

Создание модели движения диона в скрещенных электрическом и магнитном полях на языке Python

Черников Владислав Б23-107

Описание

Данная презентация содержит краткое описание основных методов примененных в симуляции и их сравнение. Приведены результаты симуляции при различных параметрах.

Силы действующие на дион в скрещенных электрическом и магнитном полях

$$\vec{F} = m\vec{a} = q\vec{E} + g\vec{B} + q[\vec{V} \times \vec{B}]/c - g[\vec{V} \times \vec{E}]/c$$

В координатной форме для $\vec{B} \parallel \vec{0}_z$, $\vec{E} \parallel \vec{0}_x$:

$$\begin{cases} \ddot{x} = qB_z\dot{y}/mc + qE_x/m \\ \ddot{y} = -qB_z\dot{x}/mc - gE_x\dot{z}/mc \\ \ddot{z} = gB_z/m + gE_x\dot{y}/mc \end{cases}$$

Использованные способы моделирования в Python:

1. Метод Эйлера;
2. Метод Рунге-Кутты 4-го порядка.

В чем суть метода Эйлера

Метод Эйлера — простейший численный метод решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Метод Эйлера является явным, одношаговым методом первого порядка точности. Он основан на аппроксимации интегральной кривой кусочно-линейной функцией — так называемой ломаной Эйлера.

$$f_{i+1} = f_i + \Delta t \cdot F(t_i, f_i),$$

где :

(f_i) —значение функции на текущем шаге,

(t_i) —текущее время,

(Δt) —шаг интегрирования,

$(F(t_i, f_i))$ —значение правой части уравнения $(\frac{df}{dt} = F(t, f))$

Использованные формулы:

$$a = F/m$$

$$V = V_0 + a \cdot dt$$

$$x = x_0 + V \cdot dt$$

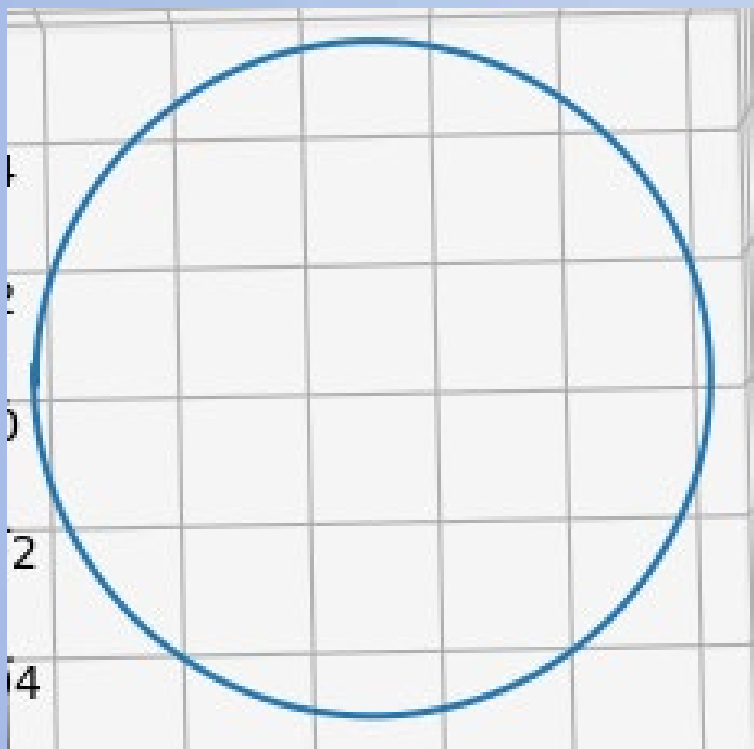
Ввиду невысокой точности и вычислительной неустойчивости для практического нахождения решений задачи Коши метод Эйлера применяется редко. Однако в виду своей простоты метод Эйлера находит своё применение в теоретических исследованиях дифференциальных уравнений, задач вариационного исчисления и ряда других математических проблем.

Оценка погрешности каждой итерации : $G = O(\Delta t)$

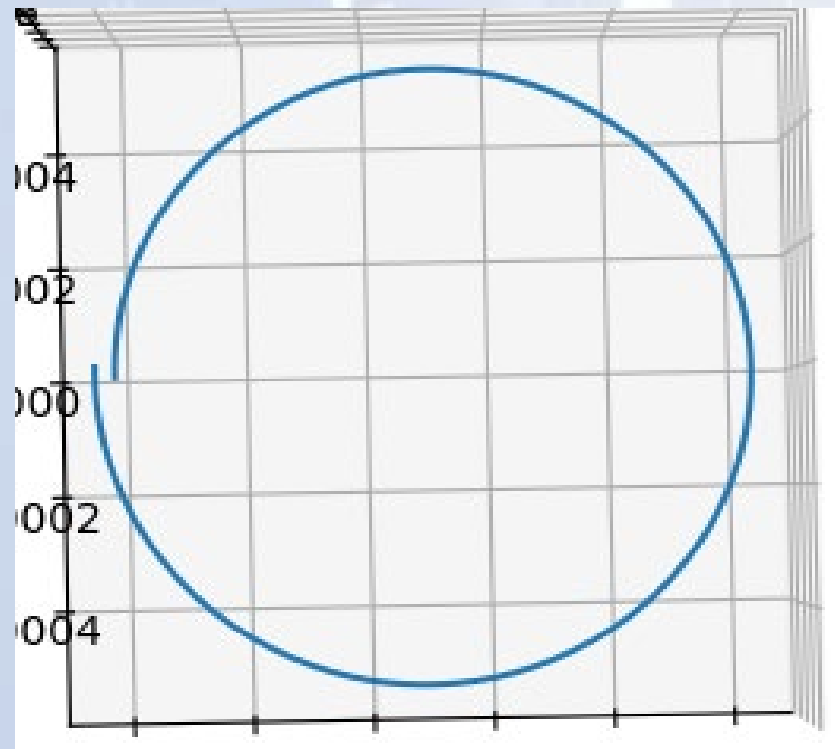
Ошибка метода Эйлера

Траектория движения электрического заряда в магнитном поле направленном перпендикулярно направлению скорости заряда (Ожидаемая траектория: окружность)

$dt=1 \cdot 10^{-6}$, кол-во итераций: 4870



$dt=1 \cdot 10^{-5}$, кол-во итераций: 480



Метод Эйлера

Плюсы:

- Простота реализации и расчета.

Минусы:

- Наличие ошибки меняющейся в зависимости от степени малости dt .

метод Рунге-Кутты

Метод Рунге-Кутты — это одношаговый метод численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем.

Простым языком, метод Рунге-Кутты позволяет уточнять наклон интегральной кривой за счёт вычисления производной не только в начале текущего отрезка интегрирования, но и, например, в середине отрезка (для двучленных схем Рунге-Кутты) или четырёхкратное вычисление производных в методе четвёртого порядка.

Последовательность вычислений (4-ый порядок):

$$f_{i+1} = f_i + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

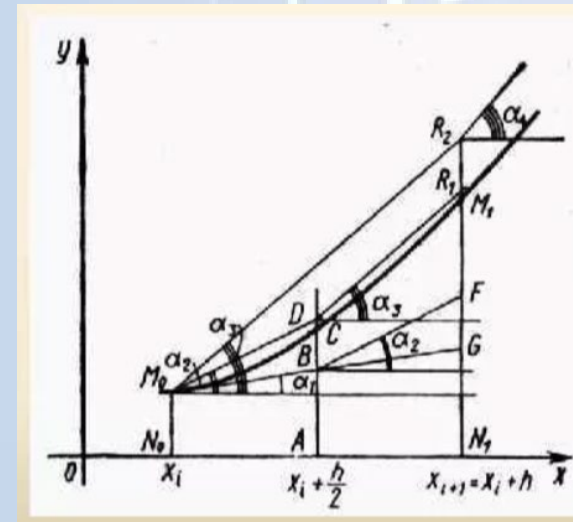
где :

$$k_1 = F(t_i, f_i),$$

$$k_2 = F\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, f_i + \frac{\Delta t}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = F\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, f_i + \frac{\Delta t}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = F(t_i + \Delta t, f_i + \Delta t \cdot k_3).$$



Геометрическая
интерпретация

$$\begin{aligned} k_1 &= h \cdot f(x, y), \\ k_2 &= h \cdot f(x+h/2, y+k_1/2) \\ k_3 &= h \cdot f(x+h/2, y+k_2/2) \\ k_4 &= h \cdot f(x+h, y+k_3). \end{aligned}$$

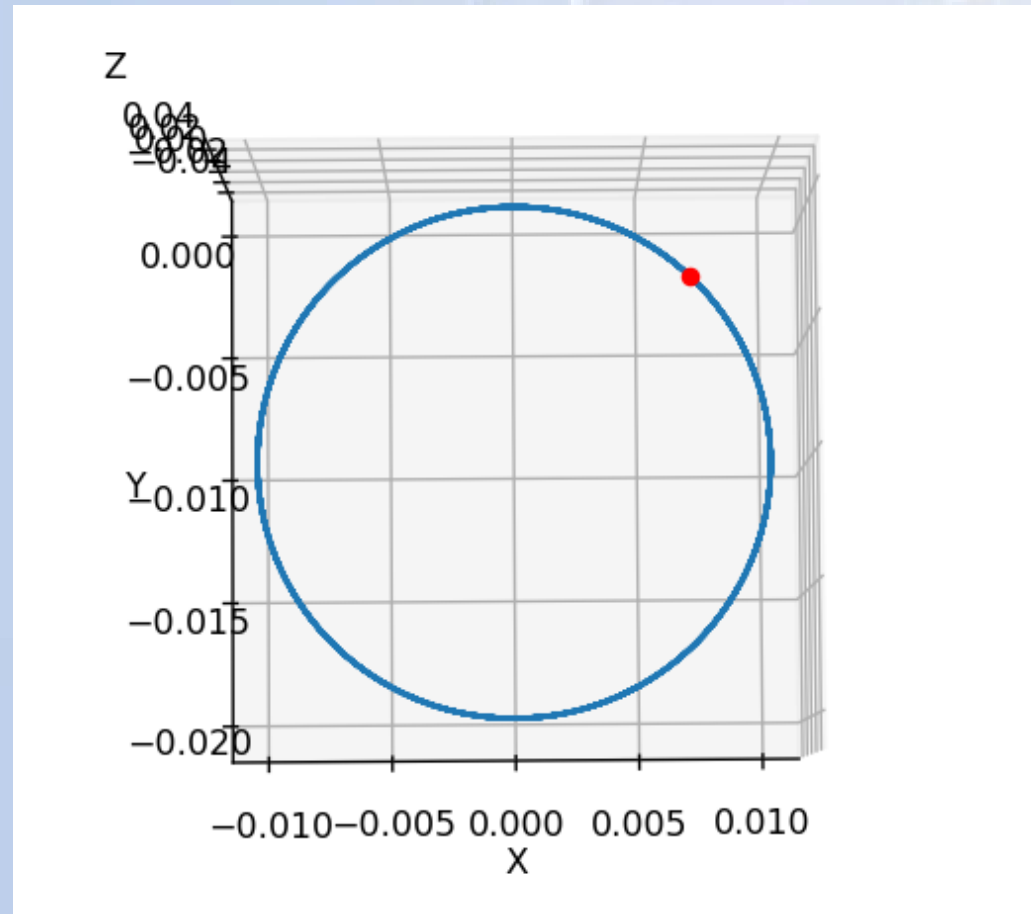
Метод Рунге-Кутты часто применяется для решения дифференциальных уравнений и систем уравнений из-за его высокой точности.

$$\text{Оценка погрешности каждой итерации : } G = O((\Delta t)^4)$$

Ошибка метода Рунге-Кутты(очень маленькая)

$dt=1 \cdot 10^{-5}$, кол-во итераций: 45000

На слайде приведена траектория движения частицы без магнитного заряда в магнитном поле. Результат соответствует теории.



Метод Рунге-Кутты 4-го порядка

Плюсы:

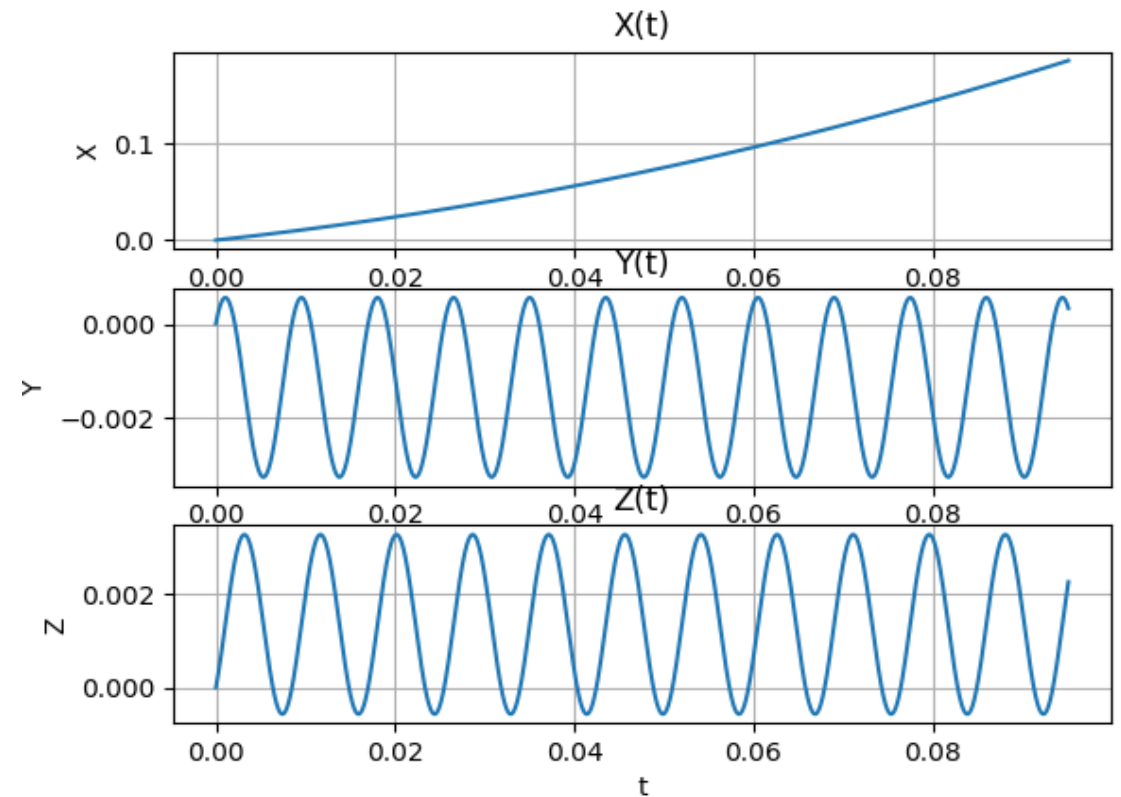
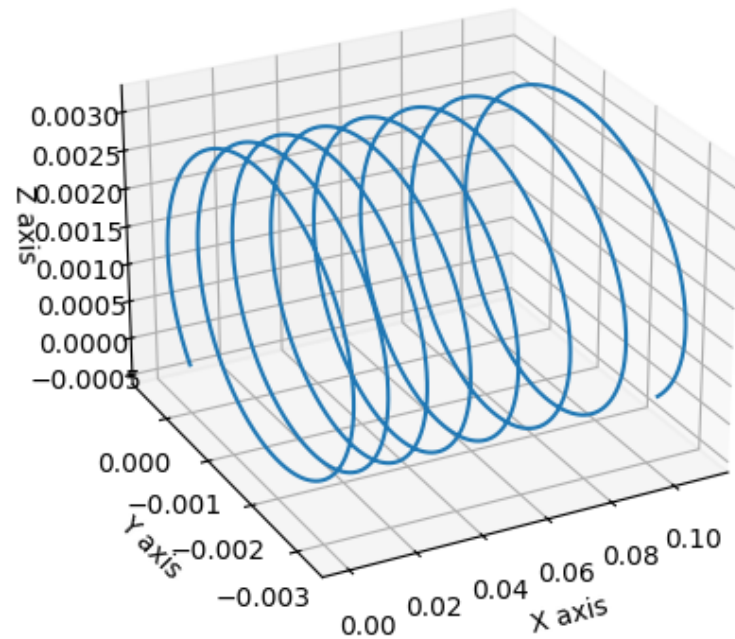
- Минимальная статистическая погрешность;
- Возможность рассчитать траекторию на большом промежутке времени с относительно малым объемом расчетов.

Минусы:

- Сложность реализации.

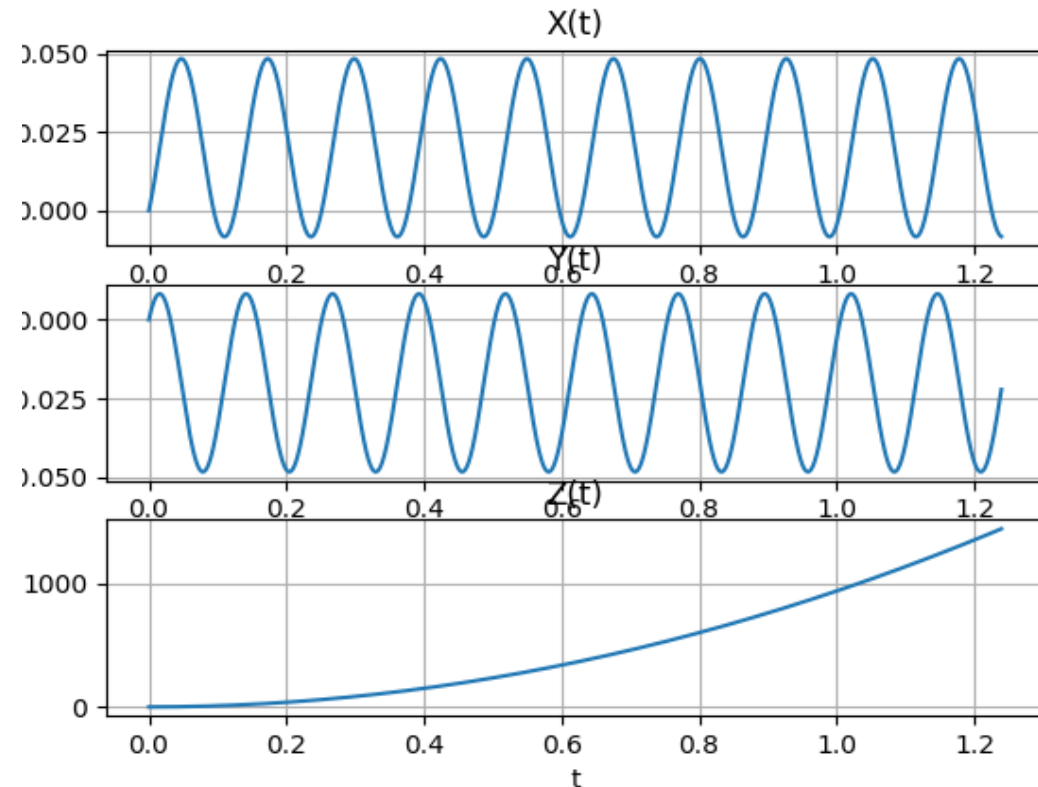
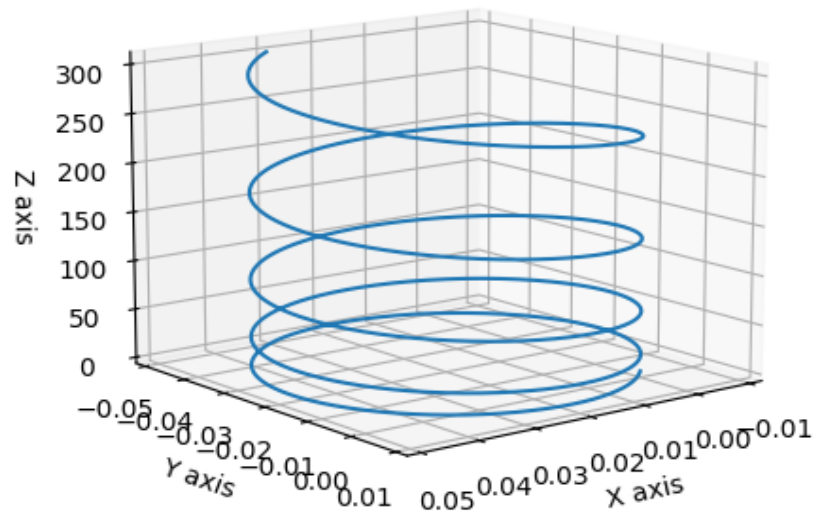
Моделирование: Движение диона в однородном электрическом поле

Начальные значения: $V = [1,1,1]$, $g/q = 37.5$, $E = 20$.



Моделирование: Движение диона в однородном магнитном поле

Начальные данные значения: $V = [1,1,1]$, $g/q = 37.5$, $B = 20$.



Выводы

- Для реализации симуляций движения частиц лучше применять метод Рунге-Кутты (особенно в длительных симуляциях);
- Метод Эйлера хорошо применять для быстрой оценки траекторий (или в непродолжительных симуляциях).