Полезные формулы при нахождении интегралов

I) Формулы сокращенного умножения

1) Разность квадратов
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

2) Квадрат суммы и квадрат разности
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3) Сумма и разность кубов:
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

4) Куб суммы и разности
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

II) Действия со степенями

Простейшие правила:

$$\frac{1}{x^a} = x^{-a}$$

$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$, в частности: $\frac{x^a}{x^b} = x^a \cdot x^{-b} = x^{a-b}$

$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

Разумеется, они работают и в обратном порядке.

Очень важно знать: $\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$, собственно, это не действие и не правило, а просто две записи ОДНОГО И ТОГО ЖЕ.

Пример:

$$\frac{1}{\sqrt[7]{(x+\cos 3x)^4}} = \frac{1}{(x+\cos 3x)^{\frac{4}{7}}} = (x+\cos 3x)^{-\frac{4}{7}}$$

Все три выражения – это **одно и то же** (просто запись разная).

III) Упрощение многоэтажных дробей

1) Дробь $\frac{a}{b}$ делим на число c: $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{b \cdot c}$	2) Число a делим на дробь $\frac{b}{c}$: $\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = \dfrac{a \cdot c}{b}$
3) Дробь $\frac{a}{b}$ делим на дробь $\frac{c}{d}$: $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a \cdot d}{b \cdot c}$	Все три правила применимы и справа налево, то есть из двухэтажной дроби можно искусственно сделать трёх- или четырёхэтажную дробь

IV) Преобразование логарифмов

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$
$$\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$
$$\ln b^a = a \ln b$$

Несмотря на то, то эти правила справедливы для $a > 0, b > 0$, их можно использовать при нахождении производных и интегралов, например:

$$\ln\sqrt[3]{\left(\frac{x-3}{2x+5}\right)^2} = \ln\left(\frac{x-3}{2x+5}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\ln\left(\frac{x-3}{2x+5}\right) = \frac{2}{3}\left(\ln(x-3) - \ln(2x+5)\right)$$

V) Ходовые тригонометрические формулы

<u>Основное тригонометрическое тождество:</u>

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, из которого следует:

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$
$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

Внимание! *Параметр* α *может быть не только буквой* x, *но и сложной функцией, так, например, сумма* $\sin^2(2x+1) + \cos^2(2x+1)$ *тоже равна 1.*

<u>Разложение тангенса и котангенса:</u>

$tg\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $ctg\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, и их очевидная взаимосвязь: $tg\,\alpha = \dfrac{1}{ctg\,\alpha}$

Ещё одно следствие основного тригонометрического тождества:

$$tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1$$
$$ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1$$

Формулы двойного угла:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

! Очень важные следствия из данных формул:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$
$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

Преобразование произведений в сумму:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

VI) Решение квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a \neq 0)$$

Сначала нужно найти дискриминант:
$D = b^2 - 4ac$

Если $D>0$, то уравнение имеет два действительных корня:
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$$

Если $D=0$, то уравнение имеет два совпавших *(кратных)* корня:
$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

Квадратный трёхчлен раскладывается на множители следующим образом:

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$