МЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ

Відстань на прямій, на площині, у тривимірному просторі задовольняє одні й ті самі основні властивості. Узагальнити це поняття так, щоб його можна було перенести й на інші простори дозволяє наведена далі теорія.

Нехай $X \neq \varnothing$ – деяка множина. Її елементи називатимемо точками, а всю множину – простором.

ОЗНАЧЕННЯ 1. **Метрикою (відстанню)** в просторі X називають функцію $d : X \times X \to \mathbb{R}$, яка задовольняє умови:

1) $\forall x, y \in X \ : \ d(x, y) \geq 0$, причому $d(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = y$;

2) $\forall x, y \in X \ : \ d(x, y) = d(y, x)$;

3) $\forall x, y, z \in X \ : \ d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Множину X з метрикою d називають **метричним простором** і позначають (X, d).

ЗАУВАЖЕННЯ. 1. Ці три умови називають аксіомами метрики (аксіоми невід'ємності, симетричності й нерівності трикутника).

2. Одна й та сама множина з різними метриками утворює різні метричні простори.

Найважливішими у застосуваннях є такі два приклади метричних просторів:

1. Простір $(\mathbb{R}^m, \rho)$, $\rho(x, y) := \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_k - y_k)^2}$, $x = (x_1, ..., x_m), y = (y_1, ..., y_m)$, – **евклідова метрика** в m-вимірному просторі.

2. Простір $(C([a, b]), \rho)$, $\rho(x, y) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$ – **рівномірна метрика**.

Зауваження. Надалі літерою ρ за умовчанням позначатимемо одну з цих метрик.

Доведення. Перевіримо аксіоми метрики.

1. Аксіома 1. Невід'ємність очевидна. Якщо $x = y$, то $\rho(x, y) = 0$. Навпаки, якщо $\rho(x, y) = 0$, то сума невід'ємних чисел нульова, отже всі доданки $(x_k - y_k)^2$ нульові. Тоді $x = y$.

Аксіома 2. Випливає з рівності $(x_k - y_k)^2 = (y_k - x_k)^2$ для всіх k.

Аксіома 3. $\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m}(x_k - y_k)^2} \le \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m}(x_k - z_k)^2} + \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m}(z_k - y_k)^2}$.

Позначимо $x_k - z_k = a_k$, $z_k - y_k = b_k$ для всіх k. Тоді нерівність набуде вигляду

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(a_k + b_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{m} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{m} b_k^2}.$$

Підносимо до квадрату:

$$\sum_{k=1}^{m}(a_k + b_k)^2 \le \sum_{k=1}^{m} a_k^2 + \sum_{k=1}^{m} b_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{m} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{m} b_k^2}.$$

Скоротимо всі квадрати та двійку:

$$\sum_{k=1}^{m} a_k b_k \le \sqrt{\sum_{k=1}^{m} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{m} b_k^2}.$$

Це - відома з першого курсу нерівність Коші-Буняковського.

2. Аксіома 1. Невід'ємність очевидна. Якщо $x = y$, то $\rho(x, y) = 0$. Навпаки, якщо $\rho(x, y) = 0$, то максимум невід'ємних чисел нульовий, отже всі доданки $|x(t) - y(t)|$ нульові. Тоді $x = y$.

Аксіома 2. Випливає з рівності $|x(t) - y(t)| = |y(t) - x(t)|$ для всіх t.

Аксіома 3. $\max\limits_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)| \le \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t) - z(t)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |z(t) - y(t)|$.

Маємо для довільного $s \in [a, b]$:

$$|x(s)-y(s)| \le |x(s)-z(s)|+|z(s)-y(s)| \le \max_{t\in[a,b]} |x(t)-z(t)|+\max_{t\in[a,b]} |z(t)-y(t)|.$$

Тому і максимум лівих частин по s не перевищує правої частини.

Крім того, наведемо ряд прикладів, які показують, як можна інакше ввести метрику у відомих просторах.

Приклади. 1. $X = \mathbb{R},\ d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$;

2. $X = \mathbb{R}^2,\ d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$;

3. $X = \mathbb{R}^2,\ d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y \end{cases}$ (дискретна метрика, її можна ввести в довільному просторі).

Властивості відстані:

1. $\forall x, y, z \in X\ :\ |d(x,y) - d(x,z)| \le d(y,z)$;

2. $\forall x_1, x_2, ..., x_n \in X\ :\ d(x_1, x_n) \le d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + ... + d(x_{n-1}, x_n)$.

Доведення. 1. За нерівністю трикутника та симетричністю

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) = d(x,z) + d(y,z) \ \Rightarrow\ d(x,y) - d(x,z) \le d(y,z).$$

$$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z) \ \Rightarrow\ d(x,y) - d(x,z) \ge -d(y,z).$$

Тому за властивостями модуля отримаємо потрібне.

2. Застосуємо метод математичної індукції.

База індукції: $d(x_1, x_3) \le d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$.

Крок індукції: $d(x_1, x_n) \le d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + ... + d(x_{n-1}, x_n) \ \Rightarrow$
$d(x_1, x_{n+1}) \le d(x_1, x_n) + d(x_n, x_{n+1}) \le$
$\le d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + ... + d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})$.

Якщо $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ – метричні простори, то в просторі $X = X_1 \times X_2$ можна ввести метрику

$$d(x,y) = \sqrt{d_1^2(x_1, y_1) + d_2^2(x_2, y_2)},\ x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2).$$

Наприклад, якщо визначити евклідову метрику на двох відрізках, то ця конструкція дасть евклідову метрику на їх декартовому добутку – прямокутнику.

Означення 2. Послідовність $\{x_n : n \geq 1\}$ елементів простору (X, d) **збігається** в цьому просторі до елемента $x \in X$, якщо

$$d(x_n, x) \to 0, \ n \to \infty.$$

При цьому елемент x називають **границею послідовності** $\{x_n : n \geq 1\}$ в (X, d).

Теорема 1. **(Про єдиність границі послідовності).** Якщо $x_n \to x, \ n \to \infty$, і $x_n \to y, \ n \to \infty$, в (X, d), то $x = y$.

Доведення. $0 \leq d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \to 0, \ n \to \infty$. Тому $d(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = y$.

Теорема 2. **(Про неперервність відстані).** Нехай $x_n \to x, \ n \to \infty$, і $y_n \to y, \ n \to \infty$, в (X, d). Тоді $d(x_n, y_n) \to d(x, y), \ n \to \infty$.

Доведення. $|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq |d(x_n, y_n) - d(x_n, y)| + |d(x_n, y) - d(x, y)| \leq d(y_n, y) + d(x_n, x) \to 0, \ n \to \infty$.

Наслідок. Нехай $x_n \to x, \ n \to \infty$, в $(X, d), \ y \in X$. Тоді $d(x_n, y) \to d(x, y), \ n \to \infty$.

Теорема 3. **(Критерій збіжності в просторі $(\mathbb{R}^m, \rho)$).** Збіжність в $(\mathbb{R}^m, \rho)$ рівносильна покоординатній збіжності, тобто

$$x^{(n)} \to x,\ n \to \infty,\ \Leftrightarrow\ x_k^{(n)} \to x_k,\ n \to \infty,\ k = \overline{1, m},$$

де $x = (x_1, ..., x_m),\ x_n = (x_1^{(n)}, ..., x_m^{(n)})$.

Доведення. Необхідність випливає з оцінки

$$0 \le |x_k^{(n)} - x_k| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_k^{(n)} - x_k)^2} \le \rho(x^{(n)}, x)$$

та теореми про три послідовності.

Достатність випливає з теореми про арифметичні дії та неперервності кореня.

Теорема 4. **(Критерій збіжності в просторі $(C([a, b]), \rho)$).** Збіжність в $(C([a, b]), \rho)$ рівносильна рівномірній збіжності.

Доведення. Випливає з означення.

Нехай (X, d) – метричний простір, $x_0 \in X,\ r > 0$.

ОЗНАЧЕННЯ 3. **Замкненою кулею** з центром в точці x_0 і радіусом r називають множину
$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}$.

Відкритою кулею з центром в точці x_0 і радіусом r називають множину
$B(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$.

Сферою з центром в точці x_0 і радіусом r називають множину
$S(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) = r\}$.

Означення 4. Множину $A \subset X,\ A \neq \varnothing$ називають **обмеженою**, якщо вона міститься в деякій кулі. Для обмеженої множини A число $d(A) = \sup\limits_{x \in A, y \in A} d(x, y)$ називають **діаметром** множини A.

Означення 5. Нехай $A \subset X,\ x_0 \in A$. Точку x_0 називають **внутрішньою точкою** множини A, якщо виконується умова

$$\exists r > 0 \ : \ B(x_0, r) \subset A.$$

Множину всіх внутрішніх точок множини A позначають A^0.

Означення 6. Множину $A \subset X$ називають **відкритою** в (X, d), якщо всі точки множини A внутрішні.

Приклади. 1. На прямій з евклідовою відстанню $A = (0, 2) \ \Rightarrow\ A^0 = (0, 2),\ A$ – відкрита; $A = (0, 2] \ \Rightarrow\ A^0 = (0, 2),\ A$ – не відкрита; $A = [0, 2] \ \Rightarrow\ A^0 = (0, 2),\ A$ – не відкрита; $A = (0, +\infty) \ \Rightarrow\ A^0 = (0, +\infty),\ A$ – відкрита.

2. В площині з евклідовою відстанню $A = \{(x, y) \mid x + y > 1\}$ – відкрита, $A = \left\{(x, y) \mid y \geq x^2\right\}$ – не відкрита.

Властивості відкритих множин:

1. Відкрита куля є відкритою множиною.

2. Об'єднання довільної кількості відкритих множин є відкритою множиною.

3. Перетин скінченної кількості відкритих множин є відкритою множиною.

Доведення. 1. Для точки $x \in B(x_0, r_0)$ досить взяти $r = r_0 - d(x, x_0)$.

2. Кожна точка належить деякій множині разом з кулею, отже належить об'єднанню разом з цією кулею.

3. $x \in A = \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k \ \Rightarrow \ \forall k = \overline{1, n} \ \exists r_k > 0 \ : \ B(x, r_k) \subset A_k$. Нехай $r = \min\{r_1, ..., r_n\}$. Тоді $B(x, r) \subset A$.

Теорема 5. **(Про структуру відкритих множин в $(\mathbb{R}^m, \rho)$).** Довільна непорожня відкрита множина в $(\mathbb{R}, \rho)$ є не більш ніж зліченним об'єднанням інтервалів, що не перетинаються.

Довільна непорожня відкрита множина в $(\mathbb{R}^m, \rho)$ є не більш ніж зліченним об'єднанням відкритих куль.

Доведення. Для кожної точки множини розглянемо об'єднання інтервалів, до яких належить точка. Таке об'єднання є інтервалом. При цьому різні інтервали не перетинаються.

Означення 7. Нехай $A \subset X,\ x_0 \in X$. Точку x_0 називають **граничною точкою** множини A, якщо виконується умова

$$\forall r > 0\ \exists x \in A,\ x \neq x_0\ :\ x \in B(x_0, r).$$

Множину всіх граничних точок множини A позначають A'.

Зауваження. Точка x_0 є граничною точкою множини A тоді й лише тоді, коли існує послідовність $\{x_n : n \geq 1\}$ така, що:
1) $\forall n \geq 1\ :\ x_n \in A$;
2) $\forall n \geq 1\ :\ x_n \neq x_0$;
3) $x_n \to x_0,\ n \to \infty$, в (X, d).

Означення 8. Множину $A \subset X$ називають **замкненою** в (X, d), якщо вона містить всі свої граничні точки.

Приклади. 1. На прямій з евклідовою відстанню $A = (0,2)\ \Rightarrow\ A' = [0,2],\ A$ – не замкнена; $A = (0,2]\ \Rightarrow\ A' = [0,2],\ A$ – не замкнена; $A = [0,2]\ \Rightarrow\ A' = [0,2],\ A$ – замкнена; $A = [0,+\infty)\ \Rightarrow\ A' = [0,+\infty),\ A$ – замкнена.
2. В площині з евклідовою відстанню $A = \{(x,y) \mid x + y > 1\}$ – не замкнена, $A = \left\{(x,y) \mid y \geq x^2\right\}$ – замкнена.

Теорема 7. **(Про зв'язок між замкненими і відкритими множинами).** Множина A відкрита в (X,d) тоді й лише тоді, коли її доповнення $X\backslash A$ замкнене в (X,d).

Доведення. Необхідність. Нехай A – відкрита. Тоді $\forall x \in A\ \exists r > 0\ :$ $B(x,r) \subset A$, отже $B(x,r) \cap (X\backslash A) = \varnothing$ і x не є граничною точкою $X\backslash A$.

Достатність. Нехай $X\backslash A$ – замкнена, $x \in A$. Оскільки $x \notin X\backslash A$, то x – не гранична точка $X\backslash A$, тобто $\exists r > 0\, \forall y \in X\backslash A,\ y \neq x\ :\ y \notin B(x,r)$, тобто $B(x,r) \subset A$.

Властивості замкнених множин:

1. Замкнена куля є замкненою множиною.

2. Об'єднання скінченної кількості замкнених множин є замкненою множиною.

3. Перетин довільної кількості замкнених множин є замкненою множиною.

Доведення. 1. Для точки $x \notin \overline{B}(x_0, r_0)$ досить взяти $r = d(x, x_0) - r_0$.

2,3. Використовуємо правила де Моргана

$$X\backslash \left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{n} (X\backslash A_k),$$

$$X\backslash \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigcap_{k=1}^{n} (X\backslash A_k).$$

та властивості відкритих множин.

Означення 9. Множину, $\overline{A} = A \cup A'$ називають **замиканням** множини A.

Приклади. На прямій з евклідовою метрикою $\overline{(-2,3)} = [-2,3]$.