

АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИ

Компонентные и топологические уравнения на макроуровне.

В построении моделей из различных физических областей часто есть много общего. Поэтому особое место занимают методы, успешно применяющиеся в широком спектре задач. Одним из таких методов является **метод прямой аналогии**. Он базируется на следующих положениях.

1. Система представляется суммой подсистем, каждая из которых по характеру протекающих в ней процессов должна быть физически однородной (механические, электрические, гидравлические, тепловые и др. подсистемы).
2. Состояние каждой подсистемы описывается множеством фазовых переменных двух типов: переменные потока и переменные потенциала. Для макроуровня существенной является также дискретизация пространства, что означает **конечность** множеств фазовых переменных в каждой подсистеме.
3. Структура каждой подсистемы представляется множествами элементов и связей их друг с другом: множеством узлов (вершин) и связывающих их ветвей (ребер).
4. Свойства элемента задаются его математической моделью, устанавливающей связь между фазовыми переменными, относящимися к ребрам и узлам данного элемента. Эти выражения называются **компонентными уравнениями**.
5. Полная математическая модель есть совокупность компонентных и **топологических уравнений**. Последние связывают однотипные фазовые переменные, относящиеся к взаимосвязанным элементам.

В большинстве технических систем можно выделить три типа простейших элементов:

- элемент типа R – элемент диссипации энергии; на этом элементе, как правило, происходит преобразование энергии в тепловую;
- элемент типа C ;
- элемент типа L .

На последних двух элементах происходит накопление потенциальной и кинетической энергии.

<i>Примеры компонентных уравнений различных подсистем</i>		
Электрическая	Механическая поступательная	Механическая вращательная
Переменная потока: I – ток	Переменная потока: F – сила	Переменная потока: M – момент сил
Переменная потенциала: U – напряжение	Переменная потенциала: V – скорость	Переменная потенциала: ω – угловая скорость

Закон Ома: $I = \frac{U}{R}$	Уравнение вязкого трения: $F = kV = \frac{V}{R_M}$	Уравнение вязкого трения вращения: $M = k\omega = \frac{\omega}{R_{\text{вп}}}$
Уравнение емкости: $I = C \frac{dU}{dt}$	Второй закон Ньютона: $F = ma = m \frac{dV}{dt}$	Основное уравнение динамики вращательного движения: $M = J \frac{d\omega}{dt}$. J – момент инерции
Уравнение индуктивности: $U = L \frac{dI}{dt}$	Уравнение пружины: $F = kx \Rightarrow V = \frac{1}{k} \frac{dF}{dt}$	Уравнение кручения бруса с круглым сечением: $\omega = \frac{l}{G \cdot J_p} \frac{dM}{dt}$
<i>Топологические уравнения различных подсистем</i>		
Закон токов Кирхгофа – уравнение равновесия	Принцип Даламбера	Принцип Даламбера для вращательных систем
Закон напряжений К. – уравнение непрерывности	Принцип сложения скоростей	Принцип сложения скоростей вдоль оси вращ.

Программа анализа математических моделей.

В качестве примера остановимся на анализе модели электрической системы, состав которой традиционен: источники напряжения (E), источники тока (I), емкости (C), сопротивления (R), индуктивности (L), нелинейные элементы (N). Типовая структура простейшей программы анализа предполагает наличие следующих блоков.

Входной блок. Как правило, для удобного общения с пользователем здесь используется специальный язык. Возможный вариант структуры данных – каждому двухполюснику соответствует запись со следующими полями: тип двухполюсника; входной узел, выходной узел, номинал двухполюсника, начальные условия ($U_C(0)$ для емкости или $I_L(0)$ для индуктивности). В дальнейшем для описания схемы будем использовать язык теории графов. **Граф** – множество вершин, соединенных отрезками линий (ребра, ветви графа). **Ребро** – двухполюсник, **вершина** – место соединения соседних элементов.

Блок построения уравнений модели. На основе компонентных и топологических уравнений одним из специальных методов строится модель системы.

Блок численной реализации модели. Для решения дифференциальных и алгебраических уравнений модели используются численные методы, являющиеся предметом курса «Вычислительная математика».

Выходной блок. Результаты предыдущего блока оформляются в удобном для пользователя виде: таблицы, графики и др.

Предметом нашего рассмотрения в настоящем курсе является второй блок – блок *построения уравнений модели* на основе информации, собранной в первом блоке.

В качестве примера обратимся к схеме, представленной на рис. 1. Отвечающий ей направленный граф представлен на рис. 2.

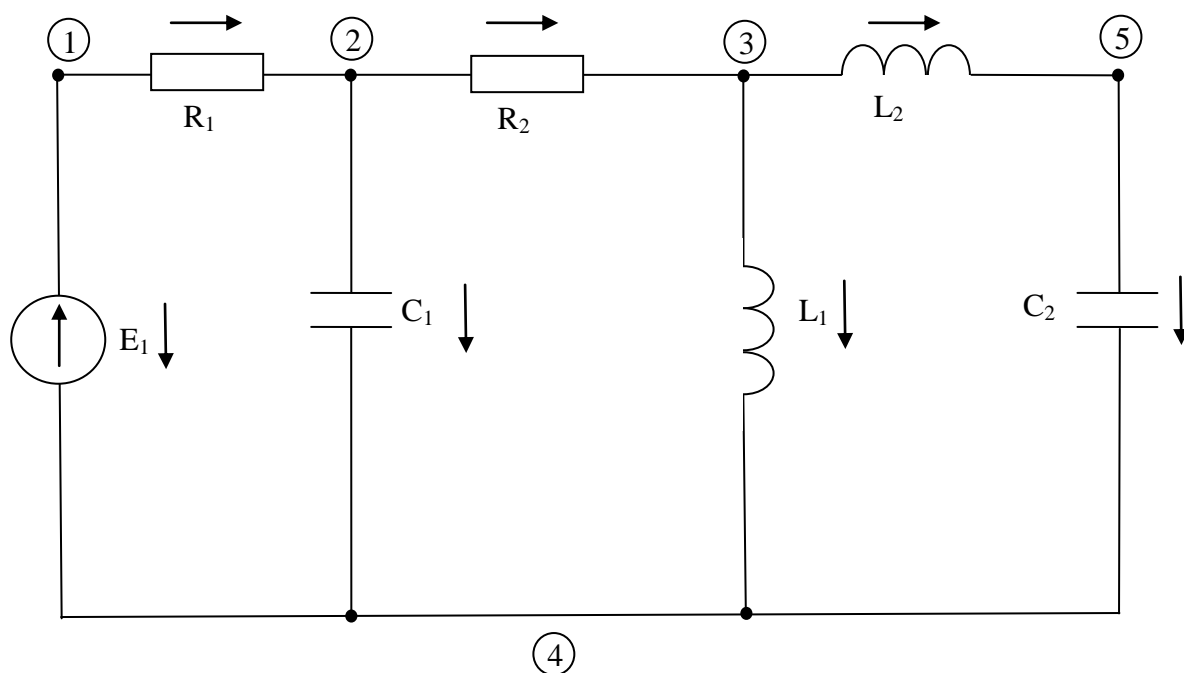


Рис. 1

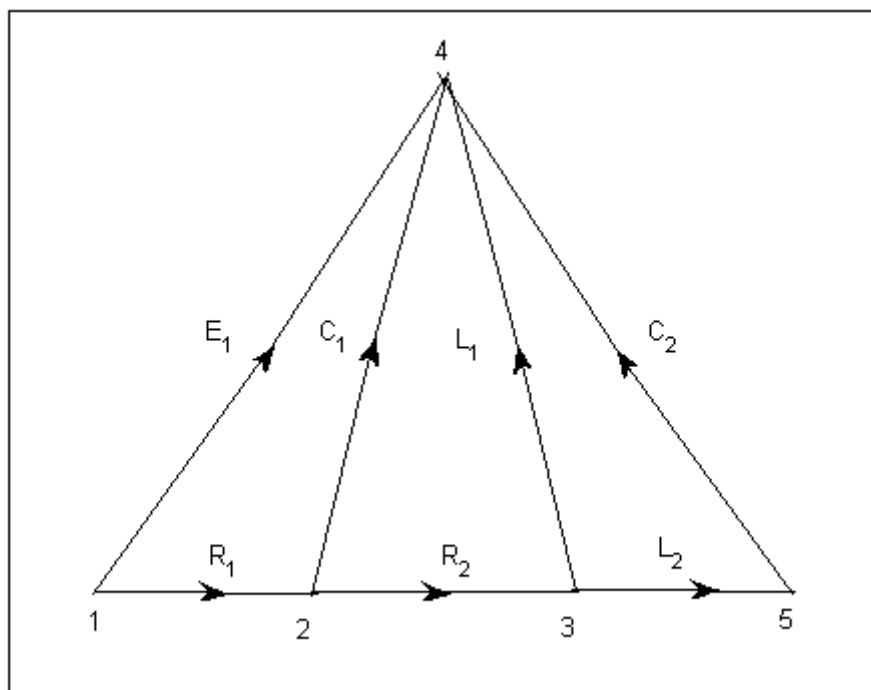


Рис. 2.

Для удобной записи в матрично-векторном виде законов Кирхгофа введем понятие **матрицы инциденций**. Один из узлов схемы (принципиально любой!) принимаем за *базовый* (в нашем примере это узел 4). Строки матрицы инциденций – это все остальные узлы кроме базового, а столбцы – это все двухполюсники схемы. Для каждого столбца в соответствующей строке ставим (+1), если этот узел является входным для данного двухполюсника; (-1), если это выходной узел; и (0) – во всех остальных случаях. Таким образом, в каждом столбце будут не более двух ненулевых элементов. Для схемы рис. 1 матрица инциденций **A** имеет вид:

$$\begin{array}{cc}
 \text{узел} & E_1 & C_1 & C_2 & R_1 & R_2 & L_1 & L_2 \\
 \mathbf{A} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{array} & \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}
 \end{array} \quad (1)$$

Матрица **A** легко строится по столбцам на основе данных входного блока.

Теперь введем три вектора: вектор токов **I**, вектор напряжений **U**, перечень компонент которых согласован с порядком столбцов матрицы инциденций:

$$\mathbf{I} = (i_{E_1}, i_{C_1}, i_{C_2}, i_{R_1}, i_{R_2}, i_{L_1}, i_{L_2})^T, \quad \mathbf{U} = (u_{E_1}, u_{C_1}, u_{C_2}, u_{R_1}, u_{R_2}, u_{L_1}, u_{L_2})^T,$$

а также вектор потенциалов узлов **φ**, компоненты которого согласованы со строками матрицы **A**:

$$\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_5)^T.$$

Легко заметить, что не только для данной схемы, но и в общем случае имеют место следующие формулы:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{0}, \quad (2)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}^T \Phi. \quad (3)$$

Первая формула отвечает закону токов Кирхгофа, а вторая связывает напряжения на двухполюсниках с потенциалами входных и выходных узлов.

Компонентные уравнения.

Для записи компонентных уравнений в матрично-векторном виде запишем все двухполюсники в следующем порядке: сначала все емкости, затем все сопротивления, потом индуктивности и нелинейные элементы. Нелинейным элементом может быть независимый источник тока или источник тока, управляемый напряжением, а также нелинейный двухполюсник с заданной вольт-амперной характеристикой: $i_N = f_N(\varphi_i - \varphi_k)$. Тогда векторы напряжений и токов всей системы могут быть составлены из следующих подвекторов:

$$\mathbf{U} = (\mathbf{U}_C, \mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L, \mathbf{U}_N)^T, \quad \mathbf{I} = (\mathbf{I}_C, \mathbf{I}_R, \mathbf{I}_L, \mathbf{I}_N)^T \quad (4)$$

В соответствии с этим порядком матрица инцидентий также оказывается составленной из подматриц:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}_C, \mathbf{A}_R, \mathbf{A}_L, \mathbf{A}_N). \quad (5)$$

Компонентные уравнения для каждого вида двухполюсника имеют вид:

$$i_{C_i} = C_i \frac{du_{C_i}}{dt}; \quad i_{R_i} = R_i^{-1} u_{R_i}; \quad i_{L_i} = L_i^{-1} \int u_{L_i} dt; \quad i_{N_i} = f_i(\Phi)$$

Их же можно записать в векторной форме:

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{C} \frac{d\mathbf{U}_C}{dt}; \quad \mathbf{I}_R = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{U}_R; \quad \mathbf{I}_L = \mathbf{L}^{-1} \int \mathbf{U}_L dt; \quad \mathbf{I}_N = \mathbf{f}(\Phi), \quad (6)$$

где \mathbf{C} , \mathbf{R} , \mathbf{L} – диагональные матрицы:

$$\mathbf{C} = \text{diag}(C_1, C_2, \dots); \quad \mathbf{R} = \text{diag}(R_1, R_2, \dots); \quad \mathbf{L} = \text{diag}(L_1, L_2, \dots).$$

Теперь уравнение (2) может быть представлено в виде

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A}_C \mathbf{I}_C + \mathbf{A}_R \mathbf{I}_R + \mathbf{A}_L \mathbf{I}_L + \mathbf{A}_N \mathbf{I}_N = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Подставляя в него компонентные уравнения из (6) и выражая после этого напряжения через потенциалы по формуле (3), получаем

$$\mathbf{A}_C \mathbf{C} \mathbf{A}_C^T \frac{d\Phi}{dt} + \mathbf{A}_R \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}_R^T \Phi + \mathbf{A}_L \mathbf{L}^{-1} \mathbf{A}_L^T \int \Phi dt + \mathbf{A}_N \mathbf{f}(\Phi) = \mathbf{0}. \quad (8)$$

Полученные уравнения могут быть положены, например, в основу следующих трех методов для автоматизации процесса построения модели.

Узловой метод

Аппроксимируем производные, входящие в компонентные уравнения, руководствуясь неявной схемой метода ломаных Эйлера

$$\frac{dx(t_n)}{dt} \approx \frac{x(t_n) - x(t_{n-1})}{h}; \quad t_n = t_0 + nh, \quad (9)$$

который эффективен и в случае, когда интегрируемая система дифференциальных уравнений является жесткой. В соответствии с (9) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_C(t_n) &\approx \mathbf{C} \frac{\mathbf{U}_C(t_n) - \mathbf{U}_C(t_{n-1})}{h}; \quad \mathbf{I}_R(t_n) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{U}_R(t_n); \\ \mathbf{U}_L(t_n) &\approx \mathbf{L} \frac{\mathbf{I}_L(t_n) - \mathbf{I}_L(t_{n-1})}{h} \Rightarrow \mathbf{I}_L(t_n) = \mathbf{I}_L(t_{n-1}) + h \mathbf{L}^{-1} \mathbf{U}_L(t_n) \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя эти токи в (7) и выражая напряжения по формуле $\mathbf{U}(t_n) = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\varphi}(t_n)$, получаем следующую систему разностных уравнений первого порядка

$$\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\varphi}(t_n) = \mathbf{d}_n, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= h^{-1} \mathbf{A}_C \mathbf{C} \mathbf{A}_C^T + \mathbf{A}_R \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}_R^T + h \cdot \mathbf{A}_L \mathbf{L}^{-1} \mathbf{A}_L^T; \\ \mathbf{d}_n &= h^{-1} \mathbf{A}_C \mathbf{C} \cdot \mathbf{U}_C(t_{n-1}) - \mathbf{A}_L \cdot \mathbf{I}_L(t_{n-1}) - \mathbf{A}_N \mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(t_n)) \end{aligned} \quad (12)$$

В отношении $\mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(t_n))$ рассмотрим три варианта.

Вариант 1. $\mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(t_n)) = \mathbf{I}_I(t)$ – независимый источник тока. Тогда матрица \mathbf{B} – симметрическая, а вектор \mathbf{d}_n известен с предыдущего шага. Первые шаги выглядят следующим образом. Вычисляем $\mathbf{d}_1 = h^{-1} \mathbf{A}_C \mathbf{C} \cdot \mathbf{U}_C(0) - \mathbf{A}_L \cdot \mathbf{I}_L(0) - \mathbf{A}_N \mathbf{f}(h)$, решаем систему (11) и получаем $\boldsymbol{\varphi}(h)$. Далее определяем

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_C(h) &= \mathbf{A}_C^T \boldsymbol{\varphi}(h), \quad \mathbf{U}_L(h) = \mathbf{A}_L^T \boldsymbol{\varphi}(h), \quad \mathbf{I}_L(h) = \mathbf{I}_L(0) + h \mathbf{L}^{-1} \mathbf{U}_L(h), \\ \mathbf{d}_2 &= h^{-1} \mathbf{A}_C \mathbf{C} \cdot \mathbf{U}_C(h) - \mathbf{A}_L \cdot \mathbf{I}_L(h) - h \mathbf{A}_L \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{U}_L(h) - \mathbf{A}_N \mathbf{f}(2h) \end{aligned}$$

и вновь решаем систему (11) и т.д. Если бы матрица \mathbf{B} системы (11) имела произвольный вид, то однократно выполнялось бы ее LU-разложение программой *DECOMP*, и в дальнейшем использовалась бы только программа *SOLVE*. Для симметрической матрицы объем вычислений может быть сокращен еще примерно в два раза, если разложение \mathbf{B} выполнять на основе метода квадратного корня.

Вариант 2. $\mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(t_n))$ – линейная функция $\boldsymbol{\varphi}(t_n)$. Тогда соответствующее слагаемое $\mathbf{A}_N \mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(t_n))$ в (11) переносится в левую часть и корректирует матрицу \mathbf{B} , после чего все сводится к предыдущему варианту.

Вариант 3. $\mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(t_n))$ – относительно произвольная функция. Тогда (11) является системой нелинейных уравнений относительно $\boldsymbol{\varphi}(t_n)$, которую можно решать, например, методом Ньютона. При этом решение линейной части (11) является хорошим начальным приближением.

Главным достоинством узлового метода является его несомненная простота реализации. Это касается как построения матрицы инцидентий и матрицы \mathbf{B} , так и последующего решения (11). К числу недостатков следует отнести то, что процесс построения модели и ее численного решения оказались связанными воедино. Если возникнет необходимость в замене неявного метода ломаных Эйлера на какой-нибудь другой, то всю программу придется переделывать. Еще одним недостатком является то, что с уменьшением шага интегрирования матрица \mathbf{B} становится заметно хуже обусловленной.

Сведение системы интегро-дифференциальных уравнений к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Еще один метод построения модели часто применяется на практике пользователями без привлечения компьютера для схем с небольшим числом узлов и двухполюсников. Однако применение компьютера для построения моделей больших размерностей таким способом сталкивается с целым рядом больших трудностей. Продифференцируем систему (8), вводя при этом еще

одну векторную переменную $\boldsymbol{\Theta} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}$:

$$\mathbf{A}_C \mathbf{C} \mathbf{A}_C^T \cdot \frac{d\boldsymbol{\Theta}}{dt} = -\mathbf{A}_R \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}_R^T \cdot \boldsymbol{\Theta} - \mathbf{A}_L \mathbf{L}^{-1} \mathbf{A}_L^T \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{A}_N \mathbf{f}'(\boldsymbol{\varphi}) \cdot \boldsymbol{\Theta},$$

$$\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} = \boldsymbol{\Theta}.$$
(13)

Применить для решения (13) стандартную программу решения дифференциальных уравнений (например, **RKF45**) мешают два обстоятельства.

Во-первых, система (13) не разрешена относительно производной, а с обращением матрицы $\mathbf{A}_C \mathbf{C} \mathbf{A}_C^T$ возникает целый ряд сложностей. Как известно, ранг произведения матриц не превышает наименьшего ранга сомножителей. В подавляющем большинстве схем количество узлов превышает количество емкостей. Тогда число строк матрицы \mathbf{A}_C больше числа ее столбцов и ранг \mathbf{A}_C не превышает общего числа емкостей. Матрица $\mathbf{A}_C \mathbf{C} \mathbf{A}_C^T$ оказывается матрицей неполного ранга и, следовательно, особенной ($\det(\mathbf{A})=0$). В таких условиях ряд преобразований первого уравнения (13) позволяет превратить несколько дифференциальных уравнений в алгебраические и исключить часть переменных. Это легко выполняется человеком для простой схемы, но организовать этот процесс на компьютере для схем высокой размерности является очень сложной задачей.

Во-вторых, есть серьезная проблема с начальными условиями для (13). Во входном блоке задаются начальные условия вида $U_C(0)$ для емкости или $I_L(0)$ для индуктивности. Здесь же требуется задать $\varphi(0)$ и $\Theta(0)$, что опять-таки для схем высокой размерности часто представляется непреодолимым препятствием.

Все сказанное приводит к тому, что рассмотренный подход для задач автоматизации процесса построения модели практически не используется.

Учитывая недостатки рассмотренных двух подходов, сформулируем желаемые свойства «хорошей» программы построения модели:

- модель должна быть разрешена относительно производных, и процесс построения модели следует отделить от процесса ее численного решения;
- в роли фазовых переменных следует использовать векторы U_C и I_L , для которых есть начальные условия.

Решить эти проблемы позволяет нижеследующий метод.

Метод переменных состояния.

Первоначально введем определения некоторых элементов теории графов.

Граф – множество вершин и связанных с ним ребер. Будем рассматривать только **связный граф**, когда обязательно существует путь по ребрам из любой вершины в любую другую (нет изолированных ребер!). **Подграф** – подмножество вершин и связывающих их ребер. **Маршрут** – некоторая последовательность соединенных ребер. **Цепь** – маршрут, не содержащий повторяющихся ребер. **Цикл (контур)** – цепь, начинающаяся и заканчивающаяся в одной и той же вершине. **Дерево графа** – любой подграф без циклов. **Фундаментальное (покрывающее) дерево** – дерево, содержащее все узлы. **Ветви** – ребра, входящие в дерево. **Хорды** – остальные ребра графа. **Контур хорды** – множество ребер графа, образующих цикл при присоединении хорды к дереву. **Сечение** – любая замкнутая линия. **Сечение ветви** – множество ребер, пересекаемых линией сечения при условиях:

- пересекается единственная ветвь;
- все ребра пересекаются по одному разу.

Для анализа электронных схем введем специальный термин. **Нормальное дерево** – фундаментальное дерево, которое строится в соответствии с иерархией: **Е, С, R, L, I** (т.е. первоначально для назначения ветвей используем все **Е, С** и лишь затем **R, L, I**).

Введем следующие обозначения:

Е – источники напряжения **ветвей**;

С – емкости **ветвей**;

г – сопротивления **ветвей**;

Г – индуктивности **ветвей**;

S – емкости **хорд**;

R – сопротивления **хорд**;

L – индуктивности **хорд**;

I – источники тока **хорд**.

В соответствии с ними векторы напряжений и токов для ветвей и хорд состоят из следующих подвекторов:

$\mathbf{U}_B = (\mathbf{U}_E, \mathbf{U}_C, \mathbf{U}_r, \mathbf{U}_\Gamma)^T$ – вектор напряжения **ветвей**;

$\mathbf{I}_B = (\mathbf{I}_E, \mathbf{I}_C, \mathbf{I}_r, \mathbf{I}_\Gamma)^T$ – вектор токов **ветвей**;

$\mathbf{U}_X = (\mathbf{U}_S, \mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L, \mathbf{U}_I)^T$ – вектор напряжения **хорд**;

$\mathbf{I}_X = (\mathbf{I}_S, \mathbf{I}_R, \mathbf{I}_L, \mathbf{I}_I)^T$ – вектор токов **хорд**.

Аналогично тому, как в узловом методе определялась матрица инцидентий, введем понятие **матрицы контуров и сечений** \mathbf{M} . Строки этой матрицы – хорды, а столбцы – ветви рассматриваемой схемы. Если ветви и хорды уже определены, то матрица заполняется по строкам в соответствии с контуром данной хорды. Элемент \mathbf{M} равен (+1), если направление ветви совпадает с направлением хорды при обходе по контуру, он равен (-1), если направление противоположное, и он равен (0), если ветвь не входит в контур данной хорды. В соответствии с нумерацией компонент векторов токов и напряжений матрица \mathbf{M} приобретает вид:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{SE} & \mathbf{M}_{SC} & \mathbf{M}_{Sr} & \mathbf{M}_{S\Gamma} \\ \mathbf{M}_{RE} & \mathbf{M}_{RC} & \mathbf{M}_{Rr} & \mathbf{M}_{R\Gamma} \\ \mathbf{M}_{LE} & \mathbf{M}_{LC} & \mathbf{M}_{Lr} & \mathbf{M}_{L\Gamma} \\ \mathbf{M}_{IE} & \mathbf{M}_{IC} & \mathbf{M}_{Ir} & \mathbf{M}_{I\Gamma} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Теперь топологические уравнения могут быть записаны в матричном виде. Уравнения контуров хорд (закон напряжений Кирхгофа):

$$\mathbf{U}_X = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{U}_B \quad (15)$$

и уравнения сечения ветвей (закон токов Кирхгофа)

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{I}_X. \quad (16)$$

Три матрицы в (14) всегда нулевые:

$$\mathbf{M}_{Sr} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_{S\Gamma} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_{R\Gamma} = \mathbf{0}.$$

Действительно, предположим, что $\mathbf{M}_{Sr} \neq \mathbf{0}$. Это свидетельствует о наличии контура, в котором в роли ветви выступает сопротивление, а в роли хорды – емкость, но это противоречит правилу формирования нормального дерева. Следовательно, все эти три матрицы нулевые. Говорят, что в схеме **отсутствуют топологические вырождения**, если дополнительно к сказанному равны нулю еще пять матриц:

$$\mathbf{M}_{SE} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_{SC} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_{Rr} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_{L\Gamma} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_{I\Gamma} = \mathbf{0}. \quad (17)$$

Программа метода переменных состояний может быть представлена следующими последовательными этапами.

Этап 1. Деление всех двухполюсников на ветви и хорды и построение дерева графа.

Этап 2. Построение (заполнение) матрицы **M** контуров и сечений.

Этап 3. Получение уравнений модели.

Начнем с *этапа 3*, предполагая, что первые два этапа выполнены и матрица **M** построена.

Метод переменных состояния без наличия топологических вырождений

Размерности векторов \mathbf{U}_X , \mathbf{I}_X , \mathbf{U}_B , \mathbf{I}_B , а также матрицы **M** уменьшаются:

$\mathbf{U}_B = (\mathbf{U}_E, \mathbf{U}_C, \mathbf{U}_r)^T$ – вектор напряжения **ветвей**;

$\mathbf{I}_B = (\mathbf{I}_E, \mathbf{I}_C, \mathbf{I}_r)^T$ – вектор токов **ветвей**;

$\mathbf{U}_X = (\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L, \mathbf{U}_I)^T$ – вектор напряжения **хорд**;

$\mathbf{I}_X = (\mathbf{I}_R, \mathbf{I}_L, \mathbf{I}_I)^T$ – вектор токов **хорд**.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{RE} & \mathbf{M}_{RC} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{LE} & \mathbf{M}_{LC} & \mathbf{M}_{Lr} \\ \mathbf{M}_{IE} & \mathbf{M}_{IC} & \mathbf{M}_{Ir} \end{pmatrix}; \quad (18)$$

Уравнения (15) и (16) принимают вид:

$$\mathbf{U}_R = -\mathbf{M}_{RE}\mathbf{U}_E - \mathbf{M}_{RC}\mathbf{U}_C; \quad (19)$$

$$\mathbf{U}_L = -\mathbf{M}_{LE}\mathbf{U}_E - \mathbf{M}_{LC}\mathbf{U}_C - \mathbf{M}_{Lr}\mathbf{U}_r; \quad (20)$$

$$\mathbf{U}_I = -\mathbf{M}_{IE}\mathbf{U}_E - \mathbf{M}_{IC}\mathbf{U}_C - \mathbf{M}_{Ir}\mathbf{U}_r; \quad (21)$$

$$\mathbf{I}_E = \mathbf{M}_{RE}^T \mathbf{I}_R + \mathbf{M}_{LE}^T \mathbf{I}_L + \mathbf{M}_{IE}^T \mathbf{I}_I; \quad (22)$$

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{M}_{RC}^T \mathbf{I}_R + \mathbf{M}_{LC}^T \mathbf{I}_L + \mathbf{M}_{IC}^T \mathbf{I}_I; \quad (23)$$

$$\mathbf{I}_r = \mathbf{M}_{Lr}^T \mathbf{I}_L + \mathbf{M}_{Ir}^T \mathbf{I}_I; \quad (24)$$

Компонентные уравнения:

$$\frac{d\mathbf{I}_L}{dt} = \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{U}_L; \quad \frac{d\mathbf{U}_C}{dt} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{I}_C; \quad \mathbf{U}_r = \mathbf{r} \cdot \mathbf{I}_r; \quad \mathbf{U}_R = \mathbf{R} \cdot \mathbf{I}_R;$$

где **R**, **r**, **L**, **C** – диагональные матрицы.

В соответствии с уравнениями (23) и (19) имеем уравнение относительно \mathbf{U}_C :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{U}_C}{dt} &= \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{I}_C = \mathbf{C}^{-1} \cdot (\mathbf{M}_{RC}^T \mathbf{I}_R + \mathbf{M}_{LC}^T \mathbf{I}_L + \mathbf{M}_{IC}^T \mathbf{I}_I) = \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{M}_{RC}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{U}_R + \mathbf{M}_{LC}^T \mathbf{I}_L + \mathbf{M}_{IC}^T \mathbf{I}_I) = \\ &= \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{M}_{RC}^T \mathbf{R}^{-1} (-\mathbf{M}_{RE} \mathbf{U}_E - \mathbf{M}_{RC} \mathbf{U}_C) + \mathbf{M}_{LC}^T \mathbf{I}_L + \mathbf{M}_{IC}^T \mathbf{I}_I). \end{aligned} \quad (25)$$

Аналогично на основе (20) и (24) для \mathbf{I}_L имеем:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{I}_L}{dt} &= \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{U}_L = \mathbf{L}^{-1} (-\mathbf{M}_{LE} \mathbf{U}_E - \mathbf{M}_{LC} \mathbf{U}_C - \mathbf{M}_{Lr} \mathbf{r} \cdot \mathbf{I}_r) = \\ &= \mathbf{L}^{-1} \left(-\mathbf{M}_{LE} \mathbf{U}_E - \mathbf{M}_{LC} \mathbf{U}_C - \mathbf{M}_{Lr} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{M}_{Lr}^T \mathbf{I}_L + \mathbf{M}_{Ir}^T \mathbf{I}_I) \right).\end{aligned}\quad (26)$$

Как итог, имеем систему уравнений (25)-(26) в форме Коши относительно векторов фазовых переменных \mathbf{U}_C и \mathbf{I}_L .

Метод переменных состояния при наличии топологических вырождений

Векторы токов и напряжений теперь сохраняют полный вид:

$$\mathbf{U}_B = (\mathbf{U}_E, \mathbf{U}_C, \mathbf{U}_r, \mathbf{U}_\Gamma)^T, \quad \mathbf{I}_B = (\mathbf{I}_E, \mathbf{I}_C, \mathbf{I}_r, \mathbf{I}_\Gamma)^T,$$

$$\mathbf{U}_X = (\mathbf{U}_S, \mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L, \mathbf{U}_I)^T, \quad \mathbf{I}_X = (\mathbf{I}_S, \mathbf{I}_R, \mathbf{I}_L, \mathbf{I}_I)^T$$

а к компонентным уравнениям добавляются еще два:

$$\mathbf{I}_S = \mathbf{S} \frac{d\mathbf{U}_S}{dt}; \quad \mathbf{U}_\Gamma = \mathbf{\Gamma} \frac{d\mathbf{I}_\Gamma}{dt}.$$

В матрице \mathbf{M} лишь три подматрицы остаются нулевыми (\mathbf{M}_{Sr} , $\mathbf{M}_{S\Gamma}$, $\mathbf{M}_{R\Gamma}$), что означает наличие в схеме топологических вырождений. Рассмотрим электрические и вычислительные аспекты этого факта.

1) Если $\mathbf{M}_{SE} \neq \mathbf{0}$ или $\mathbf{M}_{SC} \neq \mathbf{0}$, то это означает наличие в схеме контуров из источников напряжения и емкостей. В вычислительном плане это связано с дополнительным решением системы линейных алгебраических уравнений относительно \mathbf{I}_S .

2) Если $\mathbf{M}_{Rr} \neq \mathbf{0}$, это означает наличие в схеме контуров из резисторов и решение дополнительной системы уравнений относительно \mathbf{U}_r .

3) Наконец, если $\mathbf{M}_{L\Gamma} \neq \mathbf{0}$ или $\mathbf{M}_{I\Gamma} \neq \mathbf{0}$, это означает наличие в схеме контуров из индуктивностей и источников тока и решение дополнительной системы уравнений относительно \mathbf{U}_Γ .

В соответствии с (14)-(16) интересующие топологические уравнения принимают вид:

$$\mathbf{U}_S = -\mathbf{M}_{SE} \mathbf{U}_E - \mathbf{M}_{SC} \mathbf{U}_C \quad ; \quad (27)$$

$$\mathbf{U}_R = -\mathbf{M}_{RE} \mathbf{U}_E - \mathbf{M}_{RC} \mathbf{U}_C - \mathbf{M}_{Rr} \mathbf{U}_r \quad ; \quad (28)$$

$$\mathbf{U}_L = -\mathbf{M}_{LE} \mathbf{U}_E - \mathbf{M}_{LC} \mathbf{U}_C - \mathbf{M}_{Lr} \mathbf{U}_r - \mathbf{M}_{L\Gamma} \mathbf{U}_\Gamma; \quad (29)$$

$$\mathbf{U}_I = -\mathbf{M}_{IE} \mathbf{U}_E - \mathbf{M}_{IC} \mathbf{U}_C - \mathbf{M}_{Ir} \mathbf{U}_r - \mathbf{M}_{I\Gamma} \mathbf{U}_\Gamma \quad ; \quad (30)$$

$$\mathbf{I}_E = \mathbf{M}_{SE}^T \mathbf{I}_S + \mathbf{M}_{RE}^T \mathbf{I}_R + \mathbf{M}_{LE}^T \mathbf{I}_L + \mathbf{M}_{IE}^T \mathbf{I}_I \quad ; \quad (31)$$

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{M}_{SC}^T \mathbf{I}_S + \mathbf{M}_{RC}^T \mathbf{I}_R + \mathbf{M}_{LC}^T \mathbf{I}_L + \mathbf{M}_{IC}^T \mathbf{I}_I \quad ; \quad (32)$$

$$\mathbf{I}_r = \mathbf{M}_{Rr}^T \mathbf{I}_R + \mathbf{M}_{Lr}^T \mathbf{I}_L + \mathbf{M}_{Ir}^T \mathbf{I}_I; \quad (33)$$

$$\mathbf{I}_\Gamma = \mathbf{M}_{L\Gamma}^T \mathbf{I}_L + \mathbf{M}_{I\Gamma}^T \mathbf{I}_I. \quad (34)$$

Последовательно выражаем векторы \mathbf{U}_r , \mathbf{U}_Γ , \mathbf{I}_S через векторы фазовых переменных \mathbf{U}_C и \mathbf{I}_L . При этом предварительно выражаем \mathbf{I}_R через \mathbf{U}_R , а затем с учетом (28) и через \mathbf{U}_r .

1) Система для \mathbf{U}_r :

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^{-1}\mathbf{U}_r &= \mathbf{I}_r = \mathbf{M}_{Rr}^T \mathbf{I}_R + \mathbf{M}_{Lr}^T \mathbf{I}_L + \mathbf{M}_{Ir}^T \mathbf{I}_I = \\ &= \mathbf{M}_{Rr}^T \mathbf{R}^{-1} (-\mathbf{M}_{RE} \mathbf{U}_E - \mathbf{M}_{RC} \mathbf{U}_C - \mathbf{M}_{Rr} \mathbf{U}_r) + \mathbf{M}_{Lr}^T \mathbf{I}_L + \mathbf{M}_{Ir}^T \mathbf{I}_I; \\ \left[\mathbf{r}^{-1} + \mathbf{M}_{Rr}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{M}_{Rr} \right] \mathbf{U}_r &= \mathbf{M}_{Rr}^T \mathbf{R}^{-1} (-\mathbf{M}_{RE} \mathbf{U}_E - \mathbf{M}_{RC} \mathbf{U}_C) + \mathbf{M}_{Lr}^T \mathbf{I}_L + \mathbf{M}_{Ir}^T \mathbf{I}_I\end{aligned}$$

Имеем систему линейных алгебраических уравнений на каждом шаге относительно \mathbf{U}_r (программа типа **DECOMP** вызывается один раз!).

2) Система для \mathbf{U}_Γ :

$$\begin{aligned}\Gamma^{-1} \mathbf{U}_\Gamma &= \frac{d\mathbf{I}_\Gamma}{dt} = \mathbf{M}_{L\Gamma}^T \frac{d\mathbf{I}_L}{dt} + \mathbf{M}_{I\Gamma}^T \frac{d\mathbf{I}_I}{dt} = \\ &= \mathbf{M}_{L\Gamma}^T \mathbf{L}^{-1} (-\mathbf{M}_{LE} \mathbf{U}_E - \mathbf{M}_{LC} \mathbf{U}_C - \mathbf{M}_{Lr} \mathbf{U}_r - \mathbf{M}_{L\Gamma} \mathbf{U}_\Gamma) + \mathbf{M}_{I\Gamma}^T \frac{d\mathbf{I}_I}{dt} \\ \left[\Gamma^{-1} + \mathbf{M}_{L\Gamma}^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{M}_{L\Gamma} \right] \mathbf{U}_\Gamma &= \mathbf{M}_{L\Gamma}^T \mathbf{L}^{-1} (-\mathbf{M}_{LE} \mathbf{U}_E - \mathbf{M}_{LC} \mathbf{U}_C - \mathbf{M}_{Lr} \mathbf{U}_r) + \mathbf{M}_{I\Gamma}^T \frac{d\mathbf{I}_I}{dt}\end{aligned}$$

Опять система линейных алгебраических уравнений на каждом шаге!

3) Система для \mathbf{I}_S :

$$\begin{aligned}\mathbf{S}^{-1} \mathbf{I}_S &= \frac{d\mathbf{U}_S}{dt} = -\mathbf{M}_{SE} \frac{d\mathbf{U}_E}{dt} - \mathbf{M}_{SC} \frac{d\mathbf{U}_C}{dt} = -\mathbf{M}_{SE} \frac{d\mathbf{U}_E}{dt} - \\ &- \mathbf{M}_{SC} \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{M}_{SC}^T \mathbf{I}_S + \mathbf{M}_{RC}^T \mathbf{I}_R + \mathbf{M}_{LC}^T \mathbf{I}_L + \mathbf{M}_{IC}^T \mathbf{I}_I) \\ \left[\mathbf{S}^{-1} + \mathbf{M}_{SC} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{M}_{SC}^T \right] \mathbf{I}_S &= -\mathbf{M}_{SE} \frac{d\mathbf{U}_E}{dt} - \\ &- \mathbf{M}_{SC} \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{M}_{LC}^T \mathbf{I}_L + \mathbf{M}_{IC}^T \mathbf{I}_I + \mathbf{M}_{RC}^T \mathbf{R}^{-1} (-\mathbf{M}_{RE} \mathbf{U}_E - \mathbf{M}_{RC} \mathbf{U}_C - \mathbf{M}_{Rr} \mathbf{U}_r))\end{aligned}$$

Итак, еще одна система линейных алгебраических уравнений для \mathbf{I}_S !

Теперь окончательно имеем систему уравнений (35)-(36) в форме Коши относительно векторов фазовых переменных \mathbf{U}_C и \mathbf{I}_L :

$$\frac{d\mathbf{U}_C}{dt} = \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{M}_{SC}^T \mathbf{I}_S + \mathbf{M}_{RC}^T \mathbf{R}^{-1} (-\mathbf{M}_{RE} \mathbf{U}_E - \mathbf{M}_{RC} \mathbf{U}_C - \mathbf{M}_{Rr} \mathbf{U}_r) + \mathbf{M}_{LC}^T \mathbf{I}_L + \mathbf{M}_{IC}^T \mathbf{I}_I) \quad (35)$$

$$\frac{d\mathbf{I}_L}{dt} = \mathbf{L}^{-1} (-\mathbf{M}_{LE} \mathbf{U}_E - \mathbf{M}_{LC} \mathbf{U}_C - \mathbf{M}_{Lr} \mathbf{U}_r - \mathbf{M}_{L\Gamma} \mathbf{U}_\Gamma) \quad (36)$$

Для вычисления этих производных **на каждом шаге** предварительно решаются **три** системы линейных алгебраических уравнений относительно \mathbf{U}_r , \mathbf{U}_Γ , \mathbf{I}_S . Полезно отметить, что матрицы всех трех систем симметричны и при решении могут быть использованы специальные численные методы.

Теперь вернемся к *этапу 1*. Разделить все двухполюсники на ветви и хорды позволяет следующий алгоритм.

Алгоритм «склеивания вершин».

Его работу проиллюстрируем на примере схемы рис. 3

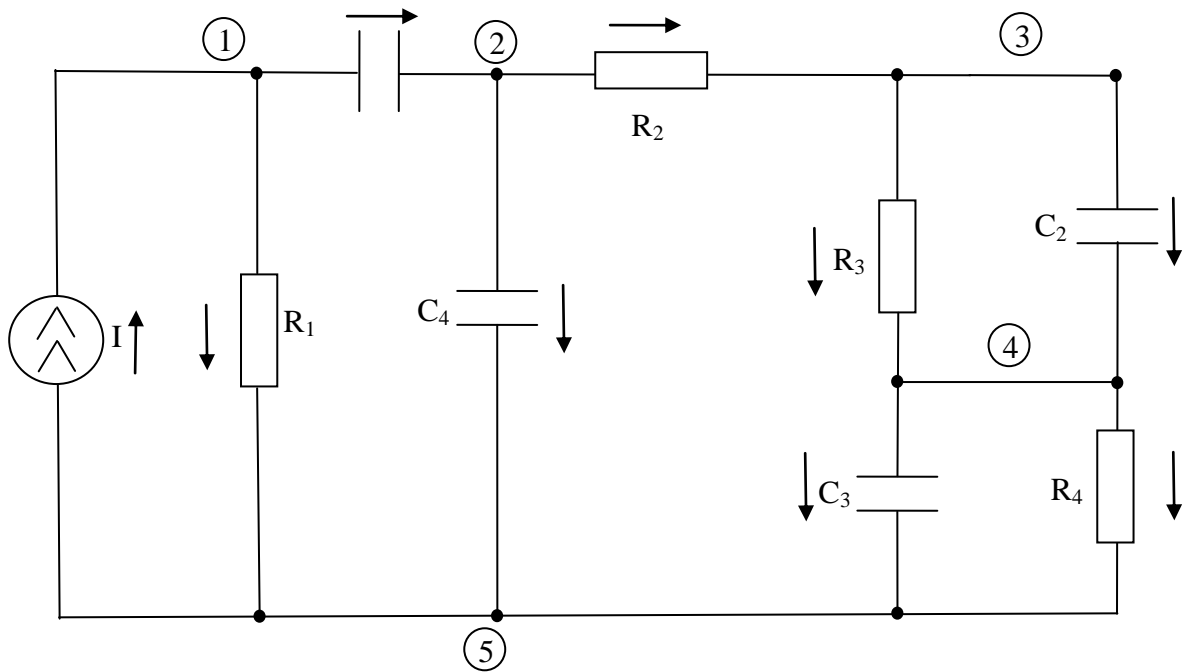


Рис. 3

Результаты отражены в нижеследующей таблице.

			Шаг 1		Шаг 2		Шаг 3		Шаг 4	
C_1	1	2	C_1 – ветвь							
C_2	3	4	3	4	C_2 – ветвь					
C_3	4	5	4	5	3	5	C_3 – ветвь		C_4 – ветвь	
C_4	2	5	1	5	1	5	1	3	1	1
R_1	1	5	1	5	1	5	1	3	1	1
R_2	2	3	1	3	1	3	1	3	1	1
R_3	3	4	3	4	3	3	3	3	1	1
R_4	4	5	4	5	3	5	3	3	1	1
I	5	1	5	1	5	1	3	1	1	1

Первоначально записываем в таблицу все двухполюсники, а также их входные и выходные узлы, в строго определенном порядке в соответствии с правилами формирования нормального дерева. На каждом шаге сравниваются номера входного и выходного узла первого сверху двухполюсника. Если они различаются, то двухполюсник объявляется ветвью и удаляется из списка, а во всем остальном списке номер его выходного узла заменяется номером входного. На следующем шаге

процедура повторяется. Как видно из таблицы в список ветвей попали все емкости C_1, C_2, C_3, C_4 , а хордами стали четыре сопротивления R_1, R_2, R_3, R_4 и источник тока I .

После определения списка ветвей и хорд переходят к *этапу 2* и заполняют матрицу контуров и сечений \mathbf{M} в соответствии со следующим алгоритмом.

Алгоритм «обрезания хвостов»

Для каждой строки матрицы \mathbf{M} (т.е. для каждой хорды) строится следующая таблица. В верхней строке указывается рассматриваемая хорда, а под ней все ветви графа со своими входными и выходными узлами. При просмотре сверху вниз двухполюсник, входной или выходной узел которого встречается в списке *однократно*, удаляется. Просмотр повторяется до тех пор, пока кандидатов на вычеркивание не останется. Элементы строк \mathbf{M} , отвечающие вычеркнутым ветвям, назначаются нулевыми. Если направление ветви совпадает с направлением хорды при обходе по контуру, то соответствующий элемент равен (+1), а если оно противоположно, то (-1). Легко заметить, что в результате, например, в контур хорды R_1 вошли емкости C_1 и C_4 , а в контур хорды R_4 только емкость C_3 .

Контур хорды R_1							Контур хорды R_4								
			<i>Шаг 1</i>		<i>Шаг 2</i>					<i>Шаг 1</i>		<i>Шаг 2</i>		<i>Шаг 3</i>	
R_1	1	5	1	5	1	5	R_4	4	5	4	5	4	5	4	5
C_1	1	2	1	2	1	2	C_1	1	2	---	---	---	---	---	---
C_2	3	4	---	---	---	---	C_2	3	4	3	4	---	---	---	---
C_3	4	5	4	5	---	---	C_3	4	5	4	5	4	5	4	5
C_4	2	5	2	5	2	5	C_4	2	5	2	5	2	5	---	---