Основные теоретические сведения и формулы теории вероятностей

Глава первая. Случайные события

1. Классическое определение вероятности

Вероятностью наступления события A в некотором испытании называют отношение $P(A)=\frac{m}{n}$, где n – общее число всех равновозможных, элементарных исходов этого испытания, а m – количество элементарных исходов, благоприятствующих событию A.

2. Геометрическое определение вероятности

Вероятность наступления события A в испытании равна отношению

$P(A)=\frac{g}{G}$, где G – геометрическая мера (длина, площадь, объем), выражающая общее число всех возможных и равновозможных исходов данного испытания, а g – мера, выражающая количество благоприятствующих событию A исходов.

3. Статистическое определение вероятности

Вероятность наступления некоторого события A – есть относительная частота

$W(A)=\frac{m}{n}$, где n – общее число фактически проведённых испытаний, а m – число испытаний, в которых появилось событие A.

4. Полная группа событий

Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, образующих полную группу, равна единице:

$P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+...+P(A_n)=1$

5. Теорема сложения вероятностей противоположных событий

Сумма вероятностей противоположных событий $A, \overline{A}$ равна единице:

$P(A)+P(\overline{A})=1$

7. Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Вероятность появления одного из двух несовместных событий A или B (без разницы какого), равна сумме вероятностей этих событий:

$P(A+B)=P(A)+P(B)$

Аналогичный факт справедлив и для бОльшего количества несовместных событий, например, для трёх:

$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)$

8. Теорема сложения вероятностей совместных событий *(используется редко)*

Вероятность появления *хотя бы одного* из двух совместных событий A, B равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

9. Теорема умножения вероятностей независимых событий

Вероятность совместного появления двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий:
$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

Данный факт справедлив и для бОльшего количества событий, например, для трёх:
$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

10. Теорема умножения вероятностей зависимых событий

Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного события на условную вероятность другого события:
$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$, где $P_A(B)$ – вероятность появления события B при условии, что событие A уже произошло.

Данный факт справедлив и для бОльшего количества событий, например, для трёх:
$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C)$, где $P_{AB}(C)$ – вероятность появления события C при условии, что события A и B уже произошли.

11. Формула полной вероятности

Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, B_3, \ ..., B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующие условные вероятности события A:
$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) + ... + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$

12. Формулы Байеса

Пусть в результате осуществления одной из гипотез $B_1, B_2, B_3, .., B_n$ событие A произошло. Тогда:

$P_A(B_1) = \dfrac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}$ – вероятность того, что имела место гипотеза B_1;

$P_A(B_2) = \dfrac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{P(A)}$ – вероятность того, что имела место гипотеза B_2;

$P_A(B_3) = \dfrac{P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)}{P(A)}$ – вероятность того, что имела место гипотеза B_3;

…

$P_A(B_n) = \dfrac{P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)}{P(A)}$ – вероятность того, что имела место гипотеза B_n.

13. Формула Бернулли

$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$, где:

n – количество независимых испытаний;
p – вероятность появления события A в каждом испытании и $q = 1 - p$ – непоявления;
P_n^m – вероятность того, что в n испытаниях событие A появится ровно m раз.
(C_n^m – биномиальный коэффициент *(см. Приложение **Формулы Комбинаторики**)*).

14. Формула Пуассона для приближённого расчёта вероятностей P_n^m (п. 13):

$P_m \approx \dfrac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$, где $\lambda = np$, где:

n – количество независимых испытаний;
p – вероятность появления события A в каждом испытании;
P_m – вероятность того, что в n испытаниях событие A появится ровно m раз,
при этом количество испытаний должно быть достаточно велико *(сотни, тысячи и больше)*, а вероятность появления события в каждом испытании весьма мала *(сотые, тысячные и меньше)*, в противном случае приближение к точному результату P_n^m будет плохим.

15. Локальная теорема Лапласа

Пусть проводится достаточно большое (> 50-100) количество n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p. Тогда вероятность $P_n(m)$ того, что в n испытаниях событие A наступит ровно m раз, приближённо равна:

$P_n(m) \approx \dfrac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$, где $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функция Гаусса, а $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$ $(q = 1 - p)$.

Значения функции Гаусса можно найти с помощью калькулятора, по таблице либо в MS Excel *(**Калькулятор**, Пункт 4)*.

Теорема обеспечивает хорошее приближение к точному результату P_n^m (см. п. 13) при условии $npq > 10$ (≈ 10), в противном случае значение $P_n(m)$ будет далеко от истины.

16. Интегральная теорема Лапласа

Если вероятность p появления случайного события A в каждом независимом испытании постоянна, то вероятность того, что в n испытаниях событие A наступит не менее m_1 и не более m_2 раз, приближённо равна:

$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где:

$\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – функция Лапласа, $x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$

Значения функции Лапласа можно найти с помощью таблицы либо в MS Excel *(**Калькулятор**, Пункт 5)*.

Теорема применима при тех же условиях: количество испытаний должно быть достаточно велико ($n > 50\text{-}100$) и произведение $npq > 10$ (≈ 10). В противном случае точность приближения будет неудовлетворительной.

Точное значение можно рассчитать по формуле:
$P_n(m_1 \le m \le m_2) = P_n^{m_1} + P_n^{m_1+1} + P_n^{m_1+2} + ... + P_n^{m_2-1} + P_n^{m_2}$, где $P_n^{m_i} = C_n^{m_i} p^{m_i} q^{n-m_i}$ (см. п. 13)

17. Случайную величину можно однозначно задать функцией распределения:

$F(x) = P(X < x)$ – вероятность того, что случайная величина X примет значение, СТРОГО МЕНЬШЕЕ, чем *переменная* x, которая «пробегает» все действительные значения от «минус» до «плюс» бесконечности.

Функция распределения изменяется в пределах $0 \le F(x) \le 1$ и является неубывающей.

У дискретной случайной величины функция разрывна и имеет «ступенчатый» вид (график), у непрерывной случайной величины функция непрерывна на всей числовой прямой.

18. Функция плотности распределения вероятностей

определяется и однозначно определяет только непрерывную случайную величину:

$f(x) = F'(x)$, данная функция неотрицательна ($f(x) \ge 0$) и обладает свойством $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, которое означает, что в результате испытания случайная величина достоверно примет одно из действительных значений. График функции может быть как разрывным, так и непрерывным.

Если известна функция плотности $f(x)$, то функцию распределения можно восстановить с помощью интеграла $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

19. Математическое ожидание

а) дискретной случайной величины:

$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + ... + x_np_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_ip_i$, где:

x_i – все возможные значения случайной величины и p_i – соответствующие вероятности.

б) непрерывной случайной величины:

$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$, где $f(x)$ – функция плотности распределения этой случайной величины.

20. Дисперсия

$D(X) = M\left[(X - M(X))^2\right]$ – есть математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания.

а) Дисперсию дискретной случайной величины можно рассчитать по определению:

$$D(X) = M\left[(X - M(X))^2\right] = (x_1 - M(X))^2 p_1 + (x_2 - M(X))^2 p_2 + ... + (x_n - M(X))^2 p_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i$$

либо по формуле $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$, где $M(X^2) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$

б) и аналогичные способы для непрерывной случайной величины:

$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx$ либо $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$, где $M(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$

21. Среднее квадратическое (стандартное) отклонение

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

22. Вероятность того, что случайная величина X примет значение из промежутка $P(a < X < b)$, $P(a \le X < b)$, $P(a < X \le b)$ либо $P(a \le X \le b)$ рассчитывается по формуле*:

$F(b) - F(a)$, где $F(x)$ – функция распределения данной случайной величины.

** Если хотя бы одно из значений a, b «попадает» в точку разрыва функции $F(x)$ дискретной случайной величины, то формулу можно использовать лишь для неравенства $P(a \le X < b)$.*

Для непрерывной случайной величины эти вероятности можно найти и другим способом – с помощью интеграла $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – функция плотности распределения.

23. Распространённые виды распределений и их числовые характеристики

а) дискретные:

Название распределения	Формула расчёта вероятностей	Возможные значения m	Математическое ожидание	Дисперсия
Геометрическое	$P_m = q^{m-1}p$	1, 2, 3, ..., n, ...	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Биномиальное	$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$	0, 1, 2, 3, ..., n	np	npq
Пуассона	$P_m = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$	1, 2, 3, ..., n, ...	λ	λ
Гипергеометрическое	$P_m = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$	0, 1, ..., min(M, n)	$\frac{M}{N} \cdot n$	$\frac{M(N-M)n(N-n)}{N^2(N-1)}$

б) непрерывные:

Название распределения	Функция плотности $f(x) =$	Математическое ожидание	Дисперсия
Равномерное	$\frac{1}{b-a}$ на промежутке от a до b и 0 вне этого промежутка	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(a-b)^2}{12}$
Показательное	$\lambda e^{-\lambda x}$, если $x \ge 0$ и 0, если $x < 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Нормальное	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty < x < +\infty$	a	σ^2