Zadanie 22

Wizualizacja szybkości zbieżności metody Newtona (w dziedzinie zespolonej) zastosowanej do znalezienia zera wielomianu. Do obliczania wartości wielomianu i jego pochodnej należy zastosować algorytm Hornera.

Vladyslav Shestakov

Wstęp

Metoda Newtona znajdowania zer wielomianu polega na tym, że wybieramy dowolne przybliżenie początkowe i poprowadzimy styczną do funkcji w tym punkcie. Następnie poprowadzimy styczną do wykresu funkcji w punkcie, który jest miejscem zerowym poprzedniej stycznej. Powtarzając ostatni krok dostatecznie wiele razy, mamy szansę dojść do zera wielomianu z dowolnie małym błędem.

Program wizualizuje metodę w taki sposób, że każdy punkt płaszczyzny oznaczany jest kolorem w zależności od liczby iteracji, które trzeba było zrobić, aby dojść do zera wielomianu. Jeśli wybrany punkt nie doprowadził do zera, czyli liczba iteracji jest równa maksymalnej liczbie iteracji, ustawionej przez użytkownika, to oznaczamy go kolorem, który odpowiada największej ilości iteracji. Jeśli podejrzewamy, że punkt jest dobrym przybliżeniem początkowym, to zwiększamy maksymalną liczbę iteracji.

Dla znalezienia kolejnych przybliżeń potrzebujemy wartości funkcji oraz jej pochodnej (patrz „Metoda Newtona”). Dla ich obliczania wykorzystujemy algorytm Hornera. Polega on na tym, że wyciągając x w odpowiedni sposób przed nawiasy, koszt liczenia wartości wielomianu oraz jego pochodnej wynosi $2n-1$ mnożeń i $2n-1$ dodawań (odejmowań).

Metoda Newtona

Niech mamy funkcję $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która jest klasy C^2 i mamy $x_0 \in \mathbb{R}$, który jest przybliżeniem początkowym.

Najpierw musimy rozwinąć funkcję w szereg Taylora w otoczeniu x_k, pomijając resztę:

$$f(x) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) = p(x)$$

To jest styczna do wykresu funkcji f poprowadzona w punkcie x_k.

Kolejne przybliżenia x_{k+1} możemy uzyskać bardzo łatwo. Wystarczy zauważyć, że x_{k+1} jest miejscem zerowym $p(x)$, czyli mamy:

$$0 = p(x_{k+1}) = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$

Z powyższego wzoru wyznaczamy x_{k+1} (zakładamy, że $f'(x) \neq 0$):

$$x_{k+1} = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Korzystając z tego wzoru dla $k = 0,1,2$ ..., uzyskamy ciąg punktów, który może być zbieżny do miejsca zerowego.

Metoda Newtona nie zawsze jest zbieżna, na przykład, gdy dla pewnego k $f'(x_k) = 0$, czyli styczna w k-tym kroku jest równoległa do osi OX. Oprócz tego, możemy tak dobrać funkcję f i przybliżenie początkowe x_0, że wygenerowany ciąg albo nie ma granicy albo jest rozbieżny do nieskończoności.

Algorytm Hornera

Niech

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

gdzie $a_k \in \mathbb{R}$ dla $k = 0 \ldots n$

Celem jest obliczenie wartości tego wielomianu w punkcie $\hat{x} \in \mathbb{R}$.

Algorytm Hornera polega na tym, że zapisujemy funkcję f w innej postaci:

$$f(x) = a_0 + x\left(a_1 + x\left(\ldots + x\left(a_{n-2} + x(a_{n-1} + xa_n)\right)\ldots\right)\right) \qquad (1)$$

Zaczynając obliczać od najgłębszego nawiasu, obliczenie będzie kosztować mniej niż zwykłe liczenie wprost (porównanie na końcu rozdziału).

Do metody Newtona potrzebujemy też wartość pochodnej wielomianu. Najpierw zapiszmy f jako

$$f(x) = a_0 + xw_1$$

gdzie $w_1 = w_1(x)$

Teraz zróżniczkujemy f, korzystając ze wzoru na pochodną iloczynu funkcji i otrzymujemy:

$$f'(x) = w_1 + xw_1'$$

Następnie obliczamy w_1':

$$f'(x) = w_1 + x(w_2 + xw_2')$$

Dalej obliczamy w_2', w_3' itd., aż policzymy wszystkie pochodne i otrzymamy postać

$$f'(x) = w_1 + x\left(w_2 + x\left(\ldots + x\left(w_{n-2} + x(w_{n-1} + xw_n)\right)\ldots\right)\right)$$

Tak jak dla funkcji f, liczymy od najgłębszego nawiasu. W końcu mamy algorytm, który za $2n-1$ mnożeń i $2n-1$ dodawań (odejmowań) oblicza wartości wielomianu oraz jego pochodnej. Dla porównania, liczenie wprost tylko wartości wielomianu w punkcie (korzystając z funkcji potęgowania typu $pow()$ w C lub $x\text{^}k$ w Matlabie) jest rzędu n^2.

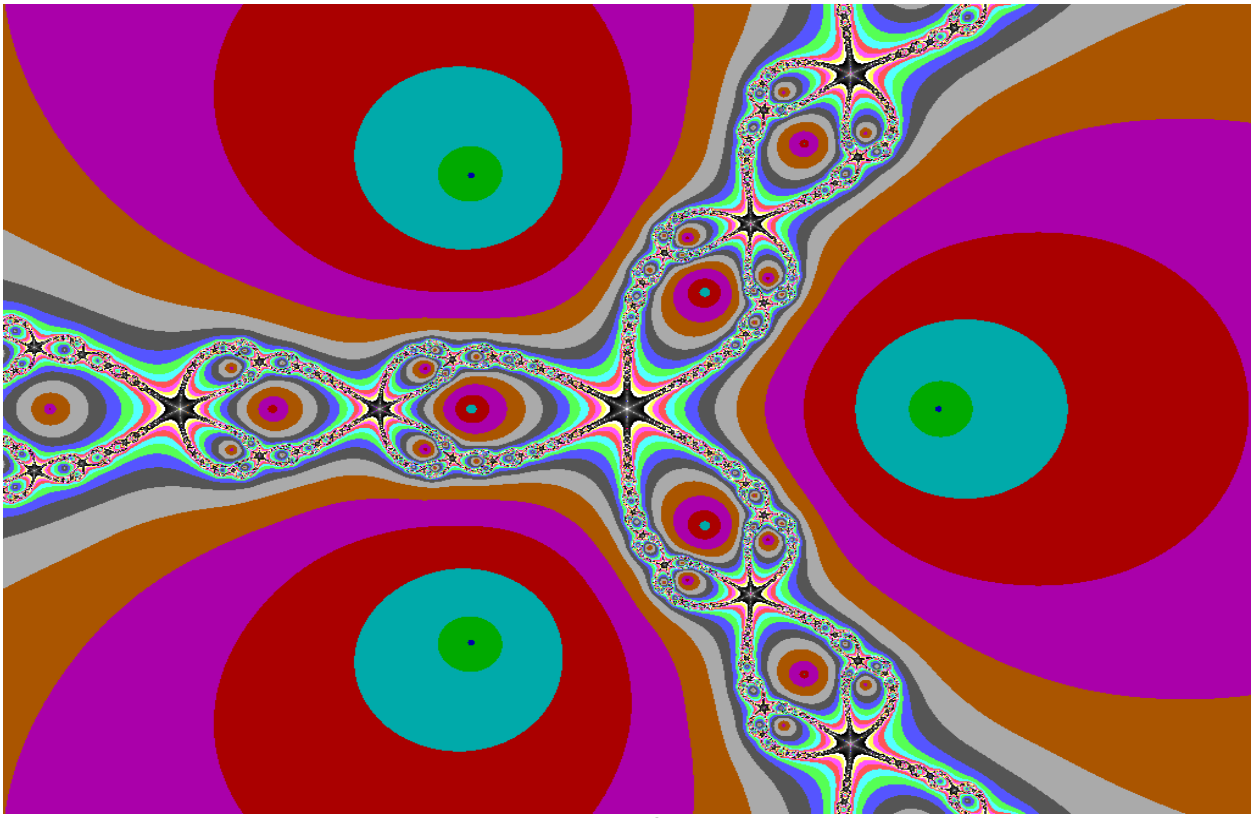
Algorytm

$w = a_n$
$p = w$
for $k = n-1, n-2, \ldots, 1$
    $w = a_k + \hat{x}w$
    $p = w + \hat{x}p$
end

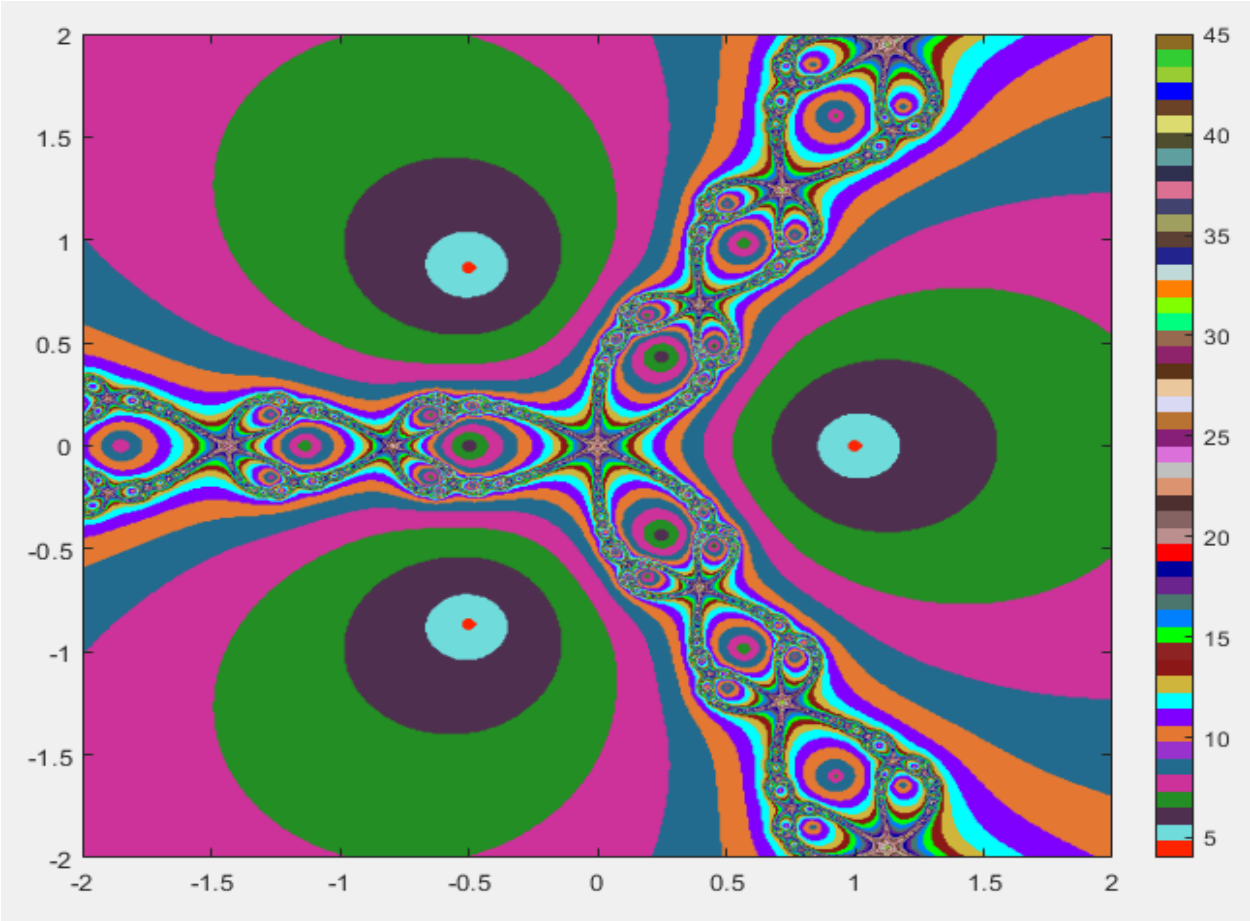
$$w = a_0 + \hat{x}w$$
$$f(\hat{x}) = w$$
$$f'(\hat{x}) = p$$

Opis eksperymentów

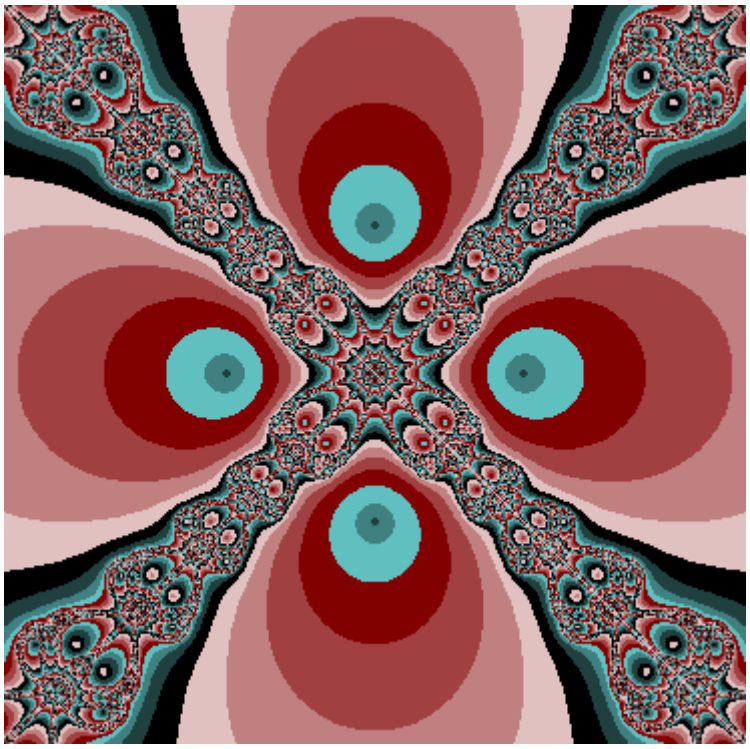
Specyfika zadania jest taka, że jedynym sposobem sprawdzania poprawności i efektywności jest wizualne porównanie wyników działania programu ze spodziewanymi wynikami oraz już istniejącymi przykładami. Poniżej są umieszczone wyniki programu zarówno jak i rysunki, wzięte z podobnych programów udostępnionych w sieci. Rysunki, podpisy których zawierają literę „p” na końcu wzięte z programu, który jest rozpatrywany w tym raporcie.



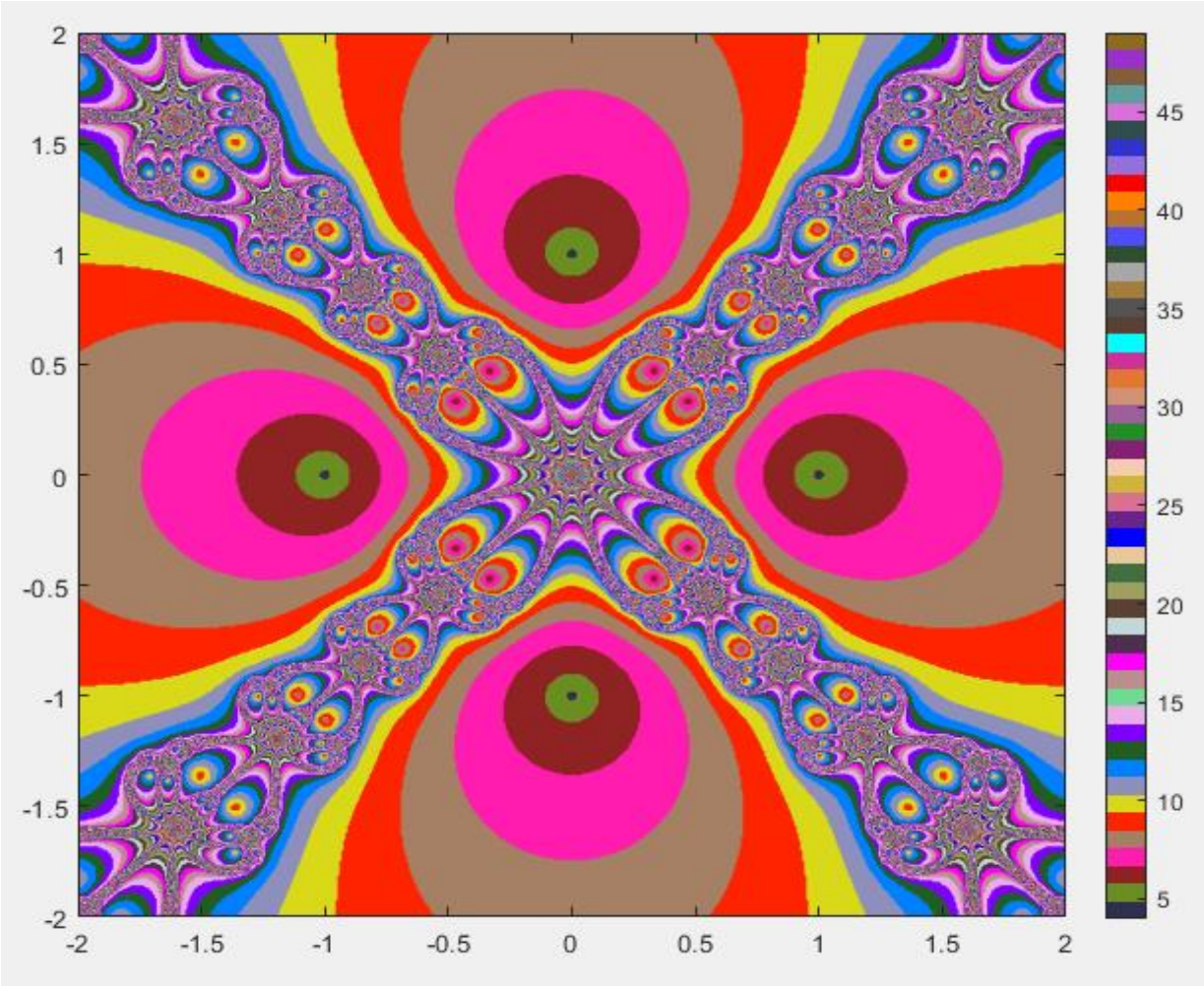
$f(z) = z^3 - 1$



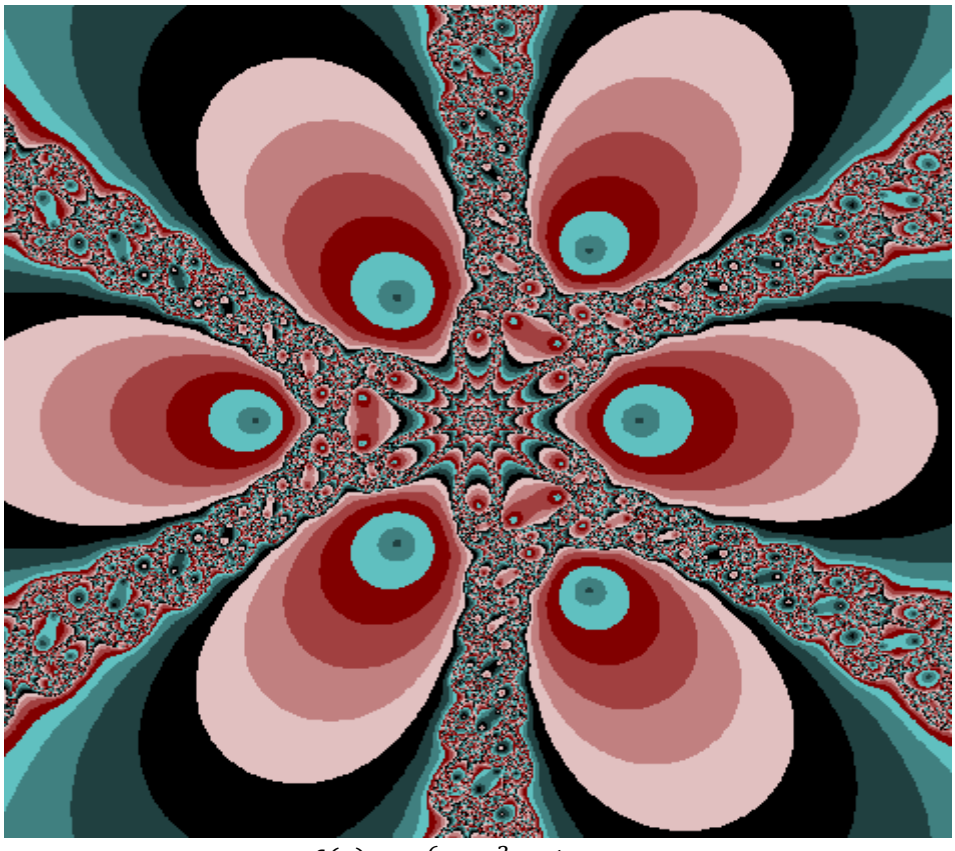
$f(z) = z^3 - 1\ (p)$



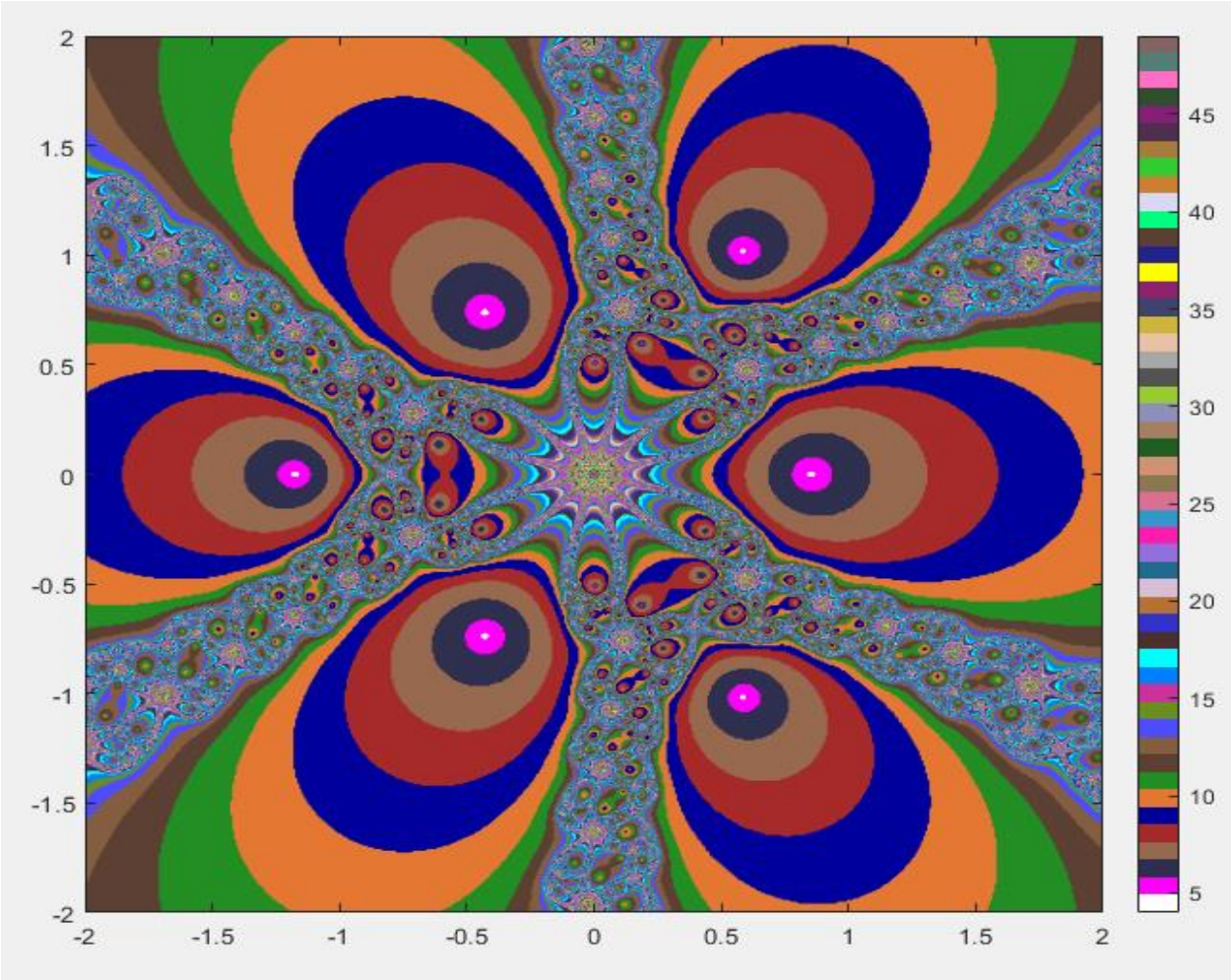
$f(z) = z^4 - 1$



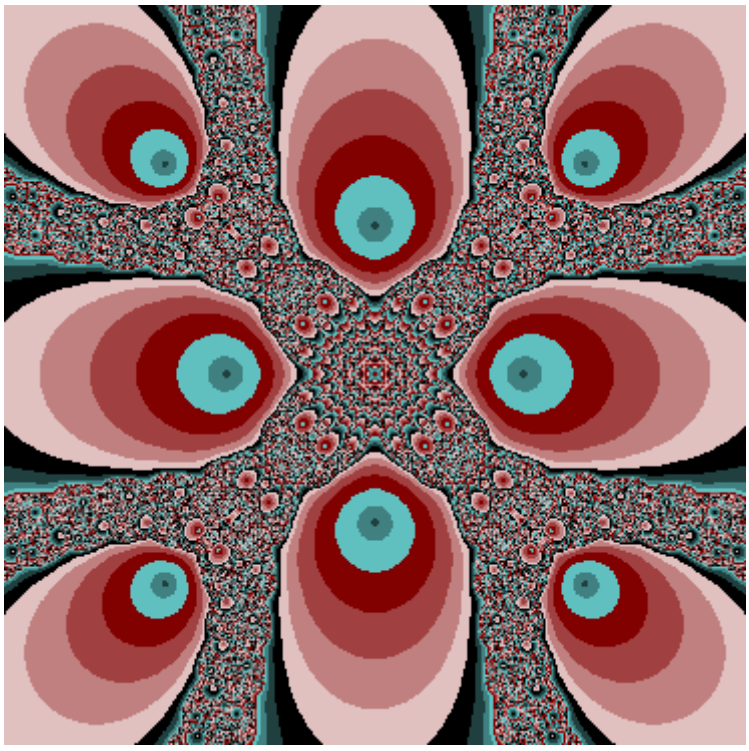
$f(z) = z^4 - 1\ (p)$



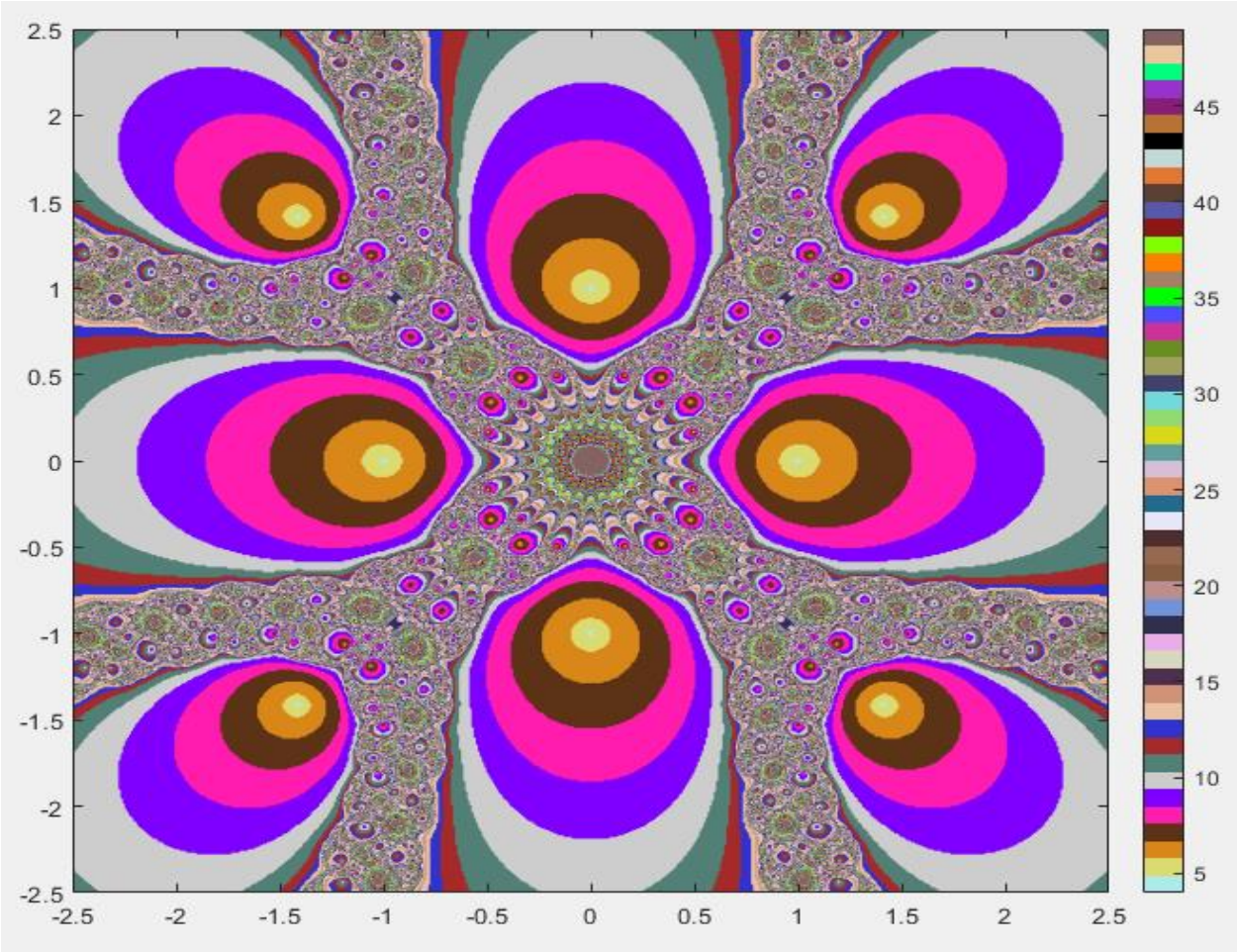
$f(z) = z^6 + z^3 - 1$



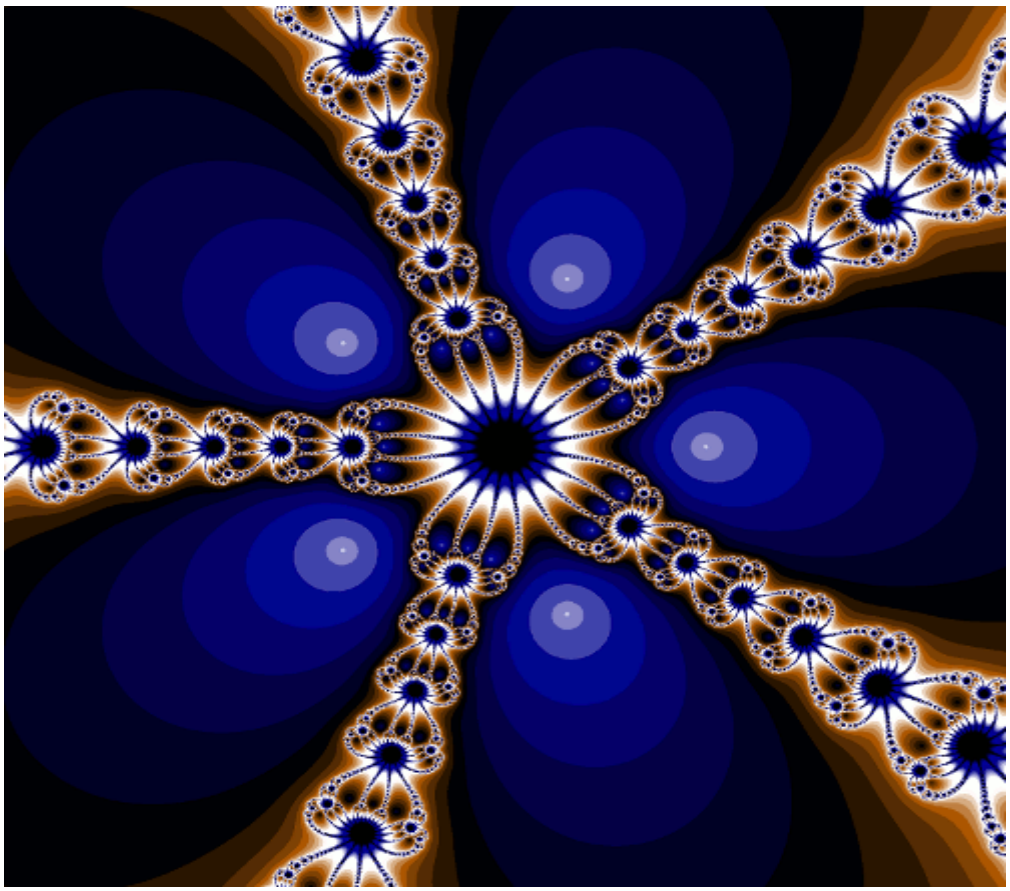
$f(z) = z^6 + z^3 - 1\ (p)$



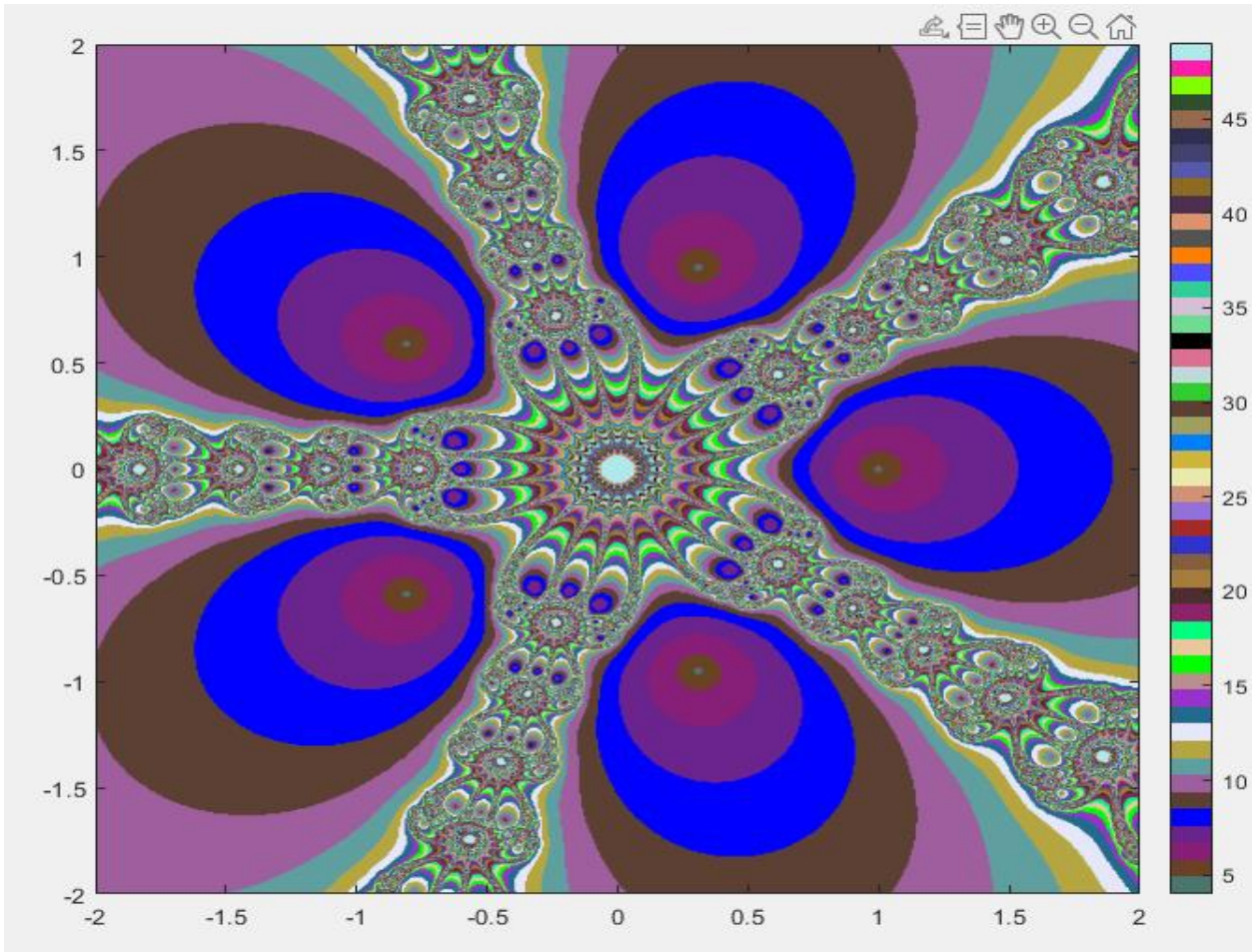
$f(z) = z^8 + 15z^4 - 16$



$f(z) = z^8 + 15z^4 - 16\ (p)$



$f(z) = z^5 - 1$



$f(z) = z^5 - 1\ (p)$

Jak widać, program rysuje poprawny wynik, zgodny z oczekiwaniami i znalezionymi przykładami. Drobne różnice w kształcie rysunków wynikają z różnicy badanych obszarów oraz dokładności.

Źródła przykładów:

- https://en.wikipedia.org/wiki/Newton_fractal
- http://tech.abdulfatir.com/2014/07/newtonfractalbasics.html
- https://www.colabug.com/2019/0508/6157041/