МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
"МИРЭА - Российский технологический университет"
РТУ МИРЭА

Институт искусственного интеллекта

Кафедра высшей математики

КУРСОВАЯ РАБОТА
по дисциплине
«Автоматы и алгоритмы»

Тема курсовой работы

«Вычисление количества слов определенной длины, переводящих конечный автомат из одного заданного состояния в другое»

Студент группы КМБО-07-22 *Невский В.Е.*

Руководитель курсовой работы *Драгилева И.П.*

Работа представлена к защите «_1_» _06_ 2024 г.

(подпись студента)

«Допущен к защите» «_6_» _06_ 2024 г.

(подпись руководителя)

МОСКВА – 2024

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
"МИРЭА - Российский технологический университет"

РТУ МИРЭА

Институт искусственного интеллекта

Кафедра высшей математики

Утверждаю
Заведующий
кафедрой______________ *А.В.Шатина*

«_6_» __03______2024 г.

ЗАДАНИЕ
на выполнение курсовой работы
по дисциплине «Автоматы и алгоритмы»

Студент Невский Владислав Евгеньевич Группа *КМБО-07-22*

1. Тема: «Вычисление количества слов определенной длины, переводящих конечный автомат из одного заданного состояния в другое»

2. Исходные данные: Таблица переходов автомата, вариант №

3. Перечень вопросов, подлежащих обработке, и обязательного графического материала:

1) Найти количество слов, заданной длины 3, в алфавите {a, b, c, d} переводящих данный автомат из состояния 0 в состояние 2.
2) Выписать все слова длины 3, проверить соответствие количества формуле.

4. Срок представления к защите курсовой работы:до « 5 » _июня__ 2024 г.

Задание на курсовую работу выдал	«_1_»__03__2024г.	______________	(Драшнев)
Задание на курсовую работу получил	«_1_»__03__2024г.	______________	(Невский)

ОТЧЕТ
о курсовой работе
студента 2 курса учебной группы КМБО-07-22
института искусственного интеллекта
Российского технологического университета (МИРЭА)
Невского В.Е.

---

1. Задание на курсовую работу выполнил
   В полном объеме
   (указать: в полном объеме или частично)
2. Подробное содержание выполненных задач в ходе курсовой работы и достигнутые результаты:
   - Проведен обзор основных понятий теории конечных автоматов и связанных с ними регулярных языков.
   - Получена производящая функция языка, принимаемого исходным автоматом. Доказана вещественность коэффициентов формального ряда (производящей функции языка). Результат, полученный теоретически, совпал с результатом (количеством слов), вычисленным с помощью эксперимента.

Студент заслуживает оценки «отлично».

Руководитель курсовой работы

Старший преподаватель кафедры Высшей математики	Дрш	Драгилева И.П.
(должность)	(подпись)	(фамилия и инициалы)

« 6 » 06 2024 г.

Оглавление

Задание на курсовую работу

Требуется найти число слов длины n в алфавите a,b,c,d, которые переводят данный в условии автомат из состояния 0 в состояние 2 (в условии задана таблица переходов автомата). Выписать все слова длины n = 3, проверить соответствие количества формуле.

Вариант №135.

	0	1	2
a	1	2	0
b	2	2	0
c	0	0	0
d	1	2	2

Глава 1. Теоретическая часть.

Перед началом выполнения задания на курсовую работу следует ознакомиться с основными определениями предметной области “Теория автоматов”.

1.1. Конечные автоматы. Основные понятия и определения.

Теория автоматов — это раздел дискретной математики, который исследует математические модели, преобразующие дискретную информацию, известные как формальные автоматы, а также задачи, которые они могут решать.

Определим основные термины:

Символ — неделимая единица информации.

Слово — строка символов, создаваемая через конкатенацию.

Алфавит — конечное множество символов.

Язык — множество слов, которые могут быть составлены из символов данного алфавита. Язык может быть конечным или бесконечным.

Перейдём к определению автомата.

Формальный автомат представляет собой пятерку $A = \{X, Y, Q, \varphi, \psi\}$, где:

X — входной алфавит.

Y — выходной алфавит.

Q — множество внутренних состояний.

$\varphi: X \times Q \to Q$ — функция переходов.

$\psi: X \times Q \to Y$ — функция выходов.

Конечный автомат(далее — КА) — это формальный автомат, у которого множества X, Y и Q конечны.

Существует два основных типа формальных автоматов:

Автомат Мура — выходная функция зависит только от состояния автомата. То есть выполняется условие $\psi(q, x) = \mu(q)$.

Автомат Мили — выходная функция зависит как от состояния автомата, так и от входного символа.

1.2. Способы представления конечных автоматов.

КА можно представлять различными способами:

Табличный способ: используется таблица переходов, где столбцы соответствуют текущим состояниям, строки — входным символам, а сами ячейки — новым состояниям.

$q(t-1)$ / $x(t)$	q_1	q_2	…	q_k	…	q_r
x_1						
…						
x_l				q_p / y_m		
…						
x_n						

Таблица 1. Табличный способ представления КА.

Графический способ: применяется ориентированный граф (диаграмма Мура или диаграмма состояний), где вершины обозначают состояния, а ребра — переходы между ними в зависимости от входных символов.

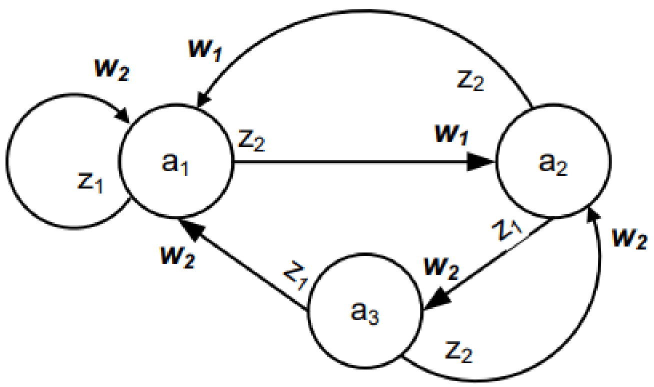

Рисунок 1. Пример диаграммы Мура[1].

Аналитический способ: включает построение системы канонических уравнений, кодирующих состояния и символы двоичными числами. В результате получаются булевы функции для переходов и выходов. Система канонических уравнений:

$$\begin{cases} \varphi\left(\vec{x}(t), \vec{q}(t-1)\right) = \vec{q}(t), \\ \psi\left(x(t), q(t-1)\right) = y(t). \end{cases}$$

1.3. Регулярные языки и их связь с автоматами.

Пусть есть входной алфавит $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, тогда элементарные языки: $\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_n\}, e$, где e — немая буква.

X^* — входной словарь.

Пусть $L_1, L_{2,}, L$ — регулярные языки над X^*. Тогда определены следующие регулярные операции:

1) Объединение $L_1 \cup L_2 = \{\alpha | \alpha \in L_1$ либо $\alpha \in L_2\}$,
2) Конкатенация $L_1 L_2 = \{\alpha | \alpha = \alpha_1\, a_2\,,\ \alpha_1 \in L_1, a_2 \in L_2\}$,
3) Итерация $L^* = \{e, L, LL, LLL, \dots\}$.

Регулярные языки — это языки, которые можно получить с помощью конечного числа регулярных операций над элементарными языками.

Определим источник языка.

Источником языка называется ориентированный граф, в котором каждому ребру соответствует либо e, либо буква из X. Выделено множество вершин, называемых начальными, а также выделено множество вершин, называемых финальными(конечными). Некоторые начальные и конечные вершины могут совпадать.

С помощью источника можно порождать языки, проходя по рёбрам из начального состояния в конечное. В итоге мы получим множество слов, которое порождает язык L.

Теперь введём понятие автоматной грамматики.

Грамматикой G называется следующая упорядоченная четвёрка объектов $G = (N, T, S, P)$, где

N — конечное множество нетерминальных символов, называемых переменными(или нетерминалами),

T — конечное множество терминальных символов, называемых терминалами,

S — начальный символ, $S \epsilon N$,

P — конечное множество правил вывода, называемых продукциями.

Каждая продукция $p \epsilon P$ имеет вид $\propto \rightarrow \beta$, где $\propto \epsilon (N \cup T)^{+}$, $\beta \epsilon (N \cup T)^{*}$.

Предполагается, что множества N и T непустые и не имеют пересечений.

Конечный язык L называется автоматным, если существует автомат Мура, который его порождает, то есть автомат, который полностью описывает данный язык.

Автоматная грамматика, автоматный язык и направленный автомат Мура взаимосвязаны, так как, согласно теореме Клини, любой автоматный язык является регулярным. Зная регулярный язык, можно построить грамматику для этого языка. Таким образом, обладая информацией о автоматном языке и соответствующей ему автоматной грамматике, всегда возможно создать направленный автомат Мура.

Последнее, что нам необходимо — это производящие функции языков.

Пусть A - алфавит, а A^{*}- входной словарь. Теперь определим функцию h на словах из входного словаря A^{*}. На однобуквенных $x \in A^{*}$, $h(x) = z, h(e) = 1$. Если u, v - слова из входного словаря, то $h(uv) = h(u)h(v)$, следовательно $h(x)$ – гомоморфизм.

Пусть есть некоторый язык $L \epsilon A^{*}$, тогда для любого $w \epsilon L$, $h(w)$ является одночленом, а $h(L)$ — формальным степенным рядом.

Теперь составим определение производящих функций языка.

Производящая функция языка L — это производящая функция последовательности $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$, вида

$h_L(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$, где a_n – количество слов длины "n" в языке L.

1.4. Область применения конечных автоматов.

КА применяются в различных областях:

Компьютерные науки: КА используются для создания частей компиляторов для различных языков программирования, анализе и синтезе цифровых схем.

Теория вычислений: КА применяются для моделирования и анализа алгоритмов.

Лингвистика: КА используются для анализа синтаксиса и семантики языков, также хорошим примером служит распознование речи.

Инженерия: КА часто применяются в разработке систем управления и автоматизации.

Глава 2. Решение задачи.

Чтобы решить поставленную задачу, необходимо найти производящую функцию языка, с помощью которой мы найдём количество слов любой длины(в том числе и заданной).

Первым делом построим диаграмму Мура для заданной таблицы переходов исходного автомата(начальная вершина — 0, конечная — 2).

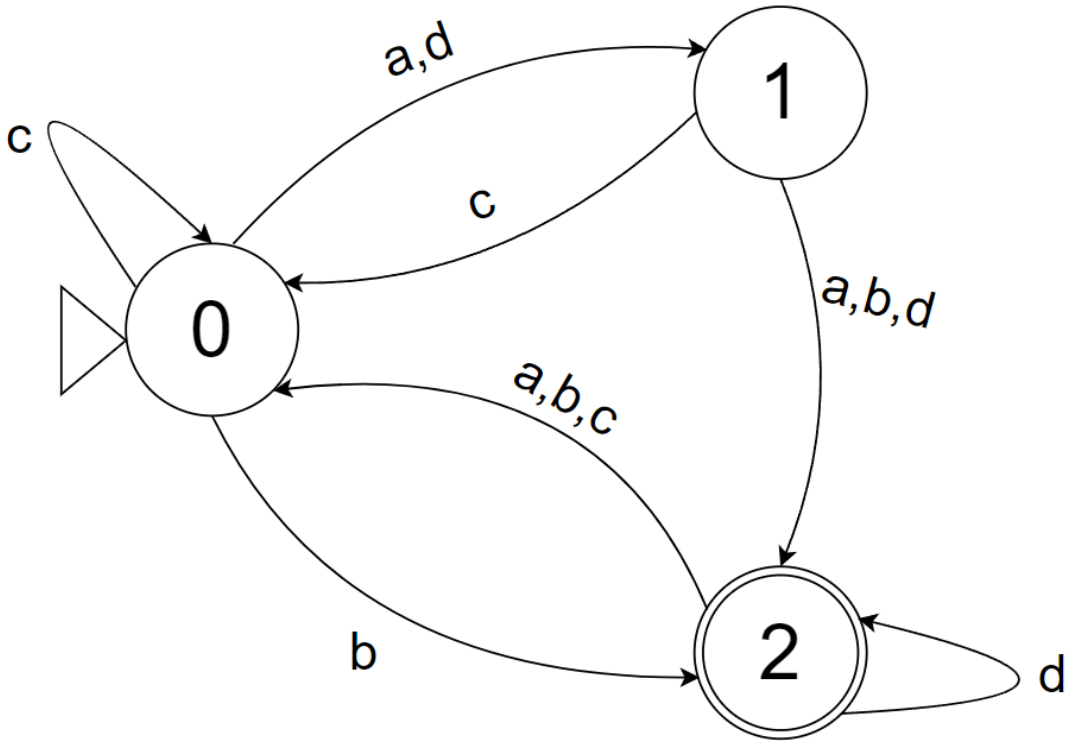

Рисунок 2. Диаграмма Мура для заданного автомата.

Так как данный автомат является детерминированным, то диаграмма Мура совпадает с источником языка и мы можем построить грамматику. В конечном итоге грамматика примет следующий вид:

$S \to cS|aS_1|dS_1|bS_2|b$

$S_1 \to cS_1|aS_2|bS_2|dS_2|a|b|d$

$S_2 \to aS|bS|cS|dS_2|d$

Тогда искомый язык L, который выводится из аксиомы, равен языку L_0, который удовлетворяет системе:

$$\begin{cases} L_0 = cL_0 \cup aL_1 \cup dL_1 \cup bL_2 \cup b, \\ L_1 = cL_1 \cup aL_2 \cup bL_2 \cup dL_2 \cup a \cup b \cup d, \\ L_2 = aL_0 \cup bL_0 \cup cL_0 \cup dL_2 \cup d. \end{cases}$$

Далее применим гомоморфизм $h(x) = z$ к словам языка. Пользуясь свойствами производящих функций языков, запишем $\forall L \; h(L) = f_L(z)$:

$$\begin{cases} f_0(z) = zf_0(z) + 2zf_1(z) + zf_2(z) + z, \\ f_1(z) = zf_1(z) + 3zf_2(z) + 3z \qquad , \\ f_2(z) = 3zf_0(z) + zf_2(z) + z \qquad . \end{cases}$$

Теперь задача состоит в том, чтобы представить f_0 (z) как функцию от z, используя приведенную выше систему. После некоторых преобразований в системе, получаем:

$$f_0(z) = \frac{6z^2+z}{-16z^3-4z^2-2z+1} = \frac{24z^2+6z}{(1-4z)\left(4z-i\sqrt{3}+1\right)(4z+i\sqrt{3}+1)}.$$

Теперь воспользуемся методом неопределённых коэффициентов и разложим нашу дробь на простейшие:

$$f_0(z) = \frac{5}{14(1-4z)} + \frac{i\sqrt{3}-12}{21(4z-i\sqrt{3}+1)} + \frac{-i\sqrt{3}-12}{21(4z+i\sqrt{3}+1)}.$$

Теперь применяем разложение:

$$f_0(z) = \frac{5}{14}\sum_{n=0}^{\infty} 4^n z^n +$$

$$+ \frac{i\sqrt{3}-12}{21\left(1-i\sqrt{3}\right)}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n z^n}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^n}) + \frac{-i\sqrt{3}-12}{21\left(1+i\sqrt{3}\right)}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n z^n}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^n}.$$

Получаем, что коэффициент a_n при степени n равен количеству слов длины n.

Необходимо доказать, что коэффициенты всегда будут действительными.

Вынесем общую часть и избавимся от комлпексных частей в знаменателях домножением на сопряжённые:

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty}((-1)^n z^n * (\frac{5}{14}4^n(-1)^n + \frac{\left(-11i\sqrt{3}-15\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)^n + \left(11i\sqrt{3}-15\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)^n}{21*4}).$$

Числитель 2 слагаемого содержит мнимую часть, следовательно задача сводится к доказательству того, что он равен 0.

Представим его в показательной форме:

$$(2e^{\frac{\pi i}{3}})^n \left(14\sqrt{3}e^{i(\pi - acrtg\left(\frac{11\sqrt{3}}{15}\right))}\right) + \left(14\sqrt{3}e^{i(2\pi - acrtg\left(\frac{11\sqrt{3}}{15}\right))}\right)(2e^{i(2\pi - \frac{\pi}{3})})^n.$$

Сгруппируем:

$$2^n 14\sqrt{3}(e^{i\left(\frac{\pi n}{3}+\pi+arctg\left(\frac{11\sqrt{3}}{15}\right)\right)} + e^{i(2\pi n - \frac{\pi n}{3}+2\pi - acrtg\left(\frac{11\sqrt{3}}{15}\right))})$$

Теперь представим всё в тригонометрической форме(коэффициент перед скобкой отбросим, поскольку он вещественный и не равен 0):

$$\cos\left(\frac{\pi n}{3} + \pi + arctg\left(\frac{11\sqrt{3}}{15}\right)\right) + isin\left(\frac{\pi n}{3} + \pi + acrtg\left(\frac{11\sqrt{3}}{15}\right)\right) + \cos\left(2\pi n - \frac{\pi n}{3} + 2\pi - arctg\left(\frac{11\sqrt{3}}{15}\right)\right) - isin(2\pi n - \frac{\pi n}{3} + 2\pi - arctg\left(\frac{11\sqrt{3}}{15}\right)).$$

Косинусы содержат только вещественную часть, нас интересуют только синусы. Вынесем i и воспользуемся формулой разности синусов:

$$i(2\cos\left(\frac{\frac{\pi n}{3}+\pi+arctg\left(\frac{11\sqrt{3}}{15}\right)+2\pi n-\frac{\pi n}{3}+2\pi-arctg\left(\frac{11\sqrt{3}}{15}\right)}{2}\right)*$$

$$*\sin(\frac{\frac{\pi n}{3}+\pi+arctg\left(\frac{11\sqrt{3}}{15}\right)-2\pi n+\frac{\pi n}{3}-2\pi+arctg\left(\frac{11\sqrt{3}}{15}\right)}{2})) = i(\cos(\pi n + \frac{3\pi}{2})\sin(\ldots)) = 0.$$

Получаем, что коэффициент при вещественной части будет всегда равен 0.

Теперь посчитаем коэффициент a_3:

$$a_3 = -\left(\frac{5*4^3*(-1)}{14} + \frac{(-11i\sqrt{3}-15)(1+i\sqrt{3})^3+(11i\sqrt{3}-15)(1-i\sqrt{3})^3}{21*4}\right) =$$

$$= \frac{160}{7} - \frac{88i\sqrt{3}+120-88i\sqrt{3}+120}{21*4} = \frac{140}{7} = 20.$$

Удостоверимся в правильности наших вычислений методом построения графа путей вручную из начального в конечное состояние (рис.3).

Получаем 20 слов длины 3:

$$\{ccb, caa, cab, cad, cda, cdb, cdd, cbd, acb, dcb, aad, abd, add, dad, dbd, ddd, bab, bbb, bcb, bdd\}.$$

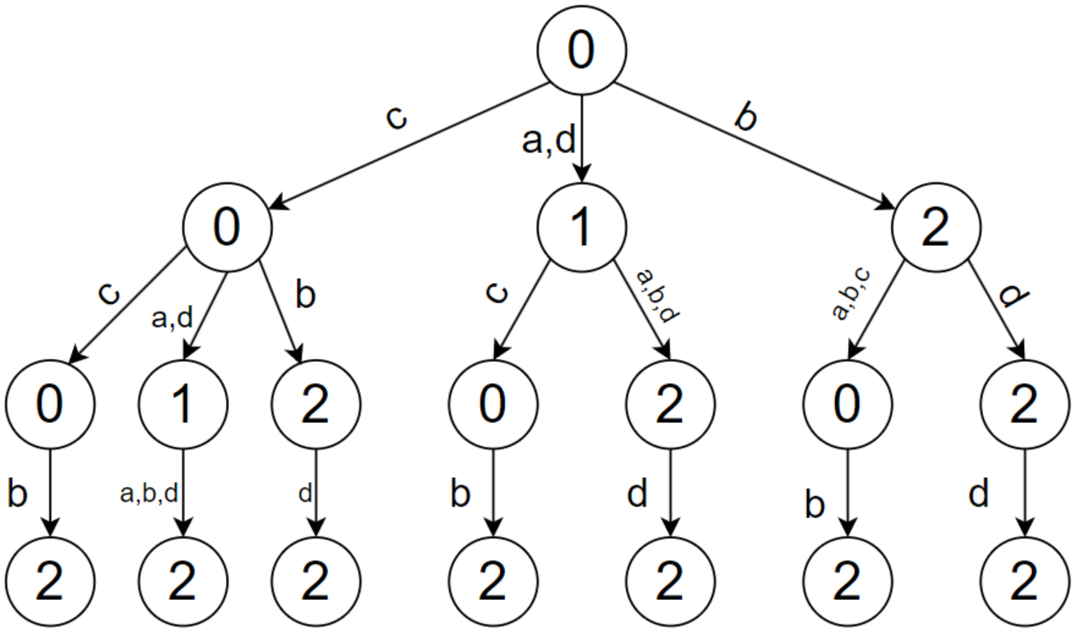

Рисунок 3. Граф переходов из состояния 0 в состояние 2.

Заключение

В рамках курсовой работы определили основные понятия теории автоматов и научились применять их для решения задачи по определении количества слов длины n в заданном алфавите {a,b,c,d}, которые переводят автомат из начального состояния (0) в конечное (2). Для решения задачи использовали нахождение производящей функции языка. Убедились в правильности выполнения работы полным перебором. В заключение можно сказать, что КА являются мощным инструментом для решения широкого спектра задач в разных областях.

Список литературы

1. ОжигановА.А. Теория автоматов. Учебное пособие - СанктПетербург: НИУ ИТМО, 2013.

2. А. Гилл Введение в теорию конечных автоматов [Текст] / А. Гилл —. —: Издательство Наука, 1966 — 272 с.

3. Федосеева, Л. И., Адилов, Р. М., Шмокин, М. Н. Основы теории конечных автоматов и формальных языков [Текст] / Л. И. Федосеева, Р. М. Адилов, М. Н. Шмокин —. — Пенза: Изд-во Пенз. гос. технол. ун-та, 2013 — 136 с.

4. Лаздин А.В. Формальные языки, грамматики, автоматы: Учебное пособие. - Санкт-Петербург: Университет ИТМО, 2019. - 99 с. - экз. https://books.ifmo.ru/book/2312/formalnye_yazyki,_grammatiki,_avtomaty:_uchebnoe_posobie..htm