ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

Означення 1. Нехай $M \subset \mathbb{R}^3$. Відображення $U : M \to \mathbb{R}$ називають скалярним полем, відображення $\vec{F} : M \to \mathbb{R}^3$ – векторним полем.

Приклади. 1. Скалярні поля: температури, тиску, електричного чи гравітаційного потенціала. Для цих полів часто розглядають поверхні рівня – поверхні $U(x_1, x_2, x_3) = const$.

2. Векторні поля: силове поле, поле швидкостей.

Означення 2. Градієнтом функції U в заданій точці називають вектор $\vec{grad} U = (\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \frac{\partial U}{\partial x_3})$.

Як вже було показано раніше, градієнт дає напрямок, в якому функція, виходячи з заданої точки, змінюється найбільше (на малюнку – лінії рівня йдуть найщільніше). При цьому довжина вектора – це швидкість зростання величини (найбільша).

Сам градієнт є векторним полем, яке породжене заданим скалярним.

Приклади. 1. Якщо розглянути поле гравітаційного потенціала, породженого масою M_0, розташованою в початку координат, отримаємо

$$U(x_1, x_2, x_3) = \frac{M_0}{r} = \frac{GM_0}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}.$$

Градієнт

$$\vec{grad} U(x_1, x_2, x_3) = -\frac{GM_0}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3}}(x_1, x_2, x_3)$$

співпадає з силою тяжіння, що діє на одиничну масу, отже отримане векторне поле є силовим полем сил гравітації (дійсно, модуль вектора в правій частині рівний $\frac{GM_0 \cdot m}{r^2}$, де $m = 1,\ r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$).

2. Якщо розглядати поле щільності вільної рідини, то, враховуючи, що рідина буде текти з областей з високою щільністю до областей з низькою щільністю, то градієнт щільності утворить векторне поле швидкостей, яке вже розглядалося у зв'язку із задачею про потік рідини крізь поверхню.

3. Розглядаючи поле температур, отримаємо в якості градієнта потужність теплового потоку, направлену в напрямку зменшення температури.

Означення 3. Потоком векторного поля $\vec{F}$ через поверхню S називають величину

$$flow\vec{F} = \int\limits_S F_1 dx_2 \wedge dx_3 + F_2 dx_3 \wedge dx_1 + F_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

Приклади. 1. Як було показано в якості інтерпретації поверхневого інтеграла II роду, ця величина задає величину потоку рідини, що витікає з поверхні S, якщо $\vec{F}$ – поле швидкостей.

2. Якщо замість поля швидкостей, розглянуте векторне поле градієнтів температур, отримаємо формулу для потоку тепла крізь поверхню.

Враховуючи формулу зв'язку між поверхневими інтегралами I та II роду, можна отримати ще один вираз для потоку:

$$flow_S\vec{F} = \int\limits_S (\vec{F}, \vec{n}) dS.$$

Означення 4. Дивергенцією векторного поля $\vec{F}$ в заданій точці називають скаляр

$$div\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}.$$

Таким чином, дивергенція – це скалярне поле, породжене векторним полем. Для того, щоб з'ясувати механічний сенс дивергенції, згадаємо формулу Остроградського-Гаусса, записавши в ній подвійний інтеграл, як інтеграл першого роду:

$$\int\limits_S (\vec{F}, \vec{n}) dS = \int\limits_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3.$$

Тепер ми можемо її переписати так:

$$flow_S \vec{F} = \int\limits_V div\vec{F} dx_1 dx_2 dx_3.$$

Оберемо тепер деяку точку B і оточимо її сферою $S_r = S(B, r)$ і позначимо об'єм відповідної кулі $V(r)$. Тоді, враховуючи теорему про середнє

$$\lim_{r \to 0+} \frac{flow_{S_r} \vec{F}}{V(r)} = \lim_{r \to 0+} \frac{\int\limits_V div\vec{F} dx_1 dx_2 dx_3}{V(r)} = \lim_{r \to 0+} \frac{div\vec{F}(\xi_r) V(r)}{V(r)} = div\vec{F}(B).$$

Ця рівність може розглядатися, як ще одне означення дивергенції, причому незалежне від системи координат. Фізично воно означає, що дивергенція задає потужність джерела в заданому місці рідини (або теплового потоку).

Формула Остроградського-Гаусса в свою чергу набуває такого сенсу: потік крізь замкнену поверхню пропорційний сумарній потужності джерел всередині цієї поверхні.

Означення 5. Величину

$$circ_{\Gamma}\vec{F} = \int\limits_{\Gamma} F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3$$

називають циркуляцією векторного поля $\vec{F}$ вздовж кривої Г.

Приклади. 1. Якщо $\vec{F}$ – силове поле, то циркуляція дорівнює роботі сил вздовж цієї кривої.

2. Якщо $\vec{F}$ – поле швидкостей, то циркуляція – це сумарний скалярний імпульс часток рідини вздовж кривої.

Означення 6. Величину

$$\vec{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_3}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_1}\right)$$

називають ротором (вихором) поля $\vec{F}$.

Для з'ясування фізичного змісту ротора запишемо формулу Стокса, використовуючи поверхневий інтеграл I роду:

$$circ_\Gamma(\vec{F}, \vec{\tau}) = \int\limits_S (\vec{rot}\vec{F}, \vec{n}).$$

Міркуючи аналогічно до дивергенції, можна показати, що ротор не залежить від системи координат, направлений ортогонально до площини циркуляції рідини навколо заданої точки і пропорційний цій циркуляції.

Приклади. При довільному русі твердого тіла, як доводиться у фізиці $\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{\omega} \times \vec{r}$. Звідси можна побачити, що $\vec{v} = (v_{01} + \omega_3 x_2 - \omega_2 x_3, ...)$, звідки $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{rot}\vec{v}$.

Розглянемо тепер два спеціальних типи полів, що зустрічаються в природі.

1) Потенціальне векторне поле – поле $\vec{F}$, для якого існує скалярне поле U таке, що $\vec{F} = gr\vec{a}dU$. Прикладами таких полів є гравітаційне поле та електричне поле, що є градієнтами полів потенціалів.

Умова потенціальності означає, що $\omega = F_1dx_1+F_2dx_2+F_3dx_3$ – точна диференціальна форма, що є диференціалом функції U.

Якщо $\vec{F} \in C^1(M)$, то з умови потенціальності на M випливає:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}, \ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} = \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \ \frac{\partial F_2}{\partial x_3} = \frac{\partial F_3}{\partial x_2}.$$

Але ці умови рівносильні тому, що $r\vec{o}t\vec{F} = 0$. Отже, в потенційному полі відсутні вихори.

Використовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, для потенційного поля маємо

$$\int\limits_{\Gamma} (F_1dx_1 + F_2dx_2 + F_3dx_3) = U(\vec{u}(b)) - U(\vec{u}(a)),$$

тобто маємо твердження: робота в силовому потенційному полі залежить лише від початкового та кінцевого положення, і не залежить від кривої руху тіла.

2) Соленоїдальне векторне поле – поле $\vec{F}$, для якого існує векторне поле G таке, що $\vec{F} = r\vec{ot}\vec{G}$.

Для того, щоб поле було соленоїдальним, необхідно й досить, щоб $div\vec{F} = 0$.

Доведення. Необхідність випливає з загальної формули $div(r\vec{ot}\vec{F}) = 0$.

Достатність. Якщо $div\vec{F} = 0$, знайдемо поле $\vec{G}$ таке, що

$$G_3 = 0, \ \frac{\partial G_2}{\partial x_3} = -F_1, \ \frac{\partial G_1}{\partial x_3} = F_2.$$

Отримаємо

$$G_2(x_1, x_2, x_3) = -\int\limits_a^{x_3} F_1(x_1, x_2, t)dt + C(x_1, x_2),$$

$$G_1(x_1, x_2, x_3) = \int\limits_a^{x_3} F_2(x_1, x_2, t)dt.$$

Продиференціювавши ці вирази під знаком інтеграла, отримаємо

$$\frac{\partial G_2}{\partial x_1} - \frac{\partial G_1}{\partial x_2} = -\int\limits_a^{x_3} (div\vec{F}(x_1, x_2, t) - \frac{\partial F_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, t))dt + \frac{\partial C}{\partial x_1} =$$

$$= F_3(x_1, x_2, x_3) - F_3(x_1, x_2, a) + \frac{\partial C}{\partial x_1}.$$

Визначивши $C(x_1, x_2) = \int\limits_b^{x_1} F_3(t, x_2, a)dt$, отримаємо шукане поле G.

Зауважимо, що якщо $\vec{G_1}$ – інше векторне поле, що породжує $\vec{F}$, отже $r\vec{ot}(\vec{G_1} - \vec{G}) = 0$, звідки поле $\vec{G_1} - \vec{G} = \vec{G_0}$ – потенціальне. Отже, всі поля, що породжують $\vec{F}$, мають вигляд $\vec{G} + \vec{G_0}$, де $\vec{G_0}$ – довільне потенціальне поле.

Доведена умова соленоїдальності означає, що це поле без джерел. Таким полем є, наприклад, поле швидкостей рідини у трубці. З формули Остроградського-Гаусса випливає, що потоки крізь два перерізи трубки (незалежно від їх форми) завжди рівні.

3) Розглянувши довільне векторне поле $\vec{F}$, можна побачити, що воно завжди розкладається в суму потенціального та соленоїдального векторного полів $\vec{G_0}$ та $\vec{G}$ відповідно.

Доведення цього факту базується на тому, що диференціальне рівняння в частинних похідних $\triangle U = div\vec{F}$ $(\triangle U = div\overrightarrow{grad}U)$ завжди має розв'язок U. Тоді можна взяти $G_0 = \overrightarrow{grad}U,\ G = F - G_0$.