

## Тема 4. Анализ нелинейных моделей (продолжение)

### Периодические решения (предельные циклы)

Пусть при  $t \rightarrow \infty$  решение системы (1)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1)$$

является периодическим:  $\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t)$ . Что такое «устойчивость решения» в этом случае? Рассмотренный ранее в прошлой теме рис. 4в – пример того, что периодическое решение может быть своеобразным объектом притяжения (аттрактором) при различных возмущениях в начальных условиях. Однако, хотя все эти возмущенные решения при  $t \rightarrow \infty$  стремятся к траектории предельного цикла, но их разность не стремится к нулю, как это требуется для асимптотической устойчивости. Все сказанное является основанием для введения нового понятия – «*орбитальной устойчивости*», совпадающего с устойчивостью по Ляпунову для стационарных точек.

Пусть  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ , а  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  – расстояние между точками  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ .

Определим расстояние от некоторой точки  $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$  до множества  $\mathbf{M} \subset \mathbf{R}^n$  как

$$\rho(\mathbf{a}, \mathbf{M}) = \inf_{\mathbf{x} \in \mathbf{M}} \rho(\mathbf{a}, \mathbf{x}).$$

Пусть также  $\mathbf{x}(t)$  – решение системы (1),  $\gamma(\mathbf{x}_0)$  – его траектория, а  $\mathbf{y}(t)$  – другое решение (1), отличающееся начальными условиями  $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ .

**Определение.** Решение  $\mathbf{x}(t)$  системы (1) называется **орбитально устойчивым**, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \mathbf{y}(t))(\rho(\gamma(\mathbf{x}_0), \mathbf{y}_0) < \delta \Rightarrow \rho(\gamma(\mathbf{x}_0), \mathbf{y}(t)) < \varepsilon). \quad (2)$$

Если в дополнение к (2)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\gamma(\mathbf{x}_0), \mathbf{y}(t)) \rightarrow 0,$$

то  $\mathbf{x}(t)$  – **асимптотически орбитально устойчивое** решение.

**Определение.** Замкнутая орбитально устойчивая траектория называется **устойчивым предельным циклом**.

Критерий Ляпунова устойчивости стационарной точки формулировался на основе собственных значений матрицы Якоби. Для определения критерия орбитальной устойчивости предварительно рассмотрим некоторые свойства линейной системы с периодической матрицей

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{A}(t+T) = \mathbf{A}(t) \quad (3)$$

Ее решение записывается в виде  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{U}(t)\mathbf{x}_0$ , где  $\mathbf{U}(t)$  – невырожденная **фундаментальная матрица системы** (3), удовлетворяющая уравнениям

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{U}(t), \quad \mathbf{U}(0) = \mathbf{E}. \quad (4)$$

Так как

$$\frac{d\mathbf{U}(t+T)}{dt} = \mathbf{A}(t+T) \cdot \mathbf{U}(t+T) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{U}(t+T),$$

то  $\mathbf{U}(t+T)$  также является решением системы (4) и отличается от  $\mathbf{U}(t)$  постоянным матричным множителем  $\mathbf{C}$ :

$$\mathbf{U}(t+T) = \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{C}. \quad (5)$$

Покажем, что  $\mathbf{U}(t)$  может быть записана в виде  $\mathbf{U}(t) = \mathbf{L}(t) \cdot e^{\mathbf{R}t}$ , где  $\mathbf{R}$  – постоянная, а  $\mathbf{L}(t)$  – периодическая матрица ( $\mathbf{L}(t+T) = \mathbf{L}(t)$ ). Действительно,

$$\mathbf{U}(t+T) = \mathbf{L}(t+T) \cdot e^{\mathbf{R}(t+T)} = \mathbf{L}(t) \cdot e^{\mathbf{R}t} \cdot e^{\mathbf{R}T} = \mathbf{U}(t) \cdot e^{\mathbf{R}T}. \quad (6)$$

Так как при этом  $\mathbf{U}(0) = \mathbf{L}(0) = \mathbf{L}(T) = \mathbf{E}$ , то  $\mathbf{U}(T) = \mathbf{U}(0) \cdot e^{\mathbf{R}T} = e^{\mathbf{R}T}$ , и в соответствии с (6) имеем

$$\mathbf{U}(t+T) = \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{U}(T), \quad \mathbf{U}(n \cdot T) = (\mathbf{U}(T))^n. \quad (7)$$

Матрица  $\mathbf{U}(T) = e^{\mathbf{R}T}$  называется **матрицей монодромии**, а ее собственные значения  $\rho_k$  – **мультипликаторами**.

Так как  $\mathbf{x}(nT) = \mathbf{U}(nT)\mathbf{x}_0 = (\mathbf{U}(T))^n \mathbf{x}_0$ , то, как легко заметить, для асимптотической устойчивости нулевого стационарного решения все мультипликаторы должны быть по модулю меньше единицы:  $|\rho_k| < 1$ .

Полученные формулы позволяют сформулировать также критерий существования периодического решения и его орбитальной устойчивости. Условие периодичности решения  $\mathbf{x}(T) = \mathbf{U}(T)\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$  означает, что  $\mathbf{x}_0$  – это собственный вектор матрицы монодромии, а отвечающий ему мультипликатор равен единице  $\rho_1 = 1$ . При этом остальные мультипликаторы должны быть по модулю меньше единицы.

**Критерий асимптотической орбитальной устойчивости предельного цикла:**

$$\rho_1 = 1; \quad |\rho_k| < 1, \quad k = 2, 3, \dots, n \quad (8)$$

Теперь обратимся к критерию орбитальной устойчивости в нелинейной системе (1).

**Уравнение в вариациях.**

Пусть  $\mathbf{p}(t)$  – решение системы (1)

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{p}). \quad (9)$$

Рассмотрим другое решение  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{p}(t) + \Delta\mathbf{x}(t)$ , близкое к  $\mathbf{p}(t)$ , где  $\Delta\mathbf{x}(t)$  достаточно мало по величине

$$\frac{d(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{x})}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{x}). \quad (10)$$

Вычитая из (10) равенство (9) и раскладывая в ряд по  $\Delta\mathbf{x}$

$$\frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{f}(\mathbf{p}) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{p}) \cdot \Delta\mathbf{x} + (**) - \mathbf{f}(\mathbf{p}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{p}) \cdot \Delta\mathbf{x} + (**),$$

ограничимся линейным приближением и пренебрежем остальными слагаемыми (\*\*)

$$\frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{p}) \cdot \Delta\mathbf{x}. \quad (11)$$

Уравнение (11) называется *уравнением в вариациях* для решения  $\mathbf{p}(t)$  системы (1) или линеаризацией системы (1) на решении  $\mathbf{p}(t)$ . В частности, если  $\mathbf{p}(t)$  – стационарное решение, то матрица Якоби в (11) постоянна и эта система превращается в привычную для нас линейную систему с постоянной матрицей. Теперь рассмотрим случай, когда  $\mathbf{p}(t)$  – периодическое решение. Тогда (11) является линейной системой с периодической матрицей  $\mathbf{A}(t) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{p})$ . Можно

показать, что в этом случае решение  $\Delta\mathbf{x}$  уравнения в вариациях также является периодическим. Периодическим является, тем самым, и  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{p}(t) + \Delta\mathbf{x}(t)$ . Действительно, вводя обозначение  $\dot{\mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ , продифференцируем (9) по  $t$

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{p}) \cdot \dot{\mathbf{p}}. \quad (12)$$

Вид (12) совпадает с (11), а  $\dot{\mathbf{p}}$  – периодическое решение, как и  $\mathbf{p}$ . Следовательно, периодическим является и решение  $\Delta\mathbf{x}$  системы (11). Эти соображения и позволяют сформулировать критерий орбитальной устойчивости периодического решения нелинейной системы (1) в той форме (8), как он был определен для линейной системы (3).

### ***Получение периодического решения и оценка его орбитальной устойчивости***

Пусть решение системы (1) является периодическим

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}(0). \quad (13)$$

Применить для решения этой задачи традиционные методы решения краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений мешает тот факт, что промежуток интегрирования не определен, так как период  $T$  неизвестен. Поэтому выполним в (13) замену переменных  $t = T \cdot \tau$

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = T \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(1) = \mathbf{x}(0), \quad \tau \in [0, 1]. \quad (14)$$

Теперь промежуток решения определен, однако для  $n + 1$  неизвестного (вектор  $\mathbf{x}(0)$  и период  $T$ ) имеется лишь  $n$  уравнений:  $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}(0)$ . Неоднозначность вызвана тем, что в качестве начальной точки может быть выбрана любая точка, принадлежащая траектории периодического решения. Для решения возникшей проблемы можно зафиксировать одну из компонент вектора  $\mathbf{x}(0)$ , например,  $\mathbf{x}^{(j)}(0) = \alpha$ . Если  $\mathbf{x}^{(j)}(0) = \alpha$  не принадлежит траектории периодического решения, следует подобрать нужное значение  $\alpha$  или изменить номер  $j$  компоненты  $\mathbf{x}(0)$ .

Для оценки орбитальной устойчивости необходимо вычислить матрицу монодромии  $\mathbf{U}(T) = \mathbf{U}(1)$  и рассчитать ее мультипликаторы. Пользуясь равенством

$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{U}(\tau) \cdot \mathbf{x}(0)$ , для элементов  $u_{ik}(\tau)$  матрицы  $\mathbf{U}(\tau)$  получаем

$$u_{ik}(\tau) = \frac{\partial x^{(i)}(\tau)}{\partial x^{(k)}(0)}.$$

Продифференцируем  $i$ -е уравнение (14) по  $x^{(k)}(0)$  и поменяем порядок дифференцирования

$$\frac{du_{ik}(\tau)}{d\tau} = T \cdot \sum_{s=1}^n \frac{\partial \mathbf{f}^{(i)}}{\partial x^{(s)}} u_{sk}(\tau), \quad u_{ik}(0) = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases}. \quad (15)$$

Система (15) решается совместно с (14). Результатом является матрица  $\mathbf{U}(1)$ , мультипликаторы которой позволяют судить об орбитальной устойчивости периодического решения.

В системе (13) может быть один или несколько параметров. При их вариации можно строить диаграммы периодических решений от параметра или бифуркационные диаграммы.

### **Простейшие виды бифуркации периодического решения.**

В соответствии с (8) асимптотически орбитальное периодическое решение характеризуется одним мультипликатором, равным единице, и остальными, по модулю меньшими единице. Пусть значение параметра  $\varepsilon = \varepsilon^*$

характеризует точку бифуркации. Простейшие виды бифуркации реализуются одним из следующих трех способов.

I. **Появляется еще один мультипликатор, равный 1.** Этот вид бифуркации связан с рождением (исчезновением) пары замкнутых траекторий. Например, при слиянии двух циклов реализуется неустойчивый фокус (рис. 1)

II. **Один из мультипликаторов становится равным -1.** Эта бифуркация называется бифуркацией удвоения периода (рис. 2)

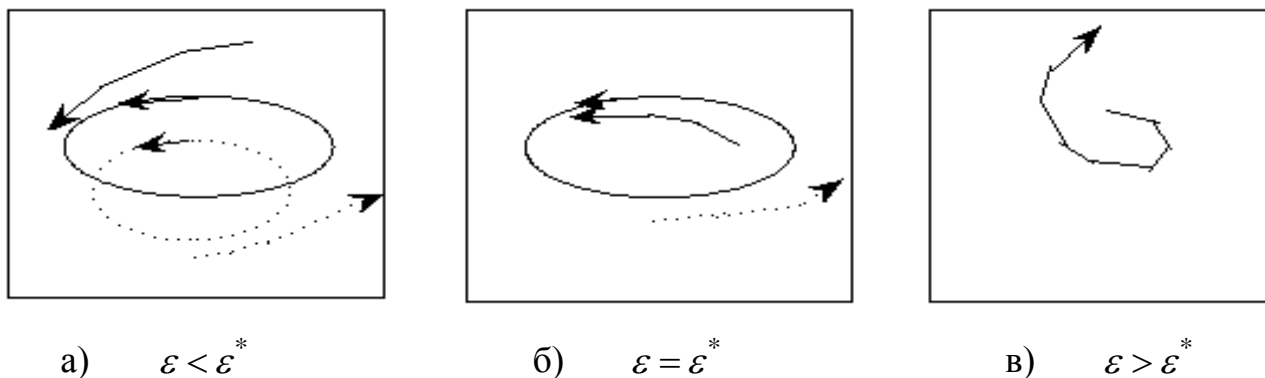


Рис. 1. Исчезновение пары замкнутых траекторий

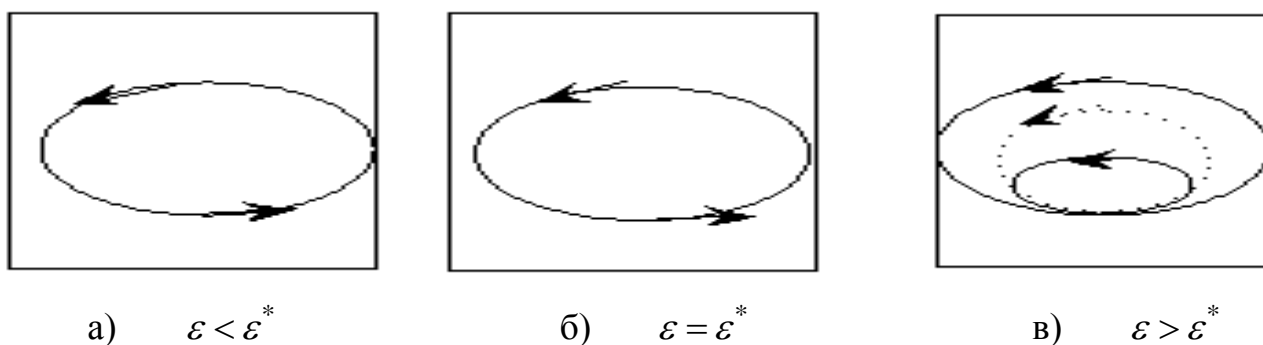


Рис. 2. Бифуркация удвоения периода

III. **Модуль комплексно-сопряженной пары мультипликаторов становится равным 1.** Этот вид бифуркации характеризуется возникновением инвариантного тора (рис. 3)

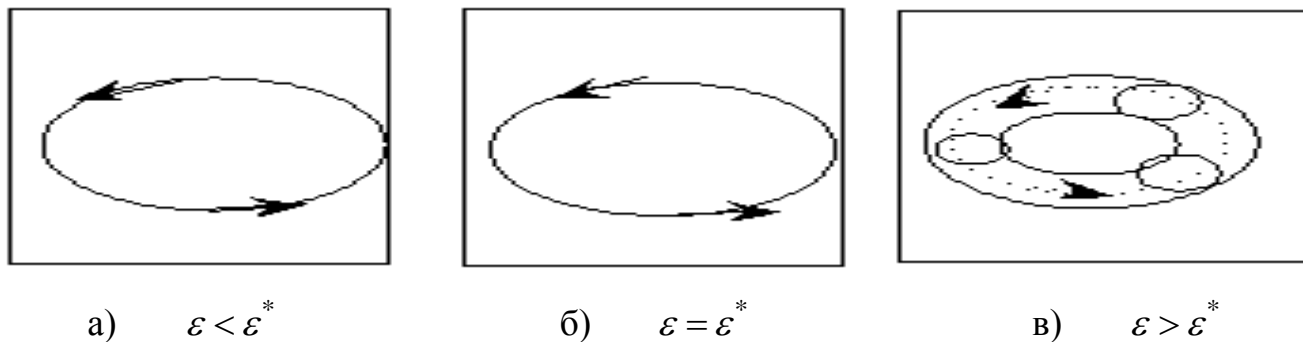


Рис. 3. Возникновение инвариантного тора

**Отображение Пуанкаре**

Пусть  $\gamma(\mathbf{x}_0)$  – замкнутая траектория решения системы (8). Выберем точку  $\mathbf{x}_0 \in \gamma$  и проведем через нее сечение  $\Sigma$  (малая часть гиперплоскости, пересекающая  $\gamma$  под ненулевым углом в точке  $\mathbf{x}_0$ ). Траектории системы, близкие к  $\gamma$ , задают отображение  $\mathbf{P}$  сечения  $\Sigma$  на себя следующим образом. Пусть  $\mathbf{x}_0 \in \Sigma$ , а  $\mathbf{P}(\mathbf{x}_0)$  – первая после  $\mathbf{x}_0$  точка пересечения  $\gamma(\mathbf{x}_0)$  с сечением  $\Sigma$ .

Отображение  $\mathbf{P}: \Sigma \rightarrow \Sigma$  называется отображением Пуанкаре, соответствующим замкнутой траектории  $\gamma$ :

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{P}(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{P}(\mathbf{x}_1), \quad \dots \quad \mathbf{x}_k = \mathbf{P}^k(\mathbf{x}_0).$$

Предельному циклу отвечает  $\mathbf{x}_0$  – неподвижная точка на  $\Sigma$ . Бифуркации, связанной с рождением (исчезновением) пары замкнутых траекторий, отвечают две неподвижные точки. Бифуркации удвоения периода отвечает траектория, замыкающаяся после двух обходов:  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{P}(\mathbf{x}_0)$ ,  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{P}(\mathbf{x}_1)$ . Наконец, возникновение инвариантного тора сопровождается ответвлением от точки  $\mathbf{x}_0$  инвариантной окружности (замкнутой инвариантной кривой) отображения  $\mathbf{P}$ .

Использование отображения Пуанкаре упрощает процесс исследования решения по следующим причинам:

- число координат сокращается на единицу;
- время дискретизируется и дифференциальные уравнения заменяются разностными уравнениями, определяющими отображение Пуанкаре;
- резко сокращается число данных, подлежащих обработке, так как почти всеми точками траектории можно пренебречь.

Теперь рассмотрим вопрос построения отображения Пуанкаре.

Пусть сечение  $\Sigma$  (участок гиперповерхности  $\mathbf{S}$ ) для траектории  $\gamma$  системы (8.1) задается уравнением

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}) = 0. \quad (16)$$

Обычный подход к нахождению орбиты отображения Пуанкаре заключается в интегрировании (1) выбранным методом. Как только в двух соседних по  $t$  точках  $\mathbf{S}(\mathbf{x})$  меняет знак, например

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}(t_m)) < 0, \quad \mathbf{S}(\mathbf{x}(t_{m+1})) > 0,$$

начинается утомительная процедура подбора нужного шага на промежутке  $[t_m, t_{m+1}]$  с целью выполнения условия (16) с требуемой точностью. При этом весь процесс каждый раз повторяется для очередной точки пересечения траекторией  $\gamma$  сечения  $\Sigma$ . Для устранения этого недостатка, модифицируем процесс вычислений, чтобы после достижения точки  $\mathbf{x}(t_m)$  сразу оказаться на  $\Sigma$ .

Пусть первоначально сечение  $\mathbf{S}$  задается уравнением

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{(k)} - a = 0 \quad (17)$$

Перейдем в системе (1) к новой независимой переменной  $\mathbf{x}^{(k)}$  вместо  $t$ . Тогда (1) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}^{(i)}}{d\mathbf{x}^{(k)}} &= \frac{\mathbf{f}^{(i)}(\mathbf{x})}{\mathbf{f}^{(k)}(\mathbf{x})}; \quad i \neq k \\ \frac{dt}{d\mathbf{x}^{(k)}} &= \frac{1}{\mathbf{f}^{(k)}(\mathbf{x})} \end{aligned} \quad (18)$$

Теперь, достигнув  $\mathbf{x}(t_m)$ , выполним шаг интегрирования в (18) по независимой переменной  $\mathbf{x}^{(k)}$  размером  $\Delta\mathbf{x}^{(k)} = a - \mathbf{x}^{(k)}(t_m)$ . Сразу после этого продолжим интегрирование системы в обычном виде (1). Если сечение  $\mathbf{S}$  задается не формулой (17), а более общим выражением (16), то расширим вектор  $\mathbf{x}$ , введя еще одну его компоненту

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{S}(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}),$$

и дополним (8.1) дифференциальным уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}^{(n+1)}}{dt} = f^{(n+1)}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{x}^{(j)}} \cdot f^{(j)}(\mathbf{x}). \quad (19)$$

Для новой совместной системы (1) и (19) уравнение сечения приобретает простой вид (17)

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{(n+1)} = 0,$$

и все сводится к ранее рассмотренному случаю.

### Нахождение точек бифуркации для периодических решений.

Обратимся к системе (14), введя в нее скалярный параметр  $\varepsilon$

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = T \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon), \quad \mathbf{x}(1) = \mathbf{x}(0), \quad \tau \in [0, 1]. \quad (20)$$

Система (20) решается совместно с (15). Результатом является матрица монодромии  $\mathbf{U}(1)$ , мультипликаторы которой позволяют судить об орбитальной устойчивости периодического решения. Теперь необходимо записать дополнительные уравнения для определения значений  $\varepsilon$ , отвечающих конкретному виду бифуркации периодического решения. Обратимся к ранее рассмотренным простейшим случаям.

**Бифуркация удвоения периода.** Один из мультипликаторов  $\mathbf{U}(1)$  становится равным (-1). Отвечающий ему собственный вектор обозначим за  $\mathbf{v}$  и запишем

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(1) \cdot \mathbf{v} &= -\mathbf{v} \Rightarrow (\mathbf{U}(1) + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{v}^{(k)} &= 1 \end{aligned} \quad (21)$$

Последнее уравнение в (21) аналогично в теме 3 последнему уравнению в (22). Систему (21) составляет  $(n+1)$  уравнение относительно  $(n+1)$  неизвестного:

вектора  $\mathbf{v}$  и параметра  $\varepsilon$ . Если  $\varepsilon$  окажется вектором из двух компонент, то варьируя с некоторым шагом одну из них и решая (21) относительно другой, можно строить бифуркационную диаграмму для данного вида бифуркации.

**Рождение (исчезновение) пары замкнутых траекторий.** При этом у матрицы  $\mathbf{U}(1)$  появляется еще один мультипликатор, равный единице, и в зависимости от вида жордановой формы  $\mathbf{U}(1)$  возможны две ситуации.

1) Матрица  $\mathbf{U}(1)$  имеет два линейно независимых вектора  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$ , отвечающие единичным собственным значениям:

$$\begin{aligned} (\mathbf{U}(1) - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{0}, \\ (\mathbf{U}(1) - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{w} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (22)$$

2) Матрица  $\mathbf{U}(1)$  имеет один собственный вектор  $\mathbf{v}$  и один корневой вектор  $\mathbf{w}$ :

$$\begin{aligned} (\mathbf{U}(1) - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{0}, \\ (\mathbf{U}(1) - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{w} &= \mathbf{v} \end{aligned} \quad (23)$$

При этом заранее неизвестно, какой из случаев (22) или (23) имеет место. Для получения уравнений, пригодных в обеих ситуациях, умножим вторые уравнения в (22) и (23) на матрицу  $(\mathbf{U}(1) - \mathbf{E})$ . В итоге с учетом условий на  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$  получим:

$$\begin{aligned} (\mathbf{U}(1) - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{0}, \\ (\mathbf{U}(1) - \mathbf{E})^2 \cdot \mathbf{w} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{v}^{(k)} &= 1, \quad \mathbf{w}^{(k)} = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

**Возникновение инвариантного тора.** Модуль комплексно-сопряженной пары мультипликаторов  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$  становится равным 1. Обозначая отвечающие им собственные векторы за  $\mathbf{u} \pm i\mathbf{v}$

$$\mathbf{U}(1) \cdot (\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = (\alpha + i\omega) \cdot (\mathbf{u} + i\mathbf{v}) \quad (25)$$

и приравнивая отдельно действительные и мнимые части равенства (25), имеем

$$\begin{aligned} (\mathbf{U}(1) - \alpha\mathbf{E}) \cdot \mathbf{u} + \omega \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{0}, \\ -\omega \cdot \mathbf{u} + (\mathbf{U}(1) - \alpha\mathbf{E}) \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{u}^{(k)} &= 1, \quad \mathbf{v}^{(k)} = 0, \quad \alpha^2 + \omega^2 = 1. \end{aligned} \quad (26)$$

Подведем некоторые промежуточные итоги. Рассмотренные задачи анализа нелинейных моделей могут быть представлены в виде рис. 4:



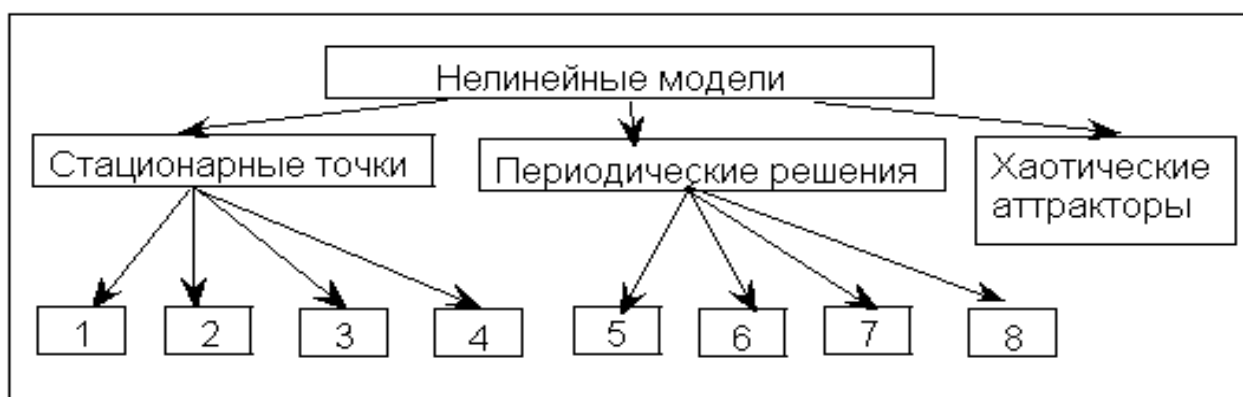


Рис. 4 Задачи анализа нелинейных моделей

- 1 – Нахождение стационарных точек
- 2 – Анализ устойчивости
- 3 – Построение диаграмм стационарных решений
- 4 – Построение бифуркационных диаграмм
- 5 – Нахождение периодических решений
- 6 – Анализ орбитальной устойчивости
- 7 – Построение диаграмм периодических решений
- 8 – Построение бифуркационных диаграмм периодических решений

Используемый при этом математический аппарат сводится к следующему.

*Задача 1.* Решается система нелинейных уравнений  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) = \mathbf{0}$  при заданном значении  $\varepsilon$ .

*Задача 2.* Рассчитываются собственные значения матрицы Якоби в стационарной точке.

*Задача 3.* Многократно решается *задача 1*.

*Задача 4.* Аналогично *задачам 1 и 3* с использованием дополнительных уравнений, характеризующих конкретный вид бифуркации.

*Задача 5.* Решается краевая задача (14).

*Задача 6.* Система (14) решается одновременно с (15) и рассчитываются собственные значения матрицы монодромии.

*Задача 7.* Многократно решается *задача 5*.

*Задача 8.* Аналогично *задачам 5 и 7* с использованием дополнительных уравнений (21) – (26).

При возникновении «хаотического» (или «странного») аттрактора отображение Пуанкаре дает хаотическую картину, но с очевидной ограниченностью решения. В следующей теме познакомимся с объектами этого рода.