Доверительные интервалы

Определение

ξ — генеральная совокупность с функцией распределения $F_\xi(x, \theta)$
$\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ — неизвестный параметр распределения
$X_{[n]} = (X_1, \ldots, X_n)$ — выборка из генеральной совокупности ξ

Определение

ξ — генеральная совокупность с функцией распределения $F_\xi(x, \theta)$
$\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ — неизвестный параметр распределения
$X_{[n]} = (X_1, \ldots, X_n)$ — выборка из генеральной совокупности ξ

Пусть для некоторого $\alpha \in (0, 1)$ *существуют статистики* $S^- = S^-(X_{[n]}, \alpha)$ *и* $S^+ = S^+(X_{[n]}, \alpha)$ *такие, что*

$$P\left\{S^- < \theta < S^+\right\} = 1 - \alpha,$$

тогда интервал

$$\left(S^-, S^+\right)$$

называется **доверительным интервалом** *для параметра* θ *с уровнем доверия* $(1 - \alpha)$.

Зададим $\alpha \in (0, 1)$.

Общая схема построения доверительных интервалов

Пусть

$\hat{\theta} = \hat{\theta}_{X_{[n]}}$ — точечная оценка параметра θ и

известна статистика $Y(\hat{\theta}, \theta)$ такая, что

- функция распределения $F_Y(x)$ случайной величины Y известна и не зависит от θ.
- функция $Y(\hat{\theta}, \theta)$ непрерывна и строго монотонна по θ.

Пусть для определенности, $Y(\hat{\theta}, \theta)$ строго возрастает по θ.

$Y(\hat{\theta}, \theta)$ непрерывна и строго возрастает по θ, тогда

существует обратная функция $G(y)$ для $Y(\hat{\theta}, \theta)$ и также строго возрастает.

$Y(\hat{\theta}, \theta)$ непрерывна и строго возрастает по θ, тогда

существует обратная функция $G(y)$ для $Y(\hat{\theta}, \theta)$ и также строго возрастает.

Пусть существуют $y_{\alpha/2}$ и $y_{1-\alpha/2}$: $F_Y(y_p) = p$, тогда

$P\{y_{\alpha/2} < Y(\hat{\theta}, \theta) < y_{1-\alpha/2}\} = F(y_{1-\alpha/2}) - F(y_{\alpha/2})$

$Y(\hat{\theta}, \theta)$ непрерывна и строго возрастает по θ, тогда

существует обратная функция $G(y)$ для $Y(\hat{\theta}, \theta)$ и также строго возрастает.

Пусть существуют $y_{\alpha/2}$ и $y_{1-\alpha/2}$: $F_Y(y_p) = p$, тогда

$$P\{y_{\alpha/2} < Y(\hat{\theta}, \theta) < y_{1-\alpha/2}\} = F(y_{1-\alpha/2}) - F(y_{\alpha/2})$$

$$P\{G(y_{\alpha/2}) < \theta < G(y_{1-\alpha/2})\}$$

Получаем **доверительный интервал** для θ

$$P\{G(y_{\alpha/2}) < \theta < G(y_{1-\alpha/2})\} = 1 - \alpha.$$

Пример построения доверительного интервала

Рассмотрим случайную величину рост мужчин. Построим 95%-й доверительный интервал для среднего роста мужчин.
Будем предполагать $\xi \sim N(a, \sigma)$, $\sigma = 7$, a

$X_{[20]}$:

174.83	172.75	158.51	182.70	175.53
161.66	182.38	185.49	174.96	172.73
180.90	169.08	179.66	174.01	166.57
168.18	163.92	174.85	180.21	176.37

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

$$Y = \frac{\bar{X} - a}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

$$Y = \frac{\bar{X} - a}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$P\left\{u_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - a}{\sigma/\sqrt{n}} < u_{1-\alpha/2}\right\} = P\left\{\bar{X} - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} - u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}$$

$X_{[20]}$:

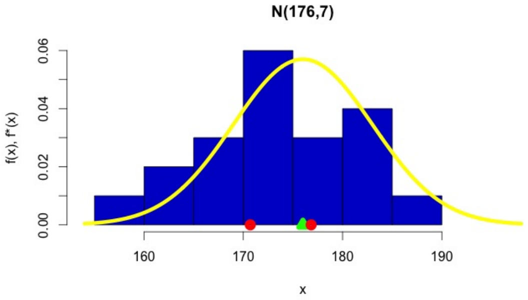
174.83	172.75	158.51	182.70	175.53
161.66	182.38	185.49	174.96	172.73
180.90	169.08	179.66	174.01	166.57
168.18	163.92	174.85	180.21	176.37

$$P\left\{\bar{X} - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} - u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 1-\alpha$$

$$\bar{X} = 173.76, \quad \sigma = 7, \quad n = 20$$

$$u_{0.975} = -u_{0.025} = 1.96$$

$$P\{170.70 < a < 176.83\} = 0.95$$



Точные доверительные интервалы для параметров нормальной генеральной совокупности

Пусть задана выборка $X_{[n]}$ из $\xi \sim N(a, \sigma)$, a, σ^2 неизвестны.

Точечные оценки: $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

$$Y_1 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

$$Y_2 = \frac{\bar{X} - a}{s/\sqrt{n}}$$

Точные доверительные интервалы с доверительной вероятностью $(1-\alpha)$:

для математического ожидания a

$$P\left\{\bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2} < a < \bar{X} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}\right\} = 1-\alpha,$$

где $t_{1-\alpha/2}$ — квантиль распределения $T(n-1)$.

для дисперсии σ^2

$$P\left\{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}}\right\} = 1-\alpha,$$

где $\chi^2_{1-\alpha/2}$, $\chi^2_{\alpha/2}$ — квантили распределения $\chi^2(n-1)$.

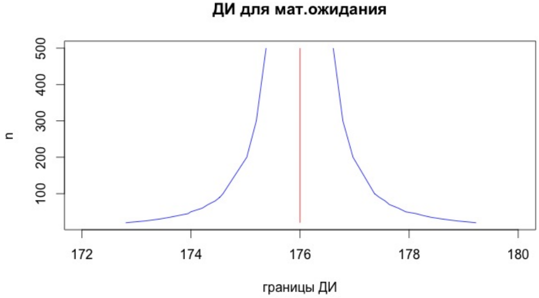
Точность интервального оценивания

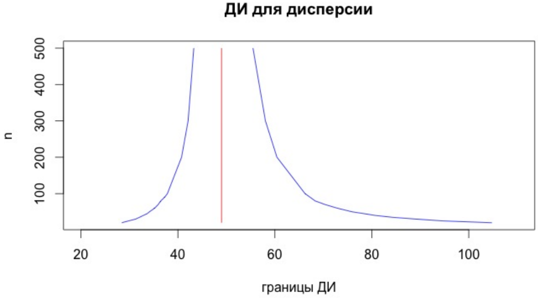
Точностью интервального оценивания называют $\Delta = \dfrac{S^+ - S^-}{2}$.

Увеличение $(1 - \alpha)$ влечет увеличение Δ, ухудшает точность.

Зависимость точности интервального оценивания от n

$X_{[n]}$ из $\xi \sim N(176, 7)$





Асимптотические доверительные интервалы

Пусть для некоторого $\alpha \in (0,1)$ *существуют статистики* $S^- = S^-(X_{[n]}, \alpha)$ *и* $S^+ = S^+(X_{[n]}, \alpha)$ *такие, что*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P\left\{S^- < \theta < S^+\right\} = 1 - \alpha,$$

тогда интервал (S^-, S^+) *называется* асимптотическим (приближенным) доверительным интервалом *для параметра* θ *с уровнем доверия* $(1 - \alpha)$.

Предположим, что оценка $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_{[n]})$ является асимптотически нормальной:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{\mathrm{d}} \varsigma \sim N(0, \sigma),$$

где дисперсия $\sigma^2 = \sigma^2(\theta)$ — коэффициент асимптотического рассеивания.

Предположим, что функция $\sigma^2(\theta)$ непрерывна на Θ и отлична от нуля для любого $\theta \in \Theta$.

Тогда справедливо следующее соотношение:

$$P\left\{u_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)}{\sigma(\hat{\theta})} < u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\} \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{} \Phi(u_{1-\frac{\alpha}{2}}) - \Phi(u_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

Тогда справедливо следующее соотношение:

$$P\left\{u_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta)}{\sigma(\hat{\theta})} < u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\} \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} \Phi(u_{1-\frac{\alpha}{2}}) - \Phi(u_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

Получаем асимптотический доверительный интервал с уровнем доверия $1-\alpha$:

$$P\left\{\hat{\theta} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma(\hat{\theta})}{\sqrt{n}} < \theta < \hat{\theta} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma(\hat{\theta})}{\sqrt{n}}\right\} \approx 1-\alpha.$$

Пример построения асимптотического ДИ

Рассмотрим схему Бернулли, в которой n испытаний.

Пример построения асимптотического ДИ

Рассмотрим схему Бернулли, в которой n испытаний.

Выборка $X_{[n]} = (a_1, \ldots, a_n)$ состоит из последовательности нулей и единиц.

Пусть m — число успехов.

Пример построения асимптотического ДИ

Рассмотрим схему Бернулли, в которой n испытаний.

Выборка $X_{[n]} = (a_1, \dots, a_n)$ состоит из последовательности нулей и единиц.

Пусть m — число успехов.

Точечной оценкой параметра p будет $\hat{p} = \dfrac{m}{n}$

$\hat{p}$ асимптотически нормальна:

$$\sqrt{n}\left(\frac{m}{n} - p\right) = \frac{m - np}{\sqrt{n}} = \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} \zeta \sim N(0, \sqrt{p(1-p)}),$$

Тогда имеет место сходимость:

$$\frac{\sqrt{n}(\frac{m}{n} - p)}{\sqrt{\frac{m}{n}(1 - \frac{m}{n})}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} \eta \sim N(0, 1).$$

$\hat{p}$ асимптотически нормальна:

$$\sqrt{n}\left(\frac{m}{n} - p\right) = \frac{m - np}{\sqrt{n}} = \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} \zeta \sim N(0, \sqrt{p(1-p)}),$$

Тогда имеет место сходимость:

$$\frac{\sqrt{n}(\frac{m}{n} - p)}{\sqrt{\frac{m}{n}(1-\frac{m}{n})}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} \eta \sim N(0,1).$$

Получаем асимптотический доверительный интервал с уровнем доверия $1-\alpha$ для p:

$$\left(\frac{m}{n} - u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\frac{m}{n}(1-\frac{m}{n})}}{\sqrt{n}},\ \frac{m}{n} + u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\frac{m}{n}(1-\frac{m}{n})}}{\sqrt{n}}\right)$$