

Сращивание асимптотических разложений

Приближенное решение ищется в виде нескольких разложений, в которых используется два и более масштабов, пригодных лишь в части рассматриваемой области. Эти масштабы выбираются таким образом, чтобы: а) полный набор разложений охватывал всю область; б) области применимости соседних разложений перекрывались. Для реализации второго условия необходимо согласовать (срастить) соседние разложения и связать их между собой.

Вернемся вновь к уравнению (8) прошлой лекции. Одно разложение (9, прошлая лекция), описывающее решение вне пограничного слоя и принимающее вид (10, прошлая лекция), было уже построено. Второе построим после замены переменной $t = \varepsilon \cdot \tau$, где τ принимает какие-то конечные значения. Исходное уравнение примет вид

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + (1 + \varepsilon^2) \frac{dx}{d\tau} + \varepsilon(1 - \varepsilon^2)x = 0, \quad (1)$$

а разложение для него будем искать в виде, аналогичном (9, прошлая лекция), но уже с учетом новой независимой переменной

$$x(\tau, \varepsilon) = x_0(\tau) + \varepsilon \cdot x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + \dots \quad (2)$$

Подстановка (2) в (1) приводит к следующему:

$$\varepsilon^0) \quad \frac{d^2 x_0}{d\tau^2} + \frac{dx_0}{d\tau} = 0 \Rightarrow x_0(\tau) = C_1 + C_2 e^{-\tau}; \quad (3)$$

$$\varepsilon^1) \quad \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + \frac{dx_1}{d\tau} = -x_0.$$

Теперь решение $x_0(\tau)$ в (3) должно удовлетворять первому краевому условию в нулевой точке $C_1 + C_2 = \alpha \Rightarrow x_0(\tau) = C_1 + (\alpha - C_1)e^{-\tau}$. Константа C_1 выбирается из условия перекрытия областей применимости обоих разложений, когда действие разложения по τ «уже завершилось» ($\tau \rightarrow \infty$), а разложение по t еще только «начинает действовать». **Принцип сращивания имеет** вид:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} x(\tau, \varepsilon) = \lim_{t \rightarrow 0} x(t, \varepsilon). \quad (4)$$

Естественно, что условие (4) должно записываться для каждого коэффициента разложений (9, прошлая лекция) и (2) отдельно, в частности:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} x_0(\tau) = \lim_{t \rightarrow 0} x_0(t) \Rightarrow C_1 = \beta e. \quad (5)$$

Оба разложения можно совместить в общей формуле:

$$x_0^{общ} = x_0(\tau) + x_0(t) - \beta e = (\alpha - \beta e) e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + \beta e^{1-t}. \quad (6)$$

При этом внутри пограничного слоя $x_0(t) - \beta e = 0$ и $x_0^{обш} = x_0(\tau)$, а за пограничным слоем $x_0(\tau) - \beta e = 0$ и $x_0^{обш} = x_0(t)$. Аналогичные выражения с использованием принципа (4) строятся и для других коэффициентов обоих разложений $x_1(\tau)$ и $x_1(t)$, $x_2(\tau)$ и $x_2(t)$ и т.д.

Упрощение математических моделей, описываемых жесткими уравнениями.

Приведем уравнение (8, прошлая лекция) к системе уравнений первого порядка, выполнив замену переменных $x_1 = \frac{dx}{dt}$, $x_2 = x$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dx_1}{dt} &= -(1 + \varepsilon^2)x_1 - (1 - \varepsilon^2)x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 \end{aligned} \quad (7)$$

Если первое уравнение разделить на ε и записать (7) в матричном виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon} & -\frac{1 - \varepsilon^2}{\varepsilon} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

то собственные значения $\lambda_1 = -1 - \varepsilon$, $\lambda_2 = -\frac{1}{\varepsilon} + 1$ матрицы \mathbf{A} будут равны корням характеристического уравнения (8, прошлая лекция) и система (8) является жесткой.

В инженерной практике часто пренебрегают слагаемым с малым параметром при производной $\varepsilon \frac{dx_1}{dt}$, превращая первое уравнение в (7) в алгебраическое. В области химической кинетики этот подход получил название **метод квазистационарных концентраций** Боденштейна-Семенова. Термин «квази» учитывает тот факт, что, полагая приближенно $\varepsilon \frac{dx_1}{dt} \approx 0$, вовсе не подразумевают величину x_1 постоянной, а считают значение $\varepsilon \frac{dx_1}{dt}$ малым по сравнению с другими слагаемыми в первом уравнении (7). Выполняя это допущение и выражая x_1 через x_2 , получаем

$$\begin{aligned} -(1 + \varepsilon^2)x_1 - (1 - \varepsilon^2)x_2 &\approx 0, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 &\approx \frac{-(1 - \varepsilon^2)}{(1 + \varepsilon^2)}x_2 \approx (-1 + 2\varepsilon^2 + \dots)x_2 \end{aligned} \quad (9)$$

Легко заметить, что упрощенная система (9) меньшего дифференциального порядка хорошо описывает поведение решения (7) вне пограничного слоя. При этом величина $(-1 + 2\varepsilon^2 + \dots)$ с точностью до ε совпадает с $\lambda_1 = -1 - \varepsilon$.

Обратимся к еще одному числовому примеру.

$$\begin{aligned} 10^{-3} \cdot \frac{dx_1}{dt} &= -x_1 + 0.999x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 - 2x_2 \end{aligned} \quad (10)$$

Если разделить первое уравнение (10) на 10^{-3} , то матрица получившейся системы обладает следующими собственными значениями: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1001$. В соответствии с «инженерным подходом» пренебрегаем слагаемым $10^{-3} \cdot \frac{dx_1}{dt}$ в первом уравнении и получаем

$$\begin{aligned} -x_1 + 0.999x_2 &\approx 0, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 - 2x_2 \approx -1.001 \cdot x_2 \end{aligned}$$

И вновь, как и в предыдущем примере, значение -1.001 оказывается весьма близким к $\lambda_1 = -1$.

Однако, применение такого подхода на практике сталкивается со следующими трудностями:

- трудно оценить погрешность такого пренебрежения малым параметром;
- трудно уменьшить эту погрешность, если она недостаточно мала;
- количество уравнений с малым параметром при производной может не совпадать с количеством быстроубывающих в пограничном слое составляющих решения.

Последний факт иллюстрирует следующий пример.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -501 & 500 \\ 500 & -501 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 3]. \quad (11)$$

Если разделить оба уравнения на 1000, то получаются два уравнения с малым параметром при производной и складывается впечатление, что матрица (11) обладает двумя большими по модулю собственными значениями, соответствующие две экспоненты быстро исчезают в пределах пограничного слоя, и решение почти на всем промежутке $t \in [0, 3]$ оказывается равным нулю (стационарная точка (11)). Однако, это не так. Собственные значения \mathbf{A} равны: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1001$. Таким образом, пренебрегая малым параметром в обоих уравнениях, мы ошибочно удаляем из решения вне пограничного слоя экспоненту с показателем $\lambda_1 = -1$. Если предположить, что последний факт нам известен, и можно пренебрегать малым параметром лишь в одном уравнении, то это приводит к следующему результату:

$$x_1 \approx \frac{500}{501} x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} \approx - \left(501 - \frac{500^2}{501} \right) x_2 = - \frac{1001}{501} x_2 \approx -2x_2.$$

Важно не только то, что ошибка в определении $\lambda_1 = -1$ составила 100%, но и то, что реально на практике мы не знаем, что такая погрешность есть!

Справиться с возникшими трудностями позволяет **принцип квазистационарности производных** (ПКП), выдвинутый Ю.В.Ракитским. Пренебрегать следует не первой, а производными более высокого порядка. С этой целью выбранные уравнения системы дифференцируются, а возникающие производные заменяются их выражениями из исходных уравнений. В качестве примера продифференцируем первое уравнение (11) и пренебрежем второй производной $\frac{d^2 x_1}{dt^2} \approx 0$:

$$0 \approx \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -501 \frac{dx_1}{dt} + 500 \frac{dx_2}{dt} = -501(-501x_1 + 500x_2) + 500(500x_1 - 501x_2),$$

$$x_1 \approx \frac{1000 \cdot 501}{501^2 + 500^2} x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} \approx -\left(501 - 500 \frac{1000 \cdot 501}{501^2 + 500^2}\right) x_2 \approx -1.001x_2$$

Погрешность 10^{-3} в определении $\lambda_1 = -1$ весьма мала. Ее можно уменьшить до 10^{-6} , если пренебречь не второй, а третьей производной. Почему ПКП приводит к таким хорошим результатам? Поясним это на примере нелинейной системы

$$\varepsilon \frac{d\mathbf{x}_1}{dt} = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2),$$

$$\frac{d\mathbf{x}_2}{dt} = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2),$$
(12)

где $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ – подвекторы вектора решения (12). Пренебрегая первой производной в первом уравнении (12) и считая величину $\varepsilon \frac{d\mathbf{x}_1}{dt}$ малой по сравнению с $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, получаем алгебраическое уравнение вне пограничного слоя

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \approx 0. \quad (13)$$

Теперь продифференцируем первое уравнение (12) и пренебрежем второй производной:

$$0 \approx \varepsilon \frac{d^2 \mathbf{x}_1}{dt^2} = \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_1} \frac{d\mathbf{x}_1}{dt} + \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_2} \frac{d\mathbf{x}_2}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_1} \frac{\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{\varepsilon} + \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_2} \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$$

$$0 \approx \varepsilon^2 \frac{d^2 \mathbf{x}_1}{dt^2} = \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_1} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_2} \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$$
(14)

Здесь алгебраическое уравнение вне пограничного слоя выглядит следующим образом

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \varepsilon \left(\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_1} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_2} \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \approx 0. \quad (15)$$

Оно получается как (13) с поправкой к нему порядка ε . При этом, если прежде пренебрегали величиной $\varepsilon \frac{d\mathbf{x}_1}{dt}$, то теперь величиной $\varepsilon^2 \frac{d^2\mathbf{x}_1}{dt^2}$. Этим и предопределяется успех ПКП в получении более точных алгебраических связей вне пограничного слоя.

Для линейных систем с постоянной матрицей ПКП может быть доказан строго. Предварительно обратимся к некоторому свойству жестких систем.

Свойство жестких систем. Для линейных жестких систем

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \quad (16)$$

вне пограничного слоя $\tau_{ПС}$ между переменными существуют почти точные алгебраические связи, число которых равно количеству быстроубывающих в пограничном слое частных решений. Эти уравнения могут быть использованы для понижения дифференциального порядка системы и, таким образом, ее решение будет описываться системой меньшей размерности, уже не являющейся жесткой.

Пусть все собственные значения λ_k матрицы \mathbf{A} жесткой системы (16) разделены на две группы. В первой группе λ_k обладают относительно большими модулями и большими по модулю отрицательными вещественными частями

$$\operatorname{Re}(\lambda_k) \cdot \tau_{ПС} \ll -1, \quad k = 1, 2, \dots, p. \quad (17)$$

Отвечающие им составляющие решения быстро убывают в пределах пограничного слоя ($t \in [0, \tau_{ПС}]$). Вторую группу составляют оставшиеся λ_k , определяющие поведение решения за пограничным слоем ($t > \tau_{ПС}$):

$$\lambda_k, \quad k = p+1, p+2, \dots, m. \quad (18)$$

В соответствии с формулой Лагранжа-Сильвестра решение (16) записывается в виде

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 = \sum_{k=1}^m \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^T e^{\lambda_k t} \mathbf{x}_0 = \sum_{k=1}^m \mathbf{u}_k \left(\mathbf{v}_k^T \mathbf{x}_0 \right) e^{\lambda_k t} \quad (19)$$

где $\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k$ – собственные векторы матриц \mathbf{A} и \mathbf{A}^T соответственно. С учетом равенств $\mathbf{v}_i^T \mathbf{u}_k = 0$ и $\mathbf{v}_k^T \mathbf{u}_k = 1$ умножим (19) слева на собственный вектор \mathbf{v}_i^T из первой группы

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^m \mathbf{v}_i^T \mathbf{u}_k \left(\mathbf{v}_k^T \mathbf{x}_0 \right) e^{\lambda_k t} = \mathbf{v}_i^T \mathbf{u}_i \left(\mathbf{v}_i^T \mathbf{x}_0 \right) e^{\lambda_i t} = \left(\mathbf{v}_i^T \mathbf{x}_0 \right) e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (20)$$

Учитывая (17), вне пограничного слоя при $t > \tau_{ПС}$ получаем почти точные алгебраические связи

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{x}(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (21)$$

Эти равенства являются неотъемлемым свойством жестких систем. ПКП позволяет приближенно построить эти уравнения, не решая проблему собственных значений и не вычисляя непосредственно собственные векторы.

Пусть для простоты $p=1$, т.е. первая группа состоит из одного собственного значения. Продифференцируем (16) S раз и пренебрежем S -й производной в уравнении с номером j :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} &= \mathbf{A} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}^2 \mathbf{x}; & \frac{d^S \mathbf{x}}{dt^S} &= \mathbf{A}^S \mathbf{x}; & \mathbf{A}^S &= \sum_{k=1}^m \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^T \lambda_k^S \\ 0 \approx \frac{d^S x_j}{dt^S} &= \mathbf{e}_j^T \mathbf{A}^S \mathbf{x} = \sum_{k=1}^m (\mathbf{e}_j^T \mathbf{u}_k) \mathbf{v}_k^T \lambda_k^S \mathbf{x} = (\mathbf{e}_j^T \mathbf{u}_1) \mathbf{v}_1^T \lambda_1^S \mathbf{x} + \sum_{k=2}^m (\mathbf{e}_j^T \mathbf{u}_k) \mathbf{v}_k^T \lambda_k^S \mathbf{x} = \\ &= \lambda_1^S \left((\mathbf{e}_j^T \mathbf{u}_1) \mathbf{v}_1^T \mathbf{x} + \sum_{k=2}^m (\mathbf{e}_j^T \mathbf{u}_k) \frac{\lambda_k^S}{\lambda_1^S} \mathbf{v}_k^T \mathbf{x} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

Так как $\left| \frac{\lambda_k}{\lambda_1} \right| \ll 1$, то с ростом S сумма в правой части (22) быстро убывает, и все выражение принимает вид:

$$\lambda_1^S (\mathbf{e}_j^T \mathbf{u}_1) \mathbf{v}_1^T \mathbf{x} \approx 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1^T \mathbf{x} \approx 0, \quad (23)$$

совпадающий с (17.21). Таким образом, для линейных систем ПКП – это способ приближенного построения уравнений (21).

Теперь все перечисленные трудности «инженерного подхода» пренебрежения малым параметром при производной легко решаются. Погрешность легко оценивается сравнением коэффициентов алгебраических связей для S и $S+1$, а повышение точности достигается увеличением S . Первыми кандидатами на пренебрежение производными в (22) являются уравнения с большими по модулю элементами матрицы \mathbf{A} .