Теореми про гомоморфізм.
Третя та четверта теореми про гомоморфізм

Євгенія Кочубінська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

19 жовтня 2022

FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS

Четверта теорема про гомоморфізм: теорема про відповідність

Теорема

Нехай G — група, $\overline{G}$ — факторгрупа. Нехай $\alpha : G \to \overline{G}$ — епіморфізм з ядром N. Тоді існує взаємнооднозначна відповідність

$$\left\{\text{підгрупи } H < G, \text{ які містять } N\right\} \longleftrightarrow \left\{\text{підгрупи } \overline{H} < \overline{G}\right\},$$

при якій $\alpha(H) = \overline{H}$, де $N < H$, та $\alpha^{-1}(\overline{H}) = H$.

Якщо при цій відповідності $H \longleftrightarrow \overline{H}$, $H' \longleftrightarrow \overline{H'}$, то

1. $\overline{H} < \overline{H'} \Leftrightarrow H < H'$, у цьому випадку $|\overline{H'} : \overline{H}| = |H' : H|$;
2. $\overline{H} \lhd \overline{H'} \Leftrightarrow H \lhd H'$, у цьому випадку α індукує ізоморфізм

$$G/H \xrightarrow{\simeq} \overline{G}/\overline{H}.$$

Теорема про відповідність

Нарис доведення.

Якщо $\overline{H} < \overline{G}$, то $\alpha^{-1}(\overline{H})$ — це підгрупа, що містить N.
Якщо $H < G$, тоді $\alpha(H) < \overline{G}$.
$\alpha\alpha^{-1}(H) = HN$ та $HN = H \Leftrightarrow N < H$, а $\alpha^{-1}\alpha(\overline{H}) = \overline{H}$.

Ці дві операції дають потрібну біекцію.

Розбиття

$$H' = \bigsqcup_{i \in I} a_i H$$

дає аналогічне розбиття для

$$\overline{H}' = \bigsqcup_{i \in I} \alpha(a_i)\overline{H}.$$

Для завершення доведення розглянути гомоморфізм

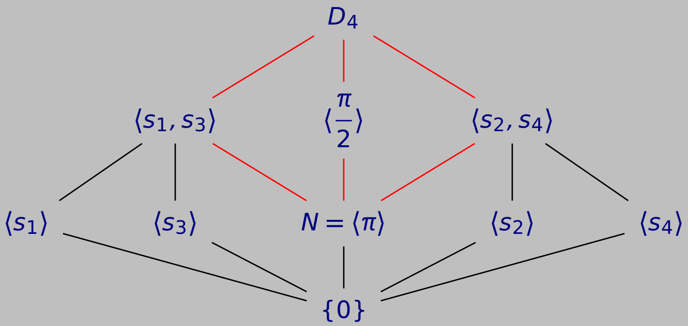
$$G \to \overline{G}/\overline{H} : \quad g \mapsto \alpha(g)\overline{H}. \quad \square$$

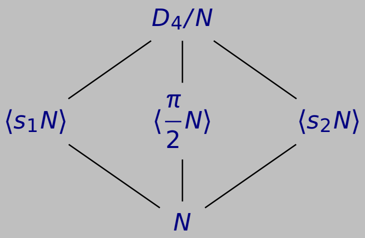
Теорема про відповідність

$$D_4 = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, s_1, s_2, s_3, s_4\right\}, D_4 \rhd N = \{0, \pi\}.$$

Тоді $D_4/N = \left\{N, \frac{\pi}{2}N, s_1N, s_2N\right\}$.

Теорема про відповідність





Третя теорема про гомоморфізм

Якщо у теоремі про відповідність взяти відображення

$$\alpha : G \to G/N, \quad g \xmapsto{\alpha} gN,$$

то отримаємо наслідок, який називають третьою теоремою про гомоморфізм.

Теорема

Нехай G — група, N — нормальна підгрупа G. Тоді існує взаємно однозначна відповідність між підгрупами факторгрупи G/N та підгрупами H групи G, що містять N.
Більше того, $H/N \lhd G/N \Leftrightarrow H \lhd G$ та

$$G/H \simeq (G/N)/(H/N).$$

Третя теорема про гомоморфізм

Приклад

Нехай $G = \mathbb{Z}$, $H = m\mathbb{Z}$, $N = km\mathbb{Z}$. Тоді $\mathbb{Z} \rhd m\mathbb{Z} \rhd km\mathbb{Z}$ та

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq (\mathbb{Z}/km\mathbb{Z})/(m\mathbb{Z}/km\mathbb{Z}).$$

Отже, $\mathbb{Z}_m \simeq \mathbb{Z}_{km}/\mathbb{Z}_k$.