

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО

Навчально-науковий інститут електричної інженерії та інформаційних технологій
 Кафедра комп'ютерної інженерії та електроніки

ЗВІТ З ПРАКТИЧНИХ РОБІТ

з навчальної дисципліни
**«ІМОВІРНІСНО-СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ ІНФОРМАЦІЙНИХ
ТЕХНОЛОГІЙ»**
(Збірник прикладів розв'язування задач)

Виконавець:
Студент гр. КН-24-1
Федоренко В.О.

Викладач:
Сидоренко В.М.

Практична робота № 7

Тема: Найпростіший потік подій. Елементи теорії СМО. Ланцюги Маркова.

Мета: набути практичних навичок у розв'язанні задач щодо випадкових процесів, СМО та ланцюгів Маркова.

Хід роботи

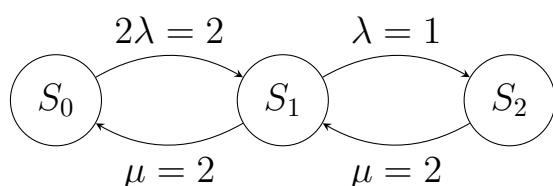
Завдання 1

Побудувати граф станів СМО « n -клієнтів – Web-сервер» (система M/M/1) і систему рівнянь Колмогорова для $n = 2$, $\lambda = 1$, $\mu = 2$. Знайти P_{zan} , P_0 , A , w , T_{obs} , T_{vidg} .

Розв'язання: Розглядаємо замкнену СМО з обмеженою кількістю джерел (клієнтів) $n = 2$. Інтенсивність надходження заявок залежить від стану системи: $\lambda_k = (n - k)\lambda$.

- Стан S_0 : в системі 0 заявок. $\lambda_0 = 2\lambda = 2$.
- Стан S_1 : в системі 1 заявка. $\lambda_1 = 1\lambda = 1$. $\mu = 2$.
- Стан S_2 : в системі 2 заявки. $\lambda_2 = 0$. $\mu = 2$.

1. Граф станів:



2. Система рівнянь Колмогорова:

$$\begin{cases} 0 = -2p_0 + 2p_1 \\ 0 = 2p_0 - (1 + 2)p_1 + 2p_2 \\ 0 = 1p_1 - 2p_2 \\ p_0 + p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

3. Розрахунок ймовірностей: З першого рівняння: $2p_0 = 2p_1 \Rightarrow p_1 = p_0$. З третього рівняння: $p_1 = 2p_2 \Rightarrow p_2 = 0.5p_1 = 0.5p_0$. Підставимо в умову нормування:

$$p_0 + p_0 + 0.5p_0 = 1 \Rightarrow 2.5p_0 = 1 \Rightarrow p_0 = \frac{1}{2.5} = 0.4$$

$$p_1 = 0.4, \quad p_2 = 0.2$$

4. Показники ефективності:

- Ймовірність простою каналу: $P_0 = 0.4$.
- Ймовірність зайнятості каналу: $P_{zam} = 1 - P_0 = 0.6$.
- Абсолютна пропускна здатність: $A = \mu \cdot P_{zam} = 2 \cdot 0.6 = 1.2$ (заяв/од.часу).
- Середнє число заявок у системі: $L = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 = 0.4 + 0.4 = 0.8$.
- Середній час перебування в системі (відгуку): $T_{vidg} = L/A = 0.8/1.2 \approx 0.67$ од. часу.
- Середній час обслуговування: $T_{obs} = 1/\mu = 1/2 = 0.5$.
- Середній час очікування в черзі: $w = T_{vidg} - T_{obs} = 0.67 - 0.5 = 0.17$.

Завдання 2

Задано матрицю переходу $P_1 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю переходу P_2 .

Розв'язання: Матриця переходу за два кроки P_2 дорівнює квадрату матриці P_1 :

$$P_2 = P_1 \times P_1 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Обчислимо елементи:

$$1. \quad p_{11} = 0.4 \cdot 0.4 + 0.6 \cdot 0.3 = 0.16 + 0.18 = 0.34$$

$$2. \quad p_{12} = 0.4 \cdot 0.6 + 0.6 \cdot 0.7 = 0.24 + 0.42 = 0.66$$

$$3. \ p_{21} = 0.3 \cdot 0.4 + 0.7 \cdot 0.3 = 0.12 + 0.21 = 0.33$$

$$4. \ p_{22} = 0.3 \cdot 0.6 + 0.7 \cdot 0.7 = 0.18 + 0.49 = 0.67$$

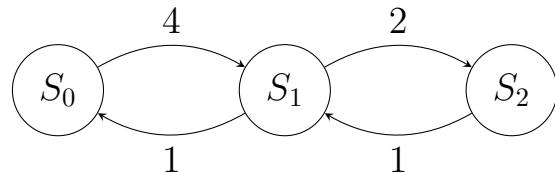
$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.34 & 0.66 \\ 0.33 & 0.67 \end{pmatrix}$$

Завдання 3

Побудувати граф станів СМО « n -клієнтів – Web-сервер» та систему рівнянь для $n = 2$, $\lambda = 2$, $\mu = 1$. Знайти ймовірності станів, P_{zan} , P_0 , A , w , T_{obs} , T_{vidg} .

Розв'язання: Аналогічно завданню 1, маємо $n = 2$ джерела. $\lambda_0 = 2\lambda = 4$, $\lambda_1 = \lambda = 2$. $\mu = 1$.

1. Граф станів:



2. Розрахунок ймовірностей:

$$p_1 = \frac{4}{1} p_0 = 4p_0$$

$$p_2 = \frac{2}{1} p_1 = 2(4p_0) = 8p_0$$

Умова нормування: $p_0 + 4p_0 + 8p_0 = 1 \Rightarrow 13p_0 = 1$.

$$p_0 = \frac{1}{13} \approx 0.077$$

$$p_1 = \frac{4}{13} \approx 0.308$$

$$p_2 = \frac{8}{13} \approx 0.615$$

3. Показники:

- $P_0 = 0.077$.
- $P_{zan} = 1 - p_0 = 0.923$.

- $A = \mu \cdot P_{zan} = 1 \cdot 0.923 = 0.923.$
- $L = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 = 0.308 + 1.23 = 1.538.$
- $T_{vidg} = L/A = 1.538/0.923 \approx 1.67.$
- $T_{obs} = 1/\mu = 1.$
- $w = T_{vidg} - T_{obs} = 1.67 - 1 = 0.67.$

Завдання 4

Задано матрицю переходу $P_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю переходу P_2 .

Розв'язання:

$$P_2 = P_1^2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

1. $p_{11} = 0.5 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.2 = 0.25 + 0.10 = 0.35$
2. $p_{12} = 0.5 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.8 = 0.25 + 0.40 = 0.65$
3. $p_{21} = 0.2 \cdot 0.5 + 0.8 \cdot 0.2 = 0.10 + 0.16 = 0.26$
4. $p_{22} = 0.2 \cdot 0.5 + 0.8 \cdot 0.8 = 0.10 + 0.64 = 0.74$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.35 & 0.65 \\ 0.26 & 0.74 \end{pmatrix}$$

Завдання 5

Побудувати граф станів СМО та систему рівнянь для $n = 4$, $\lambda = 1$, $\mu = 1$.
Знайти показники.

Розв'язання: Система з $n = 4$ клієнтами. $\lambda_k = (4 - k) \cdot 1$, $\mu = 1$. Стани S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 . Коефіцієнти переходу вперед: 4, 3, 2, 1. Коефіцієнт назад завжди 1.

1. Граф станів (схематично): $S_0 \xrightarrow{4} S_1 \xrightarrow{3} S_2 \xrightarrow{2} S_3 \xrightarrow{1} S_4$, зворотні стрілки всі $\mu = 1$.

2. Ймовірності:

$$p_1 = \frac{4}{1} p_0 = 4p_0$$

$$p_2 = \frac{3}{1} p_1 = 3(4p_0) = 12p_0$$

$$p_3 = \frac{2}{1} p_2 = 2(12p_0) = 24p_0$$

$$p_4 = \frac{1}{1} p_3 = 1(24p_0) = 24p_0$$

Сума: $p_0(1 + 4 + 12 + 24 + 24) = 65p_0 = 1$.

$$p_0 = \frac{1}{65} \approx 0.015$$

3. Показники:

- $P_0 = 0.015$.
- $P_{zan} = 1 - 0.015 = 0.985$.
- $A = \mu \cdot P_{zan} = 1 \cdot 0.985 = 0.985$.
- $L = \sum k \cdot p_k = p_0(1 \cdot 4 + 2 \cdot 12 + 3 \cdot 24 + 4 \cdot 24) = \frac{1}{65}(4 + 24 + 72 + 96) = \frac{196}{65} \approx 3.015$.
- $T_{vidg} = L/A = 3.015/0.985 \approx 3.06$.
- $T_{obs} = 1$.
- $w = 3.06 - 1 = 2.06$.