Основи математичного програмування

Покутний Олександр Олексійович

11 квітня 2018 р.

Зміст предмета.

1

Зміст математичного програмування складають теорія та методи розв'язання задач про знаходження екстремумів на множинах, що визначаються лінійними та нелінійними обмеженнями (рівностями та нерівностями) Математичне програмування є одним з розділів науки про дослідження операцій.

Галузі застосування.

2

Задачі математичного програмування знаходять застосування у різних галузях людської діяльності. Розв'язання проблем керування та планування виробничих процесів, при проектуванні та перспективному плануванні, у військовій справі.

Прийняття рішень.

3

Проблема прийняття рішень в дослідженні операцій нероздільно пов'язана з процесом моделювання. Під поняттям, що позначається терміном модель, розуміють спосіб відображати (у тому числі й зображувати) основний зміст досліджуваного об'єкта.

Під терміном *модель*, розуміють спосіб відображати основний зміст досліджуваного об'єкта. Таким чином, модель - це образ об'єкта, що досліджується.

4

Математична модель - це записана у математичних символах абстракція реального явища, таким чином сконструйована, щоб її аналіз давав можливість зануритися у сутність явища.
Математична модель встановлює співвідношення між сукупністю змінних - основними параметрами явища (коли явище кероване - між параметрами керування). Будемо називати математичну модель точною у припущенні, що всі вихідні величини числових параметрів моделі є точними (наприклад, результати спостережень). У цьому сенсі точну модель іноді називають ідеальною. У подальшому будемо припускати існування точного розв'язку математичної задачі, що відповідає точній моделі, тобто існування співвідношення, що відповідає цілі (або цілям) побудови моделі.

5

Перший етап процеса моделювання полягає у побудові якісної моделі, тобто у виділенні факторів, які представляються найбільш важливими, й у встановленні закономірностей, яким вони підпорядковуються.

6

Другий етап — побудова математичної моделі розглянутої проблеми, тобто запис у математичних термінах якісної моделі. Цей етап включає також побудову цільової функції тобто такої якісної характеристики, більшому або меншому значенню якої відповідає краща ситуація з точки зору приймаючого розв'язку.

7

Третій етап - дослідження впливу змінних на значення цільової функції. Цей етап передбачає володіння математичним апаратом для розв'язання задач, що виникають на другому етапі прийняття рішень. Широкий клас керування складають такі екстремальні задачі, в математичних моделях яких умови на змінні задаються рівностями та нерівностями. Теорія та методи розв'язання цих задач якраз і складають зміст математичного програмування.

8

Четвертий етап — співставлення результатів обчислень, отриманих на третьому етапі, з об'єктом, що моделюється, тобто експертна перевірка результатів (критерій практики). Таким чином, на цьому етапі встановлюється степінь адекватності моделі та об'єкта, який моделюється у межах точності вихідної інформації.

Тут можливі два випадки.

9

1-й випадок.
Якщо результати співставлення незадовільні (звичайна ситуація на початковій стадії процеса моделювання), то переходять до другого цикла процеса: уточнюється вхідна інформація про об'єкт, який моделюється і у випадку необхідності уточнюється постановка задачі (перший етап), уточнюється або будується знову математична модель (другий етап), будується відповідна математична задача (третій етап) і, нарешті, знову проводиться співставлення (четвертий етап).

10

2-й випадок.
Якщо результати співставлення задовільні, то модель приймається.
Питання класифікації та специфіки.

Напрямки.

11

У математичному програмуванні можна виділити два напрямки. До першого - власне математичного програмування - відносяться детерміновані задачі - коли вся вихідна інформація є повністю визначеною.
До другого напрямку - так званого стохастичного програмування - відносяться задачі, в яких вихідна інформація містить елементи невизначеності, або коли деякі параметри задачі носять випадковий характер з відомими ймовірнісними характеристиками.

Основні розділи.

12

Традиційно в математичному програмуванні виділяють наступні основні розділи. Лінійне програмування. Цільова функція лінійна, а множина, на якій шукається екстремум цільової функції, задається системою лінійних рівностей та нерівностей. У свою чергу у лінійному програмуванні існують класи задач, структура яких дозволяє створити спеціальні методи їх розв'язання, що вигідно відрізняються від методів розв'язання задач загального характера. Так у лінійному програмуванні з'явився розділ транспортних задач.

13

Нелінійне програмування. Нелінійна цільова функція та обмеження. Нелінійне програмування прийнято розділяти таким чином.
Опукле програмування. Опукла цільова функція (якщо розглядається задача її мінімізації) та опукла множина, на якій розв'язується екстремальна задача.
Квадратичне програмування. Цільова функція квадратична, а обмеження - лінійні рівності та нерівності.
Багатоекстремальні задачі. Спеціалізовані класи задач, що часто зустрічаються у застосуваннях, наприклад, задачі про мінімізацію на опуклих множинах угнутих функцій.
Важливим розділом математичного програмування є цілочисельне програмування - коли на змінні накладаються умови цілочисельності.
Сама назва "математичне програмування"пов'язана з тим, що метою розв'язання задач є вибір програми дій.

Приклади математичних моделей.

14

Задача про раціон.

По заданому асортименту продуктів при відомому вмісті у кожному з них і вартості продуктів скласти раціон, що задовольняє необхідним потребам з мінімальними грошовими затратами.
Нехай маємо n різних продуктів та m поживних речовин (наприклад жирів, білків, вуглеводів, вітамінів тощо). Позначимо через a_{ij} вміст (у одиницях маси) j-ої поживної речовини в одиниці маси i-го продукта; через b_j позначимо мінімальну (в одиницях маси) добову потребу в j-їй поживній речовині. x_i шукана добова потреба i-го продукта. Очевидно, що $x_i \geq 0$.

15

Величина $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i$ *є загальний вміст* j*-ої поживної речовини у раціоні, яка не повинна бути меншою за мінімальну потребу* b_j*:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \geq b_j, \quad j = \overline{1, m}.$$

Якщо c_i *- вартість одиниці маси* i*-го продукта, то вартість всього раціона визначає лінійна форма* $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$*. Таким чином математичне формулювання задачі про вибір раціона полягає у наступному:*
знайти

$$min \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

за умов

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \geq b_j, \quad j = \overline{1, m}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Це одна з типових задач лінійного програмування.

Транспортна задача.

16

Другим типовим прикладом задачі лінійного програмування є транспортна задача. Необхідно скласти план перевезення однорідного груза таким чином, щоб загальна вартість перевезень була мінімальною.
Вхідна інформація: a_i *- кількість одиниць груза в* i*-му пункті відправлення* $(i = \overline{1, m})$*;* b_j *- потреба в* j*-му пункті призначення* $(j = \overline{1, n})$ *у одиницях груза;* c_{ij} *- вартість перевезення груза з* i*-го пункту в* j*-ий. Позначимо через* x_{ij} *кількість одиниць груза, що планується для перевезення з* i*-го пункту до* j*-го. У загальноприйнятих позначеннях:*
$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ *- вартість перевезення одиниці груза з* i*-го пункту до* j*-го;*
$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ *- кількість груза, що вивозиться з* i*-го пункта;*
$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$ *- кількість груза, що доставляється в* j*-й пункт.*
У найпростішому випадку повинні виконуватися наступні очевидні умови:

17

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m};$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n};$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Таким чином, математична постановка транспортної задачі має вигляд: знайти

$$min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

18

Ця задача носить назву замкненої транспортної моделі. Зазначимо, що умова

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

є природньою умовою розв'язності замкненої транспортної задачі.
Більш загальною транспортною задачею є так звана відкрита транспортна модель: знайти

$$min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Ясно, що в цій задачі не припускається, що весь груз, накопичений в i-му пункті, повинен бути вивезеним. У схему транспортної задачі вкладаються й деякі інші задачі техніко-економічного змісту, наприклад, так звана задача про вибір: задача про найбільш економний (у сенсі сумарних витрат часу) розподіл n робіт між n виконавцями при відомому часі, що витрачається кожним виконавцем на кожній роботі.

Ця задача є частинним випадком моделі замкненої транспортної задачі при $m = n$, $a_i = b_j = 1$. Відзначимо, що розв'язки транспортних задач володіють властивостями цілочисельності при цілочисельних значеннях величин a_i, b_j й тому ці задачі відносять до задач *лінійного програмування*.

Задача про режим роботи енергосистеми.

19

У якості приклада задачі опуклого програмування розглянемо найпростішу серед задач про оптимальне ведення режима роботи енергосистеми.
Розглядається ізольована енергосистема, що складається з теплоелектростанцій, що пов'язані лініями передач з вузлом, у якому зосереджене навантаження.
Ставиться задача про розподіл активних потужностей між електростанціями у заданий момент часу. Розподіл здійснюється за критерієм мінімізації сумарних паливних витрат на генерацію активної потужності. Позначимо через x_i *активну потужність, що генерується на i-ій станції. Потужності* x_i *заключено у межах* α_i *та* β_i*, що визначаються технічними умовами:* $\alpha_i \le x_i \le \beta_i$*. Крім того, повинна виконуватися умова баланса потужностей, тобто згенерована загальна потужність повинна відповідати споживаній потужності з урахуванням загальних втрат* π *у лініях передач:*

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = P + \pi.$$

20

Паливні затрати на генерацію потужності x_i *є функцією* $T_i(x_i)$, *що є опуклою на відрізку* $[\alpha_i; \beta_i]$. *Таким чином, задача приймає вигляд:*
знайти

$$min \sum_{i=1}^{m} T_i(x_i)$$

за умов

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = P + \pi,$$

$$\alpha_i \leq x_i \leq \beta_i, i = \overline{1, m}.$$

Побудована модель є типовою задачею опуклого програмування з лінійними обмеженнями.

Задача про розміщення.

21

Дано m пунктів споживання $(1, 2, ..., j, ..., m)$ із заданим об'ємом споживання b_j у кожному пункті. Маємо n можливих пунктів виробництва $(1, 2, ..., i, ..., n)$, причому для кожного i-го пункту відома залежність вартості виробництва f_i від об'єма виробництва x_i. (Припускається, що у вартість виробництва $f_i(x_i)$ включено капітальні витрати.) Крім того задана матриця транспортних витрат a_{ij} (a_{ij} — вартість перевезення одиниці продукції з i-го пункта виробництва у j-й пункт споживання). Необхідно знайти такі об'єми перевезень x_{ij} з i-го в j-й пункт й такі об'єми виробництва $x_i = \sum_j x_{ij}$ які мінімізують сумарні витрати; інакше кажучи, шукаємо

$$min[L(x_{ij}) = \sum_{i,j} a_{ij} x_{ij} + \sum_i f_i(x_i)]$$

за умов

$$\sum_i x_{ij} = b_j, x_{ij} \geq 0.$$

Оскільки собівартість одиниці продукції зазвичай спадає при збільшенні об'єма виробництва, то функції $f_i(x_i)$, як правило є монотонно зростаючими та опуклими вгору. Множина значень x_{ij}, задовольняє обмеженням задачі та утворює опуклий многогранник, вершини якого є точками локальних мінімумів функції $L(x_{ij})$. Звідси й назва подібних задач - багатоекстремальні.

Нехай X та Y - банахові простори, f - функція на X та $F : X \to Y$ - відображення X в Y. Розглянемо задачу

$$f(x) \to inf; (1)$$

$$F(x) = 0.(2)$$

Складемо *функцію Лагранжа* задачі (1), (2):

$$\mathcal{L}(x, \lambda_0, y^*) = \lambda_0 f(x) + < y^*, F(x) >,$$

де $\lambda_0 \in \mathbb{R}, y^* \in Y^*$. Величини λ_0 та y^* носять назву *множників Лагранжа*.

22

Теорема 1 *(правило множників Лагранжа). Нехай функція f та відображення F диференційовні за Фреше у точці x_*, де $F(x_*) = 0$ та образ простору X при відображенні $x \to F'(x_*)x$ замкнений. Тоді, якщо x_* - точка локального мінімума у задачі (1), (2), то знайдуться такі не рівні одночасно нулеві множники Лагранжа λ_0, y^*, що*

$$\mathcal{L}_x(x_*, \lambda_0, y^*) = \lambda_0 f'(x_*) + F'^*(x_*)y^* = 0.$$

Якщо відображення F належить класу C^1 у точці x_* та є регулярним відображенням у цій точці, то $\lambda_0 \neq 0$ та можна вважати, що $\lambda_0 = 1$.

23

Нехай простір Y скінченновимірний. Тоді задача може бути переписана у такій формі:

$$f_0(x) \to inf; (3)$$

$$f_1(x) = 0, ..., f_n(x) = 0.(4)$$

Множники Лагранжа у цьому випадку є числа $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n$ *так, що функція Лагранжа має вигляд*

$$\mathcal{L}(x, \lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i(x).$$

Наслідок. *Нехай функції* $f_0, ..., f_n$ *належать класу* C^1 *у точці* x_**, що задовольняє умовам (4). Тоді якщо точка* x_* *є точкою локального мінімума у задачі (3), (4), то знайдуться такі не рівні одночасно нулю числа* $\lambda_0, ..., \lambda_n$*, що*

$$\lambda_0 f_0'(x_*) + ... + \lambda_n f_n'(x_*) = 0.$$

Якщо крім того функціонали $f_1'(x_*), ..., f_n'(x_*)$ *лінійно незалежні, то* $\lambda_0 = 1$.

Умова регулярності: якщо для кожного $1 \leq i \leq m$ існує така точка $x_i \in X$, що $f_i(x_i) > 0$, то кажуть, що множина X задовольняє *умові регулярності*.
Умова регулярності Слейтера. Існує така точка $x \in X$, що для всіх $i = \overline{1, m}$ буде

$$f_i(x_i) > 0.$$

24

$$x^T = (x_1, x_2, ..., x_n) \in E_n, y \in E_n$$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n),$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n),$$

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

$$||x|| = (x, x)^{\frac{1}{2}},$$

$$(S(x, \varepsilon)) \quad U_\varepsilon(x) = \{y : ||y - x|| \leq \varepsilon\}$$

- ε-окіл точки x.

25

Означення. *Точка $x_0 \in D$ називається точкою локального максимума (мінімума) функції f, якщо існує такий окіл $U_\varepsilon(x_0)$, що $\forall x \in U_\varepsilon(x_0) \bigwedge x \neq x_0$ виконується нерівність $f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$.*
Точки локального максимума та локального мінімума функції f називаються її точками локального екстремума.
Означення. *Проекцією точки v на множину X називають таку точку $P_X(v) = p \in X$, що*

$$||p - v|| = \inf_{x \in X} ||x - v|| = \rho(v, X) = \rho.$$

При цьому $\rho = \rho(v, X)$ називають відстанню від точки v до множини X.

26

Теорема. *Для довільної замкненої множини X та довільної точки v існує точка $p \in X$, що є проекцією v на X. Якщо, крім того, множина X опукла, тоді точка p єдина.*

27

Теорема. *Для того, щоб точка* $p \in X$ *була проекцією точки* v *на опуклу замкнену множину* X, *необхідно та достатньо, щоб для всіх* $x \in X$ *виконувалась нерівність*

$$< x - p, v - p > \geq 0.$$