МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО

Навчально-науковий інститут електричної інженерії та інформаційних технологій
Кафедра комп'ютерної інженерії та електроніки

ЗВІТ З ПРАКТИЧНИХ РОБІТ

з навчальної дисципліни
«ІМОВІРНІСНО-СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ»
(Збірник прикладів розв'язування задач)

Виконавець:
Студент гр. КН-24-1
Федоренко В.О.

Викладач:
Сидоренко В.М.

Кременчук 2025

Практична робота № 6

Тема: Закони розподілу функцій випадкових величин. Композиція законів розподілу. Розподіл екстремальних значень.

Мета: набути практичних навичок у розв'язанні задач з обчислення функцій від випадкових величин, їх законів розподілу та числових характеристик.

Розв'язання завдань

Завдання 1. Шляхом експериментальних досліджень встановлено, що похибка, зумовлена шумом аналогових елементів АЦП КСК, — випадкова величина X, що має нормальний закон розподілу з параметрами $\mu = 0, \sigma = 1$, а похибка квантування — випадкова величина Y, що має рівномірний розподіл з параметрами $a = 0, b = 1$. Знайти закон розподілу сумарної похибки $Z = X + Y$.

Розв'язання: Щільності розподілу незалежних величин мають вигляд:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1, & y \in [0; 1], \\ 0, & y \notin [0; 1]. \end{cases}$$

Закон розподілу суми $Z = X + Y$ визначається згорткою:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z - y) f_Y(y)\, dy$$

Оскільки $f_Y(y) \neq 0$ лише на проміжку $[0; 1]$, межі інтегрування будуть від 0 до 1:

$$f_Z(z) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-y)^2}{2}} \cdot 1\, dy$$

Зробимо заміну змінної $t = z - y$, тоді $dy = -dt$. Якщо $y = 0 \Rightarrow t = z$. Якщо $y = 1 \Rightarrow t = z - 1$.

$$f_Z(z) = -\int_z^{z-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \int_{z-1}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

Цей інтеграл виражається через функцію Лапласа $\Phi(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$:

$$f_Z(z) = \Phi(z) - \Phi(z - 1)$$

Відповідь: $f_Z(z) = \Phi(z) - \Phi(z - 1)$, де $\Phi(x)$ — функція Лапласа.

Завдання 2. Випадкові величини X та Y незалежні та обидві мають рівномірний закон розподілу з параметрами $a = 0, b = 2$. Знайти функції розподілу та щільності розподілу випадкової величини $Z = X + Y$.

Розв'язання: Щільності розподілу X та Y:

$$f(x) = f(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x, y \in [0; 2], \\ 0, & \text{інші значення.} \end{cases}$$

Сума двох рівномірних розподілів з однаковими параметрами дає «трикутний» розподіл (закон Сімпсона) на проміжку $[a + a; b + b]$, тобто $[0; 4]$.

Знайдемо щільність $f_Z(z)$ графічним методом або через згортку. Графік щільності — рівнобедрений трикутник з основою від 0 до 4 і висотою h. Площа трикутника дорівнює 1: $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{2}$.

Аналітичний вираз щільності $f_Z(z)$:

1. При $z \leq 0$: $f_Z(z) = 0$.
2. При $0 < z \leq 2$: $f_Z(z) = \int_0^z \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\, dy = \frac{z}{4}$.
3. При $2 < z \leq 4$: $f_Z(z) = \int_{z-2}^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\, dy = \frac{1}{4}(2 - (z - 2)) = \frac{4-z}{4}$.
4. При $z > 4$: $f_Z(z) = 0$.

Функція розподілу $F_Z(z) = \int_{-\infty}^z f_Z(t) dt$:

- $z \leq 0 : F_Z(z) = 0$.
- $0 < z \leq 2 : F_Z(z) = \int_0^z \frac{t}{4} dt = \frac{z^2}{8}$.
- $2 < z \leq 4 : F_Z(z) = \frac{1}{2} + \int_2^z \frac{4-t}{4} dt = \frac{1}{2} + \left(t - \frac{t^2}{8}\right)\Big|_2^z = 1 - \frac{(4-z)^2}{8}$.
- $z > 4 : F_Z(z) = 1$.

Відповідь:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{z}{4}, & 0 < z \leq 2 \\ \frac{4-z}{4}, & 2 < z \leq 4 \\ 0, & z \notin (0; 4] \end{cases}, \quad F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ \frac{z^2}{8}, & 0 < z \leq 2 \\ 1 - \frac{(4-z)^2}{8}, & 2 < z \leq 4 \\ 1, & z > 4 \end{cases}$$

Завдання 3. Час між запитами до серверу комп'ютерної мережі є випадковою величиною X, що має експоненціальний закон розподілу з параметром $\lambda = 10$. З метою дослідження степені використання серверу необхідно встановити закон розподілу максимумів випадкової величини X, тобто деякої випадкової величини $Z = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Примітка: В умові не вказано обсяг вибірки n. Наводимо розв'язок для загального випадку n.

Розв'язання: Функція розподілу X має вигляд: $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ при $x \geq 0$, де $\lambda = 10$. Нехай $Z = \max(X_1, \dots, X_n)$, де X_i незалежні. Функція розподілу максимуму:

$$F_Z(z) = P(Z < z) = P(X_1 < z, \dots, X_n < z)$$

Оскільки величини незалежні:

$$F_Z(z) = P(X_1 < z) \cdot \dots \cdot P(X_n < z) = [F_X(z)]^n$$

Підставимо $F_X(z)$:

$$F_Z(z) = \begin{cases} (1 - e^{-10z})^n, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

Щільність розподілу $f_Z(z) = F'_Z(z)$:

$$f_Z(z) = n(1 - e^{-10z})^{n-1} \cdot (1 - e^{-10z})' = n(1 - e^{-10z})^{n-1} \cdot 10e^{-10z}$$

Відповідь: $F_Z(z) = (1 - e^{-10z})^n$ при $z \geq 0$.

Завдання 4. Випадкова величина X має рівномірний розподіл з параметрами $a = 0, b = \pi$. Знайти функції розподілу та щільності розподілу випадкової величини $Z = \sin(X)$, обчислити математичне сподівання $M(Z)$ та дисперсію $D(Z)$.

Розв'язання: Щільність X: $f_X(x) = \frac{1}{\pi}$ при $x \in [0; \pi]$. Функція $z = \sin x$ на проміжку $[0; \pi]$ відображає його в $[0; 1]$, але не є монотонною (симетрична відносно $\pi/2$). Функція розподілу $F_Z(z) = P(\sin X < z)$. Для $z \in (0; 1)$: нерівність $\sin x < z$ на інтервалі $[0; \pi]$ виконується, коли $x \in [0; \arcsin z) \cup (\pi - \arcsin z; \pi]$. Довжина цих інтервалів: $\arcsin z + (\pi - (\pi - \arcsin z)) = 2 \arcsin z$.

Тоді $F_Z(z) = \int_{\text{область}} \frac{1}{\pi} dx = \frac{2 \arcsin z}{\pi}$.

Щільність $f_Z(z) = F'_Z(z)$:

$$f_Z(z) = \left(\frac{2}{\pi} \arcsin z \right)' = \frac{2}{\pi \sqrt{1 - z^2}}, \quad z \in (0; 1).$$

Числові характеристики:

$$M(Z) = M(\sin X) = \int_0^\pi \sin x \cdot \frac{1}{\pi} \, dx = \frac{1}{\pi} (-\cos x) \Big|_0^\pi = \frac{1}{\pi} (1 - (-1)) = \frac{2}{\pi}.$$

Для дисперсії знайдемо $M(Z^2)$:

$$M(Z^2) = M(\sin^2 X) = \int_0^\pi \sin^2 x \cdot \frac{1}{\pi} \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2\pi} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^\pi = \frac{1}{2\pi} (\pi - 0) = \frac{1}{2}.$$

$$D(Z) = M(Z^2) - (M(Z))^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 = 0,5 - \frac{4}{\pi^2}.$$

Відповідь: $f_Z(z) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-z^2}}, z \in (0;1)$; $M(Z) = \frac{2}{\pi}$; $D(Z) = 0,5 - \frac{4}{\pi^2}$.

Завдання 5. Випадкова величина X має рівномірний розподіл з параметрами $a = 0, b = \pi$. Знайти функції розподілу та щільності розподілу випадкової величини $Z = \cos(X)$, обчислити математичне сподівання $M(Z)$ та дисперсію $D(Z)$.

Розв'язання: Функція $z = \cos x$ на $[0;\pi]$ монотонно спадає від 1 до -1. Обернена функція $x = \arccos z$. Щільність розподілу $f_Z(z)$ для монотонної функції:

$$f_Z(z) = f_X(x(z)) \cdot |x'(z)|$$

$$x'(z) = (\arccos z)' = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad |x'(z)| = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$f_Z(z) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad z \in (-1;1).$$

Це закон арксинуса.

Числові характеристики:

$$M(Z) = M(\cos X) = \int_0^{\pi} \cos x \cdot \frac{1}{\pi}\, dx = \frac{1}{\pi}(\sin x)\Big|_0^{\pi} = 0.$$

$$M(Z^2) = M(\cos^2 X) = \int_0^{\pi} \cos^2 x \cdot \frac{1}{\pi}\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2\pi}(\pi + 0) = \frac{1}{2}.$$

$$D(Z) = M(Z^2) - (M(Z))^2 = \frac{1}{2} - 0 = 0,5.$$

Відповідь: $f_Z(z) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-z^2}}, z \in (-1;1)$; $M(Z) = 0$; $D(Z) = 0,5$.