



Высшая математика – просто и доступно!

Блиц-курс
«Дифференциальные уравнения»

Данный курс позволяет буквально за день-два научиться решать наиболее распространённые типы дифференциальных уравнений. Методичка предназначена для студентов заочных отделений, а также для всех читателей, которые недавно приступили к изучению темы и хотят в кратчайшие сроки освоить практику.

Внимание! *Чтобы освоить данный материал, нужно уметь дифференцировать и интегрировать хотя бы на среднем уровне!*

Автор: Александр Емелин

Оглавление

1. Дифференциальные уравнения первого порядка	3
1.1. Понятие дифференциального уравнения	3
1.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.....	4
1.3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка	16
1.4. Линейное неоднородное уравнение первого порядка.....	26
1.5. Дифференциальное уравнение Бернулли	34
1.6. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах.....	40
2. Дифференциальные уравнения высших порядков	48
2.1. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка	48
2.2. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка	55
2.3. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка	61
2.4. Коротко о линейных уравнениях более высоких порядков	72
Решения и ответы	74

1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Эти два слова (ДУ) или, как их сокращают – диффуры, обычно приводят в ужас среднестатистического обывателя. Более того, дифференциальные уравнения кажутся чем-то запредельным и трудным в освоении и многим студентам: уuuuu...
дифференциальные уравнения, как бы мне всё это пережить?!

Но я не буду «кормить» вас этими мифами и запугивать (как в той сказке), а наоборот – только развеселю! **Потому что на самом деле**

**Дифференциальные уравнения – это ПРОСТО и очень увлекательно.
Добро пожаловать в мою сказку!**

Сначала вспомним обычные уравнения. Они содержат переменные и числа. Простейший пример: $3x = 12$. **Что значит решить** обычное уравнение? Это значит, найди **множество чисел**, которые удовлетворяют данному уравнению. Легко сообразить, что детское уравнение $3x = 12$ имеет единственный корень $x = 4$. Выполним проверку, подставив найденный корень в наше уравнение:

$$3 \cdot 4 = 12$$

$12 = 12$ – получено *верное равенство*, значит, решение найдено правильно.

Диффуры устроены примерно так же!

1.1. Понятие дифференциального уравнения

Дифференциальное уравнение первого порядка, содержит:

- 1) независимую переменную x ;
- 2) зависимую переменную y (функцию);
- 3) первую производную функции: y' .

В некоторых случаях в уравнении может отсутствовать «икс» или (и) «игрек», но это ерунда – **ВАЖНО** чтобы в нём **была** первая производная y' , и **не было** производных высших порядков – y'' , y''' и т.д.

Как вы правильно догадываетесь, **дифференциального уравнение «энного» порядка обязательно содержит** производную n -го порядка: $y^{(n)}$ и **НЕ** содержит производные более высоких порядков.

Что значит решить дифференциальное уравнение? Решить дифференциальное уравнение – это значит, найти **множество функций** $F(x; y) = C$, где C – произвольная постоянная, которые удовлетворяют данному уравнению, то есть, **корнями дифференциального уравнения являются функции**. Такое множество функций часто называют **общим интегралом** дифференциального уравнения.

В ряде случаев решение удаётся представить в «школьном» (*явном*) виде: $y = f(x; C)$, и тогда его называют **общим решением** дифференциального уравнения.

1.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Это простейший и самый распространённый тип дифференциального уравнения. Все методы и тонкости решений будем разбирать прямо на конкретных примерах:

Пример 1

Решить дифференциальное уравнение $xy' = y$

И вопрос первый: **с чего начать?**

В первую очередь нужно переписать производную немного в другом виде.

Вспоминаем громоздкое обозначение производной: $y' = \frac{dy}{dx}$. Такое обозначение производной многим из вас наверняка казалось нелепым и ненужным, но в диффурах рулит именно оно!

Итак, на первом шаге переписываем производную в нужном нам виде:

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = y$$

Далее смотрим, **а нельзя ли разделить переменные?** – на это вообще всегда нужно посмотреть, когда вам дан ЛЮБОЙ диффур 1-го порядка.

Что значит разделить переменные? Грубо говоря, **в левой части** нам нужно собрать **все «игреки»**, а **в правой – все «иксы»**. Разделение переменных выполняется с помощью «школьных» манипуляций: вынесение за скобки, перенос слагаемых из части в часть со сменой знака, перенос множителей из части в часть по правилу пропорции и т.п.

Дифференциалы dy и dx – это **полноправные множители** и активные участники «боевых действий». В рассматриваемом примере переменные легко разделяются перекидыванием множителей по правилу пропорции (*Приложение Школьные формулы*):

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Переменные разделены. В левой части – только «игреки», в правой части – только «иксы».

Следующий этап – **интегрирование дифференциального уравнения**. Всё просто, навешиваем интегралы на обе части:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

Разумеется, интегралы нужно взять. В данном случае они табличные (*Приложение Таблица интегралов*):

$$\ln|y| = \ln|x| + C$$

Как мы помним, к любой первообразной приписывается константа. Здесь два интеграла, но константу C достаточно записать один раз (*ибо сумма двух констант – есть константа*). В большинстве случаев её помещают в правую часть.

Строго говоря, после того, как взяты интегралы, дифференциальное уравнение считается решенным, и общий интеграл $\ln|y| = \ln|x| + C$ можно считать ответом. Однако многие с этим не согласятся :) И поэтому нам нужно попробовать найти общее решение, то есть попытаться представить функцию в явном виде.

Пожалуйста, запомните **первый технический приём**, он очень распространен и часто применяется в практических заданиях: **если в правой части после интегрирования появляется логарифм, то константу во многих случаях целесообразно записать тоже под логарифмом**. И записать НЕПРЕМЕННО, если получились одни логарифмы (как в рассматриваемом примере).

То есть, вместо записи $\ln|y| = \ln|x| + C$ обычно пишут $\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$.

Здесь $\ln|C|$ – это такая же полноценная константа, как и C (поскольку $\ln|C|$ с тем же успехом принимает все действительные значения).

Зачем это нужно? А для того, чтобы легче было выразить «игрек». Используем свойство логарифмов: $\ln|a| + \ln|b| = \ln|ab|$ (см. Приложение **Школьные формулы**).

В данном случае:

$$\ln|y| = \ln|Cx|$$

Теперь логарифмы и модули можно с чистой совестью убрать:

$$y = Cx$$

Функция представлена в явном виде. Это и есть общее решение.

Итак, **множество функций** $y = Cx$, где $C = const$ является **общим решением** дифференциального уравнения $xy' = y$.

Ответы многих дифференциальных уравнений довольно легко проверить. В нашем случае это делается совсем просто, берём найденное решение $y = Cx$ и находим производную (см. Приложение **Таблица производных**): $y' = (Cx)' = C$

Теперь подставляем наше решение $y = Cx$ и найденную производную $y' = C$ в исходное уравнение $xy' = y$:

$$x \cdot C = Cx$$

$Cx = Cx$ – в результате получено **верное равенство**, значит, решение найдено правильно. Иными словами, **общее решение** $y = Cx$ **удовлетворяет уравнению** $xy' = y$.

Придавая константе C различные значения, можно получить бесконечно много **частных решений** дифференциального уравнения. Любая из функций $y = x$, $y = -3x$, $y = \frac{x}{5}$ и т.д. удовлетворяет дифференциальному уравнению $xy' = y$.

Иногда общее решение так и называют – **семейством функций**. В данном примере общее решение $y = Cx$, где $C = const$ – это семейство линейных функций, а точнее, семейство прямых пропорциональностей.

После обстоятельного разжевывания первого примера уместно ответить на несколько наивных вопросов о дифференциальных уравнениях:

1) В этом примере нам удалось разделить переменные: $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$. Всегда ли это можно сделать? Нет, не всегда. И даже чаще переменные разделить нельзя. Например, почти во всех уравнениях следующих параграфов ☺, где нужно использовать различные приёмы и методы нахождения решений. Уравнения с разделяющимися переменными, которые мы рассматриваем сейчас – это простейший тип дифференциальных уравнений.

2) Всегда ли можно проинтегрировать дифференциальное уравнение? Нет, не всегда. Очень легко придумать уравнение (не обязательно «навороченное»), которое в жизнь не проинтегрировать и, кроме того, существует туча неберущихся интегралов. Но подобные ДУ можно решить приближенно с помощью специальных методов.

3) В данном примере мы получили решение в виде общего интеграла $\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$. Всегда ли можно из общего интеграла найти общее решение, то есть, выразить «игрек» в явном виде? Нет не всегда. Например: $y + \ln|y| = \arcsin x + xy^2 + C$. Ну и как тут выразить «игрек»? В таких случаях ответ следует записать в виде *общего интеграла*, при этом **хорошим тоном** считается представить его в виде $F(x; y) = C$ – с одинокой константой в правой части: $y - xy^2 - \arcsin x + \ln|y| = C$. Однако это вовсе не обязательное правило, а, порой, и неуместное действие.

Кроме того, в ряде случаев общее решение выразить можно, но оно записывается настолько громоздко и коряво, что уж лучше оставить ответ в виде общего интеграла.

Пожалуй, пока достаточно. В первом же уравнении нам встретился **ещё один очень важный момент**, но дабы не накрыть вас лавиной новой информации, торопиться не буду. Еще одно простое ДУ и еще один типовой приём решения:

Пример 2

Найти частное решение дифференциального уравнения $y' = -2y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 2$

По условию требуется найти *частное решение* ДУ, удовлетворяющее начальному условию. Такая постановка вопроса также называется **задачей Коши**.

Сначала находим общее решение. В уравнении нет переменной «икс», но это не должно смущать, главное, в нём есть первая производная.

Переписываем производную в нужном виде:

$$\frac{dy}{dx} = -2y$$

Очевидно, что переменные можно разделить, мальчики – налево, девочки – направо:

$$\frac{dy}{y} = -2dx$$

Интегрируем уравнение:

$$\int \frac{dy}{y} = -2 \int dx$$
$$\ln|y| = -2x + C^*$$

Общий интеграл получен. Здесь константу я нарисовал с надстрочной звёздочкой, дело в том, что очень скоро она превратится в другую константу.

Теперь пробуем преобразовать общий интеграл в общее решение (*выразить функцию в явном виде*). Вспоминаем старое, доброе, школьное: $\ln a = b \Rightarrow a = e^b$.

В данном случае:

$$|y| = e^{-2x + C^*}$$

Константа в показателе смотрится как-то некошерно, поэтому её обычно спускают с небес на землю. Если подробно, то происходит это так. Используя свойство степеней (см. Приложение **Школьные формулы**), перепишем функцию следующим образом:

$$|y| = e^{C^*} \cdot e^{-2x}$$

Если C^* – константа, то $e^{C^*} > 0$ – это тоже некоторая константа, переобозначим её буквой C :

$y = Ce^{-2x}$ – при этом модуль раскрываем, после чего константа сможет принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Запомните «снос» константы – это **второй технический приём**, который часто используют в ходе решения дифференциальных уравнений. На чистовике можно сразу перейти от $\ln|y| = -2x + C^*$ к $y = Ce^{-2x}$, но всегда будьте готовы объяснить этот переход.

Итак, общее решение: $y = Ce^{-2x}$, где $C = \text{const}$. Такое вот симпатичное семейство экспоненциальных функций.

На завершающем этапе нужно найти *частное решение*, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(0) = 2$. Геометрически это означает, что из найденного семейства следует выбрать **ту** функцию, график которой проходит через точку $(0; 2)$.

И алгебраически нам нужно подобрать **такое** значение C , чтобы выполнялось начальное условие $y(0) = 2$. Оформить можно по-разному, но понятнее всего, пожалуй, будет так. В общее решение вместо «икса» подставляем ноль, а вместо «игрека» двойку:

$$2 = Ce^{-2 \cdot 0}$$

$$2 = Ce^0$$

$$2 = C \cdot 1, \text{ откуда следует, что } C = 2.$$

$$\text{Стандартная версия оформления: } y(0) = Ce^{-2 \cdot 0} = Ce^0 = C = 2$$

Теперь в общее решение $y = Ce^{-2x}$ подставляем найденное значение константы $C = 2$:

$$y = 2e^{-2x} \text{ – это и есть нужное нам частное решение}$$

Выполним проверку. Проверка частного решения включает в себя **два этапа**.

Сначала следует проверить, а действительно ли найденное частное решение $y = 2e^{-2x}$ удовлетворяет начальному условию $y(0) = 2$? Вместо «икса» подставляем ноль и смотрим, что получится:

$y(0) = 2e^{-2 \cdot 0} = 2e^0 = 2 \cdot 1 = 2$ – да, действительно получена двойка, значит, начальное условие выполняется.

Второй этап уже знаком. Берём полученное частное решение $y = 2e^{-2x}$ и находим производную:

$$y' = (2e^{-2x})' = 2(e^{-2x})' = 2e^{-2x} \cdot (-2x)' = -4e^{-2x}$$

Подставляем $y = 2e^{-2x}$ и $y' = -4e^{-2x}$ в исходное уравнение $y' = -2y$:

$$-4e^{-2x} = -2 \cdot 2e^{-2x}$$

$$-4e^{-2x} = -4e^{-2x} \text{ – получено верное равенство.}$$

Вывод: частное решение найдено правильно.

Переходим к более содержательным примерам.

Пример 3

Решить уравнение $y' + (2y + 1)\operatorname{ctgx} = 0$, выполнить проверку

Решение: переписываем производную в «дифференциальном» виде:

$$\frac{dy}{dx} + (2y + 1)\operatorname{ctgx} = 0$$

Оцениваем, можно ли разделить переменные? Можно. Переносим второе слагаемое в правую часть со сменой знака:

$$\frac{dy}{dx} = -(2y + 1)\operatorname{ctgx}$$

И перекидываем множители по правилу пропорции:

$$\frac{dy}{2y + 1} = -\operatorname{ctgx} dx$$

Переменные разделены, интегрируем обе части:

$$\int \frac{dy}{2y + 1} = - \int \operatorname{ctgx} dx$$

Должен предупредить, приближается судный день. Если вы плохо изучили неопределенные интегралы, прорешали мало примеров, то деваться некуда – придется их осваивать сейчас. На всякий случай привожу гиперссылку на **соответствующий раздел сайта** и **экстремально короткий курс по интегралам**.

Догоняющие – да догонят :) Едем дальше:

Интеграл левой части легко найти *подведением функции под знак дифференциала*, с интегралом от котангенса справляемся стандартным приёмом – *с помощью бородатой тригонометрической формулы* и последующим применением того же метода:

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{2y+1} &= -\int \frac{\cos x dx}{\sin x} \\ \frac{1}{2} \int \frac{d(2y+1)}{2y+1} &= -\int \frac{d(\sin x)}{\sin x} \\ \frac{1}{2} \ln|2y+1| &= -\ln|\sin x| + \ln|C^*|\end{aligned}$$

В результате у нас получились одни логарифмы, и, согласно моей первой технической рекомендации, константу тоже записываем под логарифм.

Теперь пробуем упростить общий интеграл. Поскольку у нас одни логарифмы, то от них можно (и нужно) избавиться. С помощью известных свойств (см. Приложение **Школьные формулы**) максимально «упаковываем» логарифмы. Распишу очень подробно:

$$\begin{aligned}\ln|2y+1|^{\frac{1}{2}} &= \ln|\sin x|^{-1} + \ln|C^*| \\ \ln\sqrt{2y+1} &= \ln\frac{1}{|\sin x|} + \ln|C^*| \\ \ln\sqrt{2y+1} &= \ln\left|\frac{C^*}{\sin x}\right|\end{aligned}$$

Упаковка завершена, чтобы быть варварски ободранной:

$\sqrt{2y+1} = \frac{C^*}{\sin x}$, и сразу-сразу приводим *общий интеграл* к виду $F(x; y) = C$, коль скоро, это возможно:

$$\sqrt{2y+1} \cdot \sin x = C^*, \text{ ибо всегда же выгодно порадовать профессора ;-)}$$

В принципе, это можно записать в ответ, но здесь ещё уместно возвести обе части в квадрат и переобозначить константу:

Ответ: общий интеграл: $(2y+1) \cdot \sin^2 x = C$, где $C = const$

Можно ли выразить общее решение? Можно. Давайте выразим общее решение:

$$(2y+1) \cdot \sin^2 x = C \Rightarrow 2y+1 = \frac{C}{\sin^2 x} \Rightarrow 2y = \frac{C}{\sin^2 x} - 1 \Rightarrow y = \frac{C}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}$$

Само собой, полученный результат годится для ответа, но обратите внимание, что общий интеграл смотрится компактнее, да и решение получилось короче.

Третий технический совет: если для получения общего решения нужно выполнить значительное количество действий, то в большинстве случаев лучше воздержаться от этих действий и оставить ответ в виде общего интеграла. Это же касается и «плохих» действий, когда требуется выразить обратную функцию, возвести в степень, извлечь корень и т.п. Дело в том, что общее решение будет смотреться вычурно и громоздко – с большими корнями, знаками \pm и прочим математическим трэшем.

Как выполнить проверку? Проверку можно выполнить двумя способами. Способ первый: берём общее решение $y = \frac{C}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}$, находим производную $y' = \left(\frac{C}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2} \right)'$ и подставляем их в исходное уравнение $y' + (2y + 1)\operatorname{ctgx} = 0$. Попробуйте самостоятельно!

Второй способ состоит в дифференцировании общего интеграла. Фактически нам нужно найти **производную неявно заданной функции**:

$$((2y + 1) \cdot \sin^2 x)' = (C)'$$

Используем правило дифференцирования произведения (см. Приложение **Таблица производных**):

$$(2y + 1)' \cdot \sin^2 x + (2y + 1) \cdot (\sin^2 x)' = 0$$

$$(2y' + 0) \cdot \sin^2 x + (2y + 1) \cdot 2\sin x \cdot (\sin x)' = 0$$

$$2y' \sin^2 x + (2y + 1) \cdot 2\sin x \cdot \cos x = 0$$

делим каждое слагаемое на $2\sin x$:

$$y' \sin x + (2y + 1) \cdot \cos x = 0$$

и на $\sin x$:

$$\frac{y' \sin x}{\sin x} + \frac{(2y + 1) \cdot \cos x}{\sin x} = 0$$

$$y' + (2y + 1)\operatorname{ctgx} = 0$$

Получено в точности исходное дифференциальное уравнение, значит, общий интеграл найден правильно.

Пример 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $y \ln y + xy' = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = e$. Выполнить проверку.

Решаем самостоятельно! – пробуем свои силы. Напоминаю, что **решение задачи Коши состоит из двух этапов**:

- 1) нахождение общего решения;
- 2) нахождение требуемого частного решения.

Проверка тоже проводится в два этапа, нужно:

- 1) убедиться, что найденное частное решение действительно удовлетворяет начальному условию;
- 2) проверить, что частное решение вообще удовлетворяет дифференциальному уравнению.

Если возникли затруднения, решайте по образцу Примера 2. Ну и в лучших традициях – полное решение и ответ в конце книги. Ссылку специально не ставлю, чтобы не было искушения =)

С боевым, а точнее, с учебным вас крещением!

Пример 5

Найти частное решение дифференциального уравнения $e^{y-x^2} dy - 2x dx = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = \ln 2$. Выполнить проверку.

Решение: Сначала найдем общее решение. Данное уравнение уже содержит готовые дифференциалы dy и dx , а значит, решение упрощается. Разделяем переменные:

$$e^y \cdot e^{-x^2} dy - 2x dx = 0$$

$$e^y \cdot e^{-x^2} dy = 2x dx$$

$$e^y dy = \frac{2x dx}{e^{-x^2}}$$

$$e^y dy = 2x e^{x^2} dx$$

Интегрируем уравнение:

$$\int e^y dy = 2 \int x e^{x^2} dx$$

Интеграл слева – табличный, интеграл справа – берём *методом подведения функции под знак дифференциала*:

$$\int e^y dy = \int e^{x^2} d(x^2)$$

$$e^y = e^{x^2} + C$$

Общий интеграл получен, нельзя ли удачно выразить общее решение? Можно. Навешиваем логарифмы на обе части. Поскольку правая часть не может быть отрицательной (*почему?*), то знак модуля будет излишним – ставим просто скобки:

$$\ln e^y = \ln(e^{x^2} + C)$$

$$y = \ln(e^{x^2} + C)$$

На всякий случай распишу: $\ln e^y = y \ln e = y \cdot 1 = y$.

Итак, общее решение:

$$y = \ln(e^{x^2} + C), \text{ где } C = \text{const}$$

Найдем частное решение, соответствующее заданному начальному условию $y(0) = \ln 2$. В общее решение вместо «икса» подставляем ноль, а вместо «игрека» логарифм двух:

$$\ln 2 = \ln(e^0 + C)$$

$$\ln 2 = \ln(1 + C), \text{ откуда следует, что } C = 1$$

Более привычное оформление: $y(0) = \ln(e^0 + C) = \ln(1 + C) = \ln 2 \Rightarrow C = 1$

Подставляем найденное значение константы $C = 1$ в общее решение и записываем

ответ: частное решение: $y = \ln(e^{x^2} + 1)$

Проверка. Сначала проверим, выполнено ли начальное условие $y(0) = \ln 2$:
 $y(0) = \ln(e^0 + 1) = \ln(1 + 1) = \ln 2$ – гуд.

Теперь проверим, а удовлетворяет ли вообще найденное частное решение $y = \ln(e^{x^2} + 1)$ дифференциальному уравнению. Находим производную:

$$y' = (\ln(e^{x^2} + 1))' = \frac{1}{(e^{x^2} + 1)} \cdot (e^{x^2} + 1)' = \frac{1}{(e^{x^2} + 1)} \cdot e^{x^2} \cdot (x^2)' = \frac{2xe^{x^2}}{(e^{x^2} + 1)}$$

Смотрим на исходное уравнение: $e^{y-x^2} dy - 2xdx = 0$ – оно представлено в дифференциалах. Есть два способа проверки. Можно из найденной производной выразить дифференциал dy :

$$y' = \frac{2xe^{x^2}}{(e^{x^2} + 1)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2xe^{x^2}}{(e^{x^2} + 1)} \Rightarrow dy = \frac{2xe^{x^2} dx}{(e^{x^2} + 1)}$$

после чего подставить $y = \ln(e^{x^2} + 1)$ и $dy = \frac{2xe^{x^2} dx}{(e^{x^2} + 1)}$ в исходное уравнение

$$e^{y-x^2} dy - 2xdx = 0.$$

Но это несколько неуклюжий вариант, здесь сподручнее разделить обе части диффура на dx :

$$\frac{e^{y-x^2} dy}{dx} - \frac{2xdx}{dx} = \frac{0}{dx}$$
$$e^{y-x^2} \cdot y' - 2x = 0$$

и подставить в полученное уравнение $y = \ln(e^{x^2} + 1)$ и $y' = \frac{2xe^{x^2}}{(e^{x^2} + 1)}$:

$$e^{\ln(e^{x^2} + 1) - x^2} \cdot \frac{2xe^{x^2}}{(e^{x^2} + 1)} - 2x = 0$$

По свойству степеней, «разбираем» экспоненту на множители:

$$e^{\ln(e^{x^2} + 1)} \cdot e^{-x^2} \cdot \frac{2xe^{x^2}}{(e^{x^2} + 1)} - 2x = 0$$

и используем основное логарифмическое тождество $e^{\ln a} = a$:

$$(e^{x^2} + 1) \cdot \frac{1}{e^{x^2}} \cdot \frac{2xe^{x^2}}{(e^{x^2} + 1)} - 2x = 0$$

$$2x - 2x = 0$$

$$0 = 0 \text{ – получено верное равенство.}$$

Таким образом, частное решение найдено правильно.

Пример 6

Найти общий интеграл уравнения $\sqrt{3+y^2} dx + \sqrt{1-x^2} y dy = 0$, ответ представить в виде $F(x; y) = C$.

Это пример для самостоятельного решения.

Какие трудности подстерегают при решении дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными?

1) Не всегда очевидно (особенно, «чайнику»), что переменные можно разделить. Рассмотрим условный пример: $\sqrt{xy - 2x} \cdot y' + xy^2 + 5y^2 = 0$. Здесь нужно провести вынесение множителей за скобки: $\sqrt{x(y - 2)} \cdot y' + y^2(x + 5) = 0$ и отделить корни: $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y - 2} \cdot y' + y^2(x + 5) = 0$. Как действовать дальше – понятно.

2) Сложности при самом интегрировании. Интегралы нередко возникают не самые простые, и если есть пробелы в навыках нахождения неопределенного интеграла, то со многими диффурами придется туго. К тому же у составителей сборников и методичек популярна логика «раз уж дифференциальное уравнение является простым, то тогда пусть интегралы будут посложнее».

3) Преобразования с константой – это уже относится и к диффурам других типов.

Как вы заметили, с константой в дифференциальных уравнениях можно обращаться достаточно вольно. И некоторые преобразования не всегда понятны новичку. Рассмотрим еще один условный пример: $\frac{1}{2} \ln|1 - x| = \frac{1}{2} \ln|y^2 - 3| + C^*$. В нём целесообразно умножить все слагаемые на два: $\ln|1 - x| = \ln|y^2 - 3| + 2C^*$. Полученная константа $2C^*$ – это тоже какая-то константа, которую можно обозначить через C^{**} : $\ln|1 - x| = \ln|y^2 - 3| + C^{**}$. Да, и поскольку у нас одни логарифмы, то константу C^{**} целесообразно переписать в виде другой константы: $\ln|1 - x| = \ln|y^2 - 3| + \ln|C|$.

Беда же состоит в том, что с индексами часто не заморачиваются и используют одну и ту же букву C . В результате запись решения принимает следующий вид:

$$\frac{1}{2} \ln|1 - x| = \frac{1}{2} \ln|y^2 - 3| + C$$

$$\ln|1 - x| = \ln|y^2 - 3| + C$$

$$\ln|1 - x| = \ln|y^2 - 3| + \ln|C|$$

Что за дела?! Тут же ошибки! Формально – да. А неформально – ошибок нет, подразумевается, что при преобразовании константы C всё равно получается равноценная варьируемая константа.

Или другой пример, предположим, что в ходе решения уравнения получен общий интеграл $-y^3 - y - x^2 - \ln x = C$. Такой ответ выглядит некрасиво, поэтому целесообразно сменить у всех множителей знаки: $y^3 + y + x^2 + \ln x = C$. Формально здесь опять ошибка – справа следовало бы записать «минус цэ». Но «между строк» подразумевается, что «минус цэ» – это всё равно константа, которая с тем же успехом принимает то же множество значений, и поэтому ставить «минус» не имеет смысла.

Я буду стараться избегать небрежного подхода и проставлять у констант разные индексы при их преобразовании, **чего и вам советую делать.**

Пример 7

Решить дифференциальное уравнение $2(xy + y)y' + x(y^4 + 1) = 0$

Решение: данное уравнение допускает разделение переменных. Разделяем переменные:

$$2(x+1)y \cdot \frac{dy}{dx} = -x(y^4 + 1)$$

$$\frac{2ydy}{y^4 + 1} = -\frac{xdx}{x+1}$$

Интегрируем, при этом слева *подводим функцию под знак дифференциала*, а справа используем *стандартный искусственный приём*:

$$2 \int \frac{ydy}{y^4 + 1} = - \int \frac{(x+1-1)dx}{x+1}$$

$$\int \frac{d(y^2)}{(y^2)^2 + 1} = - \int \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$\arctg(y^2) = -x + \ln|x+1| + C$$

Константу C тут не стоит определять под логарифм, поскольку ничего путного из этого не получится.

Ответ: общий интеграл: $\arctg(y^2) + x - \ln|x+1| = C$, где $C = const$

И, разумеется, здесь НЕ НАДО выражать «игрек» в явном виде, ибо получится трэш (вспоминаем третий технический совет).

Обратите внимание, что условие этой задачи не требуется проверки. Но я **настоятельно рекомендую по возможности ВСЕГДА проверять решение**. Ну а зачем пропускать возможные ошибки там, где их можно 100% не пропустить?!

Поэтому дифференцируем полученный ответ:

$$(\arctg(y^2) + x - \ln|x+1|)' = (C)'$$

$$(\arctg(y^2))' + (x)' - (\ln|x+1|)' = 0$$

$$\frac{1}{1+(y^2)^2} \cdot (y^2)' + 1 - \frac{1}{x+1} = 0$$

$$\frac{2yy'}{1+(y^2)^2} + \frac{x+1-1}{x+1} = 0$$

$$\frac{2yy'}{1+y^4} + \frac{x}{x+1} = 0$$

Приводим дроби к общему знаменателю, после чего знаменатель испаряется (можно сказать, что мы «поднимаем» его вверх правой части и умножаем на ноль):

$$\frac{2yy'(x+1) + x(1+y^4)}{(1+y^4)(x+1)} = 0$$

$2(xy + y)y' + x(1 + y^4) = 0$ – получено исходное дифференциальное уравнение, значит, общий интеграл найден правильно.

Пример 8

Найти частное решение ДУ.

$$2y' \sin y \cdot \cos y \cdot \sin^2 x + \cos x = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Это пример для самостоятельного решения. Единственная поправка в термине – здесь получится общий интеграл, а посему нужно исхитриться найти не частное решение, а *частный интеграл*. Полное решение и ответ в конце книги.

Как уже отмечалось, в диффурах с разделяющимися переменными нередко вырисовываются не самые простые интегралы. И вот как раз парочка таких примеров для самостоятельного решения. **Рекомендую прорешать эти уравнения, независимо от уровня вашей подготовки** – это позволит размяться и вспомнить основные методы нахождения интегралов:

Пример 9

Решить дифференциальные уравнения

а) $(1 + e^x)ydy - e^x dx = 0$;

б) $y - xy' = 3(1 + x^2 y')$

Если на чём-то появился «затык», то не теряйте время и обращайтесь к образцу, где я проставил ссылки на нужные темы и уроки. Кроме того, «внешний вид» ваших ответов может отличаться от «внешнего вида» моих ответов – как вы заметили, **общий интеграл можно записать не единственным способом**.

В этой связи возьмите на заметку важную вещь:

Если ваш ответ не совпал с заранее известным ответом (*задачника, например*), или вам выдала «не тот» ответ какая-нибудь программа – **то это ещё не значит, что ваш ответ неправильный!** Особенно часто мои читатели приводят аргумент «но программа же не тот ответ выдаёт!». Да, возможно, читатель и в самом деле ошибся, но здесь я всегда замечая следующее: 1) программу мог написать «на коленке» какой-нибудь студент, 2) и даже в «серьёзных» программах бывают ошибки, а в задачниках – опечатки (последнее довольно часто), 3) зачастую машина решит вам так – как не решит ни один человек :) – наверное, все сталкивались с забавным автоматическим переводом текста на другой язык, вот и здесь так же.

Поэтому

более высокий приоритет (и авторитет) имеет ручная проверка!

Да, конечно, иногда встречаются «тяжёлые случаи», но это скорее исключение, чем правило. Но я-то не буду томить вас долгими ожиданиями – прямо сейчас, с энтузиазмом и восторженными глазами, мы перейдём к изучению следующего параграфа =)

1.3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

В чём отличие однородных дифференциальных уравнений 1-го порядка от других типов ДУ? Это проще всего сразу же пояснить на конкретном примере:

Пример 10

Решить дифференциальное уравнение $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$

Однако не спешим. **Что в первую очередь следует проанализировать** при решении **любого** дифференциального уравнения первого порядка? Правильно – нужно проверить, а нельзя ли в нём **разделить переменные**?

Попробуйте мысленно или на черновике попереносить слагаемые из части в часть, повыносить множители за скобки, поперекидывать их по правилу пропорции.... После непродолжительных и тщетных попыток, вы придёте к выводу, что «школьными» действиями **переменные тут разделить нельзя**. Возникает вопрос – как же решить этот диффур?

Нужно проверить, а **не является ли данное уравнение однородным**? Проверка несложная, и сам алгоритм проверки можно сформулировать так:

В исходное уравнение $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$:

вместо x подставляем λx ;

вместо y подставляем λy ;

производную не трогаем:

$$\lambda x \cdot y' = \lambda y - \lambda x e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}}$$

Буква лямбда – это условный параметр, и здесь он играет следующую роль: если в результате преобразований удастся «уничтожить» ВСЕ лямбды и получить исходное уравнение, то данное дифференциальное уравнение **является однородным**.

Очевидно, что лямбды сразу сокращаются в показателе степени:

$$\lambda x \cdot y' = \lambda y - \lambda x e^{\frac{y}{x}}$$

Теперь в правой части выносим лямбду за скобки:

$$\lambda x \cdot y' = \lambda (y - x e^{\frac{y}{x}})$$

В результате параметр исчез как сон, как утренний туман:

$$xy' = y - x e^{\frac{y}{x}} \text{ – и мы получили исходное уравнение.}$$

Вывод: данное уравнение является однородным.

Как решить однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка?

У меня очень хорошая новость. Абсолютно все такие уравнения можно решить с помощью одной-единственной (!) стандартной замены.

Функцию «игрек» нужно **заменить произведением** некоторой функции t (тоже зависящей от «икс») и «икса»:

$$y = t(x) \cdot x, \text{ или короче: } y = tx$$

Используя правило дифференцирования произведения, найдём производную:

$$y' = (tx)' = (t)' \cdot x + t \cdot (x)' = t' \cdot x + t \cdot 1 = t'x + t$$

Теперь подставляем $y = tx$ и $y' = t'x + t$ в исходное уравнение $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$:

$$x(t'x + t) = tx - xe^{\frac{tx}{x}}$$

Что даст такая замена? После данной замены и проведенных упрощений мы гарантировано получим **уравнение с разделяющимися переменными**.

ЗАПОМИНАЕМ как первую любовь: $y = tx$ и, соответственно, $y' = t'x + t$.

После подстановки проводим максимальные упрощения:

$$x(t'x + t) = x(t - e^t)$$

$$t'x + t = t - e^t$$

$$t'x = -e^t$$

В результате получено уравнение с разделяющимися переменными. Далее алгоритм работает по накатанной колее. Поскольку t – это функция, зависящая от «икс», то её производную можно записать стандартной дробью $t' = \frac{dt}{dx}$.

Таким образом, наше уравнение приобретает вид:

$$x \frac{dt}{dx} = -e^t$$

Разделяем переменные, при этом в левой части нужно собрать только «тэ», а в правой части – только «иксы»:

$$-e^{-t} dt = \frac{dx}{x}$$

Переменные разделены, интегрируем:

$$-\int e^{-t} dt = \int \frac{dx}{x}$$

Согласно моему первому техническому совету, константу можно «оформить» под логарифм:

$$e^{-t} = \ln|x| + \ln|C|$$

После того, как уравнение проинтегрировано, нужно провести **обратную замену**, она тоже стандартна и единственна:

$$\text{Если } y = tx, \text{ то } t = \frac{y}{x}$$

$$\text{В данном случае получаем: } e^{-\frac{y}{x}} = \ln|Cx|$$

$$\text{Ответ: общий интеграл: } e^{-\frac{y}{x}} = \ln|Cx|, \text{ где } C = \text{const}$$

Общее решение однородного уравнения почти всегда записывают в виде общего интеграла. Дело в том, что в большинстве случаев невозможно выразить «игрек» в явном виде (получить общее решение), а если и возможно, то чаще всего получается громоздкий и корявый ответ.

В нашем примере общее решение выразить можно, навешиваем логарифмы на обе части общего интеграла:

$$\ln e^{-\frac{y}{x}} = \ln \ln|Cx|$$

$$-\frac{y}{x} = \ln \ln|Cx|$$

$$y = -x \ln \ln|Cx| - \text{ ну, ещё куда ни шло, хотя всё равно смотрится кривовато.}$$

Полученный ответ нетрудно проверить. Для этого нужно продифференцировать общий интеграл:

$$\left(e^{-\frac{y}{x}} \right)' = (\ln|Cx|)'$$

$$e^{-\frac{y}{x}} \cdot \left(-\frac{y}{x} \right)' = \frac{1}{Cx} \cdot (Cx)'$$

$$-e^{-\frac{y}{x}} \cdot \frac{(y'x - y)}{x^2} = \frac{1}{Cx} \cdot C$$

$$-\frac{e^{-\frac{y}{x}} \cdot (y'x - y)}{x^2} = \frac{1}{x}$$

Избавляемся от дробей, умножая каждую часть уравнения на x^2 :

$$-\frac{e^{-\frac{y}{x}} \cdot (y'x - y)}{x^2} \cdot x^2 = \frac{1}{x} \cdot x^2$$

$$-e^{-\frac{y}{x}} \cdot (y'x - y) = x$$

$$y'x - y = -\frac{x}{e^{-\frac{y}{x}}}$$

$xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$ – в результате получено исходное дифференциальное уравнение, значит, решение найдено правильно.

Кстати, в разобранный пример я не совсем «прилично» записал общий интеграл:

$e^{-\frac{y}{x}} = \ln|Cx|$. Это не ошибка, но лучше так представить его в виде $F(x; y) = C$. И для этого сразу после интегрирования, константу следовало записать без логарифма:

$$e^{-\frac{y}{x}} = \ln|x| + C,$$

чтобы получить общий интеграл в «классическом» виде:

$$e^{-\frac{y}{x}} - \ln|x| = C, \text{ где } C = \text{const}$$

Многие составители задачников и методичек прямо указывают на соблюдение «приличий», и я – не исключение:)

Пример 11

Проверить на однородность и решить дифференциальное уравнение $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$, ответ представить в виде $F(x; y) = C$. Выполнить проверку.

Следует отметить, что многие однородные ДУ проверить не так-то просто – для этого требуется весьма и весьма приличная техника дифференцирования. Но по возможности всегда проверяйте!

А теперь обещанный **важный момент**, о котором я упомянул в самом начале книги, выделю его жирными чёрными буквами:

если в ходе преобразований мы «сбрасываем» множитель (не константу) в знаменатель, то РИСКУЕМ потерять решения!

Так, в процессе решения уравнения $xy' = y$ (Пример 1) «игрек» оказывается в знаменателе: $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$, но $y = 0$, очевидно, является решением ДУ и в результате неравносильного преобразования (деления) есть все шансы его потерять! Другое дело, что оно вошло в общее решение $y = Cx$ при нулевом значении константы. Сброс «икса» в знаменатель тоже можно не принимать во внимание, так как $x = 0$ не удовлетворяет исходному диффуру.

Аналогичная история с уравнением $y' + (2y + 1) \operatorname{ctgx} = 0$ (Пример 3), в ходе решения которого мы «сбросили» $2y + 1$ в знаменатель. Строго говоря, здесь следовало проверить, а не является ли $y = -\frac{1}{2}$ решением данного диффура. Ведь является! Но и тут «всё обошлось», поскольку эта функция вошла в общий интеграл $\sqrt{2y + 1} = \frac{C}{\sin x}$ при $C = 0$.

И если с «разделяющимися» уравнениями такое часто ;) «прокатывает», то с однородными и некоторыми другими диффурами может и «не прокатить». Однако, в Примерах 10-11 «сброс» икса тоже оказался безопасен, ибо там есть $e^{\frac{y}{x}}$ и $\operatorname{tg} \frac{y}{x}$, а посему сразу понятно, что $x = 0$ не может быть решением. Но «счастливые случаи» я, конечно же, устроил специально, и не факт, что на практике попадутся именно они:

Пример 12

Решить уравнение $xy' + 2\sqrt{xy} - y = 0$

И перед тем, как **решать**, **СТОП, не торопимся**, а мысленно либо на черновике анализируем: **нельзя ли разделить переменные?** Нет, нельзя.

Проверим уравнение на однородность, для этого ВМЕСТО x подставляем λx и ВМЕСТО y подставляем λy :

$$\lambda xy' + 2\sqrt{\lambda x \cdot \lambda y} - \lambda y = 0$$

$$\lambda xy' + 2\sqrt{\lambda^2 xy} - \lambda y = 0$$

$$\lambda xy' + 2\lambda\sqrt{xy} - \lambda y = 0$$

выносим «лямбду» за скобки, после чего она испаряется:

$$\lambda(xy' + 2\sqrt{xy} - y) = 0$$

$$xy' + 2\sqrt{xy} - y = 0 \text{ — получено исходное ДУ, значит, оно является однородным.}$$

В реальной практике на чистовике такую проверку проводить не нужно (если специально не просят), и очень быстро вы приналовитесь выполнять её устно.

Проведём типовую замену, а именно подставим $y = tx$ и $y' = t'x + t$ в исходное уравнение:

$$x(t'x + t) + 2\sqrt{x \cdot tx} - tx = 0$$

И первая опасность нас поджидает совсем не в делении. Дело в том, что $\sqrt{x^2} = |x|$, и этот факт очень легко упустить из виду:

$$x \cdot t'x + tx + 2|x|\sqrt{t} - tx = 0$$

$$t'x^2 + 2|x|\sqrt{t} = 0$$

Вспоминаем, как раскрывается модуль: $|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$.

Таким образом, у нас получается **два** уравнения:

$$t'x^2 + 2x\sqrt{t} = 0 \Rightarrow t'x + 2\sqrt{t} = 0, \text{ если } x > 0, \text{ и}$$

$$t'x^2 + 2(-x)\sqrt{t} = 0 \Rightarrow t'x - 2\sqrt{t} = 0, \text{ если } x < 0.$$

Уравнения отличаются знаком при корне и, по существу, достаточно решить одно из них. Решим 1-е уравнение:

$$x \frac{dt}{dx} = -2\sqrt{t}$$

$$\frac{dt}{2\sqrt{t}} = -\frac{dx}{x} \text{ — при этом у корня нужно сохранить знак: в уравнении } t'x + 2\sqrt{t} = 0$$

перед ним знак «плюс», и перед интегрированием тоже «плюс»!

И опасность третья: сейчас мы разделили обе части на x и поэтому нужно проверить, не является ли $x = 0$ решением исходного уравнения $xy' + 2\sqrt{xy} - y = 0$:

$$0 + 0 - y = 0 \text{ — неверное равенство, ответ «нет»}.$$

Кроме того, мы сбросили в знаменатель \sqrt{t} , а значит, проверке подлежит функция $t = \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow y = 0$. Подставляем её вместе с её производной $y' = (0)' = 0$ в исходное уравнение:

$0 + 0 - 0 = 0$ – получено *верное равенство*, значит, $y = 0$ – **это одно из решений ДУ, и мы его рискуем потерять.**

Берём это на заметку и интегрируем обе части:

$$\int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\sqrt{t} = -\ln|x| + C$$

Упрощать тут нечего, поэтому проводим обратную замену $t = \frac{y}{x}$:

$$\sqrt{\frac{y}{x}} + \ln|x| = C, \text{ если } x > 0. \text{ Привыкаем к виду } F(x; y) = C!$$

Аналогично, от 2-го уравнения $t'x - 2\sqrt{t} = 0$ переходим к уравнению $-\frac{dt}{2\sqrt{t}} = -\frac{dx}{x}$,

сохраняя «минус» при корне, и после интегрирования и обратной замены получаем:

$$-\sqrt{t} = -\ln|x| + C$$

$$-\sqrt{\frac{y}{x}} + \ln|x| = C, \text{ если } x < 0$$

Обе «ветки» решения можно записать единым общим интегралом:

$$\operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{\frac{y}{x}} + \ln|x| = C, \text{ где «сигнум икс» – это специальная функция, которая}$$

возвращает знак «икс»: $\operatorname{sgn} x = 1$, если $x > 0$, $\operatorname{sgn} x = 0$, если $x = 0$ и $\operatorname{sgn} x = -1$, если $x < 0$.

Допустима и запись $\pm \sqrt{\frac{y}{x}} + \ln|x| = C$, но она требует дополнительных письменных комментариев.

И на финишной черте вспоминаем о решении $y = 0$. В общий интеграл **оно не вошло**, и поэтому его нужно дополнительно указать в **ответе**:

$$\text{общий интеграл: } \operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{\frac{y}{x}} + \ln|x| = C, \text{ где } C = \text{const}, \text{ ещё одно решение: } y = 0.$$

Если по условию требуется найти частное решение, например, с начальным условием $y(-1) = -1$, то следует выбрать нужную ветку: $-\sqrt{\frac{y}{x}} + \ln|x| = C$ (т.к. $x = -1 < 0$) и выполнить подстановку: $-\sqrt{\frac{-1}{-1}} + \ln|-1| = C \Rightarrow -1 + 0 = C \Rightarrow C = -1 \Rightarrow -\sqrt{\frac{y}{x}} + \ln|x| = -1$ – искомый частный интеграл. Впрочем, задачу Коши в однородных уравнениях почему-то (уж не знаю почему) предлагают крайне редко.

Продолжаем, сейчас будет становиться **всё жарче и жарче!**

Пример 13

Решить дифференциальное уравнение

$$(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$$

Это очень интересный пример, прямо целый триллер! Сначала убеждаемся в том, что переменные тут **разделить** нельзя, после чего проводим проверку на однородность:

$$((\lambda y)^2 - 2\lambda x \cdot \lambda y)dx + (\lambda x)^2 dy = 0$$

$$(\lambda^2 y^2 - 2\lambda^2 xy)dx + \lambda^2 x^2 dy = 0$$

$$\lambda^2 (y^2 - 2xy)dx + \lambda^2 x^2 dy = 0$$

$$\lambda^2 \cdot [(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy] = 0$$

$(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$ – в результате получено исходное ДУ, значит, оно является однородным.

Особенность этого уравнения состоит в том, что оно содержит готовые дифференциалы, и его можно решить модифицированной заменой:

$$y = tx \Rightarrow dy = xdt + tdx$$

Но я не советую использовать такую подстановку, поскольку получится Великая китайская стена дифференциалов, где нужен глаз да глаз. С технической точки зрения выгоднее перейти к «штриховому» обозначению производной, для этого делим обе части уравнения на dx :

$$\frac{(y^2 - 2xy)dx}{dx} + \frac{x^2 dy}{dx} = \frac{0}{dx}$$

$$y^2 - 2xy + x^2 y' = 0$$

И уже здесь мы совершили «опасное» преобразование! Нулевому дифференциалу $dx = 0$ соответствует $x = C$ – семейство прямых, параллельных оси OY . Являются ли они решениями нашего ДУ? Подставим в него $x = C$ и $dx = d(C) = 0$:

$$(y^2 - 2Cy) \cdot 0 + C^2 dy = 0$$

$$C^2 dy = 0$$

Данное равенство справедливо, если $C = 0$, то есть, при делении на dx мы рисковали потерять корень $x = 0$, **и мы его потеряли** – так как он **УЖЕ не удовлетворяет** полученному уравнению $y^2 - 2xy + x^2 y' = 0$.

Следует заметить, что если бы нам **изначально** было дано уравнение $y^2 - 2xy + x^2 y' = 0$, то о корне $x = 0$ речи бы не шло.

Продолжаем решение стандартной заменой $y = tx$, $y' = t'x + t$:

$$(tx)^2 - 2x \cdot tx + x^2 (t'x + t) = 0$$

после подстановки упрощаем всё, что можно упростить:

$$t^2 x^2 - 2x^2 t + x^2 (t'x + t) = 0$$

$$t^2 - 2t + t'x + t = 0$$

$$t^2 + t'x - t = 0$$

Разделяем переменные:

$$x \frac{dt}{dx} = t - t^2$$
$$\frac{dt}{t(1-t)} = \frac{dx}{x}$$

И вот здесь снова СТОП: при делении на $t(1-t)$ мы рискуем потерять сразу две функции. Так как $t = \frac{y}{x}$, то это функции:

$$t = 0 \Rightarrow \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$1 - t = 0 \Rightarrow \frac{y}{x} = 1 \Rightarrow y = x$$

Очевидно, что первая функция является решением уравнения $y^2 - 2xy + x^2 y' = 0$.
Проверяем вторую – подставляем $y = x$ и её производную $y' = (x)' = 1$:

$$x^2 - 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 0$$

$$x^2 - 2x^2 + x^2 = 0$$

$0 = 0$ – получено *верное равенство*, значит, функция $y = x$ тоже является решением дифференциального уравнения.

И при делении на $t(1-t)$ мы эти решения рискуем потерять. Впрочем, они могут войти в общий интеграл. Но могут и не войти.

Берём всё это на заметку и интегрируем обе части:

$$\int \frac{dt}{t(1-t)} = \int \frac{dx}{x}$$

Интеграл левой части можно решить методом выделения полного квадрата, но в диффурах удобнее использовать метод неопределённых коэффициентов.

Разложим подынтегральную функцию в сумму элементарных дробей:

$$\frac{A}{t} + \frac{B}{1-t} = \frac{1}{t(1-t)}$$

$$A(1-t) + Bt = 1$$

$$\begin{cases} -A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow B = 1$$

Таким образом: $\frac{1}{t(1-t)} = \frac{1}{t} + \frac{1}{1-t} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t-1}$ – удобнее так.

Находим оставшиеся интегралы:

$$\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-1} \right) dt = \ln|x| + \ln|C|$$

$\ln|t| - \ln|t-1| = \ln|x| + \ln|C|$ – так как у нас нарисовались одни логарифмы, то константу тоже заталкиваем под логарифм.

Перед обратной заменой снова упрощаем всё, что можно упростить:

$$\ln \left| \frac{t}{t-1} \right| - \ln |x| = \ln |C|$$

$$\ln \left| \frac{t}{x(t-1)} \right| = \ln |C|$$

Сбрасываем цепи:

$$\frac{t}{x(t-1)} = C$$

И вот только теперь обратная замена $t = \frac{y}{x}$:

$$\frac{\frac{y}{x}}{x\left(\frac{y}{x}-1\right)} = C$$

$$\frac{\frac{y}{x}}{y-x} = C$$

$$\frac{y}{x(y-x)} = C$$

Теперь вспоминаем о «потеряшках»: решение $y = 0$ вошло в общий интеграл при значении $C = 0$, а вот $y = x$ – «пролетело мимо кассы», т.к. оказалось в знаменателе. Поэтому в ответе оно достаивается отдельной фразы, и да – не забываем о потерянном решении $x = 0$ («икс», к слову, тоже оказался внизу).

Ответ: общий интеграл: $\frac{y}{x(y-x)} = C$, где $C = const$. Ещё решения: $x = 0$, $y = x$

Здесь не так трудно выразить общее решение:

$$\frac{y}{y-x} = Cx \Rightarrow y = Cxy - Cx^2 \Rightarrow Cxy - y = Cx^2 \Rightarrow (Cx-1)y = Cx^2 \Rightarrow y = \frac{Cx^2}{Cx-1}, \text{ но это}$$

уже «понты».

Удобные, впрочем, для проверки. Найдём производную:

$$y' = \left(\frac{Cx^2}{Cx-1} \right)' = \frac{(Cx^2)'(Cx-1) - Cx^2(Cx-1)'}{(Cx-1)^2} = \frac{2Cx(Cx-1) - Cx^2 \cdot C}{(Cx-1)^2}$$

и подставим $y = \frac{Cx^2}{Cx-1}$, $y' = \frac{2Cx}{Cx-1} - \frac{C^2x^2}{(Cx-1)^2}$ в левую часть уравнения:

$$\begin{aligned} y^2 - 2xy + x^2y' &= \left(\frac{Cx^2}{Cx-1} \right)^2 - 2x \cdot \frac{Cx^2}{Cx-1} + x^2 \left(\frac{2Cx}{Cx-1} - \frac{C^2x^2}{(Cx-1)^2} \right) = \\ &= \frac{C^2x^4}{(Cx-1)^2} - \frac{2Cx^3}{Cx-1} + \frac{2Cx^3}{Cx-1} - \frac{C^2x^4}{(Cx-1)^2} = 0 \end{aligned}$$

– в результате получена правая часть уравнения, что и требовалось проверить.

Тренируемся!

Пример 14

Решить дифференциальные уравнения

а) $y^2 + x^2 y' = xy y'$

б) и что-нибудь простенькое... вот: $(x + y)dy + ydx = 0$, а то вы больше не придёте к такому маньяку :) Выполнить проверку.

Однородность этих уравнений, думаю, всем видна, но ни в коем случае не следует забывать и о Проверке № 0 ;) Ибо уравнение $yy' = x$ тоже однородно, но в нём лучше **разделить переменные**, дабы не блуждать в трёх соснах с первой любовью :) Решения и ответы в конце книги, и не забывайте, что «внешний вид» ваших решений и ответов не обязан совпадать с образцом. Проверка и ещё раз проверка!

Итак: при неравносильных преобразованиях **ВСЕГДА проверяйте** (по крайней мере, устно), **не теряете ли вы решения!** Какие это преобразования? Как правило, сокращение на что-то, деление на что-то, вынесение из-под корня / внесение под корень.

Так, например, при делении на $\sqrt{y^2 - x^2}$ нужно проверить, не являются ли функции $y = -x$, $y = x$ решениями дифференциального уравнения. Если проводится замена $y = tx$, то легче лёгкого потерять одну из веток решения, поэтому не забываем про модуль: $\sqrt{t^2 x^2 - x^2} = |x| \sqrt{t^2 - 1}$, и после его раскрытия **сохраняем знаки при корне**, несоблюдение этого правила может закончиться фатальной ошибкой. В ряде случаев удаётся избавиться от функции $\operatorname{sgn} x$ или знаков \pm , но чтобы вас не путать, я опустил эти примеры.

При делении на *разложимый* на множители квадратный трёхчлен $y^2 + 6y + 5$ есть все шансы потерять возможные корни $y = -1$, $y = -5$. В то же время при делении на $\sqrt{y^2 + 4}$ или *неразложимый* трёхчлен $y^2 + 2y + 2$ надобность в такой проверке уже отпадает – по причине того, что эти делители не обращаются в ноль.

Вот ещё одна опасная ситуация:

$$(y-1)(\dots) = (y-1)(\dots\dots\dots)$$

Здесь, избавляясь от $y - 1$, следует проверить, не является ли $y = 1$ решением исходного ДУ. Часто в качестве такого множителя встречается «икс», «игрек», и мы рискуем потерять $x = 0$, $y = 0$, которые могут оказаться решениями.

Потеря решения будет серьёзным недочётом и основанием для незачёта задачи!

С другой стороны, если что-то **ИЗНАЧАЛЬНО** находится в знаменателе, то повода для такого беспокойства нет. Так, в однородном уравнении $y' = \frac{3x - 2y}{x + 5y}$ можно не

беспокоиться о функции $y = -\frac{x}{5}$, ибо она изначально «заявлена» в знаменателе.

Переходим к изучению третьего, **важнейшего типа дифференциального уравнения:**

1.4. Линейное неоднородное уравнение первого порядка

Если переменные **разделить** не удалось, и уравнение **однородным** не является, то перед нами с ОЧЕНЬ высокой вероятностью линейное неоднородное уравнение 1-го порядка.

Данное уравнение имеет следующий вид:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x), \text{ где } p(x), q(x) - \text{члены, зависящие только от «икс»}.$$

Как вариант:

1) $q(x)$ может быть константой (конкретным числом):

$$y' + p(x) \cdot y = k;$$

2) $p(x)$ может быть константой:

$$y' + ky = q(x), \text{ простейшие случаи } y' + y = q(x), y' - y = q(x);$$

3) и иногда рядом с производной красуется «иксовый» множитель:

$r(x) \cdot y' + p(x) \cdot y = q(x)$ – это тоже линейное неоднородное уравнение (*опционально $p(x)$ или $q(x)$ может быть константой*).

Разумеется, в практических примерах члены уравнения могут быть переставлены местами, но гораздо чаще они расположены в стандартном порядке:

Пример 15

Решить дифференциальное уравнение $y' - y = e^x$

Решение: неразделимость переменных и неоднородность этого уравнения совершенно очевидна, и перед нами линейное уравнение вида:

$$y' - y = q(x)$$

Как решить линейное неоднородное уравнение 1-го порядка?

Существуют два способа решения, и сначала я познакомлю вас с наиболее распространённым **методом Бернулли**. Он более чёткий, более простой и в очередной раз приносит нам отличную новость! Линейное дифференциальное уравнение тоже можно решить одной-единственной заменой:

$y = u(x) \cdot v(x)$, где u и v – некоторые, *пока ещё* неизвестные функции, зависящие от «икс».

Коль скоро, у нас произведение $y = uv$, то по правилу дифференцирования произведения: $y' = (uv)' = u'v + uv'$

Подставляем $y = uv$ и $y' = u'v + uv'$ в уравнение $y' - y = e^x$:

$$u'v + uv' - uv = e^x$$

Все дальнейшие действия, как вы правильно догадались, будут посвящены отысканию функций «у» и «вэ».

После подстановки смотрим на два слагаемых, которые располагаются вот на этих местах:

$$u'v + \boxed{uv' - uv} = e^x$$

У них нужно вынести за скобки всё, что можно вынести. В данном случае:

$$u'v + u(v' - v) = e^x$$

Теперь нужно составить систему уравнений. Система составляется стандартно:

Приравниваем к нулю то, что находится в скобках: $v' - v = 0$ (первое уравнение)

Если $v' - v = 0$, тогда наш страх $u'v + u(v' - v) = e^x$ заметно уменьшается:

$$u'v + u \cdot 0 = e^x$$

$$u'v = e^x \text{ — это второе уравнение.}$$

Уравнения записываем в систему:

$$\begin{cases} v' - v = 0 \\ u'v = e^x \end{cases}.$$

Именно в таком порядке — чтобы не путаться. Система опять же решается стандартно.

Сначала **из первого уравнения находим функцию $v(x)$** . Это простейшее **уравнение с разделяющимися переменными**, поэтому его решение я приведу без комментариев:

$$v' - v = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = v$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int dx$$

$$\ln|v| = x$$

$$v = e^x$$

Функция v найдена. Обратите внимание, что константу C на данном этапе мы не приписываем.

Далее **подставляем найденную функцию $v = e^x$ во второе уравнение системы** $u'v = e^x$:

$$u' \cdot e^x = e^x$$

Да это даже не удовольствие — это мечта!

Из второго уравнения находим функцию $u(x)$:

$$u' = 1$$

$$\frac{du}{dx} = 1$$

$$u = \int dx = x + C$$

Функция u найдена. А вот здесь уже добавляем константу C .

Опс. А задача-то решена! Вспоминаем, с чего всё начиналось: $y = uv$.

Обе функции найдены:

$$v = e^x$$

$$u = x + C$$

Записываем общее решение:

$$y = uv = (x + C) \cdot e^x, \text{ где } C = \text{const}$$

В ответе можно раскрыть скобки, это дело вкуса:

Ответ: общее решение $y = Ce^x + xe^x$, где $C = \text{const}$

Проверка выполняется по знакомой технологии, берём ответ $y = Ce^x + xe^x$ и находим производную:

$$y' = (Ce^x + xe^x)' = C(e^x)' + (x)'e^x + x(e^x)' = Ce^x + e^x + xe^x$$

Подставим $y = Ce^x + xe^x$ и $y' = Ce^x + e^x + xe^x$ в исходное уравнение $y' - y = e^x$:

$$Ce^x + e^x + xe^x - (Ce^x + xe^x) = e^x$$

$$Ce^x + e^x + xe^x - Ce^x - xe^x = e^x$$

$$e^x = e^x$$

Получено верное равенство, таким образом, общее решение найдено правильно.

Разбираем «на одном дыхании»:

Пример 16

Найти общее решение дифференциального уравнения $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

Решение: данное уравнение имеет «классический» вид $y' + p(x) \cdot y = q(x)$ линейного уравнения. Проведем замену: $y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$ и подставим $y = uv$ и $y' = u'v + uv'$ в исходное уравнение $y' + 2xy = xe^{-x^2}$:

$$u'v + uv' + 2xuv = xe^{-x^2}$$

После подстановки вынесем множитель за скобки, какие два слагаемых нужно мучить – смотрите предыдущий пример. Хотя, наверное, все уже поняли:

$$u'v + u(v' + 2xv) = xe^{-x^2}$$

Составляем систему. Для этого приравняем к нулю то, что находится в скобках: $v' + 2xv = 0$, автоматически получая и второе уравнение системы:

$$u'v + u \cdot 0 = xe^{-x^2}$$

$$u'v = xe^{-x^2}$$

В результате:

$$\begin{cases} v' + 2xv = 0 \\ u'v = xe^{-x^2} \end{cases}$$

Из первого уравнения найдем функцию v :

$$\frac{dv}{dx} = -2xv$$

$$\frac{dv}{v} = -2x dx$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2 \int x dx$$

$$\ln|v| = -x^2$$

$v = e^{-x^2}$ – без константы! Найденную функцию подставляем во второе уравнение системы $u'v = xe^{-x^2}$:

$$u' \cdot e^{-x^2} = xe^{-x^2}$$

Теперь находим функцию u . Уравнение опять получилось простенькое:

$$\frac{du}{dx} = x$$

$$u = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

Обе функции найдены:

$$v = e^{-x^2}$$

$$u = \frac{x^2}{2} + C$$

Таким образом, общее решение: $y = uv = \left(\frac{x^2}{2} + C \right) \cdot e^{-x^2}$

Ответ: общее решение: $y = \left(\frac{x^2}{2} + C \right) \cdot e^{-x^2}$, где $C = const$

Без остановки решаем самостоятельно:

Пример 17

Найти общее решение дифференциального уравнения $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$, выполнить проверку.

Как видите, алгоритм довольно прост. **В чём особенность решения линейных неоднородных уравнений 1-го порядка?** Особенность состоит в том, практически всегда в ответе получается *общее решение*, в отличие от тех же **однородных уравнений**, где общее решение хорошо выражается крайне редко и ответ приходится записывать в виде *общего интеграла*.

Рассмотрим что-нибудь с дробями:

Пример 18

Найти частное решение дифференциального уравнения $y' + \frac{y}{x} - 2e^{x^2} = 0$,
удовлетворяющее начальному условию $y(1) = e$

Напоминаю, что такая постановка вопроса также называется *задачей Коши*.

И сразу обратим внимание, что уравнение представлено не совсем в стандартной форме. Этого можно не делать, но я все-таки рекомендую всегда переписывать уравнения в привычном виде $y' + p(x) \cdot y = q(x)$:

$$y' + \frac{y}{x} = 2e^{x^2}$$

Алгоритм **решения** полностью сохраняется, за исключением того, что в конце прибавится один небольшой пункт. Данное уравнение является линейным неоднородным, проведем замену $y = uv$, $y' = u'v + uv'$:

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = 2e^{x^2}$$

и типовой «вынос» за скобки:

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = 2e^{x^2}$$

Составим и решим систему:

$$\begin{cases} v' + \frac{v}{x} = 0 \\ u'v = 2e^{x^2} \end{cases}$$

Из первого уравнения найдем v :

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|v| = -\ln|x|$$

$$\ln|v| = \ln|x|^{-1}$$

$$\ln|v| = \ln \frac{1}{|x|}$$

$v = \frac{1}{x}$ – подставим найденную функцию во второе уравнение $u'v = 2e^{x^2}$ системы:

$$\frac{du}{dx} \cdot \frac{1}{x} = 2e^{x^2}$$

$$du = 2xe^{x^2} dx$$

$$u = 2 \int xe^{x^2} dx = \int e^{x^2} d(x^2) = e^{x^2} + C$$

(здесь интеграл взят *методом подведения функции под знак дифференциала*)

Обе функции найдены, таким образом, общее решение:

$$y = uv = (e^{x^2} + C) \cdot \frac{1}{x} = \frac{e^{x^2} + C}{x}, \text{ где } C = \text{const}$$

На заключительном этапе нужно решить задачу Коши, то есть найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = e$:

$$y(1) = \frac{e^{1^2} + C}{1} = e + C = e \Rightarrow C = 0$$

Ответ: частное решение: $y = \frac{e^{x^2}}{x}$

Ещё раз повторим алгоритм проверки частного решения. Сначала проверяем, действительно ли выполняется начальное условие $y(1) = e$?

$$y(1) = \frac{e^{1^2}}{1} = e - \text{да, начальное условие выполнено.}$$

Теперь берём полученный ответ $y = \frac{e^{x^2}}{x}$ и находим производную. Используем правило дифференцирования частного:

$$y' = \left(\frac{e^{x^2}}{x} \right)' = \frac{(e^{x^2})'x - e^{x^2}(x)'}{x^2} = \frac{e^{x^2} \cdot 2x \cdot x - e^{x^2}}{x^2} = 2e^{x^2} - \frac{e^{x^2}}{x^2}$$

Подставим $y = \frac{e^{x^2}}{x}$ и $y' = 2e^{x^2} - \frac{e^{x^2}}{x^2}$ в исходное уравнение $y' + \frac{y}{x} - 2e^{x^2} = 0$:

$$2e^{x^2} - \frac{e^{x^2}}{x^2} + \frac{\frac{e^{x^2}}{x}}{x} - 2e^{x^2} = 0$$

$$2e^{x^2} - \frac{e^{x^2}}{x^2} + \frac{e^{x^2}}{x^2} - 2e^{x^2} = 0$$

$0 = 0$ – получено верное равенство, в чём и хотелось убедиться.

Пример 19

Найти решение задачи Коши

$$y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

Это пример для самостоятельного решения, полное решение и ответ в конце книги.

Не знаю, обратили вы внимание или нет, но всех задачах я «объявляю» тип дифференциального уравнения. Это не случайность!

В начале решения крайне желательно указывать тип уравнения

Это опять же не является каким-то строгим правилом, но «голое» решение могут запросто «завернуть» со вполне обоснованным вопросом: *А почему вы здесь провели такую замену?* Риск незачёта серьёзно увеличивается, если в вашей работе «одни формулы». Поэтому **решение нужно обязательно снабжать словесными комментариями**, пусть минимальными, в частности, указывать, что это за зверь.

Перейдем к рассмотрению чуть более замысловатых уравнений:

Пример 20

Найти решение задачи Коши для данного дифференциального уравнения

$$x^2 y' = 2xy + 3, \quad y(1) = -1$$

Решение: в данном уравнении слагаемые снова не на своих местах, поэтому сначала максимально близко приближаем диффура к виду $y' + p(x) \cdot y = q(x)$:

$$x^2 y' - 2xy = 3$$

Что в нём особенного? Во-первых, в правой части у нас константа $q(x) = 3$. Это допустимо. Во-вторых, рядом с производной есть множитель x^2 , который зависит только от «икс». Это тоже допустимо. Из-за этих особенностей линейное уравнение не перестает быть линейным.

Алгоритм решения полностью сохраняется за исключением пары нюансов в самом начале. Проведем замену $y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$:

$$x^2 (u'v + uv') - 2xuv = 3$$

Теперь следовало бы выполнить вынесение множителя за скобки. Прозвучит каламбурно, но сначала нам нужно раскрыть скобку, поскольку одно из нужных нам слагаемых недоступно:

$$x^2 u'v + x^2 uv' - 2xuv = 3$$

Вот теперь проводим вынесение множителя скобки:

$$x^2 u'v + xu(xv' - 2v) = 3$$

Обратите внимание на тот факт, что за скобки мы вынесли не только функцию u , но еще и «икс». **Всё**, что можно вынести за скобки – выносим.

Составим и решим систему:

$$\begin{cases} xv' - 2v = 0 \\ x^2 u'v = 3 \end{cases}$$

Из первого уравнения найдем v :

$$x \frac{dv}{dx} = 2v$$

$$\int \frac{dv}{v} = 2 \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|v| = 2 \ln|x|$$

$$\ln|v| = \ln x^2$$

$v = x^2$ – подставим во второе уравнение системы:

$$x^2 u' \cdot x^2 = 3$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{3}{x^4}$$

$$u = 3 \int \frac{dx}{x^4} = C - \frac{1}{x^3}$$

Таким образом, общее решение:

$$y = uv = \left(C - \frac{1}{x^3} \right) \cdot x^2 = Cx^2 - \frac{1}{x}, \text{ где } C = \text{const}$$

Найдем частное решение, соответствующее заданному начальному условию:

$$y(1) = C \cdot 1^2 - \frac{1}{1} = C - 1 = -1 \Rightarrow C = 0$$

Ответ: частное решение: $y = -\frac{1}{x}$ – проверка тут чуть ли не устная.

Самостоятельно щёлкаем следующий орешек:

Пример 21

Найти частное решение ДУ

$$xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}, \quad y(1) = 0$$

Какие трудности встречаются в ходе решения линейного неоднородного уравнения? Основной камень преткновения состоит в том, что может появиться довольно сложный интеграл. Как правило, неприятный интеграл появляется при нахождении функции u (в то время как с нахождением функции v обычно проблем не возникает).

Второй момент касается вообще всех диффуrow, а именно их «внешнего вида». Он зачастую обманчив:

не редкость, когда «страшный» диффур на самом деле оказывается несложным, а «легкий» на вид диффур вызывает мучительную боль за бесцельно прожитые часы

Ну вот, например: $y' - 2xy = 2x^3 y^2$...это простое уравнение? Как вы думаете?

Вперёд! – оно нас уже заждалось:

1.5. Дифференциальное уравнение Бернулли

Не путать с *методом Бернулли*. Данное уравнение по общей структуре напоминает линейное неоднородное уравнение первого порядка:

$y' + p(x) \cdot y = q(x)y^n$ с теми же частными разновидностями: $p(x)$ или $q(x)$ может быть числом, а у производной может присутствовать множитель $r(x)$.

Характерным признаком, по которому можно определить уравнения Бернулли, является наличие функции «игрек» в степени «эн»: y^n , при этом $n \neq 1$ (иначе получится *уравнение с разделяющимися переменными*) и $n \neq 0$ (т.к. получится как раз *линейное неоднородное ДУ*).

Степень n может быть не только положительной, но и отрицательной, например:

$$y^{-1} = \frac{1}{y}, \text{ а также обыкновенной дробью, например: } y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y}.$$

Если $n > 0$, то уравнение Бернулли имеет очевидное решение $y = 0$, которое «теряется» в ходе использования типового алгоритма:

Пример 22

Найти частное решение дифференциального уравнения, соответствующее заданному начальному условию.

$$y' - 2xy = 2x^3 y^2, \quad y(0) = 1$$

И вопрос на засыпку: с чего начать **решение**? С проверки нельзя ли *разделить переменные*! Нельзя. Так же очевидно, что уравнение не *однородно*, и по причине множителя y^2 – не *линейно*. Данный диффуз имеет «классический» вид $y' + p(x)y = q(x)y^n$ уравнения Бернулли.

Как решить дифференциальное уравнение Бернулли?

Уравнение Бернулли сводится к *линейному неоднородному уравнению с помощью замены*, и алгоритм решения незамысловат:

На первом шаге необходимо избавиться от «игрека» в правой части. Для этого сбрасываем y^2 в низ левой части и проводим почленное деление:

$$\frac{y' - 2xy}{y^2} = 2x^3 \text{ – вот здесь-то как раз и теряется решение } y = 0. \text{ Но в нашем случае}$$

это не имеет особого значения, поскольку требуется решить задачу Коши:

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{2x}{y} = 2x^3$$

Теперь надо избавиться от «игрека» вот в этом слагаемом:

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{2x}{y} = 2x^3$$

Для этого проводим замену: $\frac{1}{y} = z(x)$, то есть меняем дробь с «игреком» на функцию «зет». Найдём её производную, распишу очень подробно:

$$z' = \left(\frac{1}{y}\right)' = (y^{-1})' = -y^{-2} \cdot y' = -\frac{y'}{y^2}, \text{ откуда выразим } \frac{y'}{y^2} = -z'$$

Таким образом, в результате замены $\frac{1}{y} = z$, $\frac{y'}{y^2} = -z'$ уравнение $\frac{y'}{y^2} - \frac{2x}{y} = 2x^3$ превращается в уравнение:

$$-z' - 2xz = 2x^3$$

из эстетических соображений сменим знаки:

$$z' + 2xz = -2x^3$$

В результате получено **линейное неоднородное уравнение** с той лишь разницей, что вместо привычного «игрека» у нас буква «зет». Дальше алгоритм работает по накатанной колее, проводим стандартную замену $z = uv \Rightarrow z' = u'v + uv'$:

$$u'v + uv' + 2xuv = -2x^3$$

$$u'v + u(v' + 2xv) = -2x^3$$

Составим и решим систему:
$$\begin{cases} v' + 2xv = 0 \\ u'v = -2x^3 \end{cases}$$

Из первого уравнения найдем v :

$$\frac{dv}{dx} = -2xv$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2 \int x dx$$

$$\ln|v| = -x^2$$

$v = e^{-x^2}$ – подставляем найденную функцию во второе уравнение:

$$u' \cdot e^{-x^2} = -2x^3$$

$$\frac{du}{dx} = -2x^3 e^{x^2}$$

$$u = -2 \int x^3 e^{x^2} dx = (*)$$

Этот интеграл берётся по частям, и вместо занятых u и v , я буду использовать буквы «а» и «бэ»:

$$a = x^2 \Rightarrow da = 2x dx$$

$$db = -2x e^{x^2} dx \Rightarrow b = -2 \int x e^{x^2} dx = -\int e^{x^2} d(x^2) = -e^{x^2}$$

и по формуле $\int adb = ab - \int bda$:

$$(*) = -x^2 e^{x^2} + 2 \int x e^{x^2} dx = -x^2 e^{x^2} + \int e^{x^2} d(x^2) = -x^2 e^{x^2} + e^{x^2} + C$$

Таким образом:

$$z = uv = (-x^2 e^{x^2} + e^{x^2} + C) \cdot e^{-x^2} = Ce^{-x^2} - x^2 + 1$$

Но это ещё далеко не всё, вспоминаем, что $\frac{1}{y} = z$ и выполняем обратную замену:

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{Ce^{-x^2} - x^2 + 1}, \text{ где } C = \text{const} - \text{общее решение.}$$

Обратите внимание, что решение $y = 0$ в это семейство не вошло, но сейчас данный факт не актуален, поскольку нам нужно решить задачу Коши, а именно найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$:

$$y(0) = \frac{1}{Ce^0 - 0^2 + 1} = \frac{1}{C + 1} = 1 \Rightarrow C = 0$$

Ответ: частное решение: $y = \frac{1}{1 - x^2}$

Проверка здесь весьма проста:

1) $y(0) = \frac{1}{1 - 0^2} = 1$ – начальное условие выполнено.

2) Найдём $y' = \left(\frac{1}{1 - x^2} \right)' = -\frac{1}{(1 - x^2)^2} \cdot (1 - x^2)' = -\frac{1}{(1 - x^2)^2} \cdot (0 - 2x) = \frac{2x}{(1 - x^2)^2}$ и

подставим $y = \frac{1}{1 - x^2}$, $y' = \frac{2x}{(1 - x^2)^2}$ в исходное уравнение $y' - 2xy = 2x^3 y^2$:

$$\begin{aligned} \frac{2x}{(1 - x^2)^2} - 2x \cdot \frac{1}{1 - x^2} &= 2x^3 \cdot \left(\frac{1}{1 - x^2} \right)^2 \\ \frac{2x - 2x(1 - x^2)}{(1 - x^2)^2} &= \frac{2x^3}{(1 - x^2)^2} \\ \frac{2x - 2x + 2x^3}{(1 - x^2)^2} &= \frac{2x^3}{(1 - x^2)^2} \\ \frac{2x^3}{(1 - x^2)^2} &= \frac{2x^3}{(1 - x^2)^2} - \text{верное равенство.} \end{aligned}$$

Таким образом, частное решение найдено верно. При желании можно проверить и общее решение – с более громоздкими, но не сверхъестественными выкладками.

Самостоятельно:

Пример 23

$$y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0, \quad y(0) = -1$$

Здесь перед решением удобно представить уравнение в «стандартном» виде уравнения Бернулли, т.е. перенести «игрек квадрат» направо.

Вообще, иногда составители сборников и методичек зашифровывают уравнения до неузнаваемости, например, то же уравнение $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x+1} = -y^2$$

$$dy + \frac{ydx}{x+1} = -y^2 dx$$

$$(x+1)dy + ydx = -y^2(x+1)dx$$

$$(x+1)dy + ydx + (xy^2 + y^2)dx = 0$$

И поэтому, **если предложенное вам уравнение «по виду» не подпадает ни под один распространённый тип**, то имеет смысла пораскрывать скобки, попереставлять слагаемые и т.д., а там, глядишь, и вообще переменные разделить удастся!

А теперь предлагаю вашему вниманию ещё один «триллер»:

Пример 24

Найти решение ДУ $y' - \frac{2y}{x} = 2x\sqrt{y}$, соответствующее начальному условию $y(1) = 1$

Корни, куда же без них

Решение: данное ДУ имеет «классический» вид $y' + p(x) \cdot y = q(x)y^n$ уравнения Бернулли с той особенностью, что множитель y^n «замаскирован» под корень.

Сначала убираем «игрек» из правой части, для этого делим каждую часть на \sqrt{y} :

$$\frac{y' - \frac{2y}{x}}{\sqrt{y}} = \frac{2x\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$$

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{2\sqrt{y}}{x} = 2x$$

здесь потеряно тривиальное решение $y = 0$, но оно нас сильно не интересует.

Теперь с помощью замены нужно избавиться от «играка» вот в этом слагаемом:

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{2\sqrt{y}}{x} = 2x$$

и из вышесказанного следует замена: $\sqrt{y} = z$

Найдем производную:

$$z' = (\sqrt{y})' = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y', \text{ откуда выразим:}$$

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} = 2z'$$

Таким образом, получаем уравнение:

$$2z' - \frac{2z}{x} = 2x$$

каждое слагаемое которого можно «безболезненно» разделить на «двойку»:

$$z' - \frac{z}{x} = x$$

И чтобы вы не заскучали, я расскажу о **Методѣ вариации произвольной постоянной**. Да не пугайтесь так ☺ – он интереснее замены $z = uv$!

1) Сначала найдѐм общее решение соответствующего *линейного однородного* уравнения. Грубо говоря, это то же уравнение с «отброшенным» членом $q(x)$:

$$z' - \frac{z}{x} = 0$$

Данное ДУ допускает разделение переменных, и мы без труда отыскиваем его общее решение:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln|\tilde{C}|$$

$$\ln|z| = \ln|\tilde{C}x|$$

$$z = \tilde{C}x, \quad \text{где } \tilde{C} = \text{const}$$

2) Далее ВМЕСТО константы записываем *пока ещё* неизвестную функцию:
 $z = u(x) \cdot x$ (это и называется *варьировать постоянную*), находим производную:
 $z' = (ux)' = (u)' \cdot x + u \cdot (x)' = u'x + u$ и подставляем $z = ux$ и $z' = u'x + u$ в неоднородное

уравнение $z' - \frac{z}{x} = x$:

$$u'x + u - \frac{ux}{x} = x$$

Если всё сделано правильно, то два слагаемых должны испариться, как оно и происходит в нашем случае:

$$u'x + u - u = x$$

$$u'x = x$$

тут ещё и «иксы» исчезают:

$$\frac{du}{dx} = 1$$

в результате получилось примитивное уравнение с очевидным решением:

$$\int du = \int dx$$

$$u = x + C$$

Теперь вспоминаем, что $z = ux = (x + C)x$, и в результате обратной замены $z = \sqrt{y}$ получаем общий интеграл $\sqrt{y} = (x + C) \cdot x$, из которого легко выразить и общее решение:

$$y = ((x + C) \cdot x)^2 = (x + C)^2 \cdot x^2, \quad \text{где } C = \text{const}$$

Найдем частное решение, соответствующее заданному начальному условию $y(1) = 1$:

$$y(1) = (1 + C)^2 \cdot 1 = 1$$

... вот тебе и раз. Уравнение $(1 + C)^2 = 1$ имеет два корня $C = -2$, $C = 0$ и в результате получаются... два частных решения?

Нет! Когда мы выражали общее решение, то выполнили возведение в квадрат, из-за чего у нас появился *посторонний* корень. Поэтому начальное условие $x = 1$, $y = 1$ лучше подставить непосредственно в общий интеграл $\sqrt{y} = (x + C) \cdot x$:

$$\sqrt{1} = (1 + C) \cdot 1$$

$$1 = 1 + C \Rightarrow C = 0 \text{ — и помещаем этот ноль уже в общее решение } y = (x + C)^2 \cdot x^2:$$

$$y = (x + 0)^2 \cdot x^2 = x^4$$

Легко видеть, что значению $C = -2$ соответствует *частный интеграл* $\sqrt{y} = (x - 2) \cdot x$, и он не удовлетворяет начальному условию $y(1) = 1$.

Вот так-то оно бывает! — в **однородных уравнениях** мы «теряли» решения, а здесь, наоборот — «приобрели» лишнее. И как тут не вспомнить третий технический совет, где я не рекомендовал возводить в степени или извлекать корни в общем интеграле.

Ответ: частное решение $y = x^4$ — проверку выполните сами, она тут устная.

Но кино ещё не закончилось, и следующий факт должен быть понятен, даже если вы не знаете, как выглядит график многочлена 4-й степени. Семейство *кривых* $y = (x + C)^2 \cdot x^2$ (общее решение ДУ) расположено в верхней полуплоскости и *касается* оси абсцисс в каждой её точке. Можно сказать, что множество графиков $y = (x + C)^2 \cdot x^2$ (при всех значениях константы) своими точками касания порождает решение $y = 0$, которое, как заправский партизан засело в чаще леса и в общее решение не вошло.

Такое необычное решение называют **особым решением** дифференциального уравнения. В общем случае особое решение тоже является кривой, которая *огibtает* «основное семейство». В рассмотренном же примере оно представляет собой прямую, которая ассоциируется с «подставкой» под графики функций $y = (x + C)^2 \cdot x^2$.

Пример 25

Решить дифференциальное уравнение $xy' - 4y = x^2 \sqrt{y}$

После сведения к неоднородному уравнению я использовал *метод вариации произвольной постоянной*, но, разумеется, там годится и замена $z = ix$.

Иногда в уравнениях Бернулли встречаются и другие степени «игрека», например: $y' + \frac{3y}{x} = x^3 y^3$ с заменой $\frac{1}{y^2} = z \Rightarrow \frac{y'}{y^3} = -\frac{1}{2} z'$ или $2y' - 3y \cos x = -e^{-2x} \cdot (2 + 3 \cos x) \cdot y^{-1}$ с заменой $y^2 = z \Rightarrow 2yy' = z'$. Решения эти диффузов можно найти в **соответствующей статье** сайта, но они не столь актуальны, поскольку есть более насыщенный материал:

1.6. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Сначала быстренько вспомним, что такое **частные производные** и **полный дифференциал** функции двух переменных. Рассмотрим простую функцию:

$$z = F(x; y) = x^2 + y^2 - xy + x - y$$

и найдём её частные производные первого порядка: $F'_x = \frac{\partial F}{\partial x}$, $F'_y = \frac{\partial F}{\partial y}$ – в диффурах больше «в почёте» их дробные обозначения. Повторяем основное правило:

– если мы берём производную по «икс», то «игрек» считается константой:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (x^2 + y^2 - xy + x - y)'_x = 2x + 0 - y + 1 - 0 = 2x - y + 1$$

– если мы берём производную по «игрек», то константой уже считается «икс»:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (x^2 + y^2 - xy + x - y)'_y = 0 + 2y - x + 0 - 1 = 2y - x - 1$$

Полный дифференциал имеет вид: $dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$, в данном случае:

$$dF = (2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy$$

Пример 26

Решить дифференциальное уравнение $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$

Не ожидали? =)

Данное уравнение имеет вид $\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$, то есть его левая часть является полным дифференциалом функции $F(x; y) = x^2 + y^2 - xy + x - y + C$ (единственное, ещё приписали константу C). Отсюда и название – **уравнение в полных дифференциалах**.

Как решить диффур в полных дифференциалах?

Очевидно, нужно выполнить некоторые обратные действия, чтобы восстановить исходную функцию $z = F(x; y; C)$ и записать **общий интеграл** $F(x; y; C) = 0$, который и является решением ДУ. Не так давно я что-то там дифференцировал. Какое действие является обратным? Правильно, интегрирование.

А теперь, пожалуйста, забудьте задачку про частные производные и готовый ответ. Ведь когда нам предложено **произвольное дифференциальное уравнение**, то **мы ещё не знаем** о том, что это уравнение в полных дифференциалах. И поэтому сначала имеет смысл «покрутить-повертеть» исходное уравнение:

$$(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$$

Вдруг тут можно **разделить переменные**? Или уравнение является **однородным**? А может здесь «спрятан» какой-то другой тип уравнения? – не так давно я зашифровал в такой форме даже **уравнение Бернулли**!

И только после этих безуспешных попыток проверяем: **а не является ли данное ДУ уравнением в полных дифференциалах?** Чтобы выполнить эту проверку, выпишем из уравнения $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$ множители, находящиеся при дифференциалах:

$P = 2x - y + 1$, $Q = 2y - x - 1$ – строго обозначая их буквами «пэ» и «ку», и строго в таком порядке! Это стандарт.

Теперь найдём следующие частные производные:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (2x - y + 1)'_y = 0 - 1 + 0 = -1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (2y - x - 1)'_x = 0 - 1 - 0 = -1$$

Если $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ (наш случай), то левая часть ДУ является полным дифференциалом $dF = F'_x dx + F'_y dy$ некоторой функции F (а равенство вышенайденных производных – есть не что иное, как равенство смешанных производных 2-го порядка: $F''_{xy} = F''_{yx}$).

Ну а коль скоро уравнение $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$ имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0, \text{ то:}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - y + 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - x - 1$$

Таким образом, нам известны две частные производные, и задача состоит в том, чтобы найти функцию $F(x; y; C)$ и приравнять её к нулю, то есть записать общий интеграл $F(x; y; C) = 0$. Существуют два зеркальных способа решения, и мы пойдём более привычным путём, и именно начнём с «иксовой» производной $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - y + 1$.

Нижнюю производную $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - x - 1$ пока запишем на листочек и спрячем в карман.

Да-да – **прямо так и сделайте!** Я подожду....

Действие первое. Поскольку в нашем распоряжении есть частная производная $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - y + 1$, то нужная нам функция F восстанавливается с помощью обратного действия – *частного интегрирования* по «икс». Интегрирование осуществляется по тому же принципу, что и нахождение частных производных.

Когда мы берём интеграл по «икс», то переменная «игрек» считается константой, распишу очень подробно:

$$F = \int (2x - y + 1)dx = 2 \int x dx - y \int dx + \int dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} - y \cdot x + x + \varphi(y) = x^2 - xy + x + \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ – некоторая, пока ещё неизвестная функция, зависящая только от «игрек».

Правильно ли найден интеграл? Выполним проверку, т.е. возьмём частную производную по «икс»:

$F'_x = (x^2 - xy + x + \varphi(y))'_x = 2x - y + 1 + 0 = 2x - y + 1$ – получена исходная подынтегральная функция, в чём и требовалось убедиться

Примечание: надеюсь, всем понятно, почему $(\varphi(y))'_x = 0$ – функция $\varphi(y)$ зависит только от «игрек», а, значит, считается константой.

Действие второе. Берем «недоделанный» результат $F = x^2 - xy + x + \varphi(y)$ и дифференцируем его по «игрек»:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (x^2 - xy + x + \varphi(y))'_y = 0 - x + 0 + \varphi'_y(y) = -x + \varphi'_y(y)$$

Функцию $\varphi(y)$ мы пока не знаем, но производная-то по «игрек» у неё существует, и поэтому запись $\varphi'_y(y)$ – совершенно законна.

Действие третье. Перепишем результат предыдущего пункта: $\frac{\partial F}{\partial y} = -x + \varphi'_y(y)$ и достаем из широких штанин листочек с производной: $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - x - 1$

Приравниваем одно с другим:

$$-x + \varphi'_y(y) = 2y - x - 1$$

и уничтожаем всё, что можно уничтожить:

$$\varphi'_y(y) = 2y - 1$$

Находим функцию $\varphi(y)$, для этого нужно взять интеграл по «игрек»:

$$\varphi(y) = \int (2y - 1) dy = y^2 - y + C$$

И заключительное действие: подставим завоеванный трофей $\varphi(y) = y^2 - y + C$ в «недоделанный» результат $F = x^2 - xy + x + \varphi(y)$:

$F = x^2 - xy + x + y^2 - y + C$ и приравняем эту функцию к нулю, получая тем самым:

Ответ: общий интеграл: $x^2 + y^2 - xy + x - y + C = 0$, где $C = const$

Проверка уже выполнена в самом начале параграфа: находим частные производные функции F и составляем полный дифференциал $dF = F'_x dx + F'_y dy$ – в результате должна получиться левая часть исходного ДУ. Кроме того, можно прямо продифференцировать общий интеграл, ибо он представляет собой множество неявных функций одной (независимой) переменной:

$$(x^2 + y^2 - xy + x - y + C)' = (0)'$$

$$2x + 2yy' - y - xy' + 1 - y' + 0 = 0$$

$$(2y - x - 1)y' + (2x - y + 1) = 0$$

$$(2y - x - 1)\frac{dy}{dx} + (2x - y + 1) = 0$$

$$(2y - x - 1)dy + (2x - y + 1)dx = 0 \text{ – исходное ДУ, что и требовалось проверить.}$$

Проделаем всё то же самое, только короче:

Пример 27

Решить дифференциальное уравнение $(3x^2 - 3y^2 + 4x)dx - (6xy + 4y)dy = 0$

Решение: после неутешительного анализа на «другие типы», проверим, не является ли данный диффур уравнением в полных дифференциалах. Выписываем множители при дифференциалах:

$$P = 3x^2 - 3y^2 + 4x, \quad Q = -(6xy + 4y) = -6xy - 4y$$

Внимание! Не теряем «минус» при записи Q !

Найдём частные производные:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (3x^2 - 3y^2 + 4x)'_y = 0 - 6y + 0 = -6y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (-6xy - 4y)'_x = -6y - 0 = -6y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \text{ значит, левая часть уравнения } (3x^2 - 3y^2 + 4x)dx - (6xy + 4y)dy = 0$$

является полным дифференциалом некоторой функции F , то есть уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$$

В данном случае:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + 4x \text{ — будем работать с этой производной.}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -6xy - 4y \text{ — про эту производную пока забываем.}$$

1) Если $\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + 4x$, то:

$$F = \int (3x^2 - 3y^2 + 4x)dx = 3 \int x^2 dx - 3y^2 \int dx + 4 \int x dx =$$

$$= 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 3y^2 \cdot x + 4 \cdot \frac{x^2}{2} + \varphi(y) = x^3 - 3xy^2 + 2x^2 + \varphi(y)$$

где $\varphi(y)$ — некоторая, пока ещё неизвестная функция, зависящая только от «игрек».

Напоминаю, что когда мы интегрируем по «икс», то переменная «игрек» считается константой и выносится за значок интеграла.

2) Берём «недоделанный» результат предыдущего пункта $F = x^3 - 3xy^2 + 2x^2 + \varphi(y)$ и дифференцируем его по «игрек»:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (x^3 - 3xy^2 + 2x^2 + \varphi(y))'_y = 0 - 6xy + 0 + \varphi'_y(y) = -6xy + \varphi'_y(y)$$

3) Переписываем трофей предыдущего пункта $\frac{\partial F}{\partial y} = -6xy + \varphi'_y(y)$ и вспоминаем про «забытую» производную: $\frac{\partial F}{\partial y} = -6xy - 4y$.

Приравниваем и упрощаем:

$$-6xy + \varphi'_y(y) = -6xy - 4y$$

$$\varphi'_y(y) = -4y$$

Примечание: на практике решение обычно записывают короче, объединяя пункты № 2 и 3:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (x^3 - 3xy^2 + 2x^2 + \varphi(y))'_y = 0 - 6xy + 0 + \varphi'_y(y) = -6xy + \varphi'_y(y) = -6xy - 4y, \text{ то}$$

есть сразу же после нахождения производной приравнивается «забытая» производная. В последнем равенстве $-6xy + \varphi'_y(y) = -6xy - 4y$ происходит взаимноуничтожение слагаемых, откуда следует: $\varphi'_y(y) = -4y$.

Восстанавливаем функцию $\varphi(y)$ интегрированием по «игрек»:

$$\varphi(y) = -4 \int y dy = -4 \cdot \frac{y^2}{2} + C = -2y^2 + C$$

В «недоделанный» результат $F = x^3 - 3xy^2 + 2x^2 + \varphi(y)$ пункта № 1 подставляем найденную функцию $\varphi(y) = -2y^2 + C$:

$F = x^3 - 3xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + C$ и приравниваем уже доделанный результат к нулю:)

Ответ: общий интеграл: $x^3 - 3xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + C = 0$, где $C = const$

Константу можно записывать и в правой части, но тогда возникает заморочка с её переобозначением, и поэтому лично я привык оставлять ответ именно в таком виде. Долой приличия, да здравствует удобство! :) Решение должно быть со всеми удобствами, рядом с метро, в центре.

Выполним проверку. Найдём частные производные первого порядка функции F :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (x^3 - 3xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + C)'_x = 3x^2 - 3y^2 + 4x - 0 + 0 = 3x^2 - 3y^2 + 4x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (x^3 - 3xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + C)'_y = 0 - 6xy + 0 - 4y + 0 = -6xy - 4y = -(6xy + 4y)$$

Составим дифференциальное уравнение $\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$:

$$(3x^2 - 3y^2 + 4x)dx - (6xy + 4y)dy = 0$$

Получено исходное ДУ, значит, задание выполнено правильно.

Второй способ состоит в дифференцировании общего интеграла:

$$(x^3 - 3xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + C)' = (0)' - \text{с тем же итоговым результатом.}$$

И по «горячим следам» решаем самостоятельно!

Пример 28

$$(6y - 3x^2 + 3y^2)dx + (6x + 6xy)dy = 0 \text{ и выполнить проверку.}$$

Образец решения я записал максимально коротко и без пунктов, то есть приблизил его к «боевым» условиям – примерно так нужно оформлять задачу на практике.

Многочлены хорошо, а другие функции – лучше. Рассмотрим ещё пару примеров.

Пример 29

Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$\frac{2x(1 - e^y)dx}{(1 + x^2)^2} + \frac{e^y dy}{1 + x^2} = 0$$

...ну а кому сейчас легко? ☺

Решение: после предварительного анализа, проверим, является ли данное ДУ уравнением в полных дифференциалах. Выпишем члены при дифференциалах:

$$P = \frac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2}, \quad Q = \frac{e^y}{1 + x^2}$$

и найдём частные производные:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \left(\frac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2} \right)'_y = \frac{2x}{(1 + x^2)^2} \cdot (1 - e^y)'_y = \frac{2x}{(1 + x^2)^2} \cdot (0 - e^y) = -\frac{2xe^y}{(1 + x^2)^2}$$

– обратите внимание, как за знак производной выносятся целые выражения с «мёртвыми» переменными:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= \left(\frac{e^y}{1 + x^2} \right)'_x = e^y \cdot ((1 + x^2)^{-1})'_x = -e^y (1 + x^2)^{-2} \cdot (1 + x^2)'_x = \\ &= -\frac{e^y}{(1 + x^2)^2} \cdot (0 + 2x) = -\frac{2xe^y}{(1 + x^2)^2} \end{aligned}$$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, значит, уравнение $\frac{2x(1 - e^y)dx}{(1 + x^2)^2} + \frac{e^y dy}{1 + x^2} = 0$ является ДУ в полных дифференциалах и имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$$

То есть, в нашем распоряжении оказываются частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2} \text{ – работаем с этой производной}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{e^y}{1 + x^2} \text{ – про эту производную пока забываем}$$

Если $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}$, то:

$$F = \int \frac{2x(1-e^y)dx}{(1+x^2)^2} = (1-e^y) \int \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{(1-e^y)}{1+x^2} + \varphi(y) = \frac{e^y-1}{1+x^2} + \varphi(y)$$

Здесь $(1-e^y)$ является константой, которая вынесена за знак интеграла, а сам интеграл найден *методом подведения функции под знак дифференциала*.

Находим частную производную по «игрек»:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \left(\frac{e^y-1}{1+x^2} + \varphi(y) \right)'_y = \frac{e^y}{1+x^2} + \varphi'_y(y) = \frac{e^y}{1+x^2}$$

Это стандартное короткое оформление задания, когда после нахождения производной сразу приравнивается «забытая» производная $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{e^y}{1+x^2}$.

Из последнего равенства $\frac{e^y}{1+x^2} + \varphi'_y(y) = \frac{e^y}{1+x^2}$ следует, что $\varphi'_y(y) = 0$, это простейший интеграл:

$$\varphi(y) = \int 0 dy = C = const$$

Подставляем найденную функцию $\varphi(y) = C$ в «недоделанный» результат

$$F = \frac{e^y-1}{1+x^2} + \varphi(y) \text{ и записываем}$$

ответ: общий интеграл: $\frac{e^y-1}{1+x^2} + C = 0$, где $C = const$

И как всегда – приятная неожиданность! Научимся решать задачу «зеркальным» способом, а именно:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2} \text{ – про эту производную пока забываем}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{e^y}{1+x^2} \text{ – и начинаем «пляску» от «игрековой» производной.}$$

Так как $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{e^y}{1+x^2}$, то $F = \int \frac{e^y dy}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} \int e^y dy = \frac{e^y}{1+x^2} + \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ – пока ещё неизвестная функция, зависящая только от «икс».

Дифференцируем появившуюся функцию по «икс»:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left(\frac{e^y}{1+x^2} + \varphi(x) \right)'_x = e^y \cdot ((1+x^2)^{-1})'_x + \varphi'_x(x) = -\frac{e^y}{(1+x^2)^2} \cdot 2x + \varphi'_x(x) =$$

$$= -\frac{2xe^y}{(1+x^2)^2} + \varphi'_x(x) = \frac{2x-2xe^y}{(1+x^2)^2} \text{ – и приравниваем полученную производную к}$$

«забытой» производной.

В правой части последнего равенства выполняем почленное деление (это можно было сделать сразу):

$$-\frac{2xe^y}{(1+x^2)^2} + \varphi'_x(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} - \frac{2xe^y}{(1+x^2)^2}$$

уничтожаем несладкую парочку:

$$\varphi'_x(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

и восстанавливаем функцию «фи»:

$$\varphi(x) = \int \frac{2xdx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{1+x^2} + C \text{ — после чего подставляем её в}$$

«недоделанную» функцию $F = \frac{e^y}{1+x^2} + \varphi(x)$:

$$F = \frac{e^y}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} + C$$

Ответ: общий интеграл: $\frac{e^y - 1}{1+x^2} + C = 0$, где $C = const$

«Зеркальный» способ решения **ни в коем случае не лишней** и несколько не экзотичен. На «традиционном» пути запросто может встретиться трудный или даже **ОЧЕНЬ** трудный интеграл, и тогда альтернативный вариант окажется просто спасением! И, кроме того, второй способ может показаться вам удобнее чисто субъективно.

Пример 30

Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$\left(\frac{\sin 2x}{y} + x \right) dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2} \right) dy = 0$$

Решайте так, как вам удобно! Но на всякий-то случай пройдите обоими путями ;)

Кроме того, существуют уравнения, *сводящиеся* к уравнению в полных дифференциалах, которые решаются методом *интегрирующего множителя*. Но вероятность встречи с ними крайне мала, и поэтому мы продолжаем.

Полного вам дифференциала во второй части книги!

2. Дифференциальные уравнения высших порядков

Дифференциальное уравнение n -го порядка имеет вид:

$F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0$ и **обязательно** содержит производную « n -ного порядка» $y^{(n)}$ и НЕ содержит производные более высоких порядков.

Так, простейшее уравнение 2-го порядка $F(x, y, y', y'') = 0$ выглядит так: $y'' = 0$, простейшее уравнение 3-го порядка $F(x, y, y', y'', y''') = 0$ – так: $y''' = 0$ и т.д.

Принцип точно такой же: **решить ДУ высшего порядка – это значит, найти множество функций, которые удовлетворяют данному уравнению.** Это множество называют *общим интегралом* $F(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ (или *общим решением*), которое содержит ровно « n » констант. Придавая им различные значения, мы можем получить бесконечно много *частных интегралов (решений)* дифференциального уравнения.

Капитан Очевидность говорит нам о том, что существуют разные типы уравнений высших порядков, и мы незамедлительно приступаем к их изучению.

2.1. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Уже из самого названия становится понятно, что такие сводятся к уравнениям более низкого порядка. Различают **три подтипа** таких диффузов, и чтобы не плодить трёхуровневое меню, я буду использовать словесную нумерацию:

Подтип первый. Уравнения, разрешимые повторным интегрированием

Данное уравнение имеет вид $y^{(n)} = f(x)$, где $f(x)$ зависит *только от «икс»*, и в тривиальном случае представляет собой константу.

Чтобы решить такое уравнение, нужно n раз проинтегрировать правую часть.

Пример 31

$$y'' = x^2 - 2x$$

Решение: данное дифференциальное уравнение имеет вид $y'' = f(x)$. Интегрируем правую часть, понижая порядок уравнения до 1-го:

$$y' = \int (x^2 - 2x) dx = \frac{1}{3} x^3 - 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 + C_1 = \frac{x^3}{3} - x^2 + C_1, \text{ или короче: } y' = \frac{x^3}{3} - x^2 + C_1$$

Теперь интегрируем правую часть еще раз, получая *общее решение*:

$$y = \int \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + C_1 \right) dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2 = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$$

Ответ: общее решение: $y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$, где $C_1, C_2 - \text{const}$

Проверяются такие уравнения обычно очень легко. В данном случае нужно лишь найти вторую производную:

$$y' = \left(\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2 \right)' = \frac{1}{12} \cdot 4x^3 - \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + C_1 + 0 = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + C_1$$

$$y'' = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + C_1 \right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 2x + 0 = x^2 - 2x$$

В результате получено исходное дифференциальное уравнение $y'' = x^2 - 2x$, значит, общее решение найдено правильно.

Пример 32

Решить дифференциальные уравнения

а) $y'' = 3$, б) $y'' + \sin 2x = \sqrt{x}$, в) $y''' = 0$

Это примеры для самостоятельного решения, ... не тушуемся – решаем!

Нахождение *частного решения* (задача Коши) имеет свои особенности:

Пример 33

Найти частное решение ДУ, соответствующее заданным начальным условиям

$$y''' = e^{2x}, \quad y(0) = \frac{9}{8}, \quad y'(0) = \frac{1}{4}, \quad y''(0) = -\frac{1}{2}$$

И одна из особенностей такова: **каков порядок уравнения – столько и начальных условий**. Уравнение третьего порядка – три начальных условия. Это, кстати, касается и других типов диффузов, и если у вас начальных условий меньше, то в условии вашей задачи опечатка. Точнее, недопечатка.

Решение: данное уравнение имеет вид $y''' = f(x)$, а значит, нам нужно последовательно проинтегрировать правую часть три раза.

Сначала понижаем порядок уравнения до второго:

$$y'' = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C_1$$

Интеграл принёс нам константу C_1 . В уравнениях рассматриваемого типа рационально сразу же применять подходящие начальные условия.

Итак, у нас найдено $y'' = \frac{1}{2} e^{2x} + C_1$, и, очевидно, к полученному уравнению подходит начальное условие $y''(0) = -\frac{1}{2}$. В соответствии с этим условием:

$$y''(0) = \frac{1}{2} + C_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow C_1 = -1$$

Таким образом: $y'' = \frac{1}{2} e^{2x} - 1$

На следующем шаге берём второй интеграл, понижая порядок уравнения до первого:

$$y' = \int \left(\frac{1}{2} e^{2x} - 1 \right) dx = \frac{1}{4} e^{2x} - x + C_2$$

Выползла константа C_2 , с которой мы немедленно расправляемся. Возникла тут у меня забавная ассоциация, что я злой дед Мазай с одноствольным ружьём. Ну и действительно, константы «отстреливаются», как только покажут уши из-под интеграла.

В соответствии с начальным условием $y'(0) = \frac{1}{4}$:

$$y'(0) = \frac{1}{4} - 0 + C_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow C_2 = 0$$

Таким образом: $y' = \frac{1}{4} e^{2x} - x$

И, наконец, третий интеграл:

$$y = \int \left(\frac{1}{4} e^{2x} - x \right) dx = \frac{1}{8} e^{2x} - \frac{x^2}{2} + C_3$$

Для третьей константы используем последний патрон $y(0) = \frac{9}{8}$:

$$y(0) = \frac{1}{8} - 0 + C_3 = \frac{9}{8} \Rightarrow C_3 = 1$$

Зайцы плачут, заряды были с солью ☺

Ответ: частное решение: $y = \frac{1}{8} e^{2x} - \frac{x^2}{2} + 1$

Выполним **проверку**, благо, она ненапряжная и чёткая:

1) Проверяем начальное условие $y(0) = \frac{9}{8}$:

$$y(0) = \frac{1}{8} - 0 + 1 = \frac{9}{8} \text{ — выполнено.}$$

2) Находим производную:

$$y' = \left(\frac{1}{8} e^{2x} - \frac{x^2}{2} + 1 \right)' = \frac{1}{8} \cdot 2e^{2x} - \frac{2x}{2} + 0 = \frac{1}{4} e^{2x} - x$$

Проверяем начальное условие $y'(0) = \frac{1}{4}$:

$$y'(0) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4} \text{ — выполнено.}$$

3) Находим вторую производную:

$$y'' = \left(\frac{1}{4} e^{2x} - x \right)' = \frac{1}{2} e^{2x} - 1$$

Проверяем начальное условие $y''(0) = -\frac{1}{2}$:

$$y''(0) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} - \text{выполнено.}$$

4) Найдем третью производную:

$$y''' = \left(\frac{1}{2} e^{2x} - 1 \right)' = e^{2x} - 0 = e^{2x}$$

Получено исходное дифференциальное уравнение $y''' = e^{2x}$

Вывод: задание выполнено верно.

Аналогичное задание для самостоятельного решения:

Пример 34

Найти частное решение уравнения, соответствующее заданным начальным условиям, и выполнить проверку

$$x^3 y''' = 6, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 5, \quad y''(1) = 1$$

Решение и ответ в конце книги.

Время от времени в дифференциальных уравнениях рассматриваемого типа приходится находить более трудные интегралы: использовать *метод замены переменной*, *интегрировать по частям*, прибегать к другим ухищрениям. Но это уже всё зависит от вашей техники интегрирования и к сегодняшней теме не относится.

Подтип второй. В уравнении в явном виде отсутствует функция y .

Простейшее уравнение этого подтипа в общем виде выглядит так:

$F(x, y', y'') = 0$ – всё есть, а «игрека» нет. Точнее, его нет *в явном виде*, но он обязательно всплывёт в ходе решения.

Кроме того, вместе с «игреком» в явном виде может отсутствовать первая производная:

$$F(x, y'', y''') = 0 \text{ – это уже уравнение третьего порядка.}$$

Может дополнительно отсутствовать и вторая производная:

$$F(x, y''', y^{IV}) = 0 \text{ – уравнение четвертого порядка.}$$

И так далее. Думаю, вы увидели закономерность, и теперь сможете без труда определить такое уравнение в практических примерах. Заостряю внимание, что во всех этих уравнениях **обязательно** присутствует независимая переменная «икс».

На самом деле есть общая формула и строгая формулировка, но от них легче не станет, и поэтому мы сразу переходим к практическим вопросам:

Как решать такие уравнения? Они решаются с помощью очень простой замены.

Пример 35

Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + \frac{y'}{x+1} = 9(x+1)$$

Решение: в предложенном уравнении второго порядка в явном виде не участвует переменная y . Заменим первую производную y' новой функцией z , которая зависит от «икс»: $y' = z(x)$

Если $y' = z$, то $y'' = z'$

Цель проведённой замены очевидна – понизить порядок уравнения:

$$z' + \frac{z}{x+1} = 9(x+1)$$

Получено самое что ни на есть обычное **линейное неоднородное ДУ 1-го порядка**, с той лишь разницей, что вместо привычной функции «игрек» у нас функция «зет». Для разнообразия я решу его методом **вариации произвольной постоянной**:

1) Найдём общее решение соответствующего *линейного однородного* уравнения:

$$z' + \frac{z}{x+1} = 0$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x+1}$$

$$\int \frac{dz}{z} = -\int \frac{dx}{x+1}$$

$$\ln|z| = -\ln|x+1| + \ln|C|$$

$$\ln|z| = \ln\left|\frac{C}{x+1}\right|$$

$$z = \frac{\tilde{C}}{x+1}, \text{ где } \tilde{C} = \text{const}$$

2) Варьируя постоянную \tilde{C} , в неоднородном уравнении проведём замену:

$$z = \frac{u}{x+1} \Rightarrow z' = \frac{u'(x+1) - u}{(x+1)^2} = \frac{u'}{x+1} - \frac{u}{(x+1)^2} - \text{подставляем «зет» и «зет штрих» в}$$

уравнение $z' + \frac{z}{x+1} = 9(x+1)$:

$$\frac{u'}{x+1} - \frac{u}{(x+1)^2} + \frac{u}{(x+1)^2} = 9(x+1)$$

Пара слагаемых в левой части испаряются, значит, мы на верном пути:

$$\frac{u'}{x+1} = 9(x+1)$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{du}{dx} = 9(x+1)^2$$

$$\int du = 9 \int (x+1)^2 dx$$

$$u = 9 \int (x+1)^2 dx = 9 \cdot \frac{1}{3} (x+1)^3 + C_1 = 3(x+1)^3 + C_1$$

Таким образом:

$$z = \frac{u}{x+1} = \frac{3(x+1)^3 + C_1}{x+1} = 3(x+1)^2 + \frac{C_1}{x+1}$$

Итак, функция z найдена, и тут на радостях можно забыть про одну вещь и машинально записать ответ. Нет-нет, ещё не всё. Вспоминаем, что в начале задания была выполнена замена $y' = z$, следовательно, нужно провести обратную замену $z = y'$:

$$y' = 3(x+1)^2 + \frac{C_1}{x+1}$$

Общее решение восстанавливаем интегрированием правой части:

$$y = \int \left(3(x+1)^2 + \frac{C_1}{x+1} \right) dx = (x+1)^3 + C_1 \ln|x+1| + C_2$$

На заключительном этапе нарисовался партизан «игрек», который, как мы помним, в дифференциальное уравнение в явном виде не входил.

Ответ: общее решение: $y = (x+1)^3 + C_1 \ln|x+1| + C_2$, где $C_1, C_2 - const$

В большинстве случаев проверить такие уравнения не составляет труда.

Находим первую и вторую производные от ответа:

$$y' = ((x+1)^3 + C_1 \ln|x+1| + C_2)' = 3(x+1)^2 + \frac{C_1}{(x+1)}$$

$$y'' = \left(3(x+1)^2 + \frac{C_1}{(x+1)} \right)' = 6(x+1) - \frac{C_1}{(x+1)^2}$$

и подставляем их в исходное уравнение $y'' + \frac{y'}{x+1} = 9(x+1)$:

$$6(x+1) - \frac{C_1}{(x+1)^2} + \frac{\left(3(x+1)^2 + \frac{C_1}{(x+1)} \right)}{x+1} = 9(x+1)$$

$$6(x+1) - \frac{C_1}{(x+1)^2} + 3(x+1) + \frac{C_1}{(x+1)^2} = 9(x+1)$$

$$6(x+1) + 3(x+1) = 9(x+1)$$

$9(x+1) = 9(x+1)$ – в результате получено верное равенство, значит, общее решение найдено правильно.

Если дано аналогичное уравнение с более «высокими» производными:

$$y''' + \frac{y''}{x+1} = 9(x+1), \text{ то решение будет очень похожим.}$$

В результате замены $y'' = z \Rightarrow y''' = z'$ мы получим то же самое линейное уравнение $z' + \frac{z}{x+1} = 9(x+1)$, однако после обратной замены у нас нарисуеться диффур *первого подтипа*:

$y'' = 3(x+1)^2 + \frac{C_1}{x+1}$, который следует решить двукратным интегрированием правой части:

$y' = \int \left(3(x+1)^2 + \frac{C_1}{x+1} \right) dx = (x+1)^3 + C_1 \ln|x+1| + C_2$ – в точности ответ предыдущей задачи, который нужно проинтегрировать ещё раз:

$$y = \int \left((x+1)^3 + C_1 \ln|x+1| + C_2 \right) dx = \frac{(x+1)^4}{4} + C_1(x+1)(\ln|x+1| - 1) + C_2x + C_3$$

Готово.

Всегда ли в результате таких замен получается **линейное неоднородное уравнение 1-го порядка**? Нет, не всегда. Запросто может получиться **уравнение с разделяющимися переменными**, **однородное уравнение** или какая-нибудь другая интересность:

Пример 36

Решить дифференциальное уравнение
 $(1 + \sin x)y''' = \cos x \cdot y''$

Это пример для самостоятельного решения.

Что делать, если в уравнении рассмотренного подтипа требуется найти частное решение? Выгодно использовать ту же методику – последовательный «отстрел» констант.

Подтип третий. В дифференциальном уравнении в явном виде отсутствует независимая переменная x .

Такое уравнение решается с помощью замены $y' = z(y)$, где z – функция, зависящая от «игрек». Следует отметить, что по правилу дифференцирования сложной функции: $y'' = z'(y) \cdot y' = z'(y) \cdot z(y)$, или, если короче, в дифференциальном уравнении нужно провести подстановку:

$$y' = z \Rightarrow y'' = z'z, \text{ не забывая по ходу решения, что } z' = \frac{dz}{dy}$$

Встреча с такими диффурами в отчётной работе крайне маловероятна, и поэтому я воздержусь от конкретных примеров, но на всякий случай **вот ссылка** (см. низ статьи).

Вы готовы к новым свершениям? Впереди ключевые уравнения!

2.2. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка

В рамках данного курса мы будем рассматривать уравнения с *постоянными коэффициентами*. Такое уравнение имеет вид:

$y'' + py' + qy = 0$, где p и q – конкретные числа (постоянные коэффициенты), а в правой части – **строго** ноль.

Для того чтобы решить данное ДУ, нужно составить так называемое **характеристическое уравнение**:

$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ – это обычное квадратное уравнение с двумя корнями λ_1, λ_2 , которые нам нужно найти (*алгоритм я напомнил в Приложении Школьные формулы*). При этом возможны три случая:

Случай первый. Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня

Если характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет два **различных** действительных корня λ_1, λ_2 (т.е., если дискриминант $D > 0$), то *общее решение* однородного уравнения выглядит так:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \text{ где } C_1, C_2 - \text{константы.}$$

Если один из корней равен нулю, то решение очевидным образом упрощается; пусть, например, $\lambda_1 = 0$, тогда общее решение: $y = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = C_1 + C_2 e^{\lambda_2 x}$.

Пример 37

Решить дифференциальное уравнение $y'' + y' - 2y = 0$

Решение: составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

и вычислим его дискриминант (*см. Приложение Школьные формулы*):

$$D = 1 + 8 = 9 > 0, \text{ значит, уравнение имеет различные действительные корни.}$$

Порядок корней не имеет значения, но обычно их располагают в порядке возрастания: $\lambda_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$, $\lambda_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$ – **для проверки** подставляем найденные значения в квадратное уравнение и убеждаемся, что они «подходят».

Всё, что осталось сделать – записать ответ, руководствуясь формулой

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

Ответ: общее решение: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$, где $C_1, C_2 - \text{const}$

Не будет ошибкой, если записать общее решение «наоборот»: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$, но, как я отметил выше, традиционным стилем считается расположить коэффициенты по возрастанию, сначала -2 , потом 1 .

Как выполнить проверку? По большому счёту, достаточно проверить квадратное уравнение, т.е. подставить значения $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ в уравнение $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, но я напомним и **общий принцип** – найденное множество функций должно удовлетворять дифференциальному уравнению. Посмотрим, как это работает в нашем случае – берём ответ $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$ и находим производную:

$$y' = (C_1 e^{-2x} + C_2 e^x)' = -2C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$$

Далее находим вторую производную:

$$y'' = (-2C_1 e^{-2x} + C_2 e^x)' = 4C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$$

и подставляем $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$, $y' = -2C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$ и $y'' = 4C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$ в **левую часть** уравнения $y'' + y' - 2y = 0$:

$$\begin{aligned} y'' + y' - 2y &= 4C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + (-2C_1 e^{-2x} + C_2 e^x) - 2(C_1 e^{-2x} + C_2 e^x) = \\ &= 4C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - 2C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - 2C_1 e^{-2x} - 2C_2 e^x = 0 \end{aligned}$$

– в результате получена правая часть исходного уравнения (ноль), значит, общее решение $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$ удовлетворяет уравнению $y'' + y' - 2y = 0$ и найдено правильно.

Проделанный «длинный путь» был не лишним – этот навык потребуется нам в дальнейшем, и поэтому **со всей серьёзностью** отнеситесь к следующему заданию:

Пример 38

Найти общее решение дифференциального уравнения, выполнить проверку
 $y'' - 4y' = 0$

Решение и ответ в конце книги.

Случай второй. Характеристическое уравнение имеет два кратных действительных корня

Если характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет два **кратных** (совпавших) действительных корня $\lambda_1 = \lambda_2$ (дискриминант $D = 0$), то общее решение однородного уравнения принимает вид:

$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$, где C_1, C_2 – константы. Вместо λ_1 в формуле можно нарисовать λ_2 или пару λ_1, λ_2 , корни всё равно одинаковы.

Если оба корня равны нулю $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то общее решение опять же упрощается: $y = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 x e^{0 \cdot x} = C_1 + C_2 x$. Кстати, $y = C_1 + C_2 x$ является общим решением того самого примитивного уравнения $y'' = 0$. И в самом деле – его *характеристическое уравнение* $\lambda^2 = 0$ как раз и имеет совпавшие нулевые корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Кроме того, решение этого диффура можно получить **двукратным интегрированием правой части**:

$$y' = \int 0 dx = C_1$$

$$y = C_1 \int dx = C_1 x + C_2$$

И это были последние интегралы в этой книге!

Пример 39

Решить дифференциальное уравнение $y'' - 6y' + 9y = 0$

Решение: составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

Здесь можно вычислить дискриминант, равный нулю, и найти кратные корни. Но можно невозбранно применить известную школьную формулу $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ (которую, конечно, ещё нужно «увидеть»):

$$(\lambda - 3)^2 = 0 \text{ — получены два кратных действительных корня } \lambda_{1,2} = 3$$

Ответ: общее решение: $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$, где $C_1, C_2 - \text{const}$

Результат можно записать и в виде $y = (C_2 x + C_1) e^{3x}$, который, кстати, удобен для проверки. Найдём первую производную:

$$y' = ((C_2 x + C_1) e^{3x})' = C_2 e^{3x} + 3(C_2 x + C_1) e^{3x} = (3C_2 x + 3C_1 + C_2) e^{3x},$$

вторую:

$$y'' = ((3C_2 x + 3C_1 + C_2) e^{3x})' = 3C_2 e^{3x} + 3(3C_2 x + 3C_1 + C_2) e^{3x} = (9C_2 x + 9C_1 + 6C_2) e^{3x}$$

— обратите внимание на рациональную технику дифференцирования — часть действий можно (и на данный момент уже нужно!) выполнять устно.

Подставляем $y = (C_2 x + C_1) e^{3x}$, $y' = (3C_2 x + 3C_1 + C_2) e^{3x}$ и $y'' = (9C_2 x + 9C_1 + 6C_2) e^{3x}$ в левую часть уравнения, «собираем» всё под единой скобкой и проводим упрощения:

$$y'' - 6y' + 9y = (9C_2 x + 9C_1 + 6C_2) e^{3x} - 6(3C_2 x + 3C_1 + C_2) e^{3x} + 9(C_2 x + C_1) e^{3x} =$$

$$= (9C_2 x + 9C_1 + 6C_2 - 18C_2 x - 18C_1 - 6C_2 + 9C_2 x + 9C_1) e^{3x} = 0 \cdot e^{3x} = 0 \text{ — в результате}$$

получена правая часть исходного уравнения, значит, решение найдено правильно.

Пример 40

Решить дифференциальное уравнение $y'' + 2y' + y = 0$

Решаем самостоятельно.

Случай третий. Характеристическое уравнение имеет сопряженные комплексные корни. Даже если вы не знаете, что такое **комплексные числа**, этот случай можно освоить чисто формально.

Если характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет **сопряженные** комплексные корни $\lambda_1 = \alpha - \beta i$, $\lambda_2 = \alpha + \beta i$ (дискриминант $D < 0$), то общее решение однородного уравнения принимает вид:

$$y = e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \text{ где } C_1, C_2 - \text{константы.}$$

Примечание: сопряженные комплексные корни почти всегда записывают кратко следующим образом: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

Если получаются *чисто мнимые* сопряженные комплексные корни: $\lambda_{1,2} = \pm \beta i$, то общее решение упрощается: $y = e^{0 \cdot x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$

Пример 41

Решить однородное дифференциальное уравнение второго порядка
 $y'' - 2y' + 10y = 0$

Решение: составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$$

$$D = 4 - 40 = -36$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i \text{ — получены сопряженные комплексные корни}$$

Ответ: общее решение: $y = e^x (C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x)$, где $C_1, C_2 - const$

«Тягать» производные и выполнять громоздкую подстановку тут уже, конечно, не хочется (*хотя иногда приходится*), и поэтому в качестве достаточно надежной проверки рациональнее перепроверить решение квадратного уравнения... 1-2-3 раза ☺

Аналогичный пример для самостоятельного решения:

Пример 42

Решить уравнение $y'' - 4y' + 5y = 0$

Иногда в заданиях требуется найти *частное решение*, удовлетворяющее заданным начальным условиям, то есть, решить *задачу Коши*. Алгоритм решения полностью сохраняется, но в конце задачи добавляется дополнительный пункт:

Пример 43

Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

$$y'' - 4y = 0$$

Решение: составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 4 = 0$$

$$(\lambda + 2)(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2$$

Получены два различных действительных корня, поэтому общее решение:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}, \text{ где } C_1, C_2 - const$$

Теперь нужно найти частное решение, соответствующее заданным начальным условиям. Наша задача состоит в том, чтобы **найти ТАКИЕ значения констант C_1, C_2 , чтобы выполнялись ОБА условия**. Алгоритм нахождения частного решения будет отличаться от «отстрела» констант, который мы использовали ранее.

Сначала используем начальное условие $y(0) = 1$:

$$y(0) = C_1 e^{-2 \cdot 0} + C_2 e^{2 \cdot 0} = C_1 + C_2$$

Согласно начальному условию, получаем первое уравнение: $y(0) = C_1 + C_2 = 1$ или просто $C_1 + C_2 = 1$.

Далее берём наше общее решение $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$ и находим производную:

$$y' = (C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x})' = -2C_1 e^{-2x} + 2C_2 e^{2x}$$

Используем второе начальное условие $y'(0) = 2$:

$$y'(0) = -2C_1 e^{-2 \cdot 0} + 2C_2 e^{2 \cdot 0} = -2C_1 + 2C_2$$

Согласно второму начальному условию, получаем второе уравнение:

$y'(0) = -2C_1 + 2C_2 = 2$ или просто $-2C_1 + 2C_2 = 2$, или ещё проще – все члены уравнения можно сразу разделить на два: $-C_1 + C_2 = 1$

Составим и решим систему из двух найденных уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 + C_2 = 1 \end{cases}$$

Здесь можно использовать «школьный» метод решения (*выразить в каком-нибудь уравнении одну переменную через другую и подставить её во второе уравнение*), но удобнее провести *почленное* сложение уравнений:

$$\begin{array}{rrrr} C_1 & + & C_2 & = & 1 \\ + & & + & & + \\ -C_1 & + & C_2 & = & 1 \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & & 2C_2 & = & 2 \end{array}$$

из уравнения $2C_2 = 2$ находим $C_2 = 1$ и подставляем это значение в любое, например, первое уравнение системы: $C_1 + 1 = 1$, откуда следует, что $C_1 = 0$.

Всё, что осталось сделать – это подставить найденные значения констант $C_1 = 0$, $C_2 = 1$ в общее решение $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$:

$$y = 0 \cdot e^{-2x} + 1 \cdot e^{2x} = e^{2x}$$

Ответ: частное решение: $y = e^{2x}$

Проверка осуществляется по уже знакомой схеме:

1) Сначала проверим, выполняется ли начальное условие $y(0) = 1$:

$$y(0) = e^{2 \cdot 0} = 1 \text{ – начальное условие выполнено.}$$

2) Находим первую производную от ответа:

$$y' = (e^{2x})' = 2e^{2x} \text{ и проверяем выполнения начального условия } y'(0) = 2:$$

$$y'(0) = 2e^{2 \cdot 0} = 2 \text{ – второе начальное условие тоже выполнено.}$$

3) Находим вторую производную: $y'' = (2e^{2x})' = 4e^{2x}$ и подставляем её вместе с $y = e^{2x}$ в левую часть исходного уравнения:

$$y'' - 4y = 4e^{2x} - 4e^{2x} = 0 \text{ – в результате получена его правая часть.}$$

Вывод: частное решение найдено верно.

Пример 44

Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(\pi) = -1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4$. Выполнить проверку.

$$y'' + 4y = 0$$

Это пример для самостоятельного решения, *справочно*:
 $\sin \pi = 0$, $\sin 2\pi = 0$, $\cos \pi = -1$, $\cos 2\pi = 1$

Решение и ответ в конце книги.

Как видите, особых сложностей с однородными уравнениями нет, **главное, правильно решить квадратное уравнение.**

Иногда встречаются «нестандартные» однородные уравнения, например уравнение в виде $ry'' + py' + qy = 0$, где при второй производной есть некоторая константа r , отличная от единицы (и, естественно, отличная от нуля). Алгоритм решения ничуть не меняется: следует невозмутимо составить характеристическое уравнение и найти его корни. Если характеристическое уравнение $r\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ будет иметь два различных действительных корня, например: $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{3}$, то общее решение запишется по обычной схеме: $y = C_1 e^{-\frac{x}{2}} + C_2 e^{\frac{x}{3}}$, где $C_1, C_2 - const$.

В ряде случаев из-за опечатки в условии или задумки автора могут получиться «нехорошие» корни, что-нибудь вроде $\lambda_1 = \frac{3-\sqrt{6}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3+\sqrt{6}}{2}$. В подобной ситуации я рекомендую **перепроверить** решение квадратного уравнения (*вдруг мы сами ошиблись?*) и в случае «подтверждения» корней спокойно записать ответ:

$$y = C_1 e^{\left(\frac{3-\sqrt{6}}{2}\right)x} + C_2 e^{\left(\frac{3+\sqrt{6}}{2}\right)x}, \text{ где } C_1, C_2 - const$$

С «плохими» сопряженными комплексными корнями наподобие $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}$ тоже никаких проблем, общее решение:

$$y = e^{\frac{x}{2}} \cdot \left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right) - \text{и не так уж «плохо» оно и выглядит ;)}$$

То есть, **общее решение в любом случае существует**. Потому что любое квадратное уравнение имеет два корня.

И, как подсказывает интуиция, если существует **однородное** уравнение, то должно существовать и **НЕоднородное** уравнение:

2.3. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка

Оно отличается ненулевой правой частью:

$y'' + py' + qy = f(x)$, где p и q , как мы оговорили ранее – постоянные коэффициенты, а $f(x)$ – функция, зависящая *только от «икс»*. В простейшем случае $f(x)$ может быть функцией-константой, *отличной от нуля*.

Какая догадка сразу приходит в голову? Неоднородное уравнение решить труднее. И интуиция нас опять не подводит!

Для решения данного диффура существует универсальный **метод вариации произвольных постоянных**, но он отличается сложностью и громоздкостью, и поэтому на практике (если это возможно) используют **метод подбора**, который я и рассмотрю в рамках настоящего курса. Этот метод работает лишь для некоторых функций $f(x)$.

Алгоритм решения состоит из трёх этапов:

1) Сначала нужно **найти общее решение** соответствующего **однородного уравнения**. Да-да, взять уравнение $y'' + py' + qy = f(x)$, откинуть правую часть: $y'' + py' + qy = 0$ – и найти общее решение, чем мы только и занимались в предыдущем параграфе. Общее решение однородного уравнения я привык обозначать буквой Y .

2) Наиболее трудный этап. Точнее говоря, замысловатый и даже приключенческий. Необходимо **ПОДОБРАТЬ частное решение \tilde{y} неоднородного уравнения**. Отсюда и название метода. Как подобрать? – об этом в практических примерах

Внимание! В ваших лекциях, методичках, практических занятиях *общее решение однородного уравнения Y и подобранное частное решение неоднородного уравнения \tilde{y} , скорее всего, обозначаются не так. В частности, популярна версия:*

y_{oo} – *общее решение однородного уравнения;*

$y_{чн}$ – *частное решение неоднородного уравнения*

Я «намертво» привык к обозначениям Y , \tilde{y} , которые легче нарисовать, и буду использовать именно их.

3) На третьем шаге надо **составить общее решение y неоднородного уравнения**. Это совсем легко: $y = Y + \tilde{y}$. Совершенно верно – следует просто приплюсовать завоёванные трофеи. *Вариант обозначения:* $y_{он}$ – *общее решение неоднородного ур-я.*

Если изначально в условии сформулирована *задача Коши* (найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям), то добавляется четвёртый этап:

4) Нахождение частного решения, удовлетворяющего заданным начальным условиям. Схема нахождения частного решения рассмотрена в Примерах 43-44, и здесь её принципы сохраняются.

По существу, вся новизна здесь состоит в *Пункте 2*, однако хватит лирики, ...какой ужас – целая страница получилась! – срочно переходим к физике:

Пример 45

Решить дифференциальное уравнение $y'' - 4y' = 8 - 16x$, поначалу я буду нумеровать этапы **решения**:

1) Сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения. Берём наш неоднородный диффур $y'' - 4y' = 8 - 16x$ и обнуляем правую часть:

$$y'' - 4y' = 0$$

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 4\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 4) = 0$$

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4$ – получены различные действительные корни, поэтому общее решение: $Y = C_1 + C_2 e^{4x}$, где $C_1, C_2 - const$

2) Теперь нужно подобрать частное решение \tilde{y} неоднородного уравнения $y'' - 4y' = 8 - 16x$. И **вопрос, который вызывает затруднения чаще всего**:

В каком виде нужно искать частное решение \tilde{y} ?

Прежде всего, смотрим на нашу правую часть: $f(x) = 8 - 16x$. Тут у нас многочлен первой степени и по идее, частное решение тоже следует искать в виде линейного многочлена $\tilde{y} = Ax + B$, где A, B – пока ещё неизвестные коэффициенты (числа). То есть, нам нужно посмотреть на правую часть неоднородного уравнения и «собеъзьянничать» её, но уже с неопределёнными коэффициентами.

При этом степени пропускать нельзя! – даже если в правой части находится неполный многочлен. Так, если $f(x) = -16x$, то выдвигаем ту же версию $\tilde{y} = Ax + B$; если $f(x) = 3x^2$, то $\tilde{y} = Ax^2 + Bx + C$; если $f(x) = 2x^3 - x$, то $\tilde{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ и т.д.
То есть, во всех случаях прописываем ВСЕ степени многочлена.

Вариант подбора, который «сразу приходит в голову», я неформально буду называть «**заготовкой**» или **первоначальной версией** подбора. Почему первоначальной? Потому что она может измениться. А может и нет. От чего это зависит? **В общем решении Y и в подбираемом частном решении \tilde{y} не должно быть подобных членов** (например, двух констант, членов C_*x и Ax , C_*e^{2x} и Ae^{2x} , $C_*x\cos 3x$ и $Ax\cos 3x$, и т.д. – они отличаются ТОЛЬКО множителем-константой. В противном случае члены не подобны, например: C_*e^x и Ae^{-x} , $C_*x\cos 3x$ и $Ax\cos 2x$, $C_*\cos 3x$ и $Ax\cos 3x$)

Смотрим на общее решение $Y = C_1 + C_2 e^{4x}$ и на нашу «заготовку» $\tilde{y} = Ax + B$.

И там, и там есть «одинокая» константа, и поэтому «заготовка» не годится. **Чтобы избежать подобных членов, ВСЮ первоначальную версию подбора следует домножить на «икс»:**

$\tilde{y} = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$ – это правило универсально, оно работает и в остальных тематических задачах.

Если изначально подобных членов нет, то домножать \tilde{y} на x , понятно, не надо.

Итак, частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $\tilde{y} = Ax^2 + Bx$.

Найдем первую и вторую производную:

$$\tilde{y}' = (Ax^2 + Bx)' = 2Ax + B$$

$$\tilde{y}'' = (2Ax + B)' = 2A$$

и подставим их в левую часть неоднородного уравнения $y'' - 4y' = 8 - 16x$:

$\tilde{y}'' - 4\tilde{y}' = 2A - 4(2Ax + B) = 2A - 8Ax - 4B = 8 - 16x$ – после максимальных упрощений сразу приравняем $2A - 8Ax - 4B$ к правой части исходного уравнения.

Теперь приравняем коэффициенты при соответствующих степенях:

$$2A - 8Ax - 4B = 8 - 16x$$

и составляем систему линейных уравнений. Уравнения обычно записывают в порядке убывания степеней, в данном случае – начиная с «иксовых» коэффициентов:

$$\begin{cases} -8A = -16 \\ 2A - 4B = 8 \end{cases}$$

Система получилась устная, и из неё следует, что $A = 2$, $B = -1$ – подставляем найденные коэффициенты в «заготовку» $\tilde{y} = Ax^2 + Bx$:

$$\tilde{y} = 2x^2 - x \text{ частное решение неоднородно уравнения.}$$

3) Запишем общее решение неоднородного уравнения:

$$y = Y + \tilde{y} = C_1 + C_2 e^{4x} + 2x^2 - x, \text{ где } C_1, C_2 - \text{const}$$

Ответ: общее решение: $y = C_1 + C_2 e^{4x} + 2x^2 - x$, где $C_1, C_2 - \text{const}$

Ещё перед записью общего решения (пунктом 3) целесообразно провести «быструю» проверку. Сначала проверяем, правильно ли мы решили квадратное уравнение, после чего первая часть ответа $C_1 + C_2 e^{4x}$ (общее решение однородного уравнения) будет гарантировано правильной.

Осталось проверить, верно ли найдена вторая часть ответа (подобранное частное решение) $\tilde{y} = 2x^2 - x$. Это тоже просто. Берём первую и вторую производную:

$$\tilde{y}' = 4x - 1, \quad \tilde{y}'' = 4 \text{ и подставляем их в левую часть исходного уравнения } y'' - 4y' = 8 - 16x:$$

$\tilde{y}'' - 4\tilde{y}' = 4 - 4(4x - 1) = 4 - 16x + 4 = 8 - 16x$ – в результате получена правая часть уравнения, значит, частное решение подобрано верно.

Тренируемся самостоятельно!

Пример 46

Решить дифференциальные уравнения

$$\text{а) } y'' + 2y' + 3y = 4, \quad \text{б) } y'' - 4y = 8x^3$$

Здесь в явном виде присутствует функция «игрек» и в ходе подбора частного решения, помимо производных \tilde{y}' , \tilde{y}'' , в левую часть нужно подставлять и сам подбор \tilde{y} .

Если возникла какая-то загвоздка – не теряйте времени и сверяйтесь с образцом, который я постарался расписать максимально подробно.

Перейдём к рассмотрению, может быть, самого распространенного случая – когда в правой части находится экспонента:

Пример 47

Найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' - 6y' + 10y = 51e^{-x}$$

Решение начинается стандартно:

1) Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'' - 6y' + 10y = 0$$

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$$

$$D = 36 - 40 = -4$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm 2i}{2} = 3 \pm i \text{ – получены сопряженные комплексные корни, которые лучше}$$

немедленно проверить. Опытные читатели могут подставить их в характеристическое уравнение, но более лёгкий способ – это просто ВНИМАТЕЛЬНО его решить ещё раз. Чтобы в общем решении наверняка не было ошибок:

$$Y = e^{3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

2) На втором шаге выполняем подбор частного решения \tilde{y} неоднородного уравнения $y'' - 6y' + 10y = 51e^{-x}$.

Сначала выясним, в каком виде его нужно искать. Смотрим на правую часть уравнения и выдвигаем первоначальную гипотезу: раз в правой части находится экспонента, умноженная на константу: $51e^{-x}$, то частное решение нужно искать в «родственном» виде $\tilde{y} = Ae^{-x}$, где A – пока ещё неизвестный коэффициент.

Теперь смотрим на общее решение $Y = e^{3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ – в нём НЕТ члена вида $C_* e^{-x}$, а значит, первоначальную версию $\tilde{y} = Ae^{-x}$ домножать на «икс» НЕ НУЖНО и она принимается в качестве рабочего варианта.

Найдём производные, они здесь простецкие:

$$\tilde{y}' = (Ae^{-x})' = -Ae^{-x}$$

$$\tilde{y}'' = (-Ae^{-x})' = Ae^{-x}$$

и подставим $\tilde{y} = Ae^{-x}$, $\tilde{y}' = -Ae^{-x}$ и $\tilde{y}'' = (-Ae^{-x})' = Ae^{-x}$ в левую часть неоднородного уравнения $y'' - 6y' + 10y = 51e^{-x}$:

$\tilde{y}'' - 6\tilde{y}' + 10\tilde{y} = Ae^{-x} + 6Ae^{-x} + 10Ae^{-x} = 17Ae^{-x} = 51e^{-x}$ – после упрощений приравниваем результат к правой части неоднородного уравнения.

Из последнего равенства $17A = 51$ следует, что $A = 3$. Таким образом, у нас нарисовалось частное решение $\tilde{y} = 3e^{-x}$, которое тоже лучше сразу же проверить:

Подставим $\tilde{y} = 3e^{-x}$ с очевидными производными $\tilde{y}' = -3e^{-x}$, $\tilde{y}'' = 3e^{-x}$ в левую часть исходного уравнения $y'' - 6y' + 10y = 51e^{-x}$:

$\tilde{y}'' - 6\tilde{y}' + 10\tilde{y} = 3e^{-x} - 6(-3e^{-x}) + 10 \cdot 3e^{-x} = 3e^{-x} + 18e^{-x} + 30e^{-x} = 51e^{-x}$ – получена правая часть уравнения, значит, частное решение найдено правильно.

3) Осталось с лёгким сердцем записать итоговый результат:

$$y = Y + \tilde{y} = e^{3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 3e^{-x}$$

Ответ: общее решение: $y = e^{3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 3e^{-x}$, где $C_1, C_2 - const$

Следующий пример для самостоятельного решения:

Пример 48

$$y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x}$$

В случае затруднений сверяйтесь с образцом в конце книги. После чего рассмотрим ещё одну классику жанра:

Пример 49

Решить дифференциальное уравнение

$$y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$$

Алгоритм **решения** полностью сохраняется:

1) Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

Как раз тот случай «озарения», по формуле $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$:

$$(\lambda - 3)^2 = 0$$

$\lambda_{1,2} = 3$ – получены кратные действительные корни, поэтому общее решение:

$$Y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$$

2) Выясняем, в каком виде нужно искать частное решение \tilde{y} . Смотрим на правую часть неоднородного уравнения $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$, после чего сразу появляется первая версия подбора: $\tilde{y} = A e^{3x}$. Но в общем решении Y **уже есть** подобный член: $C_1 e^{3x}$, поэтому нашу версию нужно умножить на «икс»: $\tilde{y} = x \cdot A e^{3x} = A x e^{3x}$ – однако и такой член **тоже есть** в общем решении: $C_2 x e^{3x}$.

Что делать? Всё гениальное просто – **ещё раз домножаем** нашу «заготовку» на «икс» и ищем решение в виде $\tilde{y} = x \cdot A x e^{3x} = A x^2 e^{3x}$ – такого перца в общем решении $Y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$ уже нет.

Надеюсь, все приновились применять правило $(uv)' = u'v + uv'$ устно:

$$\tilde{y}' = (Ax^2e^{3x})' = 2Axe^{3x} + 3Ax^2e^{3x} = (3Ax^2 + 2Ax)e^{3x}$$

$$\tilde{y}'' = ((3Ax^2 + 2Ax)e^{3x})' = (6Ax + 2A)e^{3x} + (9Ax^2 + 6Ax)e^{3x} = (9Ax^2 + 12Ax + 2A)e^{3x}$$

Подставим \tilde{y} , \tilde{y}' и \tilde{y}'' в левую часть исходного уравнения $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$ и максимально упростим выражение:

$$\tilde{y}'' - 6\tilde{y}' + 9\tilde{y} = (9Ax^2 + 12Ax + 2A)e^{3x} - 6(3Ax^2 + 2Ax)e^{3x} + 9Ax^2e^{3x} =$$

$$= (9Ax^2 + 12Ax + 2A - 18Ax^2 - 12Ax + 9Ax^2) \cdot e^{3x} = 2Ae^{3x} = e^{3x} \text{ — после упрощений}$$

приравниваем результат к правой части.

Из последнего равенства $2Ae^{3x} = e^{3x}$ следует, что:

$$2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2} \text{ — подставляем найденное значение в подбор } \tilde{y} = Ax^2e^{3x}:$$

$$\tilde{y} = \frac{1}{2}x^2e^{3x}. \text{ Блиц-проверку выполните самостоятельно ;)}$$

Собираем камни:

$$3) y = Y + \tilde{y} = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + \frac{1}{2}x^2e^{3x} \text{ — общее решение неоднородного уравнения,}$$

которое можно записать более стильно:

$$\text{Ответ: } y = \left(\frac{x^2}{2} + C_2x + C_1 \right) e^{3x}, \text{ где } C_1, C_2 - const$$

Прямо таки маленькое математическое событие под названием «Воссоединение членов многочлена» =)

Возможно, у вас возник вопрос: а что произойдет, если мы будем подбирать частное решение в некорректном виде? Вот только что мы его искали в виде $\tilde{y} = Ax^2e^{3x}$, а что будет, если попробовать «первоначальную» версию $\tilde{y} = Ae^{3x}$?

Поначалу всё будет хорошо: удастся найти производные \tilde{y}' , \tilde{y}'' , провести подстановку. Но далее перед глазами возникнет грустный факт — у нас не получится красивого финального равенства $2Ae^{3x} = e^{3x}$, грубо говоря, «ничего не сойдётся»:

$$\tilde{y} = Ae^{3x}$$

$$\tilde{y}' = 3Ae^{3x}$$

$$\tilde{y}'' = 9Ae^{3x}$$

подставляем эти штуки в левую часть диффура:

$$\tilde{y}'' - 6\tilde{y}' + 9\tilde{y} = 9Ae^{3x} - 6 \cdot 3Ae^{3x} + 9Ae^{3x} = 0 \text{ — в результате чего получился ноль, и}$$

поэтому в конце мы не можем приписать правую часть неоднородного уравнения, ибо:

$$0 \neq e^{3x}$$

Таким образом, попытка подобрать частное решение в виде $\tilde{y} = Ae^{3x}$ не увенчалась успехом.

И если вам встретится (или уже встретился) подобный казус, то знайте — вы изначально пытались подобрать частное решение НЕ В ТОМ виде.

Переходим к следующему типовому случаю и заодно вспомним *задачу Коши*:

Пример 50

Найти частное решение уравнения $y'' + 4y = xe^{2x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -\frac{1}{16}$, $y'(0) = 2$

Ход **решения** такой же, но в конце добавляется дополнительный пункт:

1) Найдём общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'' + 4y = 0$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$\lambda_{1,2} = \pm 2i$ – получены сопряженные, *чисто мнимые* комплексные корни, поэтому общее решение:

$$Y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

2) Подбираем частное решение \tilde{y} . Поскольку в правой части неоднородного уравнения $y'' + 4y = xe^{2x}$ находится многочлен 1-й степени, умноженный на экспоненту, то в качестве первоначальной версии подбора рассматриваем $\tilde{y} = (Ax + B)e^{2x}$,

при этом степени многочлена пропускать нельзя! (в нашем случае – константу)

То есть, если в правой части ДУ находится неполный многочлен, например, $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$, то в подборе **всё равно** прописываем все его степени:

$$\tilde{y} = (Ax^2 + Bx + C)e^{-x}$$

Теперь смотрим на нашу «заготовку» $\tilde{y} = Axe^{2x} + Be^{2x}$ и на общее решение $Y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. Очевидно, здесь нет подобных членов, и поэтому домножать \tilde{y} на «икс» НЕ НАДО. Таким образом, первоначальная версия подбора принимается в качестве рабочего варианта.

Найдём производные:

$$\tilde{y}' = ((Ax + B)e^{2x})' = Ae^{2x} + 2(Ax + B)e^{2x} = (2Ax + A + 2B)e^{2x}$$

$$\tilde{y}'' = ((2Ax + A + 2B)e^{2x})' = 2Ae^{2x} + 2(2Ax + A + 2B)e^{2x} = (4Ax + 4A + 4B)e^{2x}$$

И подставим \tilde{y} и \tilde{y}'' в левую часть неоднородного уравнения:

$$\tilde{y}'' + 4\tilde{y} = (4Ax + 4A + 4B)e^{2x} + 4(Ax + B)e^{2x} =$$

$$= (4Ax + 4A + 4B + 4Ax + 4B)e^{2x} = (8Ax + 4A + 8B)e^{2x} = (x + 0)e^{2x} \text{ – после}$$

максимальных упрощений приравниваем результат к правой части. Обращаю ваше внимание, что **отсутствующие коэффициенты многочлена правой части равны нулю.**

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях и составляем систему:

$$\begin{cases} 8A = 1 \\ 4A + 8B = 0 \end{cases}, \text{ из которой следует, что } A = \frac{1}{8} \Rightarrow 4 \cdot \frac{1}{8} + 8B = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{16}$$

$$\text{Таким образом: } \tilde{y} = (Ax + B)e^{2x} = \left(\frac{x}{8} - \frac{1}{16}\right)e^{2x}$$

3) Запишем общее решение неоднородного уравнения:

$$y = Y + \tilde{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \left(\frac{x}{8} - \frac{1}{16}\right)e^{2x}, \text{ где } C_1, C_2 - \text{const}$$

4) и найдём частное решение, соответствующее заданным начальным условиям.

Сначала применяем к общему решению начальное условие $y(0) = -\frac{1}{16}$:

$$y(0) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 + \left(\frac{0}{8} - \frac{1}{16}\right)e^0 = C_1 - \frac{1}{16} = -\frac{1}{16}, \text{ откуда сразу получаем } C_1 = 0.$$

Далее находим производную: $y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x + \frac{1}{8}e^{2x} + 2\left(\frac{x}{8} - \frac{1}{16}\right)e^{2x}$ и

применяем к ней второе начальное условие $y'(0) = 2$:

$$y'(0) = -2C_1 \cdot 0 + 2C_2 \cdot 1 + \frac{1}{8}e^0 + 2\left(\frac{0}{8} - \frac{1}{16}\right)e^0 = 2C_2 + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 2C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 1$$

Надо сказать, с константами тут повезло – отыскились сразу. Чаше приходится составлять и решать систему двух уравнений. Ну а в том, что пришлось иметь дело с дробями, нет ничего необычного – это, скорее, дело обычное ☺

Ответ: частное решение: $y = \sin 2x + \left(\frac{x}{8} - \frac{1}{16}\right)e^{2x}$

Выполним **полную проверку**. Сначала проверяем, выполняется ли начальное условие $y(0) = -\frac{1}{16}$:

$$y(0) = \sin 0 + \left(\frac{0}{8} - \frac{1}{16}\right) \cdot e^0 = 0 - \frac{1}{16} = -\frac{1}{16} \text{ – да, начальное условие выполнено.}$$

Находим производную от ответа: $y' = 2 \cos 2x + \frac{1}{8}e^{2x} + 2\left(\frac{x}{8} - \frac{1}{16}\right)e^{2x} = 2 \cos 2x + \frac{x}{4}e^{2x}$

и проверяем, выполняется ли начальное условие $y'(0) = 2$:

$$y'(0) = 2 \cdot 1 + 0 = 2 \text{ – да, второе начальное условие тоже выполнено.}$$

Берём вторую производную: $y'' = -4 \sin 2x + \frac{1}{4}e^{2x} + 2 \cdot \frac{x}{4}e^{2x} = -4 \sin 2x + \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{2x}$ и

подставляем её вместе с $y = \sin 2x + \left(\frac{x}{8} - \frac{1}{16}\right)e^{2x}$ в левую часть исходного уравнения:

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= -4 \sin 2x + \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{2x} + 4 \cdot \left[\sin 2x + \left(\frac{x}{8} - \frac{1}{16}\right)e^{2x}\right] = \\ &= -4 \sin 2x + \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{2x} + 4 \sin 2x + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2x} = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2x} = xe^{2x} \text{ – в} \end{aligned}$$

результате получена правая часть исходного уравнения, в чём и требовалось убедиться.

Аналогично можно выполнить полную проверку любого общего решения с той лишь разницей, что не нужно проверять выполнение начальных условий. Но гораздо проще, конечно, «быстрая» проверка или, как я её жаргонно называю, проверка-«лайт».

Обязательно всё прорешиваем и во всём разбираемся:

Пример 51

Решить задачу Коши, выполнить проверку

$$y'' + 2y' = (4 - 4x)e^{-2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

Образец я приблизил к чистовому варианту – примерно так нужно оформлять задачу. Не забываем о минимальных словесных комментариях, в которых, к слову, совсем не обязательно обосновывать вид, в котором вы подбираете частное решение \tilde{y} .

И в заключение параграфа рассмотрим не менее важные уравнения с тригонометрическими функциями в правой части:

Пример 52

$$y'' - 2y' + 5y = 21\cos 2x - \sin 2x$$

Решение: найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

$$D = 4 - 20 = -16$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 4i}{2}$$

$\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$ – получены сопряженные комплексные корни, поэтому общее решение:

$Y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ – **внимательно перепроверяем квадратное уравнение**, и убеждаемся, что ошибок мы не допустили.

Теперь подбираем частное решение \tilde{y} неоднородного уравнения

$$y'' - 2y' + 5y = 21\cos 2x - \sin 2x.$$

Правило: если в правой части находится сумма синуса и косинуса одного и того же аргумента (в нашем случае аргумента $2x$), ИЛИ одинокий косинус (например, $10\cos 2x$ и больше ничего), ИЛИ одинокий синус (например, $3\sin 2x$ и больше ничего), то **во всех трёх случаях** в качестве первоначального варианта подбора рассматриваем сумму косинуса и синуса (того же аргумента) с двумя неопределенными коэффициентами. В нашей задаче:

$\tilde{y} = A\cos 2x + B\sin 2x$, где A и B – пока ещё неизвестные коэффициенты.

Теперь смотрим на «заготовку» \tilde{y} и на общее решение $Y = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x$, в котором для наглядности я раскрыл скобки. В общем решении НЕТ членов вида $C_* \cos 2x$, $C_{**} \sin 2x$, а значит, первоначальную версию $\tilde{y} = A\cos 2x + B\sin 2x$ домножать на «икс» **не нужно** и она принимается в качестве рабочего варианта.

Найдем производные:

$$\tilde{y}' = (A\cos 2x + B\sin 2x)' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$$

$$\tilde{y}'' = (-2A\sin 2x + 2B\cos 2x)' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$$

Подставим \tilde{y} , \tilde{y}' и \tilde{y}'' в левую часть неоднородного уравнения $y'' - 2y' + 5y = 21\cos 2x - \sin 2x$:

$$\begin{aligned}\tilde{y}'' - 2\tilde{y}' + 5\tilde{y} &= \\ &= -4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 2(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) + 5(A\cos 2x + B\sin 2x) = \\ &\text{раскрываем скобки:} \\ &= -4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 4A\sin 2x - 4B\cos 2x + 5A\cos 2x + 5B\sin 2x = \\ &\text{группируем слагаемые при косинусе и синусе:} \\ &= (-4A - 4B + 5A)\cos 2x + (-4B + 4A + 5B)\sin 2x = \\ &= (A - 4B)\cos 2x + (4A + B)\sin 2x = 21\cos 2x - \sin 2x \text{ -- и после упрощений в скобках} \\ &\text{приравниваем результат к правой части неоднородного уравнения.}\end{aligned}$$

В последнем равенстве приравниваем коэффициенты при *соответствующих тригонометрических функциях* и получаем систему:

$$\begin{cases} A - 4B = 21 \\ 4A + B = -1 \end{cases}$$

Систему не возбраняется решить «школьным» методом (*выразить, например, из второго уравнения $B = -4A - 1$ и подставить в первое уравнение*), но чаще их решают «вышматовским» способом. Умножим второе уравнение на 4 и выполним почленное сложение:

$$\begin{cases} A - 4B = 21 \\ 16A + 4B = -4 \end{cases} + \Rightarrow 17A = 17 \Rightarrow A = 1 \text{ -- подставим в любое, например, в первое}$$

уравнение:

$1 - 4B = 21$
 $-4B = 20 \Rightarrow B = -5$, после чего подставляем найденные значения A и B в наш подбор: $\tilde{y} = A\cos 2x + B\sin 2x = \cos 2x - 5\sin 2x$ -- искомое частное решение.

Выполним «быструю» проверку, а именно, найдём производные:

$$\tilde{y}' = (\cos 2x - 5\sin 2x)' = -2\sin 2x - 10\cos 2x$$

$$\tilde{y}'' = (-2\sin 2x - 10\cos 2x)' = -4\cos 2x + 20\sin 2x$$

и подставим их вместе с $\tilde{y} = \cos 2x - 5\sin 2x$ в левую часть исходного уравнения:

$$\begin{aligned}\tilde{y}'' - 2\tilde{y}' + 5\tilde{y} &= \\ &= -4\cos 2x + 20\sin 2x - 2(-2\sin 2x - 10\cos 2x) + 5(\cos 2x - 5\sin 2x) = \\ &= -4\cos 2x + 20\sin 2x + 4\sin 2x + 20\cos 2x + 5\cos 2x - 25\sin 2x = \\ &= 21\cos 2x - \sin 2x \text{ -- надо просто быть упрямым и уметь играть на скрижке} \\ &\text{дифференцировать =)}\end{aligned}$$

После чего мы практически стопроцентно можем быть уверены в правильности итогового результата: $y = Y + \tilde{y} = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \cos 2x - 5\sin 2x$ -- общее решение неоднородного уравнения.

Ответ: $y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \cos 2x - 5\sin 2x$, где $C_1, C_2 - const$

Простенькое уравнение для самостоятельного решения:

Пример 53

$$y'' + y = 2\cos x$$

И некоторые более редкие случаи я разберу в обзорном порядке:

$$y'' + 9y = 2x \sin 3x$$

Правило: если в правой части находится синус, умноженный на многочлен ИЛИ косинус того же аргумента, умноженный на многочлен той же степени (*например, $(1-x)\cos 3x$*), ИЛИ их сумма, то **во всех трёх случаях** в качестве первоначального варианта подбора рассматриваем «полный комплект», в нашем примере:

$\tilde{y} = (Ax + B)\cos 3x + (Cx + D)\sin 3x$, где A, B, C, D пока ещё неизвестные коэффициенты, **при этом степени многочленов пропускать нельзя!**

Теперь смотрим на общее решение $Y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$ и на «заготовку» $\tilde{y} = Ax \cos 3x + B \cos 3x + Cx \sin 3x + D \sin 3x$. Подобные члены видны невооруженным глазом, и поэтому ВСЮ первоначальную версию подбора следует домножить на «икс»:

$$\tilde{y} = x \cdot ((Ax + B)\cos 3x + (Cx + D)\sin 3x) = (Ax^2 + Bx)\cos 3x + (Cx^2 + Dx)\sin 3x$$

Другой случай – когда в правой части находится экспонента, умноженная на тригонометрическую функцию, например:

$$y'' - 2y' + 5y = e^x \sin 2x$$

Правило: если в правой части находится такое произведение ИЛИ произведение этой же экспоненты на косинус такого же аргумента (*например, $-3e^x \cos 2x$*), ИЛИ ЖЕ сумма таких слагаемых (*например, $2e^x \cos 2x - e^x \sin 2x = e^x(2\cos 2x - \sin 2x)$*), то **во всех трёх случаях** первоначальная версия подбора имеет вид:

$$\tilde{y} = e^x (A \cos 2x + B \sin 2x)$$

Следует отметить, что здесь нам «светит» нахождение громоздких производных \tilde{y}' , \tilde{y}'' и весёлая подстановка. Однако это ещё половина счастья. По той причине, что $Y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$. А посему ВСЯ «заготовка» подлежит домножению на «икс»:

$$\tilde{y} = x \cdot e^x (A \cos 2x + B \sin 2x) = e^x (Ax \cos 2x + Bx \sin 2x)$$

Но такая жесть, конечно, встречается очень редко. Впрочем, и она нипочём – с хорошими навыками интегрирования и повышенным уровнем внимания. Существует ещё БОЛЬШАЯ жесть вроде $f(x) = e^x x \sin 2x$, но её совсем не припомню.

Иногда в правой части неоднородного уравнения находится «ассорти», например:

$$y'' + 9y = -18 \sin 3x - 18e^{3x}$$

В подобных случаях частное решение неоднородного уравнения удобно разделить на две части: $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$ и проверить алгоритм дважды – для подбора

$\tilde{y}_1 = Ax \cos 3x + Bx \sin 3x$ и для $\tilde{y}_2 = Ce^{3x}$, после чего просуммировать найденные решения.

Как быть если в правой части находится какая-либо функция другого вида? Если это гиперболический синус $sh(ax)$ или косинус $ch(ax)$, то раскладываем их по известным формулам в сумму двух экспонент; в других же случаях применяют универсальный **метод вариации произвольных постоянных**, но такое задание ввиду его громоздкости вряд ли предложат в вашей отчётной работе.

2.4. Коротко о линейных уравнениях более высоких порядков

Всё очень и очень похоже. Они тоже бывают однородные и неоднородные. Так, *линейное однородное ДУ 3-го порядка с постоянными коэффициентами* имеет вид:

$$y''' + ry'' + py' + qy = 0, \text{ где } r, p, q - \text{конкретные числа.}$$

Для данного уравнения тоже нужно составить характеристическое уравнение и найти его корни. Характеристическое уравнение, как нетрудно догадаться, выглядит так:

$$\lambda^3 + r\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \text{ и оно в любом случае имеет ровно три корня.}$$

Пусть, например, все корни действительны и различны: $\lambda_1 = -3$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = 5$, тогда общее решение запишется следующим образом:

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x + C_3 e^{5x}, \text{ где } C_1, C_2, C_3 - \text{const}$$

Если один корень действительный $\lambda_1 = 2$, а два других – сопряженные комплексные $\lambda_{2,3} = \sqrt{3} \pm 5i$, то общее решение записываем так:

$$y = C_1 e^{2x} + e^{\sqrt{3}x} (C_2 \cos 5x + C_3 \sin 5x), \text{ где } C_1, C_2, C_3 - \text{const}$$

Особый случай, когда все три корня кратны (одинаковы). Знакомый малыш $y''' = 0$ имеет характеристическое уравнение $\lambda^3 = 0$ с тремя совпавшими нулевыми корнями $\lambda_{1,2,3} = 0$, поэтому его общее решение записываем так:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2, \text{ где } C_1, C_2, C_3 - \text{const}$$

Если характеристическое уравнение $\lambda^3 + r\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет три кратных ненулевых корня, например, $\lambda_{1,2,3} = -1$, то общее решение, соответственно, такое:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x}, \text{ где } C_1, C_2, C_3 - \text{const}$$

Оформим решение «цивилизованно»:

Пример 54

Решить однородное дифференциальное уравнение третьего порядка $y''' + y' = 0$

Решение: составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 + \lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 + 1) = 0$$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm i$ – получен один действительный корень и два сопряженных комплексных корня.

Ответ: общее решение $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$, где $C_1, C_2, C_3 - \text{const}$

Подобные уравнения вполне могут быть предложены для решения, и поэтому немного разовьём тему:

Линейное однородное уравнение 4-го порядка с постоянными коэффициентами s, r, p, q имеет вид:

$y^{IV} + sy''' + ry'' + py' + qy = 0$, и соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^4 + s\lambda^3 + r\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ всегда имеет **ровно четыре** корня.

Общее решение записывается точно по таким же принципам, как и для однородных диффузов младших порядков. Единственное, прокомментирую тот случай, когда все 4 корня являются кратными. Если они равны нулю, то это в точности тривиальное уравнение $y^{IV} = 0$ с общим решением:

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3, \text{ где } C_1, C_2, C_3, C_4 - \text{const}$$

Если, характеристическое уравнение имеет четыре одинаковых ненулевых корня, например, $\lambda_{1,2,3,4} = 3$, то общее решение запишется так:

$$y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + C_3x^2e^{3x} + C_4x^3e^{3x}, \text{ где } C_1, C_2, C_3, C_4 - \text{const}.$$

Пример 55

Решить уравнения

а) $y^{IV} - 4y = 0$, б) да чего тут мелочиться, сразу 6-го порядка: $y^{VI} - y^V = 0$

Догадайтесь самостоятельно! И да, потренируйтесь в проверке, она, кстати, помогает в сомнительных случаях. Решения и ответы в конце книги.

Линейное НЕоднородное уравнение 3-го и более высоких порядков отличается, как легко догадаться, ненулевой правой частью $f(x)$ и его **алгоритм решения будет точно таким же, как и для уравнений второго порядка**. С той поправкой, при подборе частного решения \tilde{y} и при проверке придётся находить дополнительные производные. Фанаты могут ознакомиться с соответствующей статьёй сайта, но это уже диффуры «третьей категории» важности.

И я вас поздравляю!
Теперь вы сможете решить почти любое ДУ вашей отчётной работы!

Более подробную информацию и дополнительные примеры можно найти в [соответствующем разделе](#) портала mathprofi.ru (*ссылка на карту сайта*), при этом следующим пунктом целесообразно изучить **системы дифференциальных уравнений** (если они есть в вашей учебной программе).

Из прикладной литературы рекомендую следующие книги:

Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям, в Сети есть полный решебник этого задачника;

М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко Дифференциальные уравнения, где разобраны более редкие уравнения и методы решения, которых вообще нет на сайте.

Желаю успехов!

Решения и ответы

Пример 4. Решение: Найдем общее решение. Разделяем переменные:

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = -y \ln y$$

$$\frac{dy}{y \ln y} = -\frac{dx}{x}$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y \ln y} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{d(\ln y)}{\ln y} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|\ln y| = -\ln|x| + \ln|C|$$

Общий интеграл получен, пытаемся его упростить. Упаковываем логарифмы и избавляемся от них:

$$\ln|\ln y| = \ln \frac{1}{|x|} + \ln|C|$$

$$\ln|\ln y| = \ln \left| \frac{C}{x} \right|$$

$$\ln y = \frac{C}{x}$$

Выражаем функцию в явном виде, используя $\ln a = b \Rightarrow a = e^b$:

$$y = e^{\frac{C}{x}}, \text{ где } C = \text{const} - \text{общее решение.}$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = e$.

Способ первый, вместо «икса» подставляем 1, вместо «игрека» – «е»:

$$e = e^{\frac{C}{1}}$$

$$e = e^C \Rightarrow C = 1$$

Способ второй:

$$y(1) = e^{\frac{C}{1}} = e^C = e \Rightarrow C = 1$$

Подставляем найденное значение константы $C = 1$ в общее решение.

Ответ: частное решение: $y = e^{\frac{1}{x}}$

Выполним проверку. Сначала проверяем, действительно ли выполняется начальное условие:

$$y(1) = e^{\frac{1}{1}} = e^1 = e - \text{да, начальное условие } y(1) = e \text{ выполнено.}$$

Теперь проверим, удовлетворяет ли вообще частное решение $y = e^{\frac{1}{x}}$ дифференциальному уравнению. Находим производную:

$$y' = (e^{\frac{1}{x}})' = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

Подставим полученное частное решение $y = e^{\frac{1}{x}}$ и найденную производную

$$y' = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \text{ в исходное уравнение } y \ln y + xy' = 0:$$

$$e^{\frac{1}{x}} \cdot \ln e^{\frac{1}{x}} + x \cdot \left(-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\right) = 0$$

$$e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x} - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = 0$$

$$\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = 0$$

$$0 = 0$$

Получено верное равенство, таким образом, решение найдено правильно.

Пример 6. Решение: Данное уравнение допускает разделение переменных. Разделяем переменные и интегрируем:

$$\sqrt{1-x^2} y dy = -\sqrt{3+y^2} dx$$

$$\frac{y dy}{\sqrt{3+y^2}} = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{d(3+y^2)}{2\sqrt{3+y^2}} = -\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sqrt{3+y^2} = -\arcsin x + C$$

Ответ: общий интеграл: $\arcsin x + \sqrt{3+y^2} = C$, где $C = \text{const}$

Примечание: тут можно получить и общее решение:

$$\sqrt{3+y^2} = -\arcsin x + C$$

$$3+y^2 = (C - \arcsin x)^2$$

$$y^2 = (C - \arcsin x)^2 - 3$$

$$y = \pm \sqrt{(C - \arcsin x)^2 - 3}$$

Но, согласно моему третьему техническому совету, делать это нежелательно, поскольку такой ответ смотрится плохо.

Пример 8. Решение: данное ДУ допускает разделение переменных:

$$2 \frac{dy}{dx} \sin y \cdot \cos y \cdot \sin^2 x = -\cos x$$

$$2 \sin y \cdot \cos y dy = -\frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$$

$$\sin 2y dy = -\frac{\cos x dx}{\sin^2 x} \text{ (использовали триг. формулу } 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha \text{)}.$$

Интегрируем:

$$\int \sin 2y dy = -\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$$

$$\frac{1}{2} \int \sin 2y d(2y) = -\int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x}$$

$$\text{Общий интеграл: } -\frac{1}{2} \cos 2y = \frac{1}{\sin x} + C$$

Найдем частное решение (частный интеграл), соответствующий заданному начальному условию $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Подставляем в общий интеграл $x = \frac{\pi}{2}$ и $y = 0$:

$$-\frac{1}{2} \cos 0 = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}} + C$$

$$-\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{1} + C$$

$$-\frac{1}{2} = 1 + C \Rightarrow C = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{1}{2} \cos 2y = \frac{1}{\sin x} - \frac{3}{2}$$

Пример 9.

а) Решение: данное уравнение допускает разделение переменных:

$$(1 + e^x) y dy = e^x dx$$

$$\int y e^{-y} dy = \int \frac{dx}{1 + e^x}$$

Левую часть **интегрируем по частям:**

$$u = y \Rightarrow du = dy$$

$$dv = e^{-y} dy \Rightarrow v = -e^{-y}$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

В интеграле правой части **проведем замену:**

$$t = 1 + e^x \Rightarrow e^x = t - 1$$

$$dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t-1}$$

Таким образом:

$$-ye^{-y} + \int e^{-y} dy = \int \frac{dt}{t(t-1)}$$

Интеграл правой части можно решить *методом выделения полного квадрата* либо разложить дробь в сумму *методом неопределенных коэффициентов*, но она (дробь) настолько проста, что подбор коэффициентов легко выполнить и устно:

$$-ye^{-y} - e^{-y} = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt$$

$$-e^{-y}(y+1) = \ln|t-1| - \ln|t| + C^*$$

$$\text{Обратная замена: } t = 1 + e^x$$

$$-e^{-y}(y+1) - \ln|1+e^x-1| + \ln|1+e^x| = C^*$$

$$-e^{-y}(y+1) - \ln e^x + \ln(1+e^x) = C^*$$

$$-e^{-y}(y+1) - x + \ln(1+e^x) = C^*$$

Ответ: общий интеграл: $e^{-y}(y+1) + x - \ln(1+e^x) = C$, где $C = \text{const}$

б) Решение: разделяем переменные и интегрируем:

$$y - xy' = 3 + 3x^2y'$$

$$3x^2y' + xy' = y - 3$$

$$(3x^2 + x) \frac{dy}{dx} = y - 3$$

$$\frac{dy}{y-3} = \frac{dx}{3x^2+x}$$

$$\int \frac{dy}{y-3} = \int \frac{dx}{x(3x+1)}$$

Методом *неопределенных коэффициентов* разложим подынтегральную функцию в сумму элементарных дробей:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{3x+1} = \frac{1}{x(3x+1)}$$

$$A(3x+1) + Bx = 1$$

$$\begin{cases} 3A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow B = -3$$

Примечание: интеграл $\int \frac{dx}{3x^2+x}$ можно было также найти *методом выделения полного квадрата*.

$$\ln|y-3| = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{3x+1} \right) dx$$

$$\ln|y-3| = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{d(3x+1)}{3x+1}$$

$$\ln|y-3| = \ln|x| - \ln|3x+1| + \ln|C|$$

$$\ln|y-3| = \ln \left| \frac{Cx}{3x+1} \right|$$

$$y-3 = \frac{Cx}{3x+1}$$

Ответ: общее решение: $y = \frac{Cx}{3x+1} + 3$, где $C = \text{const}$

Пример 11. Решение: проверим уравнение на однородность, для этого **вместо** x подставим λx , а **вместо** y подставим λy :

$$\lambda xy' - \lambda y = \lambda x \operatorname{tg} \frac{\lambda y}{\lambda x}$$

$$\lambda(xy' - y) = \lambda x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$$

$xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ – в результате получено исходное уравнение, значит, данное ДУ является однородным.

Проведем замену: $y = tx \Rightarrow y' = t'x + t$ – подставим в исходное уравнение и проведём максимальные упрощения:

$$x(t'x + t) - tx = x \operatorname{tg} \frac{tx}{x}$$

$$t'x + t - t = \operatorname{tg} t$$

$$x \frac{dt}{dx} = \frac{\sin t}{\cos t} \text{ (использовали тригонометрическую формулу } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{)}.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{\cos t dt}{\sin t} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{d(\sin t)}{\sin t} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|\sin t| = \ln|x| + \ln|C|$$

Перед обратной заменой результат целесообразно упростить:

$$\ln|\sin t| = \ln|Cx|$$

$$\sin t = Cx$$

Обратная замена $t = \frac{y}{x}$:

$$\sin \frac{y}{x} = Cx$$

Ответ: общий интеграл: $\frac{1}{x} \sin \frac{y}{x} = C$, где $C = \text{const}$

Проверка: дифференцируем ответ:

$$\left(\frac{1}{x} \sin \frac{y}{x} \right)' = (C)'$$

$$\left(\frac{1}{x} \right)' \cdot \sin \frac{y}{x} + \frac{1}{x} \cdot \left(\sin \frac{y}{x} \right)' = 0$$

$$-\frac{1}{x^2} \sin \frac{y}{x} + \frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} \cdot \left(\frac{y}{x} \right)' = 0$$

$$-\frac{1}{x^2} \sin \frac{y}{x} + \frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} \cdot \frac{y'x - y}{x^2} = 0$$

умножаем обе части на x^3 :

$$-x \sin \frac{y}{x} + (y'x - y) \cos \frac{y}{x} = 0$$

и делим на $\cos \frac{y}{x}$:

$$-x \operatorname{tg} \frac{y}{x} + (y'x - y) = 0$$

$xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ – получено исходное ДУ, значит, общий интеграл найден верно.

Примечание: очевидно, что $y = 0$ является решением уравнения, и это решение вошло в общий интеграл $\frac{1}{x} \sin \frac{y}{x} = C$ при нулевом значении константы. Однако мы рисковали его потерять, это произошло в тот момент, когда $\sin t \left(t = \frac{y}{x} \right)$ оказался в знаменателе. Более подробно об этом нюансе можно узнать в следующих примерах.

Пример 14.

а) Решение: данное уравнение является однородным, проведем замену:

$$y = tx \Rightarrow dy = t'x + t$$

$$t^2 x^2 + x^2 (t'x + t) = x \cdot tx (t'x + t)$$

После подстановки проводим максимальные упрощения:

$$t^2 + t'x + t = t'tx + t^2$$

$$t'x + t = t'tx$$

$$t'tx - t'x = t$$

$$(tx - x)t' = t$$

$$x(t - 1)t' = t$$

разделяем переменные:

$$x(t - 1) \frac{dt}{dx} = t$$

$$\frac{(t - 1)dt}{t} = \frac{dx}{x}$$

Контроль потенциально потерянных решений:

$x = 0$ – не является решением уравнения $y^2 + x^2 y' = xy y'$,

а вот $t = \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow y = 0$, очевидно, является.

Интегрируем:

$$\int \left(1 - \frac{1}{t} \right) dt = \int \frac{dx}{x}$$

$$t - \ln|t| = \ln|x| + C$$

и перед обратной заменой записываем уравнение как можно компактнее:

$$t - \ln|t| - \ln|x| = C$$

$$t - (\ln|t| + \ln|x|) = C$$

$$t - \ln|tx| = C$$

Проведём обратную замену $t = \frac{y}{x}$:

$$\frac{y}{x} - \ln\left|\frac{y}{x} \cdot x\right| = C$$

$$\frac{y}{x} - \ln|y| = C$$

Решение $y = 0$ в общий интеграл не вошло, и поэтому его следует дополнительно прописать в **ответе**:

общий интеграл: $\frac{y}{x} - \ln|y| = C$, где $C = \text{const}$, ещё одно решение: $y = 0$.

Выполним проверку:

$$\left(\frac{y}{x} - \ln|y|\right)' = (0)'$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)' - (\ln|y|)' = 0$$

$$\frac{y'x - y}{x^2} - \frac{1}{y} \cdot y' = 0$$

приводим к общему знаменателю:

$$\frac{(y'x - y) \cdot y - y' \cdot x^2}{x^2 y} = 0$$

и умножаем обе части на $x^2 y$:

$$xyy' - y^2 - x^2 y' = 0$$

$y^2 + x^2 y' = xyy'$ – в результате получено исходное дифференциальное уравнение, таким образом, общий интеграл найден верно.

б) Решение: разделим обе части уравнения на dx :

$(x + y)y' + y = 0$, при этом $x = C$ не является решением исходного уравнения, поэтому корней мы точно не потеряем.

Проведём замену $y = tx \Rightarrow y' = t'x + t$ и максимально упростим уравнение:

$$(x + tx)(t'x + t) + tx = 0$$

$$x(1 + t)(t'x + t) + tx = 0$$

$$(1 + t)(t'x + t) + t = 0$$

$$(1 + t)t'x + (1 + t)t + t = 0$$

$$(1 + t)t'x + t + t^2 + t = 0$$

$$(1 + t)t'x + t^2 + 2t = 0$$

Разделяем переменные:

$$(1+t)x \cdot \frac{dt}{dx} = -(t^2 + 2t)$$

$$\frac{(1+t)dt}{t(t+2)} = -\frac{dx}{x}$$

Контроль потенциально потерянных решений:

$$t = 0 \Rightarrow \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$t + 2 = 0 \Rightarrow \frac{y}{x} = -2 \Rightarrow y = -2x$$

Первая функция, очевидно, является решением уравнения $(x+y)y' + y = 0$, проверяем вторую подстановкой $y = -2x$ и её производной $y' = -2$:

$$(x - 2x) \cdot (-2) - 2x = 0$$

$$2x - 2x = 0$$

$0 = 0$ – получено верное равенство, значит, функция $y = -2x$ является решением.

Интегрируем:

$$\int \frac{(1+t)dt}{t^2 + 2t} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + 2t)}{t^2 + 2t} = -\ln|x| + \ln|C^*|$$

$$\frac{1}{2} \ln|t^2 + 2t| = -\ln|x| + \ln|C^*|$$

умножим обе части на 2:

$$\ln|t^2 + 2t| = -2\ln|x| + 2\ln|C^*|$$

переобозначим константу $2\ln|C^*|$ через $\ln|C|$:

$$\ln|t^2 + 2t| = -2\ln|x| + \ln|C|$$

и «упаковываем» логарифмы:

$$\ln|t^2 + 2t| = \ln x^{-2} + \ln|C|$$

$$\ln|t^2 + 2t| = \ln \frac{|C|}{x^2}$$

$$t^2 + 2t = \frac{C}{x^2}$$

Обратная замена: $t = \frac{y}{x}$

$$\frac{y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x} = \frac{C}{x^2}$$

Умножим все слагаемые на x^2 :

$$y^2 + 2xy = C$$

Решения $y = 0$, $y = -2x$ вошли в общий интеграл при нулевом значении константы.

Ответ: общий интеграл: $y^2 + 2xy = C$, где $C = \text{const}$

Проверка: дифференцируем общий интеграл:

$$(y^2 + 2xy)' = (C)'$$

$$(y^2)' + 2(xy)' = 0$$

$$2yy' + 2(y + xy') = 0$$

$$yy' + y + xy' = 0$$

$$(x + y)y' + y = 0$$

$$(x + y)dy + ydx = 0$$

Получено исходное дифференциальное уравнение, значит, решение найдено верно.

Пример 17. Решение: Данное уравнение является линейным неоднородным, проведем замену $y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$:

$$u'v + uv' + uv \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$$

$$u'v + u(v' + v \operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos x}$$

Составим и решим систему:

$$\begin{cases} v' + v \operatorname{tg} x = 0 \\ u'v = \frac{1}{\cos x} \end{cases}$$

Из первого уравнения найдем v :

$$\frac{dv}{dx} = -v \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos x}$$

$$\ln|v| = \ln|\cos x|$$

$v = \cos x$ – подставим во второе уравнение $u'v = \frac{1}{\cos x}$ системы:

$$u' \cdot \cos x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$u = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

Таким образом:

$$y = uv = (\operatorname{tg} x + C) \cdot \cos x = \left(\frac{\sin x}{\cos x} + C \right) \cdot \cos x$$

Ответ: общее решение: $y = C \cos x + \sin x$, где $C = \text{const}$.

Проверка: подставим $y = C \cos x + \sin x$ и $y' = -C \sin x + \cos x$ в левую часть исходного уравнения:

$$\begin{aligned} y' + y \operatorname{tg} x &= -C \sin x + \cos x + (C \cos x + \sin x) \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \\ &= -C \sin x + \cos x + C \sin x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \\ &= \cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

– в результате получена правая часть уравнения, значит, решение найдено верно.

Пример 19. Решение: Данное уравнение является линейным неоднородным, проведём замену $y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$:

$$\begin{aligned} u'v + uv' - \frac{2uv}{x+1} &= (x+1)^3 \\ u'v + \left(v' - \frac{2v}{x+1} \right) u &= (x+1)^3 \end{aligned}$$

Составим и решим систему:

$$\begin{cases} v' - \frac{2v}{x+1} = 0 \\ u'v = (x+1)^3 \end{cases}$$

Из первого уравнения найдем v :

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= \frac{2v}{x+1} \\ \int \frac{dv}{v} &= 2 \int \frac{dx}{x+1} \\ \ln|v| &= 2 \ln|x+1| \end{aligned}$$

$v = (x+1)^2$ – подставим во второе уравнение системы:

$$\begin{aligned} u'(x+1)^2 &= (x+1)^3 \\ \frac{du}{dx} &= (x+1) \\ u &= \int (x+1) dx = \frac{(x+1)^2}{2} + C \end{aligned}$$

Таким образом, общее решение:

$$y = uv = \left[\frac{(x+1)^2}{2} + C \right] \cdot (x+1)^2 = C(x+1)^2 + \frac{(x+1)^4}{2}, \text{ где } C = \text{const}$$

Найдем частное решение, соответствующее заданному начальному условию:

$$y(0) = C + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 0$$

Ответ: $y = \frac{(x+1)^4}{2}$

Пример 21. Решение: Данное уравнение является линейным неоднородным, проведём замену $y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$:

$$x(u'v + uv') + (x+1)uv = 3x^2e^{-x}$$

$$xu'v + xuv' + (x+1)uv = 3x^2e^{-x}$$

(раскрыли только левые скобки!)

$$xu'v + u(xv' + (x+1)v) = 3x^2e^{-x}$$

Составим и решим систему:

$$\begin{cases} xv' + (x+1)v = 0 \\ xu'v = 3x^2e^{-x} \end{cases}.$$

Из первого уравнения найдем v :

$$x \frac{dv}{dx} = -(x+1)v$$

$$\int \frac{dv}{v} = - \int \frac{(x+1)dx}{x}$$

$$\ln|v| = - \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$$

$$\ln|v| = -x - \ln|x|$$

$$v = e^{-x - \ln|x|} = e^{-x} \cdot e^{-\ln|x|} = \frac{1}{x} e^{-x}$$

Примечание: здесь использовано основное логарифмическое тождество:

$$e^{-\ln|x|} = e^{\ln|x|^{-1}} = e^{\ln\left|\frac{1}{|x|}\right|} = \frac{1}{x}$$

Подставим найденную функцию во второе уравнение:

$$xu' \cdot \frac{1}{x} e^{-x} = 3x^2 e^{-x}$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2$$

$$u = 3 \int x^2 dx = x^3 + C$$

Таким образом, общее решение:

$$y = uv = (x^3 + C) \cdot \frac{1}{x} e^{-x} = \left(x^2 + \frac{C}{x}\right) e^{-x}, \text{ где } C = \text{const}$$

Найдем частное, соответствующее заданному начальному условию:

$$y(1) = (1 + C)e^{-1} = \frac{1+C}{e} = 0 \Rightarrow C = -1$$

Ответ: $y = \left(x^2 - \frac{1}{x}\right) e^{-x}$

Пример 23. Решение: представим уравнение в виде $y' + \frac{y}{x+1} = -y^2$.

Данное ДУ является уравнением Бернулли, разделим обе части на y^2 :

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y(x+1)} = -1$$

Проведем замену $\frac{1}{y} = z \Rightarrow z' = -\frac{y'}{y^2} \Rightarrow \frac{y'}{y^2} = -z'$:

$$-z' + \frac{z}{x+1} = -1$$

$$z' - \frac{z}{x+1} = 1$$

Получено линейное неоднородное уравнение, проведем замену:

$$z = uv \Rightarrow z' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x+1} = 1$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{x+1}\right) = 1$$

Составим и решим систему:

$$\begin{cases} v' - \frac{v}{x+1} = 0 \\ u'v = 1 \end{cases}$$

Из первого уравнения найдем v :

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x+1}$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x+1}$$

$$\ln|v| = \ln|x+1|$$

$v = x+1$ – подставим во второе уравнение:

$$u'(x+1) = 1$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x+1}$$

$$u = \int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| + C$$

Таким образом:

$$z = uv = (\ln|x+1| + C) \cdot (x+1)$$

Обратная замена $y = \frac{1}{z}$ и общее решение: $y = \frac{1}{(\ln|x+1| + C) \cdot (x+1)}$, где $C = \text{const}$

Найдем частное решение, соответствующее заданному начальному условию:

$$y(0) = \frac{1}{(0+C) \cdot 1} = \frac{1}{C} = -1 \Rightarrow C = -1$$

Ответ: $y = \frac{1}{(\ln|x+1| - 1) \cdot (x+1)}$

Пример 25. Решение: Данное уравнение является уравнением Бернулли. Разделим обе части на \sqrt{y} :

$$\frac{xy'}{\sqrt{y}} - \frac{4y}{\sqrt{y}} = x^2$$

$$\frac{xy'}{\sqrt{y}} - 4\sqrt{y} = x^2$$

при этом очевидно, что $y = 0$ является решением исходного уравнения.

$$\text{Проведём замену } \sqrt{y} = z \Rightarrow z' = \frac{y'}{2\sqrt{y}} \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{y}} = 2z' :$$

$$2xz' - 4z = x^2$$

Полученное линейное неоднородное уравнение решим методом вариации произвольной постоянной:

1) Найдём общее решение соответствующего линейного однородного уравнения:

$$2xz' - 4z = 0$$

$$xz' - 2z = 0$$

$$x \cdot \frac{dz}{dx} = 2z$$

$$\int \frac{dz}{z} = 2 \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|z| = 2\ln|x| + \ln|\tilde{C}|$$

$$\ln|z| = \ln|\tilde{C}x^2|$$

$$z = \tilde{C}x^2, \text{ где } \tilde{C} = \text{const}$$

2) В неоднородном уравнении $2xz' - 4z = x^2$ проведём замену $z = ux^2 \Rightarrow z' = (ux^2)' = u'x^2 + 2ux$:

$$2x(u'x^2 + 2ux) - 4ux^2 = x^2$$

$$2x^3u' + 4ux^2 - 4ux^2 = x^2$$

$$2x^3u' = x^2$$

$$2xu' = 1$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2x}$$

$$u = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \ln|x| + C$$

$$\text{Таким образом: } z = ux^2 = \left(\frac{1}{2} \ln|x| + C \right) \cdot x^2$$

Обратная замена $z = \sqrt{y}$:

$$\sqrt{y} = \left(\frac{1}{2} \ln|x| + C \right) \cdot x^2$$

$$\frac{\sqrt{y}}{x^2} = \frac{1}{2} \ln|x| + C$$

Ответ: общий интеграл: $\frac{\sqrt{y}}{x^2} - \frac{1}{2} \ln|x| = C$, где $C = \text{const}$, ещё одно решение: $y = 0$

Пример 28. Решение: проверим, является ли данное ДУ уравнением в полных дифференциалах:

$$P = 6y - 3x^2 + 3y^2, \quad Q = 6x + 6xy$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (6y - 3x^2 + 3y^2)'_y = 6 - 0 + 6y = 6 + 6y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (6x + 6xy)'_x = 6 + 6y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \text{ значит, данное уравнение является уравнением в полных}$$

дифференциалах и имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0, \text{ в нашем случае:}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 6y - 3x^2 + 3y^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 6x + 6xy$$

Если $\frac{\partial F}{\partial x} = 6y - 3x^2 + 3y^2$, то:

$$F = \int (6y - 3x^2 + 3y^2) dx = 6xy - x^3 + 3xy^2 + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (6xy - x^3 + 3xy^2 + \varphi(y))'_y = 6x + 6xy + \varphi'_y(y) = 6x + 6xy$$

$$\varphi'_y(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = \int 0 dy = C - \text{подставляем в } F = 6xy - x^3 + 3xy^2 + \varphi(y).$$

Ответ: общий интеграл: $6xy - x^3 + 3xy^2 + C = 0$, где $C = \text{const}$

Проверка. Найдём частные производные:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (6xy - x^3 + 3xy^2 + C)'_x = 6 \cdot 1 \cdot y - 3x^2 + 3 \cdot 1 \cdot y^2 + 0 = 6y - 3x^2 + 3y^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (6xy - x^3 + 3xy^2 + C)'_y = 6x \cdot 1 - 0 + 3x \cdot 2y + 0 = 6x + 6xy$$

и составим дифференциальное уравнение $\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$:

$$(6y - 3x^2 + 3y^2) dx - (6x + 6xy) dy = 0$$

В результате получено исходное ДУ, значит, решение найдено правильно.

Пример 30. Решение: проверим, является ли данное ДУ уравнением в полных дифференциалах:

$$P = \frac{\sin 2x}{y} + x, \quad Q = y - \frac{\sin^2 x}{y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \left(\frac{\sin 2x}{y} + x \right)'_y = -\frac{\sin 2x}{y^2} + 0 = -\frac{\sin 2x}{y^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2} \right)'_x = 0 - \frac{2 \sin x}{y^2} \cdot (\sin x)'_x = -\frac{2 \sin x \cos x}{y^2} = -\frac{\sin 2x}{y^2}$$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, значит, данное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах и имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$$

Способ первый:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\sin 2x}{y} + x \text{ — работаем с этой производной,}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = y - \frac{\sin^2 x}{y^2} \text{ — про эту производную пока забываем.}$$

Так как $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\sin 2x}{y} + x$, то:

$$F = \int \left(\frac{\sin 2x}{y} + x \right) dx = \frac{1}{y} \int \sin 2x dx + \int x dx = -\frac{\cos 2x}{2y} + \frac{x^2}{2} + \varphi(y)$$

Дифференцируем по y и приравняем результат к «забытой» производной:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= \left(-\frac{\cos 2x}{2y} + \frac{x^2}{2} + \varphi(y) \right)'_y = -\frac{\cos 2x}{2} \cdot \left(-\frac{1}{y^2} \right) + 0 + \varphi'_y(y) = \\ &= \frac{\cos 2x}{2y^2} + \varphi'_y(y) = y - \frac{\sin^2 x}{y^2} \end{aligned}$$

Преобразуем правую часть с помощью формулы $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$:

$$\frac{\cos 2x}{2y^2} + \varphi'_y(y) = y - \frac{1 - \cos 2x}{2y^2}$$

$$\frac{\cos 2x}{2y^2} + \varphi'_y(y) = y - \frac{1}{2y^2} + \frac{\cos 2x}{2y^2}$$

$$\varphi'_y(y) = y - \frac{1}{2y^2}$$

Восстанавливаем функцию:

$$\varphi(y) = \int \left(y - \frac{1}{2y^2} \right) dy = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y} + C \text{ — и подставляем её в } F = -\frac{\cos 2x}{2y} + \frac{x^2}{2} + \varphi(y):$$

$$F = -\frac{\cos 2x}{2y} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y} + C = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1 - \cos 2x}{2y} + C = \frac{y^2 + x^2}{2} + \frac{\sin^2 x}{y} + C$$

Ответ: общий интеграл $\frac{y^2 + x^2}{2} + \frac{\sin^2 x}{y} + C = 0$, где $C = \text{const}$

Способ второй:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\sin 2x}{y} + x \text{ — про эту производную пока забываем.}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = y - \frac{\sin^2 x}{y^2} \text{ — будем работать с этой производной.}$$

Если $\frac{\partial F}{\partial y} = y - \frac{\sin^2 x}{y^2}$, то:

$$F = \int \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2} \right) dy = \int y dy - \sin^2 x \int \frac{dy}{y^2} = \frac{y^2}{2} + \frac{\sin^2 x}{y} + \varphi(x)$$

Найдём частную производную по x и приравняем её к «забытой» производной:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left(\frac{y^2}{2} + \frac{\sin^2 x}{y} + \varphi(x) \right)'_x = 0 + \frac{2 \sin x \cos x}{y} + \varphi'_x(x) = \frac{\sin 2x}{y} + \varphi'_x(x) = \frac{\sin 2x}{y} + x$$

Из последнего равенства следует, что:

$$\varphi'_x(x) = x \Rightarrow \varphi(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C \text{ — подставляем в «недостроенную» функцию}$$

$$F = \frac{y^2}{2} + \frac{\sin^2 x}{y} + \varphi(x):$$

$$F = \frac{y^2}{2} + \frac{\sin^2 x}{y} + \frac{x^2}{2} + C = \frac{y^2 + x^2}{2} + \frac{\sin^2 x}{y} + C$$

Ответ: общий интеграл $\frac{y^2 + x^2}{2} + \frac{\sin^2 x}{y} + C = 0$, где $C = \text{const}$.

Вопрос: какой способ проще?

Пример 32. Решение:

а) Дважды интегрируем правую часть:

$$y' = 3 \int dx = 3x + C_1$$

$$y = \int (3x + C_1) dx = \frac{3x^2}{2} + C_1x + C_2$$

Ответ: $y = \frac{3x^2}{2} + C_1x + C_2$, где $C_1, C_2 - const$

б) Преобразуем уравнение: $y'' = \sqrt{x} - \sin 2x$. Данное ДУ имеет вид $y'' = f(x)$.

Дважды интегрируем правую часть:

$$y' = \int (x^{\frac{1}{2}} - \sin 2x) dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \cos 2x + C_1$$

$$y = \int \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \cos 2x + C_1 \right) dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + C_1x + C_2 = \frac{4}{15} \sqrt{x^5} + \frac{1}{4} \sin 2x + C_1x + C_2$$

Ответ: общее решение: $y = \frac{4}{15} \sqrt{x^5} + \frac{1}{4} \sin 2x + C_1x + C_2$, где $C_1, C_2 - const$

в) Трижды интегрируем правую часть:

$$y'' = \int 0 \cdot dx = C_1$$

$$y' = C_1 \int dx = C_1x + C_2$$

$$y = \int (C_1x + C_2) dx = \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3$$

Ответ: общее решение: $y = \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3$, где $C_1, C_2, C_3 - const$

Пример 34. Решение: Преобразуем уравнение: $y''' = \frac{6}{x^3}$

Данное уравнение имеет вид $y''' = f(x)$. Трижды интегрируем правую часть:

$$y'' = 6 \int \frac{dx}{x^3} = 6 \cdot \frac{1}{(-2x^2)} + C_1 = -\frac{3}{x^2} + C_1$$

В соответствии с начальным условием:

$$y''(1) = -3 + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = 4$$

$$y' = \int \left(-\frac{3}{x^2} + 4 \right) dx = \frac{3}{x} + 4x + C_2$$

В соответствии с начальным условием:

$$y'(1) = 3 + 4 + C_2 = 5 \Rightarrow C_2 = -2$$

$$y = \int \left(\frac{3}{x} + 4x - 2 \right) dx = 3 \ln|x| + 2x^2 - 2x + C_3$$

В соответствии с начальным условием:

$$y(1) = 0 + 2 - 2 + C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

Ответ: частное решение: $y = 3 \ln|x| + 2x^2 - 2x$

Пример 36. Решение: В данном уравнении в явном виде не участвуют функция y и первая производная y' . Проведём замену:

$$y'' = z$$

$$\text{Если } y'' = z, \text{ то } y''' = z'$$

Таким образом, уравнение понижено до первого порядка:

$$(1 + \sin x)z' = \cos x \cdot z$$

В результате получено уравнение с разделяющимися переменными, разделяем переменные и интегрируем:

$$(1 + \sin x) \frac{dz}{dx} = \cos x \cdot z$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{\cos x dx}{(1 + \sin x)}$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{d(1 + \sin x)}{(1 + \sin x)}$$

$$\ln|z| = \ln|1 + \sin x| + \ln|C_1|$$

$$\ln|z| = \ln|C_1(1 + \sin x)|$$

$$z = C_1(1 + \sin x)$$

Проведём обратную замену: $z = y''$

$$y'' = C_1(1 + \sin x)$$

Данное уравнение имеет вид: $y'' = f(x)$.

Дважды интегрируем правую часть:

$$y' = \int C_1(1 + \sin x)dx = C_1(x - \cos x) + C_2$$

$$y = \int (C_1(x - \cos x) + C_2)dx = C_1\left(\frac{x^2}{2} - \sin x\right) + C_2x + C_3$$

Ответ: общее решение: $y = C_1\left(\frac{x^2}{2} - \sin x\right) + C_2x + C_3$, где $C_1, C_2, C_3 - \text{const}$

Пример 38. Решение: составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 4\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 4) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4 - \text{различные действительные корни}$$

Ответ: общее решение: $y = C_1 + C_2e^{4x}$, где $C_1, C_2 - \text{const}$

Проверка: найдем производные $y' = (C_1 + C_2e^{4x})' = 0 + 4C_2e^{4x} = 4C_2e^{4x}$,

$y'' = (4C_2e^{4x})' = 16C_2e^{4x}$ и подставим их в левую часть исходного уравнения:

$$y'' - 4y' = 16C_2e^{4x} - 4 \cdot 4C_2e^{4x} = 0 - \text{в результате получена правая часть, таким}$$

образом, общее решение найдено правильно.

Пример 40. Решение: составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda + 1)^2 = 0$$

Получены два кратных действительных корня $\lambda_{1,2} = -1$

Ответ: общее решение: $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$, где $C_1, C_2 - \text{const}$

Пример 42. Решение: Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$D = 16 - 20 = -4$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i - \text{сопряженные комплексные корни}$$

Ответ: общее решение: $y = e^{2x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$, где $C_1, C_2 - \text{const}$

Пример 44. Решение: Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$\lambda_{1,2} = \pm 2i$ – получены сопряженные комплексные корни, поэтому общее решение:

$$y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x, \text{ где } C_1, C_2 - \text{const}$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$y(\pi) = C_1 \sin 2\pi + C_2 \cos 2\pi = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = C_2$, то есть $y(\pi) = C_2 = -1$, (значение константы получилось сразу же).

$$y' = (C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x)' = 2C_1 \cos 2x - 2C_2 \sin 2x$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2C_1 \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) - 2C_2 \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 2C_1 \cos \pi - 2C_2 \sin \pi = 2C_1 \cdot (-1) - 2C_2 \cdot 0 = -2C_1$$

$$\text{То есть } y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2C_1 = -4 \Rightarrow C_1 = 2.$$

Ответ: частное решение: $y = 2\sin 2x - \cos 2x$

Проверка: $y(\pi) = 2\sin 2\pi - \cos 2\pi = 0 - 1 = -1$ – начальное условие выполнено.

$$y' = (2\sin 2x - \cos 2x)' = 4\cos 2x + 2\sin 2x$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\cos \pi + 2\sin \pi = -4 + 0 = -4 - \text{второе начальное условие выполнено.}$$

$$y'' = (4\cos 2x + 2\sin 2x)' = -8\sin 2x + 4\cos 2x$$

Подставим $y = 2\sin 2x - \cos 2x$ и $y'' = -8\sin 2x + 4\cos 2x$ в левую часть исходного уравнения:

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= -8\sin 2x + 4\cos 2x + 4(2\sin 2x - \cos 2x) = \\ &= -8\sin 2x + 4\cos 2x + 8\sin 2x - 4\cos 2x = 0 \end{aligned}$$

Получена правая часть исходного уравнения (ноль).

Таким образом, частное решение найдено верно.

Пример 46. Решение:

а) 1) Найдём общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'' + 2y' + 3y = 0$$

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$$

$$D = 4 - 12 = -8$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}i}{2} = -1 \pm \sqrt{2}i \text{ – получены сопряженные комплексные корни, таким}$$

$$\text{образом: } Y = e^{-x}(C_1 \sin \sqrt{2}x + C_2 \cos \sqrt{2}x)$$

2) Подберём частное решение \tilde{y} неоднородного уравнения. Так как правая часть $f(x) = 4$ неоднородного уравнения является константой, то в качестве первоначального варианта подбора рассматриваем $\tilde{y} = A$, где A – пока ещё неизвестный коэффициент. Поскольку в общем решении $Y = e^{-x}(C_1 \sin \sqrt{2}x + C_2 \cos \sqrt{2}x)$ НЕТ «одинокой» константы, то частное решение следует искать в том же виде $\tilde{y} = A$.

Подставим $\tilde{y} = A$ и очевидные производные $\tilde{y}' = 0$, $\tilde{y}'' = 0$ в левую часть исходного уравнения $y'' + 2y' + 3y = 4$:

$0 + 2 \cdot 0 + 3A = 3A = 4$ – после упрощений приравниваем результат к правой части исходного уравнения. Из последнего равенства следует, что $A = \frac{4}{3}$ – подставляем

найденное значение в «заготовку»: $\tilde{y} = A = \frac{4}{3}$.

Для проверки подставим $\tilde{y} = \frac{4}{3}$ и $\tilde{y}' = \left(\frac{4}{3}\right)' = 0$, $\tilde{y}'' = 0$ в неоднородное уравнение:

$$0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{4}{3} = 4$$

$4 = 4$ – получено верное равенство, т.е. частное решение найдено правильно.

3) Составим общее решение неоднородного уравнения:

$$y = Y + \tilde{y} = e^{-x}(C_1 \sin \sqrt{2}x + C_2 \cos \sqrt{2}x) + \frac{4}{3}$$

Ответ: $y = Y + \tilde{y} = e^{-x}(C_1 \sin \sqrt{2}x + C_2 \cos \sqrt{2}x) + \frac{4}{3}$, где C_1, C_2 – const

б) 1) Найдём общее решение соответствующего однородного уравнения. Берём наш неоднородный диффур $y'' - 4y = 8x^3$ и обнуляем правую часть:

$$y'' - 4y = 0$$

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 4 = 0$$

$$(\lambda + 2)(\lambda - 2) = 0$$

$\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$ – получены различные действительные корни, поэтому общее

решение: $Y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$

2) Найдём частное решение \tilde{y} неоднородного уравнения $y'' - 4y = 8x^3$.

Поскольку в правой части находится многочлен 3-й степени, то в качестве первоначальной версии подбора выдвигаем $\tilde{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, где A, B, C, D – пока ещё неизвестные коэффициенты.

Теперь смотрим на общее решение $Y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$ – в нём нет ни члена $C_* x^3$, ни $C_* x^2$, ни $C_* x$, ни константы C_* . Таким образом, подобных членов нет и домножать \tilde{y} на «икс» не нужно. Ищем частное решение в виде $\tilde{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$.

Найдём первую и вторую производную:

$$\tilde{y}' = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)' = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$$\tilde{y}'' = (3Ax^2 + 2Bx + C)' = 6Ax + 2B$$

Подставим \tilde{y} и \tilde{y}'' в левую часть неоднородного уравнения, раскроем скобки:

$$\begin{aligned}\tilde{y}'' - 4\tilde{y} &= 6Ax + 2B - 4(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = \\ &= 6Ax + 2B - 4Ax^3 - 4Bx^2 - 4Cx - 4D = 8x^3 - \text{и приравняем результат к правой} \\ &\text{части } 8x^3 \text{ исходного уравнения.}\end{aligned}$$

Теперь нужно **приравнять коэффициенты при соответствующих степенях и составить систему линейных уравнений**. В картинках процесс выглядит так:

Уравнения лучше записать в порядке убывания степеней, начиная с коэффициентов при кубах «икс»:

$$\begin{cases} -4A = 8 \\ -4B = 0 \\ 6A - 4C = 0 \\ 2B - 4D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 0 \\ C = -3 \\ D = 0 \end{cases}$$

В данном случае система получилась очень простой, и многие из вас, наверное, справились с ней устно. Подставляем найденные значения A, B, C, D в наш исходный подбор $\tilde{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$:

$$\tilde{y} = -2x^3 + 0 \cdot x^2 - 3x + 0 = -2x^3 - 3x - \text{частное решение неоднородного уравнения:}$$

И сразу выполним **проверку**, найдём:

$$\tilde{y}' = (-2x^3 - 3x)' = -6x^2 - 3$$

$$\tilde{y}'' = (-6x^2 - 3)' = -12x$$

и подставим $\tilde{y} = -2x^3 - 3x$ и $\tilde{y}'' = -12x$ в левую часть неоднородного уравнения $y'' - 4y = 8x^3$:

$$\tilde{y}'' - 4\tilde{y} = -12x - 4(-2x^3 - 3x) = -12x + 8x^3 + 12x = 8x^3 - \text{получена правая часть}$$

исходного уравнения, значит, частное решение $\tilde{y} = -2x^3 - 3x$ найдено правильно.

3) Запишем общее решение неоднородного уравнения:

$$y = Y + \tilde{y} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} - 2x^3 - 3x, \text{ где } C_1, C_2 - \text{const}$$

Ответ: общее решение: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} - 2x^3 - 3x$, где $C_1, C_2 - \text{const}$

Пример 48. Решение: 1) Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'' - 7y' + 12y = 0$$

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$$

$$D = 49 - 48 = 1 \Rightarrow \sqrt{D} = 1$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{2}$$

$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 4$ – получены различные действительные значения, которые удовлетворяют характеристическому уравнению (не забываем проверить!).

$$\text{Таким образом: } Y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$$

2) Выполним подбор частного решения \tilde{y} . Поскольку в правой части исходного уравнения $y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x}$ находится экспонента, умноженная на константу, то в качестве первоначальной версии подбора выдвигаем $\tilde{y} = Ae^{4x}$. Теперь смотрим на общее решение однородного уравнения – в нём уже есть подобный член:

$$Y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$$

Поэтому первоначальную версию следует домножить на «икс» и искать частное решение в виде:

$$\tilde{y} = x \cdot Ae^{4x} = Axe^{4x}, \text{ где } A - \text{пока еще неизвестный коэффициент.}$$

Используя правило $(uv)' = u'v + uv'$ дифференцирования произведения, найдём первую и вторую производную:

$$\tilde{y}' = (Axe^{4x})' = Ae^{4x} + 4Axe^{4x} = (4Ax + A)e^{4x}$$

$$\tilde{y}'' = ((4Ax + A)e^{4x})' = 4Ae^{4x} + 4(4Ax + A)e^{4x} = (16Ax + 8A)e^{4x}$$

Подставим $\tilde{y} = Axe^{4x}$, $\tilde{y}' = (4Ax + A)e^{4x}$ и $\tilde{y}'' = (16Ax + 8A)e^{4x}$ в левую часть исходного уравнения $y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x}$ и проведём максимальные упрощения:

$$\tilde{y}'' - 7\tilde{y}' + 12\tilde{y} = (16Ax + 8A)e^{4x} - 7(4Ax + A)e^{4x} + 12Axe^{4x} =$$

$$= (16Ax + 8A - 28Ax - 7A + 12Ax)e^{4x} = Ae^{4x} = 3e^{4x} - \text{после чего приравняем}$$

результат к правой части исходного уравнения.

Из последнего равенства $Ae^{4x} = 3e^{4x}$ автоматически получаем $A = 3$ – подставляем найденное значение в наш подбор: $\tilde{y} = Axe^{4x} = 3xe^{4x}$ – искомое частное решение.

Быстренько выполним проверку, а именно найдём $\tilde{y}' = 3e^{4x} + 12xe^{4x} = (12x + 3)e^{4x}$, $\tilde{y}'' = 12e^{4x} + 4(12x + 3)e^{4x} = (48x + 24)e^{4x}$ и подставим их вместе с $\tilde{y} = 3xe^{4x}$ в левую часть:

$$\tilde{y}'' - 7\tilde{y}' + 12\tilde{y} = (48x + 24)e^{4x} - 7(12x + 3)e^{4x} + 12 \cdot 3xe^{4x} =$$

$$= (48x + 24 - 84x - 21 + 36x)e^{4x} = 3e^{4x} - \text{в результате получена правая часть}$$

уравнения, что и требовалось проверить.

3) Составляем общее решение неоднородного уравнения:

$$y = Y + \tilde{y} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + 3xe^{4x}, \text{ которое можно было, в принципе, сразу записать в}$$

ответ: общее решение: $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + 3xe^{4x}$, где $C_1, C_2 - \text{const}$

Пример 51. Решение: найдём общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + 2y' = 0$. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0 \text{ — различные действительные корни, поэтому: } Y = C_1 e^{-2x} + C_2$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $\tilde{y} = (Ax^2 + Bx)e^{-2x}$

Примечание: первоначальная версия подбора $\tilde{y} = (Ax + B)e^{-2x} = Axe^{-2x} + Be^{-2x}$ подлежит домножению на x , так как в общем решении Y есть подобный член: $C_1 e^{-2x}$.

Найдём производные:

$$\tilde{y}' = ((Ax^2 + Bx)e^{-2x})' = (2Ax + B)e^{-2x} - 2(Ax^2 + Bx)e^{-2x} = (-2Ax^2 + 2Ax - 2Bx + B)e^{-2x}$$

$$\begin{aligned} \tilde{y}'' &= ((-2Ax^2 + 2Ax - 2Bx + B)e^{-2x})' = (-4Ax + 2A - 2B)e^{-2x} - 2(-2Ax^2 + 2Ax - 2Bx + B)e^{-2x} = \\ &= (-4Ax + 2A - 2B + 4Ax^2 - 4Ax + 4Bx - 2B)e^{-2x} = (4Ax^2 - 8Ax + 4Bx + 2A - 4B)e^{-2x} \end{aligned}$$

и подставим их в левую часть неоднородного уравнения $y'' + 2y' = (4 - 4x)e^{-2x}$:

$$\begin{aligned} \tilde{y}'' + 2\tilde{y}' &= (4Ax^2 - 8Ax + 4Bx + 2A - 4B)e^{-2x} + 2(-2Ax^2 + 2Ax - 2Bx + B)e^{-2x} = \\ &= (4Ax^2 - 8Ax + 4Bx + 2A - 4B - 4Ax^2 + 4Ax - 4Bx + 2B)e^{-2x} = \\ &= (-4Ax + 2A - 2B)e^{-2x} = (4 - 4x)e^{-2x} \text{ — после максимальных упрощений} \end{aligned}$$

приравняем результат к правой части.

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях и решим систему:

$$\begin{cases} -4A = -4 \\ 2A - 2B = 4 \end{cases} \Rightarrow A = 1 \text{ — подставляем во 2-е уравнение: } 2 - 2B = 4 \Rightarrow B = -1$$

$$\text{Таким образом: } \tilde{y} = (Ax^2 + Bx)e^{-2x} = (x^2 - x)e^{-2x}$$

Общее решение неоднородного уравнения:

$$y = Y + \tilde{y} = C_1 e^{-2x} + C_2 + (x^2 - x)e^{-2x}, \text{ где } C_1, C_2 - \text{const}$$

Найдём частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Применяем к общему решению условие $y(0) = 1$:

$$y(0) = C_1 e^0 + C_2 + (0^2 - 0)e^0 = C_1 + C_2 + 0 = C_1 + C_2 = 1$$

Найдём производную:

$$y' = (C_1 e^{-2x} + C_2 + (x^2 - x)e^{-2x})' = -2C_1 e^{-2x} + (2x - 1)e^{-2x} - 2(x^2 - x)e^{-2x}$$

и применим к ней начальное условие $y'(0) = -1$:

$$y'(0) = -2C_1 e^0 + (0 - 1)e^0 - 2 \cdot 0 = -2C_1 - 1 = -1$$

Составим и решим систему:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -2C_1 - 1 = -1 \end{cases}, \text{ откуда следует, что } C_1 = 0, C_2 = 1 \text{ — подставляем найденные}$$

значения в общее решение $y = C_1 e^{-2x} + C_2 + (x^2 - x)e^{-2x}$

Ответ: частное решение: $y = 1 + (x^2 - x)e^{-2x}$

Выполним **проверку**. Проверим выполнение начального условия $y(0) = 1$:

$$y(0) = 1 + (0^2 - 0)e^0 = 1 + 0 = 1 - \text{выполнено.}$$

Найдём производную: $y' = (1 + (x^2 - x)e^{-2x})' = 0 + (2x - 1)e^{-2x} - 2(x^2 - x)e^{-2x} =$
 $= (2x - 1 - 2x^2 + 2x)e^{-2x} = (-2x^2 + 4x - 1)e^{-2x}$ и проверим выполнение начального условия $y'(0) = -1$:

$$y'(0) = (-0 + 0 - 1)e^0 = -1 - \text{выполнено.}$$

Найдём вторую производную:

$$y'' = ((-2x^2 + 4x - 1)e^{-2x})' = (-4x + 4 - 0)e^{-2x} - 2(-2x^2 + 4x - 1)e^{-2x} =$$
$$= (-4x + 4 + 4x^2 - 8x + 2)e^{-2x} = (4x^2 - 12x + 6)e^{-2x} \text{ и подставим её вместе с}$$
$$y' = (-2x^2 + 4x - 1)e^{-2x} \text{ в левую часть исходного уравнения:}$$
$$y'' + 2y' = (4x^2 - 12x + 6)e^{-2x} + 2(-2x^2 + 4x - 1)e^{-2x} =$$
$$= (4x^2 - 12x + 6 - 4x^2 + 8x - 2)e^{-2x} = (4 - 4x)e^{-2x} - \text{в результате получена правая}$$

часть исходного уравнения.

Вывод: задание решено верно.

Пример 53. Решение: найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'' + y = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$\lambda_{1,2} = \pm i$ – характеристическое уравнение имеет сопряженные, чисто мнимые комплексные корни, поэтому: $Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде: $\tilde{y} = Ax \cos x + Bx \sin x$

Примечание: первоначальная версия $\tilde{y} = A \cos x + B \sin x$ подлежит домножению на «икс», поскольку в общем решении Y уже есть подобные члены.

Найдём производные:

$$\tilde{y}' = A \cos x - Ax \sin x + B \sin x + Bx \cos x = (A + Bx) \cos x + (-Ax + B) \sin x$$

$$\tilde{y}'' = B \cos x - (A + Bx) \sin x - A \sin x + (-Ax + B) \cos x = (-Ax + 2B) \cos x + (-Bx - 2A) \sin x$$

Подставим \tilde{y} и \tilde{y}'' в левую часть неоднородного уравнения $y'' + y = 2 \cos x$:

$$\tilde{y}'' + \tilde{y} = (-Ax + 2B) \cos x + (-Bx - 2A) \sin x + Ax \cos x + Bx \sin x =$$

$$= 2B \cos x - 2A \sin x = 2 \cos x - \text{приравниваем результат к правой части.}$$

Приравниваем коэффициенты при соответствующих тригонометрических функциях: $\begin{cases} 2B = 2 \\ -2A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 1 \\ A = 0 \end{cases}$

Примечание: $-2A = 0$ – по той причине, что в правой части отсутствует синус, и формально его можно записать с нулевым коэффициентом: $f(x) = 2 \cos x + 0 \cdot \sin x$

Таким образом: $\tilde{y} = Ax \cos x + Bx \sin x = 0 \cdot x \cos x + 1 \cdot x \sin x = x \sin x$.

Проверка найденного частного решения:

$$\tilde{y}' = (x \sin x)' = \sin x + x \cos x$$

$$\tilde{y}'' = (\sin x + x \cos x)' = \cos x + \cos x - x \sin x = 2 \cos x - x \sin x$$

Подставим $\tilde{y} = x \sin x$ и $\tilde{y}'' = 2 \cos x - x \sin x$ в левую часть исходного уравнения $y'' + y = 2 \cos x$:

$\tilde{y}'' + \tilde{y} = 2 \cos x - x \sin x + x \sin x = 2 \cos x$ – в результате получена правая часть, в чём и требовалось убедиться.

Составим общее решение неоднородного уравнения:

$$y = Y + \tilde{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x$$

Ответ: общее решение: $y = C_1 \cos x + (x + C_2) \sin x$, где $C_1, C_2 - \text{const}$

Пример 55. Решение:

а) составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 - 4 = 0$$

$$(\lambda^2)^2 - 2^2 = 0$$

$$(\lambda^2 - 2)(\lambda^2 + 2) = 0$$

$$(\lambda + \sqrt{2})(\lambda - \sqrt{2})(\lambda^2 + 2) = 0$$

$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, $\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{2}i$ – получены два различных действительных корня и два сопряженных комплексных корня.

Ответ: общее решение

$$y = C_1 e^{-\sqrt{2}x} + C_2 e^{\sqrt{2}x} + C_3 \cos(\sqrt{2}x) + C_4 \sin(\sqrt{2}x), \text{ где } C_1, C_2, C_3, C_4 - \text{const}$$

б) Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^6 - \lambda^5 = 0$$

$$\lambda^5 (\lambda - 1) = 0$$

$\lambda_{1,2,3,4,5} = 0$, $\lambda_6 = 1$ – получены пять кратных нулевых корней и действительный корень $\lambda_6 = 1$

Ответ: общее решение

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 x^4 + C_6 e^x, \text{ где } C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 - \text{const}$$