# ❷ Caracterizări în timp şi frecvenţă

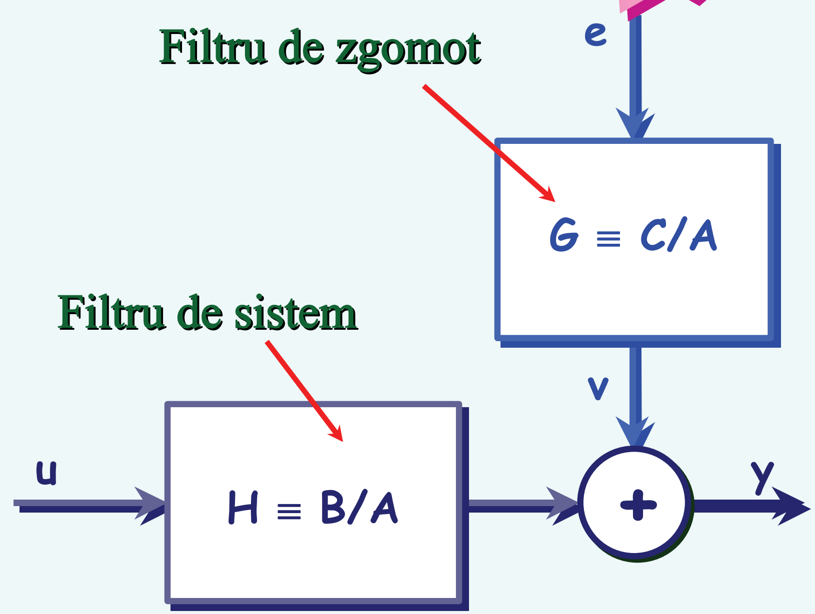
3 p

## ☞ Notaţii şi definiţii de bază

### Clasa de modele ARMAX

$$\underbrace{A(\mathrm{q}^{-1})y[n]}_{\text{AR}} = \underbrace{B(\mathrm{q}^{-1})u[n]}_{\text{X}} + \underbrace{C(\mathrm{q}^{-1})e[n]}_{\text{MA}}$$

Auto-Regresiv — Control eXogen — Medie Alunecătoare




• $\mathrm{q}^{-1}$ ⇨ Operatorul de întîrziere cu un pas.

$$\left(\mathrm{q}^{-1} f\right)[n] = f[n-1] \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

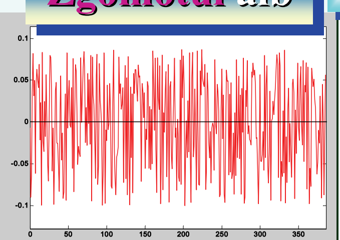
Polinoame

$$A(\mathrm{q}^{-1}) = 1 + a_1 \mathrm{q}^{-1} + \cdots + a_{na} \mathrm{q}^{-na}$$

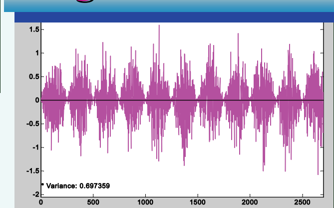
$$B(\mathrm{q}^{-1}) = \quad b_1 \mathrm{q}^{-1} + \cdots + b_{nb} \mathrm{q}^{-nb}$$ ☝ intrarea nu se transmite instantaneu la ieşire

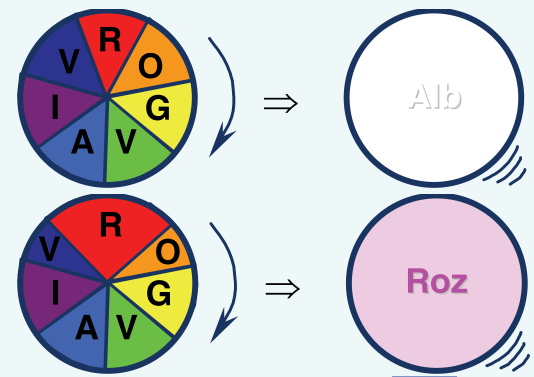
$$C(\mathrm{q}^{-1}) = 1 + c_1 \mathrm{q}^{-1} + \cdots + c_{nc} \mathrm{q}^{-nc}$$ ☝ zgomotul se transmite instantaneu la ieşire

**Zgomotul alb** — $e$ ⇨ proces stocastic total necorelat, impredictibil



**Zgomotul colorat** — $v$ ⇨ zgomot alb filtrat



# ❷ Caracterizări în timp şi frecvenţă

## ☞ Notaţii şi definiţii de bază

Operatorul de mediere statistică $E\{y[n]\}$ ⇒ Media statistică a ieşirii procesului, pe ansamblul realizărilor, la momentul $nT_e$.

Ipoteza Ergodică

Media temporală a oricărei realizări suficient de îndelungate.

$$E\{y[n]\} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} y[n]$$

Auto-covarianţă & Covarianţă

$$r_u[k] \overset{def}{=} E\{u[n]u[n-k]\}$$

$$r_{uy}[k] \overset{def}{=} E\{u[n]y[n-k]\}$$

$\forall k \in \mathbb{Z}$

Arată gradul de corelare dintre procese sau realizări ale aceluiaşi proces.

Transformată Fourier ⇒ Densitate Spectrală de Putere

Arată conţinutul în frecvenţă al proceselor.

**Directă**

$$X(e^{j\omega}) \overset{def}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n]e^{-j\omega n}, \quad \forall\, \omega \in \mathbb{R}$$

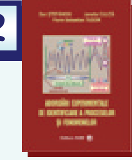
$$\phi_{u,uy}(\omega) \overset{def}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} r_{u,uy}[k]e^{-j\omega n}, \quad \forall\, \omega \in \mathbb{R}$$

**Inversă**

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega})e^{+j\omega n}d\omega, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

$$r_{u,uy}[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \phi_{u,uy}(\omega)e^{+j\omega n}d\omega, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

☝ determinist ☝ nedeterminist



# ❷ Caracterizări în timp şi frecvenţă

☝ determinist

$$u \rightarrow \boxed{\text{Sistem} \quad h[k]\ ,\ H(e^{j\omega})} \rightarrow y$$

## Timp

### Analiza tranzitorie

- Pentru estimarea timpului mort şi/sau a funcţiei pondere.
- Utilitate redusă în IS.

## Frecvenţă

### Analiza în frecvenţă

- Pentru estimarea răspunsului în frecvenţă.

$$y \equiv h * u \Longleftrightarrow Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})U(e^{j\omega})$$

$$u[n] = u_0 \sin(\omega_0 n)$$
$$y[n] = y_0 \sin(\omega_0 n + \varphi)$$

$$\Rightarrow$$

$$y_0 = u_0 \left| H(e^{j\omega_0}) \right|$$ ← Se poate trasa pentru diferite valori ale lui $\omega_0$.

$$\varphi = \arg H(e^{j\omega_0})$$ ← Dificil de estimat!

## O strategie

- Pentru: $\omega_0 = 2\pi m_0 / n_0$ $\quad m_0, n_0 \in \mathbb{N}^*$

$$N = 2\pi m_0 K / \omega_0 = K n_0$$

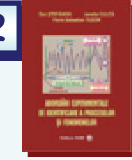
înmulţire cu sin şi cos

☝ Rezultat sensibil la perturbaţii.

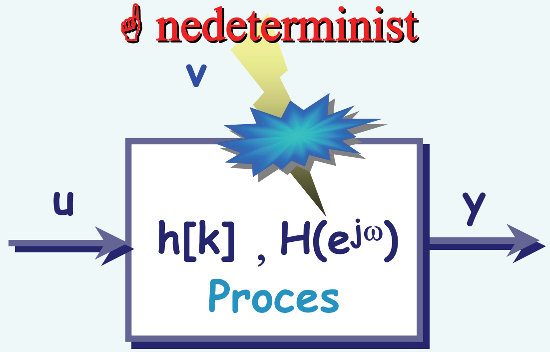
$$\begin{cases} y_s[n] \overset{def}{=} y[n]\sin(\omega_0 n) = y_0 \sin(\omega_0 n + \varphi)\sin(\omega_0 n) = \dfrac{y_0}{2}\cos\varphi - \dfrac{y_0}{2}\cos(2\omega_0 n + \varphi) \\ y_c[n] \overset{def}{=} y[n]\cos(\omega_0 n) = y_0 \sin(\omega_0 n + \varphi)\cos(\omega_0 n) = \dfrac{y_0}{2}\sin\varphi + \dfrac{y_0}{2}\sin(2\omega_0 n + \varphi) \end{cases}$$

mediere temporală

$$\begin{cases} \bar{y}_s = \dfrac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y_s[n] = \dfrac{y_0}{2}\cos\varphi \\ \bar{y}_c = \dfrac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y_c[n] = \dfrac{y_0}{2}\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \varphi = \operatorname{atan2}\left(\dfrac{\bar{y}_c}{\bar{y}_s}\right) = \operatorname{atan2}\left(\dfrac{\sum_{n=0}^{N-1} y[n]\cos(\omega_0 n)}{\sum_{n=0}^{N-1} y[n]\sin(\omega_0 n)}\right)$$



# ❷ Caracterizări în timp şi frecvenţă




## Timp

### Analiza bazată pe corelaţie

- Pentru estimarea secvenţelor de (auto-)covarianţă.

## Frecvenţă

### Analiza spectrală

- Pentru estimarea densităţilor spectrale de putere.

Ce devine echivalenţa:

$y \equiv h * u \Leftrightarrow Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})U(e^{j\omega})$ ?

Operatorul de mediere statistică este actorul principal.

$$r_{uy}[k] = \sum_{m\in\mathbb{Z}} h[m]r_u[k-m]$$

$$r_y[k] = \sum_{p\in\mathbb{Z}}\sum_{q\in\mathbb{Z}} h[p]h[q]r_u[k+p-q]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\phi_{uy}(\omega) = H(e^{j\omega})\phi_u(\omega)$$

$$\phi_y(\omega) = \left|H(e^{j\omega})\right|^2 \phi_u(\omega)$$

**Transferul densităţii spectrale prin sisteme liniare**

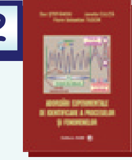
### O strategie complementară

$E$ ② $\times\, y[n-k]$ ①

$$A(q^{-1})y[n] = B(q^{-1})u[n] + C(q^{-1})e[n]$$ ← Ecuaţie cu diferenţe.

☝ Soluţie analitică sau recursivă pentru modelele uzuale.

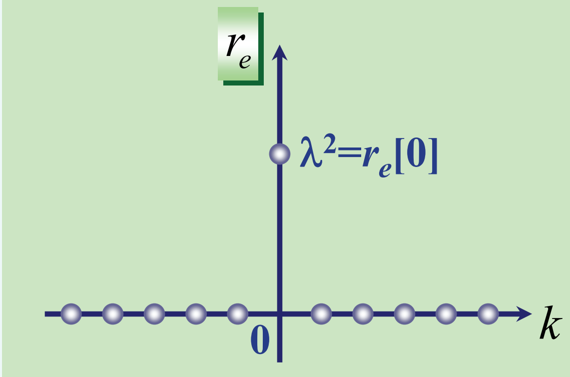
$$A(q^{-1})r_y[k] = B(q^{-1})r_{uy}[k] + C(q^{-1})r_{ey}[k] \quad \forall k\in\mathbb{N}$$ ← Ecuaţie cu secvenţe de covarianţă.



# ❷ Caracterizări în timp şi frecvenţă

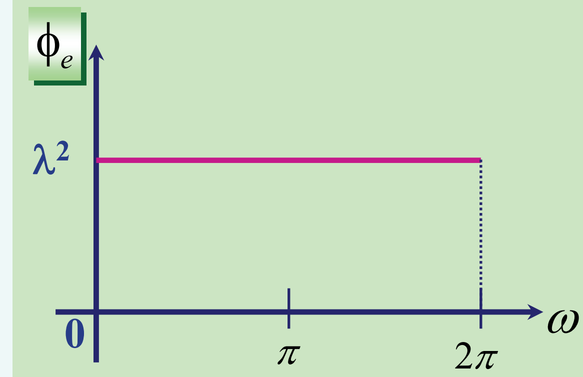
## ☞ Caracterizări ale zgomotului alb

### Timp



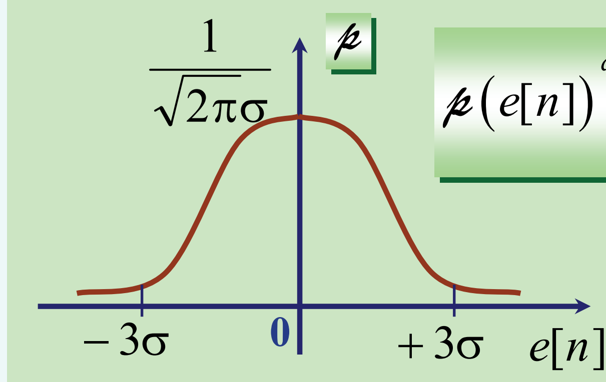

$$r_e[k] = E\{e[n]e[n \pm k]\} = \lambda^2 \delta_0[k], \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

### Frecvenţă




$$\phi_e(\omega) = \lambda^2, \ \forall \omega \in \mathbb{R}$$

### Densitate de probabilitate Gaussiană




$$\wp(e[n]) \stackrel{def}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{e^2[n]}{2\sigma^2}\right], \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

# ❷ Caracterizări în timp şi frecvență

## ☞ Probleme de simulare

### Contextul de lucru

**2 modele**

$$H_1(q^{-1}) = \frac{b_1 q^{-1}}{1 + a_1 q^{-1}}$$

ordin 1

$$H_2(q^{-1}) = \frac{b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2}}{1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2}} \quad (45)$$

ordin 2

### Programe disponibile

\# **ISLAB_2A**

- Apel: `islab_2a(C,A,N,tau_max,nr) ;`
- Modul de calcul al valorilor adevărate şi estimate pentru secvențe de auto-covarianță obținute cu ajutorul unui proces ARMA[1,1]. Sunt trasate graficele secvențelor obținute. Este de asemenea trasată o realizare a zgomotului colorat rezultat. Argumentele funcției sunt următoarele:

| | |
|---|---|
| `C` | polinomul MA (vector [1 c]); |
| `A` | polinomul AR (vector [1 a]); |
| `tau_max` | pivotul maxim al secvențelor de auto-covarianță (implicit: 50); |
| `nr` | numărul realizărilor de generat (implicit: 1). |

# ❷ Caracterizări în timp şi frecvenţă

## Programe disponibile

☞ Probleme de simulare

# ISLAB_2B

- Apel: `islab_2b(x,y,SNR) ;`
- Modul care simulează dependenţa de SNR a polilor şi zerourilor unui model ARMA[2,2], determinat prin echivalarea sa cu un model AR afectat de 2 zgomote necorelate (ca în **Exerciţiul 1.4**). Argumentele funcţiei sunt:
  - **x** partea reală a polilor modelului AR (implicit: 0.5);
  - **y** partea imaginară a polilor modelului AR (implicit: 0.5);
  - **SNR** raportul semnal-zgomot (implicit: 3).

## Rutine disponibile

# D_SPEKTR

- Apel: `[w,fi]=d_spektrum(A,B,sigma2) ;`
- Rutină auxiliară de evaluare a spectrului ieşirii unui filtru liniar discret stimulat cu un zgomot alb. Argumentele funcţiei sunt următoarele:
  - **A** numitorul funcţiei de transfer a filtrului (polinom);
  - **B** numărătorul funcţiei de transfer a filtrului (polinom);
  - **Sigma2** varianţa zgomotului alb de la intrare.

  Funcţia returnează:
  - **w** axa pulsaţiilor ( $\omega$ );
  - **fi** densitatea spectrală $\phi_y$ a zgomotului colorat (de ieşire).

# ❷ Caracterizări în timp şi frecvenţă

## ☞ Probleme de simulare

### Rutine disponibile

# NOISE

- Apel: `noise(operation) ;`
- Modul de generare şi simulare a zgomotelor colorate produse de modelele stocastice (45). Argumentul funcției (`operation`) este un şir de caractere din mulțimea următoare:

```
close_noise
close_noise_def
init_noise
move_p
move_z
moved_p
moved_z
moving_p
moving_z
noiseclear
show                 (implicit)
system
winit_noise
```

# SPEFAC

- Apel: `[a,l2]=spefac(r) ;`
- Rutină auxiliară de rezolvare a *Problemei factorizării spectrale*. Aceasta constă în determinarea unui polinom:

$$A(z) \overset{def}{=} z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

şi a varianţei $\lambda^2$ cu proprietatea:

$$\lambda^2 A(z)A(z^{-1}) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} r[k]\left(z^k + z^{-k}\right), \qquad (46)$$

pentru o secvenţă de covarianţă $\{r[0], r[1], \ldots, r[n]\}$. În mod normal, această problemă se poate formula pentru orice secvenţă de numere $\{r[0], r[1], \ldots, r[n]\}$, cu condiţia să fie *pozitiv definită,* adică verificînd inegalitatea:

$$|r[k]| \leq r[0], \quad \forall k \in \overline{0,n}. \qquad (47)$$

Problema factorizării spectrale (46) este rezolvată în cazul determinării unui model AR[n] atunci cînd este stimulat de un zgomot alb şi se cunoaşte densitatea spectrală de putere a ieşirii (deci şi secvenţa de auto-covarianţă a ieşirii, cu ajutorul formulei de inversiune (12)).

Argumentul funcţiei **spefac** este **r** – secvenţa de (auto-)covarianţă (vector).
Funcţia returnează:

**a** coeficienţii polinomului AR (vector);

**l2** varianţa zgomotului alb $\lambda^2$ cu care trebuie stimulat modelul AR pentru a obţine la ieşire exact secvenţa de auto-covarianţă **r**.

# ❷ Caracterizări în timp şi frecvenţă

## ☞ Probleme de simulare

**Problema 2.1** 4 x 0.25p

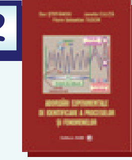
Pentru a rezolva punctele următoare, se va utiliza funcţia **NOISE**.

a. Să se varieze polii filtrului $H_2$ din definiţia (45) şi să se comenteze rezultatele obţinute cu ajutorul funcţiei **NOISE**.

b. Unde trebuie amplasaţi polii filtrului $H_2$ pentru a obţine un filtru trece jos?

c. Unde trebuie amplasaţi polii filtrului $H_2$ pentru a obţine un vîrf de rezonanţă la $\omega = 1$? Ce se poate spune despre conţinutul în frecvenţă al semnalului analizînd realizările procesului?

d. Ce efect observaţi atunci cînd filtrul $H_2$ are zeroul în vecinătatea cercului unitar?



# ❷ Caracterizări în timp şi frecvenţă

## ☞ Probleme de simulare

### Problema 2.2

Să se utilizeze modulul de simulare **ISLAB_2A** pentru a simula un proces stocastic de model ARMA[1,1]. De exemplu, pentru a genera un process de tip AR[1] cu un singur pol in –0.9, se foloseşte sintaxa:

```
islab_2a(1,[1 0.9]) ;
```

În mod implicit, modulul de simulare alege: **N=100**, **tau_max=50** şi **nr=1**.

0.5p

a. Să se analizeze maniera în care estimaţiile funcţiilor de covarianţă variază cu **N** (numărul de eşantioane) şi **tau_max** (pivotul maximal al secvenţei de auto-covarianţă) pentru diferite locaţii ale polilor.

0.5p

b. Să se verifice faptul că estimaţiile funcţiilor de covarianţă tind către valorile adevărate pentru procese de tip AR[1] şi MA[1], pe măsură ce **N** tinde către infinit.

c. <Opţional> Să se verifice corectitudinea rezultatelor obţinute la **Exerciţiile 2.1** şi **2.2**.

# ❷ Caracterizări în timp şi frecvenţă

## ☞ Probleme de simulare

### Problema 2.3

Se consideră un proces stocastic asociat unui model AR[2] cu două surse de zgomot (ca în contextul **Exercițiului 2.4**), pe care dorim să îl echivalăm cu un proces descris de un model ARMA[2,2], avînd o singură sursă de zgomot. Pentru simulările care urmează, se va utiliza modulul **ISLAB_2B**.

0.5p

a. Să se analizeze maniera în care variază polii şi zerourile modelului ARMA atunci cînd variază SNR. În acest context, SNR este definit prin raportul dintre varianța semnalului util $x$ şi varianța zgomotului aditiv $v$ (cu notațiile din **Exercițiul 2.4**).

0.5p

b. Să se studieze cazurile în care SNR tinde la infinit (semnalul domină zgomotul) şi SNR tinde la zero (zgomotul domină semnalul). Să se comenteze modificările înregistrate de densitățile spectrale.