CURS 1

2+1+1 $\qquad$ 9gf16za

Nota: 1 punct LCS
1 punct LCL
8 puncte LS - examen.

Bibliografie.

1) I. A. Rus, Ecuații diferențiale, ecuații integrale și sisteme dinamice, Ed. Transilvania Press, 1996
2) M. A. Șerban, Ecuații și sisteme de ecuații diferențiale, Presa Univ. Clujană, 2009.
3) D. Trif, Metode numerice în teoria sistemelor dinamice, Transilvania Press, 1997.
4) Gh. Micula, P. Pavel, Ecuații dif. și integrale prin probleme și exerciții, Ed. Dacia, 1989.
5) Gh. Moroșanu, Ecuații dif. Aplicații, Ed. Acad., 1989.

Introducere în teoria ecuațiilor diferențiale

1. Noțiunea de ecuație dif. și soluție

ecuație algebrică

$$x^2 - x = 0 \qquad\qquad x^2 - 2 = 0$$

$$x(x-1) = 0 \qquad\qquad x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1$$

Ecuație diferențială: ecuație funcțională (necunoscuta este o funcție) în care pe lângă funcția necunoscută apar și derivatele acesteia.

Exemple.

1) $y'(x) = y(x)$ $\qquad y' = y$

$y(x) \equiv 0$ este sol.

$y(x) = e^x$ este soluție

$\boxed{y(x) = ce^x, \ \underline{c \in \mathbb{R}}}$ — toate sol. ecuației

soluție generală

$(ce^x)' = c \cdot (e^x)' = c \cdot e^x$

$y' = \ \dots\dots \ = y.$

2) Problema primitivelor

$f \in C[a,b]$. — fct. dată

să se det $y \in C^1[a,b]$ a.î. $y'(x) = f(x), \ x \in [a,b]$.

$y(x) = \int_a^x f(s)\,ds + c \ , c \in \mathbb{R}$ — soluția generală a ecuației

In general în expresia unei ecuații diferențiale pot să apară și derivate de ordin superior a funcției necunoscute

$$y'' + y = 0$$

$$y''' \cdot y' + y + x \cdot y'' = x^2$$

Forma generală a unei ecuații dif.

(1) $$\boxed{F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0}$$ ecuație dif. în formă implicită

y – funcția necunoscută

x – variabila indep.

n – ordinul ecuației dif.

(2) $$\boxed{y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))}$$ ecuație dif. în formă explicită

(formă normală, formă Cauchy).

$f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

D_f – domeniul ecuației dif.

<u>Def</u>. O funcție $y \in C^n(I)$ este o soluție a ec. (2) dacă:

(i) $I \subseteq \mathbb{R}$ interval nedegenerat.

(ii) $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in D_f$, $\forall x \in I$.

(iii) $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$, $\forall x \in I$.

$n = 1$.

<u>Ecuația dif. de ord. 1</u>.

(3) $$\boxed{y'(x) = f(x, y(x))}$$, $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$

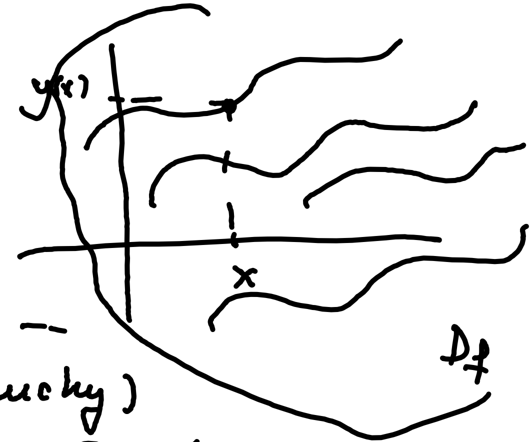
<u>Def</u>. O funcție $y \in C^1(I)$ este sol. a ec. (3) dacă:

(i) $I \subseteq \mathbb{R}$ interval nedeg.

(ii) $(x, y(x)) \in D_f$, $\forall x \in I$.

(iii) $y'(x) = f(x, y(x))$, $\forall x \in I$.

$G_y = \{ (x, y(x)) : x \in I \}$

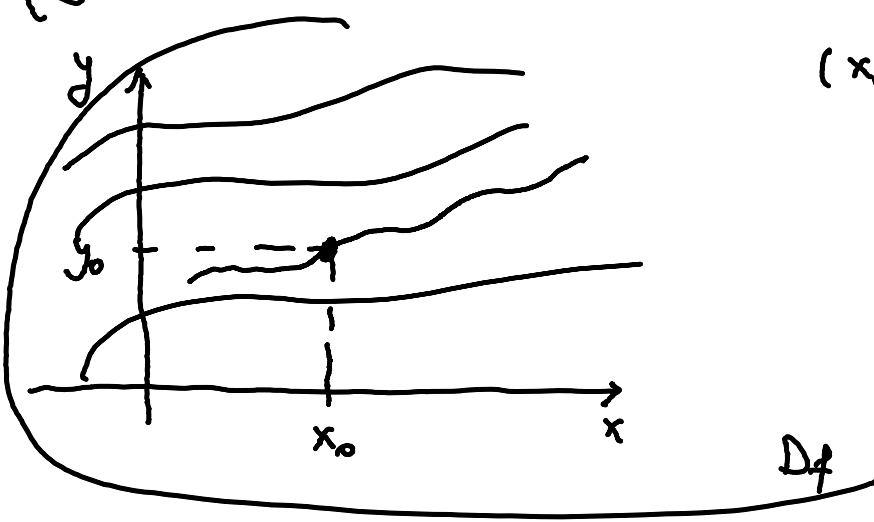


$$\boxed{(ii) \iff G_y \subseteq D_f.}$$

Probleme cu valori inițiale (probl. Cauchy)

$f : D_f \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in D_f$

$$(4)\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \longrightarrow \text{condiție inițială} \end{cases}$$



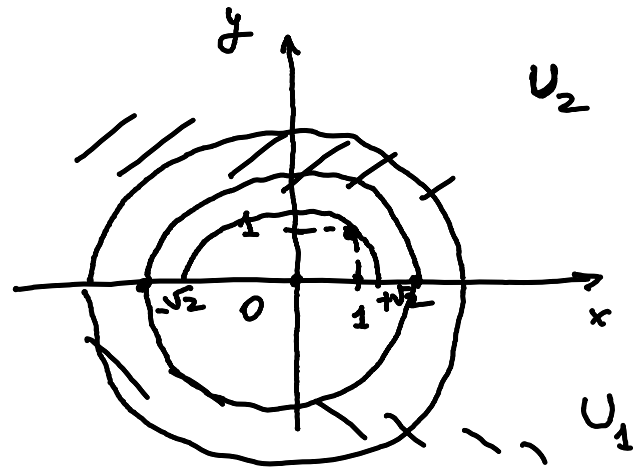
$(x_0, y_0) \in G_y$.

Dacă probl. Cauchy (4) are soluție unică atunci spunem că (x_0, y_0) este pct <u>de existență și unicitate</u>.
Dacă probl. Cauchy (4) are mai multe soluții atunci spunem că (x_0, y_0) este <u>punct singular</u>.

<u>Exemple</u>

1) $y' = -\dfrac{x}{y}$ $\qquad f(x, y) = -\dfrac{x}{y}$

$$D_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$$



$$D_f = U_1 \cup U_2$$

$$U_1 = \mathbb{R} \times (-\infty, 0)$$

$$U_2 = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$$

$$y' = -\frac{x}{y} \Rightarrow y \cdot y' = -x \;\big)\cdot 2.$$

$$2y \cdot y' = -2x$$

$$(y^2)' = -2x$$

$$y^2 = -\int 2x\,dx + c$$

$$\boxed{y^2 = -x^2 + c,\ c \in \mathbb{R}} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = c.$$

$$\boxed{y(x) = \pm\sqrt{-x^2 + c},\ c \in \mathbb{R}}$$

Problema Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{x}{y} \\ y(1) = 1 \end{cases} \qquad x_0 = 1,\ y_0 = 1 \qquad (x_0, y_0) = (1,1) \in U_2$$

$$(1,1) \in U_2 \Rightarrow y(x) = \sqrt{-x^2 + c}$$

$$y(1) = 1 \Rightarrow \sqrt{-1 + c} = 1$$

$$-1 + c = 1 \Rightarrow c = 2.$$

$\Rightarrow$ soluția probl. Cauchy $\quad y(x) = \sqrt{2-x^2}$

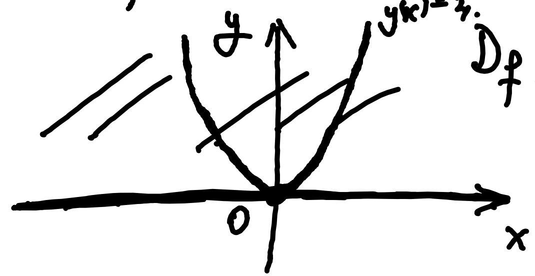
$y : (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \to \mathbb{R}$

$\underline{I} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ este cel mai mare interval pe care poate fi considerată soluția probl. Cauchy.
(soluție saturată)

$(1,1)$ este punct de existență și unicitate.

2) $\begin{cases} y' = \sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $\qquad f(x,y) = \sqrt{y} \qquad f : D_f \to \mathbb{R}$

$D_f = \mathbb{R} \times [0, +\infty)$



$y' = \sqrt{y}$ $\qquad y(x) \equiv 0$ este o sol. a ec. dif., chiar o sol. a probl. Cauchy

$y \neq 0$

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} = 1 \quad \Big| \cdot \frac{1}{2}.$$

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2}$$

$$(\sqrt{y})' = \frac{1}{2} \implies \sqrt{y} = \int \frac{1}{2} dx + c.$$

$$\sqrt{y} = \frac{1}{2}x + c.$$

$$\boxed{y(x) = \left(\frac{1}{2}x + c\right)^2, c \in \mathbb{R}}$$

$$y(0) = 0 \implies c^2 = 0 \implies c = 0$$

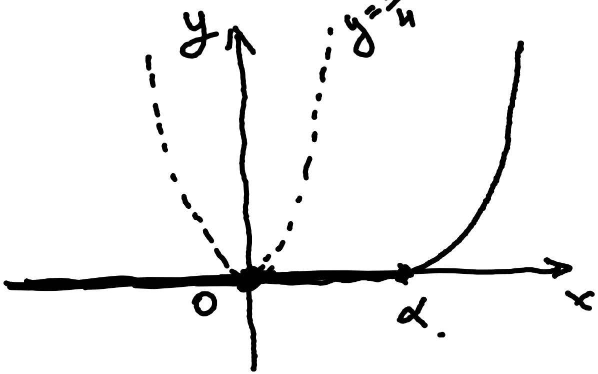
$$y(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = \frac{x^2}{4}.$$

probl. Cauchy are două soluții

$y(x) \equiv 0$

$y(x) = \frac{x^2}{4}$ $\implies$ $(0,0)$ este pct. singular.

$$y(x) = \left(\frac{1}{2}x + c\right)^2 = \frac{(x+2c)^2}{4} = \frac{(x+c_1)^2}{4}.$$



$\underline{\alpha > 0}$.

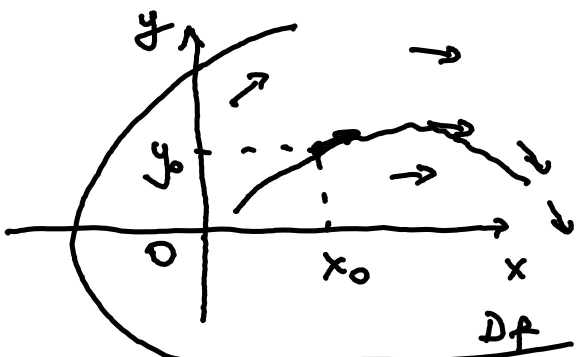
$$y_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \le \alpha \\ \frac{(x-\alpha)^2}{4}, & x > \alpha. \end{cases}$$

y_α sunt soluții ale probl. Cauchy

$\alpha > 0$

<u>interpretare geometrică</u>

$y' = f(x,y)$ $\quad f : D_f \to \mathbb{R}$



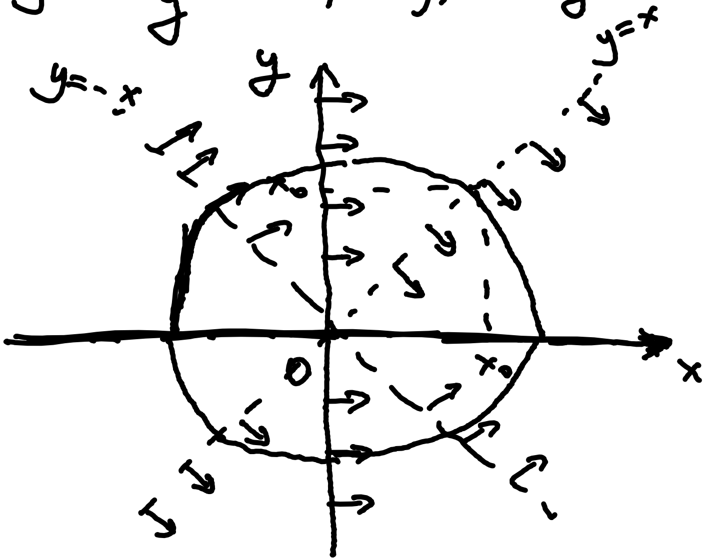
$(x_0, y_0) \in D_f$.

$$f(x_0, y_0) = y'(x_0)$$

valoarea $f(x,y)$ returnează panta tangentei la graficul unei soluții

Rezolvarea unei ecuații dif. revine la determinarea unei funcții $y=y(x)$ care se racordează la pantele tangentelor la grafic, det. de val. $f(x,y)$.

$$y' = -\frac{x}{y} \qquad f(x,y) = -\frac{x}{y} \qquad D_f = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$$



câmp de direcții

$M(x_0,y_0) \in$ primei bisect.

cu $x_0 = y_0$

$$f(x_0,y_0) = -\frac{x_0}{y_0} = -\frac{x_0}{x_0} = -1$$

pe axa Oy: $x=0$

$M \in Oy$

$$f(x,y) = -\frac{0}{y} = 0.$$

pe a doua bisect $y=-x$

$$f(x,y) = -\frac{x}{y} = \frac{-x}{-x} = 1$$

Sisteme de ecuații diferențiale

$y_1, y_2, \dots, y_n$ — fct necunoscute

$x \to$ variabila indep. $\qquad y_1 = y_1(x), \dots, y_n = y_n(x)$.

$$(5)\quad \begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \\ \vdots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \end{cases}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

$$(6)\quad \boxed{Y' = f(x, Y)}$$ forma vectorială a sist. (5).

$$f : D_f \to \mathbb{R}^n, \quad D_f \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

Def. O funcție $Y \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ este sol. a sist (5) dacă:

(i) $I \subseteq \mathbb{R}$ interval nedeg.

(ii) $(x, Y(x)) \in D_f$, $\forall x \in I$

(iii) $Y'(x) = f(x, Y(x))$, $\forall x \in I$

Obs: Orice ecuație dif. de ord. n poate fi scrisă în mod echivalent în forma unui sist. de n ecuații dif. de ord. 1.

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

$y = y_1$

$y' = y_2$

$y'' = y_3$

$\vdots$

$y^{(n-1)} = y_n$

$y_2 = y' = y_1' \Rightarrow$

$y_3 = y'' = (y')' = y_2' \Rightarrow$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$