Дії з ідеалами

Євгенія Кочубінська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

22 лютого 2023

FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS

Перетин ідеалів

Означення

Нехай I, J — ідеали кільця R. *Перетин* $I \cap J$ ідеалів I та J визначається як звичайний теоретико-множинний перетин.

Перетин ідеалів

Твердження

Перетин ідеалів є ідеалом.

Доведення.

Нехай $a, b \in I \cap J$. Тоді

$$\left.\begin{array}{l} a, b \in I \Rightarrow a - b \in I, \quad ar, ra \in I \ \forall r \in R \\ a, b \in J \Rightarrow a - b \in J, \quad ar, ra \in J \ \forall r \in R \end{array}\right. \Rightarrow a - b \in I \cap J, \quad ar, ra \in I \cap J$$

$\square$

Перетин ідеалів

Твердження

Перетин довільної сім'ї ідеалів є ідеалом.

Сума ідеалів

Означення

Нехай I, J — ідеали кільця R. *Сума ідеалів* I та J визначається як множина

$$I + J = \{a + b \,|\, a \in I, b \in J\}\,.$$

Сума ідеалів

Твердження

Сума ідеалів є ідеалом.

Доведення.

Нехай $a, b \in I + J \Rightarrow a = i_1 + j_1$, $b = i_2 + j_2$, $i_{1,2} \in I$, $j_{1,2} \in J$.
Тоді для всіх $a, b \in I + J$:

$$a - b = (i_1 + j_1) - (i_2 + j_2) = (i_1 - i_2) + (j_1 - j_2) \in I + J,$$
$$ra = r(i_1 + j_1) = ri_1 + rj_1 \in I + J, \quad ar = (i_1 + j_1)r = i_1 r + j_1 r \in I + J \text{ для всіх } r \in R. \qquad \square$$

Добуток ідеалів

Означення

Добуток ідеалів I та J визначається як множина

$$IJ = \{a_1 b_1 + \ldots + a_k b_k \,|\, a_i \in I, b_i \in J, k \in \mathbb{N}\},$$

що містить усі скінченні суми елементів вигляду ab, $a \in I$, $b \in J$.

Добуток ідеалів

Твердження

Добуток ідеалів є ідеалом.

Доведення.

Для всіх $a_i, a_i' \in I$, $b_i, b_i' \in J$, $r \in R$:

$$(a_1b_1 + \ldots + a_kb_k) - (a_1'b_1' + \ldots + a_k'b_k') =$$
$$= a_1b_1 + \ldots + a_kb_k + (-a_1')b_1' + \ldots + (-a_k')b_k' \in IJ;$$

$$r(a_1b_1 + \ldots + a_kb_k) = (ra_1)b_1 + \ldots + (ra_k)b_k \in IJ;$$
$$(a_1b_1 + \ldots + a_kb_k)r = a_1(b_1r) + \ldots + a_k(b_kr) \in IJ.$$

□

Добуток ідеалів

Зауваження

Множина $\{ab \,|\, a \in I, b \in J\}$ як правило не є замкненою відносно додавання, а отже, не обов'язково має бути ідеалом.

Задача (3 бали, до 31.03.2023)

Наведіть приклад, який ілюструє наведене вище твердження.

Твердження

Нехай I_1, I_2, I_3 — ідеали кільця R. Тоді

1. $(I_1 I_2)I_3 = I_1(I_2 I_3)$;
2. $(I_1 + I_2)I_3 = I_1 I_3 + I_2 I_3$;
3. $I_1(I_2 + I_3) = I_1 I_2 + I_1 I_3$.

Доведення.

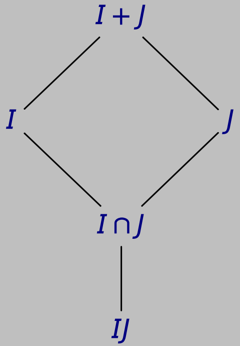
Вправа. $\square$

Діаграма включень

Сума $I + J$ ідеалів I та J є найменшим ідеалом в R, який містить одночасно I та J.

Добуток IJ є найбільшим ідеалом, який міститься в $I \cap J$.

Діаграма включень має наступний вигляд:



Приклади

В кільці $\mathbb{Z}$:

- $6\mathbb{Z} \cap 10\mathbb{Z} = 30\mathbb{Z}$;
- $6\mathbb{Z} + 10\mathbb{Z} = \{6k + 10l \,|\, k, l \in \mathbb{Z}\} = 2\mathbb{Z}$;
- $6\mathbb{Z} \cdot 10\mathbb{Z} = \{(6k_1)(10l_1) + \cdots + (6k_s)(10l_s) \,|\, k_i, l_i \in \mathbb{Z}\} = 60\mathbb{Z}$.

Степінь ідеалу

Добуток ідеалів $I_1, I_2, \ldots, I_k$ визначається індуктивно:

$$I_1 I_2 \ldots I_k = I_1(I_2 \ldots (I_{k-1} I_k)) = \left\{ \sum_l x_{1l} x_{2l} \ldots x_{kl} \mid x_{il} \in I_i, i = \overline{1, k} \right\}.$$

Для $n \in \mathbb{N}$ можна індуктивно визначити n-й степінь I^n ідеалу I:

$$I^1 = I, \quad I^2 = II, \quad \ldots, \quad I^n = I \cdot I^{n-1},$$

тобто це множина, що складається з усіх скінчених сум елементів вигляду $a_1 a_2 \ldots a_n$, де $a_i \in I$ для $i = 1, 2, \ldots, n$.

Нільпотентний ідеал

Означення

Ідеал I називається *нільпотентним*, якщо для деякого $n \in \mathbb{N}$ виконується $I^n = \{0\}$, тобто добуток довільних n елементів ідеалу I дорівнює 0.

Приклад

$(\overline{30})$ — нільпотентний ідеал в кільці $\mathbb{Z}_{240}$.

Радикал ідеалу

Означення

Радикал ідеалу I — це множина

$$\sqrt{I} = \{a \in R \mid a^n \in I \text{ для деякого } n \in \mathbb{N}\}.$$

Приклад

$(\overline{30})$ — радикал ідеалу $(\overline{60})$ в кільці $\mathbb{Z}_{240}$.