МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО

Навчально-науковий інститут електричної інженерії та інформаційних технологій
Кафедра комп'ютерної інженерії та електроніки

ЗВІТ З ПРАКТИЧНИХ РОБІТ

з навчальної дисципліни

«ІМОВІРНІСНО-СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ»

(Збірник прикладів розв'язування задач)

Виконавець:
Студент гр. КН-24-1
Федоренко В.О.

Викладач:
Сидоренко В.М.

Кременчук 2024

Практична робота №4

Тема: Схема Бернуллі.

Мета: набути практичних навичок у розв'язанні типових задач в рамках схеми Бернуллі.

Хід роботи

Задача 5

Умова: Яка ймовірність того, що при $n = 1000$ киданнях монети орел випаде рівно $k = 500$ разів?

Розв'язання: Маємо схему Бернуллі з великою кількістю випробувань ($n = 1000$). Ймовірність випадання орла в одному кидку $p = 0,5$, тоді $q = 1 - p = 0,5$. Для обчислення ймовірності $P_n(k)$ при великих n використовуємо локальну теорему Муавра-Лапласа:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \quad \text{де } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Обчислимо параметри:

$$np = 1000 \cdot 0,5 = 500.$$

$$npq = 500 \cdot 0,5 = 250.$$

$$\sqrt{npq} = \sqrt{250} \approx 15,81.$$

Знайдемо аргумент x:

$$x = \frac{500 - 500}{15,81} = 0.$$

За таблицею значень функції Гаусса $\varphi(0) = 0,3989$.

$$P_{1000}(500) \approx \frac{1}{15,81} \cdot 0,3989 \approx 0,0252.$$

Відповідь: $\approx 0,0252$.

Задача 6

Умова: Ймовірність настання події A в кожнім з 900 незалежних випробувань дорівнює $p = 0,8$. Знайдіть імовірність того, що подія A відбудеться: а) 750 разів; б) 710 разів; в) від 710 до 740 разів.

Розв'язання: Дано: $n = 900, p = 0,8, q = 0,2$.

$$np = 900 \cdot 0,8 = 720.$$

$$\sqrt{npq} = \sqrt{900 \cdot 0,8 \cdot 0,2} = \sqrt{144} = 12.$$

а) Рівно 750 разів ($k = 750$): Використовуємо локальну теорему Муавра-Лапласа.

$$x = \frac{750 - 720}{12} = \frac{30}{12} = 2,5.$$

За таблицею $\varphi(2,5) \approx 0,0175$.

$$P_{900}(750) \approx \frac{0,0175}{12} \approx 0,00146.$$

б) Рівно 710 разів ($k = 710$):

$$x = \frac{710 - 720}{12} = \frac{-10}{12} \approx -0,83.$$

Функція $\varphi(x)$ парна, тому $\varphi(-0,83) = \varphi(0,83) \approx 0,2827$.

$$P_{900}(710) \approx \frac{0,2827}{12} \approx 0,0236.$$

в) Від 710 до 740 разів ($710 \leq m \leq 740$): Використовуємо інтегральну теорему Муавра-Лапласа:

$$P(k_1 \leq m \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

$$x_1 = \frac{710 - 720}{12} \approx -0,83; \quad x_2 = \frac{740 - 720}{12} = \frac{20}{12} \approx 1,67.$$

Враховуючи, що функція Лапласа $\Phi(x)$ непарна ($\Phi(-x) = -\Phi(x)$):

$$P \approx \Phi(1,67) - \Phi(-0,83) = \Phi(1,67) + \Phi(0,83).$$

За таблицею: $\Phi(1,67) \approx 0,4525$, $\Phi(0,83) \approx 0,2967$.

$$P \approx 0,4525 + 0,2967 = 0,7492.$$

Відповідь: а) 0,00146; б) 0,0236; в) 0,7492.

Задача 11

Умова: У мережі 20 комп'ютерів. Кожен здійснює запит з ймовірністю $p = 0,3$. а) найімовірніша кількість запитів; б) ймовірність найімовірнішої кількості; в) ймовірність від 3 до 7 запитів; г) ймовірність хоча б одного запиту.

Розв'язання: $n = 20, p = 0,3, q = 0,7$. Оскільки n невелике, використовуємо формулу Бернуллі.

а) Найімовірніша кількість k_0: Визначається з нерівності:

$$np - q \leq k_0 \leq np + p.$$

$$20 \cdot 0,3 - 0,7 \leq k_0 \leq 20 \cdot 0,3 + 0,3.$$

$$6 - 0,7 \leq k_0 \leq 6 + 0,3 \Rightarrow 5,3 \leq k_0 \leq 6,3.$$

Отже, $k_0 = 6$.

б) Ймовірність $P_{20}(6)$:

$$P_{20}(6) = C_{20}^6 p^6 q^{14} = \frac{20!}{6!14!}(0,3)^6(0,7)^{14}.$$

$$C_{20}^6 = 38760.$$

$$P_{20}(6) = 38760 \cdot 0,000729 \cdot 0,006782 \approx 0,1916.$$

в) Ймовірність $P(3 \le k \le 7)$: Це сума ймовірностей для $k = 3, 4, 5, 6, 7$.

$$P(3 \le k \le 7) = P_{20}(3) + P_{20}(4) + P_{20}(5) + P_{20}(6) + P_{20}(7).$$

Обчисливши кожен доданок за формулою Бернуллі: $P(3) \approx 0,0716$, $P(4) \approx 0,1304$, $P(5) \approx 0,1789$, $P(6) \approx 0,1916$, $P(7) \approx 0,1643$.

$$P \approx 0,0716 + 0,1304 + 0,1789 + 0,1916 + 0,1643 = 0,7368.$$

г) Хоча б один запит ($k \ge 1$): Через протилежну подію (жодного запиту, $k = 0$):

$$P(k \ge 1) = 1 - P_{20}(0) = 1 - C_{20}^0(0,3)^0(0,7)^{20} = 1 - 1 \cdot 1 \cdot (0,7)^{20}.$$

$$(0,7)^{20} \approx 0,000798.$$

$$P \approx 1 - 0,000798 = 0,9992.$$

Відповідь: а) 6; б) $\approx 0,1916$; в) $\approx 0,7368$; г) $\approx 0,9992$.

Задача 16

Умова: $p = 0,6$, $n = 400$. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи події відхиляється від p не більше, ніж на $\varepsilon = 0,004$.

Розв'язання: Використовуємо наслідок з інтегральної теореми Муавра-Лапласа:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Обчислимо аргумент функції Лапласа:

$$\sqrt{\frac{n}{pq}} = \sqrt{\frac{400}{0,6 \cdot 0,4}} = \sqrt{\frac{400}{0,24}} = \sqrt{1666,67} \approx 40,82.$$

$$x = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} = 0,004 \cdot 40,82 \approx 0,163.$$

$$P \approx 2\Phi(0,163).$$

За таблицею $\Phi(0,16) \approx 0,0636$.

$$P \approx 2 \cdot 0,0636 = 0,1272.$$

Відповідь: 0,1272.

Задача 21

Умова: $p = 0,6$. Скільки необхідно провести випробувань (n), щоб з ймовірністю $\gamma = 0,99$ відхилення відносної частоти від p було не більше $\varepsilon = 0,001$?

Розв'язання: Використовуємо формулу довірчої ймовірності:

$$2\Phi(t) = \gamma, \quad \text{де } \varepsilon = t\sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

Знайдемо t:

$$2\Phi(t) = 0,99 \Rightarrow \Phi(t) = 0,495.$$

За таблицею значень функції Лапласа цьому значенню відповідає $t \approx 2,58$. Виразимо n з формули точності ε:

$$\varepsilon^2 = t^2\frac{pq}{n} \Rightarrow n = \frac{t^2pq}{\varepsilon^2}.$$

Підставимо значення ($p = 0,6; q = 0,4; \varepsilon = 0,001; t = 2,58$):

$$n = \frac{(2,58)^2 \cdot 0,6 \cdot 0,4}{(0,001)^2} = \frac{6,6564 \cdot 0,24}{0,000001} = \frac{1,597536}{0,000001} \approx 1\,597\,536.$$

Відповідь: Необхідно провести 1 597 536 випробувань.