Гипотезы о параметрах. Проверка гипотез о мат.ожидании нормально распределенной генеральной совокупности

Грауэр Л.В.

Гипотезы о параметрах распределения

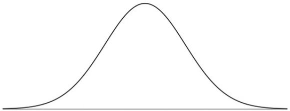
ξ, $F_\xi(x, \theta)$, θ
$X_{[n]}$

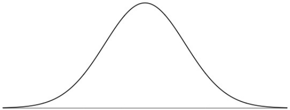
$$H_0 : \theta = \theta_0$$

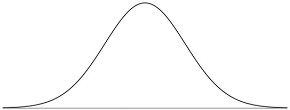
$$H_1^1 : \theta = \theta_1 \neq \theta_0$$
$$H_1^2 : \theta > \theta_0$$
$$H_1^3 : \theta < \theta_0$$
$$H_1^4 : \theta \neq \theta_0$$

Пусть $Z = \hat{\theta}$

Односторонний и двусторонний критерий







Проверка гипотез о параметрах $N(a, \sigma)$

Пусть $\xi \sim N(a, \sigma)$, $X_{[n]}$

$$H_0 : a = a_0$$

$$H_1^1 : a = a_1 \neq a_0$$
$$H_1^2 : a > a_0$$
$$H_1^3 : a < a_0$$
$$H_1^4 : a \neq a_0$$

a неизвестно, σ^2 известна

$$Z = \frac{\bar{X} - a}{\sigma/\sqrt{n}}$$

H_1	V_k	$p - value$
$a > a_0$		
$a = a_1 > a_0$		
$a < a_0$		
$a \neq a_0$		

a неизвестно, σ^2 неизвестна

$$Z = \frac{\bar{X} - a}{s/\sqrt{n}}$$

H_1	V_k	$p - value$
$a > a_0$		
$a < a_0$		
$a \neq a_0$		

Пример

$\xi \sim N(a, \sigma)$, $D\xi = 1$ мм^2, $a = 40$ мм

$n = 36$

$\bar{x} = 40.2$ мм

Наиболее мощный критерий

Пусть $\xi \sim N(a, \sigma)$, $X_{[n]}$, a неизвестно, σ^2 известна

$$H_0 : a = a_0$$

$$H_1 : a = a_1 > a_0$$

Применим критерий Неймана-Пирсона.

$L_0(X_{[n]})$

$L_1(X_{[n]})$

Рассмотрим отношение:

$$\frac{L_1(X_{[n]})}{L_0(X_{[n]})} = \exp \frac{1}{2\sigma^2} \left\{ 2(a_1 - a_0) n\bar{X} - n(a_1^2 - a_0^2) \right\}.$$

Оптимальный критерий Неймана-Пирсона:

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & \bar{X} > c_1; \\ \varepsilon, & \bar{X} = c_1; \\ 0, & \bar{X} < c_1, \end{cases}$$

константы c_1 и ε выбираются при заданном $\alpha_0 \in (0,1)$ как решение уравнения $\alpha_0 = \alpha(\varphi^*)$.

Зададим вероятность ошибки первого рода α_0:

$$\alpha_0 = \alpha(\varphi^*) = P\{\bar{X} > c_1 | H_0\}$$

Достаточный объем выборки n

Пусть

$$c_1 \geqslant a_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha_0}$$

Зададим β_0. Когда $\beta(\varphi^*) \leqslant \beta_0$?

$\beta(\varphi^*) = P\{\bar{X} \leqslant c_1 | H_1\}$

$\beta(\varphi^*) \leqslant \beta_0$, если

$$\frac{c_1 - a_1}{\sigma}\sqrt{n} \leqslant u_{\beta_0}$$

Совместим условия для c_1

$$a_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha_0} \leqslant c_1 \leqslant a_1 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\beta_0}.$$

Если

$$n \geqslant \frac{\sigma^2 (u_{1-\alpha_0} - u_{\beta_0})^2}{(a_1 - a_0)^2},$$

$\alpha(\varphi^*) \leqslant \alpha_0$ и $\beta(\varphi^*) \leqslant \beta_0$.