ГРАНИЦІ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

В цьому розділі розглядатимуться функції, що мають кілька дійсних аргументів і набувають дійсних значень. Наприклад,

$$f(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2^2,$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_3^{x_1} + x_2.$$

Геометрично функції двох змінних зображаються поверхнями:
$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ – еліптичний параболоїд,
$f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ – сфера,
$f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ – площина.

Залежність одної величини від кількох інших часто зустрічається у фізичних законах:

рівняння стану ідеального газу

$$V(P, T, M, \mu) = \frac{MRT}{\mu P},$$

кутова швидкість при обертанні

$$\omega(v, R) = \frac{v}{R}.$$

Нехай $A \subset \mathbb{R}^m,\ f : A \to \mathbb{R},\ x^0$ – гранична точка множини A.

Означення 1. Число p називають **границею функції** f в точці x^0, якщо

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A,\ x \neq x^0,\ \rho(x, x^0) < \delta\ :\ |f(x) - p| < \varepsilon.$$

Величину $+\infty$ називають **границею функції** f в точці x_0, якщо

$$\forall C > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A,\ x \neq x^0,\ \rho(x, x^0) < \delta\ :\ f(x) > C.$$

Величину $-\infty$ називають **границею функції** f в точці x_0, якщо

$$\forall C > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A,\ x \neq x^0,\ \rho(x, x^0) < \delta\ :\ f(x) < -C.$$

Позначення: $p = \lim\limits_{x \to x^0} f(x)$.

Зауваження. Означення зберігається, якщо A – множина в деякому метричному просторі (X, ρ).

Зауваження. При $m = 2$ таку границю називають подвійною, при $m = 3$ – потрійною, взагалі при $m \geq 2$ - кратною.

Зауваження. Для подвійних та потрійних границь використовують позначення

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0}} f(x_1, x_2), \qquad \lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0 \\ x_3 \to x_3^0}} f(x_1, x_2, x_3).$$

Зауваження. Означення можна еквівалентно записати покоординатно, наприклад для скінченної подвійної границі:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in A,\ (x_1, x_2) \neq (x_1^0, x_2^0),\ |x_1 - x_1^0| < \delta,\ |x_2 - x_2^0| < \delta\ :$$

$$|f(x_1, x_2) - p| < \varepsilon.$$

Це випливає з оцінок

$$|x_1 - x_1^0| \le \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2},\ |x_2 - x_2^0| \le \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2},$$

$$\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2} \le |x_1 - x_1^0| + |x_2 - x_2^0|.$$

Зауваження. Аналогічно функціям однієї змінної можна давати означення Коші для нескінченних граничних значень, наприклад

$$-\infty = \lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to +\infty}} f(x_1, x_2)$$

визначається так:

$$\forall C > 0\ \exists\delta > 0\ \exists L > 0\ \forall (x_1, x_2) \in A,\ |x_1 - x_1^0| < \delta,\ x_2 > L\ :\ f(x_1, x_2) < -C,$$

Теорема 1. **(Про еквівалентність означення Гейне).** Величина p є границею функції f в точці x_0 тоді й лише тоді, коли для довільної послідовності $\{x_n : n \geq 1\}$ такої, що:

1) $\forall n \geq 1 \ : \ x_n \in A$;

2) $\forall n \geq 1 \ : \ x_n \neq x_0$;

3) $x_n \to x_0, \ n \to \infty$ в $(\mathbb{R}^m, \rho)$,

справджується $f(x_n) \to p, \ n \to \infty$.

Доведення аналогічне доведенню в одновимірному випадку.

Теорема 2. **(Про єдиність границі).** Нехай $f(x) \to p, \ x \to x_0$, і $f(x) \to q, \ x \to x_0$. Тоді $p = q$.

Доведення. Для довільної послідовності з теореми 1 $f(x_n) \to p, \ n \to \infty$, і $f(x_n) \to q, \ n \to \infty$, отже, за теоремою про єдиність границі послідовності $p = q$.

Теорема 3. **(Про арифметичні дії).** Нехай $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = p \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = q \in \mathbb{R}$. Тоді:

1) $\forall c \in \mathbb{R} \ : \ \lim\limits_{x \to x_0} (cf(x)) = c \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

4) якщо $q \neq 0$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$.

Доведення. Досить підставити довільну послідовність з теореми 1 і скористатися теоремою про арифметичні дії для числових послідовностей.

Аналогічно на цей випадок переносяться інші властивості границь функцій. Зокрема, при обчисленні корисною є

Теорема 4. **(Про три функції).** Нехай $f, g, h : A \to \mathbb{R}$, і виконуються умови:

1) $\forall x \in A \ : \ f(x) \leq g(x) \leq h(x)$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = p$.

Тоді $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = p$.

Зауваження. Наведені теореми справджуються також для нескінченних граничних значень змінних та границь у випадку відсутності невизначеностей.

Зауваження. При обчисленні кратних границь не можна використовувати правила Лопіталя, тому широко використовуються оцінки.

Приклади. 1. Обчислити границю $\lim\limits_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}} \frac{x_1^2x_2^2}{x_1^2+x_2^2}$.

Використовуючи арифметичні дії, $\lim\limits_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}} \frac{x_1^2x_2^2}{x_1^2+x_2^2} = \lim\limits_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}} \frac{1}{\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}} = \frac{1}{(+\infty)+(+\infty)} = 0$.

2. Обчислити границю $\lim\limits_{\substack{x_1\to +\infty\\ x_2\to +\infty}} \frac{x_1x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2}$.

Оскільки $0 \le |\frac{x_1x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2}| \le \frac{1}{2}\frac{x_1^2+x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}$, а $\lim\limits_{\substack{x_1\to +\infty\\ x_2\to +\infty}} \frac{1}{2(x_1^2+x_2^2)} = 0$, то й шукана границя рівна нулю.

3. Чи існує границя $\lim\limits_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}} \frac{x_1^2x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}$?

Якщо покласти $(x_1^n, x_2^n) = (0, \frac{1}{n}) \to (0,0),\ n\to\infty$, то $f(x_1^n, x_2^n) = 0 \to 0,\ n\to\infty$.

Якщо ж покласти $(z_1^n, z_2^n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0),\ n\to\infty$, то $f(z_1^n, z_2^n) = \frac{1}{4} \to \frac{1}{4},\ n\to\infty$.

Отже, за означенням Гейне границя не існує.

Розглянемо інший спосіб знаходження границі в точці.

Означення 2. Нехай $x_1 \neq x_1^0$ – фіксоване. Тоді $f(x_1, x_2)$ можна розглядати, як функцію однієї змінної. Припустимо, що вона має границю $\lim\limits_{x_2 \to x_2^0} f(x_1, x_2) = g(x_1)$. Якщо при кожному $x_1 \neq x_1^0$ з деякого околу точки x_1^0 існує $g(x_1)$ і існує границя $q = \lim\limits_{x_1 \to x_1^0} g(x_1)$, то величину q називають **повторною границею**.

Позначення: $q = \lim\limits_{x_1 \to x_1^0} \lim\limits_{x_2 \to x_2^0} f(x_1, x_2)$.

Аналогічно визначається $\lim\limits_{x_2 \to x_2^0} \lim\limits_{x_1 \to x_1^0} f(x_1, x_2)$.

Зауваження. При знаходженні повторної границі двічі обчислюється границя функції одної змінної (перший раз – з параметром). Тому можна використовувати всі відомі правила обчислення границь (зокрема, правило Лопіталя).

Теорема 5. **(Про зв'язок подвійної і повторної границі).** Нехай функція $f(x_1, x_2)$ в точці (x_1^0, x_2^0) має подвійну границю q і для всіх $x_1 \neq x_1^0$ з деякого околу точки x_1^0 існує $g(x_1) = \lim\limits_{x_2 \to x_2^0} f(x_1, x_2)$. Тоді існує повторна границя

$$\lim_{x_1 \to x_1^0} \lim_{x_2 \to x_2^0} f(x_1, x_2) = q.$$

Доведення. За означенням

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall (x_1, x_2) \neq (x_1^0, x_2^0), \; |x_1 - x_1^0| < \delta, \; |x_2 - x_2^0| < \delta \; : \; |f(x_1, x_2) - q| <$$

Отже, при фіксованому $x_1 \neq x_1^0, \; |x_1 - x_1^0| < \delta$ маємо

$$\forall x_2 \neq x_2^0, \; |x_2 - x_2^0| < \delta \; : \; |f(x_1, x_2) - q| < \varepsilon.$$

Перейдемо тут до границі при $x_2 \to x_2^0$, яка існує за умовою. Отримаємо:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x_1 \neq x_1^0, \; |x_1 - x_1^0| < \delta \; : \; |g(x_1) - q| < \varepsilon,$$

тобто існує повторна границя, рівна q.

Зауваження. Ця теорема показує, що якщо подвійна і повторні границі існують, то вони рівні між собою.

Приклади. 1. $\lim\limits_{x_1\to 0}\lim\limits_{x_2\to 0}\frac{x_1^2x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}=0$, інша повторна границя теж рівна нулю, хоча подвійна границя не існує.

2. $\lim\limits_{x_1\to 0}\lim\limits_{x_2\to 0}x_2\sin\frac{1}{x_1}=0$, $\lim\limits_{x_2\to 0}\lim\limits_{x_1\to 0}x_2\sin\frac{1}{x_1}\ \nexists$,

$\lim\limits_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}}x_2\sin\frac{1}{x_1}=0$, бо $0\le|x_2\sin\frac{1}{x_1}|\le|x_2|\to 0,\ x_1\to 0,\ x_2\to 0$.

3. $\lim\limits_{x_1\to 0}\lim\limits_{x_2\to 0}\frac{2x_1-3x_2+x_1^2+x_2^2}{x_1+x_2}=\lim\limits_{x_1\to 0}(2+x_1)=2$, $\lim\limits_{x_2\to 0}\lim\limits_{x_1\to 0}\frac{2x_1-3x_2+x_1^2+x_2^2}{x_1+x_2}=\lim\limits_{x_2\to 0}(-3+x_2)=-3$,

$\lim\limits_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}}\frac{2x_1-3x_2+x_1^2+x_2^2}{x_1+x_2}$ не існує, бо існування суперечить теоремі.

НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Нехай $f : A \to \mathbb{R},\ A \subset \mathbb{R}^m,\ x_0$ – гранична точка множини A.

Означення 1. Функцію $f : A \to \mathbb{R}$ називають неперервною в точці x_0, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Зауваження. 1. Для функції двох змінних це – подвійна границя, для функції трьох змінних – потрійна.

2. Вважатимемо, що в ізольованій точці функція завжди неперервна.

Означення 2. Функцію $f : A \to \mathbb{R}$ називають неперервною на множині A, якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини.

Позначення: $f \in C(A)$.

Теорема 1. **(Про арифметичні дії).** Нехай f, g – неперервні в точці x_0, $c \in \mathbb{R}$. Тоді функції $cf, f+g, fg$ неперервні в точці x_0. Якщо $g(x_0) \neq 0$, то неперервна в точці x_0 також функція $\frac{f}{g}$.

Доведення. Випливає з теореми про арифметичні дії для границь функцій.

Теорема 2. **(Про неперервність складної функції).** Нехай $f : A \to B$, $A \subset \mathbb{R}^m$, $g : B \to \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$. Нехай функція f неперервна в точці $x_0 \in A$, а функція g неперервна в точці $f(x_0) \in B$.

Тоді функція $h(x) = g(f(x))$, $x \in A$, є неперервною в точці $x_0 \in A$.

Доведення. Нехай послідовність $\{x_n : n \geq 1\}$ задовольняє умови означення Гейне. Тоді $f(x_n) \to f(x_0)$, $n \to \infty$. Знову застосовуючи означення Гейне, маємо $h(x_n) = g(f(x_n)) \to g(f(x_0)) = h(x_0)$, $n \to \infty$.

Приклади. 1. Стала функція $f(x) = L$, $x \in \mathbb{R}^m$, неперервна в кожній точці.

2. Координатна функція $f_k(x) = x_k$, $x \in \mathbb{R}^m$, $k = \overline{1, m}$, неперервна в кожній точці, бо збіжність в $\mathbb{R}^m$ покоординатна: $x \to x_0 \;\Rightarrow\; x_k \to x_k^0$.

3. Неперервними є многочлени від m змінних, тобто суми одночленів, кожен з яких – добуток числа і кількох степенів $x_k^{p_k}$, $p_k \in \mathbb{N}$. Неперервність є наслідком теореми про арифметичні дії.

4. Функція $h(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \frac{x_1 x_2}{e^{x_1 + x_2}}$ неперервна на $\mathbb{R}^2$, як сума функцій, кожна з яких неперервна, як складна функція.

Можна сформулювати корисний критерій неперервності в термінах прообразу. Нехай $f : A \to \mathbb{R},\ A \subset \mathbb{R}^m$. Нагадаємо, що

$$f^{-1}(G) = \{x \in A \,|\ f(x) \in G\}\,.$$

Теорема 3. **(Про характеризацію неперервності).** Функція f неперервна на $A\ \Leftrightarrow$

для кожної відкритої множини $G \subset \mathbb{R}\ \ :\ \ f^{-1}(G)$ – відкрита в $(A, \rho)\ \Leftrightarrow$

для кожної замкненої множини $G \subset \mathbb{R}\ :\ f^{-1}(G)$ – замкнена в (A, ρ).

Доведення. Необхідність. Нехай $f \in C(A)$. Тоді якщо $G \subset \mathbb{R}$ – відкрита і $x_0 \in f^{-1}(G)$, то

$$f(x_0) \in G\ \Rightarrow\ \exists\varepsilon > 0\ :\ B(f(x_0), \varepsilon) \subset G.$$

За означенням неперервності для цього ε

$$\exists\delta > 0\ \forall x \in A,\ \rho(x, x_0) < \delta\ :\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\ \Rightarrow\ f(x) \in G,$$

тобто

$$f(B(x_0, \delta)) \subset G\ \Rightarrow\ B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(G).$$

Отже, $f^{-1}(G)$ – відкрита множина.

Якщо ж G – замкнена множина, то

$$f^{-1}(G) = A \backslash f^{-1}(\mathbb{R} \backslash G)$$

– замкнена, бо прообраз відкритий за вже доведеним.

Достатність. Нехай $x_0 \in A,\ \varepsilon > 0$. За умовою множина $f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$ відкрита, отже містить кулю $B(x_0, \delta)$. Це означає, що

$$\exists\delta > 0\ \forall x \in A,\ \rho(x, x_0) < \delta\ :\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Якщо справджується твердження для замкнених множин, то твердження для відкритих можна отримати з рівності, наведеної в необхідності.

Приклади. Множина $A = \left\{(x_1, x_2) \,|\ x_1^2 + x_2^4 < 1\right\}$ відкрита, бо $A = f^{-1}(G)$, де $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4,\ G = (-\infty, 1)$.

Неперервні функції однієї змінної мали особливо гарні властивості на відрізку. Для того, щоб отримати аналогічні властивості, в багатовимірному випадку потрібний новий клас множин.

Означення 3. Множину $F \subset X$ називають **компактною** в (X, d), якщо кожна послідовність в F містить підпослідовність, збіжну до елемента F.

Приклади. 1. Скінченна множина завжди компактна, бо довільна послідовність містить підпослідовність з однакових елементів.

2. Множина $\mathbb{Z}$ в $(\mathbb{R}, \rho)$ не є компактною, бо послідовність $\{n \,:\, n \geq 1\}$ не містить збіжної підпослідовності.

3. Множина $(0, 1]$ в $(\mathbb{R}, \rho)$ не є компактною, бо послідовність $\left\{\frac{1}{n} \,:\, n \geq 1\right\}$ не містить збіжної підпослідовності.

4. Множина $\left\{\frac{1}{n} \,:\, n \geq 1\right\} \cup \{0\}$ в $(\mathbb{R}, \rho)$ є компактною, бо довільна послідовність містить або підпослідовність з однакових елементів, або підпослідовність, збіжну до нуля.

Властивості компактних множин:

1. Компактна множина замкнена.

Доведення. Нехай множина F компактна, x_0 – її гранична точка, тобто $\exists\{x_n : n \geq 1\} \subset F,\ x_n \to x_0,\ n \to \infty$. Тоді за означенням існує підпослідовність $\left\{x_{n_k} : k \geq 1\right\}$, збіжна до деякого елемента $y \in F$. Але підпослідовність збігається до того ж елемента, що і вся послідовність, отже $x_0 = y \in F$. Тому F містить всі свої граничні точки.

2. Компактна множина обмежена.

Доведення. Нехай множина F компактна. Якщо припустити від супротивного, що вона необмежена, тобто не міститься в жодній кулі, то, обравши довільну точку x_0, знайдемо елементи $\{x_n : n \geq 1\} \subset F$ такі, що $x_n \notin \overline{B}(x_0, n)$, тобто $d(x_n, x_0) \geq n$.

За означенням існує підпослідовність $\left\{x_{n_k} : k \geq 1\right\}$, збіжна до деякого елемента $y \in F$. За властивістю метрики $d(x_{n_k}, x_0) \to d(y, x_0),\ k \to \infty$, але $d(x_{n_k}, x_0) \geq n_k \to +\infty,\ k \to \infty$. Протиріччя.

3. Замкнена підмножина компактної множини компактна.

Доведення. Довільна послідовність у підмножині має підпослідовність, збіжну до деякого елемента множини. Але з замкненості випливає, що цей елемент належить підмножині.

Теорема 4. **(Критерій компактності в $(\mathbb{R}^m, \rho)$).** Множина в $(\mathbb{R}^m, \rho)$ компактна тоді й лише тоді, коли вона замкнена і обмежена.

Доведення. Необхідність доведена в загальному випадку.

Достатність. Нехай F – замкнена і обмежена множина, $\left\{(x_1^{(n)}, x_1^{(n)}, ..., x_m^{(n)}) \,:\, n \geq 1\right\}$ – послідовність в F. Тоді числова послідовність $\left\{x_1^{(n)} \,:\, n \geq 1\right\}$ обмежена, отже має збіжну до x_1^0 підпослідовність $\left\{x_1^{(n(k_1))} \,:\, k_1 \geq 1\right\}$. Числова послідовність $\left\{x_2^{(n(k_1))} \,:\, k_1 \geq 1\right\}$ обмежена, отже має збіжну до x_2^0 підпослідовність $\left\{x_2^{(n(k_2))} \,:\, k_2 \geq 1\right\}$ і т. д. Числова послідовність $\left\{x_m^{(n(k_m))} \,:\, k_m \geq 1\right\}$ обмежена, отже має збіжну до x_m^0 підпослідовність $\left\{x_m^{(n(k_m))} \,:\, k_2 \geq 1\right\}$. Тоді $x_1^{(n(k_1))} \to x_1^0, ..., x_m^{(n(k_m))} \to x_m^0$. Враховуючи покоординатну збіжність в $\mathbb{R}^m$, $(x_1^{(n(k_1))}, ..., x_m^{(n(k_m))}) \to (x_1^0, ..., x_m^0)$. Враховуючи замкненість множини F, $(x_1^0, ..., x_m^0) \in F$.

Приклади. Компактами є $[a, b], \left\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + 2x_2^2 \leq 3\right\}$.

Теорема 4. **(Критерій компактності в $(C([a, b]), \rho)$).** Множина F в $(C([a, b]), \rho)$ компактна тоді й лише тоді, коли виконуються умови:

1) F – замкнена;

2) F – рівномірно обмежена, тобто

$$\exists C > 0 \; \forall f \in F \; \forall x \in [a, b] \;:\; |f(x)| \leq C;$$

3) F – одностайно неперервна, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall f \in F \; \forall x', x'' \in [a, b], \; |x' - x''| < \delta \;:\; |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Наведемо тепер кілька теорем, що дають властивості неперервних функцій на компактах.

Теорема 5. **(Про образ компактної множини).** Нехай $f \in C(A),\ A$ – компакт в $(\mathbb{R}^m, \rho)$. Тоді $f(A)$ – компакт в $(\mathbb{R}, \rho)$.

Доведення. Нехай $\{y_n : n \geq 1\} \subset f(A)$. Тоді за означенням образу $y_n = f(x_n),\ x_n \in A,\ n \geq 1$. За означенням компактності існує підпослідовність $\left\{x_{n_k} : k \geq 1\right\}$, збіжна до $x \in A$. Але за означенням Гейне $f(x_{n_k}) \to f(x) \in f(A),\ k \to \infty$.

Теорема 6. **(Узагальнення теорем Вейєрштрасса).** Нехай $f \in C(A),\ A$ – компакт в $(\mathbb{R}^m, \rho)$. Тоді

1) $\exists C > 0\ \forall x \in A\ :\ |f(x)| \leq C$ (обмеженість);

2) $\exists x_*, x^* \in A\ :\ f(x_*) = \inf\limits_{x \in A} f(x),\ f(x^*) = \sup\limits_{x \in A} f(x)$.

Доведення. За попередньою теоремою множина $f(A)$ компактна, а отже обмежена і замкнена. Обмеженість дає п. 1, а з замкненості випливає, що множина містить точні межі.

Теорема 7. **(Про неперервність оберненої функції).** Нехай $f : A \to B$ – бієкція, $f \in C(A),\ A$ – компакт в $(\mathbb{R}^m, \rho)$. Тоді $f^{-1} \in C(B)$.

Доведення. Бієктивність гарантує існування оберненої функції. Нехай $G \subset A$ – відкрита множина в (A, ρ). Тоді прообраз $(f^{-1})^{-1}(G) = \left\{y \in B \mid f^{-1}(y) \in G\right\} = \{y \in B \mid y \in f(G)\} = f(G) = B \backslash f(A \backslash G)$ – відкрита множина, як доповнення образу компакту.

За критерієм неперервності f^{-1} – неперервна.

Зауваження. Неперервну функцію, яка є бієкцією, і обернена до якої теж неперервна, називають **гомеоморфізмом.**

Означення 4. Нехай (X,d) – метричний простір, $S \subset X$. Множину S називають зв'язною, якщо не існує відкритих множин A, B в X таких, що:

1) $A \cap B = \varnothing$; 2) $A \cap S \neq \varnothing$; 3) $B \cap S \neq \varnothing$; 4) $S \subset A \cup B$.

Приклади. На прямій множини $(a,b), (a,+\infty)$ зв'язні, а множина $[0,1] \cup [2,3]$ незв'язна.

Теорема 8. **(Про зв'язність образу).** Нехай $f \in C(A)$, A – зв'язна множина в $(\mathbb{R}^m, \rho)$. Тоді $f(A)$ – зв'язна множина в $(\mathbb{R}, \rho)$.

Означення 5. Функцію $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^m$, називають **рівномірно неперервною** на множині A, якщо:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x', x'' \in A, \; \rho(x', x'') < \delta \; : \; |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Теорема 9. **(Кантора).** Нехай $f \in C(A)$, A – компакт в $(\mathbb{R}^m, \rho)$. Тоді f рівномірно неперервна на A.

Доведення. Припустимо від супротивного, що f не є рівномірно неперервною. Тоді для деякого $\varepsilon > 0$ і кожного $\delta_n = \frac{1}{n} (n \in \mathbb{N})$ існують $x^{(n)}, y^{(n)} \in A$, такі, що

$$\rho(x^{(n)}, y^{(n)}) < \frac{1}{n}, \quad |f(x^{(n)}) - f(y^{(n)})| \geq \varepsilon.$$

Оберемо за означенням компактності збіжну до $x \in A$ підпослідовність $\left\{x^{n(k)} \; : \; k \geq 1\right\}$, а потім збіжну до $y \in A$ підпослідовність $\left\{y^{n(k(l))} \; : \; l \geq 1\right\}$ послідовності $\left\{y^{n(k)} \; : \; k \geq 1\right\}$. Враховуючи оцінку для відстаней, границі співпадають $y = x$. Тоді за означенням Гейне неперервності $f(x^{n(k(l))}) - f(y^{n(k(l))}) \to 0, \; l \to \infty$. Але це суперечить оцінці для значень функції.