Основи математичного програмування

Покутний Олександр Олексійович

11 квітня 2018 р.

Задача Евкліда.
1. У даний трикутник ABC вписати паралелограм ADEF найбільшої площі.
2. $4x_1 + 3x_2 \to max(min)$ на множині $x_1^2 + x_2^2 = 1$.
3) $f(x,y) = (x - y^2)(2x - y^2), (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $y = tx$ - довільна пряма.

$$f(x,tx) = x^2(1 - t^2x)(2 - t^2x), \quad f(x,tx) - f(0,0) = f(x,tx) > 0(\text{локально}).$$

уздовж всіх прямих, що проходять через точку $(0,0)$. Однак локального екстремума в $(0,0)$ немає, так як її приріст

$$\Delta f(0,0) = 2x^2 - 3xy^2 + y^4 = (y^2 - \frac{3}{2}x)^2 - \frac{x^2}{4},$$

при $x = 6t^2, y = 3t, t > 0$ та при $x = 0, |y| > 0$ має різні знаки

$$(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad i = \overline{1, n}.$$

Точки з області D, що задовольняють (1), називаються *стаціонарними*.

1

Теорема. *(критерій Сільвестра). Для того, щоб другий диференціал $d^2 f(x_0)$ двічі диференційовної у точці $x_0 \in D$, $D \subset \mathbb{R}^m$, функції $f : D \to \mathbb{R}$ був додатньо визначеною квадратичною формою, необхідно та достатньо, щоб виконувались нерівності $A_j > 0, j = \overline{1, m}$, а для того щоб, цей диференціал був від'ємно визначеною квадратичною формою, необхідно та достатньо, щоб виконувались нерівності $A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0, \ldots$, тобто щоб знаки мінорів A_j строго чергувалися, починаючи з $A_1 < 0$.*

4. Дослідити на екстремум функцію

$$z(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

5. Дослідити на умовний екстремум функцію

$$f(x, y, z) = xy + yz, (x > 0, y > 0, z > 0),$$

якщо

$$x^2 + y^2 = 2, y + z = 2.$$

2

Абсолютні екстремуми. *Нехай* $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ *- неперервна у замкненій області* $\overline{D} \subset \mathbb{R}^m$ *функція. Абсолютним максимумом (мінімумом) функції* f *в* $\overline{D}$ *називають її найбільше (найменше) значення в* $\overline{D}$*.*

6. Знайти екстремум функції $f = x + y + z + t$ за умови $\Phi = xyz - c^4$; область зміни змінних визначається нерівностями $x > 0, y > 0, z > 0, t > 0$.
7. Знайти найменше та найбільше значення функції

$$u = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - (ax^2 + by^2 + cz^2)^2 (a > 0, b > 0, c > 0),$$

за наявності зв'язку:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

тобто на сферичній поверхні.

8. Задача про найвигідніші перерізи проводів в електричній сітці з паралельним включенням. (201,8. Фіхтенгольц).

3

Знайти екстремум функції

$$f(q_1, q_2, ..., q_n) = l_1 q_1 + l_2 q_2 + ... + l_n q_n$$

за умови, що

$$\Phi(q_1, q_2, ..., q_n) = \frac{\rho l_1 J_1}{q_1} + \frac{\rho l_2 J_2}{q_2} + ... + \frac{\rho l_n J_n}{q_n} = e.$$

9. В якості більш складного приклада розглянемо таку задачу: трьохосний еліпсоїд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 (a > b > c)$ перетинається з площиною $lx + my + nz = 0$, що проходить через його центр; треба визначити напівосі отриманого у перерізі еліпса. Іншими словами, треба знайти екстемальні значення функції

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

якщо змінні задовольняють наведеним вище рівняння зв'язку.

10. Знайти найменше та найбільше значення квадратичної форми

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k \quad (a_{ik} = a_{ki})$$

за умови

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1.$$

стор.477 (Фіхтенгольц, 1 том).

11. Знайти мінімум функції $z = \frac{1}{2}(x^n + y^n)$ за умови $x + y = s$.
12. Знайти мінімум функції

$$u = (\sum_{i=1}^{n} a_i^k)^{\frac{1}{k}} (\sum_{i=1}^{n} x_i^{k'})^{\frac{1}{k'}}$$

за умови

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = A.$$