоты пренебрежем вкладом медленной компоненты послеимпульса, т.к. её вероятность намного меньше вероятности быстрой компоненты.

Чтобы учесть вклад послеимпульсов в энергетическое разрешение необходимо ввести поправку на число зарегистрированных электронов:

$$N_e = \sum_{i=0}^{N_{p.e.}} (G + A)$$

Случайная величина G имеет распределение Гаусса и описывает по-прежнему флуктуации усиления, а величина A описывает послеимпульсы. На данный момент мы не знаем точную форму плотности вероятности величины A, поэтому найдем из эксперимента мат. ожидание и дисперсию суммарной величины $G_{tot} = G + A$.

Итого, если сцинтиллятор излучает на одной длине волны, а в качестве детектора используется SiPM, то можно написать следующее выражение для энергетического разрешения:

$$\delta E^2 = \frac{Var[N_{p.e.}]}{(E[N_{p.e.}])^2} + \frac{Var[G_{tot}]}{(E[G_{tot}])^2}\frac{1}{E[N_{p.e.}]},$$

где определения величин $E[N_{p.e.}]$ и $Var[N_{p.e.}]$ берутся из формул (2) и (3).

Список литературы

[1] TOWARD A USER'S TOOLKIT FOR MODELING SCINTILLATOR PROPORTIONALITY AND LIGHT YIELD

[2] M.D. Lay, Nucl. Instr. and Meth. A 383 (1996) 485; M.D. Lay, M.J. Lyon, Nucl. Instr. and Meth. A 383 (1996) 495.

[3] Characterisation Studies of Silicon Photomultipliers Patrick Eckert, Hans-Christian Schultz-Coulon, Wei Shen, Rainer Stamen, Alexander Tadday

[4] Characterization and Simulation of the Response of Multi Pixel Photon Counters to Low Light Levels A. Vacheretc, G.J. Barkerh arXiv:1101.1996v1 [physics.ins-det] 11 Jan 2011

[5] Y. Du, F. Retiere, Nucl. Instr. and Meth. A 596 (2008) 396-401

[6] Modeling crosstalk in silicon photomultipliers L. Gallego, J. Rosado, F. Blanco and F. Arqueros