ТИПИ ЗАДАЧ,

які потрібно вміти розв'язувати, якщо студент/студентка бажає скласти іспит з алгебри з першого разу

1. З'ясувати, чи є множина G групою відносно заданої на ній операції.
2. Знайти порядок елементів групи, в тому числі прямого добутку груп.
3. Довести, що відображення є гомоморфізмом. Знайти його ядро та образ.
4. Доведіть, що підгрупа є нормальною підгрупою групи.
5. Описати класі суміжності групи за підгрупою.
6. Побудувати таблицю Келі групи/факторгрупи.
7. З'ясувати, чи є два елементи групи спряженими.
8. Знайти кількість геометрично різних розфарбувань правильного многокутника.
9. З'ясувати, чи розкладається група у прямий добуток своїх підгруп.
10. Знайти всі неізоморфні скінченні абелеві групи заданого порядку.
11. З'ясувати, чи є ізоморфними задані скінченні абелеві групи.
12. Знайти розклад скінченної абелевої групи у прямий добуток її примарних циклічних підгруп.

Приклади типових задач

1. Скількома способами можна розфарбувати вершини правильного 8–кутника, якщо a) є фарби двох кольорів; b) три вершини мають бути жовтого кольору, п'ять вершин — блакитного.
2. Знайдіть порядок елемента $(\overline{2}, \overline{3}, \overline{5})$ групи $\mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{15}$.
3. Скільки існує неізоморфних абелевих груп порядку 1000?
4. Розкладіть у прямий добуток примарних циклічних підгруп групу $\mathbb{Z}_{16}^*$. Для циклічних груп із цього розкладу вкажіть твірні.
5. Абелева група G порядку 27 містить 8 елементів порядку 3, 18 елементів порядку 9 та нейтральний елемент. Розкладіть G у добуток циклічних груп.
6. Розбийте наступні групи на класи ізоморфних: a) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9$; b) $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3$; c) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$; d) $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{18}$; e) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{36}$; f) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$.
7. Знайдіть добуток всіх елементів скінченної абелевої групи непарного порядку.
8. Нехай G — абелева група, n — фіксоване натуральне число. Доведіть, що в абелевій групі множина $\{a \in G \mid a^n = e\}$ є підгрупою групи G.
9. Називатимемо елемент g групи G квадратом, якщо існує такий елемент $h \in G$, що $g = h^2$. Нехай a і b — два елементи циклічної групи G, які не є квадратами. Доведіть, що тоді квадратом є елемент ab.
10. * Покажіть, що для всіх $n \geqslant 4$ централізатор елемента $(12)(34)$ у групі $\mathcal{S}_n$ має порядок $8 \cdot (n-4)!$. Вкажіть явно елементи централізатора $Z_{\mathcal{S}_4}((12)(34))$.