Тема 3. Анализ нелинейных моделей.

Рассмотрим модель, представленную системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon), \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^m, \tag{1}$$

где ε - некоторый параметр.

Наибольший интерес представляют ответы на следующие вопросы:

- *Как ведет себя решение при* $t \to \infty$?
- *Как решение (1) качественно зависит от параметра* ε?

Если вектор $\mathbf{x}(t)$ при $t \to \infty$ ограничен, то решение (1) может завершаться:

- ***равновесной или стационарной точкой***;
- ***периодическим решением*** (предельным циклом);
- «***хаотическим***» или «**странным**» ***аттрактором***.

Обратимся к изучению свойств этих объектов.

Равновесные точки.

Первоначально рассмотрим одномерный случай уравнения (1), когда x и ε скалярные величины. Равновесные (стационарные) точки удовлетворяет уравнению

$$f(x, \varepsilon) = 0 \tag{2}$$

Введем обозначения: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = f_x^{'}$, $\dfrac{\partial f}{\partial \varepsilon} = f_\varepsilon^{'}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}^{''}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon^2} = f_{\varepsilon\varepsilon}^{''}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial \varepsilon} = f_{x\varepsilon}^{''}$

Возможно ли однозначно представить решение (2) в виде $x(\varepsilon)$ или $\varepsilon(x)$? Ответ на этот вопрос дает теорема о неявной функции.

Пусть в области $D = \left[x_0 - \Delta,\ x_0 + \Delta,\ \varepsilon_0 - \Delta_1,\ \varepsilon_0 + \Delta_1\right]$, содержащей точку $\left(x_0, \varepsilon_0\right)$, для которой $f(x_0, \varepsilon_0) = 0$, $f(x, \varepsilon)$ непрерывно дифференцируема. Если $f_x^{'}\left(x_0, \varepsilon_0\right) \neq 0$, то уравнение (2) имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение $x(\varepsilon)$, $x(\varepsilon_0) = x_0$. Если $f_\varepsilon^{'}\left(x_0, \varepsilon_0\right) \neq 0$, то уравнение (2) имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение $\varepsilon(x)$, $\varepsilon(x_0) = \varepsilon_0$.

Классификация равновесных точек:

- *регулярная* точка – $f_x^{'}\left(x_0, \varepsilon_0\right) \neq 0$ или $f_\varepsilon^{'}\left(x_0, \varepsilon_0\right) \neq 0$;
- *особая* точка – $f_x^{'}\left(x_0, \varepsilon_0\right) = f_\varepsilon^{'}\left(x_0, \varepsilon_0\right) = 0$;
- *двойная особая* точка – существуют две ветви решения, имеющие различные касательные;
- *особая точка высокого порядка* – $f_{xx}^{''}\left(x_0, \varepsilon_0\right) = f_{\varepsilon\varepsilon}^{''}\left(x_0, \varepsilon_0\right) = f_{x\varepsilon}^{''}\left(x_0, \varepsilon_0\right) = 0$.

Обратимся к вопросу об устойчивости равновесных точек. Для решений линейной системы

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

она полностью определялась собственными значениями матрицы $\mathbf{A}$. Оказывается, что и в нелинейной системе

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^m \tag{3}$$

возможно использование этого аппарата. Пусть $\mathbf{x}_0$ – стационарная точка (3)

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \tag{4}$$

Рассмотрим малые отклонения $\Delta\mathbf{x}$ от $\mathbf{x}_0$. Подставим $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}$ в (3), вычтем уравнение (4) и разложим результат в ряд по $\Delta\mathbf{x}$, ограничиваясь линейным слагаемым

$$\frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + (**) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + (**), \tag{5}$$

где $(**)$ – малые порядка выше первого, а $\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)$ – матрица Якоби системы (3) в стационарной точке.

Критерий Ляпунова устанавливает следующее. Решение $\mathbf{x}_0$ будет *асимптотически устойчивым*, если все собственные значения λ_k матрицы $\mathbf{A}$ лежат в левой полуплоскости $\left(\mathrm{Re}(\lambda_k) < 0\right)$, и *неустойчивым*, если вещественная часть, хотя бы одного λ_k, положительна $\left(\mathrm{Re}(\lambda_k) > 0\right)$.

Вывод об устойчивости в случае $\mathrm{Re}(\lambda_k) = 0$ может быть сделан только при учете малых слагаемых, заключенных в $(**)$.

Наибольший интерес для равновесных точек представляет решение следующих двух задач.

Задача 1. Построение диаграммы стационарных решений (ДСР) системы (1) от параметра ε.

При этом в каждой точке $\mathbf{x}(\varepsilon)$ решения системы $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) = \mathbf{0}$ по собственным значениям матрицы Якоби оценивается устойчивость, и отдельные участки графика $\mathbf{x}(\varepsilon)$ «раскрашиваются» по устойчивости. Переход из устойчивого состояния в неустойчивое (или обратно) называется ***бифуркацией.*** В простейшем случае бифуркация может происходить двумя способами: ***вещественная*** бифуркация (одно из собственных значений матрицы Якоби становится нулевым) и ***комплексная*** бифуркация, называемая также бифуркацией Андронова-Хопфа (комплексно-сопряженная пара собственных значений имеет нулевую вещественную часть).

Если в системе (1) $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$ – вектор из двух компонент, то часто решается еще одна задача.

Задача 2. Построение в плоскости параметров $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ *бифуркационных диаграмм (БД) – кривых, на которых происходит тот или иной вид бифуркации.*

Плоскость оказывается разделенной на области, внутри которых для всех точек характер устойчивости остается неизменным. Кроме того, для БД точек вещественной бифуркации $(\lambda_k = 0)$, внутри каждой области одинаковым остается и количество равновесных решений.

Рассмотрим различные виды бифуркации.

Вещественная бифуркация. Одномерный случай.

На кривых $\mathbf{x}(\varepsilon)$ диаграммы стационарных решений в зависимости от значений $f_x'(x_0, \varepsilon_0)$ и $f_\varepsilon'(x_0, \varepsilon_0)$ можно выделить три основных вида точек:

- $f_x'(x_0, \varepsilon_0) \neq 0$ – *регулярная* точка (большинство точек кривой);
- $f_x'(x_0, \varepsilon_0) = 0$, но $f_\varepsilon'(x_0, \varepsilon_0) \neq 0$ – *простая точка поворота*, в которой появляется или исчезает пара решений (рис. 1);
- $f_x'(x_0, \varepsilon_0) = f_\varepsilon'(x_0, \varepsilon_0) = 0$ – сингулярная (особая) точка, в которой происходит *ветвление*.

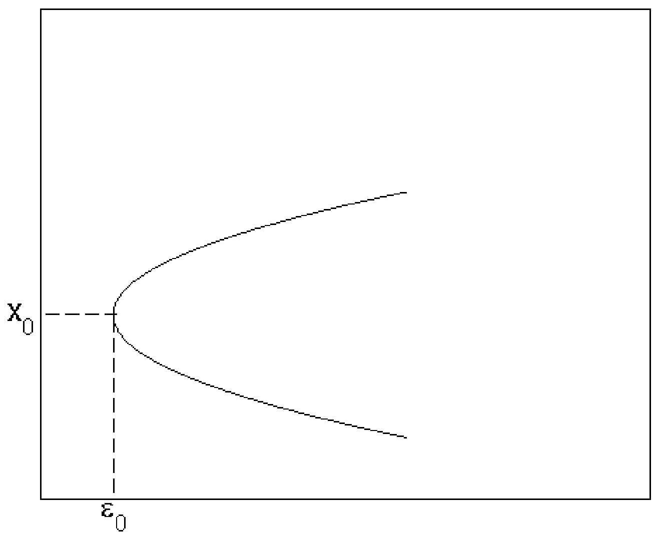

Рис 1. (x_0, ε_0) - точка поворота

Ветвление в точках бифуркации.

Пусть (x_0, ε_0) – особая стационарная точка, удовлетворяющая уравнениям $f(x_0, \varepsilon_0) = 0$, $f_x'(x_0, \varepsilon_0) = f_\varepsilon'(x_0, \varepsilon_0) = 0$, а (x, ε) – весьма близкая к ней другая равновесная точка, такая что $x = x_0 + \Delta x$, $\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$, а Δx, $\Delta\varepsilon$ – малы. Разложим $f(x, \varepsilon)$ в ряд по Δx, $\Delta\varepsilon$ с точностью до малых третьего порядка:

$$f(x,\varepsilon) = f(x_0,\varepsilon_0) + f_x^{'}(x_0,\varepsilon_0)\Delta x + f_\varepsilon^{'}(x_0,\varepsilon_0)\Delta\varepsilon + \frac{1}{2}\left(A\cdot\Delta x^2 + 2B\cdot\Delta x\Delta\varepsilon + C\Delta\varepsilon^2\right) +$$

$$+(***) = \frac{1}{2}\left(A\cdot\Delta x^2 + 2B\cdot\Delta x\Delta\varepsilon + C\Delta\varepsilon^2\right) + (***). \tag{6}$$

где $A = f_{xx}^{''}(x_0,\varepsilon_0)$, $B = f_{x\varepsilon}^{''}(x_0,\varepsilon_0)$, $C = f_{\varepsilon\varepsilon}^{''}(x_0,\varepsilon_0)$, $(***)$ – слагаемые третьего и более высокого порядка малости.

Случай 1. Пусть первоначально $A \neq 0$. Разделим (6) на $\Delta\varepsilon^2$ и перейдем к пределу при $\Delta\varepsilon \to 0$

$$A\left(\frac{dx}{d\varepsilon}\right)^2 + 2B\frac{dx}{d\varepsilon} + C = 0. \tag{7}$$

Если $D = B^2 - AC < 0$, то (x_0,ε_0) – это *изолированная* точка ДСР (из нее не выходит ни одна кривая). Если же $D > 0$, то, как это видно на рис.2, в точке (x_0,ε_0), имеем две пересекающиеся дуги (здесь сходятся четыре ветви).

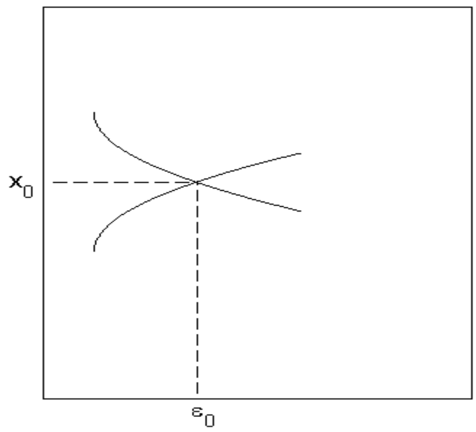

Рис. 2. (x_0,ε_0) - точка ветвления

Случай 2. Пусть $A = 0$, $C \neq 0$. Разделим (6.6) на Δx^2 и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$

$$C\left(\frac{d\varepsilon}{dx}\right)^2 + 2B\frac{d\varepsilon}{dx} + A = C\left(\frac{d\varepsilon}{dx}\right)^2 + 2B\frac{d\varepsilon}{dx} = 0. \tag{8}$$

Квадратное уравнение имеет два корня:

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dx}\right)_1 = 0, \quad \left(\frac{d\varepsilon}{dx}\right)_2 = -\frac{2B}{C}.$$

Этот случай отвечает рис. 3 (бифуркация типа «вилка»), где, как и на рис. 2, имеем две дуги.

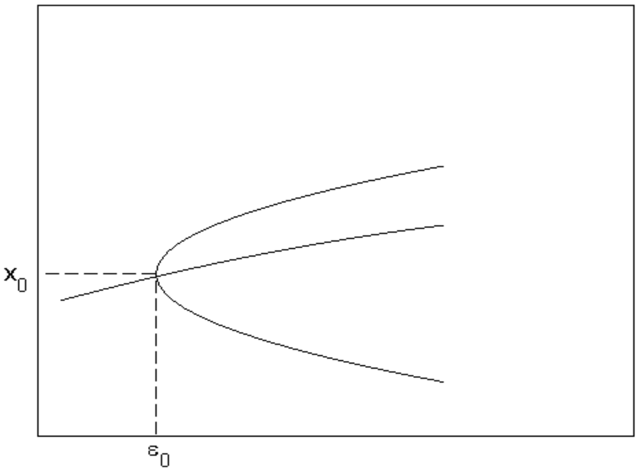

Рис. 3. Бифуркация типа «вилка»

Комплексная бифуркация (бифуркация Андронова-Хопфа).

Этот вид бифуркации рассмотрим на примере следующей системы уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = \varepsilon x_1 - x_2 \mp x_1\left(x_1^2 + x_2^2\right),$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + \varepsilon x_2 \mp x_2\left(x_1^2 + x_2^2\right). \tag{9}$$

Первоначально учтем нелинейные слагаемые в (9) со знаком $(-)$. Точка $x_1 = x_2 = 0$ является единственной стационарной точкой. Оценим ее устойчивость. Матрица Якоби системы (9)

$$J = \begin{pmatrix} \varepsilon - 3x_1^2 - x_2^2; & -1 - 2x_1x_2 \\ 1 - 2x_1x_2; & \varepsilon - 3x_2^2 - x_1^2 \end{pmatrix}$$

в нулевой точке приобретает вид

$$J = \begin{pmatrix} \varepsilon & -1 \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

и ее собственные значения равны $\lambda_{1,2} = \varepsilon \pm i$. Для $\varepsilon < 0$ имеем асимптотическую устойчивость (тип равновесия – устойчивый фокус), для $\varepsilon > 0$ – неустойчивость (тип равновесия – неустойчивый фокус), а для $\varepsilon = 0$ оценка устойчивости требует учета нелинейных слагаемых в (9).

Для дальнейшего анализа выполним в (9) замену переменных

$$x_1 = R\cos\varphi, \quad x_2 = R\sin\varphi,$$

перейдя к полярным координатам

$$R'\cos\varphi - R\sin\varphi \cdot \varphi' = \varepsilon R\cos\varphi - R\sin\varphi - R^3\cos\varphi, \tag{10}$$

$$R'\sin\varphi + R\cos\varphi \cdot \varphi' = R\cos\varphi + \varepsilon R\sin\varphi - R^3\sin\varphi. \tag{11}$$

Умножим (10) на $\cos\varphi$, а (11) на $\sin\varphi$, и результаты сложим

$$\frac{dR}{dt} = \varepsilon R - R^3 = \left(\varepsilon - R^2\right)R. \tag{12}$$

Затем умножим (10) на $\left(-\sin\varphi\right)$, а (11) на $\cos\varphi$, результаты сложим и разделим на R

$$\frac{d\varphi}{dt} = 1. \tag{13}$$

Уравнение (12) имеет две стационарные точки: значение $R = 0$, отвечающее нулевой стационарной точке, и $R = \sqrt{\varepsilon}$ для $\varepsilon > 0$, что соответствует периодическому движению по окружности. Поведение решения (12) и (13) для различных ε и различных начальных условий иллюстрирует рис. 4.

Для $\varepsilon < 0$ нулевая точка асимптотически устойчива, периодическое решение отсутствует и так как для любых начальных условий $R' < 0$, то имеем равновесие типа «устойчивый фокус» (рис. 4а). Для $\varepsilon = 0$ $R' = -R^3 < 0$ и вид рис. 4.б совпадает с предыдущим. Наконец, для $\varepsilon > 0$ нулевая точка равновесия неустойчива, и появляется периодическое решение (окружность с радиусом $R = \sqrt{\varepsilon}$). Любое начальное условие $R_0 < \sqrt{\varepsilon}$ отвечает $R' > 0$, и решение изнутри выходит на окружность. С другой стороны, любое начальное условие $R_0 > \sqrt{\varepsilon}$

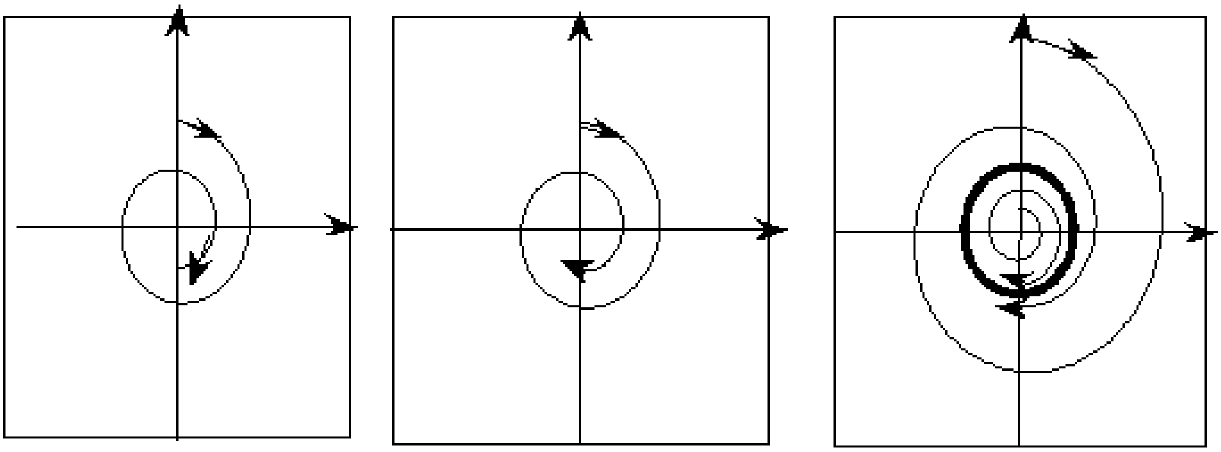

Рис. 4а $\varepsilon < 0$ Рис. 4б $\varepsilon = 0$ Рис. 4в $\varepsilon > 0$

отвечает $R' < 0$, и решение выходит на окружность снаружи (рис.4в). Таким образом, траектория окружности является своеобразным объектом притяжения (аттрактором). Примечательно, что параметры этой окружности не зависят от начальных условий.

Теперь учтем нелинейные слагаемые в (9) со знаком $(+)$. Выполняя ту же замену переменных, получаем уравнения аналогичные (12) и (13)

$$\frac{dR}{dt} = \varepsilon R + R^3 = \left(\varepsilon + R^2\right)R, \tag{12a}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = 1. \tag{13a}$$

Уравнение (12а), как и прежде, имеет две стационарные точки: значение $R = 0$, отвечающее нулевой стационарной точке, и $R = \sqrt{-\varepsilon}$ для $\varepsilon < 0$, что соответствует периодическому движению по окружности. Поведение решения (12а) и (13а) для различных ε и различных начальных условий иллюстрирует рис. 5.

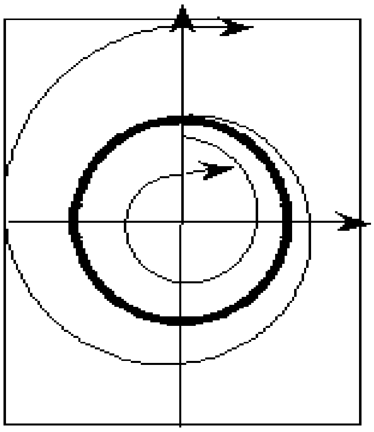

Рис. 5а $\varepsilon < 0$

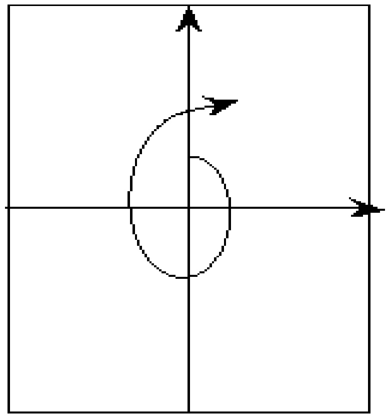

Рис. 5б $\varepsilon = 0$

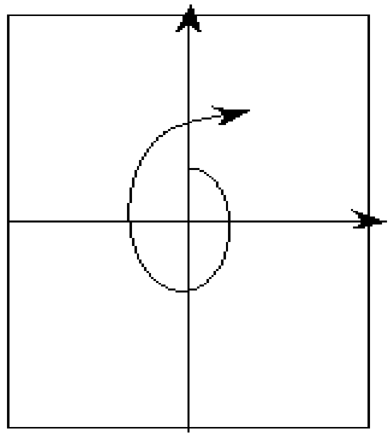

Рис. 5в $\varepsilon > 0$

Для $\varepsilon < 0$ (рис. 5а) нулевая точка асимптотически устойчива, но одновременно присутствует периодическое решение. Для начального условия $R_0 < \sqrt{-\varepsilon}$ производная $R' < 0$ и решение стремится к нулевой точке (равновесие типа «устойчивый фокус»). При $R_0 > \sqrt{-\varepsilon}$ производная $R' > 0$ и решение стремится к бесконечности. Во всех случаях окружность с $R_0 = \sqrt{-\varepsilon}$ уже не является объектом притяжения, но параметры, как и ранее, не зависят от начальных условий.

Для $\varepsilon = 0$ производная $R' = R^3 > 0$ и вид рис. 5б демонстрирует «неустойчивый фокус». Наконец, для $\varepsilon > 0$ производная $R' = \left(\varepsilon + R^2\right) R > 0$ и внешний вид рис. 5в полностью совпадает с рис. 5б.

Методы построения диаграмм стационарных решений и бифуркационных диаграмм

Стационарные точки системы (1) удовлетворяют условию

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) = \mathbf{0}, \tag{14}$$

и диаграмма может строиться следующим образом. Вводя дискретные значения для параметра ε

$$\varepsilon_k = \varepsilon_0 + k\Delta\varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

и решая систему (14), например, методом Ньютона, последовательно получаем $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(\varepsilon_k)$. При этом для относительно малого шага $\Delta\varepsilon$ значение $\mathbf{x}_{k-1}$ будет хорошим начальным приближением, и метод Ньютона будет успешно сходиться. Остается лишь вопрос с выбором удачного значения $\mathbf{x}_0$. Для его нахождения может быть использован следующий подход.

Метод продолжения по параметру.

Вместо поиска решения уравнения

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon_0) = \mathbf{0} \tag{15}$$

предлагается решать систему

$$\mathbf{H}(\tau, \mathbf{x}) = \mathbf{0}, \qquad \tau \in [0,1], \tag{16}$$

где функция $\mathbf{H}(\tau, \mathbf{x})$ одновременно обладает двумя свойствами:
а) при $\tau = 0$ уравнение $\mathbf{H}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$ легко решается,
б) при $\tau = 1$ функция $\mathbf{H}(1, \mathbf{x})$ равна $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, и (16) превращается в (15).
Примерами $\mathbf{H}(\tau, \mathbf{x})$ могут служить:

$$\mathbf{H}(\tau, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + (\tau - 1) \cdot \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^*\right),$$

$$\mathbf{H}(\tau, \mathbf{x}) = (1 - \tau) \cdot \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\right) + \tau \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Последовательно решаем (16) для $\tau_j = j \cdot \Delta\tau$, $\Delta\tau = 1/N$, $j = 0,1,\ldots,N$ методом Ньютона. При $\tau_0 = 0$ решение (16) очевидно равно $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{x}\left(\tau_j\right)$ будет хорошим приближением для $\mathbf{x}\left(\tau_{j+1}\right)$, и, наконец, $\mathbf{x}\left(\tau_N\right)$ дает нужное решение (15).

Для окончательного оформления диаграммы стационарных решений в каждой найденной ее точке $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}\left(\varepsilon_k\right)$ вычисляем матрицу Якоби системы (1) и рассчитываем ее собственные значения, а затем «раскрашиваем» по устойчивости кривые $\mathbf{x}\left(\varepsilon\right)$. Если ставится задача определения точек вещественной или комплексной бифуркации, то здесь может быть использован следующий алгоритм.

Нахождение точек поворота и ветвления

В системе (14) расширим вектор $\mathbf{x}$ за счет введения еще одной компоненты $x^{(n+1)} = \varepsilon$ и вычислим матрицу $\mathbf{J}$ размерностью $n \times (n+1)$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^{(1)}}{\partial x^{(1)}} & \dfrac{\partial f^{(1)}}{\partial x^{(2)}} & \cdots & \dfrac{\partial f^{(1)}}{\partial x^{(n+1)}} \\ \dfrac{\partial f^{(2)}}{\partial x^{(1)}} & \dfrac{\partial f^{(2)}}{\partial x^{(2)}} & \cdots & \dfrac{\partial f^{(2)}}{\partial x^{(n+1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f^{(n)}}{\partial x^{(1)}} & \dfrac{\partial f^{(n)}}{\partial x^{(2)}} & \cdots & \dfrac{\partial f^{(n)}}{\partial x^{(n+1)}} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Пусть $\mathbf{J}_k$ – квадратная матрица, получающаяся из $\mathbf{J}$ вычеркиванием k-го столбца. Тогда $\mathbf{J}_{n+1}$ – обычная матрица Якоби системы (14). Оказывается, что в точках поворота и ветвления требование $f_x'(x_0,\varepsilon_0)=0$, записанное для одномерного случая, на случай вектора $\mathbf{x}$ заменяется на условие

$$\det(\mathbf{J}_{n+1})=0. \tag{18}$$

Отличие точки поворота от точки ветвления заключается в следующем:

$$\det(\mathbf{J}_k)=0,\quad k\neq n+1 \quad \text{– точка ветвления;} \tag{19}$$

$$\det(\mathbf{J}_k)\neq 0,\quad k\neq n+1 \quad \text{– точка поворота.} \tag{20}$$

Условие (19) является обобщением на многомерный случай ранее сформулированного требования для одного уравнения $f_x'(x_0,\varepsilon_0)=f_\varepsilon'(x_0,\varepsilon_0)=0$, а условие (20) – соответствующего требования $f_x'(x_0,\varepsilon_0)=0$, но $f_\varepsilon'(x_0,\varepsilon_0)\neq 0$ для точки поворота.

Таким образом, решение системы из (n+1) уравнения относительно $\mathbf{x}$ и ε

$$\begin{gathered}\mathbf{f}(\mathbf{x},\varepsilon)=\mathbf{0},\\ \det(\mathbf{J}_{n+1})=0\end{gathered} \tag{21}$$

позволяет найти все точки поворота и ветвления, а отличить их друг от друга можно, проверив условия (19) или (20). На практике, если размерность вектора $\mathbf{x}$ не слишком мала, формирование второго уравнения в системе (21) представляется весьма затруднительным. С этой целью условие нулевого определителя заменяется уравнением $\mathbf{J}_{n+1}\cdot\mathbf{v}=0,$ где $\mathbf{v}$ – собственный вектор, отвечающий нулевому собственному значению. Так как $\mathbf{v}$ определяется с точностью до постоянного множителя, то для однозначного решения задачи можно ввести дополнительное условие, например, $\mathbf{v}^{(k)}=1,$ где $\mathbf{v}^{(k)}$– k-я компонента вектора $\mathbf{v}$. Как результат, вместо (21) имеем

$$\begin{gathered}\mathbf{f}(\mathbf{x},\varepsilon)=\mathbf{0},\\ \mathbf{J}_{n+1}\cdot\mathbf{v}=0,\\ \mathbf{v}^{(k)}=1.\end{gathered} \tag{22}$$

Если случайно матрица $\mathbf{J}_{n+1}$ такова, что $\mathbf{v}^{(k)}=0,$ то достаточно попробовать другое значение k.

Нахождение точек комплексной бифуркации (Андронова-Хопфа)

В этом виде бифуркации часто от ветви стационарных решений отходит ветвь периодических решений. В точке бифуркации матрица Якоби $\mathbf{J}_{n+1}$ имеет чисто мнимую пару собственных значений $\lambda_{1,2}=\pm i\cdot\omega$ с комплексно-сопряженной парой собственных векторов $\mathbf{w}=\mathbf{u}\pm i\cdot\mathbf{v}$. В этих условиях получаем

$$\mathbf{J}_{n+1}\mathbf{w}=\lambda\mathbf{w}\ \Rightarrow\ \mathbf{J}_{n+1}(\mathbf{u}+i\cdot\mathbf{v})=i\cdot\omega(\mathbf{u}+i\cdot\mathbf{v}). \tag{23}$$

Приравнивая отдельно действительные и мнимые части равенства (23), имеем

$$\mathbf{J}_{n+1} \cdot \mathbf{u} + \omega \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0},$$
$$-\omega \cdot \mathbf{u} + \mathbf{J}_{n+1} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (24)$$

Дополняя аналогично предыдущему последние равенства условием нормировки вектора $\mathbf{w}$, как итог получаем систему из $(3n+2)$ уравнений для определения точек комплексной бифуркации

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) = \mathbf{0},$$
$$\mathbf{J}_{n+1} \cdot \mathbf{u} + \omega \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0},$$
$$-\omega \cdot \mathbf{u} + \mathbf{J}_{n+1} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (25)$$
$$\mathbf{u}^{(k)} = 1, \quad \mathbf{v}^{(k)} = 0.$$

Пример. Пусть система (14) содержит лишь два уравнения, и матрица Якоби имеет размерность 2×2:

$$\mathbf{J}_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Так как сумма собственных значений матрицы всегда равна сумме ее диагональных элементов, то для матрицы второго порядка и собственных значений $\lambda_{1,2} = \pm i \cdot \omega$ получаем

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} = 0.$$

Значения ε, отвечающие точкам комплексной бифуркации, в этом случае могут быть получены не из весьма сложной системы (25), а из уравнений

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \varepsilon) = \mathbf{0},$$
$$a_{11} + a_{22} = 0. \quad (26)$$

Следует, однако, отметить, что второе уравнение (26) имеет место не только для чисто мнимой пары собственных значений, но и когда имеется два вещественных собственных значения, равных по модулю, но противоположных по знаку. Поэтому на практике решается система (26), в полученных точках проверяются собственные значения матрицы $\mathbf{J}_{n+1}$, и отбрасывается все лишнее.

В заключение отметим, что в ситуации, когда $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)^T$, можно, изменяя, например, ε_2 с некоторым шагом, решать соответствующую систему уравнений относительно ε_1 и строить бифуркационную диаграмму в плоскости компонент вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$.