Проверка статистических гипотез

Грауэр Л.В.

Статистические гипотезы

Гипотеза о равенстве математических ожиданий двух генеральных совокупностей

Гипотеза о равенстве дисперсий нескольких генеральных совокупностей

Гипотеза о законе распределения генеральной совокупности

Гипотеза об однородности выборки

Гипотеза о наличии аномальных результатов наблюдений (выбросов)

Гипотеза о независимости двух случайных величин

Статистической гипотезой называется предположение о виде или свойствах генерального или выборочного распределений, которое можно проверить статистическими методами на основе имеющейся выборки.

- простая гипотеза
- сложная гипотеза

Критерий значимости

ξ, $F_\xi(x)$
$X_{[n]}$

- $H_0 : F_\xi(x) = F_0(x)$.
- $H_1 : F_\xi(x) = F_1(x)$.

По выборке $X_{[n]}$ требуется принять решение об истинности гипотезы H_0 при гипотезе H_1.

Правило проверки статистической гипотезы при некоторой фиксированной альтернативе называется статистическим критерием.

Статистикой критерия значимости называется статистика, по значениям которой судят о справедливости выдвинутой гипотезы.

Уровень значимости

Уровнем значимости α называется столь малая вероятность, что событие с такой вероятностью является практически невозможной.

Критической областью критерия называется подобласть области значений статистики критерия, вероятность попадания в которую для этой статистики при условии истинности нулевой гипотезы равна уровню значимости.

Схема проверки статистических гипотез, α

- Формулируем нулевую и альтернативную гипотезу
- Задаем уровень значимости
- Выбираем критерий и статистику критерия
- Строим критическую область при условии справедливости нулевой гипотезы
- Вычисляем выборочное значение статистики
- Проверяем, принадлежит ли выборочное значение статистики критической области
- Принимаем статистическое решение

p-значение

Пусть Z, $F_Z(\cdot|H_0)$

$X_{[n]}$, $H_0 \Rightarrow z(X_{[n]})$

p-значением (p-value) называется статистика, равная вероятности того, что статистика критерия примет значение такое же как $z(X_{[n]})$ или более "экстремальное" при условии, что верна нулевая гипотеза.

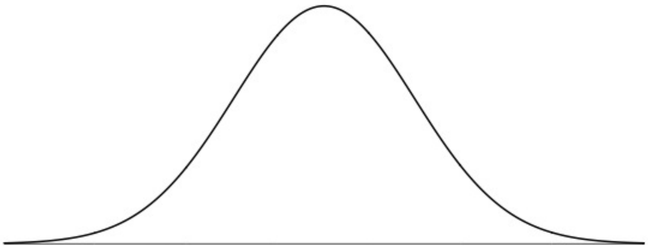


Схема проверки статистических гипотез, $p - value$

- Формулируем нулевую и альтернативную гипотезы
- Задаем уровень значимости
- Выбираем критерий и статистику критерия
- Вычисляем выборочное значение статистики критерия
- Вычисляем соответствующее p-value
- Сравниваем p-value с уровнем значимости
- Принимаем статистическое решение

Ошибки 1го и 2го рода

Ошибка первого рода — отклонить гипотезу H_0, когда она верна, вероятность ошибки первого рода α определяется равенством:

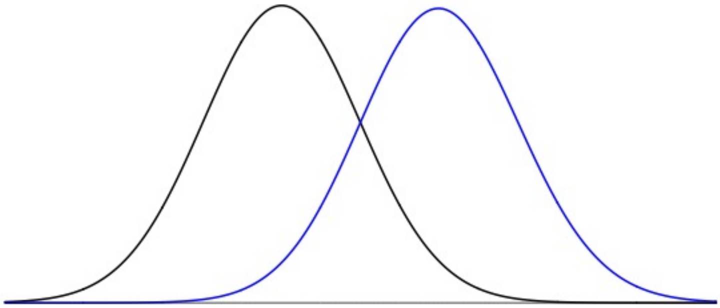
Ошибка второго рода — принять гипотезу H_0, когда верна H_1, вероятность ошибки второго рода β определяется равенством:

Мощность критерия

$$\gamma = 1 - \beta = P\{Z \in V_k | H_1\}$$

Критерий называется *несмещенным*, если выполняется условие

$$\gamma > \alpha.$$



Нерандомизированный и рандомизированный критерии

$\varphi(x) = I\{x \in S\}$

Нерандомизированный критерий имеет вид:

- Если $\varphi(X_{[n]}) = 1$, тогда отвергаем H_0, принимаем H_1.
- Если $\varphi(X_{[n]}) = 0$, тогда принимаем H_0, отвергаем H_1.

$\varphi(x) = P\left\{\bar{H}_0 / X_{[n]} = x\right\}$

Рандомизированный критерий:

- с вероятностью $1 - \varphi(X_{[n]})$ следует принимать гипотезу H_0
- с вероятностью $\varphi(X_{[n]})$ принимать гипотезу H_1.

$\varphi(x)$ — *критическая функция*

Задача построения оптимального критерия

Зададим α_0

$$\begin{cases} \alpha_0 \geqslant \alpha(S), \\ \gamma(S) \to \max\limits_{S}. \end{cases}$$

Проверка двух простых статистических гипотез

- $H_0 : F_\xi(x) = F_0(x)$.
- $H_1 : F_\xi(x) = F_1(x)$.

$F_0(x)$ и $F_1(x)$ полностью известны.

По $X_{[n]}$ требуется принять решение об истинности H_0 при H_1.

Лемма Неймана-Пирсона

При фиксированной вероятности ошибки первого рода $\alpha_0 \in (0,1)$ наиболее мощный критерий имеет критическую функцию φ^* вида

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } L_1(x) > cL_0(x); \\ \varepsilon, & \text{если } L_1(x) = cL_0(x); \\ 0, & \text{если } L_1(x) < cL_0(x), \end{cases}$$

где

$L_0(x) = \prod_{i=1}^{n} f_0(x_i)$ соответствует H_0,

$L_1(x) = \prod_{i=1}^{n} f_1(x_i)$ соответствует H_1.

Константы c и ε — решения уравнения $\alpha(\varphi^*) = \alpha_0$.