

Факторгрупи

Євгенія Кочубінська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

5 жовтня 2022



FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS

Факторгрупа

Нехай G — група, H — нормальна підгрупа групи G .

Розглянемо множину

$$G/H = \{H, g_1H, g_2H, \dots\}$$

всіх лівих класів суміжності.

Задамо на G/H дію:

$$g_iH \cdot g_jH = g_i g_j H.$$

Факторгрупа

Теорема

Нехай G — група, H — нормальна підгрупа групи G . Тоді G/H є групою відносно введеної вище дії.

Ця група називається *факторгрупою* групи G за підгрупою H .

Доведення.

Коректність задання дії.

Нехай $aH = a'H$, $bH = b'H$. Тоді

$$\begin{aligned} aH \cdot bH &= abH = a(bH) = a(b'H) = a(Hb') = (aH)b' = \\ &= (a'H)b' = a'(Hb') = a'(b'H) = a'b'H = a'H \cdot b'H. \end{aligned}$$

Асоціативність.

$$(aH \cdot bH) \cdot cH = abH \cdot cH = (ab)cH = a(bc)H = aH \cdot bcH = aH \cdot (bH \cdot cH).$$

Нейтральним елементом є клас H .

Оберненим до класу aH є клас $a^{-1}H$.



Приклади

1 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{n\mathbb{Z}, 1 + n\mathbb{Z}, \dots, (n-1) + n\mathbb{Z}\}$

$$2 + n\mathbb{Z} + (n-1) + n\mathbb{Z} = 1 + n\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n: k + n\mathbb{Z} \mapsto \bar{k}$$

2 $\mathcal{S}_n/\mathcal{A}_n = \{\mathcal{A}_n, (12)\mathcal{A}_n\}$

$$\mathcal{S}_n/\mathcal{A}_n \simeq C_2: \mathcal{A}_n \mapsto e, (12)\mathcal{A}_n \mapsto a$$

3 $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R})$.

Елементами є класи суміжності $A \cdot SL_n(\mathbb{R})$: $A \cdot SL_n(\mathbb{R}) = B \cdot SL_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \det A = \det B$

$$GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^*: A \cdot SL_n(\mathbb{R}) \mapsto \det A$$