Тема. Основи тривимірного моделювання полігональними сітками.

1. Визначення полігональної сітки. Способи опису полігональних сіток.

Полігональна сітка – це набір полігонів або «граней», які в сукупності формують оболонку об’єкта. Полігональні сітки використовуються для моделювання як монолітних (суцільних) форм, так і тонких оболонок. Об'єкт уважається монолітним (solid), якщо його полігональні грані щільно прилягають одна до одної й обмежують деякий простір. Якщо грані об'єкта сполучаються таким чином, що не обмежують простір, то вважають, що вони утворюють поверхню нескінченно малої товщини. В обох випадках цю сукупність полігонів називають полігональною сіткою (poligonal mesh) або просто сіткою (mesh).

Полігональна сітка задається списком полігонів та інформацією про напрям, куди «повернений» кожен полігон. Інформація про напрям часто задається у вигляді нормалі до площини його грані. Ця інформація використовується при зафарбовуванні об'єкта для визначення того, скільки світла від джерела розсіюється на цій грані. При детальному вивченні цього питання можна побачити, що коефіцієнт яскравості поверхні визначається пропорційно косинусу кута між нормаллю до поверхні й вектором, що вказує на джерело світла(Кут Θ на Рис.2.).

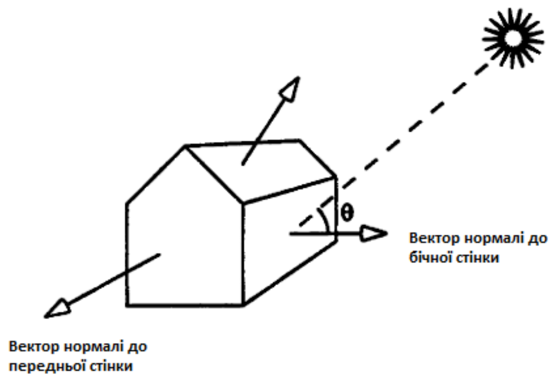

Рис.2.Вектори нормалей до різних граней

Вектор нормалі визначається для кожної вершини грані, а не для грані в цілому. Це спрощує процес відсікання й процес зафарбовування для гладких криволінійних форм. Для плоских поверхонь, таких як стіни будинку,зображеного на Рис.3а., кожна з вершин V_1, V_2, V_3, V_4 ,що визначають його бічні стіни асоційована з однієї й тією ж нормаллю n_1, що є вектором нормалі для всієї грані. Однак вершини передньої грані, такі як V_5, будуть використовувати нормаль n_2. Слід зазначити, що вершини V_1 і V_5 розташовані в одній і тій же точці простору, але використовують різні нормалі.

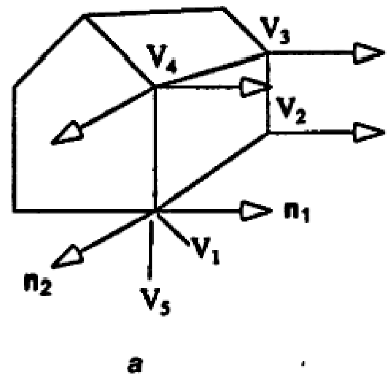

Рис.3. Зв'язування нормалей з вершиною грані

Отже, полігональна сітка - це сукупність полігонів разом з векторами нормалей, пов'язаними з кожною вершиною цих полігонів. Для прикладу розглянемо просту форму, зображену на Рис.3. Цей «будинок» має сім полігональних граней і 10 вершин (кожна з яких одночасно належить трьом граням). Оскільки його стіни плоскі, то є всього сім різних векторів нормалі: по одному на кожну грань, як показано на малюнку.

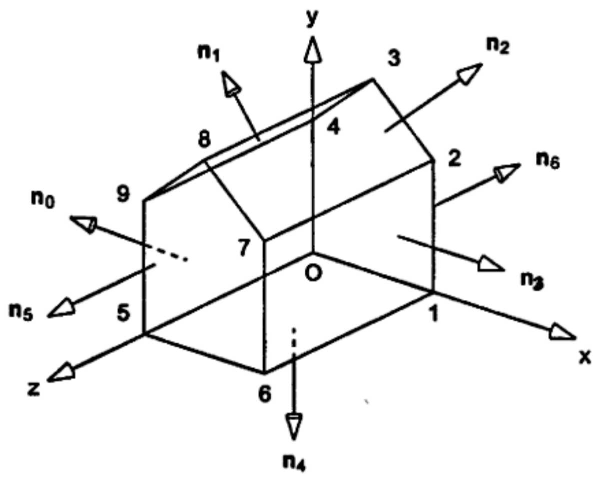

Рис. 4. Зображення «будинку»

Існує багато різних способів зберігання інформації про сітку у файлі або в програмі.

Ефективним є підхід, при якому використовуються три окремі списки: список вершин, список нормалей і список граней. У списку вершин зберігаються координати різних вершин сітки. У списку нормалей описуються вектори нормалі, які є в даній моделі. Список граней містить індекси вершин, які визначають відповідні грані. Наш «будинок» записується за допомогою 10 вершин, семи нормалей і списком із семи простих дескрипторів граней.

Всі три списки працюють спільно: список вершин містить інформацію про їхні координати; список нормалей містить інформацію про орієнтацію; а список граней містить інформацію про зв'язки, або топології.

Список вершин для кожної грані починається з якої-небудь вершини на цій грані й обходить цю грань від вершини до вершини доти, поки не буде пройдене повне коло. Є два ***способи обходу вершин грані***: за та проти годинникової стрілки. Наприклад, грань № 5 може бути внесена в список як (5,6,7,8,9) або як (9,8,7,6,5). Можна використовувати будь-який спосіб, однак загальноприйнятим вважається обхід полігона проти годинникової стрілки, якщо дивитися на об'єкт зовні (якщо обходити грань від вершини до вершини в такому порядку: ідучи по зовнішній поверхні, то частина площини, що містить цю грань (внутрішність грані), повинна знаходитися ліворуч.

2. Знаходження векторів нормалей

Координати вершин можна задавати вручну, однак вектори нормалі доцільно обчислювати в програмі.

Якщо грань є плоскою, як у випадку «будинку», то достатньо тільки знайти вектор нормальні до самої грані та зв'язати його з кожною з вершин цієї грані. Одним із способів знаходження нормалі є використання векторного добутку. Візьмемо на грані три сусідніх вершини — V_1 ,V_2, V_3 і обчислимо нормаль як векторний добуток $m = (V_1 - V_2) \times (V_3 - V_2)$. Після цього вектор нормалі можна нормувати до одиничної довжини.

Проте можуть виникнути дві проблеми: по-перше, якщо вектори $V_1 - V_2$ і $V_3 - V_2$ майже паралельні, то й векторний добуток буде дуже малим і результат може мати більші похибки в обчисленнях; по-друге: може трапитися так, що полігон не є повністю плоским, тобто не всі його вершини лежать в одній площині. Тому поверхня, що представляється цими вершинами, не може бути дійсно плоскою. У цьому випадку нам доведеться використовувати для нормалі до полігона деяку «середню» величину, що враховує всі розглянуті вершини.

Один із стійких методів, що вирішують обидві ці проблеми, був розроблений Мартіном Нюеллом (Martin Newell). Цей метод обчислює компоненти m_x , m_y , m_z нормального вектора m за наступними формулами:

$$m_x = \sum_{i=0}^{N-1} (y_i - y_{next(i)})(z_i + z_{next(i)}),$$
$$m_y = \sum_{i=0}^{N-1} (z_i - z_{next(i)})(x_i + x_{next(i)}),$$
$$m_z = \sum_{i=0}^{N-1} (x_i - x_{next(i)})(y_i + y_{next(i)}),$$

де N— число вершин грані, (x_i , y_i , z_i.) — координати і-ї вершини, next(i) = (i + l)modN — індекс «наступної» після і-ї вершини при обході грані. Ця формула забезпечує «циклічний» перехід від (N- 1)-ї вершини до нульової. Вектор m, обчислений за методом Нюелла, може бути напрямлений усередину полігона або назовні від нього. Крім того якщо вершини полігона обходяться проти годинникової стрілки при спогляданні полігона зовні, те вектор m указує напрям назовні від цієї грані.

3.Властивості сіток

Маючи сітку, задану списками вершин, нормалей і граней, ми можемо дізнатися, що за об'єкт представляє ця сітка. От деякі цікаві властивості сітки.

- Монолітність (Solidity). Як уже згадувалося, сітка представляє монолітний об'єкт, якщо сукупність його граней містить у собі деякий замкнений простір.
- Зв'язність (Connectedness). Сітка називається зв'язною, якщо між будь-якими двома вершинами існує неперервний шлях уздовж ребер полігона. (Якщо сітка не є зв'язною, то зазвичай вона представляє більше одного об'єкта.)
- Простота (Simplicity). Сітка називається простою, якщо відображуваний нею об'єкт є монолітним і не містить отворів. Це означає, що об'єкт може бути деформований у сферу, не піддаючись розрізуванню. (Відзначимо, що термін «простий» вживається тут зовсім не в тому розумінні, в якому він застосовувався до полігона.)
- Планарність (Planarity). Сітка називається плоскою (планарною), якщо кожна грань об'єкта, що представляється нею, є плоским полігоном; тобто вершини кожної грані лежать в одній площині. Якщо грань плоска, то багато графічних алгоритмів

працюють значно ефективніше. Трикутники є плоскими за означенням. Деякі моделюючі програми використовують цю властивість і працюють тільки із трикутниками. На відміну від трикутників чотирикутники можуть і не бути плоскими.

- Опуклість (Convexity). Сітка представляє опуклий об'єкт, якщо відрізок, що з'єднує будь-які дві точки всередині цього об'єкта, цілком лежить усередині нього. На Рис.5. показано кілька опуклих і неопуклих об'єктів. Для кожного неопуклого об'єкта зображено відрізок, кінцеві вершини якого лежать усередині об'єкта, однак він сам не міститься усередині цього об'єкта.

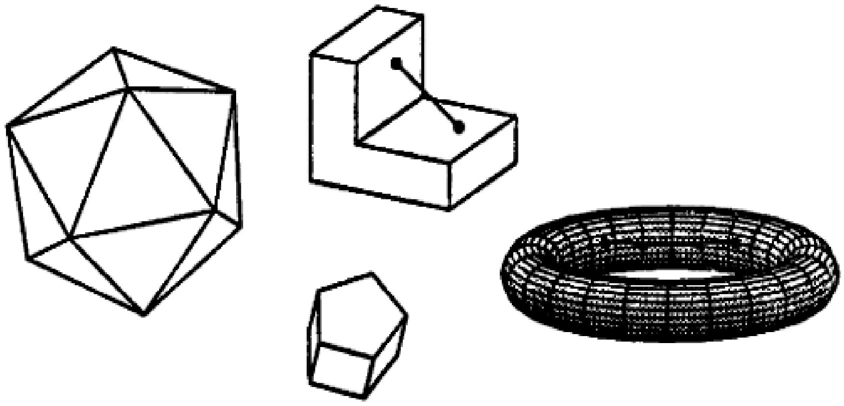

Рис.5.Приклади опуклих і неопуклих тривимірних об'єктів

4. Багатогранники

Визначення. **Поліедром (багатогранником)** називається зв'язна сітка із простих плоских полігонів, що обмежує скінченний об’єм простору.

Отже, відповідно до даного визначення, поліедр являє собою єдиний монолітний об'єкт. Із цього випливає, що:

- кожне ребро належить рівно двом граням;
- в кожній вершині зустрічається не менш трьох ребер;
- грані не є взаємнопроникаючими (interpenetrate): дві грані або не мають спільних точок, або перетинаються тільки вздовж їхнього спільного ребра.

Формула Ейлера

Формула Ейлера задає фундаментальне співвідношення між кількістю граней, ребер і вершин (відповідно *F, E,* V) простого багатогранника:

$V+F-E=2.$

Наприклад, для куба V= 8, F= 6, E= 12

Для непростого поліедра формула Ейлера має вигляд:

$V+F-E=2+H-2G$

де H - загальне число отворів, наявних у гранях, а G - число отворів у самому поліедрі.

Якщо всі грані поліедра однакові і кожна з них є правильним багатокутником, то такий об'єкт називається **правильним багатогранником** (regular polyhedron). Існує всього п'ять таких об'єктів - це **Платонові тіла,** зображені на Рис.8. Платонові тіла володіють високим ступенем симетрії, а також цілим набором чудових властивостей.

Таблиця . Опис Платонових тіл

Тіло	V	F	E	Символ Шлефлі
Тетраедр	4	4	6	(3,3)
Гексаедр	8	6	12	(4,3)
Октаедр	6	8	12	(3,4)
Ікосаедр	12	20	30	(3, 5)
Додекаедр	20	12	30	(5,3)

Гранями трьох Платонових тіл є рівносторонні трикутники, одне має квадратні грані, а грані додекаедра являють собою пентагони (п'ятикутники). Куб є правильною призмою, а октаедр — антипризмою. Значення величин *V, F,E* для кожного із Платонових тіл наведені в Таблиці 4. Крім того, там наводиться й символ Шлефлі *(p, q)* для кожного тіла: він означає, що кожна грань є p-кутником і що *q* з них сходяться в одній вершині.

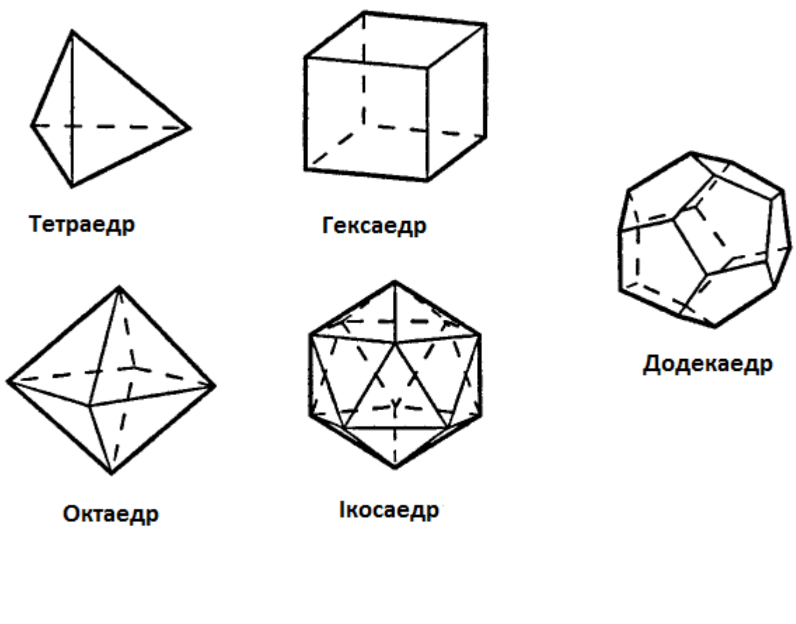

Рис.8. Платонові тіла

Кожному Платонову тілу *P* відповідає двоїстий (dual) багатогранник *D.* Вершинами поліедра *D* є *центри граней* поліедра *P,* так що ребра поліедра *D* з'єднують середні точки суміжних граней поліедра P. На Рис.9. для кожного Платонова тіла зображене вписане в нього двоїсте тіло.

Список деяких тіл, що є двоїстими:

- двоїстим для тетраедра є також тетраедр;
- куб і октаедр є двоїстими;
- ікосаедр і додекаедр також є двоїстими.

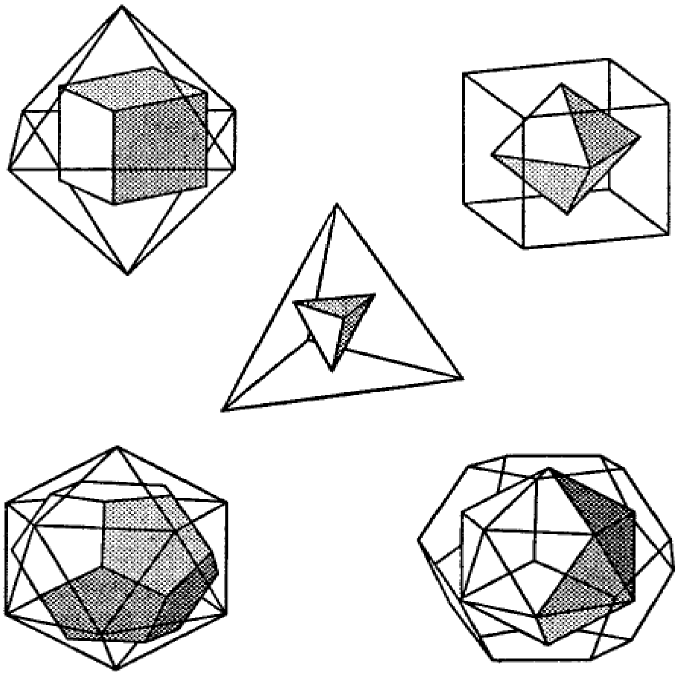

Рис.9. Двоїсті Платонові тіла

Двоїсті багатогранники мають таку ж кількість ребер E, а параметр V для одного з них є параметром *F* для іншого. Крім того, якщо *(p, q)* — символ Шлефлі для одного із двоїстих тіл, то для другого символ Шлефлі (q,p).

Якщо відомо список вершин для одного Платонова тіла P, то легко створити такий же список для двоїстого йому тіла D оскільки вершина *k* поліедра *D* розміщена в центрі грані *k* поліедра *P*. Такий спосіб побудови поліедра *D* фактично створює багатогранник, вписаний у багатогранник *P*. Для того щоб прослідковувати за нумерацією вершин і граней, використовується модель (розгортка), утворена шляхом розрізування поліедра вздовж певних ребер і «розгортання» його в плоску фігуру таким чином, що всі його грані видно із зовнішньої сторони. Координати центра грані вираховуються як середнє арифметичне координат всіх вершин, що належать цій грані.