Прості групи

Євгенія Кочубінська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS

Прості групи

Означення

Неодинична група називається *простою*, якщо вона не має власних неодиничних нормальних підгруп.

Приклади

1. Циклічні групи простого порядку — прості.
2. $\mathcal{A}_3$ — проста група.
3. $\mathcal{A}_4$ — не є простою групою, бо $K_4 \lhd \mathcal{A}_4$.

Задача

Доведіть, що кожна неабелева група порядку менше 60 не є простою.

Простота групи $\mathcal{A}_n$, $n \geq 5$

Теорема

Знакозмінна група $\mathcal{A}_n$ при $n \geq 5$ є простою.

Нагадування

Теорема

Підстановка є парною тоді і лише тоді, коли вона розкладається у добуток парної кількості транспозицій.

Теорема

Множина всіх циклів довжини три є системою твірних знакозмінної групи $\mathcal{A}_n$.

Доведення простоти $\mathcal{A}_n$

Розглянемо неодиничну нормальну підгрупу H групи $\mathcal{A}_n$.

Мета: показати, що $H = \mathcal{A}_n$.

Для цього покажемо, що H містить всі цикли довжини три.

Візьмемо в H довільну нетотожну підстановку π. В залежності від її вигляду розглянемо декілька випадків.

Доведення простоти $\mathcal{A}_n$: випадок 1

$\pi = (ijk)$

Покажемо, що довільний цикл $(i_1 j_1 k_1)$ належить H.

$\sigma \in \mathcal{S}_n$: $\quad i^\sigma = i_1, j^\sigma = j_1, k^\sigma = k_1$.

$n \geq 5 \quad \Rightarrow \quad$ можна обрати $l, m \in \{1, 2, \ldots, n\}$: $l, m \notin \{i, j, k\}$.

$\sigma_1 = (lm)\sigma \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sign}\sigma \neq \operatorname{sign}\sigma_1 \Rightarrow$ або $\sigma \in \mathcal{A}_n$, або $\sigma_1 \in \mathcal{A}_n$.

$$\sigma^{-1}\pi\sigma = (i_1 j_1 k_1) = \sigma_1^{-1}\pi\sigma_1 \in \mathcal{A}_n$$

$$\Rightarrow H = \mathcal{A}_n.$$

$$H \lhd \mathcal{A}_n$$

Доведення простоти $\mathcal{A}_n$: випадок 2

$\pi = (ijkl\dots)\dots$

Тоді

$$\sigma = (ijk)^{-1}\pi(ijk) = (jkil\dots)\dots \in H.$$

Звідси

$$\pi^{-1}\sigma = (ijl) \in H \quad \Rightarrow \quad \text{Випадок 1} \quad \Rightarrow \quad H = \mathcal{A}_n.$$

Доведення простоти $\mathcal{A}_n$: випадок 3

$\pi = (ijk)(lm)\dots$

$$\pi^2 = (ikj) \quad \Rightarrow \quad \text{Випадок 1} \quad \Rightarrow \quad H = \mathcal{A}_n.$$

Доведення простоти $\mathcal{A}_n$: випадок 4

$\pi = (ijk)(i_1 j_1 k_1)\dots$

Тоді

$$\sigma = (i_1 j_1 k)^{-1} \pi (i_1 j_1 k) = (i j i_1)(j_1 k k_1) \in H.$$

Тому

$$\pi\sigma = (i i_1 k j k_1)\dots \quad \Rightarrow \quad \text{Випадок 2} \quad \Rightarrow \quad H = \mathcal{A}_n.$$

Доведення простоти $\mathcal{A}_n$: випадок 5

$\pi = (ij)(kl)$

Для довільного $m \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i, j, k\}$:

$$\sigma = (imj)^{-1}\pi(imj) = (im)(kl) \in H.$$

Тому

$$\pi\sigma = (ijm) \in H \quad \Rightarrow \quad \text{Випадок 1} \quad \Rightarrow \quad H = \mathcal{A}_n.$$

Доведення простоти $\mathcal{A}_n$: випадок 6

$$\pi = (ij)(kl)(i_1 j_1)(k_1 l_1)\dots$$

$$\sigma = ((jk)(li_1))^{-1}\pi(jk)(li_1) = (ik)(ji_1)(lj_1)(k_1 l_1)\dots \in H.$$

Тому

$$\pi\sigma = (ii_1 l)(j_1 jk) \in H \quad \Rightarrow \quad \text{Випадок 4} \quad \Rightarrow \quad H = \mathcal{A}_n. \quad \square$$