Zadanie 52

Obliczanie całek $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ na obszarze $D = D_1 - D_2$, gdzie $D_1 = [-1,1] \times [-1,1]$, $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| + |y| \leq 1\}$, przez podział D na $4n^2$ trójkątów przystających i zastosowanie na każdym z nich kwadratury rzędu 3-go.

Vladyslav Shestakov

1 Wstęp

Obszar D składa się z 4 trójkątów, więc każdy z nich dzielimy na n^2 trójkątów przystających. Robimy to w ten sposób, że dzielimy dowolny bok trójkąta na n części, otrzymując $n + 1$ wierzchołków. Następnie przesuwamy je wzdłuż jednego z dwóch pozostałych boków, otrzymując kolejne wierzchołki.
Dla obszarów trójkątnych mamy formuły dowolnego rzędu k przybliżające wartość całki na tym obszarze. Dla jej obliczenia potrzebujemy współrzędne wierzchołków tego trójkąta.

2 Opis metod

Dzielenie trójkąta na n^2 części

Dzielenie polega na tym, że dzielimy dowolny bok trójkąta na n części, otrzymując $n + 1$ wierzchołków. Tworzymy wektor i dodajemy do niego te $n + 1$ wierzchołków. Dalej wszystkie wierzchołki, oprócz pierwszego, przesuwamy na wektor $\frac{a}{n}$, gdzie a - wektor boku, wzdłuż którego przesuwamy i dodajemy utworzone wierzchołki do wektora. Następnie przesuwamy wszystkie wierzchołki, oprócz pierwszych dwóch na ten sam wektor i dodajemy utworzone wierzchołki do wektora. W taki sposób otrzymamy wektor wierzchołków, ale ich kolejność jest nieprawidłowa. Za pomocą zależności między indeksami wierzchołków a ich prawidłową kolejnością tworzymy wektor współczynników, w którym kolejne 3 wierzchołki, zaczynając od początku wektora, tworzą jeden trójkąt.

Formuły całkowe na obszarze trójkątnym

Niech $D \in \mathbb{R}^2$ będzie trójkątem o wierzchołkach w punktach $p_i = p_i(x_i, y_i), i = 0, 1, 2$. Każdy punkt trójkąta jest kombinacją wypukłą jego wierzchołków, zatem trójkąt D można przedstawić jako

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) = \sum_{i=0}^{2} \alpha_i p_i, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=0}^{2} \alpha_i = 1\} = conv(p_0, p_1, p_2),$$

gdzie $conv(p_0, p_1, p_2)$ oznacza powłokę wypukłą wymienionych punktów, czyli najmniejszy zbiór wypukły zawierający te punkty. Chcemy przybliżyć

$$I(f) = \iint_D f(x, y) dxdy \approx S(f).$$

Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{bmatrix},$$

a P niech oznacza pole trójkąta D. P możemy obliczyć za pomocą następującego wzoru:

$$P = \frac{1}{2}|det(A)|.$$

Wówczas

$$S(f) = \frac{P}{3}\Big(f(p_{01}) + f(p_{02}) + f(p_{12})\Big),$$

gdzie $p_{01} = \frac{p_0+p_1}{2}, p_{02} = \frac{p_0+p_2}{2}, p_{12} = \frac{p_1+p_2}{2}$, jest formułą rzędu 3.

3 Opis eksperymentów

Sprawdźmy, czy poprawnie działa napisany program. Wyniki dla funkcji stale równej 1 są umieszczone w tablicy 1

Tablica 1: $f(x,y) = 0 * x + 0 * y + 1$

Wartość n	Wynik uzyskany z programu	Poprawny wynik
1	2	2
10	$2 + 4.4409e{-}16$	2
100	$2 - 9.0594e{-}14$	2
2000	$2 - 1.3767e{-}13$	2

Ta różnica między wynikami są spowodowana między innymi zbędnym obliczaniem pola wszystkich trójkątów oddzielnie, co zwiększyło błąd ostatecznego wyniku. Natomiast można było obliczyć pole tylko jeden raz, bo wszystkie trójkąty są takie same.
Teraz sprawdźmy działanie programu dla bardziej skomplikowanej funkcji. Wyniki testu umieszczone w tablicy 2

Tablica 2: $f(x,y) = cos(xy)$

Wartość n	Wynik uzyskany z programu	Poprawny wynik	Błąd
1	1.8161	1.7954	$2.0635e{-}2$
10	1.7954	1.7954	$1.9777e{-}6$
100	1.7954	1.7954	$1.9679e{-}10$
2000	1.7954	1.7954	$-1.0141e{-}12$

Dla większej ilości trójkątów mamy lepszą dokładność obliczeń, tak jak i powinno być.
Program jest niedoskonały ze względu na zbędne obliczenia, które powodują zwiększenie błędu, w niektórych przypadkach dość istotne, ale ogólnie wynik jest bliski do poprawnego.