Точечные оценки и их свойства

Грауэр Л.В.

Статистика

ξ — генеральная совокупность с ф.р. $F_\xi(x;\theta)$
$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ — неизвестные параметры
$X_{[n]} = (X_1, \dots, X_n)$ — выборка из ξ

Статистикой *будем называть любую функцию, зависящую только от наблюдений.*

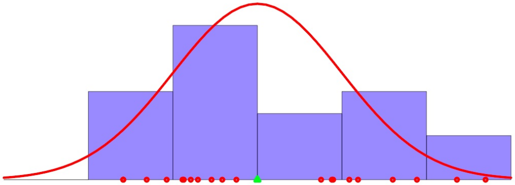
Точечные оценки

Пусть $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$.

Точечной оценкой *неизвестного параметра или числовой характеристики* θ *распределения называется статистика* $\hat{\theta}(X_{[n]})$, *приближенно равная* θ.

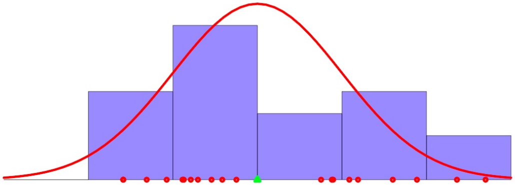
Пример

$\xi \sim N(a, \sigma)$, $\quad a$ неизвестно
$X_{[n]} = (X_1, \ldots, X_n)$ — выборка из ξ



Пример

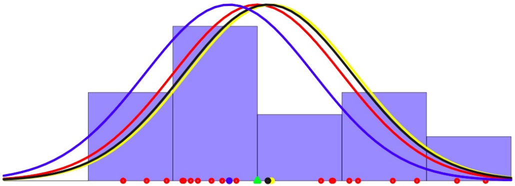
$\xi \sim N(a, \sigma)$, a неизвестно
$X_{[n]} = (X_1, \ldots, X_n)$ — выборка из ξ



Возможные оценки параметра a

Пример

$\xi \sim N(a, \sigma)$, a неизвестно
$X_{[n]} = (X_1, \ldots, X_n)$ — выборка из ξ



Возможные оценки параметра a

Свойства точечных оценок

ξ, $F_\xi(x, \theta)$, $X_{[n]} = (X_1, \ldots, X_n)$

$\hat{\theta}_n \sim \theta$

Свойства точечных оценок

Несмещенность

Состоятельность

Эффективность

Асимптотическая нормальность

Робастность

Несмещенность.

Пусть параметр $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$.

Говорят, что оценка $\hat{\theta}(X_{[n]})$ *является* несмещенной *оценкой параметра* θ, *если*

$$E\hat{\theta}(X_{[n]}) = \theta$$

для любого $\theta \in \Theta$.

Несмещенность.

Пусть параметр $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$.

Говорят, что оценка $\hat{\theta}(X_{[n]})$ *является* несмещенной *оценкой параметра* θ*, если*

$$E\hat{\theta}(X_{[n]}) = \theta$$

для любого $\theta \in \Theta$.

Говорят, что оценка $\hat{\theta}(X_{[n]})$ является *асимптотически несмещенной* оценкой параметра θ, если

$$E\hat{\theta}(X_{[n]}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$$

для любого $\theta \in \Theta$.

Пусть

$\hat{\theta}_A$ и $\hat{\theta}_B$ — точечные оценки θ из центров A и B:

$$E\hat{\theta}_A = E\hat{\theta}_B = \theta$$

$$D(\hat{\theta}_i) = E(\hat{\theta}_i - \theta)^2 = \sigma^2(\theta),\ i = A, B$$

Пусть

$\hat{\theta}_A$ и $\hat{\theta}_B$ — точечные оценки θ из центров A и B:

$$E\hat{\theta}_A = E\hat{\theta}_B = \theta$$
$$D(\hat{\theta}_i) = E(\hat{\theta}_i - \theta)^2 = \sigma^2(\theta),\ i = A, B$$

Рассмотрим новую оценку:

$$\hat{\theta} = \frac{\hat{\theta}_A + \hat{\theta}_B}{2}$$

Примеры

Рассмотрим выборочную дисперсию D^*

Примеры

Рассмотрим выборочную дисперсию D^*

D^* — смещенная оценка, однако асимптотически несмещенная: $ED^* \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma^2$.

Рассмотрим исправленную оценку дисперсии:

$s^2 = \frac{n}{n-1} D^* = \frac{1}{n-1} \sum\limits_{k=1}^{n} (X_k - \overline{X})^2,$

s^2 — несмещенная оценка дисперсии.

Рассмотрим исправленную оценку дисперсии:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D^* = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \overline{X})^2,$$

s^2 — несмещенная оценка дисперсии.

Выборочное среднее

$$E\bar{X} = E\left\{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k\right\}$$

Состоятельность

Пусть параметр $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$. *Говорят, что оценка* $\hat{\theta}(X_{[n]})$ состоятельна, *если*

$$\hat{\theta}(X_{[n]}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \theta$$

для любого $\theta \in \Theta$.

Оценка $\hat{\theta}(X_{[n]})$ называется *сильно состоятельной* оценкой параметра θ, если

$$\hat{\theta}(X_{[n]}) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \theta$$

для любого $\theta \in \Theta$.

Пример

Рассмотрим выборочное среднее $\bar{X}$

Пусть

существует $E\xi^k$

$$a_k^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

Пусть

существует $E(\xi - E\xi)^k$

$$\mu_k^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^k$$

Эффективность

Рассмотрим класс оценок $K = \{\hat{\theta}(X_{[n]})\}$ параметра θ.

Говорят, что оценка $\theta^*(X_{[n]}) \in K$ *является* эффективной оценкой *параметра* θ *в классе* K*, если для любой другой оценки* $\hat{\theta} \in K$ *имеет место неравенство:*

$$E(\theta^* - \theta)^2 \leqslant E(\hat{\theta} - \theta)^2$$

для любого $\theta \in \Theta$*.*

Рассмотрим случай, когда $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$.

Для любого $y \in \mathbb{R}^m$ определим $\alpha_y = (\theta, y) = \theta_1 y_1 + \ldots + \theta_m y_m$. Тогда $\alpha_y^* = (\theta^*, y)$ — оценка параметра α_y.

Оценка $\theta^* \in K$ *является* эффективной оценкой параметра $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$ *в классе* K*, если для любой другой оценки* $\hat{\theta} \in K$ *и любого* $y \in \mathbb{R}^m$ *при любом допустимом значении* $\theta \in \Theta$ *имеет место неравенство:*

$$E(\alpha_y^* - \alpha_y)^2 \leqslant E(\hat{\alpha}_y - \alpha_y)^2,$$

где $\hat{\alpha}_y = (\hat{\theta}, y)$.

Класс несмещенных оценок обозначим через

$$K_0 = \left\{ \hat{\theta}(X_{[n]}) : E\hat{\theta} = \theta, \forall \theta \in \Theta \right\}.$$

Оценка $\hat{\theta}$ эффективна в классе K_0 *, или* просто эффективна*, если* $D\tilde{\theta} - D\hat{\theta} \succeq 0$ *(неотрицательно определенная матрица), где* $\tilde{\theta} \in K_0$ *для любого* $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$*.*

Теорема

Пусть несмещенные оценки $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$ параметра $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ являются эффективными, тогда оценки $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$ почти наверное совпадают.

Асимптотическая эффективность

Оценка $\hat{\theta}$ *называется* асимптотически эффективной в классе K оценок *параметра* $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$*, если*

$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{E(\hat{\theta} - \theta)^2}{E(\tilde{\theta} - \theta)^2} \leqslant 1$$

для любого параметра $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ *и любой оценки* $\tilde{\theta} \in K$.

Асимптотическая нормальность

Пусть оценивается параметр $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$. *Оценка* $\hat{\theta}$ *называется* асимптотически нормальной оценкой *параметра* θ *с коэффициентом рассеивания* $\sigma^2(\theta)$, *если*

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \zeta \sim N(0, \sigma(\theta)).$$

Для любого $x \in \mathbb{R}$ имеет место сходимость:

$$P\left\{\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \leqslant x\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(\theta)} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2(\theta)}} dy.$$

Пусть оценивается параметр $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$. *Оценка* $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_m)$ *называется* асимптотически нормальной с матрицей рассеивания $\Sigma(\theta)$, *если имеет место сходимость по распределению:*

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow[n \to \infty]{d} \eta \sim N(0, \Sigma(\theta)).$$

Пример

Рассмотрим выборочное среднее $\bar{X}$

Робастность

Робастность оценок в рамках “схемы засорения”

$$f(x,\theta) = (1-\varepsilon)N(x,\theta,\sigma_1) + \varepsilon N(x,\theta,\sigma_2)$$

$$0 < \varepsilon < 1, \;\; \sigma_2 >> \sigma_1$$

$$N(x,\theta,\sigma_i) = \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma_i^2}}$$

По $X_{[n]}$ оценить θ

Рассмотрим оценки $\bar{x}$ и x^*_{med}

$X[100] \propto 0.95N(x,1,1) + 0.05N(x,1,10)$