A1

1. 1) $d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1-x_2| + 2|y_1-y_2|$

Перевіримо аксіоми: 1. а) $d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \geq 0$ (сума модулів)

б) $(x_1,y_1)=(x_2,y_2) \Rightarrow d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1-x_1|+2|y_1-y_1| = 0$

в) $|x_1-x_2|+2|y_1-y_2| = 0 \Rightarrow \begin{cases} |x_1-x_2|=0 \\ 2|y_1-y_2|=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=x_2 \\ y_1=y_2 \end{cases} \Rightarrow (x_1,y_1)=(x_2,y_2)$

2. $|x_1-x_2|+2|y_1-y_2| = |x_2-x_1|+2|y_2-y_1|$, бо $|a-b|=|b-a|$.

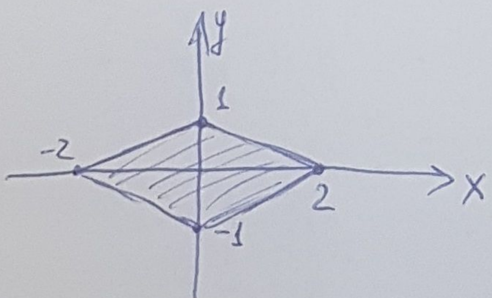
3. $d_1((x_1,y_1),(x_3,y_3)) \overset{?}{\leq} d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) + d_1((x_2,y_2),(x_3,y_3))$

$$\begin{aligned} |x_1-x_3| &\leq |x_1-x_2| + |x_2-x_3| \\ |y_1-y_3| &\leq |y_1-y_2| + |y_2-y_3| \quad \cdot 2 \quad + \end{aligned}$$

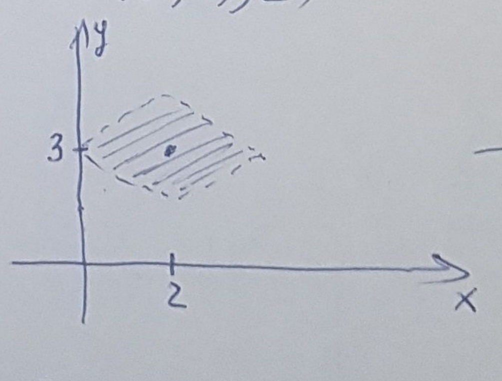
$$|x_1-x_3|+2|y_1-y_3| \leq |x_1-x_2|+2|y_1-y_2| + |x_2-x_3| + 2|y_2-y_3|$$

$\overline{B}((0,0),2) = \{(x,y) \mid |x-0|+2|y-0| \leq 2\}$ $\quad |x|+2|y| \leq 2$

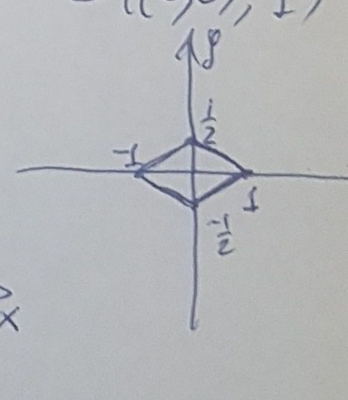
I чверть: $x+2y \leq 2$, симетрія



$B((2,3),2)$



$S((0,0),1)$



3) $d_3((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = (x_1-x_2)^2 + |y_1-y_2|$ – не метрика, бо

$d_3((2,0),(0,0)) \nleq d_3((2,0),(1,0)) + d_3((1,0),(0,0))$

$4 \nleq 1+1$

2) $d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\}$

Перевіримо аксіоми: 1. а) $d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \geq 0$ (max модулів)

б) $(x_1, y_1) = (x_2, x_2) \Rightarrow d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) =$

$= \max\{|x_1-x_1|, |y_1-y_1|\} = 0$

в) $\max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\} = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} |x_1-x_2| = 0 \\ |y_1-y_2| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$$

2. Випливає з того, що $|a-b| = |b-a|$

3. $\max\{|x_1-x_3|, |y_1-y_3|\} \overset{?}{\leq} \underbrace{\max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\}}_{A} + \underbrace{\max\{|x_2-x_3|, |y_2-y_3|\}}_{B}$

$|x_1-x_3| \leq |x_1-x_2| + |x_2-x_3| \leq A+B$

$|y_1-y_3| \leq |y_1-y_2| + |y_2-y_3| \leq A+B \Rightarrow$

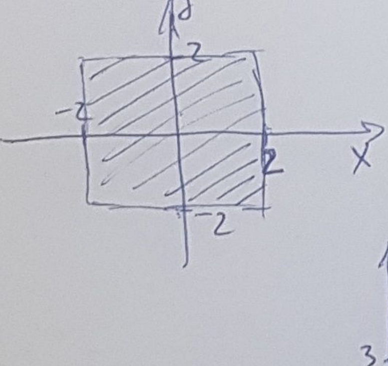
$\max\{|x_1-x_3|, |y_1-y_3|\} \leq A+B$

$\overline{B}((0,0), 2\} = \{(x,y) \mid \max\{|x-0|, |y-0|\} \leq 2\}$

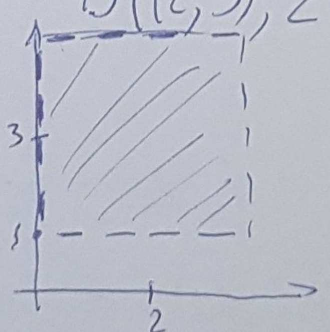
$\max\{|x|, |y|\} \leq 2$

I чверть: $\max\{x, y\} \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ y \leq 2 \end{cases}$

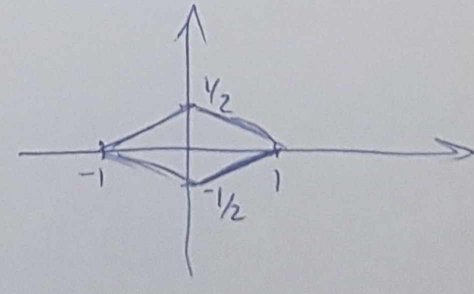
симетрія



$B((2,3), 2)$



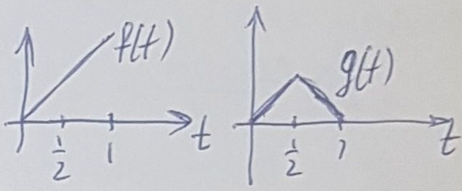
$S((0,0), 1)$



A1

2. 1) $d(f,g)=\max\limits_{t\in[0,\frac{1}{2}]}|f(t)-g(t)|$, $f,g\in C([0,1])$ —

не метрика, бо $d(f,g)=0$ при



2) $d(f,g)=\int\limits_0^1|f(t)-g(t)|dt$ — метрика

1. а) $d(f,g)\geq 0$, як інтеграл від невід'ємної ф-ції

б) $f=g \Rightarrow d(f,g)=\int\limits_0^1 0\,dt=0$

в) $\int\limits_0^1|f(t)-g(t)|dt=0$. Припустимо від супротивного, що $f(t_0)\neq g(t_0)$

f,g — неперервні $\Rightarrow |f(t)-g(t)|>\varepsilon$, $t\in(t_0-\delta,t_0+\delta)$ $\Rightarrow$

$\int\limits_0^1|f(t)-g(t)|dt \geq \int\limits_{t_0-\delta}^{t_0+\delta}\varepsilon\,dt=2\delta\varepsilon>0$ — суперечність

2. Бо $|a-b|=|b-a|$ 3. $|f(t)-h(t)|\leq|f(t)-g(t)|+|g(t)-h(t)|$ — проінтегрувати

3) $d(f,g)=\max\limits_{t\in[0,1]}\left(e^{-t}|f(t)-g(t)|\right)$ — метрика

1. а) $d(f,g)\geq 0$ — максимум невід'ємних чисел

б) $f=g \Rightarrow d(f,g)=\max 0=0$

в) $\max\limits_{t\in[0,1]} e^{-t}|f(t)-g(t)|=0 \Rightarrow e^{-t}|f(t)-g(t)|=0$, $t\in[0,1] \Rightarrow f=g$

2. Випливає з $|a-b|=|b-a|$

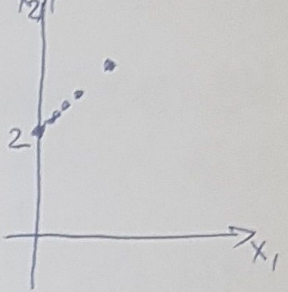
3. $|f(t)-g(t)|\leq|f(t)-h(t)|+|h(t)-g(t)|$

$e^{-t}|f(t)-g(t)|\leq e^{-t}|f(t)-h(t)|+e^{-t}|h(t)-g(t)|\leq d(f,h)+d(h,g) \Rightarrow$

$d(f,g)\leq d(f,h)+d(h,g)$

3. Збіжність в $(\mathbb{R}^m, \rho)$ покоординатна

1) $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\quad \frac{2n+1}{n} = 2+\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{n}, \frac{2n+1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,2)$ в $(\mathbb{R}^2, \rho)$



2) $\frac{\cos n\pi}{2} = \frac{(-1)^n}{2} \not\xrightarrow[n\to\infty]{}$

Послідовність розбіжна

3) $\frac{\sin n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \left(\frac{\text{обмеж.}}{\infty}\right)$ $\quad (-1)^n \not\xrightarrow[n\to\infty]{}$

Послідовність розбіжна

4) $\cos\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \cos 0 = 1$, $\frac{2n-1}{n} = 2-\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$, $\frac{2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$

$\left(\cos\frac{1}{n}, \frac{2n-1}{n}, \frac{2}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (1,2,0)$

Збіжність в $(C([a,b]), \rho)$ рівномірна, з неї випливає поточкова.

Алгоритм: 1. Знайти поточкову границю 2. Перевірити, що вона неперервна

3. перевірити, що $\max\limits_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| = d_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

5) $\{t^{n+3} - t^n, t\in[0,1] : n \geq 1\}$ в $(C([0,1]), \rho)$

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (t^{n+3} - t^n) = \begin{cases} 0-0=0, & t\in[0,1) \\ 1-1=0, & t=1 \end{cases} = 0 = f(t)$ $\quad$ 2. $f \in C([0,1])$

3. $\max\limits_{t\in[0,1]} |t^{n+3} - t^n| = \left|\left(\sqrt[3]{\frac{n}{n+3}}\right)^{n+3} - \left(\sqrt[3]{\frac{n}{n+3}}\right)^{n}\right| = \left|\frac{n}{n+3} - 1\right| \cdot \left(\frac{n}{n+3}\right)^{\frac{n}{3}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (0·обмеж.)

$(t^{n+3} - t^n)' = (n+3)t^{n+2} - nt^{n-1} = 0 \Rightarrow t = \sqrt[3]{\frac{n}{n+3}}$ або $t=0$ або $t=1$ $\quad$ max в першій точці

Послідовність збіжна до $f(t)=0$, $t\in[0,1]$

6) $\{t^2 + \frac{t}{n}, t\in[1,2] : n \geq 1\}$ в $(C([1,2]), \rho)$

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(t^2 + \frac{t}{n}\right) = t^2 = f(t)$ $\quad$ 2. $f \in C([1,2])$

3. $\max\limits_{t\in[1,2]} \left|t^2 + \frac{t}{n} - t^2\right| = \max\limits_{t\in[1,2]} \left|\frac{t}{n}\right| = \frac{2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

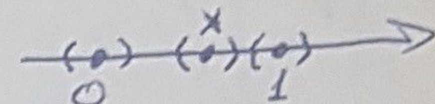
Послідовність збіжна до $f(t) = t^2$

A1

4. $X = (0,1)$, $\rho(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$

$\frac{n}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$ в $(\mathbb{R}, \rho)$, а отже і в (X, ρ), бо $\frac{1}{2} \in X$

$1 - \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\not\to}$ в (X, ρ), бо $1 - \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ в $(\mathbb{R}, \rho)$ і $1 \notin X$



5. 1) $A = [0,1]$ $A^0 = (0,1)$ $A' = [0,1]$ $A_{із} = \varnothing$ A - замкнена, не відкри

2) $A = [0,1)$ $A^0 = (0,1)$ $A' = [0,1]$ $A_{із} = \varnothing$ A - не замк., не відкр.

3) $A = (0,1)$ $A^0 = (0,1)$ $A' = [0,1]$ $A_{із} = \varnothing$ A - відкрита, не замкн.

4) $A = \{\frac{1}{n} : n \geq 1\}$ $A^0 = \varnothing$ $A' = \{0\}$ $A_{із} = A$

A - не замк., не відкр.

5) $A = \mathbb{N}$ $A^0 = \varnothing$ $A' = \varnothing$ $A_{із} = \mathbb{N}$ A - замк., не відкр.

6) $A = \mathbb{Q}$ $A^0 = \varnothing$ $A' = \mathbb{R}$ $A_{із} = \varnothing$ A - не замк., не відкр.

A - відкрита $\Leftrightarrow A = A^0$

A - замкнена $\Leftrightarrow A' \subset A$