III. Динамическая модель. Дифференциальные уравнения.

В качестве примера рассмотрим модель осциллятора с кубической нелинейностью

$$\frac{d^2u}{dt^2}+u+\varepsilon\cdot u^3=0,\quad u(0)=a,\quad \frac{du}{dt}(0)=0. \tag{1}$$

Решение (1) будем искать в виде следующего разложения, коэффициенты которого зависят от t

$$u(t,\varepsilon)=u_0(t)+\varepsilon\cdot u_1(t)+\varepsilon^2 u_2(t)+... \tag{2}$$

Очевидно, что все начальные условия в данном случае будут отнесены к $u_0(t)$, а для остальных $u_k(t)$ они будут нулевыми. Это связано с тем, что начальные условия не зависят от ε. Подставляя (2) в (1) последовательно получаем:

$$\varepsilon^0)\quad \frac{d^2u_0(t)}{dt^2}+u_0(t)=0,\quad u_0(0)=a,\quad \frac{du_0}{dt}(0)=0 \Rightarrow u_0(t)=a\cdot\cos(t);$$

$$\varepsilon^1)\quad \frac{d^2u_1(t)}{dt^2}+u_1(t)=-u_0^3(t)=-a^3\cos^3(t)=-a^3\frac{\cos(3t)+3\cos(t)}{4},\quad u_1(0)=0,\quad \frac{du_1}{dt}(0)=0$$

С учетом начальных условий решение таково:

$$u_1(t)=-\frac{3}{8}a^3\cdot t\cdot\sin(t)+\frac{a^3}{32}\big(\cos(3t)-\cos(t)\big). \tag{3}$$

Тогда первые слагаемые (2) выглядят следующим образом:

$$u(t,\varepsilon)=a\cdot\cos(t)+\varepsilon\cdot\left(-\frac{3}{8}a^3\cdot t\cdot\sin(t)+\frac{a^3}{32}\big(\cos(3t)-\cos(t)\big)\right)+...$$

Желательно, чтобы слагаемое с ε было малой поправкой к $a\cdot\cos(t)$. Однако, при достаточно больших значений t порядка $\dfrac{1}{\varepsilon}$ это не так. Составляющая вида $t\cdot\sin(t)$ появилось в связи с тем, что в правой части уравнения для $u_1(t)$ стоит слагаемое $\cos(t)$, которое одновременно является решением однородного уравнения. Более того, оказывается, что при ε^k появляются составляющие вида $t^k\cdot\sin(t)$ и $t^k\cdot\cos(t)$, что также не способствует эффективности разложения при больших значениях t. Причина этого заключается в том, что частота колебаний в (1) должна зависеть от ε, а коэффициенты разложения (2) этот факт не учитывают. Проблема решается м помощью следующей методики.

Методика растянутых параметров Линдштедта-Пуанкаре.

Будем учитывать, что частота колебаний в (1) зависит от ε:

$$\omega=\omega_0+\varepsilon\cdot\omega_1+\varepsilon^2\cdot\omega_2+... \tag{4}$$

В нашем примере очевидно $\omega_0 = 1$. Введем новую независимую переменную $\tau = \omega \cdot t$. Тогда (1) принимает вид:

$$\omega^2 \frac{d^2 u}{d\tau^2} + u + \varepsilon \cdot u^3 = 0, \quad u(0) = a, \quad \frac{du}{d\tau}(0) = 0 \tag{5}$$

Разложение для $u(\tau, \varepsilon)$ будем искать в форме, аналогичной (2)

$$u(\tau, \varepsilon) = u_0(\tau) + \varepsilon \cdot u_1(\tau) + \varepsilon^2 u_2(\tau) + \dots \tag{6}$$

Подставляя (4) и (6) в (5) получаем:

$$\begin{gathered}\left(1 + \varepsilon \cdot \omega_1 + \varepsilon^2 \cdot \omega_2 + \dots\right)^2 \cdot \frac{d^2}{d\tau^2}\left(u_0(\tau) + \varepsilon \cdot u_1(\tau) + \varepsilon^2 u_2(\tau) + \dots\right) + \\ + \left(u_0(\tau) + \varepsilon \cdot u_1(\tau) + \varepsilon^2 u_2(\tau) + \dots\right) + \varepsilon \cdot \left(u_0(\tau) + \varepsilon \cdot u_1(\tau) + \varepsilon^2 u_2(\tau) + \dots\right)^3 = 0\end{gathered} \tag{7}$$

ε^0) $\dfrac{d^2 u_0(\tau)}{d\tau^2} + u_0(\tau) = 0, \ \Rightarrow \ u_0(\tau) = a \cdot \cos(\tau)$;

$$\varepsilon^1) \quad \frac{d^2 u_1(\tau)}{d\tau^2} + u_1(\tau) = -u_0^3(\tau) - 2\omega_1 \frac{d^2 u_0(\tau)}{d\tau^2} = -a^3 \cos^3(\tau) + 2\omega_1 \cdot a \cdot \cos(\tau) =$$

$$= -\frac{a^3}{4}\cos(3\tau) - \left(\frac{3}{4}a^2 - 2\omega_1\right) a \cdot \cos(\tau) \quad .$$

Выбираем значение $\omega_1 = \dfrac{3}{8}a^2$ так, чтобы нежелательное слагаемое с $\cos(\tau)$ отсутствовало. Тогда выражение для $u_1(\tau)$

$$u_1(\tau) = \frac{a^3}{32}\left(\cos(3\tau) - \cos(\tau)\right)$$

уже не содержит слагаемого вида $t \cdot \sin(t)$, и разложение принимает вид:

$$u(t, \varepsilon) = a \cdot \cos(\omega t) + \varepsilon \cdot \frac{a^3}{32}\left(\cos(3\omega t) - \cos(\omega t)\right) + \dots$$

$$\omega = 1 + \varepsilon \cdot \frac{3a^2}{8} + \dots$$

Малый параметр при старшей производной (сингулярный случай).

Ранее рассматривались малые возмущения, которые действали в течение длительного времени. Соответствующие амплитуды и фазы были медленно меняющимися функциями времени. Здесь будут рассмотрены возмущения, действующие в узких областях, или зонах. При этом зависимые переменные испытывают весьма резкие изменения. Эти узкие зоны чаще всего лежат вблизи границы области, в которой решается задача. В задачах механики жидкостей и газов такие зоны называют обычно ***пограничными слоями***, в механике твердого тела – ***областями краевого эффекта***, в электрических приложениях – ***поверхностными*** или ***скин-слоями***.

В качестве примера обратимся к следующей краевой задаче

$$\varepsilon\frac{d^2x}{dt^2}+\left(1+\varepsilon^2\right)\frac{dx}{dt}+\left(1-\varepsilon^2\right)x=0, \quad t\in[0,1], \quad x(0)=\alpha, \quad x(1)=\beta. \tag{8}$$

Ее решение попробуем искать в виде следующего разложения

$$x(t,\varepsilon)=x_0(t)+\varepsilon\cdot x_1(t)+\varepsilon^2x_2(t)+... \tag{9}$$

Как и в случае со статической моделью, сингулярное возмущение резко изменяет структуру невозмущенной модели, так при $\varepsilon=0$ получаем уравнение первого порядка в отличие от второго порядка (8). Подставляя (9) в краевые условия и полагая $t=0$ и $t=1$ соответственно, для коэффициентов (9) имеем:
$x_0(0)=\alpha, \quad x_0(1)=\beta, \quad x_k(0)=x_k(1)=0, \quad k=1,2,3,...$

Аналогичная подстановка в (8) дает следующие результаты:

$$\varepsilon\frac{d^2}{dt^2}\left(x_0(t)+\varepsilon\cdot x_1(t)+\varepsilon^2x_2(t)+...\right)+\left(1+\varepsilon^2\right)\frac{d}{dt}\left(x_0(t)+\varepsilon\cdot x_1(t)+\varepsilon^2x_2(t)+...\right)+$$
$$+\left(1-\varepsilon^2\right)\left(x_0(t)+\varepsilon\cdot x_1(t)+\varepsilon^2x_2(t)+...\right)=0,$$

Все уравнения для $x_k(t)$ оказываются первого порядка в отличие от (8). Без объяснения причин воспользуемся везде вторым краевым условием для $t=1$

$\varepsilon^0)$ $\quad \dfrac{dx_0}{dt}+x_0=0 \;\Rightarrow\; x_0=\beta\cdot e^{1-t};$

$\varepsilon^1)$ $\quad \dfrac{dx_1}{dt}+x_1=-\dfrac{d^2x_0}{dt}=-\beta\cdot e^{1-t} \;\Rightarrow\; x_1=\beta\cdot e^{1-t}\cdot(1-t)$

Как результат, получаем разложение,

$$x(t,\varepsilon)=\beta\cdot e^{1-t}+\varepsilon\cdot\beta\cdot e^{1-t}\cdot(1-t)+... \tag{10}$$

которое явно учитывает не все составляющие решения (8). Рассмотрим причины этого.

Характеристическое уравнение для (8) и его корни имеют вид

$$\varepsilon\cdot\lambda^2+\left(1+\varepsilon^2\right)\cdot\lambda+\left(1-\varepsilon^2\right)=0, \quad \lambda_1=-1-\varepsilon, \quad \lambda_2=-\frac{1}{\varepsilon}+1. \tag{11}$$

Из (11) явно следует, что λ_1 вполне согласуется с разложением (10), а экспонента, отвечающая λ_2, быстро убывает в пределах пограничного слоя, длина которого порядка ε. Само уравнение (8) при этом является жестким.

Разложение (10) хорошо описывает поведение решения вне пограничного слоя, т.е. почти на всем промежутке. Этим и объясняется тот факт, почему мы воспользовались вторым краевым условием при $t=1$. На практике в большинстве случаев такого описания вполне достаточно. Но, если все же необходимо построить разложение, описывающее все решение, включая пограничный слой, используют следующий подход.