A12

1\. 1) $\Gamma = \{(a\cos t, a\sin t, bt) \mid 0 \le t \le 2\pi\}$, $a>0$, $b>0$

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$$\int_\Gamma f\,dl = \int_0^{2\pi} ((a\cos t)^2 + (a\sin t)^2 + (bt)^2) \cdot \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2}\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 t^2)\sqrt{a^2+b^2}\,dt = \sqrt{a^2+b^2}\left(a^2 t + \frac{b^2 t^3}{3}\right)\Big|_0^{2\pi} = \sqrt{a^2+b^2}\left(2\pi a^2 + \frac{8b^2\pi^3}{3}\right)$$

2) Γ - дуга кривої $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$, $x_2^2 = x_1$ від т. $(0,0,0)$ до т. $(1,1,\sqrt{2})$

$f(x_1, x_2, x_3) = x_3$

Параметризація: $x_2 = t$, $x_1 = t^2$, $x_3 = \sqrt{t^2 + t^4}$; $t \in [0, 1]$.

$$\int_\Gamma f\,dl = \int_0^1 \sqrt{t^2+t^4} \cdot \sqrt{1^2 + (2t)^2 + \left(\frac{2t+4t^3}{2\sqrt{t^2+t^4}}\right)^2}\,dt = \int_0^1 \sqrt{(t^2+t^4)(1+4t^2) + (t+2t^3)^2}\,dt$$

$$= \int_0^1 t\sqrt{1+5t^2+4t^4+1+4t^2+4t^4}\,dt = |t^2 = s| = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{2+9s+8s^2}\,ds = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{\left(2\sqrt{2}s + \frac{9}{4\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{17}{32}}\,ds$$

$$= \left|z = 2\sqrt{2}s + \frac{9}{4\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_{\frac{9}{4\sqrt{2}}}^{\frac{25}{4\sqrt{2}}} \sqrt{z^2 - \frac{17}{32}}\,dz = \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{z}{2}\sqrt{z^2 - \frac{17}{32}} - \frac{17}{64}\ln\left|z + \sqrt{z^2 - \frac{17}{32}}\right|\right)\Bigg|_{\frac{9}{4\sqrt{2}}}^{\frac{25}{4\sqrt{2}}} =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{25}{8\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{304}}{4} - \frac{17}{64}\ln\left|\frac{25}{4\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{304}}{4}\right| - \frac{9}{8\sqrt{2}}\sqrt{2} + \frac{17}{64}\ln\left|\frac{9}{4\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right|\right)$$

2\. Обчислити довжину Γ

1) Γ - дуга кривої $\{(3t, 3t^2, 2t^3) \mid t \in \mathbb{R}\}$ від т. $(0,0,0)$ до т. $(3,3,2)$

$x_1 = 3t$, $x_1 \in [0,3] \Rightarrow t \in [0,1]$

$$l = \int_\Gamma 1\,dl = \int_0^1 \sqrt{3^2 + (6t)^2 + (6t^2)^2}\,dt = \int_0^1 \sqrt{9+36t^2+36t^4}\,dt = \int_0^1 (3+6t^2)\,dt =$$

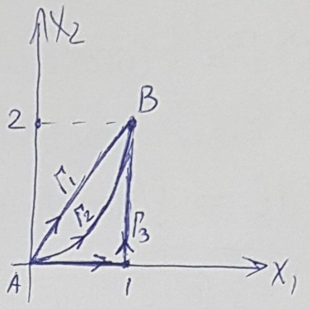
$$= (3t + 2t^3)\Big|_0^1 = 5$$

2) $\Gamma = \{(t\cos t, t\sin t, t) \mid 0 \le t \le \pi\}$

$$l = \int_\Gamma 1\,dl = \int_0^\pi \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1^2}\,dt = \int_0^\pi \sqrt{2 + t^2}\,dt$$

$$= \frac{t}{2}\sqrt{t^2+2} + \ln\left|t + \sqrt{t^2+2}\right|\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}\sqrt{\pi^2+2} + \ln\left|\pi + \sqrt{\pi^2+2}\right| - \ln\sqrt{2}.$$

3. $I=\int\limits_\Gamma (x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1)$ - ? Початок Γ - т. $(0,0)$, кінець - т. $(1,2)$



1) Γ - відрізок прямої

Це пряма $x_2=2x_1$. $\begin{cases}x_1=t\\ x_2=2t\end{cases}$ $t\in[0,1]$ $t\nearrow$

$I=\int\limits_0^1(t\cdot 2-2t\cdot 1)dt=0$

2) Γ - парабола з віссю Ox_2

$x_2=2x_1^2 \Rightarrow \begin{cases}x_1=t\\ x_2=2t^2\end{cases}, t\in[0,1]$ $t\nearrow$

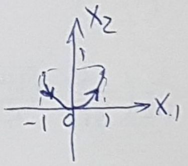
$I=\int\limits_0^1(t\cdot 4t-2t^2\cdot 1)dt=\frac{2}{3}t^3\Big|_0^1=\frac{2}{3}$

3) Γ - ламана з відрізка осі Ox_1 і перпендикуляра до нього

а) $x_2=0 \Rightarrow \begin{cases}x_1=t\\ x_2=0\end{cases}, t\in[0,1]$ $t\nearrow$ б) $x_1=1 \Rightarrow \begin{cases}x_1=1\\ x_2=t\end{cases}, t\in[0,2]$ $t\nearrow$

$I=\int\limits_0^1(t\cdot 0-0\cdot 1)dt+\int\limits_0^2(1\cdot 1-t\cdot 0)dt=\cancel{2}t\Big|_0^2=2$

4. 1) Γ - відрізок параболи $x_2=x_1^2$, $x_1\in[-1,1]$, x_1 зростає



$x_1=t,\ x_2=t^2,\ t\in[-1,1],\ t\nearrow$

$\int\limits_\Gamma\left((x_1^2-2x_1x_2)dx_1+(x_2^2-2x_1x_2)dx_2\right)=\int\limits_{-1}^1\left((t^2-2t^3)\cdot 1+(t^4-2t^3)\cdot 2t\right)dt=$

$=\int\limits_{-1}^1(t^2-2t^3+2t^5-4t^4)dt=\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{2}+\frac{t^6}{3}-\frac{4t^5}{5}\Big|_{-1}^1=\frac{2}{3}-\frac{8}{5}=-\frac{14}{15}$

2) Γ - коло $x_1^2+x_2^2=1$, проти годин. стрілки

$\begin{cases}x_1=\cos t\\ x_2=\sin t\end{cases}, t\in[0,2\pi], t\nearrow$

$\int\limits_\Gamma\frac{(x_1+x_2)dx_1-(x_1-x_2)dx_2}{x_1^2+x_2^2}=\int\limits_0^{2\pi}\left((\cos t+\sin t)(-\sin t)-(\cos t-\sin t)\cos t\right)dt=$

$=\int\limits_0^{2\pi}(-1)dt=-2\pi.$

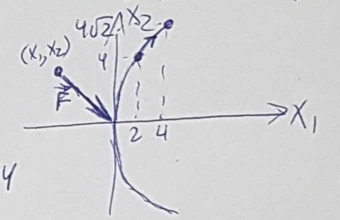
4. 3) Γ - виток гвинтової лінії $x_1=\cos t,\ x_2=\sin t,\ x_3=2t,\ t\in[0,2\pi],\ t\uparrow$

$$\int_\Gamma (x_2dx_1+x_3dx_2+x_1dx_3)=\int_0^{2\pi}(\sin t\cdot(-\sin t)+2t\cdot\cos t+\cos t\cdot 2)dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(2\cos t-\frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt+2t\cdot\sin t\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}2\sin t\,dt=\left(2\sin t-\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_0^{2\pi}+2\cos t\Big|_0^{2\pi}=-\pi$$

5. Сила $\vec{F}(x_1,x_2)=(-x_1,-x_2)$. Знайти роботу по переміщенню матер. точки по дузі параболи $x_2^2=8x_1$ від т. $(2,4)$ до т. $(4,4\sqrt{2})$

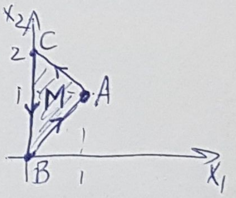
$x_2=t,\ x_1=\frac{t^2}{8},\ t\in[4,4\sqrt{2}]\ \nearrow$



$$A=\int_\Gamma F_1dx_1+F_2dx_2=\int_\Gamma -x_1dx_1-x_2dx_2=$$

$$=\int_4^{4\sqrt{2}}\left(-t\cdot 1-\frac{t^2}{8}\cdot\frac{t}{4}\right)dt=\left(-\frac{t^2}{2}-\frac{t^4}{128}\right)\Big|_4^{4\sqrt{2}}=(-16-8)-(-8-2)=-14$$

6. 1) Γ - контур трикутника ABC: A(1,1), B(0,0), C(0,2), проти год. стр.



$$\int_\Gamma \underbrace{(x_1+x_2)^2}_{P}dx_1+\underbrace{(x_1^2+x_2^2)}_{Q}dx_2=\left|\begin{matrix}\text{Формула}\\ \text{Гріна}\end{matrix}\right|=$$

$$=\iint_M (2x_1-2(x_1+x_2))dx_1dx_2=\int_0^1\left(\int_{x_1}^{2-x_1}(-2x_2)dx_2\right)dx_1=$$

$$=\int_0^1(-x_2^2)\Big|_{x_2=x_1}^{2-x_1}dx_1=\int_0^1(x_1^2-(2-x_1)^2)dx_1=\int_0^1(4x_1-4)dx_1=(2x_1^2-4x_1)\Big|_0^1=-2$$

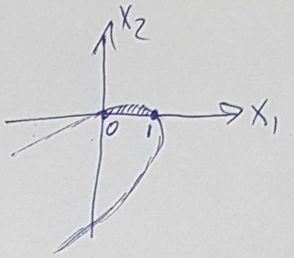
2) Γ - еліпс $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1$, $a>0$, $b>0$, проти год. стрілки

$$\int_\Gamma (x_1+x_2)dx_1-(x_1-x_2)dx_2=\left|\begin{matrix}\text{Формула}\\ \text{Гріна}\end{matrix}\right|=\iint_M(-1-1)dx_1dx_2=-2\cdot S(M)=-2\pi ab$$

7. 1) еліпс $\{(a\cos t, b\sin t) \mid 0\le t\le 2\pi\},\ a>0,\ b>0$

$$S=\int_\Gamma \frac{x_1dx_2-x_2dx_1}{2}=\int_0^{2\pi}\frac{a\cos t\cdot b\cos t - b\sin t\cdot(-a\sin t)}{2}dt=\int_0^{2\pi}\frac{ab}{2}dt=2\pi\cdot\frac{ab}{2}=\pi ab$$

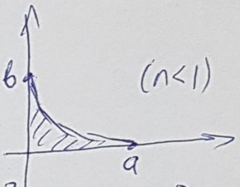
2) парабола $(x_1+x_2)^2=x_1$ і вісь Ox_1



$$S=\int_M 1\,dx_1dx_2=\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{x_1}-x_1}1\,dx_2\right)dx_1=\int_0^1(\sqrt{x_1}-x_1)dx_1=$$

$$=\left(\frac23 x_1^{3/2}-\frac{x_1^2}{2}\right)\Big|_0^1=\frac23-\frac12=\frac16$$

3) $\left(\frac{x_1}{a}\right)^n+\left(\frac{x_2}{b}\right)^n=1,\ a,b,n>0$ і осями координат



$$\begin{cases} x_1=a(\cos\varphi)^{\frac2n} \\ x_2=b(\sin\varphi)^{\frac2n} \end{cases},\quad \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

$$S=\int_\Gamma\frac{x_1dx_2-x_2dx_1}{2}=\int_0^{\pi/2}\frac{a(\cos\varphi)^{\frac2n}\cdot b\cdot\frac2n(\sin\varphi)^{\frac2n-1}\cos\varphi-b(\sin\varphi)^{\frac2n}\cdot a\cdot\frac2n(\cos\varphi)^{\frac2n-1}(-\sin\varphi)}{2}d\varphi$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{ab}{n}(\cos\varphi)^{\frac2n-1}(\sin\varphi)^{\frac2n-1}d\varphi=\left|\sin^2\varphi=t\right|=\int_0^1\frac{ab}{2n}(1-t)^{\frac1n-1}t^{\frac1n-1}dt=$$

$$=\frac{ab}{n}B\left(\frac1n,\frac1n\right)$$