Prelucrarea semnalelor

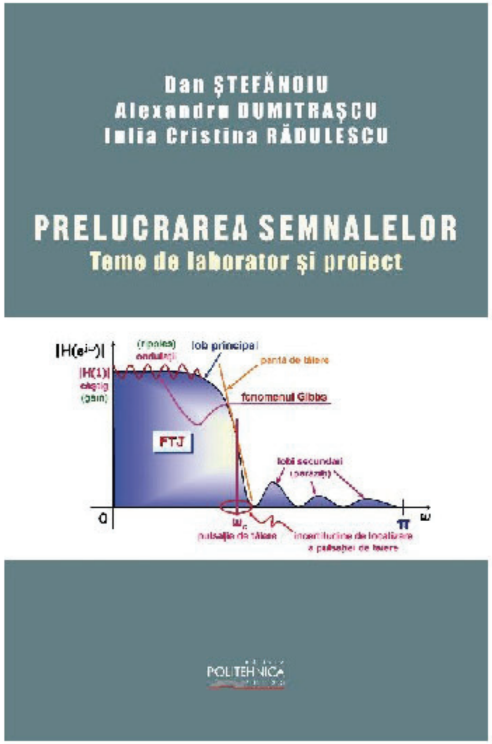
Laborator 3 - Reprezentarea în frecvenţă a sistemelor liniare invariante la deplasări (temporale)

https://curs.upb.ro

Profesor Dan ŞTEFĂNOIU
dan.stefanoiu@upb.ro

Conferenţiar Alexandru DUMITRAŞCU
alexandru.dumitrascu@upb.ro

Şef de lucrări Vasilică VOINEA
vasilica.voinea@upb.ro



Obiective

Reprezentarea grafică a răspunsului în frecvență al sistemelor discrete liniare invariante la deplasări (temporale) (SLID). Studiul sistemelor cu unul sau două zerouri/poli. Interpretarea răspunsului în frecvență al unui SLID.

Suport teoretic

Caracteristici generale ale SLID

Răspunsul în frecvență al SLID

Considerăm un SLID (sistem discret liniar invariant la deplasări (temporale)) stabil, al cărui răspuns la impuls este h. Fie H funcția sa de transfer (TZ a secvenței h).
Restricția lui H pe cercul unitar, adică :

$$H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = H(e^{j\omega}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h[n]e^{-j\omega n}, \forall\omega \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

este chiar răspunsul în frecvență al sistemului (TF a secvenței h).
Dacă la intrarea sistemului se aplică $x[n] = e^{j\omega_0 n}, \forall n \in \mathbb{Z}$ (pentru $\omega_0 \in [-\pi, +\pi]$ prestabilit), atunci ieșirea este tot un semnal sinusoidal complex, de aceeași pulsație, dar de amplitudine și fază determinate de sistem :

$$y[n] = H\left(e^{j\omega_0}\right)e^{j\omega_0 n} = \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| e^{j\left\{\omega_0 n + arg\left[H\left(e^{j\omega_0}\right)\right]\right\}}, \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{3.2}$$

Răspunsul în frecvență al unui SLID se poate identifica empiric prin stimularea acestuia cu sinusoide complexe de diferite pulsații.

Spectru și fază

→ Răspuns la impuls h real
Spectrul și faza răspunsului în frecvență se reprezintă pe jumătate de bandă, adică pentru $\omega \in [0, \pi]$. Pentru $\omega \in [-\pi, 0)$, se ține seama de simetria TF (spectrul este par, iar faza este impară).

→ Răspuns la impuls h complex
Se va considera întreaga bandă de pulsații normalizate $\omega \in [-\pi, \pi]$.
Deoarece exponențiala complexă este o funcție periodică, de perioadă 2π, faza se poate reprezenta doar cu valori în intervalul $[-\pi, +\pi]$, prin adunarea sau scăderea în mod adecvat a unor multipli de 2π. Astfel se obține valoarea principală a fazei : $arg\left(H\left(e^{j\omega}\right)\right)$. Aceasta este folosită întotdeauna atunci când faza unui filtru se calculează prin metode numerice.

Convoluția directă

Dacă un SLID stabil, având răspunsul la impuls h, este stimulat cu un semnal de intrare stabil x, atunci răspunsul său, $y = h * x$, obținut prin convoluție, este tot stabil.
În plus, între TF ale intrării și ieșirii există următoarea relație, în care intervine răspunsul în frecvență al sistemului :

$$Y(\omega) = H\left(e^{j\omega}\right) X(\omega), \forall \omega \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

Astfel, spectrul semnalului de ieșire se poate evalua cu ajutorul răspunsului în frecvență al sistemului (dacă este cunoscut) sau se poate estima atunci când sunt cunoscute (sau se măsoară) semnalele de la intrare și ieșire.

Caracteristica de frecvență a filtrelor raționale

Filtru *cu răspuns infinit la impuls* IIR

Funcția de transfer a unui filtru *cu răspuns infinit la impuls* (IIR) rațional este de forma :

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{\sum\limits_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{\sum\limits_{n=0}^{N} a_n z^{-n}}=\frac{b_0\prod\limits_{q=1}^{M}\left(1-c_q z^{-1}\right)}{a_0\prod\limits_{p=1}^{N}\left(1-d_p z^{-1}\right)}, \tag{3.4}$$

unde $\{a_n\}_{n\in\overline{0,N}}$ și $\{b_m\}_{m\in\overline{0,M}}$ sunt coeficienții filtrului, iar $\{c_q\}_{q\in\overline{0,M}}$ și $\{d_p\}_{p\in\overline{0,N}}$ sunt zerourile, respectiv polii filtrului.

Caracteristica de frecvență (răspunsul în frecvență) a unui filtru IIR se poate trasa mai ușor atunci când funcția de transfer se reprezintă în forma poli-zerouri.
Amplitudinea în dB este :

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|_{dB}=20log_{10}\left|\frac{b_0}{a_0}\right|+20\sum_{q=1}^{M} log_{10}\left|1-c_q e^{-j\omega}\right|-20\sum_{p=1}^{N} log_{10}\left|1-d_p e^{-j\omega}\right|,\forall\omega\in\mathbb{R}, \tag{3.5}$$

iar faza se poate exprima astfel :

$$arg\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right]=arg\left(\frac{b_0}{a_0}\right)+\sum_{q=1}^{M} arg\left(1-c_q e^{-j\omega}\right)-\sum_{p=1}^{N} arg\left(1-d_p e^{-j\omega}\right),\forall\omega\in\mathbb{R}. \tag{3.6}$$

Se observă că, în (3.5) și (3.6), apar sume ale amplitudinilor, respectiv fazelor unor termeni elementari de gradul 1 (dar cu coeficienți având, în general, valori complexe). Mai mult, singura diferență între efectul polilor și cel al zerourilor este semnul termenilor corespunzători.

Filtru *cu răspuns finit la impuls* FIR

Dacă filtrul IIR (3.4) are numai zerouri, atunci el este *cu răspuns finit la impuls* (sau de tip FIR). În acest caz, răspunsul la impuls este constituit chiar de valorile coeficienților polinomului care dă zerourile filtrului.

→ Filtrul FIR de ordinul 1

Funcția de transfer a acestui filtru este următoarea :

$$H(z) = 1 - cz^{-1}, c = re^{j\theta}, \theta \in [0, \pi]. \tag{3.7}$$

Amplitudinea răspunsului în frecvență este dată de :

$$\left| H\left(e^{j\omega}\right) \right| = \left| 1 - re^{j(\theta-\omega)} \right| = \sqrt{1 + r^2 - 2rcos\left(\omega - \theta\right)}, \forall \omega \in \mathbb{R}. \tag{3.8}$$

Deoarece răspunsul în frecvență al filtrului (3.7) este :

$$H\left(e^{j\omega}\right) = 1 - r\left[cos\left(\omega - \theta\right) - jsin\left(\omega - \theta\right)\right], \forall\omega \in \mathbb{R}, \tag{3.9}$$

valoarea principală a fazei este :

$$arg\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right] = arctg\left(\frac{rsin\left(\omega - \theta\right)}{1 - rcos\left(\omega - \theta\right)}\right), \forall\omega \in \mathbb{R}. \tag{3.10}$$

$\rightarrow$ Filtrul FIR de ordinul 2

În general, funcțiile de transfer ale filtrelor au coeficienți reali. Se va considera în acest caz un filtru cu funcția de transfer ce are zerouri complex conjugate. Zerourile sunt $c = re^{j\theta}$, respectiv $\overline{c} = re^{-j\theta}$, iar funcția de transfer are forma de mai jos :

$$H(z) = \left(1 - cz^{-1}\right)\left(1 - \overline{c}z^{-1}\right) = 1 - 2rcos(\theta)z^{-1} + r^2z^{-2}. \tag{3.11}$$

Amplitudinea răspunsului în frecvență, exprimată în dB, se obține adunând două amplitudini de tipul (3.8), corespunzătoare valorilor θ și $-\theta$. Similar, faza se obține adunând fazele corespunzătoare factorilor de grad 1 ai lui (3.11).

În Figura 3.1 este ilustrată caracteristica de frecvență a filtrului (3.11) pentru $\theta = 0.4\pi$.

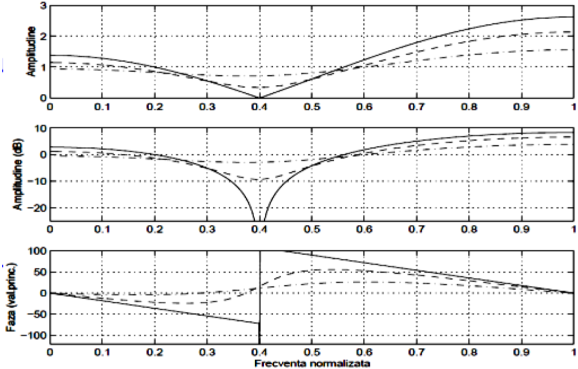


Figura 3.1. Caracteristica de frecvență a unui filtru de tip FIR de ordin 2, pentru $\theta = 0.4\pi$ (linie continuă : $r = 1$; linie întreruptă : $r = 0.8$; linie-punct : $r = 0.5$).

Deoarece coeficienții filtrului sunt reali, graficul amplitudinii este simetric față de axa verticală, astfel că este suficientă trasarea lui pentru banda $[0, \pi]$. În figură, axa absciselor fost normalizată prin împărțirea pulsațiilor la π.

Ghid MATLAB

Caracteristica de frecvență a unui filtru IIR

- → ≫ **freqz(b,a) ;**

  % trasează caracteristica filtrului cu o rezoluție de 50 de linii spectrale, în banda [0,π]

- → ≫ **H = freqz(b,a,w) ;** % nu trasează grafice

  % depune în vectorul **H** valorile răspunsului în frecvență calculat în pulsațiile grilei de frecvențe **w**,
  % generate de utilizator (de exemplu: **w = –pi:pi/K:pi**, unde **K** este un întreg precizat)

De exemplu, caracteristica filtrului FIR de ordinul doi (3.11) cu $r = 0.8$ și $\theta = \pi/3$ se trasează cu ajutorul instrucțiunilor :

- → ≫ **b = poly(0.8*[exp(j*pi/3) exp(–j*pi/3)]) ;** % calculează coeficienții polinomului din rădăcini
- → ≫ **freqz(b,1,w) ;** **(b = [1 –0.8 0.64])**

Amplitudinea răspunsului în frecvență

Desenarea amplitudinii răspunsului în frecvență al filtrului se realizează cu :

- → ≫ **plot(w,abs(H)) ;** % cu axe liniare

  >> plot(w,20*log(abs(H))) ; % cu axe semilogaritmice (în dB)

Diagrama poli-zerouri

Diagrama poli-zerouri a unui filtru IIR se trasează cu unul dintre apelurile :

- → ≫ **zplane(b,a) ;** % recomandat
- → ≫ **pzmap(b,a) ;**

Teme de laborator

Tema 1 (Filtre FIR de ordinul 1)

Considerăm filtrele FIR cu funcția de transfer (3.7) și perechea de parametri $\{r, \theta\}$.

a. Alegeți o valoare pentru θ, de exemplu $\theta = \pi/3$. Menținând această valoare fixată, trasați caracteristica de frecvență a filtrului pentru diverse valori ale lui r între 0 și 1. Caracteristica de frecvență se va trasa pentru $\omega \in [-\pi, +\pi]$. Verificați, cu ajutorul funției **zplane/pzmap**, că poziția zeroului este cea dorită.

   Încercați să respectați stilul din Fig. 3.1, adică :

   - $\rightarrow$ suprapuneți mai multe răspunsuri pentru a evidenția diferențele dintre ele ;
   - $\rightarrow$ trasați amplitudinea răspunsului atât în dB (axe semilogaritmice), cât și adimensional (axe liniare).

   Observați că apropierea lui r de valoarea unitară (i.e a zeroului de cercul unitate) produce atenuări din ce în ce mai mari în jurul frecvenței $\omega = \theta$.

b. Repetați operațiile de mai sus pentru o altă valoare a lui θ.

Tema 2 (Filtre FIR de ordinul 2)

Considerăm acum filtrele FIR de ordinul 2, cu funcția de transfer (3.11) și perechea de parametri $\{r, \theta\}$. Repetați operațiile de la tema precedentă pentru acest tip de filtre.

Tema 3 (Filtre IIR autoregresive)

Un filtru *autoregresiv* (AR) are funcția de transfer $G(z) = 1/H(z)$, unde H este un filtru FIR. Este clar că, din cauza împărțirii infinite dintre polinoamele 1 și H, funcția de transfer a filtrului AR nu mai poate returna un răspuns finit la impuls. Rezultă că filtrele AR nu pot fi decât de tip IIR. Cu toate acestea, remarcați maniera în care se pot memora caracteristicile unui filtru IIR (exprimate printr-un număr infinit de valori), cu ajutorul unui număr finit de date (coeficienții polinomului H).
Considerați filtrul AR de ordinul 2, având funcția de transfer exprimată ca mai jos :

$$G(z) = \frac{1}{(1 - cz^{-1})(1 - \bar{c}z^{-1})} = \frac{1}{1 - 2r\cos(\theta)z^{-1} + r^2 z^{-2}}. \tag{3.12}$$

a. Repetați aceleași operații ca la temele precedente. Observați că graficele amplitudinii (în dB) se obțin prin oglindirea față de abscisă a celor obținute pentru filtrele FIR de ordinul 2, ceea ce constituie o ilustrare intuitivă a fenomenului de împărțire algebrică (abscisa poate fi privită ca o linie de fracție).

b. Normați filtrul astfel încât pentru $\omega = 0$, $G(1)\Big|_{dB} = 0$ și retrasați un grafic de amplitudine. Explicați fenomenul observat, în raport cu graficele anterioare.

Tema 4 (Legătura dintre poli, zerouri și răspunsul în frecvență)

a. Alegeți un filtru stabil având coeficienți reali, care conduc la 2-4 poli și 2-4 zerouri (numărul de poli poate fi diferit de numărul de zerouri ; de exemplu : $N = 2$ și $M = 3$). Alegeți poli și zerouri relativ aproape de cercul unitate, de exemplu, cu modulul mai mare de 0.7. Trasați diagrama poli-zerouri (cu ajutorul funcției **zplane/pzmap**) și răspunsul în frecvență (cu ajutorul funcției **freqz**). Observați aspectul răspunsului în frecvență pentru frecvențele corespunzătoare argumentelor zerourilor și polilor.

b. Varianta clasică

   Arătați răspunsul în frecvență unui coleg și rugați-l să "ghicească" pozițiile polilor și zerourilor. (De asemenea, pregătiți-vă să răspundeți la o întrebare similară. Sugestie : ca să vă antrenați, alegeți aleator polii și zerourile).

b. Varianta on-line

   Repetați operațiile de la punctul a., dar pentru poli și zerouri relativ aproape de origine, de exemplu, cu modul mai mic decât 0.3.

Tema 5 (Modelul simplu al unui instrument muzical)

Timbrul unui instrument muzical este dat de amplitudinea armonicelor sunetului fundamental emis. De exemplu, dacă sunetul fundamental are frecvența ω_0, atunci sunetul (discretizat) emis de instrument are forma (idealizată) următoare :

$$y[n] = \sum_{k=1}^{\mathsf{K}} \alpha_k sin(k\omega_0 n), \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{3.13}$$

unde $\alpha_1 = 1$ este amplitudinea armonicei fundamentale, valoarea α_k reprezintă contribuția armonicei superioare, de ordin k, la formarea sunetului (pentru orice $k \in \overline{1,\mathsf{K}}$), iar K este numărul total de armonice emise.

De obicei, armonicele superioare au contribuții mai mici decât cea fundamentală, adică se verifică proprietatea :

$$|\alpha_k| < 1, \forall k \in \overline{2,\mathsf{K}} \tag{3.14}$$

Putem modela un instrument de o manieră aproximativă, printr-un filtru H, la intrarea căruia figurează semnalul următor, exprimat ca o sumă de sinusoide de amplitudini egale :

$$x[n] = \sum_{k=1}^{\mathsf{K}} sin(k\omega_0 n), \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{3.15}$$

Amplitudinile $\{\alpha_k\}_{k\in\overline{1,\mathsf{K}}}$ ale armonicelor semnalului de ieșire y vor depinde de caracteristica de frecvență a filtrului.

Programul **lab3_muzica.m** de pe platforma Moodle (https ://curs.upb.ro) conține un astfel de model împreună cu unele sunete predefinite (în care valorile $\{\alpha_k\}_{k\in\overline{1,N}}$ sunt fixate).

a. Studiați programul și executați-l pentru sunetele predefinite. Observați cum a fost definit filtrul (de tip IIR, cu un singur pol stabil).

b. Alegeți mai multe filtre (eventual, introducând și un zerou), apoi încercați să distingeți diferențele de timbru între sunetele obținute (având grijă ca spectrele semnalelor obținute să fie suficient de diferite). Chiar dacă nu vă veți apropia de instrumente existente, aveți șansa de a inventa unele noi !