Тема 5. Анализ нелинейных моделей (продолжение)

Хаотические (странные) аттракторы.

Обратимся вновь к системе нелинейных уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \tag{1}$$

и введем несколько определений.

Определение 1. Множество $\mathbf{M} \subset \mathbf{R}^n$ называется ***инвариантным множеством*** системы (1), если любая траектория его решения, имеющая с $\mathbf{M}$ хотя бы одну общую точку, целиком лежит в $\mathbf{M}$.

Простейшими примерами, удовлетворяющими этому определению, являются ранее рассмотренные стационарные точки и предельные циклы.

Определение 2. Замкнутое инвариантное множество $\mathbf{M}$ решения $\mathbf{x}(t)$ называется ***устойчивым по Ляпунову***, если

$$\left(\forall \varepsilon > 0\right)\left(\exists \delta \in (0, \varepsilon)\right)\left(\forall t \geq 0\right)\left(\rho\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{M}\right) \leq \delta \;\Rightarrow\; \rho\left(\mathbf{x}, \mathbf{M}\right) \leq \varepsilon\right) \tag{2}$$

Определение 3. Замкнутое инвариантное множество $\mathcal{A}$ называется ***аттрактором***, если существует открытое множество $\mathbf{U}$ такое, что $\mathcal{A} \in \mathbf{U}$ и

$$\left(\forall \mathbf{x}_0 \in \mathbf{U}\right)\left(\rho\left(\mathbf{x}, \mathcal{A}\right) \underset{t \to \infty}{\to} 0\right). \tag{3}$$

При этом $\mathbf{U}$ называется областью притяжения аттрактора $\mathcal{A}$.

Определение 4. Инвариантное множество $\mathbf{M}$ называется ***внутренне неустойчивым*** (или ***хаотическим***), если любая траектория, которая лежит в $\mathbf{M}$, является неустойчивой по Ляпунову так, что первоначально близкие траектории, лежащие в $\mathbf{M}$, разбегаются друг от друга с экспоненциальной скоростью.

Явление Фейгенбаума.

Рассмотрим разностное уравнение

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad f(x) = 4\varepsilon \cdot x(1 - x), \quad x \in [0,1], \quad \varepsilon \in [0,1] \tag{4}$$

где ε – параметр. Квадратичная функция $f(x)$ достигает своего максимального значения при $x = \frac{1}{2}$:

$$\max f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \varepsilon.$$

Таким образом, значения x_k никогда не покидают единичного промежутка.

Уравнение (4) имеет две стационарные точки:

$$x_1^{стац} = 0, \quad x_2^{стац} = 1 - \frac{1}{4\varepsilon}. \tag{5}$$

Обратимся к различным значениям ε.

Промежуток 1. $\varepsilon \in [0, 0.25)$. Вторая стационарная точка $x_2^{стац}$ не существует на промежутке $[0,1]$. Рассмотрим устойчивость $x_1^{стац}$. Чтобы нулевая точка была асимптотически устойчивой, производная $f'(0)$ должна быть по модулю меньше единицы, что реально имеет место для $\varepsilon \in [0, 0.25)$:

$$f'(x) = 4\varepsilon - 8\varepsilon \cdot x, \quad f'(0) = 4\varepsilon < 1 \tag{6}$$

Таким образом, $x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ для всех x_0.

Промежуток 2. $\varepsilon \in [0.25, 0.75)$. Нулевая стационарная точка в соответствии с (6) становится неустойчивой, однако появляется вторая стационарная точка $x_2^{стац}$, которая, как следует из (6) и (7) асимптотически устойчива и все решения сходятся к ней:

$$f'(x_2^{стац}) = 4\varepsilon - 8\varepsilon \cdot x_2^{стац} = 4\varepsilon - 8\varepsilon \cdot \left(1 - \frac{1}{4\varepsilon}\right) = 2 - 4\varepsilon, \quad \left|f'(x_2^{стац})\right| \le 1. \tag{7}$$

Промежуток 3. $\varepsilon \in [0.75, 0.86237...)$. Обе стационарные точки становятся неустойчивыми и можно показать, что появляются такие две точки x_1^* и x_2^*, что

$$x_2^* = f(x_1^*), \quad x_1^* = f(x_2^*),$$

и имеет место периодический аттрактор с периодом 2.

Промежуток 4. $\varepsilon \in [0.86237..., 0.88602...)$. Периодический аттрактор с периодом 2 становится неустойчивым, но появляется периодический аттрактор с периодом 4:

$$x_2^{**} = f(x_1^{**}), \quad x_3^{**} = f(x_2^{**}), \quad x_4^{**} = f(x_3^{**}), \quad x_1^{**} = f(x_4^{**}).$$

Промежуток 5. $\varepsilon \in [0.88602..., 0.89218...)$. Периодический аттрактор с периодом 4 становится неустойчивым, но появляется периодический аттрактор с периодом 8.

Описанный процесс удвоения периода продолжается и далее вплоть до $\varepsilon_\infty = 0.892486418...$. При этом длина каждого очередного промежутка сокращается в $\delta = 4.669201609...$раз.

В результате последовательной бифуркации удвоения периода («субгармонический каскад») возникают хаотические аттракторы. Значения $\varepsilon > \varepsilon_\infty$ характеризуются сочетанием периодических аттракторов с режимом, который называют «хаосом». В последнем случае x_k порождаются так, что они не повторяются, зависят от x_0, и две первоначально близкие точки порождают траектории, расходящиеся друг от друга. Принципиальная непредсказуемость хаотического режима при $\varepsilon > \varepsilon_\infty$ еще не означает, что он полностью лишен определенного порядка, хотя этот порядок, на первый взгляд, и не виден.

Одной из характеристик хаотических аттракторов является их фрактальная размерность.

Фрактальные размерности.

Рассмотрим множество точек в $\mathbf{R}^n$. Пусть $N(\varepsilon)$ - наименьшее количество гиперкубов с ребром ε, необходимое для покрытия этого множества. Размерность Хаусдорфа-Безиковича D (***фрактальная размерность***) определяется как предел

$$D = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \tag{8}$$

если он существует. Эта величина обобщает обычную геометрическую размерность и позволяет характеризовать объем «фрактальных» объектов.

Пример 1. Объект – точка. $N(\varepsilon) = 1 \Rightarrow D = 0$ (как и ожидалось!)

Пример 2. Объект – отрезок линии длиной L. $N(\varepsilon) = \dfrac{L}{\varepsilon} \Rightarrow D = 1$ (как и ожидалось!)

Пример 3. Объект – поверхность площадью S. $N(\varepsilon) = \dfrac{S}{\varepsilon^2} \Rightarrow D = 2$ (ожидаемо!)

Пример 4. Объект – канторовское множество. Из первоначального отрезка единичной длины удаляется центральная треть. На втором шаге у каждого из оставшихся отрезков удаляется центральная треть и т.д. Таким образом, последовательно имеем:

$$\varepsilon = \frac{1}{3}, \quad N(\varepsilon) = 2;$$

$$\varepsilon = \frac{1}{9}, \quad N(\varepsilon) = 4;$$

....

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{3}\right)^m, \quad N(\varepsilon) = 2^m.$$

Переходя к пределу $m \to \infty$, что соответствует $\varepsilon \to 0$, получаем

$$D = \lim_{m \to \infty} \frac{\ln 2^m}{\ln 3^m} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.63.$$

Пример 5. Объект – «снежинка» или «кривая Коха». Она обладает необычным свойством, которое имеют сечения Пуанкаре для многих хаотических аттракторов: фигура имеет *бесконечный периметр*, ограничивающий *конечную* *область* плоскости. Исходная фигура – равносторонний треугольник с единичной стороной. На первом шаге каждую сторону разделяем на три равные части и заменяем средний интервал равносторонним треугольником без этого сегмента. В результате образуется ломаная, состоящая из четырех звеньев длины 1/3. На следующем шаге повторяем операцию для каждого из четырёх получившихся звеньев, увеличивая периметр опять в 4/3 раза, и т. д. Предельная кривая и есть кривая Коха. Для ребра гиперкуба и $N(\varepsilon)$ последовательно имеем

$$\begin{aligned}
&\varepsilon = 1, \quad N(\varepsilon) = 3; \\
&\varepsilon = \frac{1}{3}, \quad N(\varepsilon) = 3 \cdot 4; \\
&\varepsilon = \frac{1}{9}, \quad N(\varepsilon) = 3 \cdot 4^2; \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\varepsilon = \left(\frac{1}{3}\right)^m, \quad N(\varepsilon) = 3 \cdot 4^m.
\end{aligned}$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, что соответствует $\varepsilon \to 0$, получаем

$$D = \lim_{m\to\infty} \frac{\ln\left(3 \cdot 4^m\right)}{\ln\left(3^m\right)} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.26 .$$

Аттрактор Лоренца.

Модель Лоренца описывает процесс конвекции для слоя жидкости бесконечной протяженности по горизонтали, подогреваемого снизу. Исходная задача в частных производных сводится к следующей системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = \sigma\left(y - x\right); \\
&\frac{dy}{dt} = -x \cdot z + r \cdot x - y; \\
&\frac{dz}{dt} = x \cdot y - b \cdot z;
\end{aligned} \tag{9}$$

где $\sigma,\ r,\ b$ – параметры. Лоренц использовал эту модель как грубую модель земной атмосферы. Это первый хаотический аттрактор (1963г.), который был открыт исследователями.

Приравнивая нулю производные в (9), получаем три стационарные точки. *Первая точка*: x = y = z = 0. Матрица Якоби системы (9)

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix} \tag{10}$$

в нулевой точке имеет вид

$$\mathbf{J}(0) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Из ее характеристического уравнения

$$\det\left(\mathbf{J}(0) - \lambda\mathbf{E}\right) = \left(-b-\lambda\right)\left(\lambda^2 + (\sigma+1)\lambda + \sigma - \sigma\cdot r\right) = 0$$

видно, что для $r<1$ нулевая точка устойчива, а при $r>1$ – нет.
Вторая и третья стационарные точки расположены симметрично и определяются равенствами

$$x = y = \pm\sqrt{\left(r-1\right)\cdot b}; \quad z = r-1. \tag{12}$$

Они существуют только для $r>1$. Оценим их устойчивость, подставляя (12) в (2) и записывая соответствующее характеристическое уравнение

$$\det\left(\mathbf{J} - \lambda\mathbf{E}\right) = -\left(\lambda^3 + (\sigma+b+1)\cdot\lambda^2 + b\cdot(r+\sigma)\cdot\lambda + 2\sigma\cdot b\cdot(r-1)\right) = 0\,. \tag{13}$$

Свободный член полинома не может обращаться в нуль, поэтому вещественная бифуркация невозможна. Рассмотрим условия комплексной бифуркации. Если полином третьей степени $P(\lambda)$ имеет чисто мнимую пару корней $\pm i\omega$ и вещественный корень α, то его можно записать в виде

$$P(\lambda) = (\lambda-\alpha)(\lambda^2+\omega^2) = \lambda^3 - \alpha\cdot\lambda^2 + \omega^2\cdot\lambda - \alpha\cdot\omega^2. \tag{14}$$

Легко заметить, что коэффициент при λ^2, умноженный на коэффициент при λ, равен свободному члену полинома. По этой причине для (13) запишем

$$(\sigma+b+1)\cdot b\cdot(r+\sigma) = 2\sigma\cdot b\cdot(r-1)\,,$$

откуда получаем

$$r = \frac{\sigma+b+3}{\sigma-b-1}\sigma\,. \tag{15}$$

Например, для $\sigma=10,\ b=\dfrac{8}{3}$ по формуле (15) вычисляем $r=\dfrac{470}{19}\approx 24.74$.

Оказывается, что на промежутке $r\in[24.06,\ 24.74]$ существует три аттрактора: две стационарные точки и один хаотический аттрактор. При $24.74<r<30.1$ существует лишь хаотический аттрактор с фрактальной размерностью $D=2.06$, а при $r>30.1$ имеет место чередование хаотических аттракторов и периодических решений.