

Тема 2. Анализ линейных моделей.

Обратимся к анализу линейных динамических моделей с постоянной матрицей

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad (1)$$

и остановимся на следующих наиболее часто встречающихся этапах.

Основные этапы.

1. *Получение решения.*

1а. *Получение стационарного решения и анализ его устойчивости.*

2. *Определение наблюдаемости отдельных составляющих решения, оценка их роли в системе.*

3. *Оценка чувствительности к параметрам.* При этом на практике интересуется чувствительность, как к нежелательным эффектам, так и к параметрам, вводимым специально для решения задач управления.

4. *Решение задачи параметрической идентификации.*

5. *Решение задач управления или выбора оптимальных значений параметров.*

Этап 1а. Получение стационарного решения требует решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}^* = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b},$$

например, с помощью программ **DECOMP** и **SOLVE**, а анализ устойчивости выполняется на основе **QR**-алгоритма, вычисляющего собственные значения λ_k матрицы **A** (условие $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ отвечает асимптотической устойчивости).

Этап 1. Решение системы (1) может выполняться на основе стандартных программ для дифференциальных уравнений общего вида (например, программа **RKF45**), однако учет линейных свойств (1) позволяет выполнить расчеты более надежно и эффективно даже в случае ее жесткости. Точное решение системы (1) имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \cdot \mathbf{b}. \quad (2)$$

Если решение необходимо представить в виде таблицы при значениях $t_n = n H$, где n – целое число, а H – шаг наблюдения решения, то непосредственное использование формулы (2) весьма затруднительно. Многократное вычисление матричной экспоненты и интеграла от нее с помощью сходящихся матричных рядов исключительно трудоемко, особенно для больших значений t , когда приходится учитывать большое число членов ряда. Использованию формулы Лагранжа-Сильвестра предшествует решение полной проблемы собственных значений и подготовительная работа, связанная с формированием матричных множителей, что также весьма затруднительно при большой размерности матрицы **A**.

Выход из этого положения дает метод, предложенный Ю.В.Ракитским и заключающийся в следующих предварительных матричных преобразованиях.

Запишем решение (2) в точке $t_{n+1} = t_n + H$ и вычтем из него формулу (2), предварительно умноженную на e^{AH} :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_n + H) - e^{AH} \mathbf{x}(t_n) &= \left(\int_0^{t_n+H} e^{A\tau} d\tau - e^{AH} \int_0^{t_n} e^{A\tau} d\tau \right) \mathbf{b}, \\ \mathbf{x}(t_n + H) &= e^{AH} \mathbf{x}(t_n) + \left(\int_0^{t_n+H} e^{A\tau} d\tau - \int_H^{t_n+H} e^{A\tau} d\tau \right) \mathbf{b} = e^{AH} \mathbf{x}(t_n) + \int_0^H e^{A\tau} d\tau \cdot \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (3)$$

В отличие от (2) запись решения в виде (3) предполагает лишь *однократное* вычисление матричной экспоненты и интеграла от нее для заданного шага H , а затем последовательное получение $\mathbf{x}(t_n)$ пошаговым методом. Для вычисления матричной экспоненты и интеграла от нее воспользуемся матричным степенным разложением

$$e^{AH} \cong \mathbf{E} + H\mathbf{A} + \frac{H^2 \mathbf{A}^2}{2} + \dots, \quad \int_0^H e^{A\tau} d\tau \cong H \left(\mathbf{E} + \frac{H\mathbf{A}}{2} + \frac{H^2 \mathbf{A}^2}{6} \dots \right). \quad (4)$$

Чтобы разобраться со скоростью сходимости этого ряда, обратимся к скалярным рядам

$$e^{-0.1} \cong 1 - 0.1 + 0.01/2 - 0.001/6 + \dots; \quad e^{-10} \cong 1 - 10 + 100/2 - 1000/6 + \dots$$

Ясно, что при больших по модулю показателях экспоненты ряд сходится крайне медленно. Если матрица \mathbf{A} имеет простую структуру, то она сама и ее матричная экспонента могут быть приведены к диагональной форме

$$e^{AH} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 H} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_m H} \end{pmatrix} \mathbf{U}^{-1},$$

где на диагонали стоят скалярные ряды и скорость сходимости всего матричного ряда определяется скоростью сходимости скалярного с максимальным по модулю показателем $|\lambda_k|_{\max} H$. Для удовлетворительной скорости сходимости необходимо обеспечить выполнение неравенства $|\lambda_k|_{\max} H < 1$ или достаточного условия для нормы матрицы $\|\mathbf{A}\| H < 1$.

Если система (1) является жесткой, то вне пограничного слоя появляется потребность выбрать шаг наблюдения решения H таким, чтобы $|\lambda_k|_{\max} H \gg 1$, а это приходит в противоречие с условием эффективного построения матричного ряда. Поэтому, по заданному желаемому значению H выбирается такое целое число N , что для $h = \frac{H}{2^N}$ выполняется неравенство $\|\mathbf{A}\| h < 1$. Далее

строим e^{Ah} разложением в матричный ряд, а затем N раз возводим матричную экспоненту в квадрат по формуле $e^{2Ah} = e^{Ah} \cdot e^{Ah}$, достигая матрицы e^{AH} . Аналогичная формула удвоения шага может быть получена и для вектора

$$\mathbf{g}(h) = \int_0^h e^{A\tau} d\tau \cdot \mathbf{b}, \quad \mathbf{g}(2h) = (\mathbf{E} + e^{Ah}) \mathbf{g}(h).$$

Эта формула удвоения шага легко устанавливается после преобразований

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(2h) &= \int_0^{2h} e^{A\tau} d\tau \cdot \mathbf{b} = \int_0^h e^{A\tau} d\tau \cdot \mathbf{b} + \int_h^{2h} e^{A\tau} d\tau \cdot \mathbf{b} = \\ &= \int_0^h e^{A\tau} d\tau \cdot \mathbf{b} + e^{Ah} \int_0^h e^{A\tau} d\tau \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{E} + e^{Ah}) \mathbf{g}(h). \end{aligned}$$

Таким образом, алгоритм решения системы (1) записывается следующей последовательностью действий.

Шаг 1. Задаемся желаемым значением H . Выбираем целое число N такое, что

$$h = \frac{H}{2^N} < \frac{1}{\|\mathbf{A}\|}.$$

Шаг 2. Для шага h строим матричную экспоненту e^{Ah} и вектор $\mathbf{g}(h)$ разложением в ряд с небольшим числом членов.

Шаг 3. Получаем матрицу e^{AH} и вектор $\mathbf{g}(H)$, используя N раз формулу удвоения шага.

Шаг 4. Решаем уравнение (3) пошаговым методом.

На основе изложенного алгоритма написана программа **LSODE** со следующими параметрами:

LSODE ($N, H, CH, A, B, X, EAH, SL, INDEX$),

где N – размерность системы;

H – шаг наблюдения решения;

CH – константа для оценки начального шага h (Рекомендуемое значение для обычных систем – 0,1, а для жестких – порядка 5.0);

A, B – матрица и вектор системы (1);

X – вектор решения;

EAH – матрица, содержащая элементы матрицы e^{AH} ;

SL – рабочий массив размерности N ;

$INDEX$ – управляющий параметр со входными значениями:

–1 (первое обращение к программе, вектор B нулевой, т.е. решается однородная система),

–2 (первое обращение к программе, вектор \mathbf{B} может быть ненулевым),
 $\mathbf{0}$ (не первое обращение к программе).
 Нормальное выходное значение – $\mathbf{0}$.

Этап 2. Определение наблюдаемости отдельных составляющих решения, оценка их роли в системе.

Содержание *этапа 2* процесса анализа линейных моделей требует предварительно установить некоторые свойства собственных векторов для матрицы \mathbf{A} и ее транспонированной \mathbf{A}^T . Пусть λ_k, \mathbf{u}_k – собственные значения и собственные векторы матрицы \mathbf{A} , а λ_k, \mathbf{v}_k – собственные значения и собственные векторы \mathbf{A}^T соответственно:

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k \quad (5)$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$$

или

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{v}_i^T \quad (6)$$

Умножая (5) слева на \mathbf{v}_i^T , а (6) справа на \mathbf{u}_k , и вычитая результаты, имеем

$$0 = (\lambda_k - \lambda_i) \mathbf{v}_i^T \mathbf{u}_k.$$

Если $k \neq i$, то

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{u}_k = 0. \quad (7)$$

Дополнительно нормируем эти векторы так, что

$$\mathbf{v}_k^T \mathbf{u}_k = 1. \quad (8)$$

Теперь запишем формулу Лагранжа-Сильвестра

$$\mathbf{f}(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^m \mathbf{T}_k f(\lambda_k), \text{ где } \mathbf{T}_k = \frac{(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}) \dots (\mathbf{A} - \lambda_{k-1} \mathbf{E})(\mathbf{A} - \lambda_{k+1} \mathbf{E}) \dots (\mathbf{A} - \lambda_m \mathbf{E})}{(\lambda_k - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \dots (\lambda_k - \lambda_m)} \quad (9)$$

в ином виде. Здесь полагается, что все собственные значения матрицы \mathbf{A} различны. Если $k \neq i$, в выражении для \mathbf{T}_k есть множитель $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})$. Переставим остальные множители в числителе \mathbf{T}_k так, чтобы этот множитель стал последним. Учитывая, что $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E}) \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$, имеем

$$\mathbf{T}_k \mathbf{u}_i = 0, \quad k \neq i \quad (10)$$

При этом последовательно умножая все множители (9) на \mathbf{u}_k , получаем

$$\mathbf{T}_k \mathbf{u}_k = \mathbf{u}_k. \quad (11)$$

Разложим каждую строку матрицы \mathbf{T}_k по векторам \mathbf{v}_j^T . Это позволяет представить матрицу \mathbf{T}_k в виде

$$\mathbf{T}_k = \sum_{j=1}^m \mathbf{c}_j \mathbf{v}_j^T,$$

где \mathbf{c}_j – некоторые векторы. Каждая компонента \mathbf{c}_j указывает на то, с каким множителем входит \mathbf{v}_j^T в соответствующую строку.

Из условий (7) и (10) следует, что

$$\mathbf{T}_k \mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^m (\mathbf{c}_j \mathbf{v}_j^T) \mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^m \mathbf{c}_j (\mathbf{v}_j^T \mathbf{u}_i) = \mathbf{c}_i (\mathbf{v}_i^T \mathbf{u}_i) = \mathbf{c}_i = \mathbf{0}, \text{ если } k \neq i$$

Это означает, что каждая строка матрицы \mathbf{T}_k это вектор \mathbf{v}_k^T с некоторым постоянным множителем, т.е.

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{v}_k^T. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (11), для вектора \mathbf{c}_k получаем

$$(\mathbf{c}_k \mathbf{v}_k^T) \mathbf{u}_k = \mathbf{c}_k (\mathbf{v}_k^T \mathbf{u}_k) = \mathbf{c}_k = \mathbf{u}_k,$$

что с учетом (8) приводит к равенствам

$$\mathbf{c}_k = \mathbf{u}_k \text{ и } \mathbf{T}_k = \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^T.$$

Теперь формула Лагранжа-Сильвестра (9) приобретает лаконичный вид

$$\mathbf{f}(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^m \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^T f(\lambda_k). \quad (13)$$

Теперь вернемся к *этапу 2* анализа линейных моделей.

Наблюдаемость отдельных составляющих решения, оценка их роли в системе.

Обратимся к линейной однородной системе (1), когда $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Запишем ее решение через матричную экспоненту, которую, в свою очередь, представим по формуле Лагранжа-Сильвестра

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 = \sum_{k=1}^m \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^T e^{\lambda_k t} \mathbf{x}_0 = \sum_{k=1}^m \mathbf{u}_k (\mathbf{v}_k^T \mathbf{x}_0) e^{\lambda_k t} \quad (14)$$

Составляющую решения $e^{\lambda_k t}$ принято называть **модой**, а анализ характера ее поведения в решении – **модальным анализом**. Покомпонентно решение (14) может быть отражено в виде

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t) &= u_1^{(1)} D_1 e^{\lambda_1 t} + u_2^{(1)} D_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + u_m^{(1)} D_m e^{\lambda_m t}, \\ x^{(2)}(t) &= u_1^{(2)} D_1 e^{\lambda_1 t} + u_2^{(2)} D_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + u_m^{(2)} D_m e^{\lambda_m t}, \\ &\dots \\ x^{(m)}(t) &= u_1^{(m)} D_1 e^{\lambda_1 t} + u_2^{(m)} D_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + u_m^{(m)} D_m e^{\lambda_m t}, \end{aligned} \quad (15)$$

где коэффициенты $D_k = \mathbf{v}_k^T \mathbf{x}_0$ зависят от начальных условий.

Для анализа свойств $\mathbf{x}(t)$ важным является ответ на вопрос: «Насколько заметнее k -я мода $e^{\lambda_k t}$ наблюдается в $x^{(p)}(t)$ по сравнению с $x^{(s)}(t)$?». На

первый взгляд, это должно зависеть от начальных условий. Однако, это не так. В соответствии с (15) амплитуда моды $e^{\lambda_k t}$ в составе переменной состояния $x^{(p)}(t)$ определяется величиной $u_k^{(p)} D_k$, а для $x^{(s)}(t)$ - величиной $u_k^{(s)} D_k$. Отношение амплитуд этой моды в переменных $x^{(p)}(t)$ и $x^{(s)}(t)$ есть величина постоянная для данной системы, выражается частным

$$\eta_k^{(p,s)} = \frac{u_k^{(p)} D_k}{u_k^{(s)} D_k} = \frac{u_k^{(p)}}{u_k^{(s)}}, \quad (16)$$

не зависит от начальных условий \mathbf{x}_0 и полностью определяется компонентами собственного вектора \mathbf{u}_k .

Для дальнейшего анализа свойств системы (1) введем следующие упрощающие предположения. Пусть она состоит из m однотипных элементов (или иначе узлов системы), поведение каждого из которых описывается дифференциальным уравнением $\frac{dx^{(p)}}{dt} = \dots$, все $x^{(p)}(t)$ имеют одинаковую физическую природу и размерность, а структура матрицы \mathbf{A} определяет функционирование системы в целом. Возможные возмущения будем задавать вектором начальных условий $\mathbf{x}_0 = \mathbf{e}_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 0)^T$, где одна компонента равна единице, а остальные нулевые.

Пример программы модального анализа.

Предлагаемая программа состоит из трех подсистем, каждая из которых освещает одну из возможных сторон модального анализа.

Подсистема 1. Оценка поведения k -й моды $e^{\lambda_k t}$.

Входным параметром является номер моды k . Характер ее наблюдаемости отражает, например, следующая таблица

Наблюдаемость k -й моды

Номер узла	Относительная амплитуда
14	100%
3	92%
115	14%
7	0,2%
...	...

Во втором столбце таблицы расположены упорядоченные по убыванию значения $|\eta_k^{(p,s)}| \cdot 100\%$, а первый столбец отражает номер соответствующего

узла p . При этом узел с номером s имеет наибольшую амплитуду $u_k^{(s)}D_k$, принимаемую за 100%. Из таблицы видно, что данная мода заметнее всего наблюдается в узле с номером 14, а ее относительная амплитуда в узле 7 пренебрежимо мала.

Если мода наблюдается с заметной амплитудой в большом числе компонент вектора $\mathbf{x}(t)$, то такую моду принято называть **системной**. В противном случае мода называется **локальной**.

Эта же подсистема позволяет ответить на вопрос: «Где необходимо выполнить возмущение, что добиться максимальной амплитуды k -й моды?». Очевидно, величины $u_k^{(s)}D_k$ и $D_k = \mathbf{v}_k^T \mathbf{x}_0$ достигают своего максимума, если единственную ненулевую компоненту \mathbf{x}_0 задать там, где компонента вектора \mathbf{v}_k максимальна по модулю. Результатом может быть следующая таблица

Возмущаемость k -й моды

Номер узла	Относительная амплитуда
14	100%
6	78%
217	9%
29	0,05%
...	...

Ее второй столбец упорядочен по убыванию компонент вектора \mathbf{v}_k и свидетельствует о том, в каких точках системы данная мода может «возмущена» с максимальной амплитудой.

Подсистема 2. Наблюдение в данном узле.

Входным параметром является k – номер узла, где выполняется наблюдение. Фактически это означает, что интерес вызывает только одна составляющая вектора решения

$$x^{(k)}(t) = u_1^{(k)} D_1 e^{\lambda_1 t} + u_2^{(k)} D_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + u_m^{(k)} D_m e^{\lambda_m t}. \quad (17)$$

Задача этой подсистемы – указать, какая мода будет иметь максимальную амплитуду $u_j^{(k)} D_j$, и упорядочить моды по убыванию этих амплитуд. При этом для каждой амплитуды (и соответственно, моды) может быть указан узел, где возмущение наиболее эффективно и величина D_j максимальна. Пример таблицы приведен ниже.

Наблюдение в k -м узле

Номер моды	Относительная амплитуда	Эффективный узел возмущения
4	65%	7
13	15%	14
6	14%	113
25	3%	3
.....

Подсистема 3. Возмущение в данном узле.

Входным параметром является k – номер узла, где выполняется возмущение.

Здесь интерес вызывают последствия возмущения в данном узле. Вектор \mathbf{x}_0 и величины D_j , таким образом, заданы. Остается оценить, какая мода, с какой амплитудой и в какой точке системы может быть максимально возмущена. Таблица имеет вид, аналогичный таблице предыдущей подсистемы, только последний столбец отвечает наиболее эффективному узлу наблюдения.

Возмущение в k -м узле

Номер моды	Относительная амплитуда	Эффективный узел наблюдения
8	58%	2
23	20%	16
2	16%	102
35	3%	4
.....

Этап 3. Оценка чувствительности к параметрам.

В качестве примера рассмотрим статическую модель

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(\mathbf{k})) = 0, \quad (18)$$

где $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$ – вектор выходных переменных, а $\mathbf{k} \in \mathbf{R}^s$ – вектор параметров. О том, насколько сильно влияет вариация параметров на решение (18), можно в первом приближении судить по прямоугольной $m \times s$ матрице чувствительности \mathbf{A} с элементами

$$a_{ij} = \frac{\partial x^{(i)}}{\partial k^{(j)}},$$

которые на практике могут быть оценены приближенно по формулам численного дифференцирования. Пусть \mathbf{A}_j – это j -й столбец матрицы \mathbf{A} , \mathbf{e}_j – j -й столбец единичной матрицы, а Δk – приращение по параметру с номером j . Тогда имеем

$$\mathbf{A}_j \approx \frac{\mathbf{x}(\mathbf{k} + \Delta k \cdot \mathbf{e}_j) - \mathbf{x}(\mathbf{k})}{\Delta k}. \quad (19)$$

Можно использовать и более точную формулу численного дифференцирования

$$\mathbf{A}_j \approx \frac{\mathbf{x}(\mathbf{k} + \Delta k \cdot \mathbf{e}_j) - \mathbf{x}(\mathbf{k} - \Delta k \cdot \mathbf{e}_j)}{2\Delta k} \quad (20)$$

ценой удвоения объема вычислений.

Если исходная система динамическая, то матрица чувствительности будет изменяться во времени.

Для линейных динамических моделей

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(k)\mathbf{x} \quad (21)$$

решение (21) и соответственно его чувствительность полностью определяются чувствительностью собственных значений λ_i и собственных векторов \mathbf{u}_i к вариации параметров. В качестве иллюстрации остановимся только на λ_i и ограничимся случаем, когда k – скалярный параметр.

$$\mathbf{A}(k)\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i. \quad (22)$$

Продифференцируем (22) по k :

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial k} \mathbf{u}_i + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial k} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial k} \mathbf{u}_i + \lambda_i \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial k} \quad (23)$$

и умножим (23) слева на \mathbf{v}_i^T

$$\mathbf{v}_i^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial k} \mathbf{u}_i + \left(\mathbf{v}_i^T \mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{v}_i^T \right) \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial k} = \mathbf{v}_i^T \frac{\partial \lambda_i}{\partial k} \mathbf{u}_i \quad (24)$$

где \mathbf{u}_i и \mathbf{v}_i – собственные векторы матриц \mathbf{A} и \mathbf{A}^T соответственно. Выражение, стоящее в скобках обращается в нуль, и (24) приобретает желаемый вид:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial k} = \frac{\mathbf{v}_i^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial k} \mathbf{u}_i}{\mathbf{v}_i^T \mathbf{u}_i}. \quad (25)$$

Если векторы нормированы так, что $\mathbf{v}_i^T \mathbf{u}_i = 1$, то (25) упрощается

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial k} = \mathbf{v}_i^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial k} \mathbf{u}_i. \quad (26)$$

В качестве примера рассмотрим чувствительность собственных значений к вариации элементов матрицы и выберем $k = a_{ps}$. Тогда матрица $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial k}$ в (26) имеет единственный ненулевой элемент, и для этого случая получаем

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{ps}} = v_i^{(p)} u_i^{(s)}.$$

Этап 4. Решение задачи параметрической идентификации.

В качестве примера обратимся к следующей системе уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^m, \quad \mathbf{p} \in \mathbf{R}^s, \quad (27)$$

где модель (27) задана с точностью до вектора неизвестных параметров \mathbf{p} , подлежащих определению. Для ряда компонент $x_{эксн}^{(k)}(t_i)$ вектора \mathbf{x} имеется экспериментальная информация, полученная на реальном объекте. Необходимо выбрать значение \mathbf{p} так, чтобы результаты моделирования максимально соответствовали экспериментальным данным. Критерием близости может служить величина

$$F(\mathbf{p}) = \sum_k \sum_{i=1}^N \left(x_{эксн}^{(k)}(t_i) - x^{(k)}(t_i) \right)^2 \quad (28)$$

где $x_{эксн}^{(k)}(t_i)$ и $x^{(k)}(t_i)$ – результаты эксперимента и решение (27) соответственно. Первое суммирование выполняется по всем компонентам, по которым имеется экспериментальная информация. Для минимизации $F(\mathbf{p})$ может быть использован любой метод минимизации функции многих переменных. Если компоненты вектора \mathbf{x} имеют различную физическую природу и размерность, этот факт может быть учтен введением в (28) весовых коэффициентов q_k

$$F(\mathbf{p}) = \sum_k q_k \sum_{i=1}^N \left(x_{эксн}^{(k)}(t_i) - x^{(k)}(t_i) \right)^2$$

или использованием относительного критерия

$$F(\mathbf{p}) = \sum_k \sum_{i=1}^N \left(1 - \frac{x^{(k)}(t_i)}{x_{эксн}^{(k)}(t_i)} \right)^2.$$

Этап 5. Решение задач управления или выбора оптимальных значений параметров.

Решению этих многочисленных задач посвящен целый ряд специальных курсов: «Основы теории управления», «Теория автоматического управления», «Методы оптимизации» и др. Здесь ограничимся одной простой иллюстрацией.

Пример управления устойчивостью в линейных динамических моделях.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{k})\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^m, \quad \mathbf{k} \in \mathbf{R}^s \quad (29)$$

Матрица \mathbf{A} отражает не только уравнения исследуемого объекта, но и систему управления им. Вектор параметров \mathbf{k} нужно выбрать так, чтобы обеспечить

желаемое смещение влево на комплексной плоскости собственных значений $\lambda_j = \alpha_j + i\omega_j$ матрицы \mathbf{A} . Пусть \mathbf{k}_0 – начальное значение параметров, а $\Delta\mathbf{k}$ – вектор их относительно небольших приращений. Раскладывая в ряд и ограничиваясь линейным приближением, имеем

$$\alpha_j(\mathbf{k}_0 + \Delta\mathbf{k}) = \alpha_j(\mathbf{k}_0) + \frac{\partial\alpha_j}{\partial k^{(1)}}\Delta k^{(1)} + \frac{\partial\alpha_j}{\partial k^{(2)}}\Delta k^{(2)} + \dots + \frac{\partial\alpha_j}{\partial k^{(s)}}\Delta k^{(s)} + \dots \quad (30)$$

Перенесем $\alpha_j(\mathbf{k}_0)$ в левую часть и запишем (30) в матричной форме

$$\Phi\Delta\mathbf{k} = \Delta\alpha \quad (31)$$

где элементы f_{jp} матрицы Φ вычисляются по формулам (25)

$$f_{jp} = \frac{\partial\alpha_j}{\partial k^{(p)}} = \operatorname{Re}\left(\frac{\partial\lambda_j}{\partial k^{(p)}}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{\mathbf{v}_j^T \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial k^{(p)}} \mathbf{u}_j}{\mathbf{v}_j^T \mathbf{u}_j}\right). \quad (32)$$

Матрица Φ прямоугольная и под решением (31) понимается вектор $\Delta\mathbf{k}$, минимизирующий квадрат длины вектора невязки $\mathbf{r} = \Phi\Delta\mathbf{k} - \Delta\alpha$. Здесь может быть использована программа **SVD**, выполняющая сингулярное разложение матрицы Φ и в отсутствие единственности решения выбирающая то, которое отвечает минимальной длине вектора $\Delta\mathbf{k}$. Строки Φ характеризуют влияние на $\Delta\alpha_j$ различных параметров, а столбцы отражают влияние данного параметра на различные $\Delta\alpha_j$. В вектор $\Delta\alpha$ включаются не только собственные значения, смещение которых влево на комплексной плоскости желательно обеспечить, но и достаточно «левые» собственные значения, обладающие высокими коэффициентами чувствительности. В отсутствие контроля они могут заметно переместиться вправо. Длину $\Delta\alpha$ не следует задавать слишком большой, так как (31) является моделью лишь линейного приближения. На практике матрицу Φ несколько раз пересчитывают в процессе решения.