

«Исследование движения бесконечной цепочки из шаров и пружин»

Выполнил: студент группы Б23-107
Черников Владислав Владимирович

Москва, 2024г.

Введение

В данной работе рассматривается движение системы, состоящей из бесконечно большого количества шаров и пружин:

1. В первом случае шары имеют одинаковую массу, а пружины одинаковый коэффициент жесткости.
2. Во втором случае чередующиеся шары имеют массы m_1 и m_2 , а пружины одинаковый коэффициент жесткости.

1) Система из одинаковых шаров и пружин

I. Теоретическое описание

Рассмотрим промежуток системы, описанной в первом случае (см. рисунок 1)

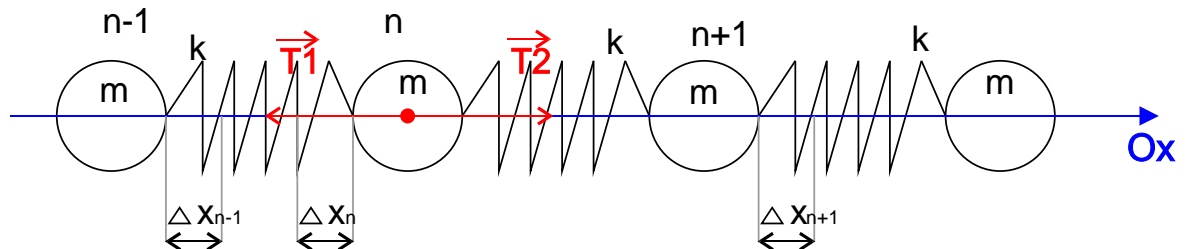


Рисунок 1 «Схема участка системы (шары одинаковой массы)»

Запишем систему сил, действующих на шарик n:

$$\begin{cases} T1 = -k(\Delta x_n - \Delta x_{n-1}) \\ T2 = k(\Delta x_{n+1} - \Delta x_n) \end{cases} \quad (1)$$

Запишем II закон Ньютона для шарика n с учетом закона Гука:

$$ma_n = -k((\Delta x_n - \Delta x_{n-1}) - (\Delta x_{n+1} - \Delta x_n)) \quad (2)$$

Выразим из (2) ускорение n-ого шара, получим систему уравнений, имеющую бесконечное количество решений (т.к. уравнения связаны друг с другом):

$$a_n = -\omega_0^2 * \Delta x_n + \frac{\omega_0^2}{2} * \Delta x_{n-1} + \frac{\omega_0^2}{2} * \Delta x_{n+1} \quad (3)$$

где ω_0 - частота, с которой колебался бы шарик, если бы его соседи были неподвижны.

Симуляция показал, что колебания представляют собой бегущую волну (см. рисунок 3), однако данная симуляция имеет существенные недостатки: ее энергия ограничена энергией начального смещения шара, в связи с чем

проявляется замедление шаров, а также цепь является конечной в связи с чем, при длительном проведении эксперимента, бегущее возмущение отразится от противоположного конца, что не соответствует поставленному условию. Поскольку система совершает волновые колебания, каждый шар совершает гармонические колебания рядом со своим местом в невозбужденном состоянии (но со сдвигом фаз). Учитывая все вышесказанное найдем решение системы (3) в виде гармонических колебаний:

$$\Delta x_n = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

Подставляя (4) в систему (3) получим:

$$-A\omega^2 \cos(\omega t) = -A\omega_0^2 \cos(\omega t) + \frac{A}{2} \omega_0^2 \cos(\omega t - \Delta\varphi) + \frac{A}{2} \omega_0^2 \cos(\omega t + \Delta\varphi) \quad (5)$$

после преобразования получим, что

$$\cos \Delta\varphi = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \quad (6)$$

Откуда следует:

$$1. \Delta\varphi = \pm \cos^{-1}\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \quad (7)$$

Т.е. существует решение (3) в виде (4)

2. Соотношение (7) справедливо (т.е. бегущая волна существует) только при $\omega \leq \sqrt{2}\omega_0$.

С учетом всего вышесказанного, получаем, что (4) для произвольного шара цепочки можно записать в виде:

$$\Delta x_n = A \cos(\omega t + n\Delta\varphi) \quad (8)$$

Получим уравнение волны в виде $\Delta x_n(x, t)$, учитывая, что номер шара можно выразить через начальное положение шара x и через длину нерастянутой пружины L .

$$\Delta x_n(x, t) = A \cos \left(\omega t + \frac{x}{L} \varphi \right) \quad (9)$$

Полученное соотношение (9) является уравнением бегущей волны в явном виде.

II. Симуляция

На языке программирования “Python” была написана программа, симулирующая поведение данной системы. Одним из приближений является то, что в рамках программы рассматривается поведение средних шариков из конечного их числа. Данное приближение можно считать справедливым, поскольку, как следует из теории, шарики, связанные в бесконечную цепь, совершают гармонические колебания, а значит можно считать, что за достаточно большой промежуток времени их смещение равно нулю (т.е. они покоятся). Этим же свойством обладают и шарики, колеблющиеся на концах достаточно длинного участка цепи. Принцип работы программы состоит в следующем:

1. Задаются начальные условия состояния системы (количество шаров, их масса, коэффициенты жесткости пружин, начальное отклонение выбранного шара и пр.)

```
#####БЛОК ЗАДАНИЯ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ#####  
  
# Количество шаров  
n = 100  
# Масса шаров  
m = 1  
# Коэффициент упругости пружины  
k = 10  
# Расстояние между шарами(в состоянии покоя)  
d = 1  
# Длины пружины в нерастянутом состоянии  
l_rest = d  
# Временной шаг  
dt = 0.1  
# Время симуляции  
t_max = 1000  
# Задаем отклонение из положения равновесия  
x0 = 0.5  
#Включение отображения симуляции "Y"-да, "N"-нет  
simulation="N"  
# Задаем положения шаров (координата X равна номеру) и их скоростей(вначале 0)  
x = list(range(0, n))  
v = np.zeros(n)  
# Задаем начальное отклонение какого-то шара  
otkl=2  
x[otkl-1] =x[otkl-1]+ x0  
  
#####
```

Рисунок 2"Блок задания начальных условий в программе"

- Программой рассчитываются значения ускорений для каждого из шаров согласно формуле (3), их скорость и новая координата по формулам:

$$V = a * dt \quad (10)$$

$$x = V * dt \quad (11)$$

- На экран выводится динамическая симуляция движения, а также график смещения каждого шара (если включено)

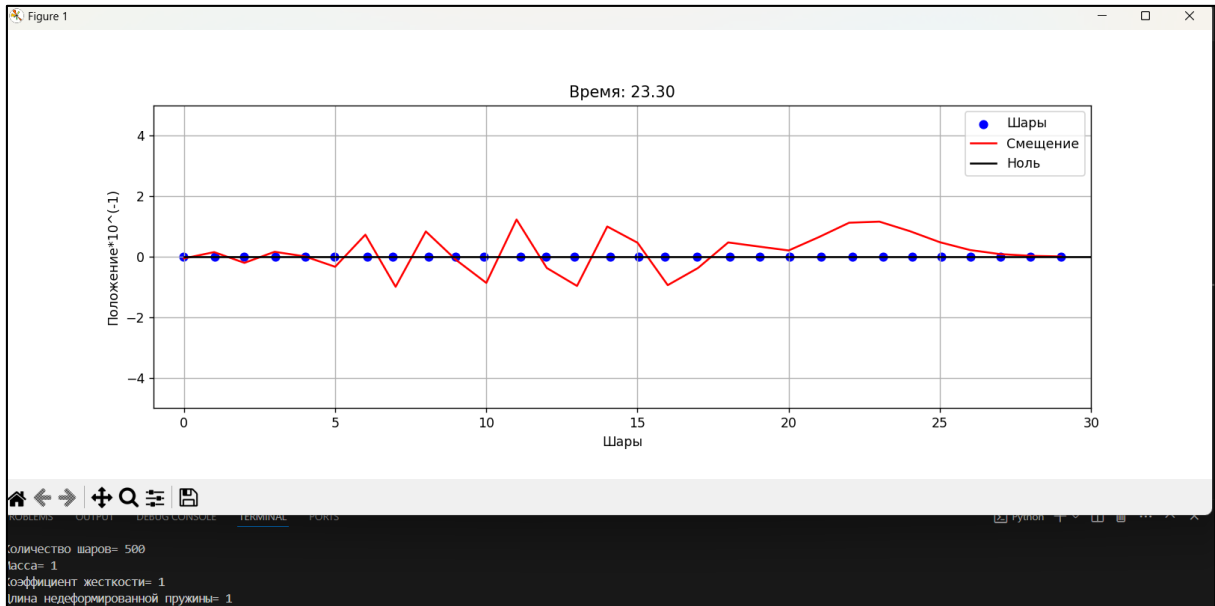


Рисунок 3 “Окно динамической симуляции”

- Строится график зависимости координаты шара от времени

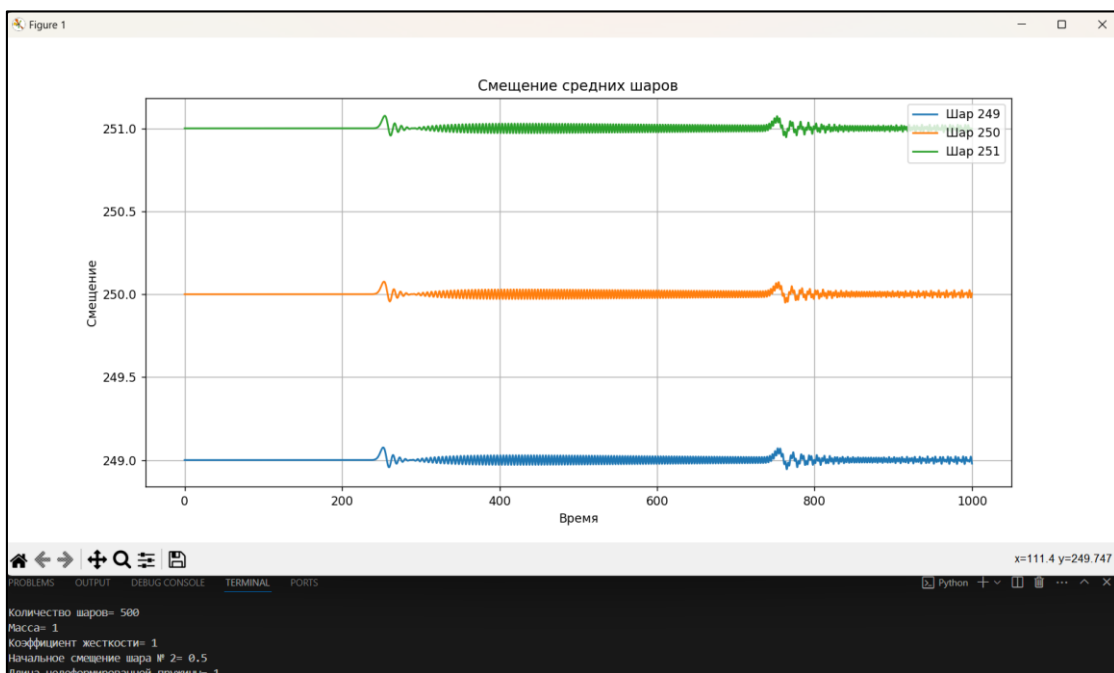


Рисунок 4 “Зависимость координаты шара от времени”

Из Рисунков 3 и 4 видно, что движение шара является суперпозицией двух колебаний, причем из динамической симуляции видно, что колебания с меньшей частотой представляют собой бегущую волну. После проведения необходимых математических рассуждений внесены коррективы в симуляцию. Принципиальным изменением является задание координаты первого шара в каждый момент времени по формуле (8). Как было оговорено ранее, рассматриваемое число шаров конечное, поэтому при длительной симуляции, в режиме, когда колебания в системе возбуждаются постоянно колеблющимся шаром, неизбежно вместо бегущей волны возникает стоячая волна (см. рисунок 5).

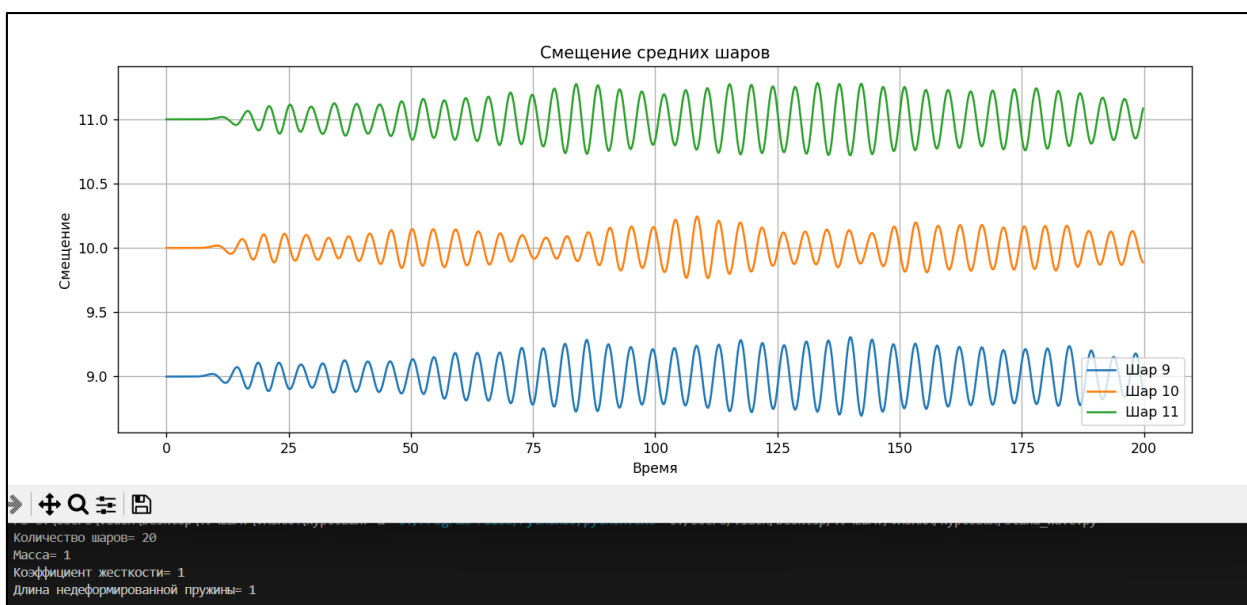


Рисунок 5 «Образование Стоячей волны»

Данный эффект не нужен в рамках рассматриваемой задачи, поэтому самым простым решением является создание цепочки из шаров и наблюдение только за частью из них. Таким образом волна будет «уходить» в не рассматриваемую область, благодаря чему появляется возможность некоторое время наблюдать бегущую волну (см. рисунок 6 и 7).

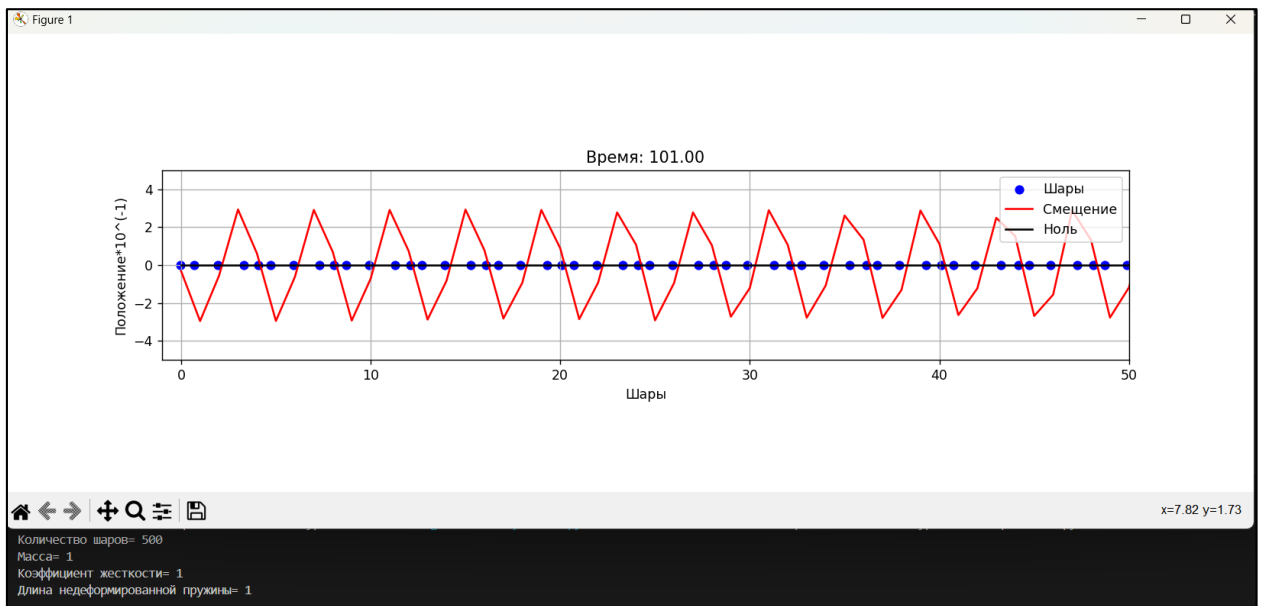


Рисунок 6 «Динамическая симуляция бегущей волны»

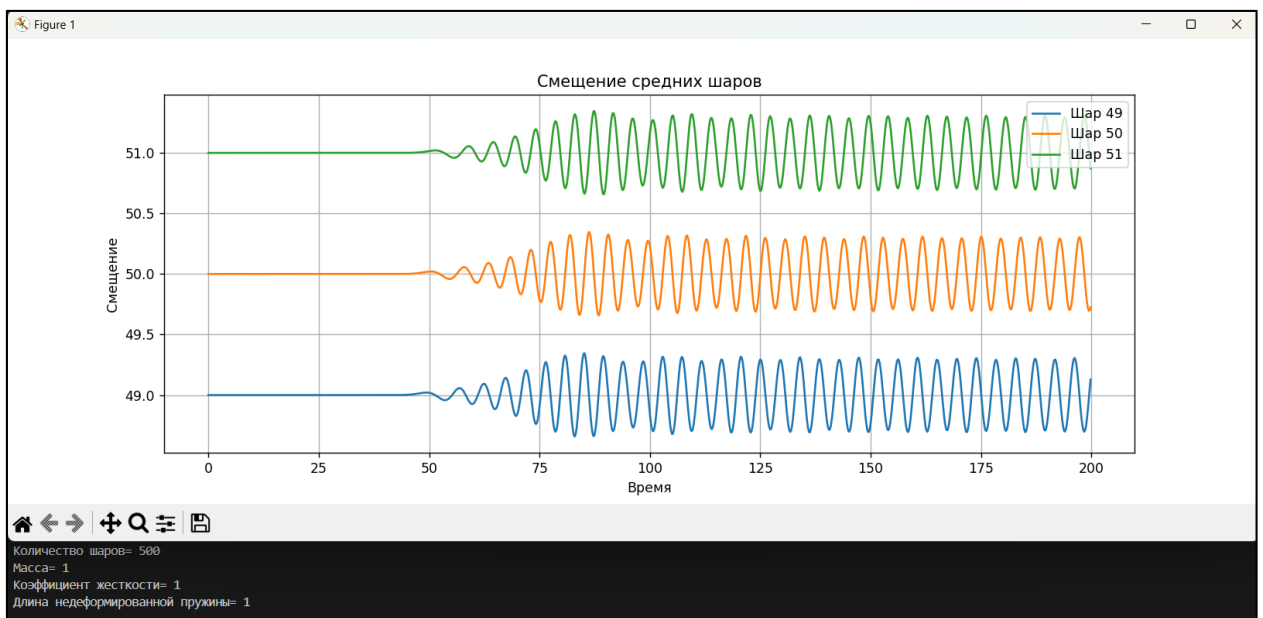


Рисунок 7 «Симуляция бегущей волны»

Проверим теперь условие существования волны (полученного из соотношения 7). Зададим первому шару частоту больше максимально возможной ($\omega = 1.5\omega_0$) и проведем наблюдения.

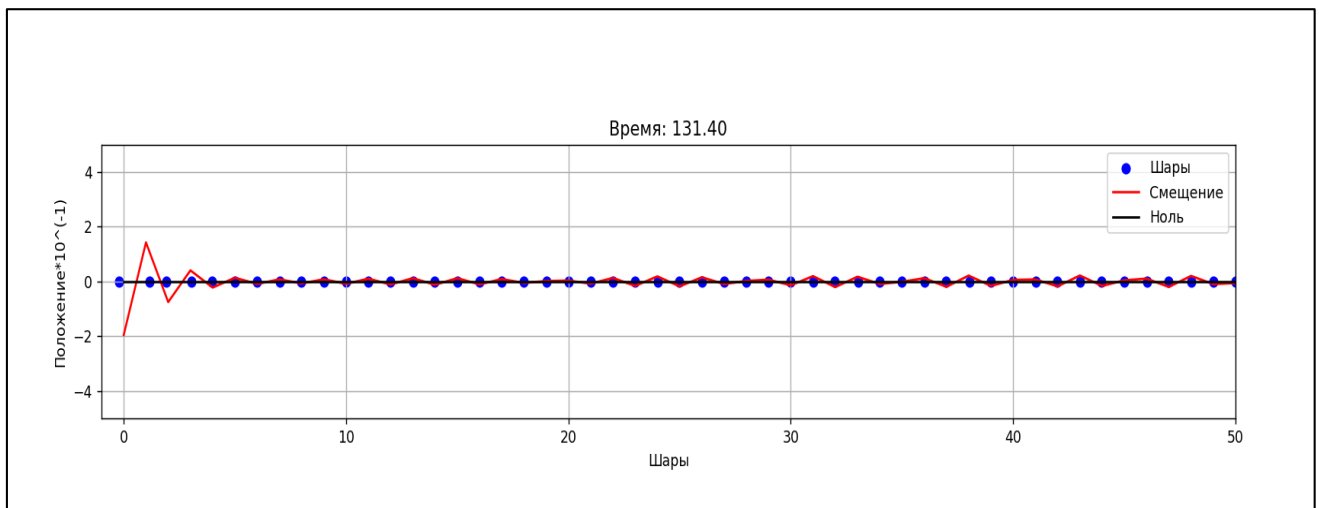


Рисунок 8 «Динамическая симуляция с частотой колебаний превышающей максимально возможную»

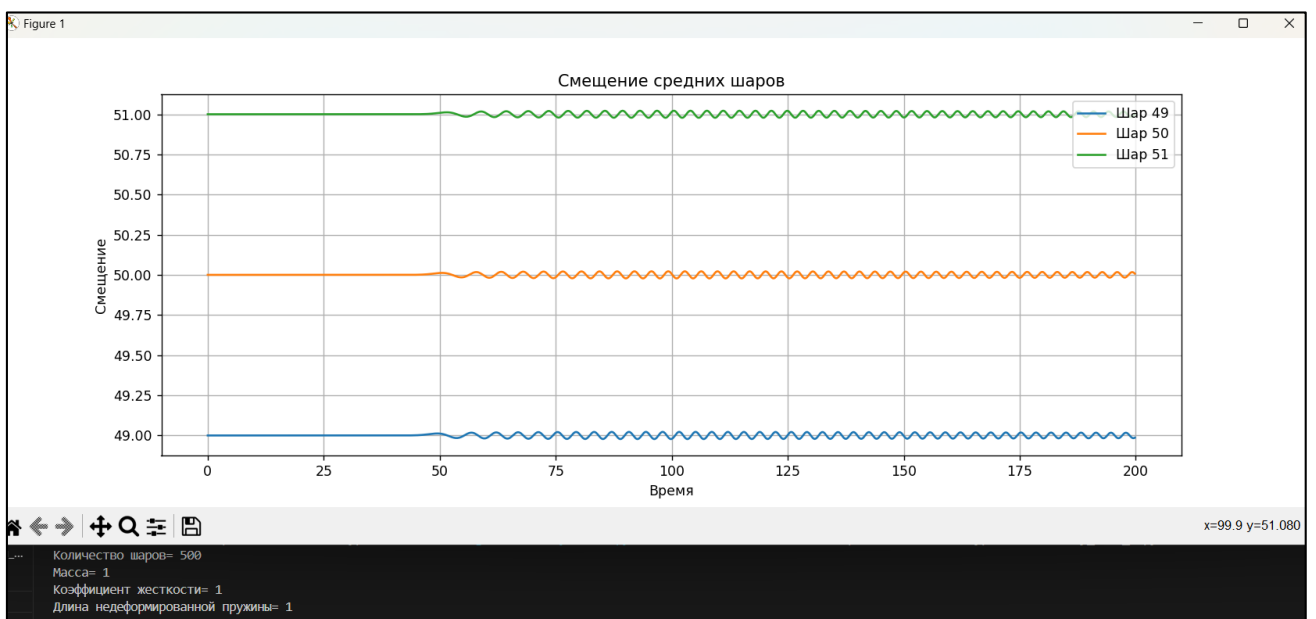


Рисунок 9 «Симуляция с частотой колебаний превышающей максимально возможную»

Как видно из рисунков 8 и 9 характер движения системы перестал быть волновым, что свидетельствует об соответствии теоретических и практических результатов.

2) Задание с шарами разной массы и одинаковыми пружинами

I. Теоретическое описание

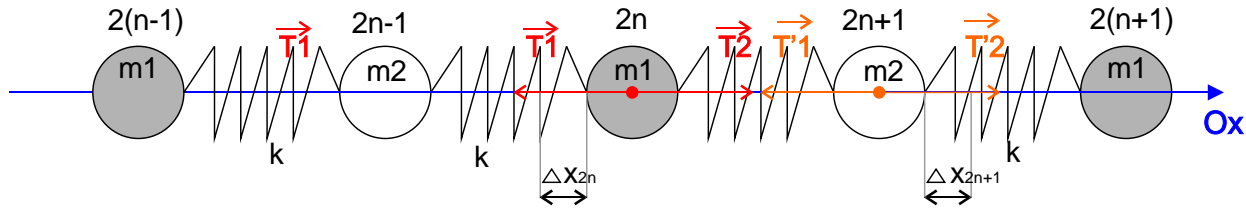


Рисунок 10 "Схема участка системы (шары разной массы)"

Рассмотрим взаимодействия некоторых шаров $2n$ и $2n+1$. Они имеют массы $m1$ и $m2$ соответственно и находятся на расстоянии L друг от друга. Аналогично системе (1):

$$\begin{cases} T1 = -k(\Delta x_{2n+1} - \Delta x_{2n}) \\ T2 = k(-\Delta x_{2n-1} + \Delta x_{2n}) \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} T'2 = k(\Delta x_{2(n+1)} - \Delta x_{2n+1}) \\ T'1 = -k(\Delta x_{2n+1} - \Delta x_{2n}) \end{cases} \quad (13)$$

Учитывая системы (12) и (13) запишем 2 закон Ньютона для шара массой $m1$ и шара $m2$:

$$m1 * L_{2n} = k * (\Delta x_{2n+1} + \Delta x_{2n-1} - 2 * \Delta x_{2n}) \quad (14)$$

$$m2 * L_{2n+1} = k * (\Delta x_{2(n+1)} + \Delta x_{2n} - 2 * \Delta x_{2n+1}) \quad (15)$$

Как и в 1 задании мы получили бесконечную систему уравнений, цепляющихся друг за друга. Согласно результатам симуляции, движение данной системы так же носит волновой характер, поэтому найдем решения систем (14) и (15) в виде

$$\Delta x_{2n} = A_1 \cos(\omega t + 2n * K * L) \quad (16)$$

$$\Delta x_{2n+1} = A_2 \cos(\omega t + (2n + 1)KL) \quad (17)$$

Где К- волновое число.

Примечание: Как видно из симуляции, шары разной массы имеют разные амплитуды.

Подставляя (16) и (17) в (14) и (15) получим систему уравнений:

$$\begin{cases} (2k - m_1 \omega^2)A_1 - 2k A_2 \cos(KL) = 0 \\ -2k A_1 \cos(KL) + A_2(2k - m_2 \omega^2) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Из курса линейной алгебры известно, что данная система имеет решение только при:

$$m_1 m_2 \omega^4 - 2k(m_1 + m_2)\omega^2 - 4k^2(1 - \cos(KL))^2 = 0 \quad (19)$$

Решая данное квадратное уравнение относительно ω^2 . Получим:

$$\omega^2 = k \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right) \pm k \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)^2 - 4 \sin(KL)^2 * m_1 m_2}{(m_1 m_2)^2}} \quad (20)$$

Из последнего полученного уравнения следует, что существует 2 возможных различных решения, причем не зависящих от атома, но зависящих от отношения масс шаров, из чего следует, что обе эти частоты являются частными случаями собственных колебаний системы. Поскольку уравнения (4), (16) и (17) схожи, то справедливо утверждение, что все возможные волновые частоты ω системы удовлетворяют условию (если $m_1 > m_2$):

$$\omega \in \left(\sqrt{\frac{2k}{m_1}}; \sqrt{\frac{2k}{m_2}} \right)$$

II. Симуляция

Программа была изменена в соответствии с требованиями данного задания (были изменены массы шаров). Аналогично были проведены эксперименты, направленные на выяснение предполагаемого характера движения системы. При смещении более тяжелого шара отчетливо заметен волновой характер движения системы (см рис. №11).

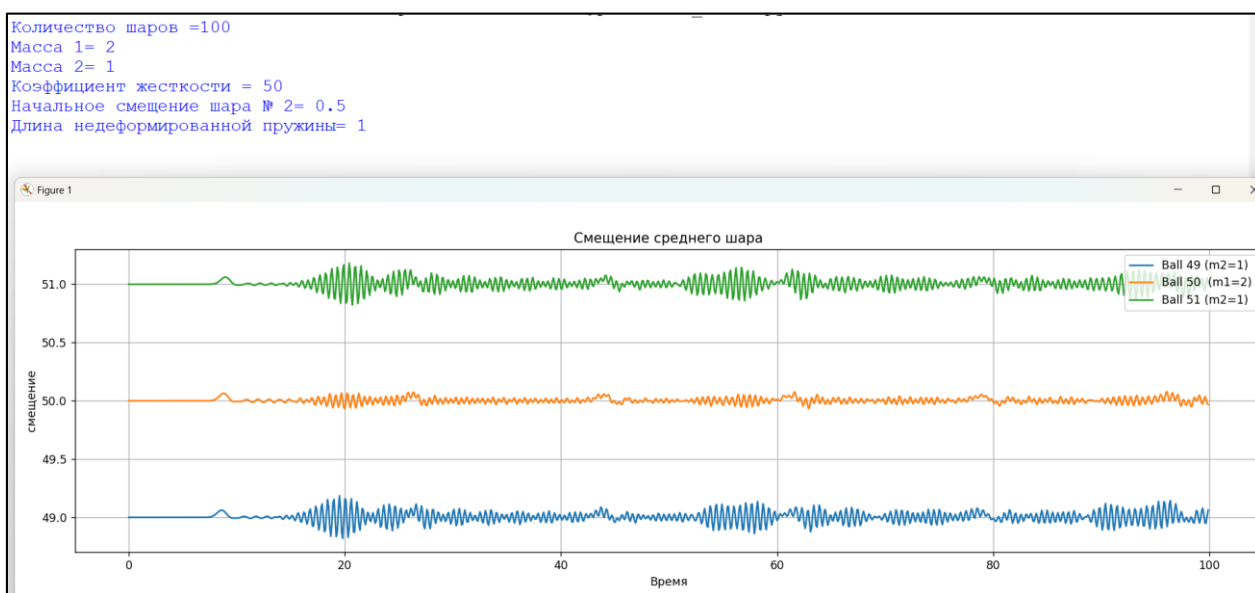


Рисунок 11 "Смещение средних шаров(при начальном смещении более тяжелого шара)"

Аналогичная ситуация проявлялся и в случае отклонения более легкого шара, однако стоит отметить, что полученные графики имеют различия, это гипотетически может быть связано с существованием нескольких различных волн в данной системе.

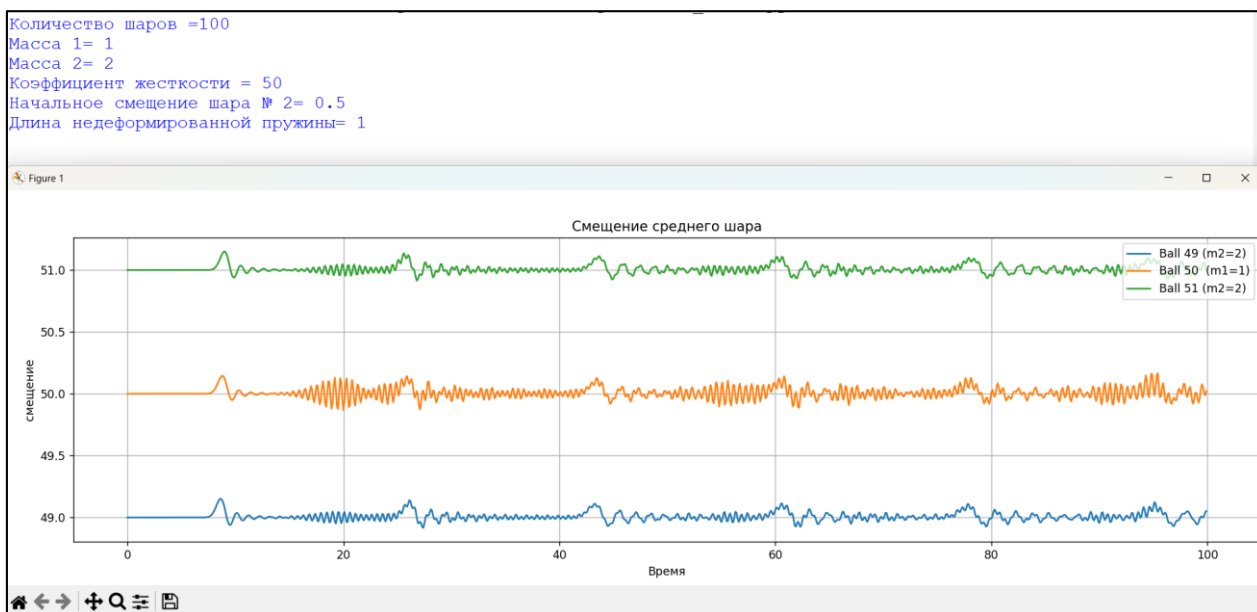


Рисунок 12 "Смещение средних шаров(при начальном смещении более легкого шара)"

Примечание: на рисунке 11 и 12 стоит наибольшее внимание обратить на участки до и после первого «возбуждения», поскольку до него идет отрезок времени, когда импульс еще не успел дойти до шаров. Последние импульсы произошли уже после того, как предполагаемая волна дошла до конца струны и отразилась, что не в полной мере соответствует условию решаемой задачи. Стоит добавить, что в динамической симуляции наблюдались различия характеров колебаний. После проведения математических расчетов по аналогии с первым заданием были внесены соответствующие корректировки в программу. Координаты 1 шара теперь задаются по гармоническому закону, а график смещения представлен двумя линиями, соответствующими шарам с различными массами. По оси абсцисс отложены номера шаров (например, номеру 1 по оси соответствуют первый шар с массой m_1 и первый шар с m_2). Проведем наблюдения за движением системы при разных частотах колебания первого шара.

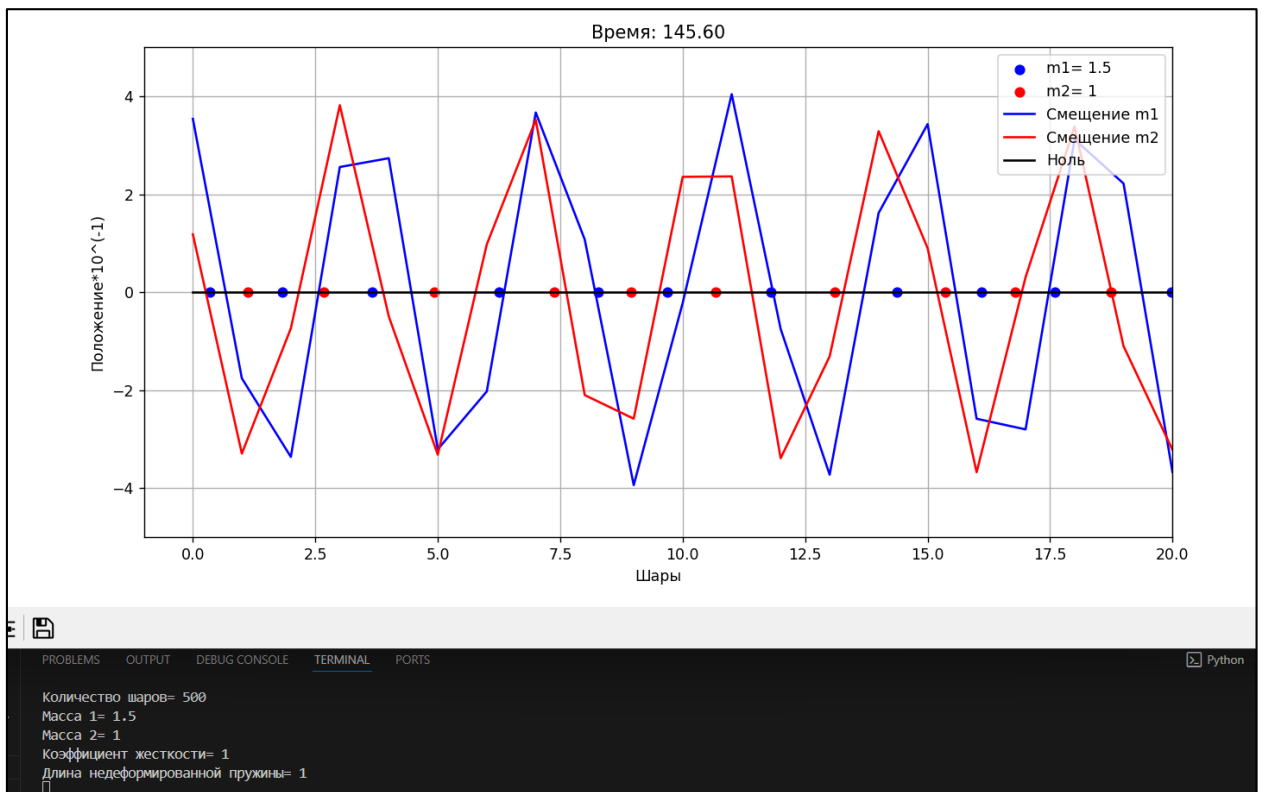


Рисунок 13 «Динамическая симуляция в режиме аналогичной фазы»

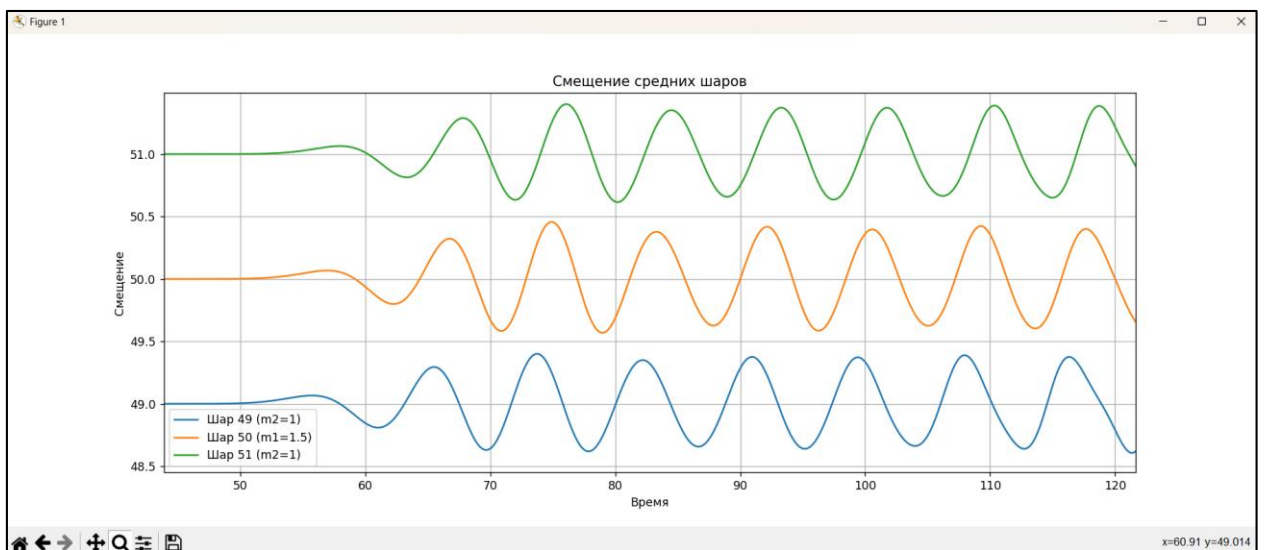


Рисунок 14 «Симуляция в режиме аналогичной фазы»

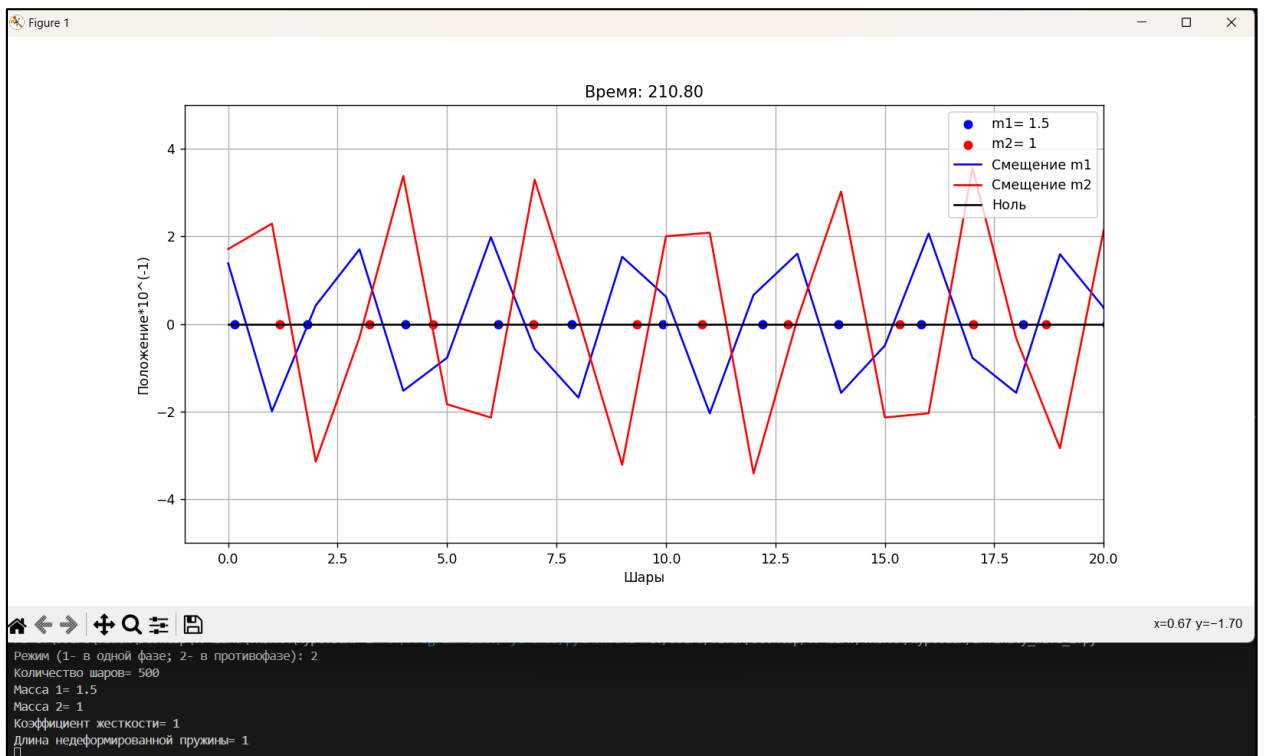


Рисунок 15 «Динамическая симуляция в режиме противофазы»

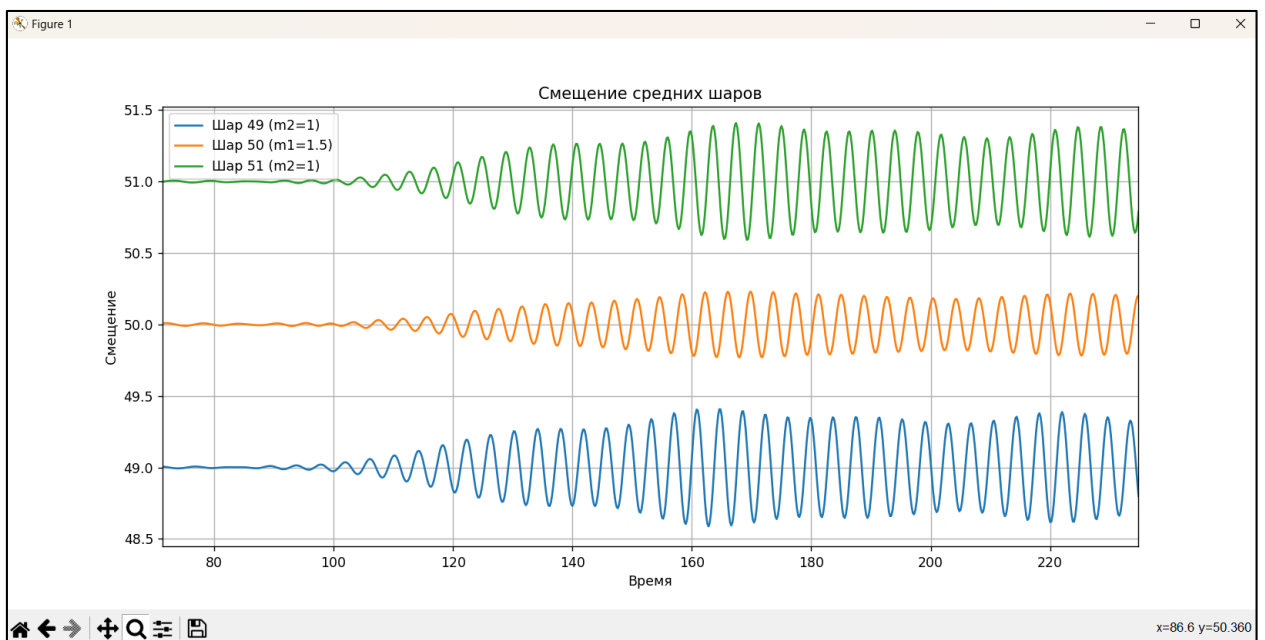


Рисунок 16 «Симуляция в режиме противофазы»

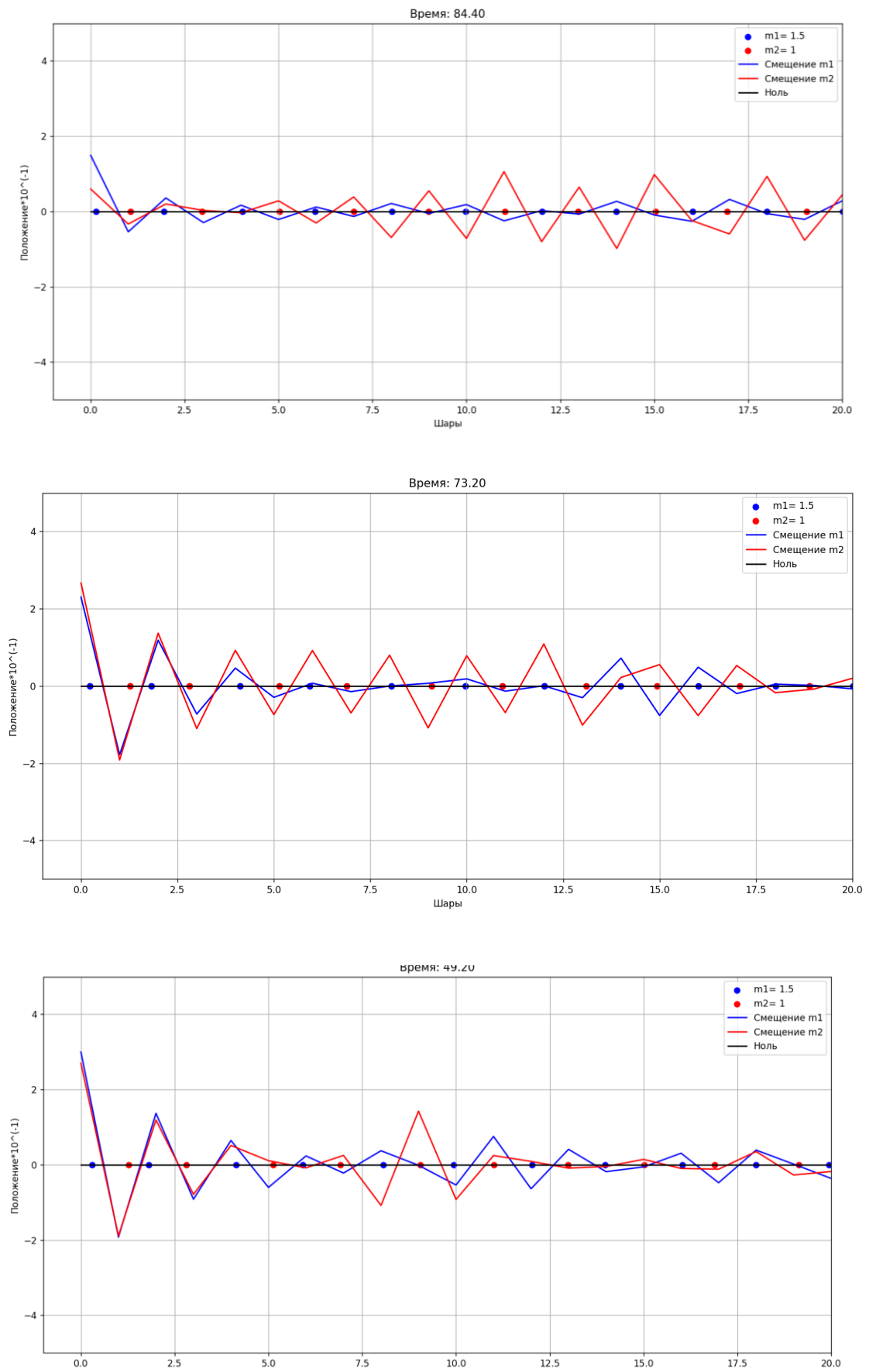


Рисунок 17-19 «Динамическая симуляция с запрещенной частотой»

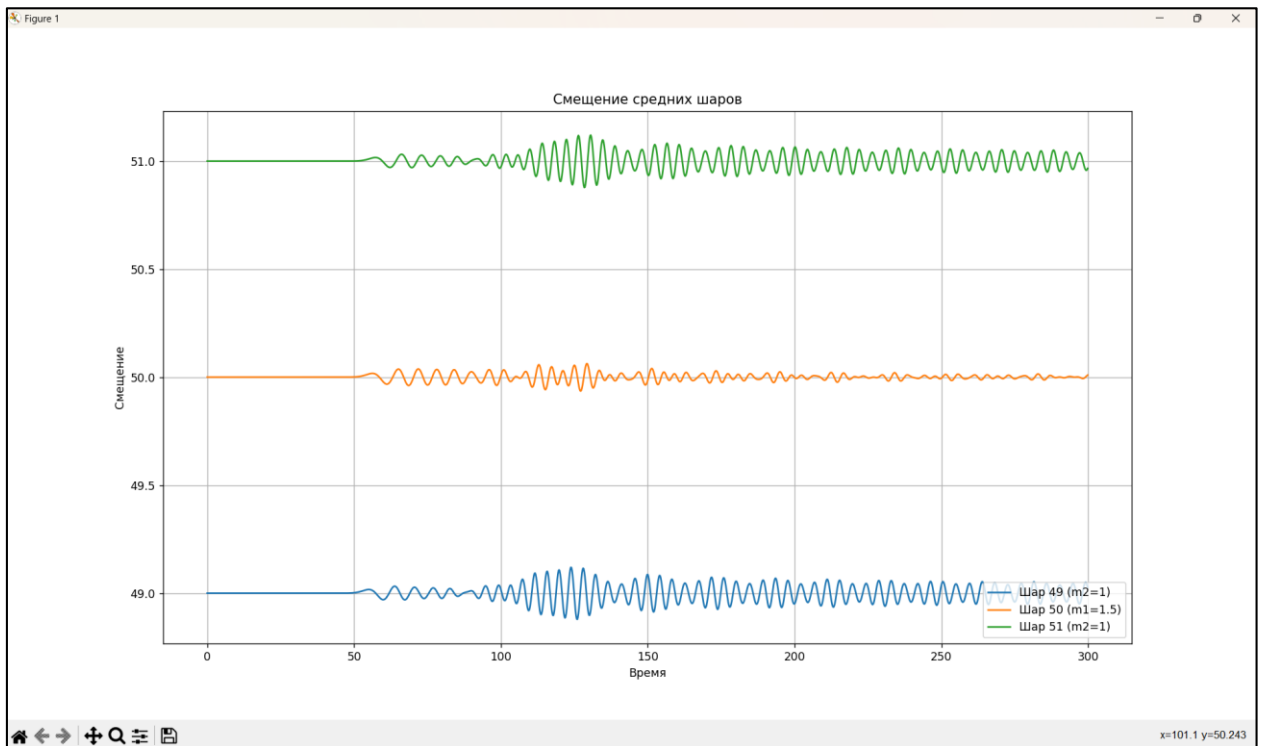


Рисунок 18 «Симуляция с запрещенной частотой»

Как видно из рисунков 13 и 14 при одной из возможных частот шары движутся в схожих фазах (смещение не превышает $\frac{\pi}{2}$). На рисунках 15 и 16 представлена ситуация колебания шаров в противофазе. На рисунке 17-20 показан случай, при котором частота колебаний первого шара попадает в запрещенную зону. Из симуляции видно, что в таком случае движение не носит волновой характер, что соответствует теоретическим рассуждением.

Заключение

При проведении работы были исследованы движения систем, представляющих собой бесконечные цепочки, состоящие из пружин одинаковой жесткости и шаров одинаковой и разной массы.

Установлено, что движение таких систем имеет волновой характер при условии выполнения условий, описанных выше.

Установлено, что при невыполнении условий, описанных выше, движение является колебательным, но не волновым.

Для исследования и проверки результатов, полученных теоретически, разработаны различные программы симуляции движения шаров для рассматриваемых ситуаций. Результаты, полученные благодаря программам, соответствуют теоретическим.