МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО**

Навчально-науковий інститут електричної інженерії та інформаційних технологій
Кафедра комп'ютерної інженерії та електроніки

ЗВІТ З ПРАКТИЧНИХ РОБІТ

з навчальної дисципліни
«ІМОВІРНІСНО-СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ»
(Збірник прикладів розв'язування задач)

Виконавець:
Студент гр. КН-24-1
Федоренко В.О.

Викладач:
Сидоренко В.М.

Кременчук 2025

Мета роботи

Набути практичних навичок у розв'язанні задач на знаходження законів розподілу та числових характеристик дискретних та неперервних випадкових величин.

Завдання 1 (Біноміальний розподіл)

Умова: У мішень виконується 4 незалежних постріли з ймовірністю влучення при кожному пострілі $p = 0.8$. Необхідно знайти закон розподілу ДВВ X (кількість влучень), виразити функції розподілу та щільності (через δ і H), побудувати графіки та знайти числові характеристики.

Розв'язання

Маємо $n = 4$, $p = 0.8$, $q = 1 - p = 0.2$. Випадкова величина X може приймати значення: 0, 1, 2, 3, 4. Ймовірності обчислюємо за формулою Бернуллі: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

- $P(X = 0) = C_4^0 (0.8)^0 (0.2)^4 = 1 \cdot 1 \cdot 0.0016 = 0.0016$
- $P(X = 1) = C_4^1 (0.8)^1 (0.2)^3 = 4 \cdot 0.8 \cdot 0.008 = 0.0256$
- $P(X = 2) = C_4^2 (0.8)^2 (0.2)^2 = 6 \cdot 0.64 \cdot 0.04 = 0.1536$
- $P(X = 3) = C_4^3 (0.8)^3 (0.2)^1 = 4 \cdot 0.512 \cdot 0.2 = 0.4096$
- $P(X = 4) = C_4^4 (0.8)^4 (0.2)^0 = 1 \cdot 0.4096 \cdot 1 = 0.4096$

Перевірка: $0.0016 + 0.0256 + 0.1536 + 0.4096 + 0.4096 = 1$.

1) Закон розподілу (таблиця):

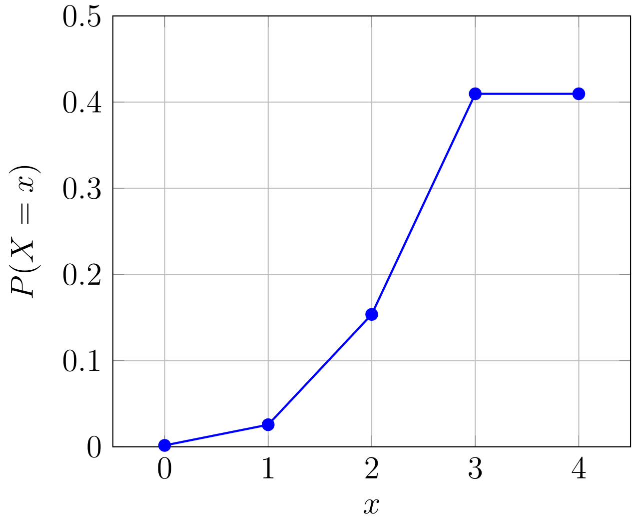
x_i	0	1	2	3	4
p_i	0.0016	0.0256	0.1536	0.4096	0.4096

2) Функція щільності та розподілу (Хевісайд та Дірак):

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \delta(x - x_i) = 0.0016\delta(x) + 0.0256\delta(x-1) + \cdots + 0.4096\delta(x-4)$$

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i H(x - x_i)$$

3) Графік (Багатокутник розподілу):



4) Ймовірність подій:

$$P(1 \le X \le 3) = P(1) + P(2) + P(3) = 0.0256 + 0.1536 + 0.4096 = 0.5888$$

$$P(X > 3) = P(4) = 0.4096$$

5) Числові характеристики:

- Математичне сподівання: $M(X) = np = 4 \cdot 0.8 = 3.2$
- Дисперсія: $D(X) = npq = 4 \cdot 0.8 \cdot 0.2 = 0.64$
- Середнє квадратичне відхилення: $\sigma(X) = \sqrt{0.64} = 0.8$
- Асиметрія: $A = \frac{q-p}{\sqrt{npq}} = \frac{0.2-0.8}{0.8} = -0.75$
- Ексцес: $E = \frac{1-6pq}{npq} = \frac{1-6(0.16)}{0.64} = \frac{0.04}{0.64} = 0.0625$

Завдання 2 (Геометричний розподіл з обмеженням)

Умова: $p = 0.7$ — влучення. Стріляємо до першого влучення або до 4 пострілів. X — кількість промахів. Необхідно знайти закон розподілу, функції щільності та розподілу, побудувати графіки та знайти асиметрію та ексцес.

Розв'язання

$p = 0.7$ (влучення), $q = 0.3$ (промах). Можливі значення X (промахів):

- $X = 0$: Влучив з 1-го разу. $P(0) = 0.7$
- $X = 1$: Промах, Влучив. $P(1) = 0.3 \cdot 0.7 = 0.21$
- $X = 2$: Промах, Промах, Влучив. $P(2) = 0.3^2 \cdot 0.7 = 0.063$
- $X = 3$: 3 Промахи, Влучив. $P(3) = 0.3^3 \cdot 0.7 = 0.0189$
- $X = 4$: 4 Промахи (набої скінчились). $P(4) = 0.3^4 = 0.0081$

Перевірка суми: $0.7 + 0.21 + 0.063 + 0.0189 + 0.0081 = 1$.

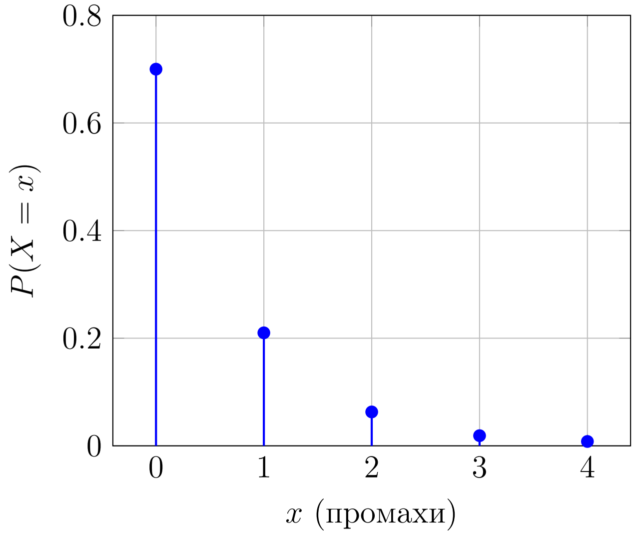
1) Закон розподілу:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0.7	0.21	0.063	0.0189	0.0081

2) Функція щільності:

$$f(x) = 0.7\delta(x) + 0.21\delta(x-1) + 0.063\delta(x-2) + 0.0189\delta(x-3) + 0.0081\delta(x-4)$$

3) Графік:



4) Асиметрія та ексцес (наближено через моменти):

$$M(X) = \sum x_i p_i = 0 \cdot 0.7 + 1 \cdot 0.21 + 2 \cdot 0.063 + 3 \cdot 0.0189 + 4 \cdot 0.0081 = 0.4251$$

$$M(X^2) = \sum x_i^2 p_i = 0 \cdot 0.7 + 1 \cdot 0.21 + 4 \cdot 0.063 + 9 \cdot 0.0189 + 16 \cdot 0.0081 = 0.7617$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 0.7617 - (0.4251)^2 = 0.7617 - 0.1807 = 0.581$$

Центральні моменти 3 та 4 порядку обчислюються за формулами $\mu_k = \sum (x_i - M(X))^k p_i$. Звідси знаходяться $A = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$ та $E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$.

Завдання 3 (Розподіл Коші)

Умова: НВВ X має розподіл Коші з функцією щільності $f(x) = \frac{c}{1+x^2}$. Знайти константу c, функцію розподілу $F(x)$ та ймовірність події $-1 \le X \le 1$.

Розв'язання

1) Знаходження константи c: З умови нормування $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{1+x^2} dx = c \cdot \arctan(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = c\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = c\pi = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\pi}$$

Отже, $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

2) Функція розподілу $F(x)$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi(1+t^2)} dt = \frac{1}{\pi}\arctan(t)\Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}\left(\arctan(x) - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2}$$

3) Ймовірність $P(-1 \le X \le 1)$**:**

$$P(-1 \le X \le 1) = F(1) - F(-1) = \left(\frac{1}{\pi}\arctan(1) + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{\pi}\arctan(-1) + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{4} + 0.5\right) - \left(\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 0.5\right) = (0.25 + 0.5) - (-0.25 + 0.5) = 0.75 - 0.25 = 0.5$$

Завдання 4 (Рівномірний розподіл)

Умова: Параметри генератора псевдовипадкових чисел $random$ за замовчуванням $a = 0, b = 1$. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення та ймовірність $P(X > 0.5)$.

Розв'язання

Для рівномірного розподілу на відрізку $[a, b]$ числові характеристики обчислюються за формулами:

- Математичне сподівання: $M(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{0+1}{2} = 0.5$
- Дисперсія: $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12} \approx 0.0833$
- Середнє квадратичне відхилення: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0.2887$

Ймовірність потрапляння в інтервал для рівномірного розподілу: $P(x_1 < X < x_2) = \frac{x_2 - x_1}{b-a}$.

$$P(X > 0.5) = P(0.5 < X \le 1) = \frac{1 - 0.5}{1 - 0} = \frac{0.5}{1} = 0.5$$

Завдання 5 (Нормальний розподіл)

Умова: Довжина деталі X має нормальний розподіл з $\mu = 50$ мм. Фактична довжина виготовлених деталей не менше 32 та не більше 68 мм. Знайти ймовірність того, що довжина деталі: а) більше 55 мм; б) менше 40 мм.

Розв'язання

Математичне сподівання $\mu = 50$. Фактичний діапазон значень $[32, 68]$ симетричний відносно μ ($50 - 18 = 32$, $50 + 18 = 68$). Згідно з правилом трьох сигм, практично всі значення нормальної випадкової величини лежать в інтервалі $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$. Приймемо заданий діапазон за цей інтервал:

$$3\sigma = 68 - 50 = 18 \Rightarrow \sigma = \frac{18}{3} = 6 \text{ мм}$$

Ймовірність потрапляння нормальної величини в інтервал обчислюється через функцію Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - \mu}{\sigma}\right)$$

а) Ймовірність $P(X > 55)$: Це ймовірність потрапляння в інтервал $(55, +\infty)$.

$$P(X > 55) = \Phi\left(\frac{+\infty - 50}{6}\right) - \Phi\left(\frac{55 - 50}{6}\right) = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{5}{6}\right)$$

$\Phi(+\infty) = 0.5$. $\frac{5}{6} \approx 0.833$. За таблицею значень функції Лапласа $\Phi(0.83) \approx 0.2967$.

$$P(X > 55) = 0.5 - 0.2967 = 0.2033$$

б) Ймовірність $P(X < 40)$: Це ймовірність потрапляння в інтервал $(-\infty, 40)$.

$$P(X < 40) = \Phi\left(\frac{40 - 50}{6}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty - 50}{6}\right) = \Phi\left(-\frac{10}{6}\right) - \Phi(-\infty)$$

Функція Лапласа непарна, тому $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, а $\Phi(-\infty) = -0.5$. $\frac{10}{6} \approx 1.667$.

$$P(X < 40) = -\Phi(1.67) - (-0.5) = 0.5 - \Phi(1.67)$$

За таблицею $\Phi(1.67) \approx 0.4525$.

$$P(X < 40) = 0.5 - 0.4525 = 0.0475$$