МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО

Навчально-науковий інститут електричної інженерії та інформаційних технологій
Кафедра комп'ютерної інженерії та електроніки

ЗВІТ З ПРАКТИЧНИХ РОБІТ

з навчальної дисципліни
«ІМОВІРНІСНО-СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ»
(Збірник прикладів розв'язування задач)

Виконавець:
Студент гр. КН-24-1
Федоренко В.О.

Викладач:
Сидоренко В.М.

Кременчук 2024

Практична робота №1

Тема: Елементи комбінаторики. Класичне визначення ймовірності.

Мета: набути практичних навичок у розв'язанні задач з комбінаторики.

Хід роботи

Задача 1

Умова: Скільки словників потрібно видати, щоб можливо було безпосередньо виконати переклади з будь-якої з п'яти мов: російської, англійської, французької, німецької, італійської – на будь-яку з цих п'яти мов?

Розв'язання: Маємо множину з $n = 5$ мов. Словник являє собою впорядковану пару різних мов (наприклад, Англійська $\to$ Німецька і Німецька $\to$ Англійська — це різні словники). Оскільки порядок має значення, і елементи не повторюються (словника Англійська-Англійська не існує), використовуємо формулу розміщень без повторень A_n^k:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

У нашому випадку $n = 5$, $k = 2$ (пара мов).

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 5 \times 4 = 20.$$

Відповідь: 20 словників.

Задача 5

Умова: Скількома способами можливо розташувати на полиці 7 різних книг, якщо:

а) 2 певні книги повинні стояти поряд;

б) ці дві книги не повинні стояти поряд?

Розв'язання: Загальна кількість перестановок 7 книг без обмежень дорівнює $P_7 = 7!$.

а) Нехай дві певні книги (K_1, K_2) — це один неподільний об'єкт. Тоді ми переставляємо 6 об'єктів (5 інших книг + 1 пара). Кількість таких перестановок $P_6 = 6!$. Однак, усередині пари книги можуть мінятися місцями (K_1K_2 або K_2K_1), тобто $P_2 = 2!$ способів. За правилом множення:

$$N_a = P_6 \times P_2 = 6! \times 2! = 720 \times 2 = 1440.$$

б) Кількість способів, де книги *не* стоять поряд, дорівнює загальній кількості перестановок мінус кількість способів, де вони стоять поряд (знайдено в пункті а).

$$N_b = P_7 - N_a = 7! - 1440 = 5040 - 1440 = 3600.$$

Відповідь: а) 1440 способів; б) 3600 способів.

Задача 7

Умова: Скільки шестизначних чисел можливо створити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, якщо кожне число повинно складатися з 3 парних і 3 непарних цифр, причому жодна цифра не входить у число більше одного разу?

Розв'язання: Доступні цифри:

- Непарні (H): $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ — всього 5 цифр.
- Парні (P): $\{2, 4, 6, 8\}$ — всього 4 цифри.

1. Спочатку оберемо 3 непарні цифри з 5 доступних. Кількість комбінацій:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10.$$

2. Оберемо 3 парні цифри з 4 доступних:

$$C_4^3 = C_4^1 = 4.$$

3. Тепер у нас є набір із 6 обраних цифр. Кількість шестизначних чисел, які можна скласти з цих 6 різних цифр (перестановки):

$$P_6 = 6! = 720.$$

За правилом множення загальна кількість чисел:

$$N = C_5^3 \times C_4^3 \times P_6 = 10 \times 4 \times 720 = 40 \times 720 = 28\,800.$$

Відповідь: 28 800 чисел.

Задача 9*

Умова: Є 1000 доменів, на кожному з яких повинен бути набір з 6-ти блоків контенту, кожен набір повинен відрізнятися 2-ма блоками від будь-якого іншого. Скільки необхідно всього унікальних блоків, щоб задовольнити такій умові?

Розв'язання: Умова "відрізнятися 2-ма блоками"для двох множин A та B, де $|A| = |B| = 6$, фактично означає, що ці набори мають бути просто різними (унікальними).

Найменша відмінність між двома різними наборами однакового розміру полягає в заміні одного елемента: 1 елемент прибираємо, 1 додаємо. Симетрична різниця (кількість блоків, якими вони відрізняються) в такому випадку дорівнює 2. Отже, задача зводиться до пошуку мінімальної кількості унікальних блоків n, з яких можна скласти не менше 1000 унікальних комбінацій по 6 елементів. Шукаємо n, для якого:

$$C_n^6 \geq 1000$$

Перевіримо значення n: 1. Якщо $n = 12$:

$$C_{12}^6 = \frac{12!}{6!6!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{720} = 924.$$

$924 < 1000$ — недостатньо.

2. Якщо $n = 13$:

$$C_{13}^6 = \frac{13!}{6!7!} = \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{720} = 13 \times 11 \times 12 = 1716.$$

$1716 > 1000$ — достатньо.

Відповідь: Необхідно 13 унікальних блоків.

Задача 14

Умова: 8 людей повинні сісти в 2 автомобіля, при цьому в кожному повинно бути щонайменше 3 людини. Скількома способами вони це можуть зробити?

Розв'язання: Загальна кількість способів розподілити 8 різних людей по 2 різних автомобілях (без обмежень) дорівнює $2^8 = 256$ (кожна людина обирає авто №1 або №2).

Віднімемо "заборонені"варіанти, коли в одному з автомобілів менше 3 людей (тобто 0, 1 або 2). Кількість людей в авто №1 позначимо k. Тоді в авто №2 буде $8 - k$. Заборонені варіанти для k: $0, 1, 2$ (тоді в другому авто переповнення: 8, 7, 6) та симетричні $8, 7, 6$ (тоді в першому 0, 1, 2).

Кількість способів обрати k людей для першого авто — C_8^k.

- $k = 0$ (всі в 2-му авто): $C_8^0 = 1$.
- $k = 1$ (1 в 1-му, 7 в 2-му): $C_8^1 = 8$.
- $k = 2$ (2 в 1-му, 6 в 2-му): $C_8^2 = \frac{8 \times 7}{2} = 28$.

Сума заборонених варіантів з одного "боку": $1+8+28 = 37$. Оскільки ситуація симетрична (мало людей може бути як в авто №1, так і в авто №2), множимо на 2:

$$N_{forbidden} = 37 \times 2 = 74.$$

Кількість дозволених способів:

$$N = 2^8 - 74 = 256 - 74 = 182.$$

Відповідь: 182 способами.