

Prelucrarea semnalelor

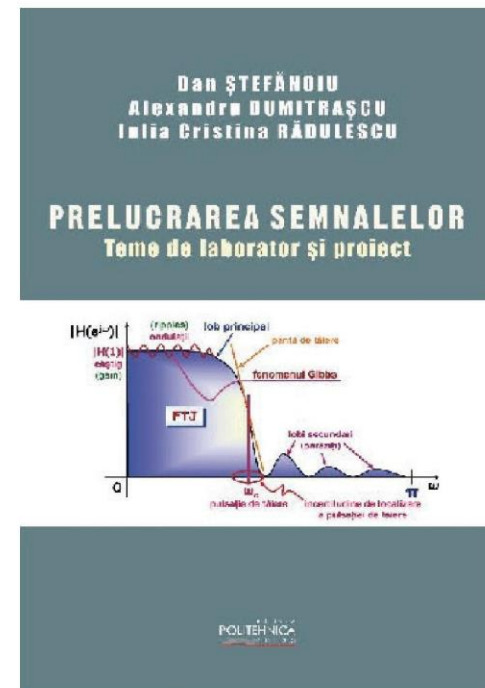
Proiect 3 - Proiectarea filtrelor IIR prin metode de transformare

<https://curs.upb.ro>

Profesor Dan ȘTEFĂNOIU
dan.stefanoiu@upb.ro

Conferențiar Alexandru DUMITRAȘCU
alexandru.dumitrascu@upb.ro

Șef de lucrări Vasilică VOINEA
vasilica.voinea@upb.ro



Obiective

Proiectarea filtrelor IIR utilizând prototipuri analogice și transformarea biliniară de discretizare. Utilizarea rutinelor MATLAB pentru proiectarea filtrelor Butterworth, Cebîșev, eliptic. Studiul soluției IIR a unei probleme de proiectare a filtrelor cu toleranțe impuse (PPFTI).

Suport teoretic

Proiectarea filtrelor IIR prin metode de transformare se realizează după schema din Figura 6.1.

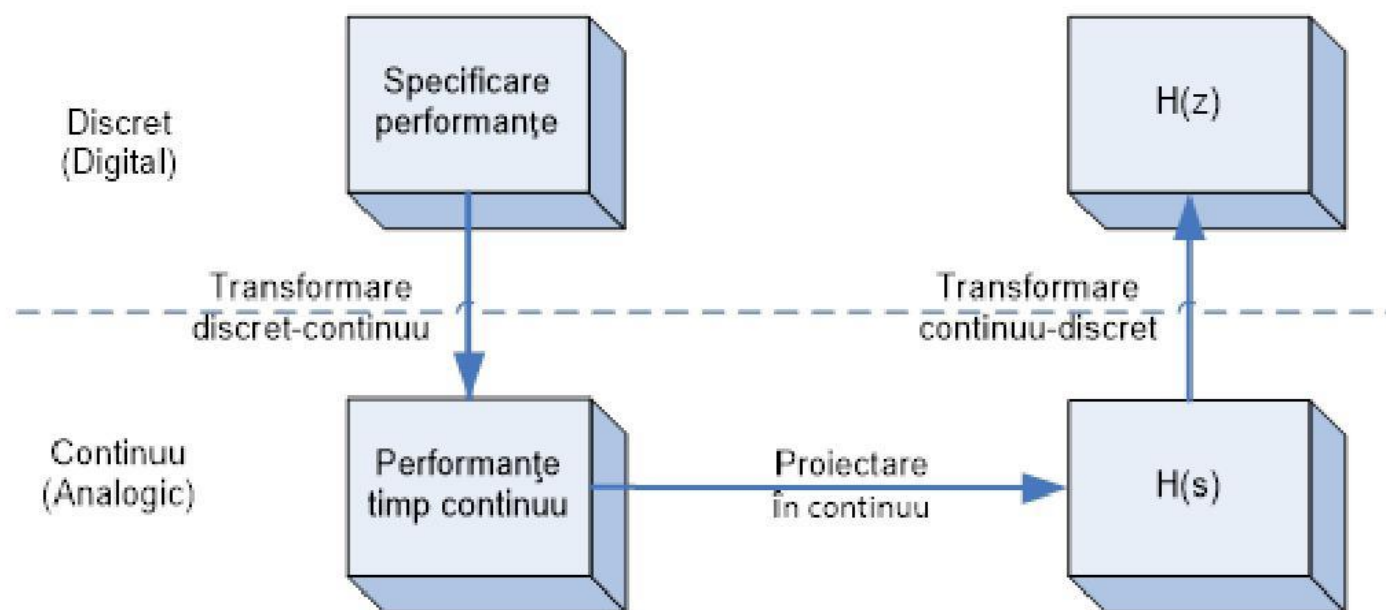


Figura 6.1. Schema generală de proiectare a filtrelor IIR prin metode de transformare.

Performanțele specificate ale filtrului digital (de exemplu în forma unei PPFTI, ca în Tema de proiect 1) sunt transformate în performanțe echivalente în domeniul continuu. Pe baza acestora, se proiectează filtrul analogic $H(s)$ (exprimat ca o Transformată Laplace (TL)), din care, printr-o transformare de discretizare $s = f(z)$, se obține filtrul dorit $G(z)$ (exprimat ca o TZ). Cu alte cuvinte :

$$G(z) = H(f(z)) . \quad (6.1)$$

Se observă că problema are două sub-probleme :

- alegerea unei transformări biunivoce (inversabile) f între domeniile discret și continuu ;
- proiectarea filtrelor analogice (în timp continuu).

Pentru prezentarea în continuare a detaliilor celor două sub-probleme se vor utiliza, potrivit uzanței din PS, peste tot, notațiile :

- $\omega[rad]$ pulsația normalizată în domeniul discret ;
- $\Omega[rad/s]$ pulsația absolută în domeniul continuu.

Așadar, dacă $H(s)$ și $G(z)$ sunt funcții de transfer în continuu, respectiv discret, atunci caracteristicile lor de frecvență sunt $H(j\Omega)$, respectiv $G(e^{j\omega})$.

Transformarea biliniară

În Automatică sunt cunoscute o serie de transformări care realizează discretizarea unui sistem continuu. Transformarea ideală de discretizare este :

$$z = e^{sT_s}, \quad (6.2)$$

unde $T_s > 0$ este perioada de eșantionare. Această transformare este, însă, nerealizabilă fizic, deoarece logaritmul complex (necesar exprimării lui s în funcție de z) are mai multe ramuri (fiind o multi-funcție). În plus, ar fi de dorit ca o astfel de transformare de discretizare să fie exprimată în formă rațională (ca un raport de polinoame). Tot ce se poate obține, este o transformare care să fie cât mai apropiată de cea ideală, conservând caracteristicile esențiale ale acesteia. Astfel, o transformare aproximativă ar trebui, cel puțin, să curbeze semiplanele stângi, în sensul că acestea ar trebui să se deformeze în discuri ale planului complex, potrivit efectului transformării ideale (6.2).

O transformare de discretizare destul de utilizată este cea *biliniară* (transformarea lui *Tustin*), definită prin relația :

$$z = \frac{2 + sT_s}{2 - sT_s}, \quad (6.3)$$

Transformarea inversă :

$$s = \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{T_s} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}. \quad (6.4)$$

Transformarea continuu-discret a frecvențelor se obține din (6.4) înlocuind s cu $j\Omega$ și z cu $e^{j\omega}$. Cu alte cuvinte, din :

$$e^{j\omega} = \frac{2 + j\Omega T_s}{2 - j\Omega T_s} = \frac{(2 + j\Omega T_s)^2}{4 + \Omega^2 T_s^2} = \frac{4 - \Omega^2 T_s^2 + 4j\Omega T_s}{4 + \Omega^2 T_s^2}, \quad (6.5)$$

se obține relația următoare (după exprimarea cosinusului în funcție de tangenta jumătății de unghi) :

$$\omega = \arccos \frac{4 - \Omega^2 T_s^2}{4 + \Omega^2 T_s^2} = 2 \arctg \left(\frac{\Omega T_s}{2} \right). \quad (6.6)$$

Ecuția (6.6) exprimă, de fapt, o transformare neliniară care concentrează axa reală în intervalul $[-\pi, +\pi]$. (Pentru a înțelege mai ușor această transformare, se poate considera, de exemplu, că perioada de eșantionare este egală cu 2 s.)

Filtre analogice

Filtrul Butterworth

Filtrul Butterworth este definit de următoarea caracteristică în frecvență :

$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega)H(-j\Omega) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2M}}, \forall \Omega \in \mathbb{R}, \quad (6.7)$$

- M : ordinul filtrului ;
- Ω_c : pulsația sa de tăiere.

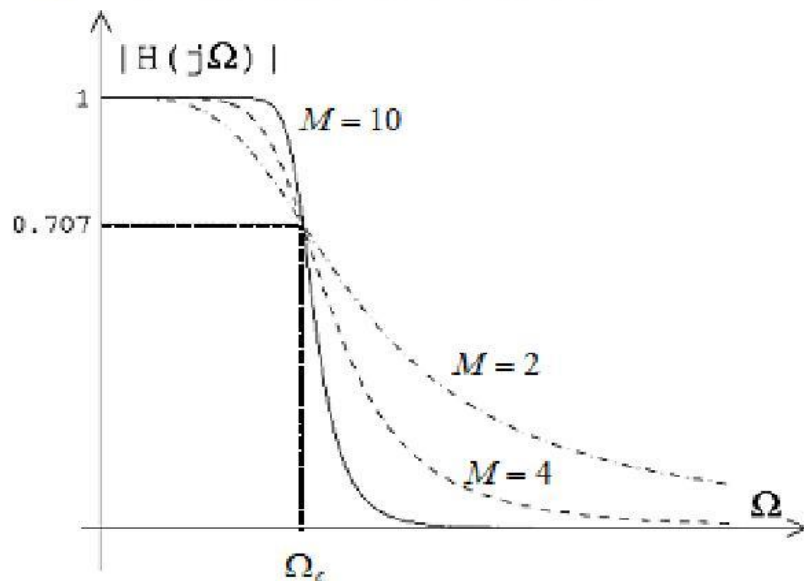


Figura 6.2. Amplitudinea răspunsului în frecvență al filtrului de tip Butterworth, pentru $M = 2$ (linie-punct), $M = 4$ (linie întreruptă) și $M = 10$ (linie continuă).

$$\rightarrow |H(j\Omega_c)| = 1/\sqrt{2}$$

$\Omega = \Omega_c$: atenuarea are aproximativ 3dB.

$$2^{10} = 1024 \cong 1000 = 10^3 \Rightarrow$$

$$2 \Big|_{dB} = 20 \lg 2 = 2 \lg 2^{10} \cong 2 \lg 10^3 = 6 \text{ dB} \Rightarrow |H(j\Omega_c)|_{dB} \cong -3 \text{ dB};$$

$$\rightarrow |H(0)| = 1;$$

→ M mare \Rightarrow tranziție mai abruptă în jurul valorii Ω_c (filtrul se apropie de cel ideal);

→ filtru nu prezintă lobi paraziți și nici oscilații în jurul amplificării unitare (precum alte filtre).

Funcția de transfer $H(s)$ se determină prelungind analitic definiția (6.7) (valabilă pentru $s = j\Omega$). Astfel, se obține :

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2M}}. \quad (6.8)$$

Polii funcției de transfer $H(s)H(-s)$, în număr de $2M$, sunt plasați echidistant pe un cerc de rază Ω_c centrat în origine, deci simetric față de axa imaginară :

$$s_m = \Omega_c \exp \left[j \frac{(2m - 1 + M)\pi}{2M} \right], \forall m = \overline{0, 2M - 1}. \quad (6.9)$$

Atunci, pentru $H(s)$, se aleg polii cu partea reală negativă, astfel încât ea să fie o funcție de transfer stabilă. Acest lucru se întâmplă dacă :

$$\frac{\pi}{2} < \frac{(2m - 1 + M)\pi}{2M} < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq M, \quad (6.10)$$

pentru ca funcția cosinus să aibă valori negative. Cu alte cuvinte polii stabili care pot determina funcția de transfer a filtrului Butterworth analogic sunt :

$$s_m = \Omega_c \exp \left[j \frac{(2m - 1 + M)\pi}{2M} \right], \forall m = \overline{1, M}. \quad (6.11)$$

Filtrul Cebîșev de tip I

Filtrul Cebîșev de tip I are un răspuns în frecvență cu ondulații egale în banda de trecere (equiripples) și comportament descrescător în banda de stopare.

Expresia analitică a caracteristicii de frecvență este următoarea :

$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega)H(-j\Omega) = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_M^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)}, \forall \Omega \in \mathbb{R}, \quad (6.12)$$

- $\epsilon > 0$: controlează înălțimea ondulațiilor în banda de trecere ;
- $T_M(x)$: *polinomul Cebîșev de tip I și ordin M* (definit inițial de către acesta ca interpolator).

Există numeroase definiții ale polinoamelor Cebîșev de tip I (fie explicite, fie în formă recursivă), printre care și una de natură trigonometrică :

$$T_M(x) = \begin{cases} \cos [\text{Marccos}(x)] & , |x| \leq 1 \\ \cosh [\text{Marccosh}(x)] & , x > 1 \\ (-1)^M \cosh [\text{Marccosh}(-x)] & , x < -1 \end{cases}, \quad (6.13)$$

care pune în evidență o egalitate interesantă :

$$T_M(\cos(\alpha)) = \cos(M\alpha), \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (6.14)$$

Spectrul acestui filtru este trasat în partea stângă a Figurii 6.3, pentru $M = 4$. Pentru $\Omega = \Omega_p$, se obține marginea de jos a oscilațiilor în banda de trecere :

$$|H(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2} = M_p. \quad (6.15)$$

Așadar, oscilațiile se vor încadra între M_p și 1.

Ca și în cazul filtrului Butterworth, definiția (6.12) nu oferă indicații referitoare la faza răspunsului în frecvență al filtrului Cebîșev de tip I. Polii acestui filtru se situează pe o elipsă.

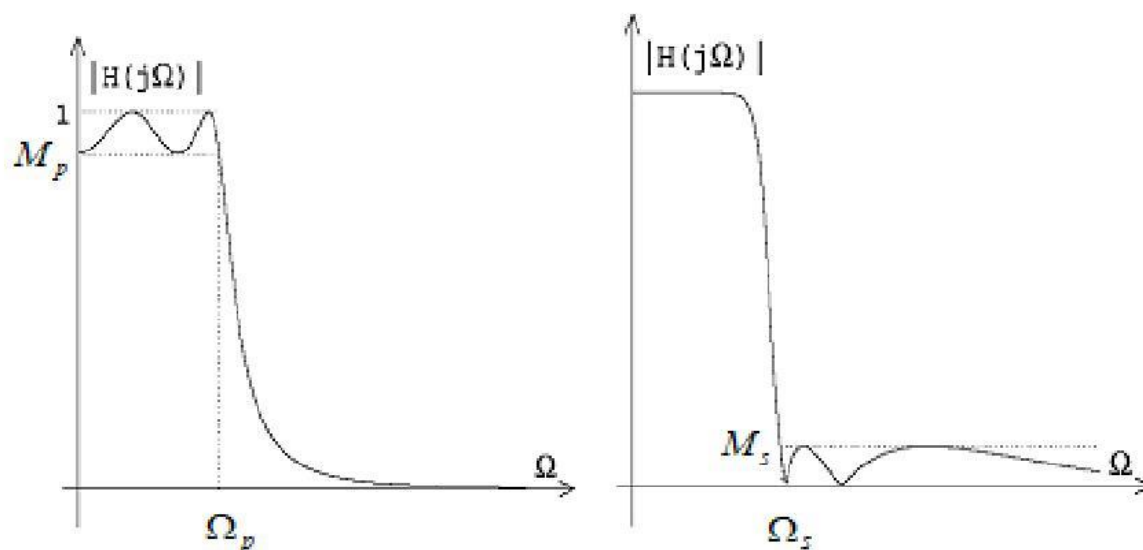


Figura 6.3. Amplitudinea răspunsului în frecvență al filtrelor de tip Cebîșev : de tip I (stânga, $M = 4$) ; de tip II (dreapta, $M = 6$).

Filtrul Cebîșev de tip II

Filtrul Cebîșev de tip II are un răspuns în frecvență descrescător în banda de trecere, cu ondulații egale în banda de stopare.

Caracteristica sa de frecvență este următoarea :

$$\left| H(j\Omega) \right|^2 = H(j\Omega)H(-j\Omega) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\epsilon^2 T_M^2 \left(\frac{\Omega_s}{\Omega} \right)}}, \forall \Omega \in \mathbb{R}. \quad (6.16)$$

Se observă că, odată cu inversarea termenului ce conține polinomul Cebîșev, se inversează și argumentul acestuia. Oscilațiile se regăsesc acum în banda de stopare, ca în partea dreaptă a Figurii 6.3, unde ordinul este $M = 6$. Dacă $\Omega = \Omega_s$, se obține marginea de sus a oscilațiilor în banda de stopare :

$$\left| H(j\Omega_s) \right|^2 = \frac{\epsilon^2}{1 + \epsilon^2} = M_s, \quad (6.17)$$

ceea ce obligă oscilațiile să se încadreze între 0 și M_s .

Filtrul Cauer (eliptic)

Descrierea acestui filtru este foarte tehnică.

Caracteristica de frecvență a unui filtru eliptic arată ca în Figura 6.4, unde $M = 4$.

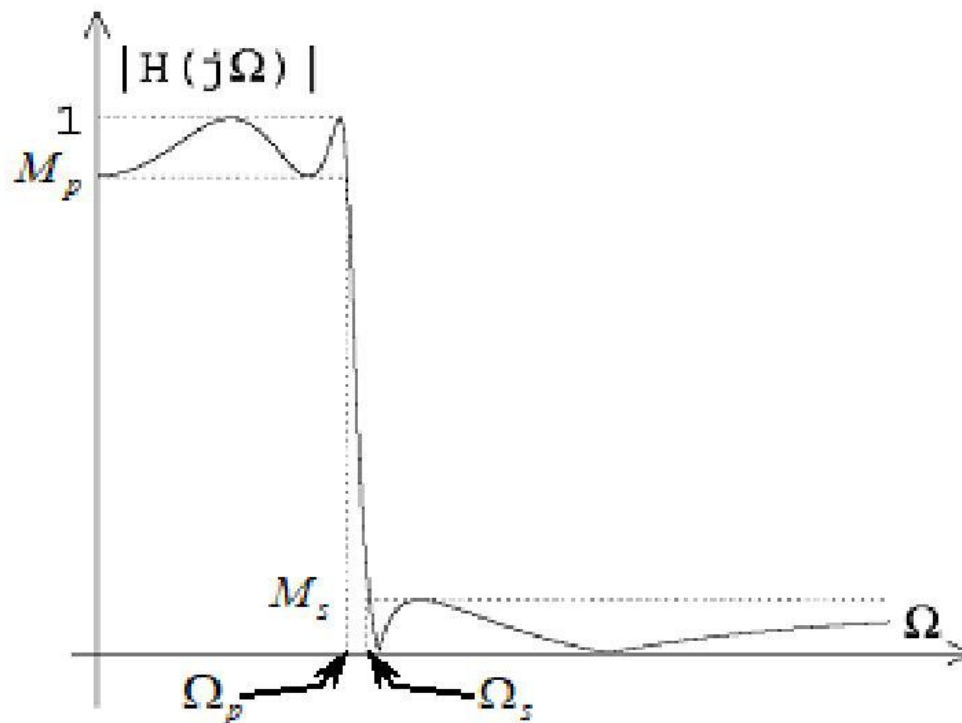


Figura 6.4. Amplitudinea răspunsului în frecvență al unui filtru eliptic (Cauer) de ordin $M = 4$.

- Intervalul $[M_p, 1]$: oscilațiile din banda de trecere ;
- Intervalul $[0, M_s]$: oscilațiile din banda de oprire.

Fenomenul Gibbs apare în ambele benzi, dar zona de tranziție între Ω_p și Ω_s este mai îngustă, pentru ordine mici, ca la celelalte filtre.

Proiectarea filtrului Butterworth discret

Revenind la transformarea (6.6), inversa ei este :

$$\Omega T_s = 2tg \frac{\omega}{2}. \quad (6.19)$$

Fiind exprimată printr-o funcție crescătoare, această transformare păstrează forma răspunsului în frecvență al unui filtru analogic, în sensul că, de exemplu, un FTJ analogic este transformat tot într-un FTJ, dar discret. Prin aplicarea transformării biliniare, spectrul (6.7) al filtrului Butterworth analogic se transformă în :

$$\left| G(e^{j\omega}) \right|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{tg(\omega/2)}{tg(\omega_c/2)} \right)^{2M}}, \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (6.20)$$

unde $\omega_c = 2arctg(\Omega_c T_s/2)$. Evident, (6.20) reprezintă acum spectrul filtrului Butterworth discret.

Pentru a proiecta acest filtru, trebuie determinați cei doi parametri necunoscuți : pulsația normalizată de tăiere ω_c și ordinul M . Se va apela la PPFTI, așa cum a fost descrisă în Tema de proiect 1.

Așadar, datele de proiectare sunt constituite de perechea de pulsații $\{\omega_p, \omega_s\}$ și perechea de toleranțe $\{\Delta_p, \Delta_s\}$. Pentru a găsi soluția acestei probleme în cazul filtrului Butterworth discret, se parcurg trei pași principali, după cum urmează.

Pasul 1 : Se transpun cerințele de proiectare în domeniul continuu.

Filtrul analogic corespunzător celui discret are răspunsul în frecvență din Figura 6.5, trasat în dreapta. Conform cu (6.19), rezultă :

$$\Omega_p = \frac{2}{T_s} \operatorname{tg} \frac{\omega_p}{2} \text{ și } \Omega_s = \frac{2}{T_s} \operatorname{tg} \frac{\omega_s}{2}. \quad (6.21)$$

Se dorește determinarea ordinului M și a frecvenței de tăiere Ω_c pentru un filtru Butterworth analogic, având spectrul (6.7), care verifică două condiții :

$$|H(j\Omega_p)| \geq M_p = 1 - \Delta_p \text{ și } |H(j\Omega_s)| \leq \Delta_s. \quad (6.22)$$

Pasul 2 : Se construiește filtrul Butterworth analogic care satisface condițiile (6.22). Caracteristica spectrală a filtrului trebuie să verifice inegalitățile :

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2M}} \geq M_p^2 \text{ și } \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2M}} \leq \Delta_s^2. \quad (6.23)$$

Din aceste inegalități vor rezulta ordinul M și frecvența de tăiere Ω_c . Deși soluția nu este unică, se caută filtrul cu valoarea minimală a lui M .

Se pleacă de la inegalitățile de mai jos, derivate din (6.23) :

$$2M \left[\log(\Omega_p) - \log(\Omega_c) \right] \leq \log \frac{1 - M_p^2}{M_p^2}; \quad (6.24)$$

$$2M \left[\log(\Omega_s) - \log(\Omega_c) \right] \geq \log \frac{1 - \Delta_s^2}{\Delta_s^2}. \quad (6.25)$$

Scăzând (6.24) din (6.25), se obține :

$$M \geq \frac{\log \left(\frac{M_p^2}{\Delta_s^2} \frac{1 - \Delta_s^2}{1 - M_p^2} \right)}{2 \log \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p} \right)}. \quad (6.26)$$

Desigur, ordinul M trebuie să fie întreg, așa că se alege egal cu primul întreg mai mare decât termenul din dreapta al inegalității (6.26). Pentru a calcula și pulsația de tăiere Ω_c , se poate impune egalitatea în una dintre inegalitățile (6.23). De exemplu, din prima inegalitate, la limită, rezultă :

$$\Omega_c = \frac{\Omega_p}{\sqrt[2M]{\frac{1 - M_p^2}{M_p^2}}}. \quad (6.27)$$

Odată ce s-au stabilit acești parametri, se construiesc, pe rând : caracteristica analogică de frecvență (6.7) și funcția de transfer stabilă definită de egalitatea (6.8).

Pasul 3 : Se construiește filtrul Butterworth discret G , aplicând transformarea biliniară asupra celui continuu (adică asupra funcției sale de transfer). Cu alte cuvinte, folosind polii (6.11), funcția de transfer a filtrului analogic este :

$$H(s) = \frac{(-1)^M \prod_{m=1}^M s_m}{\prod_{m=1}^M (s - s_m)}. \quad (6.28)$$

Evident, numărătorul fracției din (6.28) a rezultat prin normalizare. Așa cum se observă, $H(0) = 1$ (câștigul este unitar).

Prin discretizare cu Transformarea biliniară (6.4), din expresia (6.28), se obține funcția de transfer dorită :

$$\begin{aligned}
 G(z) &= \frac{(-1)^M \prod_{m=1}^M s_m}{\prod_{m=1}^M \left(\frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} - s_m \right)} = \frac{(-1)^M \left(\prod_{m=1}^M \frac{s_m T_s}{2 - s_m T_s} \right) (z+1)^M}{\prod_{m=1}^M \left(z - \frac{2 + s_m T_s}{2 - s_m T_s} \right)} = \\
 &= \frac{(-1)^M \left(\prod_{m=1}^M \frac{s_m T_s}{2 - s_m T_s} \right) (1 + z^{-1})^M}{\prod_{m=1}^M \left(1 - z^{-1} \frac{2 + s_m T_s}{2 - s_m T_s} \right)}
 \end{aligned} \tag{6.29}$$

Se observă că filtrul discret are un zero în -1 de multiplicitate M . Se poate arăta că polii acestuia sunt toți stabili (în interiorul discului unitar), fapt care constituie un exercițiu util pentru cititor. De observat că acești poli se pot obține direct din cei ai filtrului analogic, prin aplicarea Transformării biliniare. Se mai poate arăta și că ei sunt fie reali, fie grupați în perechi complex conjugate. Cititorul poate încerca să demonstreze și această proprietate. (Este suficient să se arate că polii stabili ai filtrului analogic au această proprietate, iar Transformarea biliniară este invariantă la conjugarea complexă.) De asemenea, $G(1) = 1$ (filtrul discret moștenește câștigul filtrului analogic). Expresia finală din (6.29) este specifică funcțiilor de transfer discrete asociate filtrelor (adică folosind variabila complexă z^{-1} și nu variabila complexă z).

Răspunsul în frecvență al unui filtru Butterworth discret astfel proiectat este prezentat în partea stângă a Figurii 6.5. El a fost trasat presupunând că cerințele sunt satisfăcute la limită. În practică, după proiectarea acestui filtru, ar trebui testat dacă se verifică inegalitățile :

$$\left| G(e^{j\omega_p}) \right| \geq M_p \text{ și } \left| G(e^{j\omega_s}) \right| \leq \Delta_s. \quad (6.30)$$

Evident, deoarece amplitudinea răspunsului este descrescătoare, dacă inegalitățile (6.30) sunt îndeplinite, ele conduc automat și la verificarea inegalităților „de sub-bandă” de mai jos :

$$M_p \leq \left| G(e^{j\omega}) \right| \leq 1, \quad \omega \in [0, \omega_p]; \quad (6.31)$$

$$\left| G(e^{j\omega}) \right| \leq \Delta_s, \quad \omega \in [\omega_s, \pi]. \quad (6.32)$$

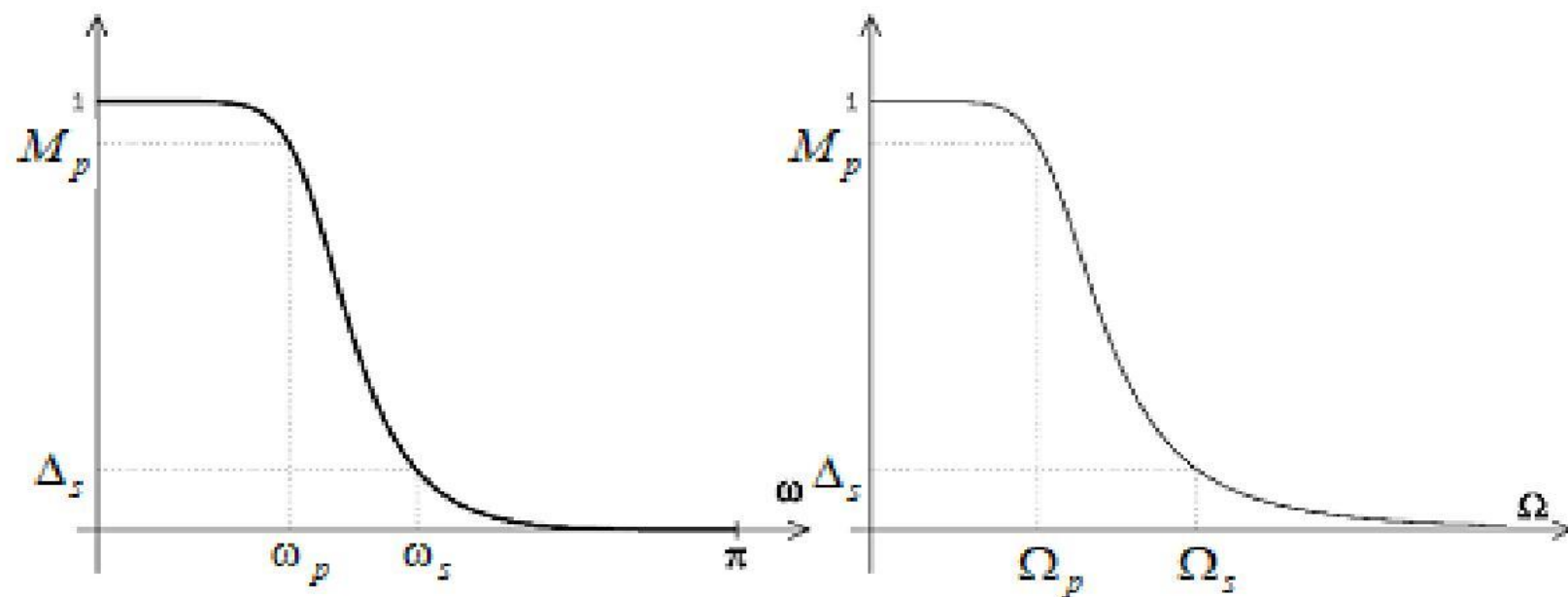


Figura 6.5. Filtre Butterworth discret (stânga) și analogic (dreapta) satisfăcând cerințele unei PPFTI.

Ghid MATLAB

Filtre analogice

Filtrul Butterworth

Filtrul Butterworth analogic se proiectează cu apelul :

» `[rb,ra,k0]=butter(M) ;`

- M : ordinul filtrului ;
- rb : zerourile filtrului ;
- ra : polii filtrului ;
- $k0$: amplificarea filtrului.

Pulsația de tăiere are aici valoarea normalizată $\Omega_c = 1$.

Filtrele lui Cebîșev de tip I și II

Filtrele analogice ale lui Cebîșev de tip I și II se proiectează cu funcțiile `cheb1ap`, `cheb2ap`.

Filtrul eliptic

Filtrul analogic eliptic se proiectează cu funcția `ellipap`.

Filtre discrete

Filtrul Butterworth

O metodă de proiectare prin transformare a filtrului Butterworth discret este implementată de funcția `butter`. Funcția se apelează cu instrucțiunea :

» `[b,a]=butter(M,om_c)` ;

→ M : ordinul filtrului ;

→ om_c : corespunde pulsației discrete normalizate ω_c din (6.20).

Practic, funcția `butter` implementează algoritmul descris în cadrul suportului teoretic (adică apelează la funcția `butter` și aplică transformarea biliniară cu $T_s = 2$).

Filtrele lui Cebîșev de tip I, II

Filtrele discrete ale lui Cebîșev de tip I și II se proiectează cu funcțiile `cheby1`, `cheby2`.

Filtrul eliptic

Filtrul eliptic discret se proiectează cu funcția `ellip` :

» `[b,a]=ellip(M,Rp,Rs,om_p)` ;

→ R_p : caracterizează înălțimea undulațiilor în banda de trecere (dB);

Dacă undulațiile din banda de trecere au înălțimea Δ_p , atunci R_p este definit prin :

$$R_p = -20 \log_{10}(1 - \Delta_p), \quad (6.33)$$

→ R_s : caracterizează înălțimea undulațiilor în banda de stopare (dB).

Dacă Δ_s este înălțimea undulațiilor în banda de stopare, atunci R_s este definit prin :

$$R_s = -20 \log_{10} \Delta_s. \quad (6.34)$$

Aici, R_s este interpretat ca atenuare, în dB, aplicată în banda de stopare ;

→ M : ordinul filtrului ;

→ om_p : pulsația maximă de trecere.

În plus, toate funcțiile MATLAB de mai sus permit proiectarea unor FTS, FTB sau filtre oprește-bandă (FOB).

Faze de proiectare

Faza 1 (Rezolvarea PPFTI cu filtre Butterworth)

Funcția MATLAB *But_FTI.m*, încărcată pe platforma Moodle (<https://curs.upb.ro>), implementează algoritmul descris în finalul părții teoretice a acestui proiect. Primele linii ale programului realizează implementarea formulelor (6.21), (6.26) și (6.27), care stabilesc parametrii filtrului analogic. Calculul polilor stabili ai acestui filtru se efectuează conform formulei (6.11). Transformarea biliniară (6.4) se aplică direct asupra polilor (și nu asupra coeficienților filtrului analogic). Aceasta conduce la formula în z^{-1} a funcției de transfer (6.29) corespunzătoare filtrului discret proiectat. Funcția întoarce polinoamele acestei funcții de transfer (sub formă de vectori de coeficienți reali). În ultimele instrucțiuni ale programului, s-a extras în mod forțat doar partea reală a acestor coeficienți, pentru a elimina partea imaginară cauzată de erorile numerice. (Așa cum s-a precizat, se știe că polinomul de la numitorul funcției de transfer (6.29) nu poate avea decât coeficienți reali.)

- Utilizați funcția furnizată pentru a rezolva PPFTI cu specificațiile următoare :
 $\omega_p = 0.3\pi$, $\omega_s = 0.4\pi$, $\Delta_p = \Delta_s = 0.1$ și $T_s = 2s$.
- Modificați funcția furnizată astfel încât ea să corespundă unei variante a Transformării biliniare exprimate prin :

$$s = \frac{1}{T_s} \frac{z-1}{z+1} = \frac{1}{T_s} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}. \quad (6.35)$$

Reluați punctul a. pentru noua transformare de discretizare. Comparați cele două filtre obținute (ca parametri și ca răspunsuri în frecvență). Observați diferențe între cele două filtre?

- c. Analizați cu atenție formulele (6.21), (6.27) și (6.29). Credeți că funcția de transfer a filtrului discret depinde de perioada de eșantionare? Dacă da, arătați cum. Dacă nu, justificați riguros de ce. (Puteți utiliza mai întâi funcțiile anterioare pentru a proiecta și analiza filtre cu diferite perioade de eșantionare și aceleași specificații ω_p , ω_s , Δ_p , Δ_s . Apoi, se poate reveni la formulele precizate, pentru a demonstra proprietatea observată.)
- d. Elaborați un mic studiu comparativ de proiectare a filtrelor Butterworth discrete, alegând alte specificații de proiectare ca la punctul a., dar menținând constante pulsațiile $\{\omega_p, \omega_s\}$ și variind toleranțele $\{\Delta_p, \Delta_s\}$, nu neapărat egale. Arătați cum variază ordinul filtrului în funcție de acestea. Oferiți toate explicațiile.
- e. Folosind Metoda ferestrei (funcția fir1) și Metoda celor mai mici pătrate (funcția firls) construiți un filtru FIR de ordin cât mai mic, care să satisfacă aceleași specificații. Trasați pe aceleași grafice răspunsurile în frecvență ale celor două filtre (spectru și fază). Comentați diferențele dintre ele.

Faza 2 (Rezolvarea PPFTI cu filtre Cauer și Cebîșev)

Se consideră PPFTI pentru specificațiile următoare : $\omega_p = 0.3\pi$, $\omega_s = 0.4\pi$, $\Delta_p = 0.05$ și $\Delta_s = 0.1$.

- a. Găsiți un filtru eliptic care satisface cerințele problemei. În acest scop, folosiți funcția MATLAB `ellip`. Relațiile (6.33) și (6.34) explică legătura parametrilor funcției cu toleranțele Δ_p și Δ_s . Observați că funcția `ellip` nu permite precizarea frecvenței ω_s , astfel că trebuie efectuate încercări succesive pentru a găsi *filtrul de grad minim* care rezolvă problema.
- b. Pentru aceeași problemă de proiectare, găsiți soluții Butterworth și FIR (folosind Metoda ferestrei (funcția `fir1`) și Metoda celor mai mici pătrate (funcția `firls`)). Comparați gradele filtrelor și răspunsurile în frecvență. Care este cel mai bun filtru ? (Precizați criteriile/criteriul după care vă ghidați când stabiliți că un anumit filtru este mai bun decât altul.)
- c. Studiați modul de apel al funcțiilor `cheby1` și `cheby2`, care proiectează filtre din clasa Cebîșev. Rezolvați problema de proiectare de mai sus cu acest tip de filtre. Comparați ordinele și răspunsurile în frecvență ale filtrelor obținute cu cele ale filtrelor de mai sus.

Faza 3 (Concurs de proiectare)

Se consideră o PPFTI cu datele ω_p , ω_s , Δ_p și Δ_s . Folosind cele 4 tipuri de filtre analogice descrise anterior și Transformarea biliniară (6.4) (cu T_s arbitrar ales), proiectați un filtru care respectă specificațiile de proiectare ale problemei și are cel mai mic număr de coeficienți. Efectuați o comparație între răspunsurile în frecvență ale filtrului proiectat și filtre de ordine apropiate acestuia, dar ușor mai mici sau mai mari, din cele 4 categorii. Explicați de ce numărul de coeficienți al unui astfel de filtru este bine să fie cât mai mic.

Faza 4 (Supliment : proiectarea unui filtru Butterworth având amplificare staționară neunitară)

Modificați algoritmul de proiectare din Faza 1, astfel încât cerințele PPFTI să fie satisfăcute de un filtru Butterworth pentru care $H(0) = 1 + \Delta_p$. (În algoritmul din Faza 1, s-a considerat că filtrul are câștig unitar, adică $H(0) = 1$.)

Pentru scrierea algoritmului, demonstrați că ordinul filtrului se obține prin modificarea relației (6.26) în :

$$M \geq \frac{\log \left[\frac{(1 + \Delta_p + \Delta_s)(1 + \Delta_p - \Delta_s)}{\Delta_p \Delta_s^2 (2 + \Delta_p)} \right]}{2 \log \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p} \right)} \quad (6.36)$$

având în vedere că, acum, $M_p = |H(0)| - \Delta_p = 1 + \Delta_p - \Delta_p = 1$.

De asemenea, arătați că pulsația de tăiere (6.27) trebuie înlocuită de :

$$\Omega_c = \frac{\Omega_p}{\sqrt[2M]{\Delta_p(2 + \Delta_p)}}. \quad (6.37)$$

În fine, observați că și în acest caz câștigul filtrului analogic este moștenit de filtrul discret aferent, el nefiind afectat de operația de discretizare (se pot calcula $H(0)$ și $G(1)$, pentru a observa că ele sunt egale).