Прості та максимальні ідеали

Євгенія Кочубінська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

1 березня 2023

FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS

Прості ідеали

Означення

Власний ідеал I комутативного кільця R називається *простим*, якщо з умови $xy \in I$ для деяких $x, y \in R$ випливає $x \in I$ або $y \in I$.

Приклад

1. $(2) = \{\ldots, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$ — простий ідеал кільця $\mathbb{Z}$.
2. $(6) = \{\ldots, -18, -12, -6, 0, 6, 12, 18, \ldots\}$ не є простим ідеалом кільця $\mathbb{Z}$.

Прості ідеали

Теорема

Нехай R — комутативне кільце з 1. Ідеал I кільця R є простим $\Leftrightarrow$ R/I є областю цілісності.

Доведення.

($\Rightarrow$) Припустимо, що I — простий ідеал, але R/I містить дільники нуля.Тоді

$$(x+I)(y+I)=0 \Leftrightarrow xy+I=I \Leftrightarrow xy\in I \Leftrightarrow x\in I \text{ або } y\in I \Leftrightarrow x+I=0 \text{ або } y+I=0 \text{ в } R/I.$$

($\Leftarrow$) Припустимо, що в R/I немає дільників нуля, але існують такі $x, y \in R$, що $xy \in I$, але $x \notin I$, $y \notin I$.
Тоді $x+I \neq 0$, $y+I \neq 0$ в R/I, але

$$(x+I)(y+I)=xy+I=I=0,$$

тобто $x+I$, $y+I$ — дільники нуля $\lightning\lightning\lightning$ $\square$

Максимальні ідеали

Означення

Власний ідеал I називається *максимальним*, якщо з того, що існує ідеал J, для якого $I \subset J \subset R$, випливає $J = I$ або $J = R$.

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, no head] \arrow[d, no head] \arrow[dr, no head] & \\ \mathfrak{m}_1 & \mathfrak{m}_2 & \mathfrak{m}_3 \end{tikzcd}$$

Приклад

1. (2) — максимальний ідеал $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z} \supset (2) \supset \ldots$
2. (6) не є максимальним: $\mathbb{Z} \supset (2) \supset (6) \supset \ldots$

Максимальні ідеали

Теорема

Нехай R — комутативне кільце з 1. Ідеал I є максимальним ідеалом кільця $R \iff R/I$ — поле.

Максимальні ідеали

Доведення.

($\Rightarrow$) Нехай $\mathcal{m} \subset R$ — максимальний ідеал. Очевидно, $R/\mathcal{m}$ — комутативне кільце з 1.
Нехай $0 \neq a + \mathcal{m}$ — довільний.
Множина $J = Ra + \mathcal{m}$ є ідеалом в R, бо

$$b(Ra + \mathcal{m}) = bRa + b\mathcal{m} \subset Ra + \mathcal{m} \quad \forall b \in R.$$

За побудовою, $\mathcal{m} \subset J$, причому $\mathcal{m} \neq J$, бо $a = 1 \cdot a + 0 \in J$, але $a \notin \mathcal{m}$.

$\mathcal{m}$ —максимальний $\Rightarrow Ra + \mathcal{m} = R \Rightarrow \exists\, x \in R, y \in \mathcal{m}$:

$$xa + y = 1.$$

Тоді

$$(x + \mathcal{m})(a + \mathcal{m}) = xa + \mathcal{m} = 1 - y + \mathcal{m} = 1 + \mathcal{m}.$$

Отже, $R/\mathcal{m}$ — поле. $\square$

Максимальні ідеали

Доведення.

($\Leftarrow$) Припустимо, що R/I — поле, але I не є максимальним ідеалом.
Припустимо, що існує такий ідеал J, що $I \subsetneqq J \subsetneqq R$, зокрема, $1 \notin J$.
Тоді J/I — ідеал R/I.
Покажемо, що ідеал J/I — власний нетривіальний.
Дійсно, $J/I \neq 0$, бо $I \subset J$.
Також $J/I \neq R/I$, оскільки $1 + I \notin J + I$, бо інакше $1 = j + i$, $j \in J$, $i \in I$, а тому $1 \in J$, що не так.
Отже, в полі R/I існує власний нетривіальний ідеал, що неможливо. $\square$

Наслідок

Кожний максимальний ідеал в комутативному кільця з 1 є простим, але не кожний простий є максимальним.

Приклади

1. В кільці $\mathbb{Z}$ кожен простий ідеал є максимальним і має вигляд (p), де p — просте число.
2. В кільці $\mathbb{Z}[i]$ ідеал $\mathcal{m} = (3)$ є максимальним. Нехай $\mathcal{m} \subsetneq J$.
   Візьмемо $a + bi \in J$: $3 \nmid a$ або $3 \nmid b$. Тоді $3 \nmid (a^2 + b^2)$.
   Отже, $(3, a^2 + b^2) = 1 \quad \Rightarrow \quad \exists\, u, v \in \mathbb{Z}$:
   $$3u + (a^2 + b^2)v = 1.$$
   $3 \in J$ (за побудовою), $a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi) \in J \quad \Rightarrow \quad 1 \in J \quad \Rightarrow \quad J = \mathbb{Z}[i] \quad \Rightarrow$
   $\mathcal{m}$ — максимальний ідеал $\quad \Rightarrow \quad \mathbb{Z}[i]/\mathcal{m}$ — поле.
3. В кільці $\mathbb{Z}[i]$ ідеал $\mathcal{m} = (2)$ не є максимальним. Оскільки $2 = (1 + i)(1 - i)$, то елементи $(1 \pm i) + (2)$ — дільники нуля.
   Ідеал $\mathcal{m} = (2)$ також не є і простим.

Приклади

4. Ідеал (x) в $\mathbb{R}[x]$ є максимальним, бо $\mathbb{R}[x]/(x) \simeq \mathbb{R}$ — поле.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in a_0 + (x)$$

5. Ідеал (x) в $\mathbb{Z}[x]$ є простим, але не є максимальним.
   Дійсно, $\mathbb{Z}[x]/(x) \simeq \mathbb{Z}$, а $\mathbb{Z}$ є областю цілісності, але не полем.
   Або: $(x) \subset (2, x) \subset \mathbb{Z}[x]$.
6. Ідеал $(2, x)$ в $\mathbb{Z}[x]$ є максимальним, бо $\mathbb{Z}[x]/(2, x) \simeq \mathbb{Z}_2$.