Горячие школьные формулы

I) Формулы сокращенного умножения

1) Разность квадратов
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

2) Квадрат суммы и квадрат разности
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3) Сумма и разность кубов:
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

4) Куб суммы и разности
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

II) Решение квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

Сначала находим дискриминант:
$D = b^2 - 4ac$

1) Если $D > 0$, то уравнение имеет два действительных корня:
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$

2) Если $D = 0$, то уравнение имеет два совпавших действительных корня:
$x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$

3) Если $D < 0$, то уравнение имеет два сопряженных комплексных корня.
Подробная информация есть в статье «Комплексные числа для чайников»:
http://mathprofi.ru/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov.html

Практическим ориентиром правильности вычислений является тот факт, что у вас получился «хороший» дискриминант с извлечением корня нацело, например:
$D = 36$ и $\sqrt{D} = \sqrt{16} = 4$, а вот $D = 17$ – не есть здОрово – скорее всего, вы допустили ошибку, либо в условии задачи опечатка. Хотя может так оно и должно быть.

Справедливо следующее разложение квадратного трехчлена на множители:
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Решение квадратного уравнения – одно из самых распространённых действий в ходе выполнения различных задач высшей математики.

III) Упрощение многоэтажных дробей

1) Дробь $\frac{a}{b}$ делим на число c: $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{b \cdot c}$	2) Число a делим на дробь $\frac{b}{c}$: $\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = \dfrac{a \cdot c}{b}$
3) Дробь $\frac{a}{b}$ делим на дробь $\frac{c}{d}$: $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a \cdot d}{b \cdot c}$	Все три правила применимы и справа налево, то есть из двухэтажной дроби можно искусственно сделать трёх- или четырёхэтажную дробь

IV) Действия со степенями

В качестве основания степени снова возьмем всеми любимую букву x.

Надеюсь, что вы помните:

$$\frac{1}{x^a} = x^{-a}$$

$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$, в частности: $\dfrac{x^a}{x^b} = x^a \cdot x^{-b} = x^{a-b}$

$$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$$

Разумеется, правила работают и в обратном порядке.

Очень важно знать: $\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$, собственно, это не действие и не правило, а просто две записи ОДНОГО И ТОГО ЖЕ. Например:

$$\frac{1}{\sqrt[7]{(x+\cos 3x)^4}} = \frac{1}{(x+\cos 3x)^{\frac{4}{7}}} = (x+\cos 3x)^{-\frac{4}{7}}$$

Все три выражения – это **одно и то же**, просто запись разная.

Радикал (корень) часто записывают в виде $x^{\frac{a}{b}}$ для того, чтобы с комфортом взять от него производную или интеграл.

V) Немного о логарифмах

Основное логарифмическое тождество $(a>0, a\neq 1, b>0)$:

$b=a^{\log_a b}$, в частности: $b=e^{\ln b}$

Некоторые важные свойства *(на примере натурального логарифма)*. Если $a>0, b>0$, то справедливо следующее:

$$\ln(ab)=\ln a+\ln b$$
$$\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$$
$$\ln a^k=k\ln a \qquad \textit{(}k\textit{ – любое действительное число).}$$

При нахождении производных условие $a>0, b>0$ обычно выполняется не для всех значений x, при этом в ряде случаев имеют место неравносильные преобразования. Но эти свойства можно применить даже в этих случаях!

Так, преобразование $\ln\left(\frac{1-x}{2-x}\right)=\ln(1-x)-\ln(2-x)$ справедливо далеко не для всех «икс» из области определения исходной функции. Например, для $x=3$:

$\ln\left(\frac{1-3}{2-3}\right)=\ln\left(\frac{-2}{-1}\right)=\ln 2$, однако значения $\ln(1-3)-\ln(2-3)=\ln(-2)-\ln(-1)$ не существует.

То есть, $y=\ln\left(\frac{1-x}{2-x}\right)$ и $y=\ln(1-x)-\ln(2-x)$ – это две РАЗНЫЕ функции. НО. Фишка состоит том, что у них одинаковые производные! И этим можно пользоваться на практике. Сначала используем свойство $\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$ для всех допустимых значений x:

$\ln\left(\frac{1-x}{2-x}\right)=\ln(1-x)-\ln(2-x)$, а затем имеем в виду то, что **производная одной функции равна производной другой функции:**

$$y'=\left(\ln\left(\frac{1-x}{2-x}\right)\right)'=\left(\ln(1-x)-\ln(2-x)\right)'=\ldots$$

Более простой пример: $y=\ln x^2$. Если a может принимать отрицательные значения, а k – чётное число, то последнее правило запишется с модулем: $\ln a^k=k\ln|a|$, и мы можем корректно преобразовать функцию: $y=\ln x^2=2\ln|x|$. При дифференцировании (что легко доказать), модуль исчезает: $y'=(2\ln|x|)'=\frac{2}{x}$.

Но здесь также можно выполнить и преобразование $\ln x^2=2\ln x$ – лишь для $x>0$. Функции $y=\ln x^2$ и $y=2\ln x$ – **это две разные функции, но при решении мы можем подразумевать равенство их производных:** $y'=(\ln x^2)'=(2\ln x)'=\frac{2}{x}$.