Возмущения по параметру.

I. Статическая модель. Алгебраические уравнения.

Пример 1. $f(x,\varepsilon) = x^2 - (3+2\varepsilon)x + 2 + \varepsilon = 0$ (1)

Уравнение (1) называется ***возмущенным уравнением*** в отличие от ***невозмущенного (или вырожденного) уравнения***, отвечающего $\varepsilon = 0$:

$$f(x,0) = x^2 - 3x + 2 = 0. \qquad (2)$$

Будем искать решение (1) в виде следующего разложения

$$x(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \varepsilon^k = x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \ldots \qquad (3)$$

На практике ограничиваются небольшим количеством слагаемых в (3). Подставим (3) в (1) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε:

$$\left(x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \ldots\right)^2 - (3+2\varepsilon)\left(x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \ldots\right) + 2 + \varepsilon = 0,$$

$$\left(x_0^2 - 3x_0 + 2\right) + \varepsilon\left(2x_0x_1 - 3x_1 - 2x_0 + 1\right) + \varepsilon^2\left(2x_0x_2 + x_1^2 - 3x_2 - 2x_1\right) + \ldots = 0$$

ε^0) $x_0^2 - 3x_0 + 2 = 0,\quad x_0^{(1)} = 1,\quad x_0^{(2)} = 2;$

ε^1) $2x_0x_1 - 3x_1 - 2x_0 + 1 = 0,\quad x_1^{(1)} = -1,\quad x_1^{(2)} = 3;$

ε^2) $2x_0x_2 + x_1^2 - 3x_2 - 2x_1 = 0,\quad x_2^{(1)} = 3,\quad x_2^{(2)} = -3.$

Для обоих корней получаем

$$x^{(1)} = 1 - \varepsilon + 3\varepsilon^2 + \ldots, \qquad x^{(2)} = 2 + 3\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \ldots$$

Пример 2. $x^2 + (\varepsilon - 2)x + 1 = 0.$ (4)

Аналогично предыдущему попробуем искать разложение решения (4) в виде (3). Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем

$$\left(x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \ldots\right)^2 + (\varepsilon - 2)\left(x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \ldots\right) + 1 = 0,$$

ε^0) $x_0^2 - 2x_0 + 1 = 0,\quad x_0^{(1)} = x_0^{(2)} = 1;$

ε^1) $2x_0x_1 + x_0 - 2x_1 = 0 \;\Rightarrow\; 1 = 0$!!!

Очевидно, что разложение (3) в данном случае неприемлемо. В каком же виде искать решение (4)? Решением вырожденного уравнения являются два кратных единичных корня. Если записать $x(\varepsilon)$ в виде $x(\varepsilon) = 1 + \delta$, где δ стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, то из (4) имеем

$$x^2 + (\varepsilon - 2)x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; (x-1)^2 = -\varepsilon \cdot x, \;\Rightarrow \delta^2 = -\varepsilon(1+\delta).$$

Отсюда видно, что δ при малых ε ведет себя как $\sqrt{\varepsilon}$. Поэтому будем искать разложение решения (4) в виде

$$x(\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}x_k\varepsilon^{\frac{k}{2}}=x_0+x_1\sqrt{\varepsilon}+x_2\varepsilon+\ldots, \tag{5}$$

$$\left(x_0+x_1\sqrt{\varepsilon}+x_2\varepsilon+\ldots\right)^2+(\varepsilon-2)\left(x_0+x_1\sqrt{\varepsilon}+x_2\varepsilon+\ldots\right)+1=0,$$

$\varepsilon^0)$ $\quad x_0^2-2x_0+1=0, \quad x_0^{(1)}=x_0^{(2)}=1;$

$\sqrt{\varepsilon})$ $\quad 2x_0x_1-2x_1=0, \quad 0=0;$

$\varepsilon)$ $\quad x_1^2+2x_0x_2+x_0-2x_2=0, \quad x_1^2+1=0, \quad x_1^{(1)}=i, \quad x_1^{(2)}=-i;$

$\varepsilon^{\frac{3}{2}})$ $\quad 2x_0x_3+2x_1x_2+x_1-2x_3=0, \quad x_2^{(1)}=x_2^{(2)}=-\dfrac{1}{2}.$

Теперь для обоих корней получаем

$$x^{(1)}(\varepsilon)=1+i\cdot\sqrt{\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{2}+\ldots, \quad x^{(1)}(\varepsilon)=1-i\cdot\sqrt{\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{2}+\ldots$$

Очевидно, что в случае трехкратного корня в разложении будут присутствовать слагаемые вида $\varepsilon^{\frac{k}{3}}$.

Пример 3. $\varepsilon x^2+x+1=0$. (6)

Отличие этого примера от предыдущих двух заключается в том, что вырожденное и невырожденное уравнение имеют принципиально *различную структуру* (одно из них квадратное, а другое линейное). Такой вид возмущений с малым параметром при старшей степени x получил название ***сингулярное возмущение***. Как и ранее, попробуем искать разложение решения (6) в виде (3)

$$\varepsilon\left(x_0+x_1\varepsilon+x_2\varepsilon^2+\ldots\right)^2+\left(x_0+x_1\varepsilon+x_2\varepsilon^2+\ldots\right)+1=0,$$

$\varepsilon^0)$ $\quad x_0+1=0, \quad x_0^{(1)}=-1;$

$\varepsilon^1)$ $\quad x_0^2+x_1=0, \quad x_1^{(1)}=-1;$

$\varepsilon^2)$ $\quad 2x_0x_1+x_2=0, \quad x_2^{(1)}=-2;$

Заметно, что разложение получается лишь для одного корня, в то время как уравнение является квадратным. Следовательно, разложение для второго корня нужно искать в другом виде. Точное выражение для корней квадратного уравнения (6) выглядит следующим образом:

$$x^{(1,2)}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}, \quad \sqrt{1-4\varepsilon}\approx1-2\varepsilon-2\varepsilon^2+\ldots,$$

$$x^{(1)}=-1-\varepsilon-2\varepsilon^2+\ldots, \quad x^{(2)}=-\frac{1}{\varepsilon}+1+\varepsilon+2\varepsilon^2+\ldots$$

Теперь очевидно, что в разложении должны присутствовать отрицательные степени ε. Будем искать разложение решения (6) в виде

$$x(\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty} x_k\varepsilon^{\,k-p}=x_0\varepsilon^{-p}+x_1\varepsilon^{-p+1}+x_2\varepsilon^{-p+2}+\ldots \qquad (7)$$

Подстановка в (6) дает

$$\varepsilon\left(x_0\varepsilon^{-p}+x_1\varepsilon^{-p+1}+x_2\varepsilon^{-p+2}+\ldots\right)^2+\left(x_0\varepsilon^{-p}+x_1\varepsilon^{-p+1}+x_2\varepsilon^{-p+2}+\ldots\right)+1=0,$$

$$\varepsilon^{1-2p}\left(x_0+x_1\varepsilon+x_2\varepsilon^2+\ldots\right)^2+\varepsilon^{-p}\left(x_0+x_1\varepsilon+x_2\varepsilon^2+\ldots\right)+1=0.$$

Чтобы не получить тривиальное $x_0=0$, значение p должно быть равным единице. Тогда последовательно получаем

$\varepsilon^{-1})\quad x_0^2+x_0=0,\quad x_0^{(1)}=0,\quad x_0^{(2)}=-1;$

$\varepsilon^{0})\quad 2x_0x_1+x_1+1=0,\quad x_1^{(1)}=-1,\quad x_1^{(2)}=1;$

$\varepsilon^{1})\quad 2x_0x_2+x_1^2+x_2=0,\quad x_2^{(1)}=-1,\quad x_2^{(2)}=1;$

$$x^{(1)}(\varepsilon)=-1-\varepsilon-2\varepsilon^2+\ldots,\qquad x^{(2)}(\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}+1+\varepsilon+2\varepsilon^2+\ldots$$

Если заранее знать, что $p=1$, то можно выполнить в (6) замену переменных $x=\dfrac{z}{\varepsilon}$ и для z получаем уравнение,

$$z^2+z+\varepsilon=0,$$

разложение для которого ищется в форме (3), как это было для *примера 1*.

II. Статическая модель. Трансцендентные уравнения.

Выше отмечалось, что малый параметр может присутствовать в уравнениях естественно или вводится искусственно. Следующий пример иллюстрирует второй случай. Интерес представляют положительные корни уравнения

$$tg(x)=\frac{1}{x}. \qquad (8)$$

Оно имеет бесконечное множество корней. Если пронумеровать их слева направо, то с ростом номера корня его значения становится все ближе к значению $n\cdot\pi$. Требуется выяснить зависимость корня от его номера. С этой целью выполним в (8) замену переменных $x=n\cdot\pi+\delta$, введем малый параметр $\varepsilon=\dfrac{1}{n\cdot\pi}$ и в новых обозначениях получим

$$tg(n\cdot\pi+\delta)=\frac{1}{n\cdot\pi+\delta}=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\cdot\delta}\ \Rightarrow\ tg(\delta)=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\cdot\delta}. \qquad (9)$$

Разложение $\delta(\varepsilon)$ будем искать в виде

$$\delta(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \varepsilon^k = \delta_1\varepsilon + \delta_2\varepsilon^2 + \delta_3\varepsilon^3 + \dots \tag{10}$$

Учитывая известное разложение в степенной ряд для тангенса

$$tg(\delta) = \delta + \frac{\delta^3}{3} + \frac{2\delta^5}{15} + \dots,$$

последовательно получаем

$$\left(\delta + \frac{\delta^3}{3} + \frac{2\delta^5}{15} + \dots\right)\cdot\left(1 + \varepsilon\delta\right) = \varepsilon,$$

$$\left(\left(\delta_1\varepsilon + \delta_2\varepsilon^2 + \delta_3\varepsilon^3 + \dots\right) + \frac{\left(\delta_1\varepsilon + \delta_2\varepsilon^2 + \delta_3\varepsilon^3 + \dots\right)^3}{3} + \dots\right)\cdot\left(1 + \varepsilon\left(\delta_1\varepsilon + \delta_2\varepsilon^2 + \delta_3\varepsilon^3 + \dots\right)\right) = \varepsilon,$$

$\varepsilon^1)\quad \delta_1 = 1;$

$\varepsilon^2)\quad \delta_2 = 0;$

$\varepsilon^3)\quad \delta_3 + \dfrac{\delta_1^3}{3} + \delta_1^2 = 0, \quad \delta_3 = -\dfrac{4}{3}.$

Требуемая зависимость корня от его номера имеет вид

$$x(\varepsilon) = n\cdot\pi + \delta(\varepsilon) = n\cdot\pi + \varepsilon - \frac{4}{3}\varepsilon^3 + \dots = n\cdot\pi + \frac{1}{n\cdot\pi} - \frac{4}{3(n\cdot\pi)^3} + \dots$$

Этот пример особо примечателен тем, что малый параметр не присутствовал в уравнении изначально и вводился искусственно в соответствии с целями решаемой задачи.