Таблица разложений некоторых функций в степенные ряды

$$e^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^3}{3!}+\ldots+\frac{\alpha^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}$$

, область сходимости ряда: $-\infty<\alpha<+\infty$

$$\sin\alpha=\alpha-\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^5}{5!}-\frac{\alpha^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\cdot\alpha^{2n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\alpha^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Область сходимости ряда: $-\infty<\alpha<+\infty$

$$\cos\alpha=1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}-\frac{\alpha^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\alpha^{2n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha^{2n}}{(2n)!}$$

Область сходимости ряда: $-\infty<\alpha<+\infty$

$$\ln(1+\alpha)=\alpha-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^3}{3}-\frac{\alpha^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{\alpha^n}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\alpha^n}{n}$$

Ряд сходится при $-1<\alpha<1$ или, то же самое, при $|\alpha|<1$

Кроме того, в каждом конкретном случае нужно исследовать концы интервала сходимости – там ряд тоже может сходиться!

Биномиальное разложение:

$$(1+\alpha)^k=1+\alpha\cdot k+\frac{k(k-1)}{2!}\cdot\alpha^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\cdot\alpha^3+\ldots+\frac{k(k-1)(k-2)\cdot\ldots\cdot(k-n+1)}{n!}\cdot\alpha^n+\ldots=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k(k-1)(k-2)\cdot\ldots\cdot(k-n+1)}{n!}\cdot\alpha^n$$

Ряд сходится при $-1<\alpha<1$ $\left(|\alpha|<1\right)$.

Как и в предыдущем пункте – концы интервала подлежат исследованию!

Распространенные частные случаи биномиального разложения:

$$\sqrt{1+\alpha}=1+\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2\cdot4}\cdot\alpha^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\cdot\alpha^3-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\alpha^4+\ldots$$

$$\sqrt{1-\alpha}=1-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2\cdot4}\cdot\alpha^2-\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\cdot\alpha^3-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\alpha^4-\ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}=1-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\alpha^2-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\alpha^3+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\alpha^4-\ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}=1+\frac{1}{2}\alpha+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\alpha^2+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\alpha^3+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\alpha^4+\ldots$$

$$\frac{1}{1+\alpha}=1-\alpha+\alpha^2-\alpha^3+\alpha^4-\alpha^5+\ldots$$

$$\frac{1}{1-\alpha}=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\ldots$$

$$arctg\,\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5} - \frac{\alpha^7}{7} + ... + (-1)^n \cdot \frac{\alpha^{2n+1}}{2n+1} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n+1}}{2n+1}$$ Область сходимости ряда: $-1 \le \alpha \le 1$ или, то же самое: $\lvert\alpha\rvert \le 1$
$$\arcsin\alpha = \alpha + \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^3}{3} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{\alpha^5}{5} + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{\alpha^7}{7} + + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{\alpha^9}{9} + ... + \frac{(2n-1)!!\cdot\alpha^{2n+1}}{(2n)!!\cdot(2n+1)} + ...$$ Область сходимости ряда: $-1 \le \alpha \le 1$ или, то же самое: $\lvert\alpha\rvert \le 1$

Поскольку речь идёт о степенных рядах, то **разложения справедливы не только для значения** $\alpha = x$, но и для других одночленов, таких как $\alpha = -x$, $\alpha = 2x$, $\alpha = x^2$, $\alpha = -5x^3$, $\alpha = 3\sqrt{x}$, $\alpha = \sqrt[3]{x}$, $\alpha = 3x^4$ и т.п.

При этом в общем случае фактическая область сходимости **будет другой!** Так, например, при $\alpha = \frac{x}{2}$ разложение функции $f(x) = \arcsin\frac{x}{2}$ сходится к ней на промежутке:

$-1 \le \frac{x}{2} \le 1 \quad \Rightarrow \quad -2 \le x \le 2$ *(умножили все части неравенства на 2)*

Более того, табличный «шаблон» может быть «урезан», типичные примеры:

1) если $\alpha = \sqrt{x}$, то функция $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ определена только для неотрицательных значений аргумента, и поэтому область сходимости соответствующего ряда: $0 \le x < +\infty$;

2) аналогично, если $\alpha = \sqrt[4]{x}$, то разложение функции $f(x) = \ln(1 + \sqrt[4]{x})$ сойдётся к ней лишь в области $0 \le x \le 1$.