

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ МИХАЙЛА
ОСТРОГРАДСЬКОГО

Кафедра комп'ютерних та інформаційних систем

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА
з навчальної дисципліни «Обробка сигналів
та зображень»

Тема «Аналіз та синтез цифрових нерекурсивних і рекурсивних
фільтрів»

Студент гр. КІ-21-1 ПІБ: Барбір В.Ю.

Керівник _____ ПІБ: Сидоренко В. М.

Кременчук 2023

1 Варіант

1 Частина

1. Побудувати графік заданого аналогового вхідного сигналу $x(t)$.

1	$x(t) = \cos(15t) + \cos(7t) + \cos(t)$	ФНЧ, $N = 10$	$\omega_g = 3 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$	2
---	---	------------------	--	---

Рисунок 1 – Варіант завдання для першої частини

$$x(t) = \cos(15t) + \cos(7t) + \cos(t) \quad N = 10, \omega_g = 3 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$$

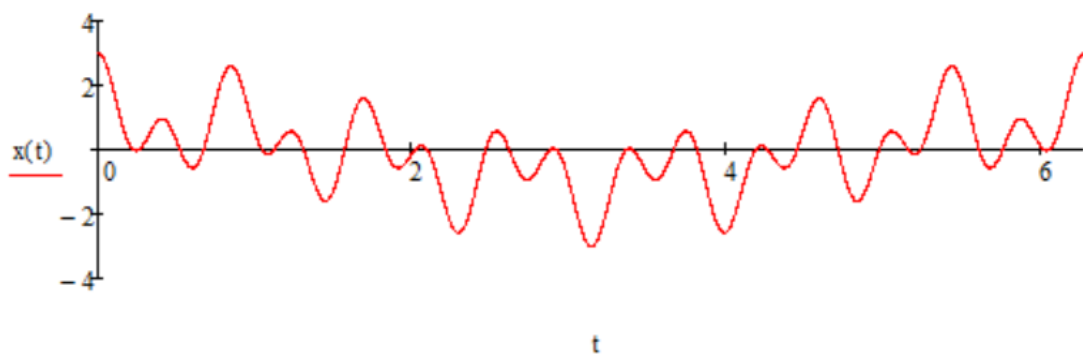


Рисунок 2 - Графік заданого аналогового вхідного сигналу $x(t)$

2. Згідно з індивідуальним завданням розрахував граничні частот (f_g, ω_g), частоти дискретизації (f_a, ω_a) аналогового сигналу $x(t)$, часові інтервали (T_a, T_g) фільтра.

$$f_g = \frac{3}{2\pi}, \quad f_g = 0.477 \quad f_a = 6 f_g, \quad f_a = 2.863$$

$$\omega_g = 2\pi f_g, \quad \omega_g = 3 \quad \omega_a = 2\pi f_a, \quad \omega_a = 18$$

$$T_g = \frac{1}{f_g}, \quad T_g = 2.093 \quad T_a = \frac{1}{f_a}, \quad T_a = 0.349$$

3. Побудував графік бажаної передаточної функції ідеального фільтра.

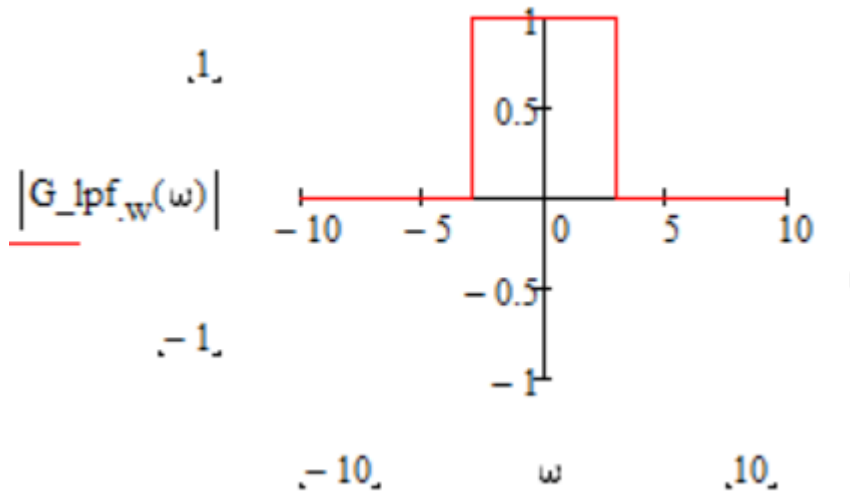


Рисунок 3 - Графік бажаної передаточної функції ідеального фільтра

4. Розрахувати коефіцієнти реального фільтра.

$$lpf(k) = \frac{T_a}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T_a}}^{\frac{\pi}{T_a}} G_{lpf1_w}(\omega) * \exp(j \cdot \omega \cdot k \cdot T_a) d\omega$$

$$lpf(-10) = \frac{0.349}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{0.349}}^{\frac{\pi}{0.349}} 1 * \exp(\sqrt{-1} \cdot 0 \cdot (-10) \cdot 0.349) d\omega$$

$$N = 10 \quad k = -N \dots N \quad lpf(k) = -0.028$$

5. Побудувати на одній площині графіки апроксимуючої передаточної функції реального фільтра, апроксимуючої передаточної функції реального фільтра, згладженої вікном фон Ганна та функцією Ланчоса, передаточної функції ідеального фільтра.

Згладжуюче вікно Фон Ганна:

$$w_{von_Hann}(k) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi \times k}{N}\right) \right)$$

$$w_{von_Hann}(k) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{3.14 \times k}{10}\right) \right)$$

$$w_{von_Hann}(-10) = 0$$

$$w_{von_Hann}(-9) = 0.024$$

$$w_{von_Hann}(-8) = 0.095$$

Згладжувальна функція Ланчоса:

$$\sigma(N, k) = \frac{\sin\left(\frac{\pi \times k}{N}\right)}{\frac{\pi \times k}{N}}$$

$$\sigma(10, k) = \frac{\sin\left(\frac{3.14 \times (-10)}{10}\right)}{\frac{3.14 \times (-10)}{10}}$$

$$\sigma(N, -10) = 0$$

$$\sigma(N, -9) = 0.109$$


$$\sigma(N, -8) = 0.234$$

Апроксимуюча передатна функція:

$$G_{lpf_d}(\omega) := \sum_{k=-N}^N (lpf(k) \cdot \exp(-j \cdot k \cdot \omega \cdot T_a))$$

$$G_{lpf_d}(0) := \sum_{k=-N}^N (-0.028 \cdot \exp(\sqrt{-1} \cdot (-10) \cdot 0 \cdot 0.349))$$

$$G_{lpf_d}(0) = 1.00516$$



$$G_{lpf_d}(0) = 1.005$$

Рисунок 4 – Перевірка розрахунку

Вікно фон Ганна:

$$G_{lpf_{d_{vonHann}}}(\omega) = \sum_{k=-N}^N (lpf(k) \cdot w_{vonHann}(k) \cdot \exp(-j \cdot k \cdot \omega \cdot T_a))$$

$$G_{lpf_{d_{vonHann}}}(0) = \sum_{k=-N}^N (0 \cdot \exp(\sqrt{-1} \cdot k \cdot 0 \cdot 0.349))$$

$$k = -N \dots N$$

$$G_{lpf_{d_{vonHann}}}(0) = 0.998$$

Функція Ланчоса:

$$G_{lpf_{d_{Lanczos}}}(\omega) = \sum_{k=-N}^N (lpf(k) \cdot \sigma(N, k) \cdot \exp(-j \cdot k \cdot \omega \cdot T_a))$$

$$G_{lpf_{d_{Lanczos}}}(0) = \sum_{k=-N}^N (-0.028 \cdot 0 \cdot \exp(\sqrt{-1} \cdot k \cdot 0 \cdot 0.349))$$

$$G_{lpf_{d_{Lanczos}}}(0) = 1.004$$

Передаточна функція ідеального фільтра:

$$G_{lpf_1}(\omega) = \text{if}(|\omega| \leq \omega_{g1}, 1, 0)$$

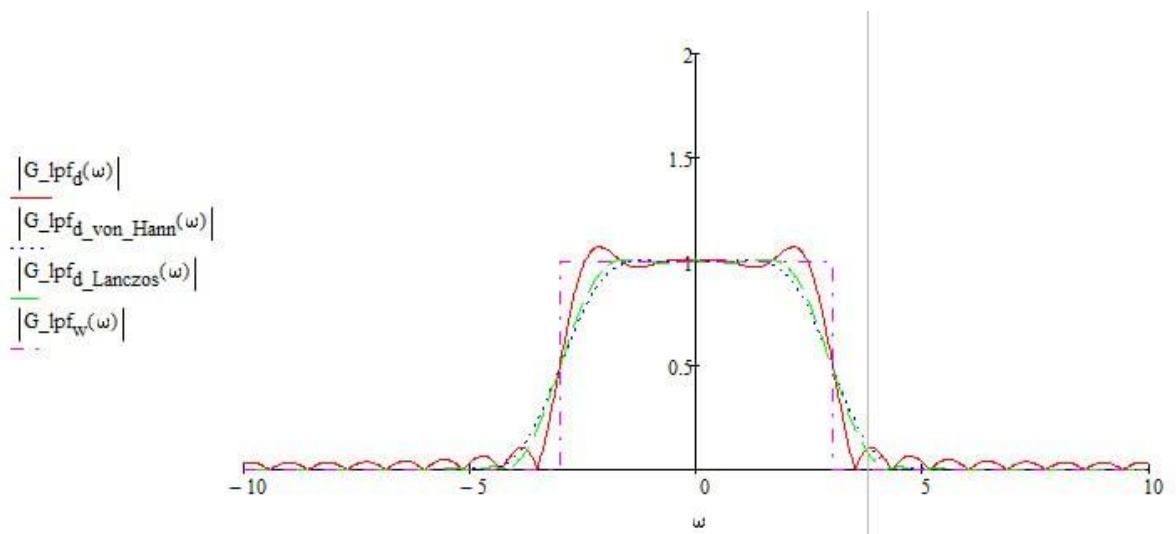


Рисунок 5 – Побудова графіків розглянутого фільтра

6. Обчислити вихідні дискретні послідовності фільтрів для кожної розрахованої в п. 5 апроксимуючої передаточної функції.

Передаточна функція ідеального фільтра:

$$y_{lpf_n} = \sum_{k=-N}^N [lpf(k) \cdot x[T_a \cdot (n - k)]]$$

$$y_{lpf_0} = \sum_{k=-N}^N [-0.028 \cdot x[0.349 \cdot (0 - (-10))]]$$

$$y_{lpf_0} = 1.484$$

Вікно фон Ганна:

$$y_{lpf_von_Hann_n} = \sum_{k=-N}^N [lpf(k) \cdot w_{von_Hann} \cdot x[T_a \cdot (n - k)]]$$

$$y_{lpf_von_Hann_0} = \sum_{k=-N}^N [-0.028 \cdot 0 \cdot x[0.349 \cdot (0 - (-10))]]$$

$$y_{lpf_von_Hann_0} = 1.505$$

Функція Ланчоса:

$$y_{lpf_Lancros_n} = \sum_{k=-N}^N [lpf(k) \cdot \sigma(N, k) \cdot x[T_a \cdot (n - k)]]$$

$$y_{lpf_Lancros_0} = \sum_{k=-N}^N [-0.028 \cdot 0 \cdot x[0.349 \cdot (0 - (-10))]]$$

$$y_{lpf_Lancros_0} = 1.498$$

7. Відновити аналоговий фільтрований сигнал із дискретних послідовностей, отриманих у п. 6, за допомогою ряду Котельникова.

$$F_{S_lpf}(t) = \sum_{k=0}^K \left[y_{lpf_k} \frac{\sin\left[\frac{\omega_a}{2} \cdot (t - k \cdot T_a)\right]}{\frac{\omega_a}{2} \cdot (t - k \cdot T_a)} \right]$$

$$F_S_lpf(0) = \sum_{k=0}^K \left[y_lpf_k \cdot \frac{\sin \left[\frac{18}{2} \cdot (0 - k \cdot 0.349) \right]}{\frac{18}{2} \cdot (0 - k \cdot 0.349)} \right]$$

$$k = -N \dots N$$

$$F_S_lpf(0) = 1.484$$

$$F_S_lpf_von_Hann(t) = \sum_{k=0}^K \left[y_lpf_von_Hann_k \cdot \frac{\sin \left[\frac{\omega_a}{2} \cdot (t - k \cdot T_a) \right]}{\frac{\omega_a}{2} \cdot (t - k \cdot T_a)} \right]$$

$$F_S_lpf_von_Hann(0) = \sum_{k=0}^K \left[y_lpf_von_Hann_k \cdot \frac{\sin \left[\frac{18}{2} \cdot (0 - k \cdot 0.349) \right]}{\frac{18}{2} \cdot (0 - k \cdot 0.349)} \right]$$

$$F_S_lpf_von_Hann(0) = 1.505$$

$$F_S_lpf_Lanczos(t) = \sum_{k=0}^K \left[y_lpf_Lanczos_k \cdot \frac{\sin \left[\frac{\omega_a}{2} \cdot (t - k \cdot T_a) \right]}{\frac{\omega_a}{2} \cdot (t - k \cdot T_a)} \right]$$

$$F_S_lpf_Lanczos(0) = \sum_{k=0}^K \left[y_lpf_Lanczos_k \cdot \frac{\sin \left[\frac{18}{2} \cdot (0 - k \cdot 0.349) \right]}{\frac{18}{2} \cdot (0 - k \cdot 0.349)} \right]$$

$$k := -N \dots N$$

$$F_S_lpf_Lanczos(0) = 1.498$$

8. Побудувати на одній площині графіки аналогового вхідного сигналу $x(t)$ і відновлених аналогових фільтрованих сигналів, отриманих в п.7.

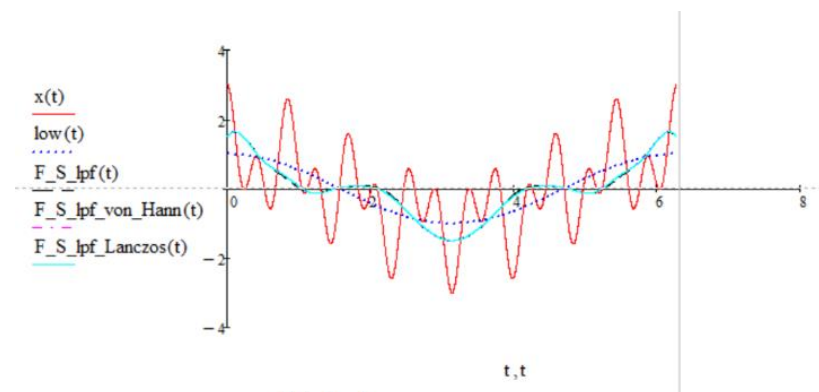


Рисунок 6 - Графік аналогового вхідного сигналу $x(t)$ і відновлених аналогових фільтрованих сигналів

9. Пояснити отримані результати, зробити висновки.

Для покращення якості сигналу та адаптації його до цифрового середовища було проведено дискретизацію, використовуючи вікно фон Ганна, функцію Ланчоса та передаточну функцію ідеального фільтра.

Варіативність методів вибору фільтрації зумовлює різні компроміси між збереженням амплітуди та розповсюдженням сигналу. Аналіз результатів показав, що дискретизація сигналу призводить до зменшення амплітуди та обмеження його поширення.

Отже, хоча цей процес покращує якість сигналу, він супроводжується втратою інформації та обмеженням діапазону сигналу. Для відновлення аналогового сигналу з дискретних послідовностей був використаний ряд Котельникова. Після використання ряду Котельникова для відновлення аналогового сигналу із дискретних послідовностей, спостерігалось зменшення амплітуди відновленого сигналу порівняно з початковим аналоговим сигналом.

Це може бути зумовлено обмеженнями та неточностями, які супроводжують процес дискретизації та відновлення. Крім того, втрати амплітуди можуть виникати внаслідок вибору параметрів фільтрації та відновлення, а також через обмежену кількість використовуваних відомостей у дискретних послідовностях. У процесі обробки аналогового сигналу відбуваються компроміси між якістю сигналу та його адаптацією до цифрового середовища.

Отже, дискретизація та відновлення сигналу впливають на амплітуду та розповсюдження сигналу, що потребує уважного підбору параметрів фільтрації та відновлення для забезпечення оптимального балансу між збереженням інформації та адаптацією до цифрового формату.

2 Частина

10. Побудував графік заданого аналогового вхідного сигналу $x(t)$.

1	$x(t) = \cos(3t) + \cos(7t) + \cos(8t) + \cos(20t)$	ФНЧ Баттерворта, $N = 3$	$\omega_g = 5 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$
---	---	--------------------------------	--

Рисунок 7 – Варіант завдання для другої частини

$$x(t) = \cos(3t) + \cos(7t) + \cos(8t) + \cos(20t) \quad \omega_g = 5 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$$

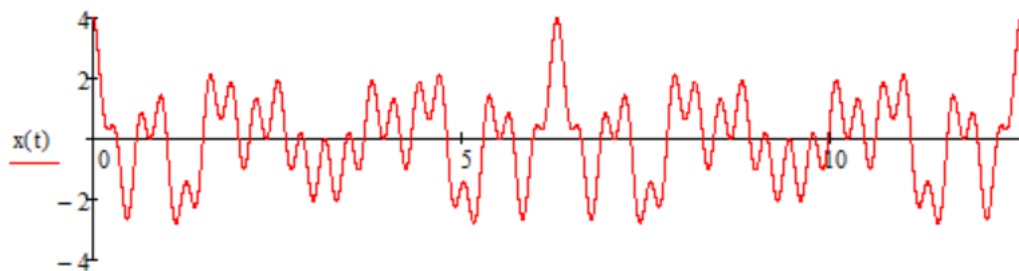


Рисунок 8 - Графік заданого аналогового вхідного сигналу $x(t)$

11. Встановив необхідні граничні частоти фільтра (f_g), частоту Найквіста для аналогового сигналу (f_a), часовий інтервал Найквіста (T_a).

$$f_a = \frac{20}{2\pi}, \quad f_g = \frac{5}{2\pi}, \quad f_a = 3.183, \quad f_g = 0.796$$

$$T_a = \frac{1}{f_a} \quad T_a = 0.314$$

12 Користуючись пунктами 1–5 теоретичних відомостей обчислив коефіцієнти a_k та b_k шуканого фільтра.

3	1	0,5000	0,5000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,3333	0,6667	0,3333	0,0000	0,3333

Рисунок 9 - ФНЧ Баттерворта 3-го порядку

ФНЧ* → ФНЧ	$z^{*-1} = \frac{-d + z^{-1}}{1 - d \cdot z^{-1}}$ $d = \frac{\sin(\pi \cdot \frac{f_g^*}{f_a^*} - \pi \cdot \frac{f_g}{f_a})}{\sin(\pi \cdot \frac{f_g^*}{f_a^*} + \pi \cdot \frac{f_g}{f_a})}$
------------	--

Рисунок 10 - Частотні перетворення для цифрових фільтрів

Визначити передаточну функцію прототипу шуканого фільтра як добуток передаточних функцій прототипів часткових ФНЧ* першого і другого порядку:

$$G(z^*) = \frac{0.500 + 0.500z^{*-1} + 0z^{*-2}}{1 + 0z^{*-1} + 0z^{*-2}} \times \frac{0.333 + 0.6667z^{*-1} + 0.3333z^{*-2}}{1 + 0z^{*-1} + 0.3333z^{*-2}}$$

Частотні перетворення для цифрових фільтрів:

$$z^{*-1} = \frac{-d + z^{-1}}{1 - d * z^{-1}}$$

$$d = \frac{\sin(\pi * \frac{f_g^*}{f_a^*} - \pi * \frac{f_g}{f_a})}{\sin(\pi * \frac{f_g^*}{f_a^*} + \pi * \frac{f_g}{f_a})}$$

$$d = \frac{\sin(\pi * \frac{1}{4} - \pi * \frac{0.796}{3.183})}{\sin(\pi * \frac{1}{4} + \pi * \frac{0.796}{3.183})}$$

$$\frac{f_g^*}{f_a^*} = \frac{1}{4}$$

$$d = 0.51848$$

Виразення z^{*-1} та z^{*-2} через z^{-1} та z^{-2} :

$$z^{*-1} = \frac{-0.51848 + z^{-1}}{1 - 0.51848 * z^{-1}}$$

$$z^{*-2} = \frac{(-0.51848 + z^{-1})^2}{(1 - 0.51848 * z^{-1})^2} = \frac{0.2688 - 1.03z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1.03696 + 0.2688z^{-2}}$$

Виконати частотне перетворення передаточної функції прототипу ФНЧ* на передаточну функцію реального шуканого фільтра:

$$G(z) = \frac{0.500 + 0.500 \frac{-0.51848 + z^{-1}}{1 - 0.51848 * z^{-1}}}{1} \times \frac{0.333 + 0.6667 \frac{-0.51848 + z^{-1}}{1 - 0.51848 * z^{-1}} + 0.3333 \frac{0.2688 - 1.03z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1.03696 + 0.2688z^{-2}}}{1 + 0.3333 \frac{0.2688 - 1.03z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1.03696 + 0.2688z^{-2}}}$$

Коефіцієнти a_k та b_k шуканого фільтру:

$$Gp^{<0>T} = (0.167 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.167 \ 0)$$

$$Gp^{<1>T} = (1 \ 0 \ 0.333 \ 0 \ 0)$$

13. Прийнявши $z = e^{j\omega T_a}$ і скориставшись формулою (3), побудував графік передаточної функції $G(z)$ шуканого фільтру.

$$Gz(\omega, G, T_a) = \begin{cases} (G^{<0>})_0 + \sum_{i=1}^k [(G^{<0>})_i \cdot \exp(-j \cdot i \cdot \omega \cdot T_a)] \\ (G^{<1>})_0 + \sum_{i=1}^k [(G^{<1>})_i \cdot \exp(-j \cdot i \cdot \omega \cdot T_a)] \end{cases}$$

$$Gz(0, G, T_a) = \begin{cases} 0.167 + \sum_{i=1}^k [(0.167)_i \cdot \exp(-j \cdot i \cdot \omega \cdot T_a)] \\ 1 + \sum_{i=1}^k [(0.167)_i \cdot \exp(-j \cdot i \cdot 0 \cdot 0.314)] \end{cases}$$

$$\omega = 0, 0.01 \dots \frac{\omega_a}{2}$$

$$Gz(0, G, T_a) = 1$$

$$Gz(4, G, T_a) = 0.934$$

$$Gz(6, G, T_a) = 0.358$$

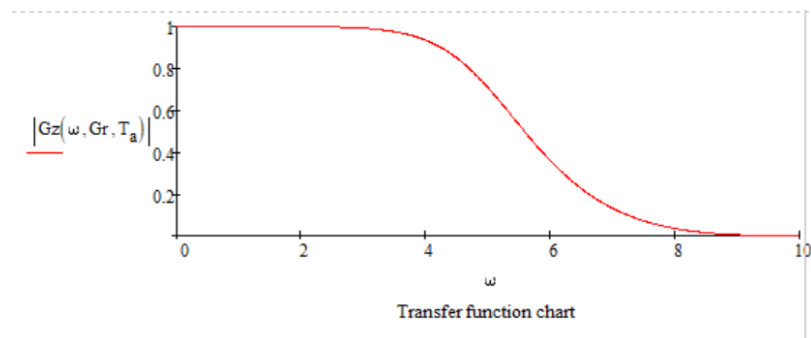


Рисунок 11- Графік передаточної функції $G(z)$ шуканого фільтру

14. На підставі різницевого рівняння визначив дискретну послідовність $y[n]$ фільтрованого сигналу.

$$N = last(Gr^{<0>}) \quad K = ceil\left(\frac{T}{T_a}\right) \quad n = 0..N-1 \quad y_n = 0 \quad n = N..K$$

$$y_n = \sum_{i=0}^N \left[(G^{<0>})_i \cdot x[T_a \cdot (n-i)] \right] - \sum_{i=1}^N \left[(G^{<1>})_i \cdot y_{n-1} \right]$$

$$y_0 = \sum_{i=0}^N \left[0.167 \cdot x[0.314 \cdot (n-i)] \right] - \sum_{i=1}^N \left[1 \cdot y_{n-1} \right]$$

$$y_0 = 0$$

$$y_5 = 0.389$$

15. Відновити за формулою аналоговий фільтрований сигнал $y(t)$ з дискретної послідовності $y[n]$, отриманої в п. 14, побудувати на одній площині графіки аналогового вхідного сигналу $x(t)$ та відновленого фільтрованого сигналу $y(t)$.

$$y(t) = \sum_{n=0}^K \left[y_n \cdot \frac{\sin \left[\frac{\omega_a}{2} \cdot (t - n \cdot T_a) \right]}{\frac{\omega_a}{2} \cdot (t - n \cdot T_a)} \right]$$

$$y(1) = \sum_{n=0}^K \left[y_1 \cdot \frac{\sin \left[\frac{20}{2} \cdot (1 - 1 \cdot 0.314) \right]}{\frac{20}{2} \cdot (1 - 1 \cdot 0.314)} \right]$$

$$y(1) = 0.134$$

$$mov = (N) \cdot T_a \quad mov = 1.257$$

$$high(t) = \cos(3 \times t)$$

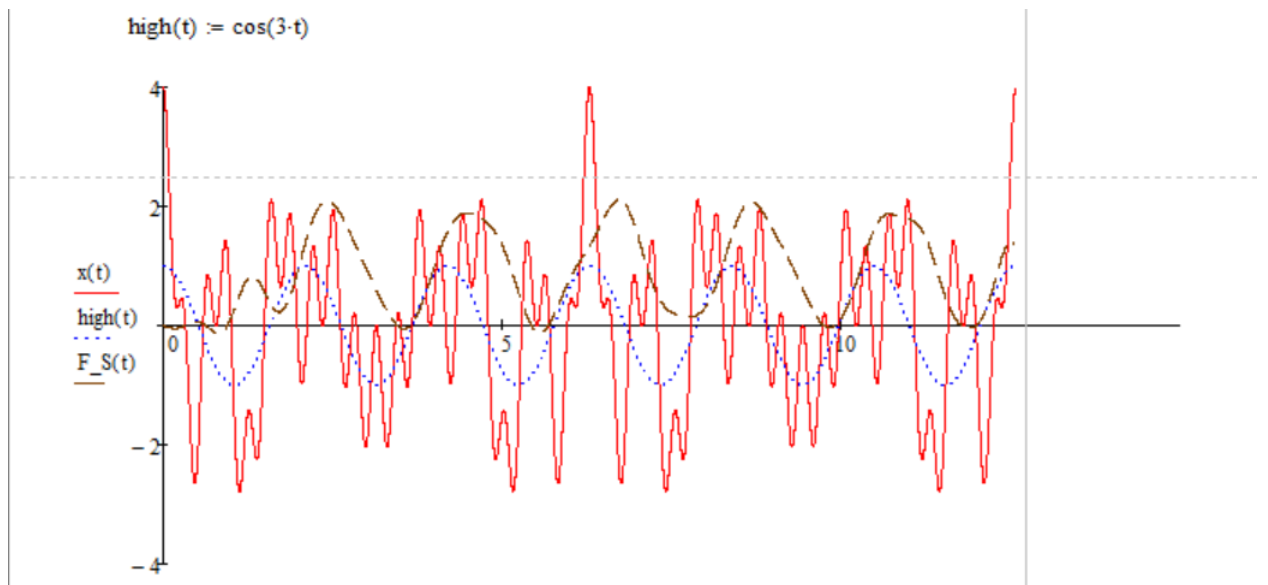


Рисунок 12 – Графіки аналогового вхідного сигналу $x(t)$ та відновленого фільтрованого сигналу $F_S(t)$

ВИСНОВОК

В ході виконання розрахункової роботи було проведено комплексне дослідження цифрового фільтра для обробки аналогового вхідного сигналу в першій частині розрахунків. Початковим етапом була побудова графіка заданого аналогового сигналу, який відіграв ключову роль у подальших розрахунках та аналізі.

Далі були розраховані граничні частоти фільтра, частоти дискретизації та інтервали, що визначили основні параметри системи. Побудова графіку бажаної передаточної функції ідеального фільтра дозволила визначити оптимальні характеристики для досягнення високої ефективності фільтрації.

Знаходження коефіцієнтів реального фільтра відбулося відповідно до теоретичних відомостей, що дало можливість побудувати графіки апроксимуючих передаточних функцій реального фільтра, згладженої вікном фон Ганна та функцією Ланчоса.

Вихідні дискретні послідовності фільтрів були обчислені, а відновлення аналогового фільтрованого сигналу здійснено за допомогою ряду Котельникова. Порівняння аналогового вхідного сигналу та відновлених аналогових фільтрованих сигналів для різних передаточних функцій вказує на ефективність обраного фільтра та його вплив на вихідний сигнал.

У процесі аналізу та обробки аналогового вхідного сигналу для 2 частини розрахунків було побудовано його графік, що відображає його основні характеристики та динаміку. Визначені граничні частоти фільтра (f_g , f_{g_low} , f_{g_high}) та частота Найквіста (f_a) для аналогового сигналу, що є важливими параметрами для подальших розрахунків.

З використанням теоретичних відомостей і формул з розділу 4, частини II, були обчислені коефіцієнти a_k та b_k для шуканого фільтра. Це визначило характеристики фільтрації та його здатність до обробки вхідного сигналу.

На основі отриманих коефіцієнтів та використання формули був побудований графік передаточної функції $G(z)$ шуканого фільтра, що відображає його фільтруючі властивості у дискретному домені.

З використанням різницевого рівняння була визначена дискретна послідовність $y[n]$ фільтрованого сигналу, з урахуванням умови $y[n] = 0$ для всіх $n \in [0, N - 1]$, де N – порядок фільтра.

Застосувавши формулу для відновлення аналогового фільтрованого сигналу з дискретної послідовності $y[n]$, були побудовані графіки аналогового вхідного сигналу $x(t)$ та відновленого фільтрованого сигналу $y(t)$ на одній площині.

Отримані результати свідчать про ефективність обраного фільтра у відсіюванні непотрібних компонентів сигналу вище заданого рівня.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. Бондарев В. Н., Трестер Г., Чернега В.С. Цифровая обработка сигналов: методы и средства: учеб. пособие для вузов. Севастополь: Изд-во СевГТУ, 1999. 398 с.
2. Марпл С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990. 584 с.
3. Рудаков П. И., Сафонов И. В. Обработка сигналов и изображений. MATLAB 5.X под общ. ред. к. т. н. В. Г. Потемкина. М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2000. 416 с.
4. Бабак В. П. Обробка сигналів: цифрова обробка дискретних сигналів: підручник за ред. В.П. Бабака. К.: Либідь, 1992. 296 с.
5. Грузман И. С., Киричук В. С., Косых В. П., Перетягин Г. И., Спектор А. А. Цифровая обработка изображений в информационных системах: Учебное пособие. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000. 68 с.
6. Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов. Основные методы: М.: Мир, 1982.

Додаткова

7. Шлихт Г. Ю. Цифровая обработка цветных изображений. М., Изд-во ЭКОН, 1997. 336 с.
8. Бабак В. П., В. С. Хандецкий, Є. Шрюфер. Обробка сигналів: підручник. К.: Либідь, 1996. 392 с.
9. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. для вузов. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Радио и связь, 1986. 512 с.