Стабілізатор

Євгенія Кочубінська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

9 листопада 2022

Стабілізатор

Нехай група G діє на множині M.

Стабілізатором точки $m \in M$ називається множина

$$\mathrm{St}_G(m) = \left\{ g \in G \,|\, m^g = m \right\}.$$

Приклад

1. Нехай
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = (124)(35).$$
Знайдемо стабілізатор точок 1, 3 та 6 у групі $G = \langle \sigma \rangle = \{\varepsilon, (124)(35), (142), (35), (124), (142)(35)\}$:
$$\begin{aligned} \mathrm{St}_G(1) &= \{\varepsilon, (35)\}, \\ \mathrm{St}_G(3) &= \{\varepsilon, (142), (124)\}, \\ \mathrm{St}_G(6) &= G. \end{aligned}$$

2. G діє на собі спряженням. Тоді стабілізатор = нормалізатор.

Твердження

Нехай (G, M), $m \in M$. Тоді $\mathrm{St}_G(m)$ — підгрупа групи G.

Доведення.

$e \in \mathrm{St}_G(m) \Rightarrow \mathrm{St}_G(m) \neq \varnothing$.

Для довільних $g_1, g_2 \in \mathrm{St}_G(m)$:

$$m^{g_1 g_2} = (m^{g_1})^{g_2} = m^{g_2} = m \quad \Rightarrow \quad g_1 g_2 \in \mathrm{St}_G(m).$$

Для довільного $g \in \mathrm{St}_G(m)$:

$$m = m^e = m^{gg^{-1}} = (m^g)^{g^{-1}} = m^{g^{-1}} \quad \Rightarrow \quad g^{-1} \in \mathrm{St}_G(m).$$

$\square$

Теорема

Нехай група G діє на множині M. Тоді існує взаємно однозначна відповідність між елементами орбіти $\mathcal{O}(m)$ елемента $m \in M$ та правими класами суміжності групи G за підгрупою $\mathrm{St}_G(m)$.
Зокрема, якщо G — скінченна, то $|\mathcal{O}(m)| = |G : \mathrm{St}_G(m)|$.

Доведення.

Нехай $a \in \mathcal{O}(m)$. Нехай $g \in G$: $a = m^g$.
Тоді для $h \in G$:

$$m^h = a \Leftrightarrow (m^h)^{g^{-1}} = a^{g^{-1}} \Leftrightarrow (m^h)^{g^{-1}} = m \Leftrightarrow hg^{-1} \in \mathrm{St}_G(m) \Leftrightarrow h \in \mathrm{St}_G(m)g.$$

□

Наслідок

1. Якщо G — скінченна, то $|\mathcal{O}(m)|$ ділить $|G|$.
2. Якщо $a, b \in \mathcal{O}(m)$, то $\big|\mathrm{St}_g(a)\big| = |\mathrm{St}_G(b)|$.

Задача

Знайдіть кількість k-елементних підмножин n-елементної множини.

Розв'язання.

Нехай $M = \{a_1, \dots, a_n\}$.
Задамо на ній природну діє групу $\mathcal{S}_n$.
$M^{\{k\}}$ — всі k-елементні підмножини множини M.
Група $\mathcal{S}_n$ діє природним чином на $M^{\{k\}}$.
Нехай $A = \{i_1, \dots, i_k\} \in M^{\{k\}}$.
$\mathrm{St}_G(A)$ містить елементи, що переставляють елементи A та $M \setminus A \Rightarrow |\mathrm{St}_G(A)| = k!(n-k)!$.
Тоді

$$\left|M^{\{k\}}\right| = |\mathcal{O}(A)| = |\mathcal{S}_n : \mathrm{St}_G(A)| = \frac{|\mathcal{S}_n|}{|\mathrm{St}_G(A)|} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

□

Теорема

Стабілізатори елементів, що належать одній орбіті, є спряженими підгрупами.

Доведення.

(G, M). Нехай $m \in M$, $\mathcal{O}$ — орбіта елемента, яка містить m, тобто $\mathcal{O} = \mathcal{O}(m)$.
Досить довести: $\mathrm{St}_G(m^g) = g^{-1}\,\mathrm{St}_G(m)g$, $g \in G$.
Нехай $g' \in St_G(m)$. Тоді

$$(m^g)^{g^{-1}g'g} = m^{gg^{-1}g'g} = m^{g'g} = (m^{g'})^g = m^g.$$

Звідси
$$g^{-1}g'g \in \mathrm{St}_G(m^g) \quad \Rightarrow \quad g^{-1}\,\mathrm{St}_G(m)g \subseteq \mathrm{St}_G(m^g).$$

Нехай $h \in \mathrm{St}_G(m^g)$. Тоді $m^{gh} = m^g$. Звідси

$$m^{ghg^{-1}} = m \Rightarrow ghg^{-1} \in \mathrm{St}_G(m) \Rightarrow h \in g^{-1}\,\mathrm{St}_G(m)g \Rightarrow \mathrm{St}_G(m^g) \subseteq g^{-1}\,\mathrm{St}_G(m)g.$$

$\mathrm{St}_G(m^g) = g^{-1}\,\mathrm{St}_G(m)g.$ $\square$