Математична логіка

Зміст

1 Лекція 2. Алгебра формул. 24.02

Формула логіки висловлювань називається *виконливою*, якщо її область істинності не є пустою. Виконлива формула називається *тавтологією* (або *тотожно істинною*), якщо її область істинності містить усі булеві вектори відповідної довжини (або, що те саме, область хибності є порожньою). Формули з непорожньою областю хибності називаються *спростовуваними.* Спростовувана формула називається *суперечністю* (або *тотожно хибною),* якщо її область істинності — порожня множина. Формули, для яких і область істинності, і область хибності — непорожні, називаються *нейтральними.*

Однією з центральних задач у логіці висловлювань (до неї зводиться багато інших) є задача встановлення типу формули (тавтологія, тотожно хибна чи нейтральна). Легко зрозуміти, що досить вміти перевіряти формули лише на тавтологічність. Справді, формула F є тотожно хибною, якщо її заперечення $\neg F$ є тавтологією, і нейтральною, якщо ні F, ні $\neg F$ не є тавтологіями. Найпростішим, хоча й громіздким, методом перевірки формули на тавтологічність є побудова її таблиці істинності.

Ми вкажемо ще два методи перевірки формули на тавтологічність, які інколи бувають зручнішими.

А. Міркування від супротивного. Цей метод полягає в пошуку такого набору значень простих висловлювань, при яких формула стає хибною. Він особливо ефективний, коли аналізована формула включає багато імплікацій.

Для прикладу розглянемо формулу

$$F = ((p \wedge q) \to r) \to (p \to (q \to r)).$$

Ця формула буде хибною лише в тому випадку, коли $(p \wedge q) \to r$ є істинною, а $p \to (q \to r)$ — хибною. Друга формула буде хибною лише тоді, коли $p = 1$, а формула $q \to r$ є хибною (що можливе лише тоді, коли $q = 1$ і $r = 0$). Отже, формула F може бути хибною лише у випадку $p = 1$, $q = 1$, $r = 0$.

Безпосередньо перевіряється, що на наборі $p = 1$, $q = 1$, $r = 0$ формула F набуває значення 1. Тому F є тавтологією.

Зауважимо, що хоча нам і довелося використати певні додаткові міркування, зате замість 8 можливих наборів значень для p, q і r ми обчислювали значення формули F лише на одному наборі.

Б. Арифметизація формул.

Інколи зручно вважати, що змінні із формул логіки висловлювань набувають не логічних, а числових значень 0 і 1 (дійсних чи з поля $\mathbb{Z}_2$). Тоді логічним операціям відповідатимуть певні арифметичні операції:

	над $\mathbb{R}$	над $\mathbb{Z}_2$
$\neg p$	$1-p$	$1+p$
$p \vee q$	$p+q-pq$	$p+q+pq$
$p \wedge q$	pq	pq
$p \to q$	$1-p+pq$	$1+p+pq$
$p \leftrightarrow q$	$1-p-q+2pq$	$1+p+q$
$p \oplus q$	$p+q-2pq$	$p+q$

Алгоритм перевірки формули на тавтологічність виглядає наступним чином: спочатку замінюємо всі логічні операції відповідними арифметичними, а потім, користуючись арифметичними тотожностями, спрощуємо отриманий вираз. Зауважимо, що наші змінні набувають лише значень 0 і 1, а тому для них виконується ще й тотожність $x^2 = x$. Крім того, над полем $\mathbb{Z}_2$ маємо ще й тотожність $x + x = 0$. Ці тотожності значно полегшують обчислення.

Якщо після всіх спрощень отримаємо 1, формула є тавтологією. У противному разі формула є спростовуваною.

Розглянемо два приклади.

1. Для перевірки на тавтологічність формули

$$(q \to r) \to ((p \vee q) \to (p \vee r))$$

застосуємо арифметизацію над полем $\mathbb{Z}_2$:

$$\begin{aligned} F = 1{+}(1{+}q{+}qr){+}(1{+}q{+}qr)\big(1{+}(p{+}q{+}pq){+}(p{+}q{+}pq)(p{+}r{+}pr)\big) = \\ = q{+}qr{+}(1{+}q{+}qr)(1{+}p{+}q{+}pq{+} \\ {+}p^2{+}pr{+}p^2r{+}qp{+}qr{+}qpr{+}p^2q{+}pqr{+}p^2qr) = \\ = q{+}qr{+}(1{+}q{+}qr)(1{+}q{+}qr{+}pq{+}pqr) = \\ = q{+}qr{+}(1{+}q{+}qr{+}pq{+}pqr{+}q{+}q^2{+}q^2r{+} \\ {+}pq^2{+}pq^2r{+}qr{+}q^2r{+}q^2r^2{+}pq^2r{+}pq^2r^2) = \\ = q + qr + (1 + q + qr) = 1. \end{aligned}$$

Отже, формула є тавтологією.

2. Для перевірки на тавтологічність формули

$$(q \to (p \wedge r)) \wedge \neg((p \vee r) \to q)$$

застосуємо арифметизацію над полем $\mathbb{R}$:

$$\begin{gathered} F = (1 - q + qpr)\big(1 - (1 - (p + r - pr) + (p + r - pr)q)\big) = \\ = (1 - q + qpr)(p + r - pr - pq - rq + pqr) = \\ = p + r - pr - pq - rq + pqr - pq - rq + prq + pq^2 + rq^2 + pq^2 r = \\ = p + r - pr - pq - rq + pqr. \end{gathered}$$

Останній вираз не дорівнює 1, тому формула не є тавтологією. З отриманого виразу, видно, зокрема, що $F = 0$ при $p = q = r = 0$ і при $p = q = r = 1$.

Зауваження. **1.** Пізніше у нас з'явиться ще один метод перевірки формул на тавтологічність — за допомогою рівносильних перетворень.

2. Позаяк є чисто алгоритмічна процедура перевірки формули на тавтологічність за допомогою таблиць істинності, то надалі доведення того, що дана формула логіки висловлювань є тавтологією, зазвичай буде опускатися.

1.1 Алгебра формул

1.1.1 Інтерпретації

Множина $\mathfrak{F}$ всіх формул логіки висловлювань, записаних з використанням логічних зв'язок $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\leftrightarrow$, $\oplus$, природно перетворюється в універсальну алгебру сигнатури $(0, 1, \neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow, \oplus)$ (наприклад, результатом застосування бінарної операції $*$ до формул A і B є формула $(A * B)$).

Як алгебра $\mathfrak{F}$ породжується множиною $\mathcal{A} = \{a, a_1, a_2, \ldots, b, b_1, \ldots\}$ символів простих висловлювань. Дійсно, застосовуючи до елементів цієї множини операції даної сигнатури, ми зможемо одержати довільну формулу алгебри висловлювань. Навіть більше, з означення формули випливає, що таким шляхом кожну формулу можна одержати лише **одним** способом.[1]

Універсальна алгебра такої ж сигнатури природно визначається і на множині $B = \{0, 1\}$ логічних значень (результат застосування операції

[1] Якщо універсальна алгебра має систему твірних з такою властивістю, то вона називається *вільною*.

до відповідних логічних значень визначається таблицею істинності цієї операції). Алгебру $\langle \{0,1\}; 0, 1, \neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow, \oplus \rangle$ будемо позначати $\mathfrak{B}$.

Оскільки алгебри $\mathfrak{F}$ і $\mathfrak{B}$ мають однаковий набір операцій, то можна розглядати гомоморфізми $\varphi : \mathfrak{F} \to \mathfrak{B}$. Такі гомоморфізми будемо називати *інтерпретаціями* алгебри формул логіки висловлювань. Зокрема, образ $\varphi(F)$ формули F при деякому гомоморфізмі φ будемо називати *інтерпретацією* формули F.

Зрозуміло, що гомоморфізм алгебри повністю задається своїми значеннями на множині твірних. У нашому випадку гомоморфізм $\varphi : \mathfrak{F} \to \mathfrak{B}$ повністю задається своїми значеннями на множині $\mathcal{A}$ простих висловлювань. А позаяк кожна формула отримується з простих висловлювань тільки одним способом, то образи змінних можна задавати довільно. Іншими словами, кожне відображення $\widetilde{\varphi} : \mathcal{A} \to \mathfrak{B}$ однозначно продовжується до гомоморфізму $\varphi : \mathfrak{F} \to \mathfrak{B}$.

Присвоєння $\widetilde{\varphi} : \mathcal{A} \to \mathfrak{B}$ символам простих висловлювань певних значень істинності часто називають *оцінкою*. При оцінці кожна формула F отримує значення істинності $\varphi(F)$.

Інтерпретацію $\varphi : \mathfrak{F} \to \mathfrak{B}$ (і її обмеження $\widetilde{\varphi}$ на множину $\mathcal{A}$ символів простих висловлювань) будемо називати *моделлю* формули F, якщо $\varphi(F) = 1$. Зокрема, формула F буде *виконливою*, якщо вона має модель, і буде *тавтологією*, якщо кожна інтерпретація буде її моделлю F.

Будемо говорити, що формули A і B *рівносильні* (і позначати $A \equiv B$), якщо при кожній інтерпретації образи цих формул збігаються (тобто $\varphi(A) = \varphi(B)$ для кожного гомоморфізму $\varphi : \mathfrak{F} \to \mathfrak{B}$). Іншими словами, якщо на кожному наборі логічних значень змінних, що зустрічаються хоча б в одній із формул A і B, ці формули набувають однакових логічних значень. У термінах моделей це означає, що вони мають ті самі моделі.

Два висловлювання називаються *рівносильними*, якщо їх можна одержати з рівносильних формул A і B за допомогою заміни усіх змінних, що входять до цих формул, конкретними висловлюваннями.

Вправа 1.1. *Доведіть, що формули A і B будуть рівносильними тоді й лише тоді, коли формула $A \leftrightarrow B$ буде тавтологією.*

Вправа 1.2. *Доведіть такі рівносильності:*

a) для штриха Шефера: $a \mid b \equiv \neg(a \wedge b)$ *;*

b) для стрілки Пірса (стрілки Лукасевича) : $a \downarrow b \equiv \neg(a \vee b)$.

1.1.2 Алгебра Лінденбаума*

Нагадаємо, що конґруенцією на алгебрі $\mathcal{A}$ називається відношення еквівалентності $\sim$ на цій алгебрі, узгоджене з усіма операціями в $\mathcal{A}$. Тобто для кожної унарної операції $\widehat{\ }$ із $a \sim a_1$ має випливати $\widehat{a} \sim \widehat{a_1}$, для кожної бінарної операції $*$ із $a \sim a_1$ і $b \sim b_1$ має випливати $a * b \sim a_1 * b_1$, і т.д.

Для конґруенції $\sim$ через $\overline{a}$ позначимо той клас еквівалентності, що містить a. На множині $\mathcal{A}/\!\sim$ усіх класів еквівалентності конґруенції $\sim$ можна природним чином визначити всі операції, які є в алгебрі $\mathcal{A}$:

$$\widehat{\overline{a}} := \overline{\widehat{a}}, \quad \overline{a} * \overline{b} := \overline{a * b}, \quad \ldots$$

Коректність визначення цих операції, тобто незалежність результату $\widehat{\overline{a}}$, $\overline{a} * \overline{b}$, тощо від вибору конкретних представників a, b, ... відповідних класів еквівалентності, випливає із узгодженості відношення $\sim$ з операціями в алгебрі $\mathcal{A}$. Отримана таким чином алгебра $\mathcal{A}/\!\sim$ називається *фактор-алгеброю* алгебри $\mathcal{A}$ за конґруенцією $\sim$.

Теорема 1.1. *Відношення рівносильності $\equiv$ є конґруенцією на алгебрі $\mathfrak{F}$ всіх формул логіки висловлювань.*

Доведення. Із означення відношення $\equiv$ одразу випливає, що воно є відношенням еквівалентності. Тому треба перевірити лише узгодженість відношення $\equiv$ з операціями.

Очевидно, що з $A \equiv B$ випливає $\neg A \equiv \neg B$. Нехай тепер $A_1 \equiv A_2$, $B_1 \equiv B_2$, $\varphi : \mathfrak{F} \to \mathfrak{B}$ — довільна інтерпретація, а $*$ — якась із бінарних операцій. Оскільки $\varphi(A_1) = \varphi(A_2)$ і $\varphi(B_1) = \varphi(B_2)$, то

$$\varphi(A_1 * B_1) = \varphi(A_1) * \varphi(B_1) = \varphi(A_2) * \varphi(B_2) = \varphi(A_2 * B_2).$$

Позаяк інтерпретація φ — довільна, то $A_1 * A_1 \equiv A_2 * B_2$. □

Тому можна розглянути факторалгебру $\mathfrak{L} = \mathfrak{F}/_{\equiv}$ алгебри $\mathfrak{F}$ за відношенням рівносильності. Її елементами є *класи рівносильних формул.* Дії у факторалгебрі $\mathfrak{L}$ визначаються стандартно: якщо $\overline{A}$ — клас рівносильності, що містить формулу A, то

$$\neg\overline{A} := \overline{\neg A} \quad \text{і} \quad \overline{A} * \overline{B} := \overline{A * B} \quad \text{для довільної бінарної дії } *.$$

Факторалгебра $\mathfrak{L}$ називається *алгеброю Лінденбаума* (інші назви: *алгебра висловлювань*, *алгебра класів рівносильних формул*).

Оскільки

$$A \to B \equiv \neg A \vee B\,;$$
$$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)\,;$$
$$A \oplus B \equiv \neg(A \leftrightarrow B)\,,$$

то в алгебрі Ліденбаума операції $\to$, $\leftrightarrow$, $\oplus$ можна розглядати як похідні від операцій $\vee$, $\wedge$ та $\neg$. Аналогічне зауваження стосується і алгебри $\mathfrak{B}$. Тому далі ми розглядатимемо $\mathfrak{L}$ і $\mathfrak{B}$ як алгебри сигнатури $(0, 1, \neg, \vee, \wedge)$.

Булевою алгеброю назвемо довільну універсальну алгебру сигнатури $(0, 1, \neg, \vee, \wedge)$, в якій виконуються всі ті закони (= тотожності), що виконуються в алгебрі $\mathfrak{B} = \langle\{0, 1\}; 0, 1, \neg, \vee, \wedge\rangle$. Таке задання класу універсальних алгебр є трохи незвичним, зазвичай це робиться за допомогою явно вказаного списку аксіом.[2] Трохи пізніше ми доведемо, що це можна зробити й для булевих алгебр; і навіть вкажемо одну з можливих аксіоматик. Але при цьому ми вже розумітимемо, звідки взявся саме такий набір аксіом і чому алгебри, які задовольняють цим аксіомам, є важливими.

Теорема 1.2. *Алгебра Ліндeнбаума $\mathfrak{L}$ є булевою.*

Доведення. Нехай
$$F_1(x_1, \ldots, x_n) = F_2(x_1, \ldots, x_n) \tag{1}$$
— закон алгебри $\mathfrak{B}$, $\overline{A_1}$, …, $\overline{A_n}$ — довільні елементи алгебри $\mathfrak{L}$, A_1, …, A_n — представники відповідних класів рівносильних формул. Розглянемо довільний гомоморфізм $\varphi : \mathfrak{F} \to \mathfrak{B}$. Із означення гомоморфізму та (1) випливає, що

$$\begin{aligned}&\varphi(F_1(A_1, \ldots, A_n)) = F_1(\varphi(A_1), \ldots, \varphi(A_n)) = \\ &= F_2(\varphi(A_1), \ldots, \varphi(A_n)) = \varphi(F_2(A_1, \ldots, A_n)).\end{aligned}$$

Отже,
$$F_1(A_1, \ldots, A_n) \equiv F_2(A_1, \ldots, A_n)\,,$$
тобто
$$\overline{F_1(A_1, \ldots, A_n)} = \overline{F_2(A_1, \ldots, A_n)}\,.$$

Але, за означенням дій у факторалгебрі,

$$\overline{F_1(A_1, \ldots, A_n)} = F_1(\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n}), \qquad \overline{F_2(A_1, \ldots, A_n)} = F_2(\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n})\,.$$

Тому
$$F_1(\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n}) = F_2(\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n})\,.$$
Позаяк $\overline{A_1}$, …, $\overline{A_n}$ — довільні, то закон (1) виконується і в алгебрі $\mathfrak{L}$. □

Нехай M — деяка множина. Множину $\mathfrak{B}(M)$ всіх її підмножин можна розглядати як алгебру сигнатури $(\varnothing, M, {}^{-}, \cup, \cap)$. Очевидно, що алгебра $\mathfrak{B}(M)$ однотипна алгебрі $\mathfrak{B} = \langle\{0, 1\}; 0, 1, \neg, \vee, \wedge\rangle$.

Теорема 1.3. *Алгебра $\mathfrak{B}(M)$ всіх підмножин даної множини M є булевою.*

[2] Так, наприклад, задаються групи, кільця, векторні простори і багато інших класів алгебр.

Доведення. Для кожного $a \in M$ розглянемо відображення $\varphi_a : \mathfrak{B}(M) \to \mathfrak{B}$, визначене правилом:

$$\varphi_a(N) = 1 \ \text{ тоді й лише тоді, коли } \ a \in N\,.$$

Легко перевіряється, що відображення φ_a є гомоморфізмом алгебр. Зрозуміло також, що для довільних підмножин $N_1, N_2 \subseteq M$ рівність $N_1 = N_2$ виконується тоді й лише тоді, коли $\varphi_a(N_1) = \varphi_a(N_2)$ для всіх a.

Нехай тепер $F_1(x_1, \ldots, x_n) = F_2(x_1, \ldots, x_n)$ — закон алгебри $\mathfrak{B}$, а N_1, $\ldots$, N_n — довільні підмножини з M. Тоді для довільного $a \in M$

$$\begin{aligned}&\varphi_a(F_1(N_1, \ldots, N_n)) = F_1(\varphi_a(N_1), \ldots, \varphi_a(N_n)) = \\ &= F_2(\varphi_a(N_1), \ldots, \varphi_a(N_n)) = \varphi_a(F_2(N_1, \ldots, N_n)).\end{aligned}$$

Отже, $F_1(N_1, \ldots, N_n) = F_2(N_1, \ldots, N_n)$. □

Підалгебри алгебр $\mathfrak{B}(M)$ називаються *алгебрами множин.*

Теорема 1.4. *Алгебра Ліндендбаума $\mathfrak{L}$ ізоморфна деякій алгебрі множин.*

Доведення. Нехай M — множина всіх інтерпретацій алгебри формул $\mathfrak{F}$. Кожному класу $\overline{A}$ рівносильних формул поставимо у відповідність множину N_A тих інтерпретацій, які на формулах з цього класу набувають значення 1: $N_A = \{\varphi \in M \mid \varphi(A) = 1\}$. Розглянемо відображення

$$\psi : \mathfrak{L} \to \mathfrak{B}(M)\,, \qquad \overline{A} \mapsto N_A\,.$$

Покажемо, що ψ є ін'єктивним гомоморфізмом.

Ін'єктивність ψ. Якщо $\overline{A} \neq \overline{B}$, то $A \not\equiv B$ і існує інтерпретація φ, при якій $\varphi(A) \neq \varphi(B)$. Скажімо, $\varphi(A) = 1$, $\varphi(B) = 0$. Але тоді $\varphi \in N_A$ і $\varphi \notin N_B$. Отже, $\psi(\overline{A}) \neq \psi(\overline{B})$.

Гомоморфність ψ. Очевидно, що $\psi(0) = \varnothing$, $\psi(1) = M$. Далі маємо:

$$\begin{aligned}&\varphi \in \psi(\overline{A} \vee \overline{B}) \;\Leftrightarrow\; \varphi(A \vee B) = 1 \;\Leftrightarrow\; \varphi(A) = 1 \text{ або } \varphi(B) = 1 \;\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\; \varphi \in N_A \text{ або } \varphi \in N_B \;\Leftrightarrow\; \varphi \in N_A \cup N_B \;\Leftrightarrow\; \varphi \in \psi(\overline{A}) \cup \psi(\overline{B})\,.\end{aligned}$$

Отже, $\psi(\overline{A} \vee \overline{B}) = \psi(\overline{A}) \cup \psi(\overline{B})$. Узгодженість ψ з іншими діями перевіряється аналогічно.

Позаяк ψ є гомоморфізмом, то його образ $\psi(\mathfrak{L})$ буде підалгеброю в $\mathfrak{B}(M)$, тобто алгеброю множин. А з ін'єктивності ψ випливає, що відображення $\psi : \mathfrak{L} \to \psi(\mathfrak{L})$ ізоморфізмом. □

Зауваження. Теорема 1.4 легко узагальнюється: *кожна булева алгебра ізоморфна деякій алгебрі множин.*

1.1.3 Властивості рівносильних формул

В алгебрі висловлювань використання рівносильностей відіграє приблизно таку ж роль, як у шкільній алгебрі використання тотожностей. Тому зупинимося на властивостях рівносильних формул детальніше.

Теорема 1.5 (про рівносильну заміну)**.** *Нехай A_B — формула A з виділеним входженням підформули B, а $A_{B'}$ — формула, яка одержується з A заміною виділеного входження B в A на формулу B'. Тоді якщо $B \equiv B'$, то $A_B \equiv A_{B'}$.*

Доведення. Опустимо в таблицях істинності для формул A_B та $A_{B'}$ ті стовпці, які відповідають власним підформулам виділеної формули B (відповідно формули B'). Далі поставимо у відповідність кожному стовпцю таблиці для A_B, який відповідає підформулі C, що містить B, той стовпець таблиці для $A_{B'}$, який одержується з C заміною B на B'. Із рівносильності формул B і B' випливає, що отримані таблиці будуть однаковими. Зокрема, однаковими будуть і ті стовпці цих таблиць, що відповідають формулам A_B і $A_{B'}$. Тому $A_B \equiv A_{B'}$. □

Нехай A і B — деякі формули. *Оператор підстановки* $\prod_A^B$ — це правило перетворення формул логіки висловлювань, за яким у довільній формулі F `усі` підформули A одночасно замінюються на підформули B. Оператор підстановки найчастіше вживається тоді, коли $A = x$ — символ змінної. Крім того, у випадку формули $F = F(x_1, \ldots, x_n)$ замість $\prod_{x_1}^{B_1} \cdots \prod_{x_n}^{B_n} F$ зазвичай пишуть просто $F(B_1, \ldots, B_n)$.

Із теореми 1.5 по рівносильну заміну одразу випливає

Наслідок 1.1. *Якщо $A \equiv B$, то для довільної формули F буде $\prod_A^B F \equiv F$.*

Наступна теорема є очевидною:

Теорема 1.6 (про підстановку)**.** *Якщо $F = F(x_1, \ldots, x_n)$ — тавтологія, то для довільних формул $B_1, \ldots, B_n$ формула $F = F(B_1, \ldots, B_n)$ також буде тавтологією.*

Якщо $B \equiv B'$, то перехід від формули A_B до $A_{B'}$ часто називають *рівносильним перетворенням* формули A. Рівносильні перетворення часто використовуються для зведення формули A до зручнішого або простішого вигляду або для доведення рівносильності двох формул.

Наведемо список основних рівносильностей, які використовуються при рівносильних перетвореннях формул логіки висловлювань:

1. *Закон подвійного заперечення*: $\neg\neg A \equiv A$.

2. *Комутативні закони*: $A \vee B \equiv B \vee A$, $A \wedge B \equiv B \wedge A$, $A \leftrightarrow B \equiv B \leftrightarrow A$, $A \oplus B \equiv B \oplus A$.

3. *Асоціативні закони*: $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$,
$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$, $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$,
$(A \oplus B) \oplus C \equiv A \oplus (B \oplus C)$.

4. *Дистрибутивні закони*: $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$,
$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

5. *Закони ідемпотентності*: $A \vee A \equiv A$, $A \wedge A \equiv A$.

6. *Закони де Моргана*: $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$, $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$.

7. *Закони поглинання* (адсорбції): $A \vee (A \wedge B) \equiv A$, $A \wedge (A \vee B) \equiv A$.

8. *Закони поглинання константами*: $A \vee 1 \equiv 1$, $A \wedge 1 \equiv A$, $A \vee 0 \equiv A$, $A \wedge 0 \equiv 0$.

9. *Закон виключення третьої можливості* (*tertium non datur*): $A \vee \neg A \equiv 1$.

10. *Закон суперечності*: $A \wedge \neg A \equiv 0$.

До найважливіших рівносильностей логіки висловлювань відносять і так звані *закони виключення логічних зв'язок*:

11. $A \oplus B \equiv \neg(A \leftrightarrow B)$;
12. $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$;
13. $A \to B \equiv \neg A \vee B$;
14. $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$;
15. $A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$.