Setul 1

Problema 1. Fie $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ polinoamele ortogonale Legendre monice.

(a) Arătaţi că polinoamele
$$\pi_k^+(t^2) = \pi_{2k}(t)$$
sunt ortogonale monice pe $[0,1]$ în raport cu ponderea $w(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$. (1p)

(b) Stabiliţi formula de cuadratură
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\sum_{k=1}^{n} A_k f\left(t_k^2\right) + R_n(f),$$
unde A_k şi t_k, $k = 1,\ldots 2n$ sunt coeficienţii şi respectiv nodurile formulei de cuadratură Gauss-Legendre cu $2n$ noduri. (2p)

(c) Implementaţi (în MATLAB) o formulă de cuadratură de tip Gauss pentru integrala $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x)\,\mathrm{d}x$ folosind ideea de la punctul (b). (2p)

(d) Folosind funcția de la punctul (c) calculaţi $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ cu 8 zecimale exacte. (1p)

Problema 2. Dorim să calculăm $\frac{1}{\sqrt{a}}$, pentru $a > 0$.

(a) Pornind de la o ecuaţie convenabilă şi folosind metoda lui Newton, deduceţi o metodă pentru calculul lui $\frac{1}{\sqrt{a}}$. (1p)

(b) Pentru ce valori ale lui x_0 metoda converge? (1p)

(c) Folosiți iterația de la (a) pentru a da o metodă de calcul al radicalului fără împarțiri. (1p).

Setul 2

Problema 3. Fie $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ polinoamele ortogonale Legendre monice.

(a) Arătaţi că polinoamele
$$\pi_k^-(t^2) = \frac{\pi_{2k+1}(t)}{t}$$
sunt ortogonale monice pe $[0,1]$ în raport cu ponderea $w(t) = \sqrt{t}$. (1p)

(b) Stabiliţi formula de cuadratură
$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\sum_{k=1}^{n} A_k t_k^2 f\left(t_k^2\right) + R_n(f),$$
unde A_k şi t_k, $k = 1,\ldots 2n$ sunt coeficienţii şi respectiv nodurile formulei de cuadratură Gauss-Legendre cu $2n+1$ noduri. (2p)

(c) Implementaţi (în MATLAB) o formulă de cuadratură de tip Gauss pentru integrala $\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\,\mathrm{d}x$ folosind ideea de la punctul (b). (2p)

(d) Folosind funcția de la punctul (c) calculaţi $\int_0^1 \sqrt{x}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ cu 8 zecimale exacte. (1p)

Problema 4. (a) Dacă $A > 0$, atunci $\alpha = \sqrt{A}$ este rădăcină a uneia dintre ecuațiile

$$x^2 - A = 0, \qquad \frac{A}{x^2} - 1 = 0.$$

Explicați de ce metoda lui Newton aplicată primei ecuații converge pentru o valoare de pornire arbitrară $x_0 > 0$, pe când aceeaşi metodă aplicată celei de-a doua ecuații produce iterații pozitive x_n ce converg către α numai dacă x_0 este într-un interval de forma $0 < x_0 < b$. Determinați b. (0.5p prima ecuație+1p a doua ecuație)

(b) Faceți acelaşi lucru ca la (a), dar pentru rădăcina cubică $\sqrt[3]{A}$ şi ecuațiile $x^3 - A = 0$, $\frac{A}{x^3} - 1 = 0$. (0.5p prima ecuație + 1p a doua ecuație)