Методы построения точечных оценок

Грауэр Л.В.

Методы построения точечных оценок

Метод подстановки

Метод моментов

Метод максимального правдоподобия

Метод подстановки

В качестве точечной оценки неизвестного параметра берем его выборочный аналог.

Метод моментов

Пусть

$\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ — неизвестный параметр распределения ξ

$X_{[n]} = (X_1, \ldots, X_n) \propto \xi$

$g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — борелевская функция

Определим

$$m(\theta) = Eg(\xi)$$

Положим

$$\overline{g} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(X_i)$$

Оценкой $\hat{\theta}$ неизвестного параметра θ, полученной *по методу моментов*, называется решение уравнения

$$m(\theta) = \bar{g},$$

если оно существует и единственно.

$$\hat{\theta}(X_{[n]}) = m^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)\right).$$

Если $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)^T \in \Theta \subset \mathbb{R}^k \Rightarrow$

$$g(x) = (g_1(x), \ldots, g_k(x))$$

Примеры

Пусть $\xi \sim Pois(\lambda)$, λ неизвестен

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Пусть $\xi \sim N(a, \sigma)$, a, σ неизвестны

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Свойства оценок, построенных по методу моментов

Если $m^{-1}(y)$ непрерывна на всей области определения, то оценка ММ сильно состоятельна.

Если $m'(\theta) \neq 0$ для всех $\theta \in \Theta$, тогда оценка ММ асимптотически нормальна с коэффициентом рассеяния $\frac{Dg(\xi)}{(m'(\theta))^2}$, где θ — истинное значение параметра.

Метод максимального правдоподобия

$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \Theta$

- Пусть ξ — непрерывная с.в. с $f_\xi(x, \theta)$
  Функцией правдоподобия выборки $X_{[n]}$ называется:

  $$L(X_{[n]}, \theta) = f_{X_{[n]}}(X_{[n]}|\theta)$$

- Пусть ξ — дискретная с.в. с $p_\xi(z, \theta)$.
  Функцией правдоподобия выборки $X_{[n]}$ называется:

  $$L(X_{[n]}, \theta) = p_{X_{[n]}}(X_{[n]}|\theta)$$

Оценкой максимального правдоподобия параметра θ называется оценка

$$\hat{\theta}(X_{[n]}) = \arg\max_{\theta \in \Theta} L(X_{[n]}, \theta),$$

если решение задачи максимизации существует и единственно.

Примеры

Пусть $\xi \sim U(0, \theta)$:

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & x \in [0, \theta]; \\ 0, & x \notin [0, \theta]. \end{cases}$$

Функция правдоподобия:

$$L(X_{[n]}, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i; \theta)$$

Примеры

Пусть $\xi \sim Pois(\lambda)$, λ неизвестен

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$L(X_{[n]}, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} p(X_i; \lambda)$$

Свойства оценок максимального правдоподобия

Если функция правдоподобия непрерывно дифференцируема, и выполнены некоторые условия гладкости, то оценки ММП

- сильно состоятельны,
- асимптотически эффективны и
- асимптотически нормальны.

Неравенство Рао-Крамера

Пусть $X_{[n]} \propto \xi$ с $F_\xi(x;\theta)$ и $f_\xi(x;\theta)$

$\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ — неизвестный параметр.

Функция правдоподобия:

$$L(X_{[n]}, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\xi(X_i;\theta)$$

Пусть $\hat{\theta}(X_{[n]})$ оценка θ

$$E\hat{\theta} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) L(x, \theta) dx = h(\theta).$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} L(x, \theta) dx = 1.$$

Пусть $L > 0$ и дифференцируема по θ

$$(h'(\theta))^2 = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) - \theta \right) \frac{\partial \ln L(x, \theta)}{\partial \theta} L(x, \theta) dx \right)^2$$

$$(h'(\theta))^2 = \left(E \left((\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) - \theta) \frac{\partial \ln L(x, \theta)}{\partial \theta} \right) \right)^2$$

Величина

$$I_n(\theta) = E\left(\frac{\partial \ln L(X_{(n)}, \theta)}{\partial \theta}\right)^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial \ln L(x, \theta)}{\partial \theta}\right)^2 L(x, \theta) dx,$$

если математическое ожидание существует и конечно, называется *информационным количеством Фишера* (соответствующим выборке объема n).

Теорема “Неравенство Рао-Крамера”
Имеет место неравенство:

$$D\hat{\theta} \geqslant \frac{(h'(\theta))^2}{I_n(\theta)}.$$

Если $E\hat{\theta} = \theta$ для любого $\theta \in \Theta$