ОРІЄНТОВАНІ КРИВІ ТА ПОВЕРХНІ

ОЗНАЧЕННЯ 1. Нехай $\vec{u} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, причому $\vec{u}$ – неперервно диференційовна, крім скінченної кількості точок і $\exists t \in [a, b] \ : \ \vec{u}'(t) \neq \vec{0}$. Тоді множину $\Gamma = \vec{u}([a, b])$ називають **кусково-гладкою** кривою в просторі $\mathbb{R}^3$.

Якщо $\vec{u} \in C^1([a, b])$, криву називають **гладкою**.

Якщо у кривої задано напрямок пробігання (зростання чи спадання t), криву називають **орієнтованою**.

Якщо початок і кінець кривої співпадають, її називають **замкненою**.

Зауваження. Якщо значення відображення $\vec{u}$ лежать в $\mathbb{R}^2$, то $\Gamma = \vec{u}([a, b])$ називають кривою в площині $\mathbb{R}^2$.

ПРИКЛАДИ. В усіх прикладах криву вважаємо орієнтованою так, що при її пробіганні t зростає.

1. $\vec{u}(t) = (t, t^2), \ t \in [0, 1]$, – орієнтована крива в площині, а саме парабола, що пробігається від початку координат до точки $(1, 1)$. $\vec{u}(t) = (2t, 4t^2), \ t \in [0, 1/2]$, – та сама крива.

2. $\vec{u}(t) = (1-t, (1-t)^2), \ t \in [0, 1]$, – та сама парабола, що пробігається від точки $(1, 1)$ до початку координат.

3. $\vec{u}(t) = (\cos t, \sin t, t), \ t \in [0, 4\pi]$ – гвинтова лінія в просторі, що пробігається від точки $(1, 0, 0)$ до точки $(1, 0, 4\pi)$.

4. $\vec{u}(t) = (\cos t, \sin t), \ t \in [0, 2\pi]$ – коло, що пробігається від точки $(1, 0)$ до тої ж точки проти годинникової стрілки. Ця крива замкнена.

5. $\vec{u}(t) = (1, 2, 5), \ t \in [0, 1]$, – не крива, бо $\vec{u}'(t) = 0, \ t \in [a, b]$. Геометрично це точка.

Відзначимо також формулу для дотичного вектора в кожній точці $\vec{u}(t_0)$ кривої. Якщо надати параметру приріст $\triangle t$, то вектор, направлений вздовж січної, буде

$$\triangle\vec{u}(t_0) = (u_1(t_0+\triangle t)-u_1(t_0), u_2(t_0+\triangle t)-u_2(t_0), u_3(t_0+\triangle t)-u_3(t_0)).$$

Границя

$$\lim_{\triangle t\to 0}\frac{\triangle\vec{u}(t_0)}{\triangle t} = (u_1'(t_0), u_2'(t_0), u_3'(t_0)).$$

Пронормувавши цей вектор, отримаємо формулу для вектора одиничної довжини, направленого вздовж дотичної в точці t_0 :

$$\vec{\tau}(t_0) = \frac{1}{\sqrt{(u_1'(t_0))^2+(u_2'(t_0))^2+(u_3'(t_0))^2}}(u_1'(t_0), u_2'(t_0), u_3'(t_0)).$$

Означення 2. Нехай $T \subset \mathbb{R}^2$ – компактна множина, межею якої є замкнена орієнтована крива ∂T, $\vec{u} \in C^1(T, \mathbb{R}^3)$, причому $\exists (t,s) \in T \ : \ rank\vec{u}'(t,s) = 2$. Тоді множину $S = \vec{u}(T)$ з заданим напрямком орієнтації ∂T називають орієнтованою поверхнею в просторі $\mathbb{R}^3$. Якщо орієнтація задана так, що ∂T пробігається проти годинникової стрілки (так, що T залишається зліва), то орієнтацію називають додатною, інакше – від'ємною.

Орієнтацію поверхні зручно уявляти собі так: при пробіганні в заданому напрямку кривої ∂T пробігається границя поверхні S. Подивимося у просторі на поверхню з такої точки, що це пробігання будемо бачити, як рух проти годинникової стрілки. Тоді вважатимемо, що обрано той бік поверхні, який ми бачимо.

Отже, задати орієнтацію поверхні можна, задавши один з двох її боків.

Поверхню, що обмежує деяку компактну множину (тіло) в просторі, будемо називати замкненою. У замкненої поверхні точки її межі мають більше одного прообразу у множині T, тому орієнтацію такої поверхні визначають, розбивши її на кілька незамкнених частин.

Приклади. 1. $\vec{u}(t,s) = (t, s, t+s)$, $(t,s) \in [0,1]^2$, границя квадрата пробігається проти годинникової стрілки. S – орієнтована поверхня, а саме частина площини $x_3 = x_1 + x_2$, причому потрібний її бік видно з додатного напрямку осі Ox_3.

2. $\vec{u}(t,s) = (\cos t \cos s, \sin t \cos s, \sin s)$, $t \in [0, 2\pi]$, $s \in [-\pi/2, \pi/2]$. Це сфера радіуса 1 з центром в нулі. Побачити орієнтацію всієї поверхні важко, бо вона замкнена. Доцільно розглянути її чверть при $(t,s) \in [0,\pi] \times [0, \pi/2]$. Тоді побачимо зовнішній бік сфери. Для інших трьох чвертей орієнтація буде та сама.

3. $\vec{u}(t,s) = (t+s, 2t+2s, 1-t-s)$, $(t,s) \in [0,1]^2$, – не поверхня, бо $\vec{u}'(t,s) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $t \in [0,1]^2$, і $rank\vec{u}'(t,s) = 1$, $(t,s) \in [0,1]^2$. Геометрично це пряма $x_2 = 2x_1 = 2 - 2x_3$.

Розглянемо тепер деяку точку поверхні, що задається параметрами (t_0, s_0). Частина поверхні при $t = t_0$ – це крива, що має в точці s_0 дотичний вектор

$$\vec{a} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial s}(t_0, s_0), \frac{\partial u_2}{\partial s}(t_0, s_0), \frac{\partial u_3}{\partial s}(t_0, s_0) \right).$$

Аналогічно при $s = s_0$ отримаємо криву з дотичним вектором

$$\vec{b} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}(t_0, s_0), \frac{\partial u_2}{\partial t}(t_0, s_0), \frac{\partial u_3}{\partial t}(t_0, s_0) \right).$$

Тоді вектор нормалі до поверхні буде ортогональним обом цим дотичним векторам, тобто коллінеарним їх декартовому добутку:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\frac{\partial(u_2, u_3)}{\partial(t, s)}(t_0, s_0), \frac{\partial(u_3, u_1)}{\partial(t, s)}(t_0, s_0), \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(t, s)}(t_0, s_0) \right) = (A, B, C).$$

Відповідний нормований вектор $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(A, B, C)$ – одиничний вектор нормалі до поверхні в точці (t_0, s_0).

Враховуючи орієнтацію векторного добутку, з кінця вектора $\vec{n}$ буде видно той бік поверхні, що має додатну орієнтацію. Це дає ще один спосіб визначення орієнтації поверхні.

КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ I РОДУ

ОЗНАЧЕННЯ 1. Нехай $\Gamma = \vec{u}([a,b])$ – гладка крива, $f \in C(\Gamma)$. Криволінійним інтегралом першого роду від функції f по кривій Γ називають число

$$\int\limits_{\Gamma} f(x_1,x_2,x_3)dl = \int\limits_a^b f(u_1(t),u_2(t),u_3(t))\sqrt{(u_1'(t))^2+(u_2'(t))^2+(u_3'(t))^2}dt.$$

Зауваження. 1. Якщо крива лежить в площині, досить покласти $u_3 = 0$.

2. Значення інтеграла не залежить від орієнтації кривої.

3. Значення інтеграла не залежить від параметризації кривої. Дійсно, якщо $v(s),\ s \in [c,d]$, – інша параметризація, то $t = \varphi(s), \varphi$ – зростаюча. Тоді $u(\varphi(s)) = v(s), u'(\varphi(s))\varphi'(s) = v'(s)$,

$$\int\limits_c^d f(v(s))\sqrt{(v_1'(s))^2+(v_2'(s))^2+(v_3'(s))^2}ds = |t=\varphi(s), v_j'(s) = u_j'(\varphi(s))\varphi'(s)|$$

$$= \int\limits_a^b f(u_1(t),u_2(t),u_3(t))\sqrt{(u_1'(t))^2+(u_2'(t))^2+(u_3'(t))^2}dt.$$

Фізична інтерпретація. Нехай є нитка, форма якої описується кривою $\Gamma = \vec{u}([a,b])$, а лінійна щільність (відношення маси до довжини) нитки описується функцією $\rho(x_1, x_2, x_3)$, $(x_1, x_2, x_3) \in \Gamma$. Обчислимо масу нитки.

Розглянемо розбиття відрізка $[a,b]\ :\ t_0 < t_1 < ... < t_n$ і наблизимо криву відповідною ламаною, вважаючи наближено, що щільність відрізка ламаної від точки t_i до точки t_{i+1} наближено рівна $\rho(\vec{u}(t_i))$, отримаємо

$$m \approx \sum_{i=0}^{n-1} \rho(\vec{u}(t_i)) \cdot$$

$$\cdot \sqrt{(u_1(t_{i+1}) - u_1(t_i))^2 + (u_2(t_{i+1}) - u_2(t_i))^2 + (u_3(t_{i+1}) - u_3(t_i))^2}.$$

Переходячи до границі при $n \to \infty$, отримаємо

$$m = \int_a^b \rho(u_1(t), u_2(t), u_3(t)) \sqrt{(u_1'(t))^2 + (u_2'(t))^2 + (u_3'(t))^2} dt.$$

Отже,

$$m = \int_\Gamma \rho(x_1, x_2, x_3) dl.$$

Якщо покласти $\rho = 1$, отримаємо формулу для довжини нитки:

$$l = \int_\Gamma dl.$$

КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ ІІ РОДУ

Означення 1. Нехай $\Gamma = \vec{u}([a,b])$ – орієнтована крива, $f_1, f_2, f_3 \in C(\Gamma)$. Вираз

$$\omega = f_1(x_1, x_2, x_3)dx_1 + f_2(x_1, x_2, x_3)dx_2 + f_3(x_1, x_2, x_3)dx_3$$

називають диференціальною формою першого порядку на Γ.

Означення 2. Криволінійним інтегралом другого роду від форми ω першого порядку по кривій Γ називають число

$$\int_{\Gamma} \omega = \pm \int_a^b (f_1(u_1(t), u_2(t), u_3(t))u_1'(t)+$$

$$+f_2(u_1(t), u_2(t), u_3(t))u_2'(t) + f_3(u_1(t), u_2(t), u_3(t))u_3'(t))dt,$$

де беремо $+$, якщо крива додатно орієнтована, і $-$, якщо крива від'ємно орієнтована.

Зауваження. Якщо крива лежить в площині, досить покласти $u_3 = 0$.

Фізична інтерпретація. Нехай в кожній точці деякої області простору діє сила

$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3), f_3(x_1, x_2, x_3)).$$

Знайдемо роботу по переміщенню тіла маси M вздовж орієнтованої кривої Γ.

Розглянемо розбиття відрізка $[a, b]\ :\ t_0 < t_1 < ... < t_n$. Вважаючи наближено, що сила при переміщенні з точки t_i в точку t_{i+1} наближено рівна $\vec{F}(\vec{u}(t_i))$, за шкільною формулою отримаємо

$$A \approx \sum_{i=0}^{n-1} (\vec{F}(\vec{u}(t_i)), \vec{u}(t_{i+1}) - \vec{u}(t_i)).$$

Переходячи до границі при $n \to \infty$, отримаємо

$$A = \int_a^b (\vec{F}(\vec{u}(t)), \vec{u}'(t))dt.$$

Розписавши скалярний добуток, отримаємо

$$A = \int_\Gamma f_1(x_1, x_2, x_3)dx_1 + f_2(x_1, x_2, x_3)dx_2 + f_3(x_1, x_2, x_3)dx_3 = \int_\Gamma \omega.$$

Встановимо тепер зв'язок між криволінійними та кратними інтегралами.

Теорема 1. **(Про формулу Гріна).** Нехай $M \subset \mathbb{R}^2$ – об'єднання множин, кожна з яких циліндрична вздовж обох осей, причому кришки є неперервно диференційовними, а основи - компактними та вимірними. Нехай межею цієї множини є замкнена крива Γ, що пробігається проти годинникової стрілки. Нехай також $P, Q \in C^1(M)$. Тоді справджується формула

$$\int\limits_{\Gamma} P(x_1, x_2)dx_1 + Q(x_1, x_2)dx_2 = \int\limits_{M} \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2.$$

Доведення. Формулу можна доводити для кожної з множин об'єднання, а потім скласти результати. Нехай

$$M = \{(x_1, x_2) \mid g(x_1) \le x_2 \le h(x_1),\ x_1 \in [a, b]\}.$$

Тоді

$$\int\limits_{\Gamma} P(x_1, x_2)dx_1 = \int\limits_{a}^{b} P(x_1, g(x_1))dx_1 - \int\limits_{a}^{b} P(x_1, h(x_1))dx_1 =$$

$$= -\int\limits_{a}^{b} \left(\int\limits_{g(x_1)}^{h(x_1)} \frac{\partial P}{\partial x_2}(x_1, x_2)dx_2 \right) dx_1 = -\int\limits_{M} \frac{\partial P}{\partial x_2}(x_1, x_2)dx_1 dx_2.$$

Аналогічно перетворюється інтеграл від функції Q.

Наслідок. Для фігури M, обмеженої замкненою додатно орієнтованою кривою Γ, справджуються формули для площі:

$$S(M) = \int\limits_{\Gamma} x_1 dx_2 = -\int\limits_{\Gamma} x_2 dx_1 = \int\limits_{\Gamma} \frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{2}.$$

Доведення. Покласти в формулі Гріна $Q = x_1, P = 0$, або $Q = 0, P = -x_2$, або $Q = \frac{1}{2}x_1,\ P = -\frac{1}{2}x_2$.

Теорема 2. **(Про формулу Ньютона-Лейбніца).** Якщо диференціальна форма ω точна на множині $M \subset \mathbb{R}^3$, тобто $\omega = dg$, то для довільної додатно орієнтованої кривої $\Gamma = \vec{u}([a, b]) \subset M$ справджується рівність

$$\int\limits_{\Gamma} \omega = g(\vec{u}(b)) - g(\vec{u}(a)).$$

Доведення. $\int\limits_{\Gamma} \omega = \int\limits_{a}^{b} (g(\vec{u}(t)))' dt = g(\vec{u}(b)) - g(\vec{u}(a)).$