Элементы теории возмущений.

В настоящем разделе будем рассматривать разложение решения как статических, так и динамических моделей по малому или большому параметру ε $(\varepsilon \to 0, \quad \varepsilon \to \infty)$, который возникает в уравнениях естественно или вводится искусственно. Предварительно целесообразно получить представление моделей в безразмерной форме, чтобы понятие «малый» или «большой» стало более определенным. Обратимся к модели движения тележки массой m с нелинейной пружиной:

$$m\frac{d^2u}{dt^2} + ku + k_2u^3 = 0, \quad u(0) = u_0, \quad \frac{du}{dt}(0) = 0, \tag{1}$$

где k, k_2 – параметры пружины. При введении масштаба по переменной u целесообразно учитывать размеры тележки или начальное отклонение u_0, а масштаб по времени может быть привязан к ожидаемой частоте колебаний. В соответствии со сказанным выполним в (1) замену переменных

$$u = \frac{u}{u_0}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

С новыми переменными уравнение (1) приобретает вид:

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} + u + \varepsilon u^3 = 0, \quad u(0) = 1, \quad \frac{du}{dt}(0) = 0, \quad \varepsilon = \frac{k_2u_0^2}{k}. \tag{2}$$

В новых координатах понятия «большой» или «малый» приобретают более отчетливый вид, в частности, при малом ε период колебаний близок к 2π.

Первоначально рассмотрим возмущение по координате.

Возмущение по координате.

Пусть есть решение для x_0. Тогда ищется разложение по степеням x при $(x \to 0)$ для $x_0 = 0$ или по степеням x^{-1} $(x \to \infty)$ для $x_0 = \infty$.

Пример 1. $$x\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} + xu = 0, \quad u_0(0) = 1. \tag{3}$$

Будем искать решение (3) для малых x в виде следующего разложения:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\mu}, \tag{4}$$

где a_k и μ – параметры. Подставляя (4) в (3), получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\mu+k)(\mu+k-1)\cdot a_k \cdot x^{\mu+k-1} + \sum_{k=0}^{\infty}(\mu+k)\cdot a_k \cdot x^{\mu+k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^{\mu+k+1} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\mu+k)^2\cdot a_k \cdot x^{\mu+k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^{\mu+k+1} = 0. \tag{5}$$

Выделяя отдельно первые два слагаемых первой суммы, объединяем обе суммы в одну

$$\mu^2 a_0 x^{\mu-1} + \left(\mu+1\right)^2 a_1 x^{\mu} + \sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(\mu+k+2\right)^2 a_{k+2} + a_k\right]\cdot x^{\mu+k+1} = 0. \quad (6)$$

Приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем, на первый взгляд, два варианта разложений.

Вариант 1. $\mu = 0,\ \ a_0 = 1,\ \ a_1 = 0,\ \ a_{k+2} = -\dfrac{a_k}{(k+2)^2},\ \ u(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{x^4}{2^2 4^2} - \dfrac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \ldots$

Вариант 2. $a_0 = 0,\ \ \mu = -1,\ \ a_1 = 1,\ \ a_{k+2} = -\dfrac{a_k}{(k+1)^2},\ \ u(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{x^4}{2^2 4^2} - \dfrac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \ldots$

Не трудно заметить, что в обоих вариантах получается одно и то же разложение для функции Бесселя.

Пример 2. $\dfrac{du}{dx} + u = \dfrac{1}{x}$. (7)

Для изучения характера поведения решения при $x \to \infty$ будем искать решение в виде

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{-k} . \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем

$$-\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot a_k x^{-k-1} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^{-k} + \left(a_1 - 1\right)\frac{1}{x} = 0,$$

$$a_1 = 1,\quad a_{k+1} = k a_k,\quad u(x) = \frac{1}{x} + \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \ldots + \frac{(n-1)!}{x^n} + \ldots$$

Символы порядка и калибровочные функции.

Для изучения характера поведения функции $f(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ и сравнения с $g(\varepsilon)$ используются два хорошо известных выражения $O(\varepsilon)$ и $o(\varepsilon)$:

$f(\varepsilon) = O\left(g(\varepsilon)\right)$ при $\varepsilon \to 0$, если $\left(\exists A > 0\right)\left(\exists \varepsilon_0 > 0\right)\left(\forall \varepsilon > \varepsilon_0\right)\left(\left|f(\varepsilon)\right| \le A\cdot\left|g(\varepsilon)\right|\right)$,

или $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left|\dfrac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)}\right| < \infty$;

$f(\varepsilon) = o\left(g(\varepsilon)\right)$ при $\varepsilon \to 0$, если $\left(\exists \delta > 0\right)\left(\exists \varepsilon_0 > 0\right)\left(\forall \varepsilon > \varepsilon_0\right)\left(\left|f(\varepsilon)\right| \le \delta\cdot\left|g(\varepsilon)\right|\right)$,

или $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left|\dfrac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)}\right| = 0$.

Однако на практике этих понятий явно не достаточно. В общем случае имеет место одна из следующих трех ситуаций:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f(\varepsilon) = \begin{cases} 0 \\ A \ne 0. \\ \pm\infty \end{cases}$$

Во всех случаях важна не только сходимость, но и скорость сходимости, которую нужно с чем-то сравнивать. С этой целью вводится понятие ***калибровочных функций***, в роли которых часто выступают целые степени ε:

$$\ldots,\varepsilon^{-n},\ldots,\varepsilon^{-2},\varepsilon^{-1},1,\varepsilon,\varepsilon^{2},\ldots,\varepsilon^{n},\ldots$$

Достаточно ли только таких функций? Рассмотрим функцию $e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$ при $\varepsilon\to+0$ и сравним ее поведение с ε^{n}:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon^{n}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n}}{e^{x}}=0.$$

Для функций такого вида список калибровочных функций явно нужно расширять. Рассмотрим еще одну функцию $\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ при $\varepsilon\to+0$ и сравним ее поведение с любой отрицательной степенью ε, не обязательно целой:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon^{-\alpha}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^{\alpha}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\cdot\alpha\cdot x^{\alpha-1}}=\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}=0,\qquad\forall\alpha>0.$$

Очевидно, что список калибровочных функций вновь нуждается в расширении, но уже с другой стороны. А если рассмотреть функцию $\ln\left(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$? Очевидно, что список калибровочных функций никогда не может быть полным и в каждой конкретной ситуации необходимо подбирать что-то подходящее для оценки скорости сходимости.

Асимптотические последовательности и ряды.

Рассмотрим следующую функцию $F(x)$ при $x\ge 0$ и ее разложение в ряд:

$$1>F(x)=\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-t}}{1+xt}dt\Rightarrow\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}k!x^{k}\tag{9}$$

При очевидной ограниченности $F(x)$ для положительных значений x ряд в (9) расходится. Можно, однако, показать, что любая частная сумма этого ряда приближает $F(x)$ с погрешностью меньшей, чем модуль первого отбрасываемого слагаемого в (9). Пусть $x=0.1$. Тогда слагаемое для $k=10$ оказывается не слишком большим: $10!\cdot 0.1^{10}\approx 0.000363$. Если эта погрешность решения приемлема, то можно пользоваться расходящимся рядом для оценки значений $F(x)$. Обобщим рассмотренный случай. Если $f(\varepsilon)$ может быть представлена в виде

$$f(\varepsilon)=\sum_{k=0}^{N}a_{k}\varepsilon^{k}+o\left(\varepsilon^{N}\right)\quad\text{при}\quad\varepsilon\to 0,\tag{10}$$

то (10) называют ***асимптотическим рядом типа Пуанкаре***. Не обязательно ограничиваться степенями ε^{k}. Достаточно воспользоваться ***асимптотической последовательностью*** $\delta_{k}(\varepsilon)=o\left[\delta_{k-1}(\varepsilon)\right]$ при $\varepsilon\to 0$. Тогда выражение

$$f(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} a_k \delta_k(\varepsilon) + o\left(\delta_N(\varepsilon)\right), \qquad \varepsilon \to 0 \tag{11}$$

называется асимптотическим разложением типа Пуанкаре. В роли $\delta_k(\varepsilon)$ могут выступать функции: ε^k, $\varepsilon^{\frac{k}{10}}$, $\left(\ln(\varepsilon)\right)^{-k}$ и т.п.