maΣprof∫.ru

Высшая математика – просто и доступно!

Интенсивный курс
«Определённые и несобственные интегралы»

Настоящая методичка *представляет собой продолжение* ***курса «Горячие интегралы»*** *и* ***позволит вам:*** ***1) закрепить навыки решения неопределённых интегралов, 2) научиться решать основные определённые и несобственные интегралы*** ***в кратчайшие сроки!*** ***3) освоить типовые тематические задачи*** *(нахождение площади плоской фигуры и объёма тела вращения)*

Предполагается, что читатель умеет интегрировать и понимает, что такое пределы.

Автор: Александр Емелин

Содержание

1. Определённые интегралы

И снова здравствуйте. И снова фирменное вступление одной строкой ☺

1.1. Понятие определённого интеграла

В общем виде ***определенный интеграл*** записывается так:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Что прибавилось по сравнению с неопределенным интегралом? Прибавились ***пределы интегрирования***. *Нижний предел интегрирования* стандартно обозначается буквой a. *Верхний предел интегрирования* стандартно обозначается буквой b. …и мы выполним все пункты от «а» до «бэ» =) (с) Отрезок $[a;b]$ называют ***отрезком интегрирования***.

И перед тем, как перейдём к практике, **небольшое faq по теме:**

Что такое определенный интеграл? С формальной точки зрения, определённый интеграл – это ЧИСЛО. Да-да, самое что ни на есть обычное число:

Что значит решить определенный интеграл? Решить определенный интеграл – это значит, найти это число.

Как решить определенный интеграл? С помощью знакомой со школы ***формулы Ньютона-Лейбница***:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Формулу перепишите на листок и наклейте на самом видном месте!

Этапы решения определенного интеграла следующие:

1) Сначала находим ***первообразную функцию*** $F(x)$ (неопределенный интеграл). Обратите внимание, что константа C в определенном интеграле **не добавляется**. Обозначение $\Big|_a^b$ является чисто техническим, и вертикальная палочка не несет никакого математического смысла, по сути – это просто отчёркивание. Зачем нужна сама запись $F(x)\Big|_a^b$? Подготовка для применения *формулы Ньютона-Лейбница*.

2) Подставляем значение *верхнего предела* в первообразную функцию: $F(b)$.

3) Подставляем значение *нижнего предела* в первообразную функцию: $F(a)$.

4) Рассчитываем (без ошибок!) разность $F(b) - F(a)$. Готово.

Вопрос следующий, а на самом деле первый: **всегда ли существует определенный интеграл?** Нет, не всегда.

Например, интеграла $\int_{-5}^{-2}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ не существует, поскольку отрезок интегрирования $[-5;-2]$ не входит в *область определения* подынтегральной функции (значения под квадратным корнем не могут быть отрицательными). А вот менее очевидный пример: $\int_{-2}^{3} tgx dx$. Такого интеграла тоже не существует, так как в точках $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$ отрезка $[-2;3]$ не существует тангенса. И я рекомендую сразу окинуть взглядом *Приложение* ***Графики основных функций и их построение*** и оценить ситуацию геометрически: там, где нет графика – те значения и не входят в *область определения* той или иной функции.

Таким образом, **чтобы определенный интеграл вообще существовал, нужно чтобы подынтегральная функция была <u>непрерывной</u> на отрезке интегрирования**. Понятие *непрерывности* тоже интуитивно понятно – если график можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги, то данная функция непрерывна на этом участке.

И из вышесказанного следует **первая важная рекомендация:** перед тем, как приступить к решению ЛЮБОГО определенного интеграла, желательно убедиться в том, что подынтегральная функция **непрерывна на отрезке интегрирования**.

В противном случае может получиться такой казус:
$\int_{-5}^{-2}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2(\sqrt{x})\Big|_{-5}^{-2}$ …что делать???! – ведь нельзя же подставлять отрицательные числа под корень!

А сделать надо было следующее: предварительно проверить функцию на непрерывность. И если для решения *(в контрольной работе, на зачете, экзамене)* вам предложен несуществующий интеграл вроде $\int_{-5}^{-2}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ или $\int_{-2}^{3} tgx dx$, то можно дать ответ, что интеграла не существует, и обосновать, почему. Но не нужно. Скорее всего, это опечатка, и преподаватель предложит вам корректный вариант, поэтому будет хорошей идеей сразу получить консультацию на этот счёт.

Может ли определенный интеграл быть равен отрицательному числу? Может. И отрицательному числу. И нулю. Может даже получиться бесконечность, но это уже будет несобственный интеграл, коим посвящена следующая глава.

Может ли нижний предел интегрирования быть больше верхнего предела интегрирования? Может, и такая ситуация реально встречается на практике:

$\int_{6}^{0}(1-x)dx$ – интеграл преспокойно вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница.

Без чего не обходится математика? Конечно же, без всевозможных свойств:

1.2. Некоторые свойства определённого интеграла

В этом маленьком параграфе я перечислю свойства, которые имеют большое значение для практики.

1. В определенном интеграле можно переставить верхний и нижний предел интегрирования, сменив у интеграла знак:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Например, в определенном интеграле $\int_6^0 (1-x)dx$ перед интегрированием целесообразно поменять пределы интегрирования на «привычный» порядок:

$\int_6^0 (1-x)dx = -\int_0^6 (1-x)dx = \int_0^6 (x-1)dx$ – в таком виде интегрировать значительно удобнее.

«Минус» перед интегралом – тоже плохая вещь (легко запутаться), и поэтому по возможности от него следует избавляться, что я и сделал на втором шаге.

2. Как и для неопределенного интеграла, для определённого интеграла справедливо **свойство линейности**. Это свойство состоит в двух правилах:

$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, где $k = const$ – множитель-константу (число) можно вынести за знак интеграла. Или наоборот, внести (так, в предыдущем пункте я как раз внёс –1 внутрь интеграла).

$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$ – данное правило справедливо не только для двух, но и для бОльшего количества слагаемых*, например, для трёх:

$$\int_a^b (f(x) + g(x) - h(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx - \int_a^b h(x)dx$$

*** Напоминаю**, *что разность – есть алгебраическая сумма:* $g - h = g + (-h)$

3. Для определенного интеграла работает **формула интегрирования по частям**:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

4. В определенном интеграле можно проводить **замену переменной интегрирования** и **подводить под знак дифференциала**. Но по сравнению с неопределенным интегралом тут есть своя специфика, о которой мы поговорим в соответствующем параграфе.

Разумеется, существуют и другие свойства, но для ближайшей практики этого вполне достаточно. И она никогда не была так близкА:

1.3. Простейшие определённые интегралы

Начинаем:

Пример 1

Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^2 2x^2dx$$

Сначала **решение**, затем комментарии:

$$\int_1^2 2x^2dx \overset{(1)}{=} 2\int_1^2 x^2dx \overset{(2)}{=} 2\cdot\frac{1}{3}(x^3)\Big|_1^2 \overset{(3)}{=} \frac{2}{3}(2^3-1^3)=\frac{2}{3}(8-1)=\frac{2}{3}\cdot 7=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}$$

(1) Выносим константу за знак интеграла.

(2) Интегрируем по таблице *(см. Приложения)* с помощью самой популярной формулы $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C$. Появившуюся константу $\frac{1}{3}$ целесообразно сразу отделить от x^3 и вынести за скобку *(кстати, ещё одно свойство)*. Делать это не обязательно, но желательно – зачем лишние вычисления?

(3) Используем *формулу Ньютона-Лейбница* $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$.

Сначала подставляем в x^3 верхний предел, затем – нижний предел. Проводим дальнейшие вычисления и получаем окончательный ответ.

Пример 2

Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^5 \frac{7dx}{x}$$

Это пример для самостоятельного решения. **ОБЯЗАТЕЛЬНО прорешиваем все предлагаемые мной примеры от руки!!** Ручка и тетрадь под рукой? Отлично. Кроме того, открываем и освежаем в памяти ***Таблицу интегралов*** *и* ***Таблицу производных*** *(см. приложения к курсу)*.

…всё получилось? Свериться с решениями можно в конце книги.

Также проверьте, есть ли у вас калькулятор.

Хотя бы самый простой. Но лучше с функциями (логарифмами, синусами и т.д.). На всякий бедственный случай прилагаю к курсу ***калькулятор в Экселе***. А ещё лучше, если у вас есть калькулятор, который считает **обыкновенные дроби**. Потому что с дробовиком всё нипочём.

…оружие под рукой? Продолжаем!

Пример 3

Вычислить определенный интеграл

$$\int_{-2}^{4}(8+2x-x^2)dx$$

Сначала **решение**, затем комментарии:

$$\int_{-2}^{4}(8+2x-x^2)dx \overset{(1)}{=} 8\int_{-2}^{4}dx+2\int_{-2}^{4}xdx-\int_{-2}^{4}x^2dx \overset{(2)}{=} 8(x)\Big|_{-2}^{4}+2\cdot\frac{1}{2}(x^2)\Big|_{-2}^{4}-\frac{1}{3}(x^3)\Big|_{-2}^{4} \overset{(3)}{=}$$

$$=8(4-(-2))+(4^2-(-2)^2)-\frac{1}{3}(4^3-(-2)^3)=8\cdot 6+(16-4)-\frac{1}{3}(64+8)=$$

$$=48+12-24=36$$

(1) Используем свойство линейности определенного интеграла.

(2) Интегрируем по таблице, при этом все появившиеся константы выносим – они не будут участвовать в подстановке верхнего и нижнего предела.

(3) Для каждого из трёх слагаемых применяем формулу Ньютона-Лейбница и рассчитываем $F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$.

СЛАБОЕ ЗВЕНО в определенном интеграле – это ошибки вычислений, в частности, часто встречающаяся ПУТАНИЦА В ЗНАКАХ.

Поэтому будьте внимательны! Особое внимание заостряю на 3-м слагаемом: $-\frac{1}{3}(4^3-(-2)^3)=-\frac{1}{3}(64+8)$ – первое место в хит-параде ошибок по невнимательности, здесь очень часто теряют минус: $-\frac{1}{3}(4^3-(-2)^3)=-\frac{1}{3}(64-8)$ (особенно, когда подстановка верхнего и нижнего предела проводится устно и не расписывается подробно).

Следует заметить, что рассмотренный способ решения – не единственный, и даже при небольшом опыте его можно значительно сократить. Примерно так:

$$\int_{-2}^{4}(8+2x-x^2)dx=\left(8x+x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{4}=\left(32+16-\frac{64}{3}\right)-\left(-16+4+\frac{8}{3}\right)=\frac{80}{3}+\frac{28}{3}=36$$

Здесь устно используем правила линейности, устно интегрируем по таблице и в результате получаем всего лишь одну скобку с отчёркиванием пределов: $\left(8x+x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{4}$ (в отличие от трёх скобок в первом способе). Далее в «цельную» *первообразную функцию*, сначала подставляем 4, затем –2, опять же выполняя все действия в уме.

Какие **достоинства** у «короткого» способа решения? Быстрота и компактность записи. А **недостатки**? Повышенный риск допустить ошибку. Поэтому «чайникам» я рекомендую подробное решение. А лучше оба. Для сверки.

Кстати, о сверках и проверках. **Запомните красное правило**:

Перед тем, как использовать формулу Ньютона-Лейбница, полезно провести проверку: а сама-то первообразная найдена правильно?

Ибо, если она найдена неверно, то и всё остальное тоже будет неправильным.

Так, применительно к рассмотренному примеру: перед тем, как в первообразную функцию $8x+x^2-\frac{x^3}{3}$ подставлять верхний и нижний пределы, желательно проверить, а правильно ли вообще найден неопределенный интеграл? Дифференцируем:

$$\left(8x+x^2-\frac{x^3}{3}\right)'=8(x)'+(x^2)'-\frac{1}{3}(x^3)'=8\cdot 1+2x-\frac{1}{3}\cdot 3x^2=8+2x-x^2$$ – получена исходная подынтегральная функция, значит, неопределенный интеграл найден верно. Теперь можно и формулу Ньютона-Лейбница применить.

Пример 4

Вычислить определенный интеграл

$$\int_{-3}^{1}(2x^2+3x-1)dx$$

Решаем самостоятельно. И коротко, и подробно.

1.4. Замена переменной в определенном интеграле

Для определённого интеграла справедливы все типы замен, что и для неопределенного интеграла, но **иногда её проводить нельзя** (о чём позже). Ну а основная новизна состоит в том, **как поменять пределы интегрирования при замене**? В примерах ниже я постараюсь привести такие типы замен, которые не встречались ранее:

Пример 5

Вычислить определенный интеграл

$$\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{xdx}{\sqrt{x^4+16}}$$

Во-первых, замечаем, что отрезок $[0;\sqrt{3}]$ **входит** в *область определения подынтегральной функции* (подкоренное выражение больше нуля вообще при любом x).

И главный вопрос здесь не в определённом интеграле, а в том, какую подобрать замену. Смотрим в ***Таблицу интегралов*** *(см. приложения)* и прикидываем, на что у нас больше всего похожа подынтегральная функция? Очевидно, что на длинный логарифм: $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|+C$. Но есть одна неувязочка: в табличном интеграле под корнем x^2, а в нашем – «икс» в четвёртой степени. И из этих рассуждений следует идея замены – неплохо бы нашу четвертую степень превратить в квадрат. Это реально.

Сначала готовим интеграл к замене:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{x^4+16}} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2)^2+16}} = (*)$$ (прерываем решение для промежуточных действий)

Из вышеуказанных соображений совершенно естественно напрашивается замена: $x^2 = t$, после чего в знаменателе будет всё хорошо: $\sqrt{t^2+16}$.

Теперь выясним, во что превратится оставшаяся часть xdx подынтегрального выражения, для этого навешиваем дифференциалы на обе части:

$d(x^2) = dt$

раскрываем дифференциал слева:

$2xdx = dt$

и выражаем нужный нам кусок:

$xdx = \frac{dt}{2}$

По сравнению с заменой в неопределенном интеграле, у нас добавляется **дополнительный этап**: **находим новые переделы интегрирования.**

Это достаточно просто. Смотрим на нашу замену $t = x^2$ и старые пределы интегрирования $a = 0$, $b = \sqrt{3}$.

Сначала подставляем в $t = x^2$ *нижний предел интегрирования*, то есть, ноль:

$t_1 = 0^2 = 0$,

затем подставляем *верхний предел интегрирования* – корень из трёх:

$t_2 = (\sqrt{3})^2 = 3$

И всего-то лишь…. Завершаем решение:

$$(*) \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{t^2+16}} \overset{(2)}{=} \frac{1}{2}\left(\ln\left|t+\sqrt{t^2+16}\right|\right)\Big|_0^3 \overset{(3)}{=} \frac{1}{2}\left(\ln\left(3+\sqrt{25}\right) - \ln\left(0+\sqrt{0+16}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 8 - \ln 4) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{4}\right) = \frac{\ln 2}{2} \approx 0{,}35$$

(1) В соответствии с проведённой заменой, **записываем новый интеграл с новыми пределами интегрирования**.

(2) Это простейший табличный интеграл, интегрируем по таблице. Константу $1/2$ лучше оставить за скобками, чтобы она не мешалась в дальнейших вычислениях. Справа отчеркиваем линию с указанием новых пределов интегрирования $\Big|_0^3$ – это подготовка для применения *формулы Ньютона-Лейбница*.

(3) Используем формулу Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ и упрощаем результат по известной формуле разности логарифмов.

И особенно приятно, что **никаких обратных замен проводить не нужно**.

А сейчас пара интегралов для самостоятельного решения. Какие замены проводить – постарайтесь догадаться самостоятельно.

Пример 6

Вычислить определенные интегралы

а) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\cos^2 x + 1}$, б) $\int\limits_{1}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2}$

Решения и ответы в конце книги. *Приложение* ***Тригонометрические таблицы*** – в помощь, в изучаемой теме этот справочный материал требуется довольно часто.

И теперь обещанный момент о **правомерности замены**. **В определённой ситуации её проводить нельзя!** Так, интеграл $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\cos^2 x + 1}$, казалось бы, разрешим с помощью *универсальной тригонометрической подстановки* $tg\frac{x}{2} = t$, однако верхний предел интегрирования *(«пи»)* **не входит** в *область определения* этого тангенса и поэтому данная подстановка нелегальна! Таким образом, **функция-«замена» должна быть непрерывна <u>во всех</u> точках отрезка** $[a;b]$ **интегрирования**.

1.5. А если подвести функцию под знак дифференциала?

Как вы помните, это ускоренная реализация тех же действий – своеобразная «замена без замены». И если мы подводим функцию под знак дифференциала, то **менять пределы интегрирования не нужно**! Почему? Потому что в этом случае <u>нет фактического перехода к новой переменной</u>. Недавний пациент:

$$\int\limits_{1}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2} = -\int\limits_{1}^{2} e^{\frac{1}{x}} d\left(\frac{1}{x}\right) = -(e^{\frac{1}{x}})\Big|_1^2 = -(e^{\frac{1}{2}} - e^1) = e - \sqrt{e}$$

, то есть, вместо академичной замены $\frac{1}{x} = t$ с росписью новых пределов интегрирования, мы сразу взяли интеграл. Но здесь на первом шаге нужно проанализировать, что $d\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)' dx = -\frac{dx}{x^2}$ и добавить минус перед интегралом, чтобы в результате раскрытия дифференциала получился исходный интеграл. И ещё могут возникнуть непонятки с интегрированием – в этом случае удобно МЫСЛЕННО обозначить $\frac{1}{x}$ буквой «тэ». И, конечно, выполнить проверку *первообразной функции* дифференцированием: $-(e^{\frac{1}{x}})' = -e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = -e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}$.

Таким образом, если определённый интеграл не очень сложен,
то всегда старайтесь подвести функцию под знак дифференциала!

Это быстрее, это компактнее в оформлении, и на самом деле – это обыденность, в чём вы убедитесь десятки раз. И раза так два-три прямо сейчас :)

Пример 7

Вычислить определенные интегралы

а) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin\frac{x}{3}dx$,   б) $\int\limits_0^1 (1-e^{-2x})dx$,   в) $\int\limits_{-1}^{e} \frac{\ln x dx}{4x}$

Не пропускаем задания!! ;), и обязательно сверяемся в конце книги.

1.6. Метод интегрирования по частям в определенном интеграле

Здесь новизны еще меньше. Всё, что справедливо для неопределенного интеграла, в полной мере справедливы и для определенного интеграла. Плюсом идёт то, что в ***формуле интегрирования по частям*** добавляются *пределы интегрирования*:

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$$

Формулу Ньютона-Лейбница здесь нужно применить дважды: для произведения uv и после того, как мы возьмём интеграл $\int\limits_a^b vdu$. Ну и, конечно, *подынтегральные функции* должна быть *непрерывны* на $[a;b]$, ибо на «нет» и интеграла нет.

Пример я подобрал не самый простой, но очень познавательный:

Пример 8

Вычислить определенный интеграл

$$\int\limits_0^{\pi/4} xtg^2xdx = (*)$$

Сразу начинаем **решение** и сразу прерываем его «звёздочкой». Этот тип интеграла не встречался ранее, он тоже берётся по частям. Используем стандартную схему интегрирования по частям:

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = tg^2xdx \Rightarrow v = \int tg^2xdx = tgx - x$

Интеграл от квадрата тангенса я разбирал в **1-й части курса**, но на чистовике, естественно, всё расписываем подробно, вспоминая заодно насущные тригонометрические формулы:

$$\int tg^2xdx = \int\frac{\sin^2 xdx}{\cos^2 x} = \int\frac{(1-\cos^2 x)dx}{\cos^2 x} = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = tgx - x$$

Далее открываем решение и на первом шаге:

(1) расписываем правую часть формулы $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$:

$$(*)\overset{(1)}{=}(x(tgx-x))\Big|_0^{\pi/4}-\int_0^{\pi/4}(tgx-x)dx\overset{(2)}{=}\frac{\pi}{4}\cdot\left(tg\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)-0\cdot(tg0-0)-\int_0^{\pi/4}tgxdx+\int_0^{\pi/4}xdx\overset{(3)}{=}$$

$$=\frac{\pi}{4}\cdot\left(1-\frac{\pi}{4}\right)+\ln|\cos x|\Big|_0^{\pi/4}+\frac{1}{2}(x^2)\Big|_0^{\pi/4}\overset{(4)}{=}\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{16}+\ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right|-\ln|\cos 0|+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{16}-0^2\right)=$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{16}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\ln 1+\frac{\pi^2}{32}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{32}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-0=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{32}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2) Для произведения $x(tgx-x)$ применяем формулу Ньютона-Лейбница. Для оставшегося интеграла используем свойство линейности, разделяя его на два интеграла. **Не путаемся в знаках!**

(3) Берем два оставшихся интеграла. Интеграл $\int tgxdx$ также разобран ранее, однако, не поленюсь: $\int tgxdx=\int\frac{\sin xdx}{\cos x}=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=-\ln|\cos x|$

(4) Применяем формулу Ньютона-Лейбница для двух найденных первообразных.

Далее ответ доводится «до ума». Повторюсь, будьте ПРЕДЕЛЬНО ВНИМАТЕЛЬНЫ при подстановках и заключительных вычислениях. Здесь допускают ошибки чаще всего.

Если честно, я недолюбливаю формулу $\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$ и, по возможности, … обхожусь вообще без нее! Рассмотрим **второй способ решения**, который, с моей точки зрения, более рационален:

На первом этапе находим неопределенный интеграл:

$\int xtg^2xdx=(*)$

Интегрируем по частям:

$u=x\Rightarrow du=dx$

$dv=tg^2xdx\Rightarrow v=\int tg^2xdx=tgx-x$

$\int udv=uv-\int vdu$

$$(*)=x(tgx-x)-\int(tgx-x)dx=xtgx-x^2-\int tgxdx+\int xdx=$$

$$=xtgx-x^2+\ln|\cos x|+\frac{x^2}{2}=xtgx-\frac{x^2}{2}+\ln|\cos x|$$

Первообразная функция найдена. …Кстати, все ли поняли, почему в определённом интеграле не имеет смысла приплюсовывать константу C?

В чём преимущество такого похода? Не нужно «таскать за собой» пределы интегрирования, действительно, замучаться можно десяток раз записывать мелкие значки пределов интегрирования.

На втором этапе проводим проверку (обычно на черновике).

Тоже логично. Ведь если неправильно найден неопределённый интеграл, то… правильно! И это лучше выяснить немедленно, дифференцируем ответ:

$$\left(xtgx-\frac{x^2}{2}+\ln|\cos x|\right)'=(x)'tgx+x(tgx)'-\frac{1}{2}(x^2)'+(\ln|\cos x|)'=$$

$$=1\cdot tgx+x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{2}\cdot 2x+\frac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)'=tgx+\frac{x}{\cos^2 x}-x-\frac{\sin x}{\cos x}=$$

$$=tgx+\frac{x}{\cos^2 x}-x-tgx=\frac{x}{\cos^2 x}-x=\frac{x(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}=\frac{x\sin^2 x}{\cos^2 x}=xtg^2x$$ – получена исходная подынтегральная функция, значит, первообразная найдена верно.

И третий этап – применение формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int_0^{\pi/4}xtg^2xdx=\left(xtgx-\frac{x^2}{2}+\ln|\cos x|\right)\Bigg|_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{4}tg\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{32}+\ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right|-\left(0\cdot tg0-\frac{0^2}{2}+\ln\cos 0\right)=$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{32}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-(0-0+0)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{32}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Здесь тоже есть существенная выгода! – это гораздо меньший риск запутаться в подстановках и вычислениях, т.к. *формула Ньютона-Лейбница* применяется всего лишь один раз.

Рассмотренный алгоритм решения
можно применить для любого определенного интеграла!

И нужно, если интеграл трудный. Так, если «чайник» решит разобранный интеграл по формуле $\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$ (1-м способом), то 99% где-нибудь допустит ошибку.

Уважаемый студент, **распечатай и наклей** рядом с *формулой Ньютона-Лейбница*:

1) Сначала находим неопределенный интеграл (первообразную функцию). Если не получилось, повышаем свои навыки интегрирования.

2) Проверяем найденную *первообразную* дифференцированием. Здесь, кстати, может статься, позабылись **производные** – и тогда самое время подтянуть свои навыки!

3) Используем формулу Ньютона-Лейбница. Все вычисления проводим ПРЕДЕЛЬНО ВНИМАТЕЛЬНО – тут самое слабое звено задания. Царь тут!

И на холодную закуску интеграл для самостоятельного решения.

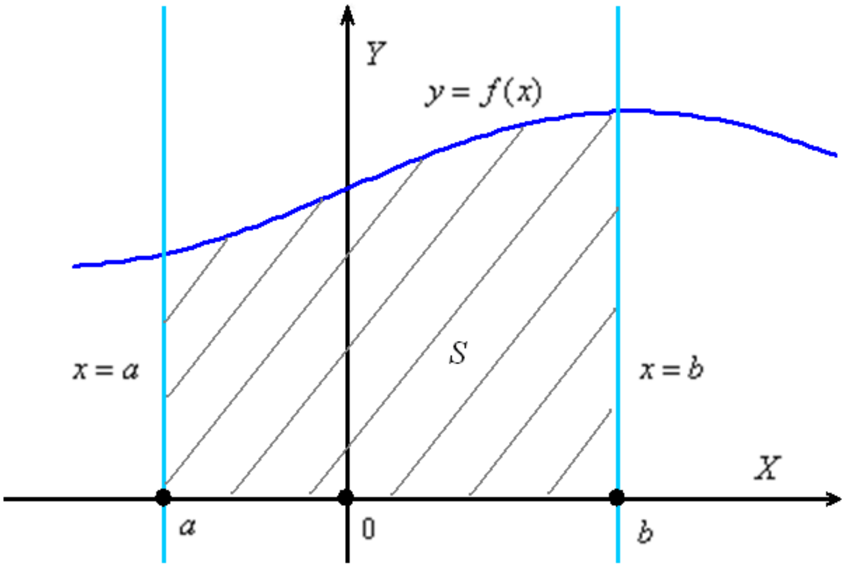
Пример 9

Вычислить определенный интеграл

$$\int_{-1/2}^{1/2}\arccos 2xdx$$

1.7. Геометрический смысл определённого интеграла

Начнем с ***криволинейной трапеции***. *Криволинейной трапецией* называется плоская фигура, ограниченная осью OX, прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком функции $y = f(x)$, которая *непрерывна* и *неотрицательна* на отрезке $[a;b]$:



И смысл прост. Определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ **численно равен *площади*** этой *криволинейной трапеции* (заштрихована на чертеже). Площадь, как многие помнят, стандартно обозначается буквой S.

В самом начале курса я говорил, что определенный интеграл – это число. А сейчас пришла пора констатировать еще один полезный факт. **С точки зрения геометрии, это число – есть ПЛОЩАДЬ**.

Рассмотрим, например, определенный интеграл $\int_1^4 \frac{xdx}{\sqrt{x}+1}$. Подынтегральная функция $y = \frac{x}{\sqrt{x}+1}$ задает на плоскости вполне определённую *непрерывную* кривую, располагающуюся выше оси абсцисс (нам даже не важнА её форма), а сам определенный интеграл $\int_1^4 \frac{xdx}{\sqrt{x}+1}$ численно равен площади соответствующей криволинейной трапеции.

И вообще, любому **определенному интегралу** (если он существует) **геометрически соответствует площадь некоторой фигуры**. Эта фигура не обязательно расположена выше оси абсцисс, она может располагаться и ниже, может располагаться и там и там; может быть более простой или более сложной.

В простых случаях (квадрат, треугольник и т.д.) площадь легко рассчитывается по «школьным» формулам, но что делать в случаях остальных? **Привлечь на помощь определённый интеграл!** Рассмотрим самую популярную и самую распространенную тематическую задачу:

1.8. Как вычислить площадь фигуры с помощью определённого интеграла?

Задачка это школьная, но, несмотря на то, почти 100% встретится в вашем курсе высшей математики. Поэтому **со всей серьёзностью** отнесёмся ко ВСЕМ примерам, и первое, что нужно сделать – это ознакомиться с *Приложением* ***Графики основных функций и их построение***, чтобы освежить в памяти технику построения элементарных графиков. …Есть? Отлично! Типовая формулировка задания звучит так:

Пример 10

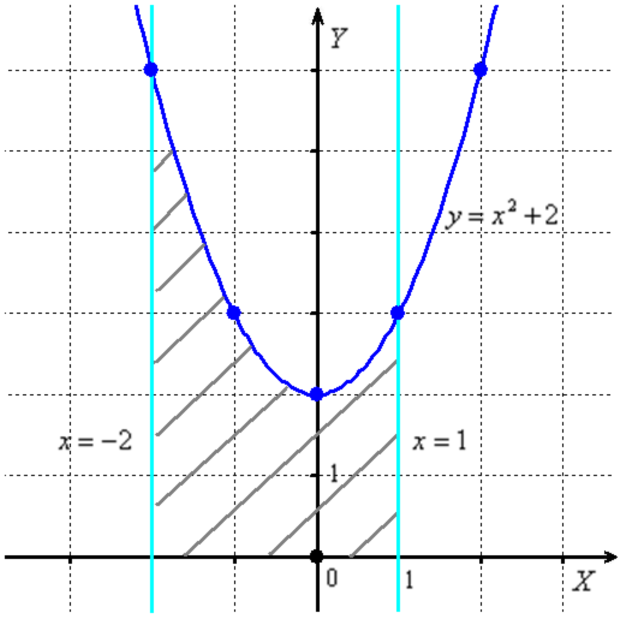
Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2,\ y = 0,\ x = -2,\ x = 1$.

И **первый важнейший этап решения** состоит как раз в **построении чертежа**. При этом я рекомендую следующий порядок: **сначала** лучше построить все *прямые* (если они есть) и только **потом** – *параболы*, *гиперболы*, графики других функций.

В нашей задаче: *прямая* $y = 0$ определяет ось OX, *прямые* $x = -2,\ x = 1$ параллельны оси OY и *парабола* $y = x^2 + 2$ симметрична относительно оси OY, для неё находим несколько опорных точек:

x	0	-1	1	-2	2
y	2	3	3	6	6

Искомую фигуру желательно штриховать:



Второй этап состоит в том, чтобы **правильно составить** и **правильно вычислить** определённый интеграл. На отрезке $[-2;1]$ график функции $y = x^2 + 2$ расположен **над осью** OX, поэтому искомая площадь:

$$S = \int_{-2}^{1} (x^2 + 2)dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x\right)\Big|_{-2}^{1} = \frac{1}{3} + 2 - \left(-\frac{8}{3} - 4\right) = \frac{1}{3} + 2 + \frac{8}{3} + 4 = 9$$

Ответ: $S = 9$ *ед.*^{2}

После того, как задание выполнено, полезно взглянуть на чертёж и прикинуть, реалистичный ли получился ответ.

И мы «на глазок» подсчитываем количество заштрихованных клеточек – ну, примерно 9 наберётся, похоже на правду. Совершенно понятно, что если бы у нас получилось, скажем, 20 квадратных единиц, то, очевидно, где-то допущена ошибка – в построенную фигуру 20 клеток явно не вмещается, от силы десяток. Если ответ получился отрицательным, то задание тоже решено некорректно.

Пример 11

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 4,\ x = 2,\ x = 4$ и осью OX

Быстренько разминаемся (обязательно!) и рассматриваем «зеркальную» ситуацию – когда криволинейная трапеция расположена **под осью** OX :

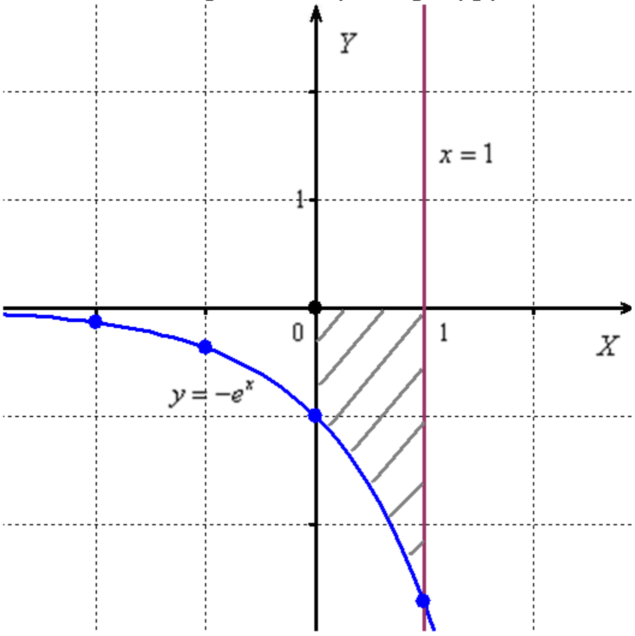
Пример 12

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -e^x$, $x = 1$ и координатными осями.

Решение: найдём несколько опорных точек для построения экспоненты:

x	-2	-1	0	1	2
y	$-e^{-2} \approx -0{,}135$	$-e^{-1} \approx -0{,}135$	-1	$-e \approx -2{,}718$	$-e^2 \approx -7{,}389$

и выполним чертёж, получая фигуру площадью около двух клеток:



Если криволинейная трапеция расположена **не выше** оси OX , то её площадь можно найти по формуле: $S = -\int\limits_a^b f(x)dx$.

В данном случае: $S = -\int\limits_0^1 (-e^x)dx = \int\limits_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$

Ответ: $S = (e-1)$ $ед^2 \approx 1{,}72$ $ед.^2$ – ну что же, очень и очень похоже на правду.

На практике чаще всего фигура расположена и в верхней и в нижней полуплоскости, а поэтому от простейших школьных задачек мы переходим к более содержательным примерам:

Пример 13

Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = -x$.

Решение: сначала нужно выполнить чертеж, при этом нас особо интересуют точки пересечения параболы $y = 2x - x^2$ и прямой $y = -x$, поскольку здесь будут находиться *пределы интегрирования*. Найти их можно двумя способами. Первый способ – аналитический. Составим и решим уравнение:

$$2x - x^2 = -x$$

$$3x - x^2 = 0$$

$$x(3 - x) = 0$$

таким образом:

$$x_1 = 0 = a,\ x_2 = 3 = b$$

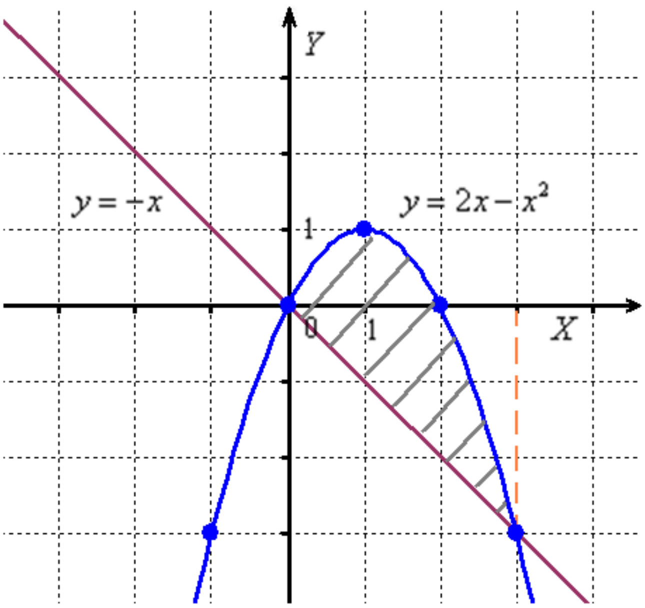
Достоинство аналитического способа состоит в его **точности**, а **недостаток** – в **длительности** (и в этом примере нам ещё повезло). Поэтому во многих задачах бывает выгоднее построить линии поточечно, при этом пределы интегрирования выясняются как бы «сами собой».

С прямой $y = -x$ всё понятно, а вот для построения параболы удобно найти её вершину, для этого возьмём производную и приравняем её к нулю:

$y' = (2x - x^2)' = 2 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$ – именно в этой точке и будет находиться вершина. И, в силу симметрии параболы, остальные опорные точки найдём по принципу «влево-вправо»:

x	1	0	2	-1	3
y	1	0	0	-3	-3

Выполним чертеж:



А теперь рабочая формула: если на отрезке $[a;b]$ некоторая *непрерывная* функция $f(x)$ **больше либо равна** *непрерывной* функции $g(x)$, то площадь фигуры, ограниченной графиками этих функций и отрезками прямых $x=a,\ x=b$, можно найти по формуле:

$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$$

Здесь уже не надо думать, где расположена фигура – над осью или под осью, а, грубо говоря, **важно, какой из двух графиков ВЫШЕ** относительного другого.

В нашем примере очевидно, что на отрезке $[0;3]$ парабола располагается выше прямой, а поэтому из $2x-x^2$ нужно вычесть $-x$

Завершение решения может выглядеть так:

На отрезке $[0;3]$: $2x-x^2\ge -x$, по соответствующей формуле:

$$S=\int_0^3 (2x-x^2-(-x))dx=\int_0^3 (3x-x^2)dx=\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\bigg|_0^3=\frac{27}{2}-\frac{27}{3}-(0-0)=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}$$

Ответ: $S=4\frac{1}{2}\ ед.^2$

Следует отметить, что простые формулы, рассмотренные в начале параграфа – это частные случаи формулы $S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$. Поскольку ось OX задаётся уравнением $y=0$, то одна из функций будет нулевой, и в зависимости от того, выше или ниже лежит криволинейная трапеция, мы получим формулу $S=\int_a^b f(x)dx$ либо $S=-\int_a^b g(x)dx$.

А сейчас пара типовых задач для самостоятельного решения

Пример 14

Найти площадь фигур, ограниченных линиями:

а) $y=x^2-2$, $y=2x+1$.

б) $x+2y=0$, $x=2$, $y=\sqrt{2x}$

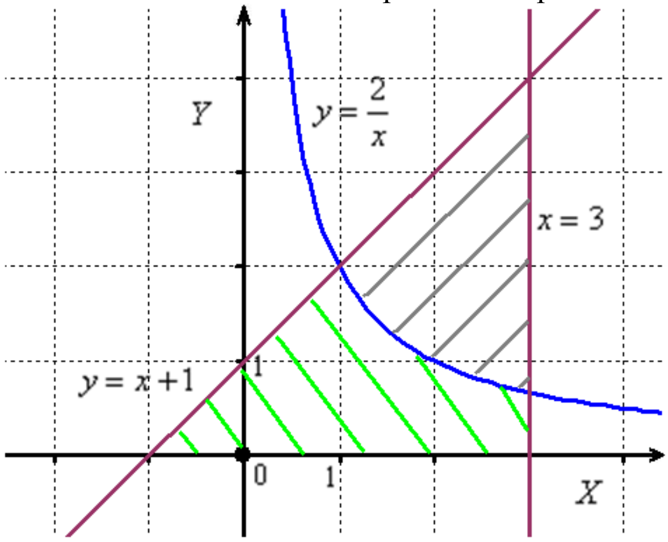
Решение с чертежами и краткими комментариями в конце книги

В ходе решения рассматриваемой задачи иногда случается забавный казус. Чертеж выполнен правильно, интеграл решён правильно, но по невнимательности… **найдена площадь не той фигуры**, именно так несколько раз ошибался ваш покорный слуга. Вот реальный случай из жизни:

Пример 15

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{2}{x}$, $y=x+1$, $y=0$, $x=3$

Решение: выполним бесхитростный чертёж:



Хитрость же состоит в том, что **искомая площадь заштрихована зелёным цветом** (внимательно смотрИте на условие – чем ограничена фигура!). Но на практике по невнимательности нередко возникает «глюк», что нужно найти площадь фигуры, которая заштрихована серым цветом! Особое коварство состоит в том, что прямую $y=x+1$ можно недочертить до оси OX, и тогда мы вовсе не увидим нужную фигуру.

Этот пример полезен ещё и тем, что в нём площадь фигуры считается с помощью двух определённых интегралов. Действительно:

1) на отрезке $[-1;1]$ над осью OX расположен график прямой $y=x+1$;

2) на отрезке $[1;3]$ над осью OX расположен график гиперболы $y=\frac{2}{x}$.

Совершенно понятно, что площади можно и нужно сложить:

$$S=\int_{-1}^{1}(x+1)dx+\int_{1}^{3}\frac{2dx}{x}=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-1}^{1}+2(\ln x)\Big|_{1}^{3}=\frac{1}{2}+1-\left(\frac{1}{2}-1\right)+2(\ln 3-\ln 1)=$$

$$=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}+1+2(\ln 3-0)=2+2\ln 3=2(1+\ln 3)$$

Ответ: $S=2(1+\ln 3)$ $ед^2 \approx 4{,}2$ $ед.^2$

И познавательный пример для самостоятельного решения:

Пример 16

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{2}{1+\sqrt{x}}$, $x+y=1$, $x=4$ и координатными осями.

Итак, **систематизируем важные моменты этой задачи**:

На первом шаге ВНИМАТЕЛЬНО изучаем условие – КАКИЕ функции нам даны? Ошибки бывают даже здесь, в частности, арк**ко**тангенс $y = arcctg$ зачастую принимают за арктангенс. Это, кстати, относится и к другим заданием, где встречается арккотангенс.

Далее следует ПРАВИЛЬНО выполнить чертёж. Сначала лучше построить *прямые* (если они есть), затем графики других функций (если они есть ☺). Последние во многих случаях выгоднее строить *поточечно* – найти несколько опорных точек и аккуратно соединить их линией.

Но здесь могут подстерегать следующие трудности. Во-первых, из чертежа не всегда понятны *пределы интегрирования* – так бывает, когда они великИ по модулю или когда дробные. На mathprofi.ru в **соответствующей статье** я рассмотрел пример с параболой $y = -\frac{3}{4}x^2$ и прямой $y = \frac{-2x-1}{4}$, где из чертежа не понятна одна из точек их пересечения. В таких случаях следует использовать аналитический метод, составляем уравнение:

$$\frac{-2x-1}{4} = -\frac{3}{4}x^2 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 2x - 1 = 0$$

и находим его корни:

$x_1 = -\frac{1}{3} = a$ – *нижний предел интегрирования*, $x_2 = 1 = b$ – *верхний предел*.

Во-вторых, не всегда понятен «внешний вид» линии, и функция $y = \frac{2}{1+\sqrt{x}}$ (Пример 16) – яркий тому пример. Я и сам «с ходу» не представляю, как выглядит график этой функции. Здесь можно воспользоваться специализированными программами или онлайн сервисами (а-ля «построить график онлайн»), а в экстремальной ситуации найти побольше опорных точек (штук 10-15), чтобы поточнее провести «неизвестную» кривую.

Ну и, конечно, я призываю вас повышать свои **знания и навыки в графиках**, в частности, приведу прямую ссылку на особо полезную статью:

http://mathprofi.ru/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii.html

После того, как чертёж построен, анализируем полученную фигуру – ещё раз окидываем взглядом предложенные функции и перепроверяем, ТА ЛИ это фигура. Затем анализируем её форму и расположение, бывает, что площадь достаточно сложнА и тогда её следует разделить на две, а то и на три части.

Составляем определённый интеграл или несколько интегралов по формуле $S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$, все основные вариации мы разобрали выше.

Решаем определённый интеграл (ы). При этом он может оказаться достаточно сложным, и тогда применяем поэтапный алгоритм: **1)** находим первообразную и проверяем её дифференцированием, **2)** используем формулу Ньютона-Лейбница.

Результат полезно проверить с помощью программного обеспечения / онлайн сервисов или просто «прикинуть» по чертежу по клеточкам. Но и то, и другое не всегда осуществимо, поэтому **крайне внимательно относимся к каждому этапу решения!**

1.9. Объём тела вращения

Рассмотрим ещё одно распространённое приложение определённого интеграла.

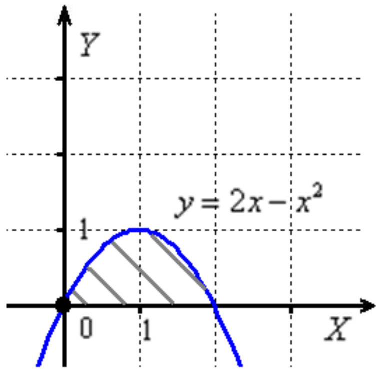
Представьте некоторую плоскую фигуру на координатной плоскости. Представили? ... интересно, кто что представил… ☺ Её площадь мы уже находили. Но, кроме того, данную фигуру можно ещё и вращать: вокруг оси OX или вокруг оси OY.

В рамках данного курса я остановлюсь на стандартном варианте:

Пример 17

Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$ вокруг оси OX.

Решение: как и в задаче на нахождение площади, **решение начинается с чертежа плоской фигуры**. Да, с точно такого же чертежа:



Искомая плоская фигура заштрихована серым цветом, именно она и вращается вокруг оси OX. В результате получается такое… загадочное яйцо.

Объем тела вращения можно вычислить по формуле:

$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$, где $f(x)$ – *неотрицательная* или *неположительная* функция, график которой ограничивает плоскую фигуру на отрезке $[a;b]$. Заметьте, что здесь не нужно думать, над осью расположена криволинейная трапеция или под осью, т.к. возведение в квадрат стирает разницу между функциями $y = f(x)$ и $y = -f(x)$.

В нашей задаче:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)dx =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5} \right)\Bigg|_0^2 = \pi \cdot \left(\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} - (0 - 0 + 0) \right) = \frac{16\pi}{15}$$

Интеграл почти всегда получается простой, главное, быть ВНИМАТЕЛЬНЫМ.

Ответ: $V = \frac{16\pi}{15}$ $ед^3. \approx 3{,}35$ $ед.^3$ *(кубических единиц - «кубиков» единичного объема)*

Напоминаю, *что* $\pi = 3{,}14159\ldots$, *обычно принимают* $\pi \approx 3{,}14$ *либо* $\pi \approx 3{,}1416$.

Пример 18

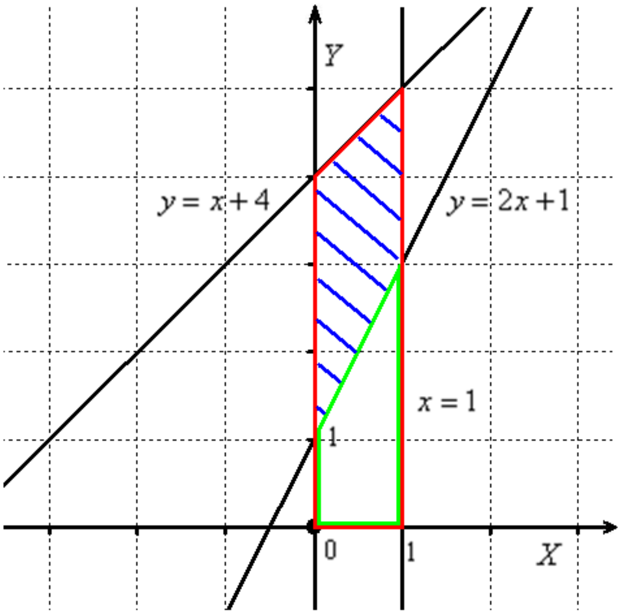
Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $2x - y - 2 = 0$, $y = 0$, $x = 3$

Тренируемся и переходим к более содержательному случаю:

Пример 19

Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y = 2x + 1$, $y = x + 4$, $x = 0$ и $x = 1$.

Решение: изобразим на чертеже плоскую фигуру, ограниченную линиями $y = 2x + 1$, $y = x + 4$, $x = 0$, $x = 1$, не забывая, что уравнение $x = 0$ задаёт ось OY:



Искомая фигура заштрихована синим цветом. При её вращении вокруг оси OX получается такой сюрреалистический бублик с четырьмя углами. Объем этого бублика вычислим как *разность объёмов* с помощью стандартной формулы $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.

1) Фигура, обведённая красным цветом ограничена сверху *прямой* $y = x + 4$, поэтому: $V_1 = \pi \int_0^1 (x+4)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^2 + 8x + 16)dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} + 4x^2 + 16x \right)\Big|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{3} + 4 + 16 \right) = \frac{61\pi}{3}$

2) Фигура, обведенная зеленым цветом ограничена сверху прямой $y = 2x + 1$, поэтому: $V_2 = \pi \int_0^1 (2x+1)^2 dx = \pi \int_0^1 (4x^2 + 4x + 1)dx = \pi \left(\frac{4x^3}{3} + 2x^2 + x \right)\Big|_0^1 = \pi \left(\frac{4}{3} + 2 + 1 \right) = \frac{13\pi}{3}$

3) Объем искомого тела вращения: $V = V_1 - V_2 = \frac{61\pi}{3} - \frac{13\pi}{3} = \frac{48\pi}{3} = 16\pi$

Ответ: $V = 16\pi$ *ед.*$^3 \approx 50{,}3$ *ед.*^{3}

Решение можно оформить и короче, примерно в таком духе:

$V = V_1 - V_2 = \pi\int\limits_0^1 (x+4)^2 dx - \pi\int\limits_0^1 (2x+1)^2 dx = \ldots$, но, как вы уже поняли, за скорость приходится расплачиваться повышенным риском допустить ошибку.

И ещё **хочу вас предостеречь от оценки результата «на глазок»**. **При вычислении объёмов этого делать НЕ НАДО**. Дело в том, что человек склонен неверно оценивать объёмы. Посмотрите на плоскую фигуру в прорешанной задаче – она вроде бы невелика по площади, а объем тела вращения составил чуть более 50 «кубиков», что кажется слишком большим. Кстати, среднестатистический человек за всю свою жизнь выпивает жидкость объемом с комнату площадью 18 квадратных метров, что, наоборот, кажется слишком маленьким объемом.

И после лирического отступления уместно решить изящную и, конечно же, важную;) задачу:

Пример 20

Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y=1$, $y=-x$, $y=x^3$

Дополнительные примеры можно найти в **соответствующей статье сайта**, в том числе вращение вокруг оси OY, ну а сейчас есть более срочный материал:

1.10. Интеграл от чётной функции по симметричному относительно 0 отрезку

Сначала вспомним, что такое *чётность* функции. Функция является **чётной**, если для неё выполнено условие $f(-x)=f(x)$. Для того, чтобы проверить этот факт, ВМЕСТО x нужно подставить $-x$, простейшие примеры:

$f(x)=x^2$, проверка: $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$,
$f(x)=|x|$, проверка: $f(-x)=|-x|=|x|=f(x)$,
$f(x)=\cos x$, и косинус, как многие помнят, тоже чётный: $\cos(-x)=\cos x$,

таким образом, все перечисленные функции являются чётными.

Теперь рассмотрим определённый интеграл вида $\int\limits_{-c}^{c} f(x)dx$. Легко заметить, что отрезок интегрирования $[-c;c]$ симметричен относительно нуля.

Если подынтегральная функция $f(x)$ является **чётной**, то интеграл $\int\limits_{-c}^{c} f(x)dx$ можно **вычислить по половине отрезка, а результат – удвоить**: $\int\limits_{-c}^{c} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{c} f(x)dx$.

Почему? …догадались? Рассмотрим конкретный пример с чертежом:

Пример 21

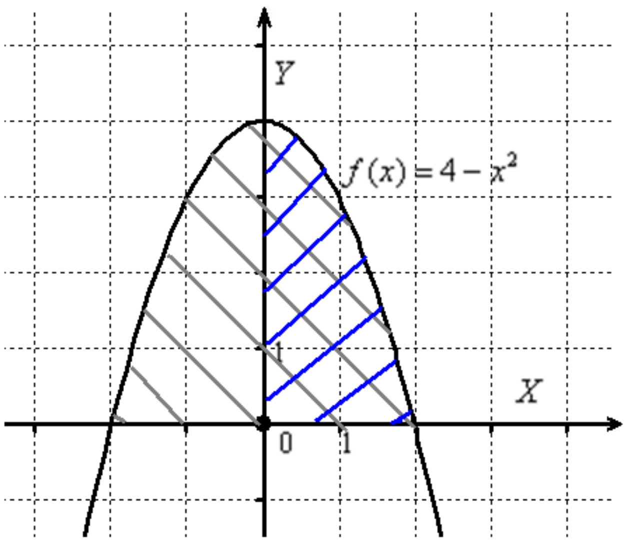
Вычислить определенный интеграл $\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx$

Хоть это и очевидно, но проверим функцию $f(x)=4-x^2$ на чётность:
$f(-x)=4-(-x)^2=4-x^2=f(x)$

И, согласно правилу, на симметричном относительно нуля отрезке $[-2;2]$ наш интеграл можно «споловинить»:

$$\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx=2\int_{0}^{2}(4-x^2)dx=2\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2=2\left(8-\frac{8}{3}-0+0\right)=2\cdot\frac{16}{3}=\frac{32}{3}=10\frac{2}{3}$$

А сейчас геометрическая интерпретация: **график любой чётной функция**, в частности $f(x)=4-x^2$, **симметричен относительно оси** OY, и сейчас вам особо понравится геометрический смысл определённого интеграла:)



Определенный интеграл $\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx$ численно равен площади фигуры, которая заштрихована серым цветом. Но, в силу чётности подынтегральной функции и симметрии её графика, достаточно вычислить площадь синей фигуры, а результат удвоить. Одинаковые же половинки!

Возможно, некоторые скажут: *«Да зачем это всё нужно? – можно ведь и так вычислить определенный интеграл»*. Можно. Давайте вычислим:

$$\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx=\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2}=8-\frac{8}{3}-\left(-8+\frac{8}{3}\right)=8-\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3}=\frac{32}{3}=10\frac{2}{3}$$

Но удобно ли было подставлять отрицательный нижний предел? Не очень-то. И «минус» тут частенько теряют. Поэтому гораздо проще и приятнее подставить ноль.

Замечу также, что это ещё был простой демонстрационный пример, на практике всё бывает хуже, особенно, когда имеешь дело с *двойными* и *тройными* интегралами, где вычислений и так хватает.

Разминочный интеграл для самостоятельного решения:

Пример 22

$$\int_{-1}^{1}(2x^4 - x^2 + 3)dx$$

И обратите внимание: **когда вам предложено ПРОСТО ВЫЧИСЛИТЬ определенный интеграл, то чертеж выполнять не нужно!** Достаточно убедиться в чётности функции (как правило, устно) и перед решением сделать соответствующий письменный комментарий. Кстати, о птичках:

Пример 23

1) Вычислить определенный интеграл: $-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$.

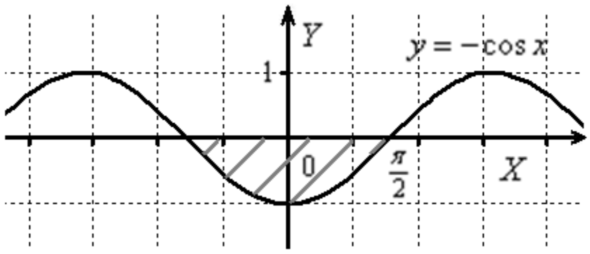
2) Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линией $y = -\cos x$ и осью OX на промежутке $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Внимание! Это две РАЗНЫЕ задачи! Решаем:

1) Подынтегральная функция является *чётной*, отрезок интегрирования симметричен относительно нуля, поэтому:

$$-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx = -2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx = -2(\sin x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = -2(1-0) = -2$$ – **определённый интеграл получился отрицательным, и так бывает!**

2) Теперь задача на нахождение площади фигуры:



На отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ график функции расположен ниже оси OX, поэтому:

$$S = -\int_{a}^{b} f(x)dx = -\left(-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx\right) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx = 2(\sin x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 2(1-0) = 2 \text{ ед.}^2$$ – **площадь отрицательной быть не может!** Для этого в формуле и нужен «минус».

Заметьте, что чётность косинуса никто не отменял, поэтому мы опять споловинили отрезок и удвоили интеграл.

Творческий пример для самостоятельного решения + новинка:

Пример 24

Вычислить площадь круга, ограниченного окружностью $x^2 + y^2 = 4$

Напоминаю, что уравнение $x^2 + y^2 = r^2$ задаёт окружность радиуса r с центром в начале координат; а функции $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ – верхнюю и нижнюю полуокружности соответственно.

Новизна же состоит в ранее не встречавшейся замене $x = r\sin t$, где новые пределы интегрирования удобно отыскать из обратной функции $t = \arcsin\dfrac{x}{r}$. И, конечно, приятно, что ответ известен заранее, по школьной формуле, площадь круга:

$S = \pi r^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$ *ед.*^{2}

Забавно, что формула и выводится с помощью этого интеграла.

1.11. А если подынтегральная функция нечётная?

Вам понравится ещё больше ☺

Кратко напомню, что нечётная функция характеризуется свойством $f(-x) = -f(x)$, и для его проверки ВМЕСТО x опять же нужно подставить $-x$. Если удастся вынести минус и получить ту же функцию с противоположным знаком, то функция нечётная. Тривиальные примеры:

$f(x) = x$, проверка: $f(-x) = -x = -f(x)$,

$f(x) = x^3$, проверка: $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

и нечётен, например, синус: $f(x) = \sin x$, поскольку $\sin(-x) = -\sin x$

Если подынтегральная функция $f(x)$ является **нечётной**, то $\int_{-c}^{c} f(x)dx = 0$. Такие интегралы можно встретить довольно часто:

$$\int_{-2}^{2}(x^3 - x)dx = 0 \qquad \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} tgx dx = 0 \qquad \int_{-1}^{1} x^2 arctgx dx = 0 \qquad \int_{-3}^{3} xe^{x^2} dx = 0 \qquad \ldots$$

Почему все они равны нулю?

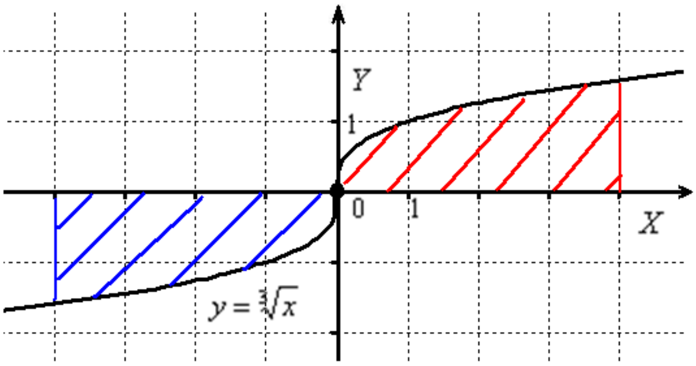
Рассмотрим очередной пример с иллюстрацией, и заодно я продолжу знакомить вас с графиками функций, которые не встречались ранее:

Пример 25

Вычислить определенный интеграл $\int_{-4}^{4}\sqrt[3]{x}dx$

График функции $f(x)=\sqrt[3]{x}$ представляет собой «лежащую на боку» *кубическую параболу* $f(x)=x^3$, и данная функция тоже нечётна, т.к. «минус» выносится из-под нечётного корня: $f(-x)=\sqrt[3]{-x}=-\sqrt[3]{x}=-f(x)$.

График любой нечётной функции симметричен относительно начала координат, в частности:



И из центральной симметрии следует равенство площадей, которые заштрихованы красным и синим цветом.

При вычислении определенного интеграла $\int_{-4}^{4}\sqrt[3]{x}dx$ площадь, которая заштрихована синим цветом, формально является отрицательной. А площадь, которая заштрихована красным цветом – положительной. Поскольку площади равны и формально противоположны по знаку, то они взаимно уничтожаются, следовательно, $\int_{-4}^{4}\sqrt[3]{x}dx=0$.

И еще раз подчеркиваю разницу между заданиями:

1) Любой определенный интеграл – **это всё равно формально площадь** (пусть даже отрицательная). Поэтому $\int_{-c}^{c}f(x)dx=0$, так как в силу нечётности функции $f(x)$ площади «взаимно уничтожатся». Что и проиллюстрировано на конкретном примере.

2) Задача на нахождение площади – это **совершенно другая задача**. Так, если бы нам было предложено найти площадь фигуры в данном примере, то её следовало бы вычислить следующим образом: $S=-\int_{-4}^{0}\sqrt[3]{x}dx+\int_{0}^{4}\sqrt[3]{x}dx$

Применять ли рассмотренное свойство на практике? На самом деле вопрос не так прост, как кажется. Когда вам предложен сложный пример с большим количеством вычислений, то можно, и даже уместно указать, что такой интеграл равен нулю, сославшись на нечетность функции и симметричность промежутка интегрирования относительно нуля. Как говорится, знание – сила, а незнание – рабочая сила.

Но когда вам предложен короткий пример, то лучше «прикинуться простачком» и решить его подробно:

$\int_{-4}^{4}\sqrt[3]{x}dx=\int_{-4}^{4}x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{4}(x^{\frac{4}{3}})\Big|_{-4}^{4}=\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{x^4}\right)\Big|_{-4}^{4}=\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{4^4}-\sqrt[3]{(-4)^4}\right)=\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{4^4}-\sqrt[3]{4^4}\right)=0$, ну а то, что интеграл равен нулю, вы будете знать заранее ;-)

2. Несобственные интегралы

И, собственно, о них:

2.1. Понятие несобственного интеграла

Это «родственник» определённого интеграла. …Нормальное такое определение ☺. И сразу возникает вопрос: **чем отличается** ***несобственный интеграл*** от «собрата»? Он может отличаться *пределами интегрирования*:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx,\quad \int_{-\infty}^{b} f(x)dx,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$ – то есть, один или даже оба предела *бесконечны*,

при этом подынтегральная функция *непрерывна* на промежутке интегрирования.

Такие интегралы получили название ***несобственные интегралы первого рода***.

Кроме того, несобственный интеграл может быть «внешне похож» на определённый интеграл и иметь вид $\int_a^b f(x)dx$. Но есть один нюанс. Подынтегральная функция *не определена* в точке a или b. Или на обоих концах. Или даже во внутренних точках отрезка $[a;b]$.

Это так называемые ***несобственные интегралы второго рода***.

Что значит решить несобственный интеграл? В отличие от определённого интеграла, тут есть три варианта. **Решить несобственный интеграл – это значит** найти *конечное число*, **либо** получить бесконечность, **либо** выяснить, что несобственного интеграла не существует.

1) Если несобственный интеграл равен *конечному числу*, то говорят, что он ***сходится***. Число может быть как положительным, так и отрицательным. Или нулём.

2) Если несобственный интеграл равен бесконечности (со знаком «плюс» или «минус»), то говорят, он ***расходится***.

3) И в ряде случаев несобственного интеграла может вовсе не существовать. Даже если подынтегральная функция *непрерывна* на промежутке интегрирования! (вспоминаем, что определённый интеграл при этом условии существует всегда).

Как решить несобственный интеграл? С помощью той же формулы Ньютона-Лейбница. С некоторыми особенностями.

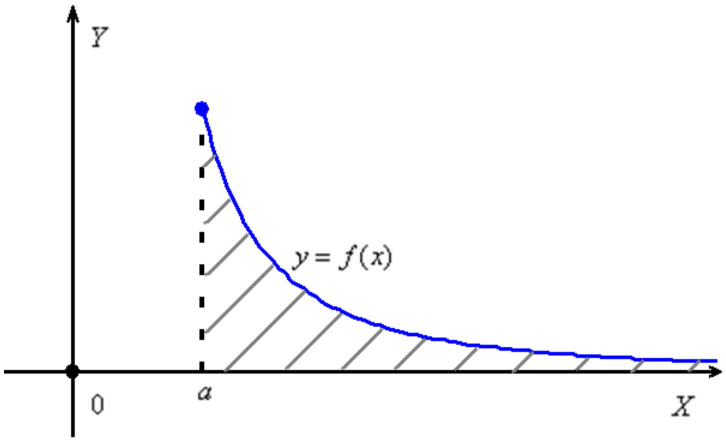
И здесь вы должны понимать и уметь решать несложные пределы функций.

В чём смысл несобственного интеграла? Геометрически – это тоже площадь *(если интеграл существует)*. Но площадь своеобразная. И с этим своеобразием мы познакомимся прямо на следующей странице:

2.2. Несобственный интеграл первого рода

Это интеграл с бесконечным (и) *пределом интегрирования*, и самый популярный на практике вариант таков: $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$. При этом подынтегральная функция $f(x)$ **непрерывна** на промежутке $[a;+\infty)$, и **этот важный факт следует всегда проверять, и проверять в первую очередь!** Ибо если есть разрывы, то это уже особый случай.

Для определённости положим, что $f(x) > 0$, и тогда типичная *криволинейная трапеция* будет выглядеть так:



Обратите внимание, что она бесконечна (не ограничена справа), и **несобственный интеграл** $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ **численно равен её площади**.

И первая мысль, которая приходит в голову: *«раз фигура бесконечная, то* $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = +\infty$», иными словами, площадь тоже бесконечна. **Так быть может.** И такой интеграл называют *расходящимся* (как отмечалось выше). **Но**. Как это ни парадоксально, площадь бесконечной фигуры может равняться… конечному числу! Например, $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = 2$. Такие интегралы называют *сходящимися*.

Если криволинейная трапеция лежит **под осью** OX, то получится «минус» бесконечность либо отрицательное конечное число, т.е. со знаками всё, как у «собрата».

И для решения рассматриваемого интеграла нужно немного модифицировать формулу Ньютона-Лейбница $\int_{a}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{a}^{b} = F(b) - F(a)$ – с той поправкой, что $b = +\infty$, а это, как вы догадываетесь, попахивает применением теории пределов:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} F(x)\Big|_{a}^{b} = \lim_{b \to +\infty} (F(b) - F(a))$$

В чем отличие от определённого интеграла? Да ни в чём особенном! Как и в определенном интеграле, нужно уметь находить первообразную функцию $F(x)$ (неопределенный интеграл), уметь применять формулу Ньютона-Лейбница. Единственное, что добавилось – это вычисление предела.

Следует отметить, что **строгое определение** несобственного интеграла даётся именно через предел, и иногда его не существует.

Классический пример: $\int_{0}^{+\infty}\cos x dx$. Несмотря на то, что косинус *непрерывен* на промежутке $[0;+\infty)$, этого несобственного интеграла не существует! Почему? Всё очень просто, потому что:

$$\int_{0}^{+\infty}\cos x dx = \lim_{b\to+\infty}(\sin x)\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}(\sin b - \sin 0) = \lim_{b\to+\infty}(\sin b)$$ – не существует соответствующего предела.

Обратите внимание, что вместо привычной буквы x «динамической» переменной выступает буква «бэ». Это не должно смущать или ставить в тупик, потому что другая буква ничем не хуже стандартного «икса». Ну, может, только не такая харизматичная :)

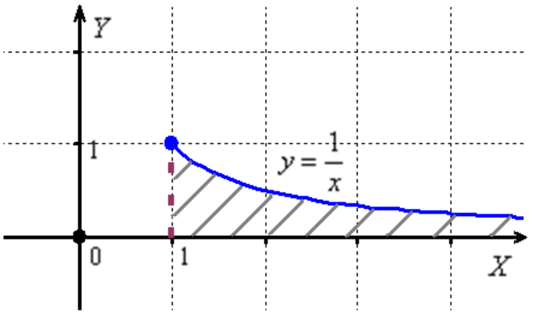
Теперь перейдём к «обычным» задачам и начнём с двух хрестоматийных примеров:

Пример 26

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x}$$

В таких заданиях чертежей строить не нужно, но понимания ради:



Подынтегральная функция $y=\frac{1}{x}$ непрерывна на промежутке $[1;+\infty)$, а значит, перед нами несобственный интеграл 1-рода (не забываем, что есть и другие!). Используем формулу $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}F(x)\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty}(F(b)-F(a))$:

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}(\ln|x|)\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}(\ln b^{\to+\infty} - \ln 1) = +\infty - 0 = +\infty$$ – таким образом, несобственный интеграл **расходится**, т.е. площадь криволинейной трапеции бесконечна.

Не забываем пометить, что $\ln b \to +\infty$. Все поняли, почему? Ещё раз откройте *Приложение* ***Графики функций*** и взгляните на график логарифма: при неограниченном увеличении аргумента ветка логарифма уходит вверх на «плюс» бесконечность.

Таким образом, чтобы не было «затыков» с простейшими пределами, важно знать, как выглядят графики основных элементарных функций!

Чистовое оформление задания может выглядеть так:
“

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=(*)$$

Подынтегральная функция непрерывна на $[1;+\infty)$

$$(*)=\lim_{b\to+\infty}(\ln|x|)\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}(\ln b^{\to+\infty}-\ln 1)=+\infty-0=+\infty$$

*Таким образом, несобственный интеграл **расходится**.*
“

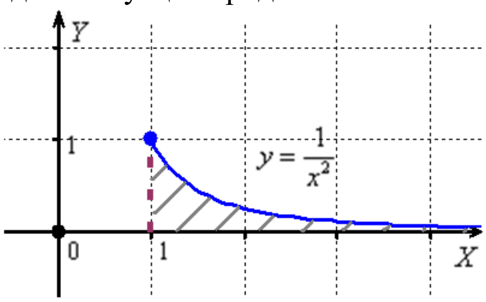
! При оформлении примера всегда указываем, что происходит с подынтегральной функцией – непрерывна она или нет. Этим мы идентифицируем тип несобственного интеграла и обосновываем дальнейшие действия.

Пример 27

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$$

Здесь ситуация вроде бы похожа:



Но: $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=-\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b=-\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b}^{\to 0}-\frac{1}{1}\right)=-(0-1)=1$ – интеграл сходится, и площадь бесконечной криволинейной трапеции равна конечному числу!

Надеюсь ни у кого не возникло проблем с табличным интегралом и пониманием того, что при $b\to+\infty$ ветка гиперболы $\frac{1}{b}^{\to 0}$.

Чистовое оформление примера может быть ещё лаконичнее:
“
Подынтегральная функция непрерывна на $[1;+\infty)$, *таким образом:*

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=-\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b=-\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b}^{\to 0}-\frac{1}{1}\right)=-(0-1)=1$$
“

Тут даже без послесловия обошлось, ибо и так понятно, что интеграл сходится. И, что особенно приятно, никаких чертежей! По условию же не требуется.

Рассмотрим более содержательный пример:

Пример 28

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

$$\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt[4]{(x^2+16)^5}}=(*)$$

Со знаменателем всё хорошо, и подынтегральная функция непрерывна на $[0;+\infty)$. Но интеграл не так прост, особенно для «чайника». Что делать, если интеграл кажется не самым простым или не сразу понятно как его решать?

В этом случае целесообразно применить тот же алгоритм, что и для определённого интеграла,… **вы точно наклеили его на стену?** …Ай-яй-яй – а ведь давно пора организовать дома **красный угол** высшей математики!

1) Сначала попытаемся найти первообразную функцию $F(x)$ (неопределенный интеграл). Если нам не удастся этого сделать, то несобственный интеграл мы, естественно, тоже не решим.

$$\int\frac{xdx}{\sqrt[4]{(x^2+16)^5}}=(*)$$

И тут прямо напрашивается навести под корнем порядок, проведём замену $x^2+16=t$ и навесим на обе части дифференциалы:

$$d(x^2+16)=dt$$

$2xdx=dt$, откуда выразим нужный кусок: $xdx=\dfrac{dt}{2}$

$$(*)=\int\frac{dt}{2\sqrt[4]{t^5}}=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{5}{4}}dt=\frac{1}{2}\cdot(-4)\cdot t^{-\frac{1}{4}}=-2\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{t}}\overset{t=x^2+16}{=}-\frac{2}{\sqrt[4]{x^2+16}}$$

2) Проверим найденную *первообразную* дифференцированием:

$$\left(-\frac{2}{\sqrt[4]{x^2+16}}\right)'=-2\cdot((x^2+16)^{-\frac{1}{4}})'=-2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(x^2+16)^{-\frac{5}{4}}\cdot(x^2+16)'=$$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[4]{(x^2+16)^5}}\cdot 2x=\dfrac{x}{\sqrt[4]{(x^2+16)^5}}$ – в результате получена исходная подынтегральная функция, что и требовалось проверить.

3) И теперь с несобственным интегралом никаких проблем, по формуле $\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}F(x)\Big|_a^b=\lim_{b\to+\infty}(F(b)-F(a))$:

$$\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt[4]{(x^2+16)^5}}=-2\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+16}}\Big|_0^b=-2\lim_{b\to+\infty}\left(\overbrace{\frac{1}{\sqrt[4]{b^2+16}}}^{\to 0}-\frac{1}{\sqrt[4]{0^2+16}}\right)=-2\left(0-\frac{1}{2}\right)=1$$

Точно так же, как и у «собрата», в несобственном интеграле допустима замена переменной с вычислением новых пределов интегрирования, и поэтому решение можно оформить **другим способом**:

$$\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt[4]{(x^2+16)^5}}=(*)$$

Подынтегральная функция непрерывна на $[0;+\infty)$, проведём замену $x^2+16=t$.

$d(x^2+16)=dt$

$2xdx=dt \Rightarrow xdx=\dfrac{dt}{2}$

Вычислим новые пределы интегрирования:

$t_1=0^2+16=16 \qquad t_2=(+\infty)^2+16=+\infty$

$$(*)=\int_{16}^{+\infty}\frac{dt}{2\sqrt[4]{t^5}}=\frac{1}{2}\int_{16}^{+\infty}t^{-\frac{5}{4}}dt=\frac{1}{2}\cdot(-4)\lim_{b\to+\infty}(t^{-\frac{1}{4}})\Big|_{16}^{b}=-2\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{t}}\right)\Big|_{16}^{b}=$$

$$=-2\lim_{b\to+\infty}\left(\overset{\to 0}{\frac{1}{\sqrt[4]{b}}}-\frac{1}{\sqrt[4]{16}}\right)=-2\left(0-\frac{1}{2}\right)=1$$

Но самый продвинутый и быстрый способ – это подвести функцию под знак дифференциала, в этом случае решение будет выглядеть примерно так:

Подынтегральная функция непрерывна на $[0;+\infty)$, таким образом:

$$\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt[4]{(x^2+16)^5}}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(x^2+16)^{-\frac{5}{4}}d(x^2+16)=\frac{1}{2}\cdot(-4)\cdot\lim_{b\to+\infty}(x^2+16)^{-\frac{1}{4}}\Big|_0^b=$$

$$=-2\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{(x^2+16)}}\right)\Big|_0^b=-2\lim_{b\to+\infty}\left(\overset{\to 0}{\frac{1}{\sqrt[4]{(b^2+16)}}}-\frac{1}{\sqrt[4]{16}}\right)=-2\left(0-\frac{1}{2}\right)=1$$

Кому как нравится, кому как удобнее! И, конечно, тут нужно учитывать целесообразность того или иного способа – в зависимости от того, простой интеграл попался или посложнее.

А сейчас два типовых примера для самостоятельного решения:

Пример 29

Исследовать сходимость несобственных интегралов

а) $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}$, б) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$

В пункте «а» используем *метод выделения полного квадрата*. **И обратите внимание на формулировку задания**, если оно сформулировано именно так, то, вообще говоря, нужно дать ответ: «сходится», «расходится» или «не существует». На практике встречаются *неберущиеся интегралы*, и тогда этот вопрос решается не вычислением, а использованием **признаков сравнения**, которые не вошли в настоящий курс ввиду их малой распространенности в «массовых» работах.

2.3. Несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом

Он выглядит так: $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ и отличается тем, что к бесконечности, причём «минус», нужно устремить *нижний предел интегрирования*:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} F(x)\Big|_a^b = \lim_{a\to-\infty}(F(b)-F(a))$$

Пример 30

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{-x}dx$$

Во-первых, обращаем внимание, что подынтегральная функция непрерывна на $(-\infty;0]$, и, кроме того, *неположительна* на этом промежутке: $xe^{-x}\le 0$. Последний факт позволяет сразу сказать, что интеграл (если он существует) равен отрицательному числу либо «минус» бесконечности.

Сам интеграл *берётся по частям*, и, в принципе, для несобственных интегралов можно записать специальные формулы. Но это уже будет немножко извращение, так как **гораздо проще найти неопределённый интеграл, и затем всё остальное**:

$$\int xe^{-x}dx = (*)$$

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$(*) = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} = -(x+1)e^{-x}$$

Не ленимся, **выполняем проверку**, по *правилу дифференцирования произведения*:

$$(-(x+1)e^{-x})' = -(x+1)'e^{-x} - (x+1)(e^{-x})' = -e^{-x} - (x+1)(-e^{-x}) =$$

$$= -e^{-x} + (x+1)e^{-x} = (-1+x+1)e^{-x} = xe^{-x}$$ – исходная подынтегральная функция, ОК.

И, наконец, несобственный интеграл, **тут нужно быть аккуратным в знаках**:

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{-x}dx = -\lim_{a\to-\infty}((x+1)e^{-x})\Big|_a^0 = -\lim_{a\to-\infty}((0+1)e^{-0} - (a+1)_{\to-\infty}\cdot e^{-a}{}_{\to+\infty}) = -(1+\infty) = -\infty,$$

таким образом, несобственный интеграл **расходится**.

Самостоятельно:

Пример 31

$\int_{-\infty}^{0} xe^{x}dx$ …все справились? Да, бывает, возникают трудности и с пределом!

2.4. Что делать, если оба предела интегрирования бесконечны?

Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ тоже встречается на практике, и это очень интересный случай. Для его вычисления без всяких комплексов можно использовать формулу:

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} F(x)\Big|_a^b = \lim\limits_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} (F(b)-F(a))$ – предел с двумя «динамическими» переменными, и давайте рассмотрим простенький демонстрационный интеграл:

Пример 32

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$$

Подынтегральная функция непрерывна всюду, и **прямое решение** таково:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim\limits_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} (arctgx)\Big|_a^b = \lim\limits_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} (arctgb^{\to\frac{\pi}{2}} - arctga^{\to-\frac{\pi}{2}}) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Второй, более академичный **способ** состоит в том, чтобы разделить интеграл на две части, обычно в качестве точки «распила» выбирают ноль:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+1} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$$

Далее разделываемся с каждой половинкой по отдельности:

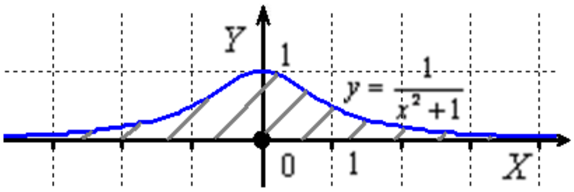
$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+1} = \lim\limits_{a\to-\infty} (arctgx)\Big|_a^0 = \lim\limits_{a\to-\infty} (0-(arctga)^{\to-\pi/2}) = 0-\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim\limits_{b\to+\infty} (arctgx)\Big|_0^b = \lim\limits_{b\to+\infty} ((arctgb)^{\to\pi/2} - 0) = \frac{\pi}{2}$$

после чего суммируем трофеи:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Теперь обратим внимание на подынтегральную функцию. Она является **чётной** и промежуток интегрирования симметричен относительно нуля. Знакомая геометрия:



В несобственных интегралах с бесконечными пределами интегрирования чётностью пользоваться МОЖНО. Аналогично определённому интегралу, промежуток интегрирования выгодно споловинить, а результат – удвоить:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = 2\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = 2\lim\limits_{b\to+\infty} (arctgx)\Big|_0^b = 2\lim\limits_{b\to+\infty} ((arctgb)^{\to\pi/2} - 0) = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$$

Переходим к ещё более любопытному случаю:

Пример 33

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{x^2+1}$$

Подынтегральная функция всюду *непрерывна*, **нечётна** и промежуток интегрирования симметричен относительно нуля. **Но пользоваться этим НЕЛЬЗЯ,** поскольку **интеграл от такой функции может быть вовсе не определён**. Как в нашем случае – по той причине:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{1}{2}\lim_{\substack{b\to+\infty\\a\to-\infty}}(\ln(x^2+1))\Big|_a^b=\frac{1}{2}\lim_{\substack{b\to+\infty\\a\to-\infty}}(\ln(b^2+1)-\ln(a^2+1))$$ – что **этого предела не существует**. Он не определён.

Почему? Потому что переменная «а» может стремиться к «минус» бесконечности БЫСТРЕЕ, чем переменная «бэ» к «плюс» бесконечности. Или наоборот.

К такому же выводу можно прийти, если распилить пациента на две части:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{x^2+1}=\int_{-\infty}^{0}\frac{xdx}{x^2+1}+\int_{0}^{+\infty}\frac{xdx}{x^2+1}$$

и выполнить мартышкин труд:

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{xdx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}(\ln(x^2+1))\Big|_a^0=\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}(\ln 1-\ln(a^2+1)^{\to+\infty})=\frac{1}{2}(0-\infty)=-\infty$$

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{xdx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}(\ln(x^2+1))\Big|_0^b=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}(\ln(b^2+1)^{\to+\infty}-\ln 1)=\frac{1}{2}(\infty-0)=+\infty$$

Несмотря на то, что оба интеграла *по отдельности* расходятся – значение итогового интеграла **не определено**, ибо не определена сумма $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{x^2+1}=-\infty+\infty$. К слову, для чётной функции получаются бесконечности одного знака, и всё хорошо.

Следует отметить, что в теории рассматривается особый случай – когда обе переменные стремятся к бесконечностям с одинаковой скоростью. Это выражается пределом:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}(\ln(x^2+1))\Big|_{-A}^{A}=\frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}(\ln(A^2+1)-\ln((-A)^2+1))=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}(\ln(A^2+1)-\ln(A^2+1))=0$$ и называется ***сходимостью по Коши***. Само же значение предела называют ***главным значением несобственного интеграла*** и ***обозначают*** так: $V.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{x^2+1}=0$ *(Valeur principale de Cauchy)*.

Но это имеет смысл включать в решение тогда, когда вы учитесь сильно углублённо ☺ В «массовой» же практике такие вещи ни к чему, а посему просто даём **ответ**, что **значение интеграла не определено**.

Тонкость же состоит в том, что несобственные интегралы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ от некоторых нечётных функций $f(x)$ определены и в самом деле равны нулю! А именно, это те функции, для которых «половинки» $\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx,\ \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx$ сходятся, равны по модулю и противоположны по знаку *(в силу нечётности функции)*:

Пример 34

Исследовать сходимость несобственного интеграла.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$$

Это пример для самостоятельного решения. Но на практике, разумеется, функция не обязана быть чётной или нечётной, пожалуйста: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$ – используем «двойной» предел или делим интеграл на две части в удобной точке. Если оказалось, что один интеграл равен $+\infty$, а другой $-\infty$, то общего интеграла не существует.

2.5. Несобственные интегралы второго рода

Это интегралы от неограниченных (сверху и / или снизу) функций. Несобственные интегралы второго рода коварно «шифруются» под обычный определенный интеграл и выглядят точно так же: $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$. Но, в отличие от определенного интеграла, подынтегральная функция $f(x)$ терпит **бесконечный разрыв** в точке $x=a$, или в точке $x=b$, или в обеих точках сразу. Или разрывы даже есть внутри.

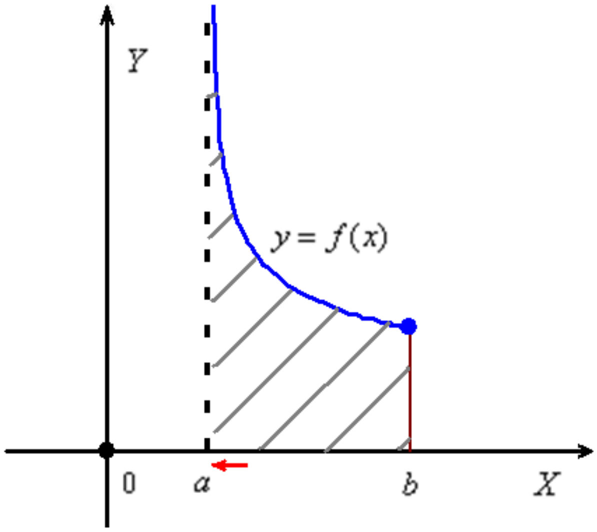
На практике гораздо чаще и одинаково часто встречаются первые два варианта, и сейчас я подброшу монетку… так, начинаем со случая, когда **подынтегральной функции не существует в точке** $x=a$.

Сразу пример, чтобы было понятно: $\int\limits_{3/4}^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$. Вроде бы это определенный интеграл. Но на самом деле нет – это *несобственный интеграл второго рода*: если мы подставим в подынтегральную функцию значение нижнего предела $x=a=\frac{3}{4}$, то знаменатель у нас обращается в ноль, то есть подынтегральной функции просто не существует в этой точке!

Проверим заодно и верхний предел: $\frac{1}{\sqrt[5]{3-4\cdot 1}}=\frac{1}{\sqrt[5]{-1}}=\frac{1}{-1}=-1$. Здесь всё хорошо.

И вообще, **обязательно анализируем весь знаменатель**, а то, может статься, точки разрыва есть и внутри отрезка $[a;b]$ (и это не выдумки). В нашем примере знаменатель обращается в ноль в единственной точке, а значит, вопрос закрыт.

Принципиально этот случай выглядит так:



И здесь почти всё так же, как в интеграле первого рода. Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует, то он численно равен площади заштрихованной *криволинейной трапеции*, которая не ограничена сверху. При этом могут быть два варианта: несобственный интеграл *расходится* (площадь бесконечна) либо он равен *конечному числу* (площадь бесконечной фигуры – конечна!).

Осталось модифицировать формулу Ньютона-Лейбница, я приведу упрощённый по сравнению с учебниками вариант, без лишних букв:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to a+0} F(x)\Big|_x^b = \lim_{x\to a+0}(F(b) - F(x))$$

«Добавка» $+0$ символизирует тот факт, что к точке разрыва мы приближаемся **справа** (красная стрелка на чертеже). Такой предел в теории пределов называют *односторонним пределом*. В данном случае у нас *правосторонний предел*.

Разделаемся с демонстрационным интегралом:

Пример 35

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

$$\int_{3/4}^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$$

Во-первых, ПИСЬМЕННО **констатируем тот факт, что** подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв в точке $a = \frac{3}{4}$. Этим мы идентифицируем тип несобственного интеграла и обосновываем дальнейшие действия.

И приём стар, как чешуя динозавра: сначала всегда можно найти неопределённый интеграл.

Особенно, если пример не прост, и особенно в кубе, если вы «чайник».

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}} = (*)$$

Проведём замену: $3-4x = t \ \Rightarrow \ dt = d(3-4x) = -4dx$, откуда выражаем оставшийся кусок исходного интеграла, сиротливый дифференциал: $dx = -\frac{dt}{4}$

$$(*) = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt[5]{t}} = -\frac{1}{4}\int t^{-\frac{1}{5}}dt = -\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{4}t^{\frac{4}{5}} \overset{t=3-4x}{=} -\frac{5}{16}\sqrt[5]{(3-4x)^4}$$

Проверка: $\left(-\frac{5}{16}\sqrt[5]{(3-4x)^4}\right)' = -\frac{5}{16}((3-4x)^{\frac{4}{5}})' = -\frac{5}{16}\cdot\frac{4}{5}(3-4x)^{-\frac{1}{5}}\cdot(3-4x)' =$
$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{3-4x}}\cdot(0-4) = \frac{1}{\sqrt[5]{3-4x}}$, в чём мы и хотели убедиться.

Теперь вычислим несобственный интеграл, сначала решение, затем комментарии:

$$\int_{3/4}^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}} \overset{(1)}{=} -\frac{5}{16}\lim_{x\to\frac{3}{4}+0} \sqrt[5]{(3-4x)^4}\Big|_x^1 \overset{(2)}{=} -\frac{5}{16}\lim_{x\to\frac{3}{4}+0}\left(\sqrt[5]{(-1)^4} - \overset{\to 0}{\sqrt[5]{(3-4x)^4}}\right) \overset{(3)}{=} -\frac{5}{16}(1-0) = -\frac{5}{16}$$

(1) Используем формулу $\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to a+0} F(x)\Big|_x^b$

(2) и её продолжение $\lim_{x\to a+0} F(x)\Big|_x^b = \lim_{x\to a+0}(F(b)-F(x))$, где при подстановке *нижнего предела интегрирования* вместо «икс» мы формально подставляем «икс».

(3) Но **самое главное**: как выяснить, куда стремится $\sqrt[5]{(3-4x)^4}$, если $x \to \frac{3}{4}+0$?

Всё просто. Мысленно либо на черновике подставляем $\frac{3}{4}+0$ под корень и проводим упрощения: $\sqrt[5]{\left(3-4\left(\frac{3}{4}+0\right)\right)^4} = \sqrt[5]{(3-3-0)^4} = \sqrt[5]{(-0)^4} = \sqrt[5]{+0} = +0$ – в результате получено *бесконечно малое* положительное значение, поэтому $\overset{\to 0}{\sqrt[5]{(3-4x)^4}}$.

Результат получился отрицательным, и в этом нет криминала, просто соответствующая криволинейная трапеция расположена под осью OX.

Решение можно оформить и по-другому. Например, провести ту же замену прямо в несобственном интеграле с пересчётом новых пределов интегрирования. Ну и совсем ~~шикарно~~ обыденно – это с ходу подвести под знак дифференциала:

$$\int_{3/4}^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}} = -\frac{1}{4}\int_{3/4}^{1}(3-4x)^{-\frac{1}{5}}d(3-4x) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{4}\lim_{x\to\frac{3}{4}+0}(3-4x)^{\frac{4}{5}}\Big|_x^1 =$$
$$= -\frac{5}{16}\lim_{x\to\frac{3}{4}+0}\sqrt[5]{(3-4x)^4}\Big|_x^1 = -\frac{5}{16}\lim_{x\to\frac{3}{4}+0}\left(1-\overset{\to 0}{\sqrt[5]{(3-4x)^4}}\right) = -\frac{5}{16}(1-0) = -\frac{5}{16}$$

А сейчас два интеграла для самостоятельного решения:

Пример 36

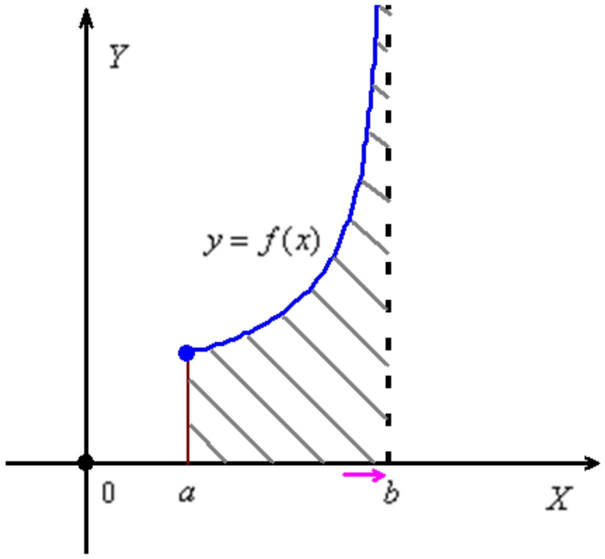
Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость

а) $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^3}}$, б) $\int_{0}^{\frac{1}{e}}\frac{dx}{x\ln^4 x}$

В образце я привёл прямое решение с подведением под знак дифференциала и подробно закомментировал что, к чему и почему стремится. Обязательно разберитесь!

Случай второй. Если подынтегральной функции не существует в точке $x=b$.

Бесконечная *криволинейная трапеция* для такого несобственного интеграла принципиально выглядит так:



Здесь всё так же, за исключением того, что предел у нас стремится **к значению** b **слева**:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to b-0} F(x)\Big|_a^x = \lim_{x\to b-0}(F(x)-F(a))$$

Такой предел называют *левосторонним*, и *бесконечно малая* отрицательная «добавка» -0 означает, что к точке «бэ» мы подбираемся по оси OX именно **слева**.

Пример 37

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

$$\int_1^3\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^5}}$$

Очевидно, что подынтегральная функция терпит *бесконечный разрыв* в точке $b=3$, но **не пренебрегаем и проверяем**: а нет ли разрывов ещё? Нет. По той причине, что знаменатель обращается в ноль в единственной точке.

Интеграл решим методом подведения под знак дифференциала:

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^5}} = \int_1^3 (x-3)^{-\frac{5}{3}} d(x-3) \overset{(1)}{=} -\frac{3}{2}\lim_{x\to 3-0}(x-3)^{-\frac{2}{3}}\Big|_1^x \overset{(2)}{=}$$

$$= -\frac{3}{2}\lim_{x\to 3-0}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}\right)\Bigg|_1^x \overset{(3)}{=} -\frac{3}{2}\lim_{x\to 3-0}\left(\overbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}}^{\to+\infty} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) = -\frac{3}{2}\left(+\infty - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) = -\infty$$

(1) Берём интеграл и используем формулу $\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to b-0} F(x)\Big|_a^x$. Наверное, вы обратили внимание, что **самую формулу на чистовик записывать не нужно**. **Все эти формулы носят частный характер и не предназначены даже для запоминания** – **самое главное**, ПОНИМАТЬ, что происходит в том или ином интеграле, в том или ином случае. Не забываем быстренько выполнить черновую проверку:

$$\left(-\frac{3}{2}(x-3)^{-\frac{2}{3}}\right)' = -\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)(x-3)^{-\frac{5}{3}}\cdot(x-3)' = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-3)^5}}\cdot(1-0) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-3)^5}}, \text{ OK.}$$

(2) Представляем *первообразную* в более удобном виде.

(3) Подставляем в неё *пределы интегрирования*: $\lim_{x\to b-0} F(x)\Big|_a^x = \lim_{x\to b-0}(F(x)-F(a))$, формально считая, что вместо «икс» мы подставляем «икс».

Как выяснить, что при $x\to 3-0$ дробь $\frac{1}{\sqrt[3]{(x-3)^2}} \to +\infty$? Приём тот же самый: мысленно либо на черновике подставляем $3-0$ под корень и проводим упрощения:

$\frac{1}{\sqrt[3]{(3-0-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(-0)^2}} = \frac{1}{+0}$, а единица, делённая на *бесконечно малое* и **положительное** значение – это «плюс» бесконечность: $\frac{1}{+0} = +\infty$.

И на завершающем шаге бесконечность меняет знак: $-\frac{3}{2}\left(+\infty - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) = -\infty$

Будьте очень внимательны в знаках! Да, конечно, несобственный интеграл расходится, но $-\infty$ и $+\infty$ – это две разные вещи, и если вы недосмотрите за знаками, то допустите серьезную ошибку.

Следующие интегралы для самостоятельного рассмотрения:

Пример 38

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

а) $\int_0^1 \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$, б) $-\int_{0,5}^1 \frac{dx}{x\ln^3 x}$

В образце решения я опять использовал «быстрый» способ, но если вам трудно, то, конечно, сначала лучше найти неопределённый интеграл.

И в заключение курса коротко о более редких случаях:

2.6. Когда разрывы на обоих концах и / или внутри отрезка интегрирования

Итак, тот же интеграл $\int_a^b f(x)dx$, но разрывы уже на обоих концах отрезка. По аналогии с несобственными интегралами 1-го рода, здесь можно записать двухстаночный предел, и мне таки придётся добавить пару новых букв, «эпсилон» и «ню»:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to 0}} F(x)\Big|_{a+\eta}^{b-\varepsilon} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to 0}} (F(b-\varepsilon) - F(a+\eta))$$

Но усложнять оформление мы не будем, ведь такой интеграл можно разделить на две части – с дальнейшим вычислением знакомых интегралов. А иногда всё ещё проще.

Редко, да метко, и, между прочим, задачка с «заочки»… прям как Маяковский:)

Пример 39

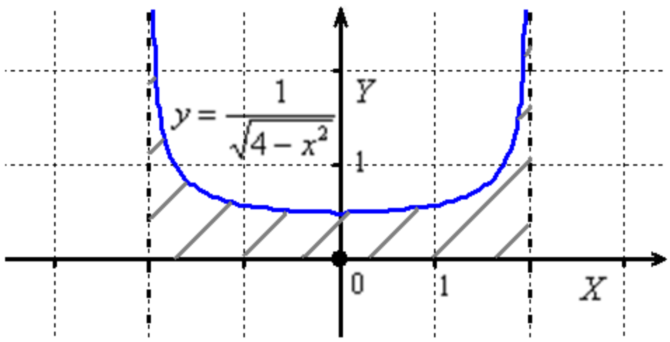
Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

Подынтегральная функция терпит бесконечные разрывы на обоих концах отрезка интегрирования, но это не помеха:

$$\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} + \int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$ – и в то же время, помеха :)

Поскольку подынтегральная функция является **чётной**, а промежуток интегрирования симметричен относительно нуля, то… правильно представили:



И **чётностью пользоваться МОЖНО**. Ибо если одна половинка конечна или бесконечна, то другая – такая же. Поэтому не будем допускать математический грех, интеграл споловиним, а результат удвоим:

$$\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = 2\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2^2-x^2}} =$$

$$= 2\lim_{b\to 2-0}\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\Big|_0^b = 2\lim_{b\to 2-0}\left(\left(\arcsin\frac{b}{2}\right)^{\to\pi/2} - \arcsin 0\right)\Big|_0^b = 2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \pi$$

…опять это удивительное число.

Следующий интеграл для самостоятельного решения:

Пример 40

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} tgx dx$$

Точно так же, как у аналогичных интегралов 1-го рода, **нечетностью функции пользоваться НЕЛЬЗЯ**. Да, если интеграл сходится, то он действительно будет равен нулю, но если расходится, то… – смотрите образец решения!

Но, разумеется, подынтегральная функция может оказаться «обычной», да и промежуток интегрирования не симметричным относительно нуля:

Пример 41

$$\int_{0}^{2} \frac{dx}{x(x-2)}$$

Заметим, что подынтегральная функция отрицательна на интервале $(0;\,2)$, а значит, сразу можно сказать, что результат *(конечный или бесконечный)* должен получиться отрицательным. И алгоритм тот же, делим интеграл на две части:

$$\int_{0}^{2} \frac{dx}{x(x-2)} = \int_{0}^{1} \frac{dx}{x(x-2)} + \int_{1}^{2} \frac{dx}{x(x-2)}$$

Чтобы не «таскать за собой» пределы интегрирования, сначала удобно найти неопределённый интеграл. Выделяем полный квадрат в знаменателе и используем табличную формулу $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$ – с той поправкой что ВМЕСТО x у нас $(x-1)$:

$$\int \frac{dx}{x(x-2)} = \int \frac{dx}{x^2-2x} = \int \frac{dx}{x^2-2x+1-1} = \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1-1}{x-1+1}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|$$

Контроль: $\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|\right)' = \frac{1}{2}\left(\ln|x-2| - \ln|x|\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\right) = \frac{x-(x-2)}{2(x-2)x} = \frac{1}{x(x-2)}$

Вычислим первый интеграл – с разрывом в точке $a=0$:

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{x(x-2)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0+0} \ln\left|\frac{x-2}{x}\right|\Bigg|_{x}^{1} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0+0}\left(\ln|-1| - \ln\left|\frac{0-2}{x_{\to +0}}\right|\right) = \frac{1}{2}\left(\ln 1 - \ln|-\infty|\right) = \frac{1}{2}(0-\infty) = -\infty$$

Разберитесь, что куда стремится! И второй, с разрывом $b=2$:

$$\int_{1}^{2} \frac{dx}{x(x-2)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 2-0} \ln\left|\frac{x-2}{x}\right|\Bigg|_{1}^{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 2-0}\left(\ln\left|\frac{x-2}{x}\right| - \ln|-1|\right) = \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{-0}{2}\right| - 0\right) = \frac{1}{2}\cdot\ln(+0) = -\infty$$

Таким образом: $\int_{0}^{2} \frac{dx}{x(x-2)} = -\infty - \infty = -\infty$, т.е. несобственный интеграл расходится.

Как быть, если точка разрыва находится прямо на отрезке интегрирования? Точно так же! Алгоритм такой же. Самостоятельно:

Пример 42

$$\int_0^3 \frac{dx}{x^2-1}$$

Встречаются ли такие примеры на практике? Да, реально встречаются, и поэтому со всей серьёзностью отнеситесь к этим, вроде бы несерьёзным примерам.

Следует отметить, что для интегралов 2-го рода тоже вводится понятие *сходимости по Коши*, но я оставлю эту информацию за кадром, т.к. она не входит в аптечку скорой математической помощи. И напоследок что-нибудь вкусное:

2.7. Интегралы-«ассорти»

Такие интегралы включают в себя и бесконечность, и точки разрыва, например:

Пример 43

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

Этот интеграл похож на интеграл 1-го рода, но, кроме того, подынтегральная функция терпит *бесконечный разрыв* в точке $a=0$. Как быть? Точно так же, делим интеграл на 2 части, в качестве точки «распила» удобно выбрать единицу:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x} = \int_0^1 \frac{dx}{x} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

Разделаемся с несобственным интегралом второго рода:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{x\to 0+0} \ln|x|\Big|_x^1 = \lim_{x\to 0+0} (\ln 1 - \ln|x|) = 0 - \ln(+0) = -(-\infty) = +\infty,$$

а несобственный интеграл первого рода $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$ – уже найден ранее.

Таким образом: $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty + \infty = +\infty$, т.е. интеграл-«ассорти» **расходится**.

Но если вам встретился подобный интеграл, то, скорее всего, это опечатка. А может, и нет. Особенно, если у вас углублённый курс обучения. Так или иначе, **здесь имеет смысл проконсультироваться с преподавателем**.

И я вас поздравляю! Теперь вы во всеоружии на долгие многие темы вышмата!

Места осталось мало, и поэтому оставляю ссылку на соответствующий раздел портала, также читайте: *К.А. Бохан* 1-й том, *Г.М. Фихтенгольц*, 2-й том, *Н.С. Пискунов*.

3. Решения и ответы

Пример 2: Решение:

$$\int_1^5 \frac{7dx}{x} = 7\int_1^5 \frac{dx}{x} = 7(\ln x)\Big|_1^5 = 7(\ln 5 - \ln 1) = 7(\ln 5 - 0) = 7\ln 5$$

***Пример 4: Решение**: подробный способ:*

$$\int_{-3}^{1}(2x^2+3x-1)dx = 2\int_{-3}^{1}x^2dx + 3\int_{-3}^{1}xdx - \int_{-3}^{1}dx = \frac{2}{3}(x^3)\Big|_{-3}^{1} + \frac{3}{2}(x^2)\Big|_{-3}^{1} - (x)\Big|_{-3}^{1} =$$

$$= \frac{2}{3}(1^3-(-3)^3) + \frac{3}{2}(1^2-(-3)^2) - (1-(-3)) =$$

$$= \frac{2}{3}(1+27) + \frac{3}{2}(1-9) - (1+3) =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot 28 + \frac{3}{2}\cdot(-8) - 4 =$$

$$= \frac{56}{3} - 12 - 4 = \frac{56}{3} - 16 = \frac{56}{3} - \frac{48}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

Короткий способ:

$$\int_{-3}^{1}(2x^2+3x-1)dx = \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x\right)\Big|_{-3}^{1} = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 1 - \left(-18 + \frac{27}{2} + 3\right) = \frac{7}{6} + \frac{3}{2} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

Пример 6: Решение:

а) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\cos^2 x + 1} = (*)$

Проведем замену переменной: $\cos x = t$, *следовательно:*

$d(\cos x) = dt$

$-\sin x dx = dt \quad \Rightarrow \quad \sin x dx = -dt$

Вычислим новые переделы интегрирования:

$t_1 = \cos\frac{\pi}{2} = 0;$

$t_2 = \cos\pi = -1$

$$(*) = -\int_0^{-1}\frac{dt}{t^2+1} = \int_{-1}^{0}\frac{dt}{t^2+1} = (arctg(t))\Big|_{-1}^{0} = arctg 0 - arctg(-1) = 0 + arctg 1 = \frac{\pi}{4}$$

Примечание 1: *После замены удобно применить свойство* $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Примечание 2: *Вспоминаем, что арктангенс – есть функция нечётная:* $f(-x) = -f(x)$

б) $\int\limits_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2} = (*)$

Проведём замену: $\frac{1}{x} = t$ *, следовательно:*

$$d\left(\frac{1}{x}\right) = dt$$

$$-\frac{1}{x^2}\cdot dx = dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x^2} = -dt$$

Вычислим новые пределы интегрирования:

$$t_1 = \frac{1}{1} = 1, \quad t_2 = \frac{1}{2}$$

$$(*) = -\int\limits_1^{1/2} e^t dt = \int\limits_{1/2}^{1} e^t dt = (e^t)\Big|_{1/2}^{1} = e^1 - e^{\frac{1}{2}} = e - \sqrt{e}$$

Пример 7. Решение:

а)

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin\frac{x}{3}dx = 3\int\limits_0^{\pi/2} \sin\frac{x}{3}d\left(\frac{x}{3}\right) = -3\left(\cos\frac{x}{3}\right)\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= -3\left(\cos\frac{\pi}{6} - \cos 0\right) = -3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) = 3\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

б)

$$\int\limits_0^1 (1 - e^{-2x})dx = \int\limits_0^1 dx - \int\limits_0^1 e^{-2x}dx =$$

$$= (x)\Big|_0^1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\int\limits_0^1 e^{-2x}d(-2x) =$$

$$= (1-0) + \frac{1}{2}(e^{-2x})\Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{2}(e^{-2} - 1) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{e^{-2}}{2} = \frac{e^{-2}+1}{2}$$

в) *Определённого интеграла* $\int\limits_{-1}^{e} \frac{\ln x dx}{4x}$ *не существует, т.к. подынтегральная функция не определена на промежутке* $[-1;0]$.

Примечание: *также не существует и определённых интегралов* $\int\limits_{-1}^{e} \frac{\ln|x|dx}{4x}$, $\int\limits_{-1}^{e} \ln|x|dx$ *, т.к. подынтегральные функции не определены в точке* $x = 0$.

Пример 9: Решение:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$$u = \arccos 2x \Rightarrow du = d(\arccos 2x) = -\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot (2x)' dx = -\frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}}$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

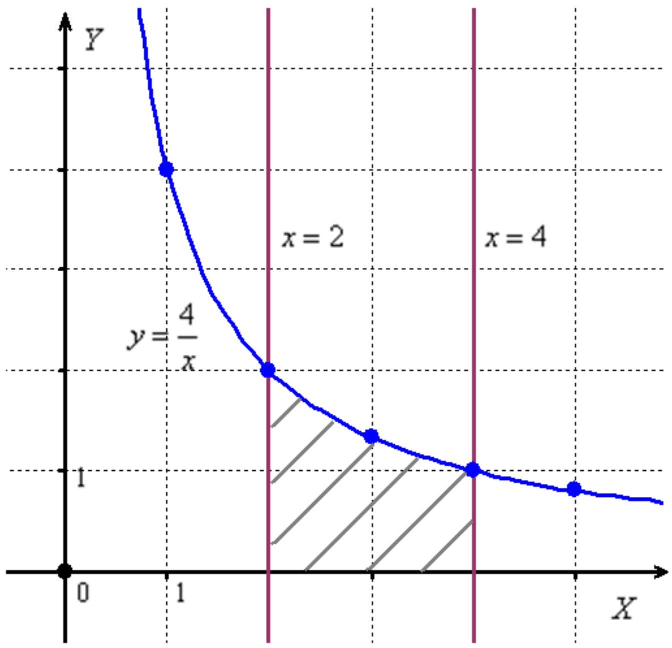
$$(*) = (x \arccos 2x)\Big|_{-1/2}^{1/2} + 2\int_{-1/2}^{1/2} \frac{xdx}{\sqrt{1-4x^2}} = \left(\frac{1}{2}\arccos 1 + \frac{1}{2}\arccos(-1)\right) + 2 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) \int_{-1/2}^{1/2} \frac{d(1-4x^2)}{\sqrt{1-4x^2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \pi - \frac{1}{4} \cdot 2(\sqrt{1-4x^2})\Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(0-0) = \frac{\pi}{2}$$

Пример 11. Решение: *найдём несколько опорных точек для построения гиперболы* $xy = 4 \;\Rightarrow\; y = \frac{4}{x}$:

x	1	2	3	4	5
y	4	2	4/3	1	4/5

и выполним чертеж:



На отрезке $[2;4]$ *график функции* $y = \frac{4}{x}$ *расположен над осью* OX *, поэтому:*

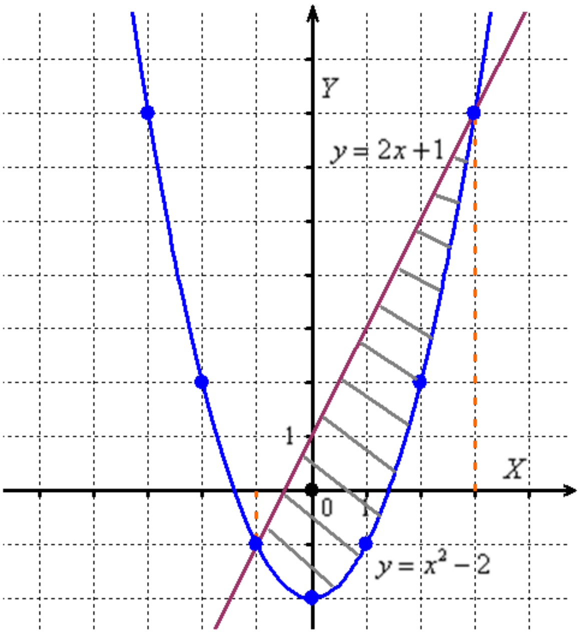
$$S = \int_2^4 \frac{4dx}{x} = 4(\ln x)\Big|_2^4 = 4(\ln 4 - \ln 2) = 4\ln\frac{4}{2} = 4\ln 2$$

Ответ: $S = 4\ln 2$ *ед.*$^2 \approx 2{,}77$ *ед.*^{2}

***Пример 14. Решение**: **а)** найдём опорные точки для построения параболы:*

x	0	-1	1	-2	2	-3	3
y	-2	-1	-1	2	2	7	7

и выполним чертеж:



На отрезке $[-1;3]$ $2x+1 \geq x^2-2$*, по соответствующей формуле:*

$$S = \int_{-1}^{3}\left(2x+1-(x^2-2)\right)dx = \int_{-1}^{3}(2x+1-x^2+2)dx = \int_{-1}^{3}(3+2x-x^2)dx =$$

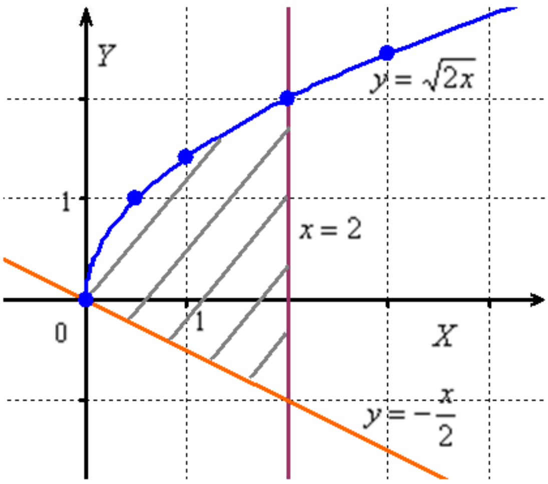
$$= \left(3x + x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{3} = (9+9-9) - \left(-3+1+\frac{1}{3}\right) = 9 + \frac{5}{3} = 10\frac{2}{3}$$

***Ответ**:* $S = 10\frac{2}{3}$ *ед.*^{2}

***б)** Найдём опорные точки для построения графика* $y = \sqrt{2x}$ *(ветвь параболы):*

x	0	0,5	1	2	3
y	0	1	$\sqrt{2} \approx 1{,}41$	2	$\sqrt{6} \approx 2{,}45$

и выполним чертёж:



На отрезке $[0;2]$: $\sqrt{2x} \ge -\dfrac{x}{2}$, *по соответствующей формуле:*

$$S = \int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \left(-\frac{x}{2} \right) \right) dx = \int_0^2 \left(\sqrt{2x} + \frac{x}{2} \right) dx = \sqrt{2} \int_0^2 x^{\frac{1}{2}} dx + \frac{1}{2} \int_0^2 x dx =$$

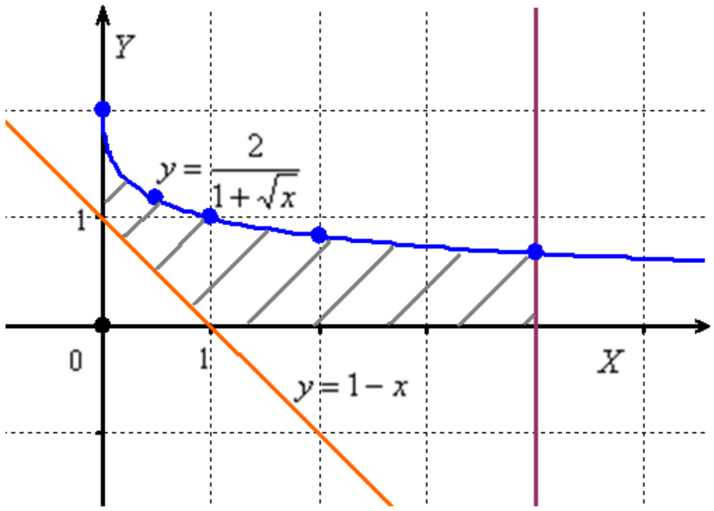
$$= \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (x^2) \Big|_0^2 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot (\sqrt{x^3}) \Big|_0^2 + \frac{1}{4}(4-0) = \frac{2\sqrt{2}}{3} (\sqrt{8} - 0) + 1 = \frac{8}{3} + 1 = \frac{11}{3}$$

Ответ: $S = \dfrac{11}{3}$ *ед.*$^2 \approx 3{,}67$ *ед.*^{2}

Пример 16. Решение*: найдем опорные точки для построения графика функции* $y = \dfrac{2}{1+\sqrt{x}}$:

x	0	0,5	1	2	4
y	2	$\approx 1{,}17$	1	$\approx 0{,}83$	$2/3 \approx 0{,}67$

и выполним чертёж:



Площадь фигуры найдём как сумму площадей:

1) На отрезке $[0;1]$: $\dfrac{2}{1+\sqrt{x}} \ge 1 - x$, *по соответствующей формуле:*

$$S_1 = \int_0^1 \left(\frac{2}{1+\sqrt{x}} - (1-x) \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{1+\sqrt{x}} - 1 + x \right) dx = 2\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} - \int_0^1 dx + \int_0^1 x dx = (*)$$

В первом интеграле проведём замену: $x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$.

Так как $t = \sqrt{x}$, *то новые пределы интегрирования:*

$t_1 = \sqrt{0} = 0, \quad t_2 = \sqrt{1} = 1$

$$(*) = 2\int_0^1 \frac{2tdt}{1+t} - (x)\Big|_0^1 + \frac{1}{2}(x^2)\Big|_0^1 = 4\int_0^1 \frac{(1+t-1)dt}{1+t} - (1-0) + \frac{1}{2}(1^2 - 0^2) =$$

$$= 4\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t} \right) dt - 1 + \frac{1}{2} = 4(t - \ln(1+t))\Big|_0^1 - \frac{1}{2} = 4(1 - \ln 2 - (0-0)) - \frac{1}{2} = 4(1 - \ln 2) - \frac{1}{2}$$

2) На отрезке $[1;4]$*:* $\dfrac{2}{1+\sqrt{x}} \geq 0$, *следовательно:*

$$S_2 = \int_1^4 \frac{2dx}{1+\sqrt{x}}dx = (*)$$

Используем ту же замену $x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$ *и найдём новые пределы интегрирования:* $t_1 = \sqrt{1} = 1, \quad t_2 = \sqrt{4} = 2$

$$(*) = \int_1^2 \frac{2\cdot 2tdt}{1+t}dt = 4(t - \ln(1+t))\Big|_1^2 = 4(2 - \ln 3 - (1 - \ln 2)) = 4(1 - \ln 3 + \ln 2)$$

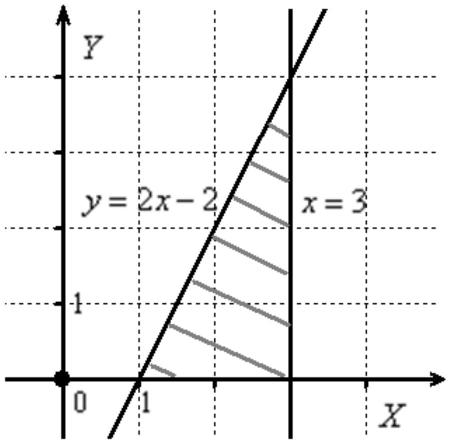
Таким образом, искомая площадь:

$$S = S_1 + S_2 = 4(1 - \ln 2) - \frac{1}{2} + 4(1 - \ln 3 + \ln 2) =$$

$$= 4(1 - \ln 2 + 1 - \ln 3 + \ln 2) - \frac{1}{2} = 4(2 - \ln 3) - \frac{1}{2}$$

Ответ: $S = \left[4(2 - \ln 3) - \dfrac{1}{2}\right] ед.^2 \approx 3{,}11\, ед.^2$

Пример 18. Решение: *выполним чертеж:*



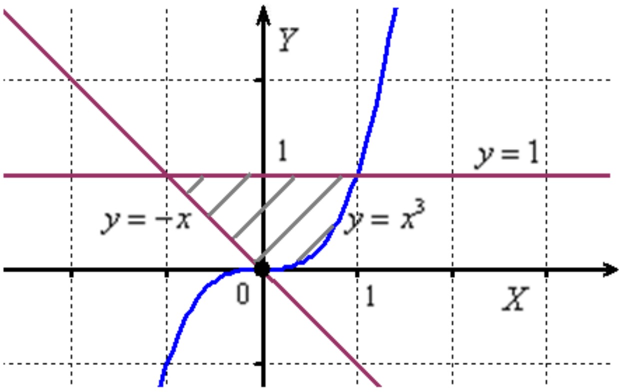
Вычислим объем тела вращения:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx = \pi\int_1^3 (2x-2)^2 dx = 4\pi\int_1^3 (x^2 - 2x + 1)dx = 4\pi\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right)\Big|_1^3$$

$$= 4\pi\left(9 - 9 + 3 - \left(\frac{1}{3} - 1 + 1\right)\right) = 4\pi\left(3 - \frac{1}{3}\right) = 4\pi\cdot\frac{8}{3} = \frac{32\pi}{3}$$

Ответ: $V = \dfrac{32\pi}{3}\ ед.^3 \approx 33{,}51\, ед.^3$

Пример 20. Решение*: выполним чертеж:*



Объём тела вращения вычислим как сумму объёмов с помощью формулы $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$, *при этом каждую часть вычислим как разность объёмов:*

1) На отрезке $[-1;0]$: $1\ge -x$, *поэтому:*

$$V_1=\pi\int_{-1}^{0}1^2dx-\pi\int_{-1}^{0}(-x)^2dx=\pi\int_{-1}^{0}dx-\pi\int_{-1}^{0}x^2dx=\pi(x)\Big|_{-1}^{0}-\frac{\pi}{3}(x^3)\Big|_{-1}^{0}=$$

$$=\pi(0-(-1))-\frac{\pi}{3}(0^3-(-1)^3)=\pi(0+1)-\frac{\pi}{3}(0+1)=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$$

2) На отрезке $[0;1]$: $1\ge x^3$, *поэтому:*

$$V_1=\pi\int_{0}^{1}1^2dx-\pi\int_{0}^{1}(x^3)^2dx=\pi\int_{0}^{1}dx-\pi\int_{0}^{1}x^6dx=\pi(x)\Big|_{0}^{1}-\frac{\pi}{7}(x^7)\Big|_{0}^{1}=$$

$$=\pi(1-0)-\frac{\pi}{7}(1-0)=\pi-\frac{\pi}{7}=\frac{6\pi}{7}$$

Таким образом, объём искомого тела:

$$V=V_1+V_2=\frac{2\pi}{3}+\frac{6\pi}{7}=\frac{14\pi}{21}+\frac{18\pi}{21}=\frac{32\pi}{21}$$

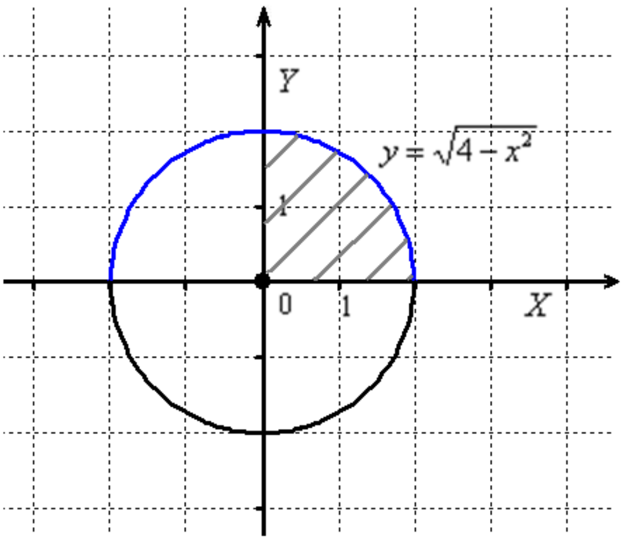
Ответ*:* $V=\frac{32\pi}{21}$ *ед.*$^3\approx 4{,}79$ *ед.*^{3}

Пример 22. Решение*: так как подынтегральная функция чётная, а отрезок интегрирования симметричен относительно нуля, то:*

$$\int_{-1}^{1}(2x^4-x^2+3)dx=2\int_{0}^{1}(2x^4-x^2+3)dx=2\left(\frac{2x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+3x\right)\Bigg|_{0}^{1}=$$

$$=2\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}+3-(0-0+0)\right)=2\left(\frac{6}{15}-\frac{5}{15}+\frac{45}{15}\right)=2\cdot\frac{46}{15}=\frac{92}{15}$$

***Пример 24. Решение**: выполним чертёж:*



Поскольку круг симметричен относительно оси OX, то достаточно вычислить площадь его верхней половины, которая в свою очередь симметрична относительно оси OY, таким образом:

$$S=2\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx=4\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}dx=(*)$$

Проведём замену: $x=2\sin t \Rightarrow dx=(2\sin t)'dt=2\cos t dt$

Выясним, во что превратится корень:

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-(2\sin t)^2}=\sqrt{4-4\sin^2 t}=\sqrt{4(1-\sin^2 t)}=2\sqrt{\cos^2 t}=2\cos t$$

Если $x=2\sin t$, *то* $\sin t=\frac{x}{2} \Rightarrow t=\arcsin\frac{x}{2}$, *откуда вычислим новые пределы интегрирования*:

$$t_1=\arcsin\frac{0}{2}=0,\quad t_2=\arcsin\frac{2}{2}=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$$

$$(*)=4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}2\cos t\cdot 2\cos t dt=16\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=$$

$$16\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=8\cdot\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=8\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\cdot 0-(0+0)\right)=4\pi$$

***Ответ**: $S=4\pi$ ед.^{2}*

***Примечание**: <u>неопределённый</u> интеграл вида $\int\sqrt{r^2-x^2}dx$ обычно решают другим способом, который можно найти в статье **Сложные интегралы** (ссылка на сайт).*

Пример 29. Решение:

а) Подынтегральная функция непрерывна на $[-1;+\infty)$*:*

$$\int_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}=\int_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+4x+4)+1}=\int_{-1}^{+\infty}\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+1}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}(arctg(x+2))\Big|_{-1}^{b}=\lim_{b\to+\infty}\left(arctg(b+2)^{\to\frac{\pi}{2}}-arctg1\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$ *– конечное число,*

*т.е. несобственный интеграл **сходится**.*

***Примечание 1**: при затруднениях с пределом удобно ориентироваться по графику арктангенса, значение же* $arctg1$ *можно найти по тригонометрической таблице (см. соответствующие Приложения)*

***Примечание 2**: по условию, требуется исследовать ряд на сходимость, и поэтому здесь желательно письменно констатировать факт сходимости.*

б) Подынтегральная функция непрерывна на $[0;+\infty)$*, таким образом:*

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}=\int_{0}^{+\infty}\frac{d(x^2+1)}{2\sqrt{x^2+1}}=\lim_{b\to+\infty}\sqrt{x^2+1}\Big|_0^b=\lim_{b\to+\infty}(\sqrt{b^2+1}^{\to+\infty}-1)=+\infty-1=+\infty$$

*Несобственный интеграл **расходится**.*

***Пример 31. Решение**: сначала найдём неопределенный интеграл:*

$$\int xe^xdx=(*)$$

$$u=x\Rightarrow du=dx$$

$$dv=e^xdx\Rightarrow v=e^x$$

$$\int udv=uv-\int vdu$$

$$(*)=xe^x-\int e^xdx=xe^x-e^x=(x-1)e^x$$

***Контроль**:* $((x-1)e^x)'=(x-1)'e^x+(x-1)(e^x)'=e^x+(x-1)e^x=(1+x-1)e^x=xe^x$

Вычислим несобственный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{0}xe^xdx=\lim_{a\to-\infty}((x-1)e^x)\Big|_a^0=\lim_{a\to-\infty}((0-1)e^0-(a-1)e^a)=\lim_{a\to-\infty}\left(-1-\frac{(a-1)}{e^{-a}}^{\to0}\right)=-1-0=-1$$

***Примечание**:* $\frac{(a-1)}{e^{-a}}\to0$*, так как* e^{-a} *более высокого порядка роста, чем* $(a-1)$.

Кроме того, неопределённость $\frac{-\infty}{+\infty}$ *можно устранить по правилу Лопиталя,*

продифференцировав числитель и знаменатель по «а»: $\lim_{a\to-\infty}\frac{((a-1))'}{(e^{-a})'}=\frac{1}{-e^{-a}}=\frac{1}{-\infty}=0$

Пример 34. Решение: *подынтегральная функция непрерывна на всей числовой прямой.*

Способ первый:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}d(-x^2) = -\frac{1}{2}\lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}}(e^{-x^2})\Big|_a^b = -\frac{1}{2}\lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}}(e^{-b^2}{}_{\to 0} - e^{-a^2}{}_{\to 0}) = -\frac{1}{2}(0-0) = 0$$

Способ второй: *представим интеграл в виде суммы двух интегралов:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx + \int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$$

Вычислим первый интеграл:

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2} = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}d(-x^2) = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}(e^{-x^2})\Big|_a^0 = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}(e^0 - e^{-a^2}) =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(1 - \left(\frac{1}{e^{a^2}{}_{\to+\infty}}\right)^{\to 0}\right) = -\frac{1}{2}(1-0) = -\frac{1}{2}$$

Вычислим второй интеграл:

$$\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}d(-x^2) = -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}(e^{-x^2})\Big|_0^b = -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}(e^{-b^2}{}_{\to 0} - 1) = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}$$

Таким образом:

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ – *интеграл сходится и равен нулю.*

Ответ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx = 0$

Примечание 1: *В частности, равно нулю и главное значение интеграла.*

Примечание 2: *Будет серьезной оплошностью сразу записать, что* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx = 0$, *пользуясь нечетностью подынтегральной функции и симметричностью промежутка интегрирования. Стандартный алгоритм обязателен!!!*

Пример 36. Решение:

а) *Подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв в точке* $a = -1$*:*

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^3}} = \int_{-1}^{0}(x+1)^{-\frac{3}{2}}d(x+1) = -2\lim_{x\to-1+0}(x+1)^{-\frac{1}{2}}\Big|_x^0 =$$

$$= -2\lim_{x\to-1+0}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\Bigg|_x^0 = -2\lim_{x\to-1+0}\left(\frac{1}{\sqrt{0+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}{}_{\to+0}}^{\to+\infty}\right) = -2(1-\infty) = +\infty$$

Пояснение: *чтобы разобраться с пределом, подставляем под корень* $-1+0$*:*

$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{-1+0+1}} = \frac{1}{\sqrt{+0}} = \frac{1}{+0} = +\infty$ *(единица, делённая на бесконечно малое положительное значение равна «плюс» бесконечности)* *б)* *Подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв в точке* $a=0$:

$$\int_0^{\frac{1}{e}}\frac{dx}{x\ln^4 x}=\int_0^{\frac{1}{e}}\ln^{-4}x\,d(\ln x)=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0+0}(\ln^{-3}x)\Big|_x^{e^{-1}}=$$

$$=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{1}{\ln^3 x}\right)\Bigg|_x^{e^{-1}}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{1}{\ln^3 e^{-1}}-\left(\frac{1}{\ln^3 x^{\to-\infty}}\right)^{\to -0}\right)=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(-1)^3}+0\right)=-\frac{1}{3}\cdot(-1)=\frac{1}{3}$$

Пояснение: *разбираемся, куда стремится дробь* $\frac{1}{\ln^3 x}$. *Если* $x\to 0+0$, *то* $\ln(0+0)\to-\infty$ *(см. график логарифмической функции!), тогда:* $\frac{1}{(-\infty)^3}=\frac{1}{-\infty}=-0$ *(бесконечно малое отрицательное значение)*

Пример 38. Решение:

а) *Подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв в точке* $b=1$.

$$\int_0^1\frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}}=\int_0^1\frac{d(x^2)}{\sqrt{1-(x^2)^2}}=\lim_{x\to 1-0}(\arcsin x^2)\Big|_0^x=\lim_{x\to 1-0}((\arcsin x^2)^{\to\pi/2}-\arcsin 0)=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

Примечание: *чтобы разобраться в пределе, проще всего посмотреть на график арксинуса (см. Приложение* ***Графики основных функций и их построение****).*

б) *Подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв в точке* $b=1$.

$$-\int_{0,5}^1\frac{dx}{x\ln^3 x}=-\int_{0,5}^1\ln^{-3}x\,d(\ln x)=-\frac{1}{(-2)}\lim_{x\to 1-0}(\ln^{-2}x)\Big|_{0,5}^x=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1-0}\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right)\Bigg|_{0,5}^x=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1-0}\left(\frac{1}{(\ln^2 x)^{\to+0}}^{\to+\infty}-\frac{1}{\ln^2 0,5}\right)=\frac{1}{2}\left(+\infty-\frac{1}{\ln^2 0,5}\right)=+\infty$$

Несобственный интеграл ***расходится****.*

Разбираемся, *почему* $\frac{1}{\ln^2 x}\to+\infty$. *Если* $x\to 1-0$, *то* $\ln(1-0)=-0$ *(см. график логарифма), и тогда* $\frac{1}{(-0)^2}=\frac{1}{+0}=+\infty$.

Будьте ОЧЕНЬ внимательны в знаках!

***Пример 40. Решение**: подынтегральная функция терпит бесконечные разрывы в точках* $a=-\frac{\pi}{2}, b=\frac{\pi}{2}$. *Представим данный интеграл в виде суммы двух интегралов:*

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} tgxdx = \int_{-\pi/2}^{0} tgxdx + \int_{0}^{\pi/2} tgxdx$$

Вычислим первый интеграл:

$$\int_{-\pi/2}^{0} tgxdx = \int_{-\pi/2}^{0} \frac{\sin xdx}{\cos x} = -\int_{-\pi/2}^{0} \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}+0} (\ln|\cos x|)\Big|_{x}^{0} =$$

$$= -\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}+0} (\ln 1 - \ln\left|(\cos x)^{\to +0}\right|_{\to -\infty}) = -(0+\infty) = -\infty$$

Вычислим второй интеграл:

$$\int_{0}^{\pi/2} tgxdx = -\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} (\ln|\cos x|)\Big|_{0}^{b} = -\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} (\ln\left|(\cos x)^{\to +0}\right|_{\to -\infty} - \ln 1) = -(-\infty - 0) = +\infty$$

Таким образом: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} tgxdx = -\infty + \infty$ *– значение не определено.*

***Вывод**: значение данного несобственного интеграла **не определено**.*

***Примечание 1**: Грамотным будет именно такой ответ, т.к. и здесь существует понятие сходимости по Коши, которое я оставлю за рамками настоящего курса.*

***Примечание 2**: Если рассматривать «половинки» интеграла по отдельности, то каждая из них расходится.*

***Пример 42. Решение**: подынтегральная функция терпит бесконечные разрывы в точках* $x=\pm 1$, *однако на отрезок интегрирования попадает лишь значение* $x=1$. *Представим интеграл в виде суммы двух несобственных интегралов второго рода:*

$$\int_{0}^{3} \frac{dx}{x^2-1} = \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2-1} + \int_{1}^{3} \frac{dx}{x^2-1}$$

Вычислим первый интеграл:

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{x\to 1-0} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Big|_{0}^{x} = \lim_{x\to 1-0}\left(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \ln|-1|\right) = \ln\left|\frac{-0}{2}\right| - 0 = \ln(+0) = -\infty$$

Вычислим второй интеграл:

$$\int_{1}^{3} \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{x\to 1+0} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Big|_{x}^{3} = \lim_{x\to 1+0}\left(\ln\left|\frac{2}{4}\right| - \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) = \ln\frac{1}{2} - \ln\left|\frac{+0}{2}\right| = \ln\frac{1}{2} - \ln(+0) = -(-\infty) = +\infty$$

Таким образом, значение $\int_{0}^{3} \frac{dx}{x^2-1} = -\infty + \infty$ ***не определено**.*

***Примечание**: см. Примечания к предыдущему примеру.*