Орбіти

Євгенія Кочубінська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

9 листопада 2022

Орбіта групи

Нехай група G діє на множині M.

Введемо на M відношення $\sim$:

$$a \sim b \overset{def}{\iff} \exists g \in G : a^g = b.$$

$a^e = a \Rightarrow a \sim a$

$a^g = b \Rightarrow b^{g^{-1}} = a$: $\quad a \sim b \Rightarrow b \sim a$

$a^g = b, b^h = c \Rightarrow a^{gh} = c$: $\quad a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$

$$\left.\begin{array}{l} a^e = a \Rightarrow a \sim a \\ a^g = b \Rightarrow b^{g^{-1}} = a : \; a \sim b \Rightarrow b \sim a \\ a^g = b, b^h = c \Rightarrow a^{gh} = c : \; a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c \end{array}\right\} \Rightarrow \sim \text{ – відношення еквівалентності на } M.$$

Означення

Класи цього відношення еквівалентності називається *орбітами групи*.

Орбіти групи

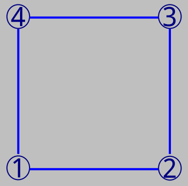
Нехай $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \ldots$ — орбіти групи G, що діє на множині M.

Тоді

$$M = \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{O}_i.$$

Орбіти групи: приклади

1. $\mathcal{S}_n$ має одну орбіту на $\{1, 2, \ldots, n\}$, а саме $\mathcal{O} = \{1, 2, \ldots, n\}$.
2. Орбіти дії спряженням — класи спряженості.
3. D_4 діє на множині вершин ①, ②, ③, ④.
   Орбітою цієї дії є множина $\mathcal{O} = \{①, ②, ③, ④\}$.



Орбіти групи: приклади

4. Нехай $G = \{e, a, b, c\}$ — нециклічна група порядку 4, що діє на множині $M = \{1, 2, 3, 4\}$.
   Задамо дію (G, M) різними способами:

   ① $\varphi(e) = \varepsilon$, $\varphi(a) = (12)(34)$, $\varphi(b) = (13)(24)$, $\varphi(c) = (14)(23)$.
   Орбітою цієї дії є множина
   $$\mathcal{O} = \{1, 2, 3, 4\}\,.$$

   ② $\varphi(e) = \varepsilon$, $\varphi(a) = (12)$, $\varphi(b) = (34)$, $\varphi(c) = (12)(34)$.
   Орбітами цієї дії є множини
   $$\mathcal{O}_1 = \{1, 2\}\,, \quad \mathcal{O}_2 = \{3, 4\}\,.$$

Транзитивна дія

Дія (G, M) називається *транзитивною*, якщо вона має одну орбіту, тобто

$$\text{для довільних } m_1, m_2 \in M \text{ існує такий } g \in G\text{, що } m_2 = m_1^g.$$

Дія (G, M) називається *інтранзитивною*, якщо вона має більше однієї орбіти.

Дія (G, M) називається k-транзитивною, якщо для довільних двох наборів $m_1, \ldots, m_k$ та $m'_1, \ldots, m'_k$ існує такий елемент $g \in G$, що

$$m_1^g = m'_1, m_2^g = m'_2, \ldots, m_k^g = m'_k.$$

Приклад

1. Група $\mathcal{S}_n$ є транзитивною.
2. Група $\mathcal{S}_n$ є n-транзитивною.
3. Група $\mathcal{A}_n$ є $(n-2)$-транзитивною, але не $(n-1)$-транзитивною.

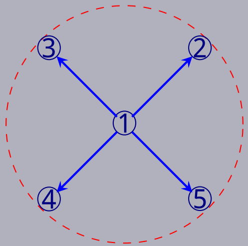
Орбіта точки

Орбітою точки $m \in M$ називається множина

$$\mathcal{O}(m) = \{m^g \mid g \in G\}.$$

Приклад

$G = \mathcal{S}_5$, $m = 1$:



Орбіти точки

Твердження

Нехай (G, M). Тоді для довільного $a \in \mathcal{O}$: $\mathcal{O} = \mathcal{O}(a)$.

Доведення.

Нехай $b \in \mathcal{O}$, $b \neq a$. Тоді

$$\exists g \in G : a^g = b \Rightarrow \mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}(a).$$

Якщо $b \in \mathcal{O}(a)$, то $\exists\ g \in G$: $b = a^g$. Тому

$$a \sim b \text{ та } b \in \mathcal{O} \Rightarrow \mathcal{O}(a) \subseteq \mathcal{O}. \qquad \square$$

Наслідок

Якщо (G, M), то для довільних $a, b \in M$:

$$a \sim b \Leftrightarrow \mathcal{O}(a) = \mathcal{O}(b).$$

Приклад

Нехай

$$\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{smallmatrix}\right) = (124)(35).$$

Знайдемо орбіти дії групи $G = \langle \sigma \rangle = \{\varepsilon, (124)(35), (142), (35), (124), (142)(35)\}$:

$$\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}(1) = \{1, 2, 4\}\,;$$
$$\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}(3) = \{3, 5\}\,;$$
$$\mathcal{O}_3 = \mathcal{O}(6) = \{6\}\,.$$

Питання

1. Скільки орбіт має група G на множині M?
2. Яка *довжина* кожної орбіти, тобто з якої кількості елементів вони складаються?