КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

НАВЧАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З БАГАТОВИМІРНОГО АНАЛІЗУ

для студентів спеціальностей
"комп'ютерна математика"та "комп'ютерна механіка"
механіко–математичного факультету

(І семестр другого курсу)

2021

Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів спеціальностіей "комп'ютерна механіка" та "комп'ютерна математика" механіко–математичного факультету (1 семестр другого курсу) / Упорядн. А. В. Чайковський. – Електронне видання. – 2021. – 104 с.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

У цьому методичному посібнику наведені теми практичних занять з багатовимірного аналізу (математичного аналізу функцій багатьох змінних), умови задач, рекомендованих для розв'язання в аудиторії, а також задачі для домашньої роботи.

Головна мета практичних занять — активне засвоєння студентами основних понять і положень курсу, набуття навичок їх застосування до розв'язання стандартних задач, опанування деяких спеціальних методів. Частина завдань призначена для демонстрації того, як методи аналізу можна використати чисельно та реалізувати у вигляді алгоритму, роботу якого можна перевірити, запрограмувавши за допомогою однієї з мов програмування. Умовам задач в кожному занятті передують кілька контрольних запитань, відповіді на які студенти мають підготувати вдома.

У кожному занятті група задач А — задачі для аудиторної роботи, група Б — для домашнього завдання. Кількість і якість задач, що розв'язуються в аудиторії і задаються додому, залежить від рівня підготовки студентів. Ці задачі підбираються викладачем з набору задач, наведених в методичці.

Пропонуються також завдання підвищеної складності для студентів з високим рівнем підготовки за умови успішного виконання обов'язкової частини. Задачі підвищеної складності позначені літерою Д.

При підборі задач використано такі джерела:

Дороговцев А.Я. Математический анализ. Сборник задач. -- Киев, 1987.

Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М., 1969.

Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів механіко-математичного факультету (1 семестр другого курсу, частина І)/ Упорядн. А. Я. Дороговцев, М. О. Денисьєвський, О. Г. Кукуш – К.: ВПЦ "Київський університет 2006. – 79 с.

Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів механіко–математичного факультету (1 семестр другого курсу, частина ІІ) / Упорядн. А. Я. Дороговцев , О. Г. Кукуш, М. О. Денисьєвський, А. В. Чайковський. – К.: ВПЦ "Київський університет 2004. – 48 с.

Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів механіко–математичного факультету (2 семестр другого курсу)/ Упорядн. А. Я. Дороговцев, О. Г. Кукуш, М. О. Денисьєвський, А. В. Чайковський – К.: ВПЦ "Київський університет 2006. – 94 с.

ПОВТОРЕННЯ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

А0

1. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n^3+2n^2+13n+1}{14n^3+22n^2-n+2}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (2^n-n^6)$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-1})$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+5^n}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$;

2. Знайти множину часткових границь, нижню та верхню границі послідовності $\{x_n \,:\, n\geq 1\}$:

1) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}+\dfrac{1+(-1)^n}{2}$;

2) $x_n = \cos\dfrac{\pi n}{2}$.

3) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots$.

3. Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^4-2x^2+1}{10x^5-x^4+3}$;

2) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-3x-2}{x^3-8}$;

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x+2\operatorname{ctg} x}{(\pi-x)\sin\frac{x}{2}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x-\sin x+1}{\cos x+\sin x-1}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-x)\exp\left(-x^{-2}\right)$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$;

8) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$;

9) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$.

4. Довести рівності:

1) $2x - x^2 = O(x),\ x \to 0;$ 3) $2x^3 - x^2 = o(x),\ x \to 0;$

2) $2x - x^2 = O(x^2),\ x \to +\infty;$ 4) $n^2 + n + 1 = o(2^n),\ n \to +\infty.$

5. Розглянемо такі алгоритми знаходження n-го числа Фібоначчі. Для яких з них складність при $n \to \infty$ є
$O(n)?\quad O(2^n)?\quad O(\ln n)?\quad o(n)?\quad o(2^n)?\quad o(\ln n)?$

Алгоритм 1:

```
def fib1(n)
    if n < 2:
        return 1
    return fib1(n-1)+fib1(n-2)
```

Алгоритм 2:

```
def fib2(n)
    if n < 2:
        return 1
    lastTwoFib = (1,1)
    for i in range(n-1):
        lastTwoFib = (lastTwoFib[1], lastTwoFib[0] + lastTwoFib[1])
    return lastTwoFib[1]
```

Алгоритм 3 (Matrix2x2 – деякий клас, що реалізує матриці 2x2):

```
def fib3(n)
    Matrix2x2 M(0, 1, 1, 0), Mpower = M, Mresult(1,0,0,1)
    power = 1
    while n > 1:
        if ((n-1) & (1 « power)):
            Mresult *= Mpower
        Mpower = Mpower * Mpower
        power += 1
    return Mresult(0, 0)
```

6. За допомогою таблиці похідних та правил знаходження похідних знайти похідні наступних функцій:

1) $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$;

2) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$;

3) $y = \cos 2x - 2\sin x$;

4) $y = \arccos \dfrac{1}{x}$;

5) $y = x^{\sin x}$.

7. Отримати формули для сум:

1) $P_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$;
2) $Q_n(x) = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1}$.

Довести, що складність обчислення суми за допомогою циклу рівна $O(n)$, а за знайденою формулою $O(1)$.

8. Застосувати правило Лопіталя або формулу Тейлора для обчислення наступних границь:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2) - x^2}{x^2 - x\sin x}$;   2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2\,\mathrm{tg}\, x}{x + \sin x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

9. За допомогою формули Тейлора оцінити абсолютну похибку наближеної формули $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$, $|x| \le \pi$.

Скільки вірних знаків після коми при $x \in [-\pi, \pi]$ можна гарантувати при виконанні наведеної далі програми?

```
def sin(x):
    return x * (1. - (x * x / 6.) * (1. - x * x / 20.))
```

10. Користуючись похідними, довести нерівності:

1) $\forall x \ne 0 : \ \cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$;   2) $2|\sin x - \sin y| \le |x - y|$, $x, y \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$.

11. За допомогою теореми Ролля довести, що рівняння

$$x^6 - 6x - 1 = 0$$

не може мати більше двох дійсних коренів. Показати, що два дійсних кореня існують (можна застосувати теорему про нуль неперервної функції).

Запропонувати алгоритм знаходження цих коренів з заданою точністю.

12. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = x^4 - x^2$ на відрізку $[-2, 2]$.

13. Дослідити наступні функції та побудувати їх графіки:

1) $y = 3x - x^3$;   2) $y = x + e^{-x}$.

14. Знайти інтеграли:

1) $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)}$;

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$;

3) $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

4) $\displaystyle\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}dx$;

5) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$;

6) $\displaystyle\int x\sin x dx$;

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

15. Обчислити площі фігур, обмежених кривими у прямокутній декартовій системі координат

1) $y = 2x - x^2,\ x + y = 0$; 2) $y = 2^x,\ y = 2,\ x = 0$.

16. Обчислити невласні інтеграли:

1) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$;

2) $\displaystyle\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$;

3) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \ln x\, dx$.

17. Дослідити збіжність інтегралів:

1) $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^2+7x+1}{x^4+5x+3}\, dx$; 2) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$.

18. Довести умовну збіжність інтеграла

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\, dx.$$

19. Знайти часткові суми, дослідити збіжність, знайти суми та залишки наступних рядів:

1) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \ldots;$

2) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots;$

20. Використовуючи різні ознаки, дослідити збіжність рядів:

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 \ln n + n + \sqrt{n}}{1 + n^2 \ln^3 n};$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n! + n}{(2n)! + n^2};$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n^2 + n + 1}{4^{n+1} + n^2 + 3};$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}.$

ЗАНЯТТЯ 1
МЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ

Контрольні запитання

1. *Означення метрики та метричного простору.*
2. *Простір* $\mathbf{R}^m$ *з евклідовою метрикою.*
3. *Простір* $C([a,b])$ *з рівномірною метрикою.*
4. *Означення збіжності послідовності в метричному просторі.*
5. *Характеризація збіжності в просторах* $(\mathbf{R}^m, \rho)$ *і* $(C([a,b]), \rho)$.

А1

1. 1) Довести, що функція $d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + 2|y_1 - y_2|$ визначає метрику на $\mathbf{R}^2$. Зобразити на координатній площині множини з простору $(\mathbf{R}^2, d_1)$: $\overline{B}((0,0),2), B((2,3),2), S((0,0),1)$.
2) Довести, що функція $d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$ визначає метрику на $\mathbf{R}^2$. Зобразити на координатній площині множини з простору $(\mathbf{R}^2, d_2)$: $\overline{B}((0,0),2), B((2,3),2), S((0,0),1)$.
3) Довести, що функція $d_3((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (x_1 - x_2)^2 + |y_1 - y_2|$ не визначає метрику на $\mathbf{R}^2$.

2. Які з наведених функцій визначають метрику на $C([0,1])$?

1) $d(f,g) = \max\limits_{t\in[0,1/2]} |f(t) - g(t)|$;

2) $d(f,g) = \int\limits_0^1 |f(t) - g(t)| dt$;

3) $d(f,g) = \max\limits_{t\in[0,1]} (e^{-t}|f(t) - g(t)|)$.

3. Чи збігаються у відповідних просторах наведені послідовності? Для збіжних послідовностей знайти їх границі.

1) $\left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{2n+1}{n} \right) \;:\; n \geq 1 \right\}$ в $(\mathbf{R}^2, \rho)$;

2) $\left\{ \left(\frac{\cos n\pi}{2}, \frac{n+1}{n^2} \right) \;:\; n \geq 1 \right\}$ в $(\mathbf{R}^2, \rho)$;

3) $\left\{ \left(\frac{\sin n}{n}, (-1)^n, \frac{1}{n^2} \right) \;:\; n \geq 1 \right\}$ в $(\mathbf{R}^3, \rho)$;

4) $\left\{ \left(\cos\frac{1}{n}, \frac{2n-1}{n}, \frac{2}{n} \right) \;:\; n \geq 1 \right\}$ в $(\mathbf{R}^3, \rho)$;

5) $\left\{t^{n+3} - t^n, t \in [0,1] \ : \ n \geq 1\right\}$ в $(C([0,1]), \rho)$;
6) $\left\{t^2 + \dfrac{t}{n}, t \in [1,2] \ : \ n \geq 1\right\}$ в $(C([1,2]), \rho)$.

4. Нехай $X = (0,1)$, $\rho(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$. Показати, що послідовність $\left\{\dfrac{n}{2n+1} \ : \ n \geq 1\right\}$ збігається в (X, ρ), а послідовність $\left\{1 - \dfrac{1}{n} \ : \ n \geq 1\right\}$ не має границі в (X, ρ).

Д1. Довести, що така функція визначає метрику на $C([0,1])$: $d(f,g) = \left(\int\limits_0^1 (f(t) - g(t))^2\right)^{1/2}$.

Д2. В просторі $\mathbf{R}$ з дискретною метрикою $d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases}$ описати всі збіжні послідовності.

Б1

1. Чи визначає функція $d(x_1, x_2) = |\sin(x_1 - x_2)|$ метрику на множині $\mathbf{R}$?

2. Довести, що функція $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 3|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ визначає метрику на $\mathbf{R}^2$. Зобразити на координатній площині множини з простору $(\mathbf{R}^2, d)$: $\overline{B}((0,0), 1), S((1,1), 2)$.

3. Перевірити, що наведені функції визначають метрики на $\mathbf{R}^3$:

1) $d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|$;
2) $d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = |x_1 - x_2| + 2|y_1 - y_2| + 3|z_1 - z_2|$;
3) $d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}$;
4) $d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, 2|y_1 - y_2|, 3|z_1 - z_2|\}$;
5) $d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \sqrt{|x_1 - x_2|} + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|$;
6) $d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + |z_1 - z_2|$;
7) $d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + 4(y_1 - y_2)^2 + 9(z_1 - z_2)^2}$;
8) $d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = |x_1 - x_2| + \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$.

4. Чи визначають наведені функції метрики на $\mathbf{R}^2$?

1) $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1-x_2| - |y_1-y_2|$;
2) $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = 3|x_1-x_2|$;
3) $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1-y_1| - |x_2-y_2|$;
4) $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1-x_2| + |y_1-y_2| + \sqrt{|y_1-y_2|}$;
5) $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1-x_2|^3 + |y_1-y_2|$;
6) $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1-x_2| + \sqrt[3]{y_1-y_2}$;
7) $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1+x_2| + |y_1+y_2|$.

5. Чи збігаються в просторі $(\mathbf{R}^3,\rho)$ такі послідовності:

1) $\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{2n+n^2}{3n^2-1}, \frac{\ln(2n)-n}{n+1}\right) \;:\; n \ge 1\right\}$;
2) $\{(n, n+1, n+2) \;:\; n \ge 1\}$;
3) $\left\{\left(\frac{\ln(1+n)}{n}, (-1)^{2n}, \frac{1}{2^n}\right) \;:\; n \ge 1\right\}$;
4) $\left\{\left(\sin\frac{\pi n}{2}, \frac{3n+1}{n}, \frac{4}{n}\right) \;:\; n \ge 1\right\}$?

6. Чи збігаються в просторі $(C([0,1]),\rho)$ такі послідовності:

1) $\{t^n(1-t), t\in[0,1] \;:\; n\ge 1\}$;
2) $\{(1-t)^n, t\in[0,1] \;:\; n\ge 1\}$;
3) $\{t^n(1-t^n), t\in[0,1] \;:\; n\ge 1\}$;
4) $\left\{\cos^{2n}\pi t, t\in[0,1] \;:\; n\ge 1\right\}$;
5) $\left\{n\sin\frac{t}{n}, t\in[0,1] \;:\; n\ge 1\right\}$;
6) $\left\{n\ln\left(1+\frac{t}{n}\right), t\in[0,1] \;:\; n\ge 1\right\}$;
7) $\left\{e^{-nt}, t\in[0,1] \;:\; n\ge 1\right\}$?

ЗАНЯТТЯ 2
МЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ (ПРОДОВЖЕННЯ)

Контрольні запитання

1. *Означення внутрішньої, граничної та ізольованої точок множини.*
2. *Означення та властивості відкритих та замкнених множин.*
3. *Означення скрізь щільної множини.*
4. *Означення сепарабельного метричного простору.*

А2

1. Визначити в просторі $(\mathbf{R}, \rho)$ множини внутрішніх, граничних та ізольованих точок. Перевірити, чи є задані множини відкритими чи замкненими.

1) $A = [0, 1]$; 3) $A = (0, 1)$; 5) $A = \mathbf{N}$;
2) $A = [0, 1)$; 4) $A = \left\{ \frac{1}{n} \ : \ n \geq 1 \right\}$; 6) $A = \mathbf{Q}$.

2. Визначити в просторі $(\mathbf{R}^2, \rho)$ множини внутрішніх, граничних та ізольованих точок. Перевірити, чи є задані множини відкритими чи замкненими.

1) $A = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4 \right\}$;
2) $A = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 > 2 \right\}$;
3) $A = \left\{ (x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 9 \right\}$;
4) $A = \{ (x, y) \mid x < y \}$;
5) $A = \{ (x, y) \mid x = y \}$;
6) $A = \left\{ (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) \mid n \geq 1 \right\}$;
7) $A = \{ ((-1)^n, e^{-n}) \mid n \geq 1 \}$.

3. Визначити в просторі $(\mathbf{R}^3, \rho)$ множини внутрішніх, граничних та ізольованих точок. Перевірити, чи є задані множини відкритими чи замкненими.

1) $A = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 4 \right\}$;
2) $A = \{ (x, y) \mid x + y = 2, 1 < z \leq 2 \}$.

4. Які з наведених множин скрізь щільні в $(\mathbf{R}^2, \rho)$?

1) $\mathbf{Z} \times \mathbf{Q}$; 2) $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$; 3) $\mathbf{Q} \times (\mathbf{R} \backslash \mathbf{Q})$.

5. Встановити сепарабельність простору $\mathbf{R}^2$ з метрикою $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.

Д1. Визначити в просторі $(C([0, 1]), \rho)$ множини внутрішніх, граничних та ізольованих точок. Перевірити, чи є задані множини відкритими чи замкненими.

1) $A = \{ f \mid 1 < f(0) < 2 \}$;
2) $A = \{ f \mid f(0) = 1 \}$;
3) $A = \{ f \mid f(0) \geq 1 \}$;
4) $A = \{ f \mid f(0) f(1) < 0 \}$;
5) $A = \{ f \mid f(0) = 1, f(1) = 0 \}$.

Д2. Визначити в просторі $(\mathbf{R}, \rho)$ множини внутрішніх, граничних та ізольованих точок. Перевірити, чи є задані множини відкритими чи замкненими.

1) $A = \left\{ \frac{m}{|m|+n} \mid m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N} \right\}$;

2) $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$;

3) $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [2n, 2n+1]$.

Д3. Визначити в просторі $(C([0,1]), \rho)$ множини внутрішніх, граничних та ізольованих точок. Перевірити, чи є задані множини відкритими чи замкненими.

1) $A = \left\{ f \mid \min\limits_{t \in [0,1]} f(t) > 0 \right\}$;

2) $A = \left\{ f \mid \max\limits_{t \in [0,1]} f(t) \geq 3 \right\}$;

3) $A = \left\{ f \mid t^2 < f(t) < t, t \in [0,1] \right\}$;

4) $A = C^1([0,1])$;

5) $A = \left\{ f \mid \int\limits_0^1 x(t)dt > 0 \right\}$.

Д4. Чи є скрізь щільними в $(\mathbf{R}^2, \rho)$ множини:

1) $\{(x,y) \mid y = rx, r \in \mathbf{Q}\}$;

2) $\left\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = r^2, r \in \mathbf{Q}\right\}$.

Д5. Які з наведених підмножин простору $C([0,1])$ з метрикою $d(f,g) = \left(\int_0^1 (f(t) - g(t))^2 \right)^{1/2}$, скрізь щільні в ньому:

1) множина всіх многочленів, які розглядаються на $[0,1]$;

2) множина усіх диференційовних функцій на $[0,1]$?

Б2

1. Визначити в просторі $(\mathbf{R}, \rho)$ множини внутрішніх, граничних та ізольованих точок. Перевірити, чи є задані множини відкритими чи замкненими.

1) $A = [0, +\infty)$;

2) $A = [-1, 1)$;

3) $A = [-3, -2]$;

4) $A = \left\{ \dfrac{n}{n+1} \ : \ n \geq 1 \right\} \cup \{1\}$;

5) $A = \mathbf{Z}$;

6) $A = \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$.

2. Визначити в просторі $(\mathbf{R}^2, \rho)$ множини внутрішніх, граничних та ізольованих точок. Перевірити, чи є задані множини відкритими чи замкненими.

1) $A = \{(x,y) \mid x > 0\}$;

2) $A = \{(x,y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$;

3) $A = \{(x,y) \mid y \leq 2^x\}$;

4) $A = \{(x,y) \mid |x| - y = 3\}$;

5) $A = \{(x,y) \mid 1 \leq x + y < 2\}$;

6) $A = \left\{ \left(\dfrac{2}{n}, \dfrac{3}{2n} \right) \mid n \geq 1 \right\}$;

7) $A = \left\{ ((-1)^n, \cos \frac{1}{n}) \mid n \geq 1 \right\}$.

3. Визначити в просторі $(\mathbf{R}^3, \rho)$ множини внутрішніх, граничних та ізольованих точок. Перевірити, чи є задані множини відкритими чи замкненими.

1) $A = \{(x, y, z) \mid y^2 + z^2 < 1\}$;
2) $A = \{(x, y) \mid x = 3, y + z \le 4\}$.

4. Визначити в просторі $(C([0,1]), \rho)$ множини внутрішніх, граничних та ізольованих точок. Перевірити, чи є задані множини відкритими чи замкненими.

1) $A = \{f \mid f(\frac{1}{2}) > 0\}$;
2) $A = \{f \mid 2 \ge f(1) \ge 1\}$;
3) $A = \{f \mid f(0)f(1) \ge 0\}$;
4) $A = \{f \mid f(t) = 0, t \in [0, \frac{1}{2}]\}$;
5) $A = \{f \mid f(0) = 1, f(1) > 1\}$.

4. Довести, що наведені множини скрізь щільні в $(\mathbf{R}, \rho)$:

1) $\{r\sqrt{2} \mid r \in \mathbf{Q}\}$;
2) $\{n \sin r \mid n \in \mathbf{Z}, r \in \mathbf{Q}\}$;
3) $\{n + \cos r \mid n \in \mathbf{Z}, r \in \mathbf{Q}\}$;
4) $\{\operatorname{tg} x \mid x \in \mathbf{Q} \cap (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$;
5) $\{\ln m - \ln n \mid m, n \in \mathbf{N}\}$;
6) $\{\frac{m}{n^2} \mid m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}\}$.

5. Які з наведених множин скрізь щільні в $(\mathbf{R}^2, \rho)$?

1) $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$;
2) $(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \times (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$;
3) $\mathbf{N} \times (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$;
4) $\{(\frac{m}{n}, \frac{n}{m}) \mid m, n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}\}$;
5) $\{(r_1 + r_2, r_1 - r_2) \mid r_1, r_2 \in \mathbf{Q}\}$;
6) $\{(r_1\sqrt{2}, r_2\sqrt{3}) \mid r_1, r_2 \in \mathbf{Q}\}$.

ЗАНЯТТЯ 3

ПОВНІ МЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ. ТЕОРЕМА БАНАХА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Контрольні запитання

1. *Означення фундаментальної послідовності в метричному просторі.*
2. *Означення повного метричного простору.*
3. *Теорема Банаха про нерухому точку. Наслідки з неї.*

А3

1. Які з цих просторів з метрикою $\rho(x,y) = |x-y|$ є повними?
1) $X = (0,1)$; 3) $X = (0,+\infty)$;
2) $X = [0,1]$; 4) $X = (-\infty,1]$.

2. Послідовність елементів метричного простору (X,ρ) задовольняє умову $\forall n \geq 1 \ : \ \rho(x_n, x_{n+1}) \leq 2^{-n}$. Довести, що $\{x_n : n \geq 1\}$ – фундаментальна в (X,ρ). Чи збережеться це твердження, якщо 2^{-n} замінити на $1/n$?

3. Встановити повноту простору $\mathbf{R}^2$ з метрикою $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1-x_2| + |y_1-y_2|$.

4. В просторі $\mathbf{R}$ з дискретною метрикою $d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases}$ описати всі збіжні та всі фундаментальні послідовності. Чи є цей простір повним? сепарабельним?

5. Довести, що рівняння $x = \frac{1}{2}\sin(x+1)$ має єдиний розв'язок $x \in \mathbf{R}$.

6. За допомогою наслідку з теореми Банаха розв'язати рівняння

$$0.5\sin(x+1) = x, \ x \in [-5,5].$$

Для цього визначити λ, обрати x_0, знайти кількість ітерацій, щоб точність була не менше за $1e-9$, реалізувати це в програмі, знайшовши корінь.

7. Довести, що рівняння $x^2 + \operatorname{arctg}(xy) + y = 0, \ x \geq 0$, має для кожного $x \geq 0$ єдиний розв'язок $y(x)$.

Д1. За допомогою наслідку з теореми Банаха розв'язати задачу Коші

$$y'(x) = 0.5\operatorname{arctg}(y(x)) + x^4, \ x \in [0,1]; \ y(0) = 1.$$

Кожну функцію наближено замінити на кусково-лінійну, обравши розбиття відрізка з $n = 10000$ точок.Для цього визначити λ, обрати початкову функцію y_0, знайти кількість ітерацій, щоб величина $\max\limits_{x\in[0,1]} |y(x) - y_n(x)|$ була не більше за $1e-9$, реалізувати це в програмі, знайшовши розв'язок.

Б3

1. Послідовність елементів метричного простору (X, ρ) задовольняє умову $\forall n \geq 1 \ : \ \rho(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}$. Довести, що $\{x_n : n \geq 1\}$ – фундаментальна в (X, ρ).

2. Які з цих просторів з метрикою $\rho(x, y) = |x - y|$ є повними?

1) $X = \mathbf{Z}$; 3) $X = \mathbf{R}\backslash\mathbf{Z}$; 5) $X = (-\infty, 2] \cap [3, 4]$;
2) $X = \mathbf{Q}$; 4) $X = \mathbf{R}\backslash[0, 1]$; 6) $X = (-\infty, 1] \cap \{2\}$.

3. Довести повноту простору $(\mathbf{R}^3, d)$:

1) $d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = |x_1 - x_2| + 2|y_1 - y_2| + 3|z_1 - z_2|$;
2) $d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, 2|y_1 - y_2|, 3|z_1 - z_2|\}$;
3) $d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \sqrt{|x_1 - x_2|} + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|$;
4) $d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + |z_1 - z_2|$;
5) $d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + 4(y_1 - y_2)^2 + 9(z_1 - z_2)^2}$;
6) $d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = |x_1 - x_2| + \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$.

6. Довести, що рівняння $5x = \cos(3x + 1)$ має єдиний розв'язок $x \in \mathbf{R}$.

7. Довести, що рівняння $x^3 + \sin(x + y) + 2y = 0$, $x \in \mathbf{R}$, має для кожного $x \in \mathbf{R}$ єдиний розв'язок $y(x)$.

8. За допомогою наслідку з теореми Банаха розв'язати рівняння

$$0.5 \cos x = x, \ x \in [-10, 10].$$

Для цього визначити λ, обрати x_0, знайти кількість ітерацій, щоб точність була не менше за $1e - 9$, реалізувати це в програмі, знайшовши корінь.

9. За допомогою наслідку з теореми Банаха розв'язати рівняння

$$x^5 - x - 1 = 0, \ [a, b] = [1, 2].$$

Для цього визначити $m, \ M, \ \lambda$, обрати x_0, знайти кількість ітерацій, щоб точність була не менше за $1e - 9$, реалізувати це в програмі, знайшовши корінь.

10. За допомогою наслідку з теореми Банаха розв'язати систему лінійних рівнянь

$$Ax = b$$

у таких випадках:

а) елементи матриці C – випадкові числа з проміжку $[-0.05, 0.05]$, елементи вектора b – випадкові числа з проміжку $[-10, 10]$, $m = 10$.

б) всі елементи матриці C рівні – випадкові числа з проміжку $[-0.01, 0.01]$, елементи вектора b – випадкові числа з проміжку $[-10, 10]$, $m = 80$.

Для цього визначити λ, обрати вектор x_0, знайти кількість ітерацій, щоб точність була не менше за $1e-9$, реалізувати це в програмі, знайшовши розв'язок.

ЗАНЯТТЯ 4
ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ В ТОЧЦІ. НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІЇ

Контрольні запитання

1. *Означення границі в точці числової функції, визначеної на метричному просторі.*
2. *Означення повторних границь.*
3. *Означення та властивості неперервних функції багатьох змінних.*
4. *Теорема про характеризацію неперервності.*
5. *Означення компактної множини.*
6. *Критерії компактності в* $(\mathbf{R}^m, \rho)$ *і в* $(C([a,b]), \rho)$.
7. *Властивості неперервних функцій на компакті.*

А4

1. Знайти повторні та подвійні границі, якщо вони існують:

1) $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2},\ x \to 0,\ y \to 0;$
2) $f(x,y) = \dfrac{x+e^y}{e^x+y},\ x \to 0,\ y \to 0;$
3) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^4+y^4},\ x \to +\infty,\ y \to +\infty;$
4) $f(x,y) = \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2},\ x \to +\infty,\ y \to +\infty;$
5) $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{x},\ x \to 0,\ y \to 1;$
6) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y},\ x \to 0,\ y \to 0, x \neq y;$
7) $f(x,y) = x \sin\dfrac{1}{y},\ x \to 0,\ y \to 0, y \neq 0.$

2. Знайти точки розриву наведених функцій:

1) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \backslash \{(0,0)\};$
2) $f(x,y) = \begin{cases} 1, & y > x, \\ 0, & y \le x; \end{cases}$

3) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4+1}$;

3. Довизначити функцію $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, в точці $(0,0)$ таким чином, щоб вона стала неперервною в цій точці.

4. Чи є наведені множини замкнені в $(\mathbf{R}^2, \rho)$ відкритими? замкненими? компактними?

1) $\{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1\}$;
2) $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 < 1\}$;
3) $\{(x,y,z) \mid 1 < x+y < 4\}$;
4) $\{(x,y) \mid 10 \le e^x + e^y \le 100\}$;
5) $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$;
6) $\{(x,y) \mid xy \le 1\}$;
7) $\{(x,y) \mid 1 < x^2+y^2 \le 4\}$;
8) $\{(x,y) \mid |x|+|y| \le 4, xy \le 1\}$.

5. Довести, що такі дійсні функції рівномірно неперервні в $(\mathbf{R}^3, \rho)$:

1) $f(x,y,z) = 2+3x+4y+5z$;
2) $f(x,y,z) = \sin(x+y+z)$;
3) $f(x,y,z) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z$.

6. Довести, що функція $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ неперервна, але не є рівномірно неперервною на $\mathbf{R}^3$.

7. Які з наведених множин компактні в $(\mathbf{R}^2, \rho)$?

1) $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$;
2) $\{(x,y) \mid xy \le 1\}$;
3) $\{(x,y) \mid 1 < x^2+y^2 \le 4\}$;
4) $\{(x,y) \mid |x|+|y| \le 4, xy \le 1\}$.

8. Довести, що наведені функції на відповідних множинах досягають свого найбільшого та найменшого значення та є рівномірно неперервними:

1) $f(x,y,z) = |x+y| - \operatorname{arctg}(y+z)$,
$A = \{(x,y,z) \mid 1 \le x \le 2, 2 \le y \le 3, 3 \le z \le 4\}$;
2) $f(x,y,z) = e^{x-y} + e^{y-z} + e^{z-x}$,
$A = \{(x,y,z) \mid 1 \le |x|+|y|+|z| \le 2, xyz \ge 0\}$.

Д1. Знайти повторні та потрійні границі, якщо вони існують:

1) $f(x,y,z) = \dfrac{x+y+z}{|x|+|y|+|z|}$, $x \to 0$, $y \to 0$, $z \to 0$;
2) $f(x,y,z) = \dfrac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}$, $x \to 0$, $y \to 0$, $z \to 0$.

Д2. Довести, що наведені дійсні функції неперервні на $(C([0,4]), \rho)$:

1) $f(x) = x(0)$;

2) $f(x) = \int\limits_0^4 \sin x(t)dt$;

3) $f(x) = \int\limits_0^2 x(t^2)\sin t dt$.

Д3. Нехай $x_0 \in C([0,1])$. Знайти границі дійсних функцій, визначених на метричному просторі $(C([0,1]), \rho)$:

1) $f(x) = \int\limits_0^1 |x(t)|dt,\ x \to x_0$;

2) $f(x) = \int\limits_0^1 tx^2(t)dt,\ x \to x_0$.

Б4

1. Дати означення таких границь:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}} f(x,y)$;

2) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to -\infty}} f(x,y)$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} f(x,y)$;

4) $\lim\limits_{\substack{x\to -\infty\\ y\to -\infty}} f(x,y)$;

5) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -\infty}} f(x,y)$;

6) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to 0}} f(x,y)$.

2. Знайти повторні та подвійні границі, якщо вони існують:

1) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2},\ x\to +\infty,\ y\to +\infty$;

2) $f(x,y) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\dfrac{x^2}{x+y}},\ x\to +\infty,\ y\to 1$;

3) $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^4y^2)}{(x^2+y^2)^2},\ x\to 0,\ y\to 0$;

4) $f(x,y) = \dfrac{\exp\left(-\frac{1}{x^4+y^4}\right)}{x^4+y^4},\ x\to 0,\ y\to 0$;

5) $f(x,y) = \dfrac{1}{xy}\operatorname{tg}\dfrac{xy}{1+xy},\ x\to 0,\ y\to +\infty$;

6) $f(x,y) = \log_x(x+y),\ x\to 1,\ y\to 0,\ x>0,\ x\neq 1,\ y> -x$;

7) $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{(x^2+y^4)^2},\ x\to +\infty,\ y\to +\infty$;

8) $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2},\ x\to +\infty,\ y\to +\infty$;

9) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2(x^2+y^2)}{1-\cos(x^2+y^2)},\ x\to 0,\ y\to 0$;

10) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\ x\to-\infty,\ y\to-\infty;$

11) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2},\ x\to-\infty,\ y\to-\infty;$

12) $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^4+y^4},\ x\to 0,\ y\to 0.$

3. З'ясувати, чи існують границі:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to-\infty}} xy;$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} (x+y);$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0}} x^y;$

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to+\infty}} x^y;$

5) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to-\infty}} x^y;$

6) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to 0}} x^y;$

7) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to-\infty}} \dfrac{x}{y};$

8) $\lim\limits_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0}} \dfrac{x}{y};$

9) $\lim\limits_{\substack{x\to 0+\\ y\to-\infty}} \dfrac{x}{y}.$

4. Знайти точки розриву наведених функцій:

1) $f(x,y)=\begin{cases}16-x^2-y^2, & x^2+y^2\le 16,\\ 0, & x^2+y^2>16;\end{cases}$

2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{x+y}, & x+y\ne 0,\\ 1, & x+y=0;\end{cases}$

3) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x-3}{x^2+y^2-4}, & x^2+y^2\ne 4,\\ 0, & x^2+y^2=4;\end{cases}$

4) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y^2}{x+y^2}, & x+y^2\ne 0,\\ 0, & x+y^2=0;\end{cases}$

5) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{x^3-y^3}, & x\ne y,\\ 3, & x=y;\end{cases}$

6) $f(x,y)=\begin{cases}\ln(10-x^2-y^2), & x^2+y^2<9,\\ 0, & x^2+y^2\ge 9;\end{cases}$

7) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0);\end{cases}$

8) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}, & |x|\neq|y|,\\ 1, & |x|=|y|;\end{cases}$

9) $f(x,y)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x+y}, & x+y\neq 0,\\ 0, & x+y=0;\end{cases}$

10) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{xy}, & xy\neq 0,\\ 1, & xy=0.\end{cases}$

5. Довести неперервність наведених функцій в $(\mathbf{R}^3,\rho)$:

1) $f(x,y,z)=\sin(x+y+z)$;
2) $f(x,y,z)=\ln(1+x^2+y^2+z^2)$;
3) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^4+z^6}$;
4) $f(x,y,z)=e^{x+2y+3z}$.

6. Довизначити функцію f за неперервністю на $\mathbf{R}^2$:

1) $f(x,y)=\dfrac{(x-1)^2+2(x-2)^2+(x-1)^2(x-2)^2}{(x-1)^2+2(x-2)^2}$, $(x,y)\neq(1,2)$;

2) $f(x,y)=\dfrac{(x^2+y^2-1)^4}{(x-1)^2+y^2}$, $(x,y)\neq(1,0)$;

3) $f(x,y)=\dfrac{(x-2)(y-3)^2}{\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}}$, $(x,y)\neq(2,3)$;

4) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{x^2+y^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$;

5) $f(x,y)=\dfrac{\ln(1+|xy|)}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(x,y)\neq(0,0)$;

6) $f(x,y)=\dfrac{\sin(x^4y^2)}{x^2+y^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$;

7) $f(x,y)=\dfrac{e^{x^2+y^2}-1-\frac{x^2+y^2}{2}}{x^2+y^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$;

8) $f(x,y)=\dfrac{1-\cos(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$;

9) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}$, $(x,y) \neq (0,0)$;

10) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^6+y^6} \exp\left(-\dfrac{1}{x^6+y^6}\right)$, $(x,y) \neq (0,0)$.

7. З'ясувати, які з наведених множин замкнені, відкриті, компактні в $(\mathbf{R}^3, \rho)$:

1) $\left\{(x,y,z) \mid x^2+4y^2+9z^2 = 1\right\}$;
2) $\left\{(x,y,z) \mid \sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}+\sqrt{|z|} \leq 1\right\}$;
3) $\left\{(x,y,z) \mid x^3+y^3+z^3 > 100\right\}$;
4) $\{(x,y,z) \mid x+2y+3z < 10\}$;
5) $\{(x,y,z) \mid 1 \leq xyz \leq 3\}$;
6) $\left\{(x,y,z) \mid xy^2z^3 > 5\right\}$;
7) $\left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 25, x+y+z \leq 20, x = 3\right\}$;
8) $\{(x,y,z) \mid e^{x+y}+e^{x+z}+e^{y+z} > 1\}$;
9) $\left\{(x,y,z) \mid x^3+y^3+z^3 = 2, x+y \geq 1\right\}$;
10) $\{(x,y,z) \mid 1 < x+y+z < 4, z > 0\}$.

8. Довести, що наведені функції рівномірно неперервні на відповідних множинах в просторі $(\mathbf{R}^2, \rho)$:

1) $f(x,y) = \sin(x-|y|)$, $A = \left\{(x,y) \mid x^4+y^4 \leq 100\right\}$;
2) $f(x,y) = \cos xy$, $A = \left\{(x,y) \mid 16 \leq x^2+y^2 \leq 25\right\}$;
3) $f(x,y) = \ln(1+|x|+y^2)$, $A = [1,2] \times [2,3]$;
4) $f(x,y) = \int\limits_x^y e^{t^2}dt$, $A = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq y \leq 1|\}$;
5) $f(x,y) = \operatorname{arctg}^2(xy)$, $A = \{(x,y) \mid \max\{|x|,|y|\} \leq 3\}$;
6) $f(x,y) = \arcsin(\dfrac{xy}{1+|xy|})$, $A = \{(x,y) \mid |x|+|y| \leq 1\}$;
7) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$, $A = \left\{(x,y) \mid (x-y)^2+(x+y)^2 \leq 1\right\}$;
8) $f(x,y) = xe^y + ye^x$, $A = \left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1, x^4-y \leq 1\right\}$;
9) $f(x,y) = x^2+y \operatorname{arctg} x$, $A = \left\{(x,y) \mid \sqrt{|x|}+y^2 \leq 2\right\}$;
10) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}$, $A = \{(x,y) \mid x = y, 0 \leq x \leq 1\}$.

ЗАНЯТТЯ 5
ЧАСТИННІ ПОХІДНІ. ПОХІДНІ ЗА НАПРЯМКОМ. ДИФЕРЕНЦІЙОВНІ ФУНКЦІЇ. ДИФЕРЕНЦІАЛ

Контрольні запитання

1. *Частинні похідні та їх властивості.*
2. *Похідна за напрямком та її властивості.*
3. *Градієнт функції в точці.*
4. *Означення диференційовної в точці функції багатьох змінних.*
5. *Означення диференціала першого порядку.*

A5

1. Знайти частинні похідні першого порядку таких функцій:

1) $f(x,y) = x^4 + 2y^4 - 4x^2y^2 + \ln(x+y^2) + x\sin(x+y),\ x > -y^2;$

2) $f(x,y) = xy + \dfrac{x}{y} + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \left(\dfrac{x}{y}\right)^y, xy > 0;$

3) $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + x^y + \arcsin\dfrac{1}{1+x^2y^2},\ x > 0.$

2. Знайти вказані частинні похідні таких функцій:

1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z},\ f(x,y,z) = x^3\sin(yz) + (x^2+y^2)e^{x+z};$

2) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \dfrac{\partial^6 f}{\partial x \partial y^2 \partial z^3},\ f(x,y,z) = x\ln(yz) + xyze^{x+y+z}, x,y,z > 0.$

3. Знайти похідну функції $f(x,y) = x^2 - y^5$ в точці $\vec{x}^\circ = (1,1)$ за напрямком $\vec{a} = (2,3)$. Знайти вектор-градієнт в цій точці.

4. Дослідити диференційовність у відповідних точках таких функцій:

1) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3},\ (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ \vec{x}^\circ = (0,0);$

2) $f(x,y) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases} \quad \vec{x}^\circ = (0,0);$

3) $f(x,y) = |x-1| + |y-2|,\ (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ \vec{x}^\circ = (1,2);$

4) $f(x,y) = \operatorname{tg}\dfrac{x^2}{y},\ y \neq 0, \left|\dfrac{x^2}{y}\right| < \dfrac{\pi}{2},\ \vec{x}^\circ = \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right).$

Б5

1. Знайти частинні похідні першого порядку таких функцій:

1) $f(x,y,z) = x^{y/z},\ x > 0, z \neq 0;$

2) $f(x,y,z) = x^{\arcsin(y/z)},\ x > 0, z \neq 0,\ \left|\dfrac{y}{z}\right| < 1;$

3) $f(x,y,z) = \left(\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}\right)^z,\ xy > 0;$

4) $f(x,y,z) = \left(\sin\dfrac{x}{y}\right)^z,\ y \neq 0, 0 < \dfrac{x}{y} < \pi;$

5) $f(x,y,z) = (\operatorname{tg} x)^{y/z},\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, z \neq 0;$

6) $f(x,y,z) = e^{x(x^2+y^2+z^2)};$

7) $f(x,y,z) = \ln(x + \ln y + \ln\ln z),\ x > 0, y > 1, z > e;$

8) $f(x,y,z) = \ln\dfrac{1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, x^2+y^2+z^2 < 1;$

9) $f(x,y,z) = \sqrt{\cos^x + \sin^y + \operatorname{ctg}^2 z},\ 0 < z < \dfrac{\pi}{2};$

10) $f(x,y,z) = \dfrac{xy - z}{1 + e^x + \sin y}.$

2. Знайти в точці $\vec{x}^\circ$ градієнт та похідну за напрямком $\vec{a}$ функції $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$:

1) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \vec{x}^\circ = (1,1,1),\ \vec{a} = (1,2,3);$

2) $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2},\ \vec{x}^\circ = (1,0,0),\ \vec{a} = (0,1,1);$

3) $f(x,y,z) = \ln(1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}),\ \vec{x}^\circ = (1,-1,1),\ \vec{a} = (1,1,1);$

4) $f(x,y,z) = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \vec{x}^\circ = (1,2,0),\ \vec{a} = (1,2,3);$

5) $f(x,y,z) = \sin\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \vec{x}^\circ = (1,0,1),\ \vec{a} = (3,2,1);$

6) $f(x,y,z) = \cos^2 x + \cos^2 y^2 + \cos^2 z^3,\ \vec{x}^\circ = (0,0,0),\ \vec{a} = (1,2,3);$

7) $f(x,y,z) = \arcsin\dfrac{x^2+y^2+z^2}{1+x^2+y^2+z^2},\ \vec{x}^\circ = (1,1,0),\ \vec{a} = (0,1,2).$

3. Довести, що наведені функції задовольняють відповідним диференціальним рівнянням:

1) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{x-y},\ x \neq y, \quad \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x-y}{x^2+y^2};$

2) $f(x,y)=x^3\exp\left(\dfrac{y}{x^2}\right),\ x\neq 0,\quad x\dfrac{\partial f}{\partial x}+2y\dfrac{\partial f}{\partial y}=3f;$

3) $f(x,y)=y\ln(1+(x^2-y^2)^2),\quad y^2\dfrac{\partial f}{\partial x}+xy\dfrac{\partial f}{\partial y}=xf;$

4) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y},\ x\neq y,\quad x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=0;$

5) $f(x,y)=\cos(x+\sin y),\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2};$

6) $f(x,y)=\dfrac{y^2}{3x}+x^4y^4,\ x\neq 0,\quad x^2\dfrac{\partial f}{\partial x}-xy\dfrac{\partial f}{\partial y}+y^2=0;$

7) $f(x,y)=xe^{x+y}-y\ln(1+(x+y)^2),\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0;$

8) $f(x,y,z)=x^5\sin\dfrac{y^2+z^2}{x^2},\ x\neq 0,\quad x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}+z\dfrac{\partial f}{\partial z}=5f.$

4. 1) Довести, що при довільних $a,b\in\mathbf{R}$ функція

$$f(x,y)=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},\ (x,y)\neq(a,b),$$

задовольняє *рівняння Лапласа*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0,\ (x,y)\neq(a,b).$$

2) Довести, що при довільних $a\in\mathbf{R},\ \sigma>0$ функція

$$f(t,x)=\frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{4\sigma^2 t}\right),\ t>0,\ x\in\mathbf{R},$$

задовольняє *рівняння теплопровідності*

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ t>0,\ x\in\mathbf{R}.$$

5. Дослідити диференційовність у відповідних точках таких функцій:

1) $f(x,y)=\sqrt[3]{xy},\ (x,y)\in\mathbf{R}^2,\ \vec{x}^\circ=(0,0);$

2) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3-y^3},\ x>y,\ \vec{x}^\circ=(2,1);$

3) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}\quad \vec{x}^\circ=(0,0);$

4) $f(x,y)=\ln(x+y^2),\ x>-y^2,\ \vec{x}^\circ=(e,0);$

5) $f(x,y)=(3^y-1)\sqrt[5]{x},\ (x,y)\in\mathbf{R}^2,\ \vec{x}^\circ=(0,0);$

6) $f(x,y)=\begin{cases}x+y, & x>-y,\\ 0, & x\le -y,\end{cases}\ \vec{x}^\circ=(0,0);$

7) $f(x,y)=y^{\cos x},\ y>0,\ \vec{x}^\circ=\left(2,\dfrac{\pi}{3}\right);$

8) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\ln(x^2+y^2)}, & (x,y)\ne(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}\ \vec{x}^\circ=(0,0).$

ЗАНЯТТЯ 6
ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ СКЛАДНИХ ТА НЕЯВНИХ ФУНКЦІЙ. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Контрольні запитання

1. *Формула для обчислення частинних похідних складної функції.*

А6

1. Нехай функція $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ диференційовна на $\mathbf{R}^2$. Довести, що функція $f(x, y, z) = \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^3(y+z)}{6} + \dfrac{x^2yz}{2} + g(y-x, z-x)$, задовольняє рівняння $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = xyz$.
2. Нехай функція $z(x, y)$ в околі точки $(1, -2)$ задовольняє рівняння $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$, причому $z(1, -2) = 1$. Знайти частинні похідні другого порядку функції z в точці $(1, -2)$.

3. Нехай функції f, g задані системою рівнянь: $\begin{cases} f(x,y) + g(x,y) = x + y, \\ y \sin f(x,y) = x \sin g(x,y). \end{cases}$

Знайти диференціали df, dg.
4. Перетворити наступні звичайні диференціальні рівняння, ввівши вказані нові змінні, та розв'язати їх:

1) $x^2y'' + xy' + y = 0, \quad x = e^t;$
2) $(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0, \quad x = \sin t;$
3) $(x + x^3)y'' = (1 - x^2)y', \quad t = \ln(1 + x^2).$

5. Рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}$$

перетворити до полярних координат, поклавши

$$x = r(\varphi)\cos\varphi, \quad y = r(\varphi)\sin\varphi.$$

Розв'язати його.
6. Розв'язати наступні рівняння, ввівши нові незалежні змінні y_1 і y_2 замість x_1 і x_2:

1) $\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial z}{\partial x_2}; \quad y_1 = x_1 + x_2, \; y_2 = x_1 - x_2;$

7. 1) Розкласти функцію

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$$

по формулі Тейлора в околі точки $A(1, 1, 1)$.

2) В розкладі функції

$$f(x_1, x_2) = x_1^{x_2}, \ x_1 > 0$$

в околі точки виписати члени до другого порядку включно і написати наближену формулу для значення $x_1^{x_2}$ при x_1, x_2, близьких до 1.

8. За допомогою диференціала наближено обчислити значення функції

$$f(x_1, x_2) = x_1^5 \ln(1 + x_2)$$

в точках $(1.5, 0.7), (1.05, 0.07), (1.005, 0.007)$ і порахувати відхилення від точного значення в кожному випадку. Обрати $x_0 = (1, 0)$.

9. За допомогою формули Тейлора при $n = 1$ та $n = 2$ наближено обчислити значення функції

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2 + 1)\sin(x_1 + x_2)$$

в точці $(0.1, 0.05)$. Порівняти результати з точними.

Д1. Нехай $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ – чотири рази диференційовна на $\mathbf{R}$ функція. Кожній точці (x, y) кривої $y = f(x), \ x \in \mathbf{R}$ поставимо у відповідність точку (x_1, y_1) згідно з перетворенням Лежандра:

$$x_1 = f'(x), \quad y_1 = xf'(x) - y.$$

Знайти $\dfrac{d^i y_1}{dx_1^i}, \ i = 1, 2, 3.$

Д2. Нехай $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ – двічі диференційовна на $\mathbf{R}$ функція. Виразити кривину кривої $\{(x, y) \mid x \in \mathbf{R}, \ y = f(x)\}$ в площині

$$\frac{|f''(x)|}{\left\{1 + [f'(x)]^2\right\}^{3/2}}, \quad x \in \mathbf{R},$$

в полярних координатах r і φ : $\quad x = r\cos\varphi, \ y = r\sin\varphi$.

Д3. Систему рівнянь

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + kx_1(x_1^2 + x_2^2), \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + kx_2(x_1^2 + x_2^2),$$

де $k \in \mathbf{R}$ – деяка стала, перетворити до полярних координат, поклавши $x_1 = r\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\varphi$. Розв'язати її.

Д4. За допомогою формули Тейлора при $n = 4$ наблизити функцію

$$f(x_1, x_2) = \operatorname{arctg}(x_1^3 - \sin(x_2) + 1)$$

в околі початку координат поверхнею четвертого порядку. Похідні порахувати за допомогою наближених формул. Зобразити результат.

Б6

1. Нехай функція $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ диференційовна на $\mathbf{R}^2$. Довести, що наведені функції задовольняють відповідним рівнянням:

1) $f(x, y, z) = \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^3(y+z)}{6} + \dfrac{x^2yz}{2} + g(y - x, z - x)$,
$\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z} = xyz$;
2) $f(x, y, z) = \dfrac{xy}{z} \ln x + xg\Big(\dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x}\Big),\ x > 0,\ z \neq 0$,
$x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} + z\dfrac{\partial f}{\partial z} = f + \dfrac{xy}{z}$.

2. Нехай функції $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, h : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ двічі диференційовні на області визначення. Знайти частинні похідні першого та другого порядку функцій:

1) $f(x, y, z) = g\Big(xy, \dfrac{y}{z}\Big), z \neq 0$;
2) $f(x, y, z) = h\big(x^2 + y^2, x^2 - y^2, 2xz\big)$.

3. Знайти частинні похідні першого та другого порядків функції $y = y(x)$, визначеної рівнянням:

1) $x^2 + 2xy - y^2 = a^2 (a \in \mathbf{R})$;
2) $y - \varepsilon \sin y = x (\varepsilon \in (0, 1))$;
3) $x^3y - y^3x = a^4 (a \in \mathbf{R})$;
4) $x^2y^2 - x^4 - y^4 = a^4 (a \in \mathbf{R})$;
5) $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0 (a \neq 0)$;
6) $\sin(xy) - e^{xy} - x^2y = 0$;
7) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, x \neq 0$;
8) $x^y = y^{2x}, x > 0, y > 0$;
9) $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$;

10) $y = 2x \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, \dfrac{y}{x} > 0.$

4. Знайти частинні похідні першого порядку функції $z = z(x, y)$, визначеної рівнянням:

1) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a \in \mathbf{R})$;
2) $z^3 - 3xyz = a^3 (a \in \mathbf{R})$;
3) $x + y + z = e^y$;
4) $z = \sqrt{x^2 - y^2} \cdot \operatorname{tg} \dfrac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}},\ x > y, 0 < \dfrac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} < \dfrac{\pi}{2}$;
5) $x + y + z = e^{-(x+y+z)}$;
6) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 0)$;
7) $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2y = 5$;
8) $x \cos y + y \cos z + z \cos x = a (a \in \mathbf{R})$;
9) $xy + xz + yz^2 = 1$;
10) $\dfrac{x}{z} = \ln\left(\dfrac{z}{y}\right) + 1,\ yz > 0.$

5. Нехай функції $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ двічі диференційовні на своїх множинах визначення. Довести, що функція $z = z(x, y)$, визначена наведеним співвідношенням, задовольняє відповідному диференціальному рівнянню:

1) $z = xyf(z), \quad x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$;
2) $z = x + yf(z), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f(z)\frac{\partial z}{\partial x}$;
3) $g(cx - az, cy - bz) = 0, (a, b) \neq (0, 0), \quad a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c$;
4) $x - y + z = f(x^2 + y^2 + z^2), \quad (y + z)\frac{\partial z}{\partial x} + (z - x)\frac{\partial z}{\partial y} + x + y = 0$;
5) $x - az = f(y - bz) = 0, (a, b) \neq (0, 0), \quad a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1$;
6) $x^2 + y^2 + z^2 = yf\left(\dfrac{z}{y}\right), \quad (x^2 - y^2 - z^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} = 2xz$;
7) $g(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}) = 0, \quad x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$

6. Для функцій f, g, визначених наведеною системою рівнянь, обчислити похідні $f''(x_0), g''(x_0)$ при заданих $x_0, f(x_0), g(x_0)$:

1) $8x^2 - g^3(x) - 3f^4(x) = 0, x^3 - g^2(x) + 5f(x) = -3,$
$x_0 = 1, f(x_0) = 0,\ g(x_0) = 2$;

2) $x + f(x) + g(x) = 0, x^3 + f^3(x) - g^3(x) = 10,$
$x_0 = 1, f(x_0) = 1,\ g(x_0) = -2;$
3) $g(x) = x^2 + f^2(x), x^2 - xf(x) + f^2(x) = 1,$
$x_0 = 1, f(x_0) = 1,\ g(x_0) = 2;$
4) $f(x) = y^2 + y^{-2}, g(x) = y^3 + y^{-3}, x = y + y^{-1},$
$x_0 = 2, f(x_0) = 2,\ g(x_0) = 2;$
5) $f^2(x) + g^2(x) = 2x^2, f^2(x) + 2g^2(x) + x^2 = 4,$
$x_0 = 1, f(x_0) = 1,\ g(x_0) = -1;$
6) $x^2 + f^2(x) - g^2(x) = 0, x^2 + 2f^2(x) + 3g^2(x) = 1,$
$x_0 = 1, f(x_0) = \frac{1}{\sqrt{5}},\ g(x_0) = -\frac{1}{\sqrt{5}};$
7) $x^2 - f^2(x) + g^2(x) = 1, f^2(x) - 2x + g(x) = 0,$
$x_0 = 1, f(x_0) = 1,\ g(x_0) = 1.$

7. Нехай функція $z = z(x, y)$ задана системою рівнянь. 1) Знайти явний вираз для функції z та область визначення цієї функції. 2) Знайти похідні $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, не використовуючи явний вираз для z.
1) $z = uv, x = u + v, y = u - v;$
2) $z = 2v, x = u\cos v, y = u\sin v,\ v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2});$
3) $z = \cos v, x = \sin v\cos u, y = \sin v\sin u, v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}];$
4) $z = u^{-2} + v^{-2}, x = u + v, y = uv;$
5) $z = \dfrac{u^2 - v^2}{2u + v}, x = \dfrac{u}{v}, y = u - v;$
6) $z = u^3 - v^3, x = u - v, y = uv.$

8. Перетворити наступні звичайні диференціальні рівняння, ввівши вказані нові змінні:
1) $(1 - x^2)y'' - xy' + a^2y = 0,\ a \in \mathbf{R};\quad x = \cos t;$
2) $(1 + x^2)^2y'' + 2x(1 + x^2)y' + y = 0,\quad x = \operatorname{tg} t;$
3) $(x - x^3)y'' + (1 - 3x^2)y' - xy = 0,\quad x = \sqrt{1 - t^2};$
4) $x^4y'' + 2x^3y' + y = 0,\quad x = t^{-1};$
5) $y'' + y'\cdot\operatorname{th} x + \dfrac{m^2}{\operatorname{ch}^2 x}y = 0,\ m \in \mathbf{R};\quad x = \ln\operatorname{tg}\dfrac{t}{2};$
6) $x^2y'' - 4xy' + y = 0,\quad x = e^t;$
7) $y'' - x(y')^3 + e^y(y')^3 = 0;$
8) $\dfrac{y''}{(y')^3} + y = 0;$
9) $(y')^2y'' - 10y'y'' + 15(y'')^3 = 0,$

в останніх трьох пунктах в якості незалежної змінної взяти y.

9. Перетворити наступні рівняння до полярних координат, поклавши $x = r(\varphi)\cos\varphi,\ y = r(\varphi)\sin\varphi$:

1) $(xy' - y)^2 = 2xy(1 + (y')^2)$;
2) $(x^2 + y^2)^2 = (x + yy')^3$;
3) $\dfrac{x + yy'}{xy' - y} = 0$;
4) $[1 + (y')^2]^{3/2} = y''$;
5) $xy' - y = \sqrt{1 + (y')^2}$.

6) Перетворити вираз:

$$W = x_1 \frac{d^2 x_2}{dt^2} - x_2 \frac{d^2 x_1}{dt^2}$$

до полярних координат, поклавши $x_1 = r\cos\varphi,\ x_2 = r\sin\varphi$.

10. Розв'язати наступні рівняння, ввівши відповідні нові змінні:

1) $a\frac{\partial z}{\partial x_1} + b\frac{\partial z}{\partial x_2} = 1,\ \{a, b\} \subset \mathbf{R},\ a \neq 0;\ y_1 = x_1,\ y_2 = x_2 - bz$;
2) $x_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial z}{\partial x_2} = z;\quad y_1 = x_1,\ y_2 = \dfrac{x_2}{x_1}$.

Перетворити наступні вирази, ввівши нові незалежні змінні y_1 і y_2 замість x_1 і x_2:

3) $x_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + \sqrt{1 + x_2^2}\frac{\partial z}{\partial x_2} = x_1 x_2; y_1 = \ln x_1,\ y_2 = \ln(x_2 + \sqrt{1 + x_2^2})$;
4) $(x_1 + x_2)\frac{\partial z}{\partial x_1} - (x_1 - x_2)\frac{\partial z}{\partial x_2} = 0; y_1 = \ln\sqrt{x_1^2 + x_2^2},\ y_2 = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)$;
5) $x_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial z}{\partial x_2} = z + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + z^2}; y_1 = \dfrac{x_2}{x_1},\ y_2 = z + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + z^2}$;
6) $x_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial z}{\partial x_2} = \dfrac{x_1}{z};\quad y_1 = 2x_1 - z^2,\ y_2 = \dfrac{x_2}{z}$;
7) $(x_1 + z)\frac{\partial z}{\partial x_1} + (x_2 + z)\frac{\partial z}{\partial x_2} = x_1 + x_2 + z; y_1 = x_1 + z,\ y_2 = x_2 + z$;
8) $(z + e^{x_1})\frac{\partial z}{\partial x_1} + (z + e^{x_2})\frac{\partial z}{\partial x_2} - (z^2 - e^{x_1 + x_2}) = 0; y_1 = x_2 + ze^{-x_1},\ y_2 = x_1 + ze^{-x_2}$;
9) $\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2 = 0;\quad x_1 = y_1 y_2,\ x_2 = \dfrac{1}{2}(y_1^2 - y_2^2)$;
10) $(x_1 + mz)\frac{\partial z}{\partial x_1} + (x_2 + nz)\frac{\partial z}{\partial x_2} = 0,\ \{m, n\} \in \mathbf{R}; y_1 = x_1,\ y_2 = \dfrac{x_2 + nz}{x_1 + mz}$.

11. Написати розклад наступних функцій за формулою Тейлора в околі точки $M(x_1^\circ, x_2^\circ)$ до другого порядку включно:

1) $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{1 + x_2^2}, \quad x_1^0 = x_2^0 = 0;$

2) $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{x_2},\ x_2 \neq 0; \quad x_1^0 = x_2^0 = 1;$

3) $f(x_1, x_2) = \sin x_1 \cdot \sin x_2, \quad (x_1^\circ, x_2^\circ) = \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{3}\right);$

4) $f(x_1, x_2) = \dfrac{1}{x_1 - x_2},\ x - 1 \neq x_2; \quad (x_1^\circ, x_2^\circ) = (1, 2);$

5) $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + x_2},\ x_1 > -x_2; \quad (x_1^\circ, x_2^\circ) = (2, -1);$

6) $f(x_1, x_2) = \ln(x_1 - 2x_2),\ x_1 > 2x_2; \quad (x_1^\circ, x_2^\circ) = (3e, e);$

7) $f(x_1, x_2) = \arccos\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right), x_2 \neq 0, |x_1| < |x_2|; \quad (x_1^\circ, x_2^\circ) = (1, 2);$

8) $f(x_1, x_2) = \mathrm{tg}(x_1 + x_2^2),\ |x_1 + x_2^2| < \dfrac{\pi}{2}; \quad (x_1^\circ, x_2^\circ) = \left(\dfrac{\pi}{4}, 0\right);$

9) $f(x_1, x_2) = x_1 \cos(x_1 - x_2), \quad (x_1^\circ, x_2^\circ) = (\pi, 2\pi).$

12. За допомогою диференціала наближено обчислити значення функції

$$f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1 + x_2 + x_3}$$

в точці $(0.1, 0.05, -0.01)$. Знайти окіл початку координат, де помилка обчислення за допомогою диференціала не перевищує 0.1.

13. Знайти рівняння дотичної площини в точці $(1, 1)$ функції $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4$. Зобразити результат. (Наприклад, в редакторі gnuplot можна написати: splot [1:2] [3:7] x**2 + y**4, x+y для зображення двох поверхонь з відповідними межами для змінних).

ЗАНЯТТЯ 7
ЛОКАЛЬНІ ЕКСТРЕМУМИ

Контрольні запитання

1. *Означення критичної точки і точок локального екстремума функції від кількох змінних.*
2. *Необхідна умова локального екстремума.*
3. *Достатня умова локального екстремума.*
4. *Критерій Сільвестра додатної і від'ємної визначеності матриці.*
5. *Метод градієнтного спуску та метод Ньютона.*

А7

1. Дослідити на локальний екстремум наступні функції:

1) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + x_2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2;$

2) $f(x_1, x_2) = 3 - x_1^2 - (x_2 - 1)^2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2;$

3) $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2 + 1)^2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2;$

4) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 + 1, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2;$

5) $f(x_1, x_2) = e^{x_1+x_2}(x_1^2 + x_2^2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2.$

6) $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2;$

7) $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_2}{4x_1} + \dfrac{x_1}{x_2};$

8) $f(x_1, x_2) = x_1x_2 \ln(x_1^2 + x_2^2), \quad (x_1, x_2) \neq (0, 0).$

2. Дослідити на локальний екстремум наступні функції:

1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1 - x_2 + 1)^2 + (x_3 - 2x_1 - 2)^2;$

2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 2(x_1 - x_2 + 1)^2 + (x_3 - 2x_1 - 2)^2;$

3) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \dfrac{x_2^2}{4x_1} + \dfrac{x_3^2}{x_2} + \dfrac{2}{x_3}, \quad x_i > 0,\ 1 \leq i \leq 3;$

4) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 \ln(x_2^2 + x_3^2 + \frac{1}{2});$

5) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 \exp(-x_1 - x_2 - x_3), \quad x_i > 0,\ 1 \leq i \leq 3.$

3. Використовуючи градієнтного спуску та метод Ньютона, знайти локальні мінімуми та максимуми наведених функцій. Знайти кількість зроблених ітерацій.

$$f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x + 5y - 1,\ (x_0, y_0) = (10, 10);$$

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 4y^4 - x^4 + 3,$$
$$(x_0, y_0) = (10,10), (10,-10), (-10,10), (-10,-10), (0,0).$$
$$f(x,y) = x^2 - y^2,\ (x,y) = (1,1).$$
$$f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^2 + ((x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2)^2,$$
$$(x,y,z) = (3,3,3), (-1,-2,-3), (1,1,1).$$

Д1. Довести, що функція
$$f(x_1,x_2) = x_2^5 - (x_1 - x_2)^2, \quad (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2$$
не має локального мінімума в точці $(0,1)$, хоча при довільних дійсних a і b, $(a,b) \neq (0,0)$ функція
$$g(x) = f(ax, bx), \quad x \in \mathbf{R}$$
має строгий локальний мінімум в точці $x = 0$.

Д2. Дослідити на локальний екстремум функцію
$$f(x_1,x_2) = x_1 + x_2 + 4\sin x_1 \cdot \sin x_2, \quad (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2.$$

Д3. Довести, що функція
$$f(x_1,x_2) = (x_1 - x_2)^2 + x_1^4 + x_2^4, \quad (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2$$
має строгий локальний мінімум в точці $(0,0)$, хоча $d^2 f(0,0)$ є вироджена квадратична форма. Чи має екстремум в цій точці функція
$$g(x_1,x_2) = f(x_1,x_2) + \frac{x_1 x_2^2}{10^7}, \quad (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2?$$

Д4. Довести, що функція
$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2}\right), & (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0, & (x_1,x_2) = (0,0) \end{cases}$$
має строгий локальний мінімум в точці $(0,0)$ незважаючи на те, що $\forall n \in \mathbf{N}$: $d^n f(0,0) = 0$.

2) Довести, що функція
$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} x_1^3 \sin x_1^{-1} + x_2^2, & x_1 \neq 0, \\ x_2^2, & x_1 = 0 \end{cases}$$
має строгий локальний мінімум в точці $(0,1)$, хоча похідна $f''_{11}(0,0)$ не існує.

Д5. Придумати і дослідити функції, для яких метод градієнтного спуску та метод Ньютона збігаються погано чи не збігаються, хоча локальні екстремуми є.

Б7

1. Дослідити на локальний екстремум наступні функції:

1) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1 - 2x_2;$

2) $f(x_1, x_2) = -2x_1^2 + x_2^2 + 3x_1 - 2x_2;$

3) $f(x_1, x_2) = -2x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1 - 3x_2;$

4) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 14x_1x_2 + 1;$

5) $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 5x_2^2 + 15x_1x_2 - x_1 + 4,$

визначені при всіх $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$.

2. Дослідити на локальний екстремум наступні функції:

1) $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2;$

2) $f(x_1, x_2) = x_1^2x_2^3(6 - x_1 - x_2);$

3) $f(x_1, x_2) = 2x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 - 2x_2^2;$

4) $f(x_1, x_2) = x_1x_2(1 - x_1 - x_2);$

5) $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 9x_1x_2 + 27;$

6) $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1x_2^2 + 3ax_1x_2, \quad a \in \mathbf{R};$

7) $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2x_2^2 - 8x_1 + 8x_2,$

визначені при всіх $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$.

3. Дослідити на локальний екстремум наступні функції:

1) $f(x_1, x_2) = x_1x_2 + \dfrac{50}{x_1} + \dfrac{20}{x_2}, \quad x_i > 0,\ i = 1, 2;$

2) $f(x_1, x_2) = x_1x_2\sqrt{1 - \dfrac{x_1^2}{4} - \dfrac{x_2^2}{9}}, \quad \dfrac{x_1^2}{4} + \dfrac{x_2^2}{9} \le 1;$

3) $f(x_1, x_2) = 1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2;$

4) $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)e^{-(x_1^2 + x_2^2)}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2;$

5) $f(x_1, x_2) = \sin x_1 + \cos x_2 + \cos(x_1 - x_2),$
$$0 \le x_i \le \pi/2,\ i = 1, 2;$$

6) $f(x_1, x_2) = \sin x_1 \cdot \sin x_2 \cdot \sin(x_1 + x_2),$
$$0 \le x_i \le \pi,\ i = 1, 2;$$

7) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 4\ln x_1 - 10\ln x_2,$

$$x_i > 0,\ i = 1, 2;$$

8) $f(x_1, x_2) = e^{-2x_1+3x_2}(8x_1^2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2;$

9) $f(x_1, x_2) = x_2\sqrt{1 + x_1} + x_1\sqrt{1 + x_2}, \quad x_i \geq -1, i = 1, 2;$

10) $f(x_1, x_2) = e^{2x_1}(x_1 + x_2^2 + 2x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2.$

4. Дослідити на локальний екстремум наступні функції:

1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 + 4x - 2 - 6x_3,$
$$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3;$$

2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 + 12x_1x_2 + 2x_3,$
$$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3;$$

3) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2^2x_3^3(a - x_1 - 2x_2 - 3x_3),\ a > 0,$
$$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3;$$

4) $f(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{x_1^2}{x_2} + \dfrac{x_2^2}{x_3} + x_3^2,$
$$x_i \neq 0,\ 1 \leq i \leq 3;$$

5) $f(x_1, x_2, x_3) = \sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3 - \sin(x_1 + x_2 + x_3),$
$$0 < x_i < \pi,\ 1 \leq i \leq 3;$$

6) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3(4a - x_1 - x_2 - x_3),\ a > 0,$
$$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3;$$

7) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 + 2x_3 + x_1,$
$$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3;$$

8) $f(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}{x_1x_2x_3}, \quad x_i > 0,\ 1 \leq i \leq 3;$

9) $f(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_1}{x_2 + x_3} + \dfrac{x_2}{x_1 + x_3} + \dfrac{x_3}{x_1 + x_2},$
$$x_i > 0,\ 1 \leq i \leq 3;$$

10) $f(x_1, x_2, x_3) = (ax_1 + bx_2 + cx_3)e^{1-x_1^2-x_2^2-x_3^2},$
$$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3.$$

ЗАНЯТТЯ 8
ЗНАХОДЖЕННЯ ТОЧОК ЛОКАЛЬНОГО ЕКСТРЕМУМА (ПРОДОВЖЕННЯ). ЯКОБІАНИ

Контрольні запитання

1. *Означення векторного відображення. Критерій неперервності відображення.*
2. *Означення диференційовного відображення. Якобіан.*

А8

1. Через точку $A(1,2,3)$ провести площину, що утворює з площинами координат тетраедр найменшого об'єму.

2. В кулю радіуса $r > 0$ вписати прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єма.

3. Нехай функція $z = z(x_1, x_2)$ задана рівнянням
$$x_1^2 + 4x_2^2 + 9z^2 = 1.$$
Дослідити її на локальний екстремум і дати геометричну інтерпретацію.

4. Нехай функція $z = z(x_1, x_2)$ задана рівнянням
$$\tfrac{1}{3}x_1^3 + 2x_2^2 - z^2 x_1 + z = 0.$$
Дослідити її на локальний екстремум.

5. Змінні величини x і y задовольняють лінійне рівняння
$$y(x) = ax + b,\ x \in \mathbf{R};\ \{a, b\} \subset \mathbf{R},$$
коефіцієнти якого треба визначити. В результаті ряду вимірювань для величин x і y отримані значення $y(x_i),\ 1 \le i \le n$, що містять помилки. Користуючись методом найменших квадратів, оцінити значення a і b.

Вказівка. Метод найменших квадратів полягає в тому, що в якості наближених значень параметрів беруть ті значення a і b, при яких сума
$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$
мінімальна.

6. Для наступних відображень $\vec{f}$ знайти образ $\vec{f}(A)$ множини A:

1) $\quad \vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2^2 \end{pmatrix}, \quad (x_1, x_2) \in A = [0,1] \times [-1,1];$

2) $\quad \vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\ x_1-x_2\end{pmatrix}, \quad (x_1,x_2)\in A,\ A=[0,1]\times[0,1];$

3) $\quad \vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\ 2x_1+2x_2\end{pmatrix}, \quad (x_1,x_2)\in A,\ A=[0,1]\times[0,1];$

4) $\quad \vec{f}(r,\varphi)=\begin{pmatrix}r\cos\varphi\\ r\sin\varphi\end{pmatrix}, \quad (r,\varphi)\in A,$

$$a)\ A=[1,2]\times\left[\frac{\pi}{2},\pi\right], \qquad b)\ A=[1,2]\times[0,2\pi].$$

Які з цих відображень взаємно-однозначні на A? Які з них неперервні на A? Обчислити якобіани відображень з номера 1 і знайти точки, в яких ці якобіани вироджуються.

7. Для наступних відображень $\vec{f}$ знайти похідну $\vec{f}\,'(x_1^\circ,x_2^\circ)$ і головну лінійну частину відображення в точці (x_1°,x_2°):

1) $\quad \vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2^2\end{pmatrix}, \quad (x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2,\ (x_1^\circ,x_2^\circ)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),$

2) $\quad \vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}x_1\cos x_2\\ x_1\sin x_2\end{pmatrix}, \quad (x_1,x_2)\in(0,+\infty)\times(0,2\pi),$

$$a)\ (x_1,x_2)=\left(\frac{1}{2},\frac{\pi}{3}\right), \qquad b)\ (x_1,x_2)=\left(1,\frac{\pi}{2}\right).$$

Д1. Дослідити на локальний екстремум наступні функції:

1) $\quad f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\prod_{i=1}^{4}x_i^i\cdot\left(1-\sum_{i=1}^{4}ix_i\right);$

2) $\quad f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\frac{x_4}{x_3}+\frac{2}{x_4};$

3) $\quad f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\exp(-x_1x_2x_3x_4)\cdot(x_1+x_2+x_3+x_4);$

4) $\quad f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^4x_2^3x_3^2x_4(1-x_1-2x_2-3x_3-4x_4);$

5) $\quad f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2^2x_3^3x_4^4(1-4x_1-3x_2-2x_3-x_4).$

Д2. Довести, що функція

$$f(x_1,x_2)=(x_2-x_1^2)(x_2-2x_1^2), \quad (x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$$

не має локального мінімума в точці $(0,0)$, хоча при довільних дійсних a і $b,\ (a,b)\neq(0,0)$ функція

$$g(x)=f(ax,bx), \quad x\in\mathbf{R}$$

має строгий локальний мінімум в точці $x=0$. Дати геометричну трактовку.

Д3. 1) На площині дано систему n точок $\{M_i(x_1(i), x_2(i)) \ : 1 \le i \le n\}$. При якому положенні прямої $x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha - p = 0, \quad \alpha \in [0, 2\pi),\ p \in \mathbf{R}$ сума квадратів відхилень даних точок від цієї прямої буде найменшою?

2) Функцію $f(x) = x^2, \quad x \in (1,3)$ наближено замінити лінійною функцією $g(x) = ax + b, \quad x \in (1,3)$ з деякими сталими $\{a, b\} \subset \mathbf{R}$ так, щоб абсолютне відхилення

$$\triangle = \sup_{x \in (1,3)} |x^2 - (ax+b)|$$

було мінімальним.

Д4. Нехай функція $z = z(x_1, x_2)$ задана рівнянням

$$(x_1^2 + x_2^2 + z^2)^2 = a^2(x_1^2 + x_2^2 - z^2), \quad a > 0.$$

Дослідити її на локальний екстремум і дати геометричну інтерпретацію.

Д5. Число $a > 0$ розбити на три додатних доданки $x_i > 0,\ 1 \le i \le 3$ так, щоб добуток $x_1^m x_2^n x_3^p,\ \{m, n, p\} \subset \mathbf{N}$, мав найбільше значення.

Д6. Дослідити на локальний екстремум функцію $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_4^2$ при різних значеннях параметрів $a, b, c, d \in \mathbf{R}$.

Б8

1. 1) Нехай $x_i \ge 0, 1 \le i \le 3$. Довести, що добуток $x_1 x_2 x_3$ при умові $x_1 + x_2 + x_3 = a,\ a \ge 0$ буде найбільшим тоді і лише тоді, коли $x_1 = x_2 = x_3$.

2) Нехай $x_i > 0, 1 \le i \le 3$. Довести, що сума $x_1 + x_2 + x_3$ при умові $x_1 x_2 x_3 = a,\ a > 0$ буде найменшою тоді і лише тоді, коли $x_1 = x_2 = x_3$.

3) Визначити зовнішні розміри казана циліндричної форми з заданою товщиною стінок $d > 0$ і ємністю $V > 0$ так, щоб на його виготовлення пішло якнайменше матеріалу.

4) На площині $3x_1 - 2x_3 = 0$ знайти точку, сума квадратів відстаней до якої від точок $A(1,1,1)$ і $B(2,3,4)$ найменша.

5) Знайти найбільший об'єм паралелепіпеда при заданій сумі його ребер $12a,\ a > 0$.

2. Дослідити на локальний екстремум функцію

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \exp\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right) \cdot \sum_{i=1}^{m} x_i, \quad x_i > 0,\ 1 \le i \le m.$$

3. Дослідити на локальний екстремум функцію $z = z(x_1, x_2)$, задану наступним рівнянням:

1) $x_1^2 + x_2^2 + z^2 - 2x_1 + 2x_2 - 4z - 10 = 0$;
2) $x_1^2 + x_2^2 + z^2 - x_1 z - x_2 z + 2x_1 + 2x_2 + 2z - 2 = 0$;
3) $2x_1^2 + 2x_2^2 + z^2 + 8x_1 z - z + 8 = 0$;
4) $5x_1^2 + 5x_2^2 + 5z^2 - 2x_1x_2 - 2x_1 z - 2x_2 z - 72 = 0$;
5) $x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 z + 4 + \dfrac{1}{2}(z^2 + z) = 0$;
6) $z^2 + x_1x_2 z - x_1 x_2^2 - x_1^3 = 0$;
7) $2x_1^2 + 6x_2^2 + 2z^2 + 8x_1 z - 4x_1 - 8x_2 + 3 = 0$;
8) $6x_1^2 + 6x_2^2 + 6z^2 + 4x_1 - 8x_2 - 8z + 5 = 0$;
9) $x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 + z^2 + 2z + 1 = 0$;
10) $x_1^4 + x_2^4 + z^4 = 2a^2(x_1^2 + x_2^2 + z^2), \quad a > 0$.

4. 1) На площині дано n матеріальних точок $\{M_i(x_1(i), x_2(i)) \ : \ 1 \le i \le n\}$ з масами, відповідно рівними $m_i, \ 1 \le i \le n$. При якому положенні точки $M(x_1, x_2)$ момент інерції системи відносно цієї точки

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i \rho^2(M_i, M)$$

буде найменшим? Тут ρ – евклідова метрика.

2)* На площині дано n точок $\{M_i(x_1(i), x_2(i)) \ : \ 1 \le i \le n\}$ з попарно різними абсцисами і попарно різними ординатами. Нехай

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |\, x_1 - y_1 \,| + |\, x_2 - y_2 \,|,$$
$$(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, \ (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2.$$

При якому положенні точки $M(x_1, x_2)$ сума відстаней

$$S = \sum_{i=1}^{n} d(M_i, M)$$

буде найменшою? Розглянути випадки парного і непарного n.

5. Для наступних відображень $\vec{f}$ знайти образ $\vec{f}(A)$ множини A:

1) $$\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \\ \dfrac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \end{pmatrix}, \quad (x_1, x_2) \ne (0, 0);$$
$$A = \{(x_1, x_2) \,|\, 1 \le x_1 \le 4, x_2 = 0\};$$

2) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}x_1^2+x_2^2\\x_1^2-x_2^2\end{pmatrix},\quad (x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2;$

$$A=\{(x,x^{-1}\,|\,1\le x\le 2\};$$

3) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}x_1^2+x_2^2\\x_1^2-x_2\end{pmatrix},\quad (x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2;$

$$A=\{(x,x^2)\,|\,0\le x\le 4\};$$

4) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}\dfrac{2x_1}{x_1^2+x_2^2}\\ \dfrac{x_2}{x_1^2+x_2^2}\end{pmatrix},$

$$(x_1,x_2)\ne(0,0);\quad A=[1,2]\times[0,2];$$

5) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}x_1^2-x_2^2\\2x_1x_2\end{pmatrix},\quad (x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2;\quad A=[0,1]\times[0,1];$

6) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}\operatorname{arctg}\dfrac{x_2}{x_1}\\ \ln(x_1^2+x_2^2)\end{pmatrix},\quad x_1\ne 0;$

$$A=\{(x_1,x_2)\,|\,x_1>0,\ x_1^2+x_2^2<16\};$$

7) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\x_1+x_2\end{pmatrix},\quad (x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2;$

$$A=[0,1]\times[0,2];$$

8) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}x_1^2\\ \sqrt{x_2}\end{pmatrix},\quad x_2\ge 0;\quad A=[-1,1]\times[4,9];$

9) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}x_1+2x_2\\-x_1+2x_2\end{pmatrix},\ (x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2;\ A=[0,1]\times[0,1];$

10) $\vec{f}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}\operatorname{tg}x_1\\ \cos x_2\end{pmatrix},\quad |x_1|<\dfrac{\pi}{2};$

$$A=\Big[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\Big]\times\Big[0,\frac{3\pi}{2}\Big].$$

Які з цих відображень взаємно-однозначні на A? Які з них неперервні на A? Обчислити якобіани цих відображень і знайти точки, в яких ці якобіани вироджуються.

6. Для наступних відображень $\vec{f}$ знайти похідну $\vec{f}\,'(x_1^\circ,x_2^\circ)$ і головну лінійну частину відображення в точці (x_1°,x_2°):

1) $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \ln x_1 \cdot \cos x_2 \\ \ln x_1 \cdot \sin x_2 \end{pmatrix}, \ x_1 > 0, \ x_2 \in \mathbf{R};$

$$(x_1^\circ, x_2^\circ) = (1, \pi);$$

2) $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ \dfrac{x_2}{x_1} \end{pmatrix}, \ x_1 \neq 0; \quad (x_1^\circ, x_2^\circ) = (1, 2);$

3) $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{10x_1}{x_1^2 + x_2^2} \\ \dfrac{10x_2}{x_1^2 + x_2^2} \end{pmatrix}, \ (x_1, x_2) \neq (0, 0); \ (x_1^\circ, x_2^\circ) = (1, 1);$

4) $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix}, \ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, \quad (x_1^\circ, x_2^\circ) = (1, 1);$

5) $\vec{f}(x_1, x_2) \begin{pmatrix} (x_1 + x_2)^2 \\ (x_1 - x_2)^2 \end{pmatrix}, \ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2; \quad (x_1^\circ, x_2^\circ) = (3, 4).$

ЗАНЯТТЯ 9
УМОВНИЙ (ВІДНОСНИЙ) ЕКСТРЕМУМ

Контрольні запитання

1. *Означення точок локального мінімума і максимума.*
2. *Необхідна і достатня умови локального умовного мінімума і максимума.*

А9

1. Дослідити задані функції на умовний екстремум при наступних рівняннях зв'язку:

1) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2,\ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, \quad x_1^2 + x_2^2 = 1;$

2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3,\ x_i > 0,\ 1 \le i \le 3,$
$$x_1^2 + 4x_2^2 = 1,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4.$$

2. Нехай $a > 0$ – фіксована стала. Знайти найбільше значення функції
$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \prod_{i=1}^{m} x_i, \quad x_i \ge 0,\ 1 \le i \le m$$
за умови $x_1 + x_2 + \dots + x_m = a$,. Використовуючи отриманий результат, довести нерівність
$$\sqrt[m]{x_1 x_2 \dots x_m} \le \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_m}{m}, \quad x_i \ge 0,\ 1 \le i \le m.$$
За якої умови можливий знак рівності?

3. Визначити найбільше і найменше значення наступних функцій:

1) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 12x_1 + 16x_2,$
$$(x_1, x_2) \in \left\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 25\right\};$$

2) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2,$
$$(x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \mid |x_1| + |x_2| \le 1\};$$

3) $f(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2 - 3,$
$$(x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \mid 0 \le x_i \le 1,\ i = 1, 2;\ x_1 + x_2 \le 1\};$$

4) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3,$
$$(x_1, x_2, x_3) \in \left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 \le x_3 \le 1\right\}.$$

4. При яких розмірах прямокутна ванна заданого об'єму V має найменшу площу поверхні?

5. При яких розмірах відкрита циліндрична ванна з півкруглим поперечним перерізом, площа поверхні якої рівна S, має найбільший об'єм?

Д1. Знайти найменше значення функції

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = x_1^p + x_2^p + \cdots + x_m^p,\ p > 1,\ x_i \geq 0, 1 \leq i \leq m$$

за умови $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = a$. Використовуючи отриманий результат, довести при $p > 1,\ x_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq m$ нерівність

$$\frac{x_1^p + x_2^p + \cdots + x_m^p}{m} \geq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m}\right)^p.$$

Д2. Знайти найменше значення функції

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \left(\sum_{i=1}^m x_i^k\right)^{1/k},\ k > 1,\ x_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq m$$

за умови $\sum_{i=1}^m a_i x_i = A,\ a_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq m, A \geq 0$. Використовуючи отриманий результат, довести нерівність

$$\sum_{i=1}^m a_i x_i \leq \left(\sum_{i=1}^m x_i^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^m a_i^q\right)^{1/q},$$

$$p > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ a_i \geq 0,\ x_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq m.$$

В яких випадках в останній нерівності справджується рівність?

Б9

1. Нехай $a > 0,\ bc \neq 0$ – фіксовані сталі.Дослідити задані функції на умовний екстремум при наступних рівняннях зв'язку:

1) $f(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2},\ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, \quad x_1 + x_2 = 1;$

2) $f(x_1, x_2) = x_1^{-1} + x_2^{-1},\ x_1 x_2 \neq 0; \quad x_1 + x_2 = 2a;$

3) $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2,\ x_i \in [0, \pi/2), i = 1, 2; \quad \operatorname{tg} x_1 = 3 \operatorname{tg} x_2;$

4) $f(x_1, x_2) = \cos^2 x_1 + \cos^2 x_2,\ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, \quad x_1 - x_2 = \pi/4;$

5) $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{b} + \dfrac{x_2}{c},\ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2; \quad x_1^2 + x_2^2 = 1;$

6) $f(x_1, x_2) = 2\cos^2 x_1 + 3\cos^2 x_2,\ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2;\ x_1 - x_2 = \pi/4.$

2. Нехай $a \in \mathbf{R}$ – фіксована стала. Знайти найменше значення функції

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2,\ (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m$$

за умови $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = a$. Використовуючи отриманий результат, довести нерівність

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^2 \leq m(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2), \quad x_i \in \mathbf{R},\ 1 \leq i \leq m.$$

3. Нехай $a > b > 0$ – фіксовані сталі. Знайти найбільше і найменше значення наступних функцій:

1) $f(x_1,x_2)=x_1^2+3x_2^2-x_1+18x_2-4,$
$$(x_1,x_2)\in[0,1]\times[0,1];$$

2) $f(x_1,x_2)=x_1^2+3x_2^2-x_1+18x_2-4,$
$$(x_1,x_2)\in\{(x_1,x_2)\mid 0\le x_1\le x_2\le 4\};$$

3) $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2,$
$$(x_1,x_2)\in\left\{(x_1,x_2)\mid \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1\right\};$$

4) $f(x_1,x_2)=e^{-x_1^2-x_2^2}(2x_1^2+3x_2^2),$
$$(x_1,x_2)\in\left\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\le 4\right\};$$

5) $f(x_1,x_2)=\dfrac{x_1x_2}{2}-\dfrac{x_1^2x_2}{6}-\dfrac{x_1x_2^2}{8},$
$$(x_1,x_2)\in\left\{(x_1,x_2)\mid x_i\ge 0,\ i=1,2;\ \frac{x_1}{3}+\frac{x_2}{4}\le 1\right\};$$

6) $f(x_1,x_2)=(x_1-x_2^2)(x_1-1)^{2/3},$
$$(x_1,x_2)\in\left\{(x_1,x_2)\mid x_2^2\le x_1\le 2\right\};$$

7) $f(x_1,x_2)=\sqrt{1-x_1^2-x_2^2},$
$$(x_1,x_2)\in\left\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\le 1\right\};$$

8) $f(x_1,x_2)=x_1^2-x_2^2,\quad (x_1,x_2)\in\left\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\le 4\right\};$

9) $f(x_1,x_2)=x_1^2+2x_1x_2-4x_1+8x_2,$
$$(x_1,x_2)\in[0,1]\times[0,2];$$

10) $f(x_1,x_2)x_1^2x_2(4-x_1-x_2),$
$$(x_1,x_2)\in\{(x_1,x_2)\mid x_i\ge 0,\ i=1,2;\ x_1+x_2\le 6\}.$$

4. 1) В заданий прямий круговий конус вписати прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму.

2) З усіх трикутників з однаковою основою і одним і тим же кутом при вершині знайти найбільший за площею.

3) При заданій повній поверхні шатра визначити його виміри так, щоб об'єм був найбільшим. Шатер має форму циліндра, завершеного зверху прямим круговим конусом.

4) При заданому об'ємі шатра визначити його виміри так, щоб його повна поверхня була найменшою. (Про форму шатра див. пункт 3.)

5) Треба збудувати конічний шатер найбільшого об'єму з заданої кількості матеріалу загальною площею S. Які повинні бути його розміри?

6) На площині, заданій рівнянням $3x_1 - 2x_3 = 0$ знайти точку, сума квадратів відстаней якої до точок $A(1,-1,1)$ і $B(2,-3,4)$ найменша.

7) З усіх еліпсів, у яких сума осей постійна і рівна $2L$ знайти найбільший за площею.

8) Знайти найкоротшу відстань від точки $A(-1,0)$ до еліпса, заданого рівнянням $4x_1^2 + 9x_2^2 = 36$.

9) Площа трикутної ділянки землі зменшена загородками при вершинах; кожна загородка є круговою і має центр у відповідній вершині. Знайти, як можна зберегти найбільшу площу ділянки при заданій загальній довжині трьох загородок.

10) На еліпсі, що має рівняння $x_1^2 + 4x_2^2 = 4$, дано дві точки $A(-\sqrt{3}, \dfrac{1}{2})$ і $B(1, \dfrac{\sqrt{3}}{2})$. Знайти на цьому ж еліпсі третю точку $C(x_1^\circ, x_2^\circ)$ таку, щоб площа трикутника $\triangle ABC$, яку можна обчислити за формулою

$$S = \pm \begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \dfrac{1}{2} \\ 1 & 1 & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & x_1^0 & x_2^0 \end{vmatrix}$$

була найбільшою. Знак перед визначником обирається так, щоб площа була невід'ємна.

5. 1) Знайти довжини півосей еліпса, що описується рівнянням $36x_1^2 + 24x_1x_2 + 29x_2^2 = 180$ і має центр в точці $(0,0)$, досліджуючи екстремуми відстані довільної точки еліпса до його центра.

2) Серед всіх трикутників, вписаних в круг радіуса R, знайти трикутник з найбільшою площею.

3) Серед усіх трикутників з заданим периметром $2p$ знайти трикутник з найбільшою площею.

4) Серед усіх пірамід, основою яких є заданий трикутник зі сторонами a, b, c, а висота рівна h, знайти піраміду з найменшою площею бічної поверхні.

5) Знайти точку площини, сума квадратів відстаней від якої до трьох заданих точок $A_i(x_1(i), x_2(i)), 1 \leq i \leq 3$ є найменшою.

6) Серед усіх чотирикутників, вписаних в задане коло, знайти чотирикутник з найбільшою площею.

7) Знайти найбільшу відстань від точок поверхні, заданої рівнянням $2x_1^2 +$

$3x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 = 6$, до площини з рівнянням $x_3 = 0$.

8) На параболі $2x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1 - x_2 = 0$, рівняння якої є знайти точку, найближчу до прямої з рівнянням $9x_1 - 7x_2 + 16 = 0$.

9) На еліпсі, заданому рівнянням $\dfrac{x_1^2}{4} + \dfrac{x_2^2}{9} = 1$, знайти точки, найбільше і найменше віддалені від прямої з рівнянням $3x_1 + x_2 - 9 = 0$.

10) На еліпсоїді обертання, рівняння якого є $\dfrac{x_1^2}{96} + x_2^2 + x_3^2 = 1$ знайти точки, найбільше і найменше віддалені від площини з рівнянням $3x_1 + 4x_2 + 12x_3 = 288$.

ЗАНЯТТЯ 10

ОБЧИСЛЕННЯ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ З ПАРАМЕТРОМ. ІНТЕГРАЛ ТА ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

Контрольні запитання

1. *Інтеграл Фруллані.*
2. *Значення інтегралів Діріхле та Ейлера – Пуассона.*
3. *Інтеграл та перетворення Фур'є.*

A10

1. Нехай $a > 0, b > 0$. Використовуючи рівність

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-\alpha x}\, d\alpha,\ x > 0,$$

обчислити інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx \quad a > 0,\ b > 0.$$

2. Для $\{a, b\} \subset (0, +\infty)$ обчислити інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\, dx.$$

3. Обчислити інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \alpha x}{x^2}\, dx,\ \alpha \in \mathbf{R}$, двома способами: а) диференціюванням по параметру; б) частинами.

4. Обчислити інтеграли:

1) $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x^2}\, dx,\ \alpha \in \mathbf{R};$

2) $\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\alpha x^2}}{x^2}\, dx,\ \alpha > 0;$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2x^2 + 10x + 3)\, dx;$

4) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2}\, dx,$ $\alpha > 0,\ \beta > 0.$

5. Зобразити інтегралом Фур'є функцію f. При яких значеннях t інтеграл Фур'є збігається до відповідного значення функції f?

1) $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sign} t, & |t| \le 1, \\ 0, & |t| > 1; \end{cases}$

2) $f(t) = \begin{cases} \sin t, & |t| \le \pi, \\ 0, & |t| > \pi. \end{cases}$

6. Знайти перетворення Фур'є функцій:

1) $f(t)=\exp\left(-\dfrac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right),\ t\in\mathbf{R};$ $a\in\mathbf{R},\ \sigma>0;$ 2) $f(t)=\begin{cases}1, & |t|\le a,\\ 0, & |t|>a;\end{cases}\ a\ge 0.$

7. Обчислити наближено інтеграли $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx,\ \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2+1}dx,\ \int\limits_0^{1}\frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}dx.$ Обрати $\varepsilon=10^{-9},\ n=1000;10000,$ використати рівномірне та нерівномірне розбиття, відповіді порівняти.

Д1. Використовуючи співвідношення

$$\frac{1}{1+x^2}=\int_0^{+\infty}e^{-y(1+x^2)}\,dy,\ x\in\mathbf{R},$$

обчислити *інтеграл Лапласа*

$$L(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,dx,\ \alpha\in\mathbf{R}.$$

Д2. Використовуючи співвідношення

$$\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-xy^2}\,dy,\ x>0,$$

обчислити *інтеграли Френеля*

$$I_1=\int_0^{+\infty}\sin x^2\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx,$$

$$I_2=\int_0^{+\infty}\cos x^2\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Д3. Обчислити інтеграли:

1) $\int_0^{+\infty}\frac{x-\sin x}{x^3}\,dx;$ 2) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{e^{x^2}\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2}.$

Д4. Обчислити наближено інтеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ – безпосередньо та попередньо проінтегрувавши частинами.

Б10

1. Для довільних чисел $a>0,\,b>0$ обчислити інтеграли:

1) $\int_0^{+\infty}\frac{\exp(-ax^2)-\exp(-bx^2)}{x}\,dx;$

2) $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\, dx;$

3) $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax^2 - \operatorname{arctg} bx^2}{x}\, dx;$

4) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax^2 - \sin bx^2}{x}\, dx;$

5) $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arcctg} ax - \operatorname{arcctg} bx}{x}\, dx;$

6) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin a\sqrt{x} - \sin b\sqrt{x}}{x}\, dx;$

7) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos a\sqrt{x} - \cos b\sqrt{x}}{x}\, dx;$

8) $\int_0^{+\infty} \frac{(ax+1)^{-3/2} - (bx+1)^{-3/2}}{x}\, dx;$

9) $\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{ax+1}} - \frac{1}{\sqrt{bx+1}}\right) \cdot \frac{dx}{x};$

10) $\int_0^{+\infty} \frac{(\operatorname{arctg} ax)^2 - (\operatorname{arctg} bx)^2}{x}\, dx.$

2. Довести, що інтеграл

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos \alpha x\, dx, \quad \alpha \in \mathbf{R},$$

задовольняє диференціальне рівняння

$$I'(\alpha) = -\frac{1}{2}\alpha I(\alpha), \quad \alpha \in \mathbf{R},$$

і обчислити його.

3. Обчислити інтеграли:

1) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2}\, dx,\ \alpha > \beta > 0;$

2) $\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\alpha x}}{x} \cdot e^{-x}\, dx,\ \alpha > 0;$

3) $\int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x}\, dx,\ n \in \mathbf{N},\ \alpha > 0;$

4) $\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2}\, dx,\ n \in \mathbf{N},\ \alpha > 0;$

5) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos x\, dx,\ \alpha > \beta > 0;$

6) $\int_0^{+\infty} x^\alpha \ln^n x\, dx,\ n \in \mathbf{N},\ \alpha > -1;$

7) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - \cos \beta x}{x^2}\, dx,\ \alpha > 0,\ \beta > 0;$

8) $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^3 dx,\ \alpha > 0.$

4. Обчислити інтеграли:

1) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x}\, dx,\ \alpha > \beta > 0;$

2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x}\, dx,\ \alpha > \beta > 0;$

3) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x}\, dx,\ \alpha > 0;$

4) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 \alpha x - \sin^4 \beta x}{x}\, dx,\ \alpha > \beta > 0;$

5) $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-(x^2+x)}\, dx;$

6) $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-(x^2-x)}\, dx.$

5. Зобразити інтегралом Фур'є функцію f. При яких значеннях t інтеграл Фур'є збігається до відповідного значення функції f?

1) $f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0; \end{cases}$

2) $f(t) = \begin{cases} 0, & |t| < 1, \\ t^{-2}, & |t| \geq 1; \end{cases}$

3) $f(t) = \begin{cases} \cos t, & |t| \leq \pi, \\ 0, & |t| > \pi. \end{cases}$

6. Знайти перетворення Фур'є функцій:

1) $f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases}$

2) $f(t) = (1 + t^2)^{-1},\ t \in \mathbf{R};$

3) $f(t) = e^{-a|t|},\ t \in \mathbf{R};\ a > 0.$

ЗАНЯТТЯ 11
ЕЙЛЕРОВІ ІНТЕГРАЛИ

Контрольні запитання

1. *Означення* Γ- *і* B-*функцій Ейлера.*
2. *Елементарні властивості ейлерових інтегралів: значення* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, $\Gamma(n)$, $n \in \mathbf{N}$; *функціональні рівняння для* Γ-*функції; зв'язок між* Γ- *і* B-*функціями.*
3. *Диференційовність* Γ- *і* B-*функцій Ейлера, формули для похідних.*
4. *Формула Вейєрштрасса для* Γ-*функції.*
5. *Розклад синуса у нескінченний добуток.*

А11

1. Обчислити інтеграл

$$\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2}\, dx, \quad n \in \mathbf{N}.$$

2. Нехай

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \exp(-x^\alpha)\, dx, \quad \alpha > 0.$$

1) Виразити функцію I через Γ-функцію Ейлера;
2) Знайти $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} I(\alpha)$.

3. Звести інтеграли до Γ-функції та обчислити їх:

1) $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^4 x\, dx$;
2) $\int_0^1 \sqrt{x - x^2}\, dx$;
3) $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt[\alpha]{1 - x^\alpha}}$, $\alpha > 1$.

4. При фіксованому $\beta > 0$ знайти значення α, при яких збігаються інтеграли. Виразити інтеграли через ейлерові та обчислити їх.

1) $\int_0^{+\infty} \dfrac{x^{\alpha-1}}{1 + x^\beta}\, dx$;
2) $\int_0^{+\infty} \dfrac{x^{\alpha-1}}{(1 + x)^\beta}\, dx$.

5. Виразити інтеграли через Γ-функцію та її похідні, обчислити їх:

1) $\int_0^{+\infty} \dfrac{x^{\alpha-1} \ln x}{1 + x}\, dx$, $0 < \alpha < 1$;
2) $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-ax} \ln x\, dx$, $a > 0$, $\alpha > -1$.

6. Довести рівність

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}.$$

7. Знайти інтеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{x^\beta}\,dx, \quad \alpha>0,\ 0<\beta<1,$$

використовуючи рівність

$$\frac{1}{x^\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^{+\infty} t^{\beta-1}e^{-xt}\,dx, \quad x>0,\ \beta>0.$$

Д1. Обчислити інтеграли $\int\limits_0^1 \ln\Gamma(x)\,dx, \quad \int\limits_0^1 \ln\Gamma(x)\cdot\sin\pi x\,dx.$

Д2. Для $a>0$ і $n\in\mathbf{N}$ знайти довжину дуги кривої

$$r^n = a^n\cos n\varphi, \quad |\varphi| \le \frac{\pi}{2n}.$$

Д3. Знайти площу, обмежену кривою

$$|x|^n+|y|^n=a^n, \quad n>0,\ a>0.$$

Д4. Використовуючи формулу Вейєрштрасса для Γ-функції, обчислити нескінченні добутки $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+\alpha_1)(n+\alpha_2)}{(n+\beta_1)(n+\beta_2)}$ при таких значеннях параметрів:

1) $\alpha_1=\alpha_2=1$, $\beta_1=\frac{1}{2}$, $\beta_2=\frac{3}{2}$;
2) $\alpha_1=\alpha_2=\frac{1}{2}$, $\beta_1=\frac{3}{4}$, $\beta_2=\frac{1}{4}$;
3) $\alpha_1=-\alpha_2=-\frac{1}{2}$, $\beta_1=-\beta_2=-\frac{3}{4}$;
4) $\alpha_1=3$, $\alpha_2=5$, $\beta_1=\frac{5}{2}$, $\beta_2=\frac{11}{2}$;
5) $\alpha_1=\frac{1}{2}$, $\alpha_2=\frac{3}{2}$, $\beta_1=\beta_2=1$.

Д5. Обчислити нескінченні добутки $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{\beta^2}{n^2}\right)$, якщо:

1) $\alpha = \frac{1}{3}, \beta = \frac{1}{6}$;
2) $\alpha = \frac{1}{4}, \beta = \frac{1}{3}$;
3) $\alpha = \frac{5}{4}, \beta = \frac{5}{6}$.

Б11

1. Визначити множину тих α, при яких збігаються інтеграли. Виразити інтеграли через Γ-функцію:

1) $\int_0^{+\infty} x^\alpha \exp(-x^\beta)\, dx$, $\beta > 0$;
2) $\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^\alpha dx$;
3) $\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{dx}{x^\alpha}$;
4) $\int_0^{+\infty} 2^{-x} x^\alpha\, dx$;
5) $\int_1^{+\infty} 3^{-x}(x-1)^\alpha\, dx$;
6) $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\alpha \exp(-x^4)\, dx$;
7) $\int_1^{+\infty} x(x^2-1)^\alpha \exp(-x^2)\, dx$;
8) $\int_1^{+\infty} (\ln x)^\alpha \cdot \frac{dx}{x^2}$;
9) $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-\sqrt{x}}\, dx$.

2. Довести рівність

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^4}\, dx \cdot \int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-x^4}\, dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

3. Визначити множину тих α, при яких збігаються інтеграли. Виразити інтеграли через Γ-функцію:

1) $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha\, dx}{(1+x^2)^2}$;
2) $\int_0^{+\infty} \frac{x\, dx}{2+3x^\alpha}$;
3) $\int_0^1 \frac{x^\alpha(1-x)}{(x+1)^{\alpha+3}}\, dx$;
4) $\int_1^2 \frac{(x-1)^\alpha(2-x)^2}{(x+2)^{\alpha+4}}\, dx$;
5) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\, dx,\ a > 0$;
6) $\int_0^1 (1-x^\alpha)^\beta\, dx,\ \beta > -1$;
7) $\int_0^1 x^2(1-x^\alpha)^\beta\, dx,\ \beta > -1$;
8) $\int_0^1 x^\alpha(1-x^3)\, dx$;
9) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x(1+x))^{3/4}}$;
10) $\int_{-1}^1 \frac{((1+x)^2(1-x)^2)^\alpha}{(1+x^2)^{2\alpha+1}}\, dx$.

4. Знайти площу фігури, обмеженої кривою

$$r^4 = \sin^3\varphi\cos\varphi, \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right].$$

5. Визначити множину тих α, при яких збігаються інтеграли. Обчислити інтеграли через Γ-функцію:

1) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^\alpha x\,dx$;

2) $\int_0^{\pi} \sin^\alpha x\,dx$;

3) $\int_0^{\pi} \dfrac{dx}{\sqrt{3-\cos x}}\,dx$ (заміна $\cos x = 1-2\sqrt{t}$);

4) $\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-x^2}\,dx$;

5) $\int_0^{+\infty} x e^{-x^3}\,dx$;

6) $\int_0^{+\infty} x^{-1/3} e^{-\sqrt[3]{x}}\,dx$;

7) $\int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2}\,dx$, $n \in \mathbf{N}$;

8) $\int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-(\sqrt{x})^3}\,dx$.

6. Виразити інтеграли через ейлерові та їх похідні:

1) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \ln x\,dx$;

2) $\int_0^{+\infty} \dfrac{x^{\alpha-1}\ln 2x}{1+x}\,dx$, $0<\alpha<1$;

3) $\int_0^{1} \ln(-\ln x)\,dx$;

4) $\int_0^{+\infty} \dfrac{x^{\alpha-1}\ln^2 x}{1+x}\,dx$, $\alpha > 0$;

5) $\int_0^{+\infty} \dfrac{x\ln x}{1+x^3}\,dx$;

6) $\int_0^{+\infty} \dfrac{\ln^2 x}{1+x^4}\,dx$;

7) $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-\beta x}\ln^2 x\,dx$, $\alpha > -1,\ \beta > 0$;

8) $\int_1^{+\infty} (\ln x)^\alpha \dfrac{\ln\ln x}{x^\alpha}\,dx$, $\alpha > -1$;

9) $\int_0^{+\infty} \dfrac{x^{\alpha-1}-x^{\beta-1}}{(1+x)\ln x}\,dx$ $0<\alpha<1,\ 0<\beta<1$;

10) $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\ln^3 x\,dx$, $\alpha > 0$.

7. Знайти інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x^\beta}\,dx, \quad \alpha\in\mathbf{R},\ 0<\beta<2,$$

використовуючи рівність

$$\tfrac{1}{x^\beta} = \tfrac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{+\infty} t^{\beta-1} e^{-xt}\,dx, \quad x>0,\ \beta>0.$$

8. Виразити інтеграли через ейлерові та їх похідні:

1) $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\ln x\,dx$, $\alpha>0,\ \beta>0$;

2) $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\ln(1-x)\,dx$, $\alpha>0,\ \beta>0$;

3) $\int_0^{\pi} \sin^\alpha x\ln(\sin x)\,dx$, $\alpha > -1$;

4) $\int_0^{\pi/2} \sin^\alpha x\cos^{2\alpha} x(\ln(\sin x)+2\ln(\cos x))\,dx$, $\alpha > -\frac{1}{2}$;

5) $\int_0^{\pi/2} \cos^\alpha x\ln(\cos x)\,dx$, $\alpha > -1$;

6) $\int_0^{+\infty} \dfrac{x^{\alpha-1}\ln x}{(1+x)^\beta}\,dx$, $\beta>\alpha>0$;

7) $\int_0^{+\infty} \dfrac{x^{\alpha-1}\ln x}{(a^2+x^2)^\beta}\,dx$, $2\beta>\alpha>0,\ a>0$;

8) $\int_0^{+\infty} \dfrac{x^{\alpha-1}\ln^2 x}{(1+x^3)^\beta}\,dx,\ 3\beta > \alpha > 0;$

9) $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\ln x \times \ln(1-x)\,dx,\ \alpha > 0,\ \beta > 0.$

9. Використовуючи розклад синуса у нескінченний добуток, розкласти у нескінченний добуток функції:

1) $\cos\pi\alpha,\ \alpha\in\mathbf{R};$

2) $\operatorname{tg}\pi\alpha,\ \alpha\neq n-\dfrac{1}{2},\ n\in\mathbf{Z}.$

ЗАНЯТТЯ 12
ВИМІРНІ ЗА ЖОРДАНОМ МНОЖИНИ. ПОДВІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

Контрольні запитання

1. *Означення циліндричної множини в* $\mathbf{R}^2$.
2. *Зведення інтеграла по циліндричній множині в* $\mathbf{R}^2$ *до повторного інтеграла.*

А12

1. Довести вимірність за Жорданом та обчислити міру множини $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1 + x_2 \leq 1\}$ в $\mathbf{R}^2$.
2. Які з цих множин є вимірними за Жорданом в $\mathbf{R}$: $(-1, 1)$, $\mathbf{N} \cap [-10, 10]$, $\mathbf{Q} \cap [0, 1]$?
3. Наближенням за Жорданом та методом Монте-Карло обчислити міри множин

$$\left\{(x_1, x_2) \mid x_1^4 + x_2^4 \leq 1\right\}$$

та

$$\left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1,\ x_1 + x_2 \leq x_3 \leq 2x_2 + 3x_3\right\}.$$

В першому методі обрати $n = 4, 6, 8$, в другому $n = 100, 1000, 10000$. В першому методі також обчислити помилку E.
4. Нехай A – вимірна за Жорданом множина в $\mathbf{R}^2$, f – неперервна обмежена функція на A. Звести інтеграл $\int_A f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$ до повторного всіма можливими способами.

1) $A = \{(x_1, x_2) |\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$;
2) $A = \{(x_1, x_2) |\ 1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$;
3) A – трикутник з вершинами у точках $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$;
4) $A = \{(x_1, x_2) |\ x_1^2 \leq x_2 \leq 1,\ x_1 \in [0, 1]\}$.

5. Обчислити інтеграли

1) $\int_{[-1,1]\times[0,2]} (x_1^2 x_2 + \sqrt{x_2})\, dx_1 dx_2$;
2) $\int_A \sin(x_1 + x_2)\, dx_1 dx_2$, $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1 + x_2 \leq 1\}$;
3) $\int_A \left(|x_1| \cos \frac{\pi x_2}{2}\right) dx_1 dx_2$, $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in [0, 1],\ x_1 \leq x_2 \leq 2x_1\}$;

4) $\int_A (x_1 + e^{x_2})\, dx_1 dx_2,\ ,\ A = \{(x_1, x_2) \mid x_2 \in [0,1],\ x_2 \le 3x_1,\ x_2 \le 3(1-x_1)\}$.

Б12

1. Довести вимірність за Жорданом та обчислити міру множини $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in [0,1],\ x_1 \le x_2 \le x_1 + 2\}$ в $\mathbf{R}^2$.
2. Які з цих множин є вимірними за Жорданом в $\mathbf{R}$: $[2,5],\ \mathbf{Z} \cap [-10,10],\ [0,1]$
bQ?
3. Довести вимірність за Жорданом множин

1) $A = \{(x_1, x_2) |\ 0 \le x_2 \le \ln x_1,\ 1 \le x_1 \le 2\}$;
2) $A = \{(x_1, x_2) |\ |x_2| \le \operatorname{arctg} x_1,\ 0 \le x_1 \le 1\}$;
3) $A = \{(x_1, x_2) |\ 0 \le x_2 \le e^{x_1},\ 0 \le x_1 \le 1\}$;
4) $A = \{(x_1, x_2) |\ |x_2| \le \sqrt[3]{x_1},\ 1 \le x_1 \le 2\}$;
5) $A = \{(x_1, x_2) |\ 0 \le x_2 \le \sqrt[4]{x_1},\ 0 \le x_1 \le 1\}$;
6) $A = \{(x_1, x_2) |\ 0 \le x_2 \le \cos x_1,\ 0 \le x_1 \le \frac{\pi}{2}\}$;
7) $A = \{(x_1, x_2) |\ |x_2| \le x_1^2,\ -1 \le x_1 \le 1\}$;
8) $A = \{(x_1, x_2) |\ \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \le 1\}$;
9) $A = \{(x_1, x_2, x_3) |\, x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_1 + x_2 \le 1,\ x_3 \in [0,1]\}$;
10) $A = \{(x_1, x_2, x_3) |\ 0 \le x_3 \le \ln x_1,\ x_1, x_2) \in [1,2] \times [0,1]\}$.

4. Обчислити інтеграли

1) $\int_{[0,1]\times[1,2]} (x_1 + x_2^3)\, dx_1 dx_2$;
2) $\int_{[0,1]\times[2,3]} x_1 \sin(\pi x_2)\, dx_1 dx_2$;
3) $\int_{[0,2\pi]\times[0,2]} x_2^2 \sin^2 x_1\, dx_1 dx_2$;
4) $\int_{[1,2]\times[3,4]} (x_1 + x_2)^{-2}\, dx_1 dx_2$;
5) $\int_{[0,1]^2} (x_1 \operatorname{sh} x_2 + \operatorname{ch} x_1)\, dx_1 dx_2$;
6) $\int_{[-1,1]\times[-2,2]} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\, dx_1 dx_2$, де $f \in C^{(2)}(\mathbf{R}^2)$;
7) $\int_{[0,1]^3} x_1 x_2^2 x_3^3\, dx_1 dx_2 dx_3$;
8) $\int_{[0,1]\times[0,2]\times[0,3]} (x_1 + x_2 + x_3)\, dx_1 dx_2 dx_3$;
9) $\int_{[0,1]\times[1,2]\times[2,3]} (x_1 \sqrt{x_3} \cos x_2 + x_1 x_2)\, dx_1 dx_2 dx_3$;
10) $\int_{[0,1]^n} (x_1 + x_2^3 + x_3^7 + \ldots + x_n^{2^n - 1})\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n$.

5. Нехай A – вимірна за Жорданом множина в $\mathbf{R}^2$, f – неперервна обмежена функція на A. Звести інтеграл $\int_A f(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2$ до повторного всіма можливими способами.

1) A – трикутник з вершинами у точках $(0,0)$, $(1,2)$, $(1,-2)$;
2) A – трапеція з вершинами у точках $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$, $(0,1)$;
3) $A = \{(x_1, x_2)|\ x_1^2 + x_2^2 \le x_1\}$;
4) A обмежена кубічними параболами $x_2 = x_1^3$, $x_1 = x_2^3$;
5) A – паралелограм зі сторонами $x_2 = x_1$, $x_2 = x_1 + 3$, $x_2 = -2x_1 + 1$, $x_2 = -2x_1 + 5$;
6) A обмежена гіперболою $x_2^2 - x_1^2 = 1$ і колом $x_1^2 + x_2^2 = 4$;
7) A – трикутник зі сторонами $x_2 = x_1$, $x_2 = 2x_1$, $x_1 + x_2 = 6$;
8) $A = \{(x_1, x_2)|\ x_2 \ge x_1^2,\ x_2 \le 4 - x_1^2\}$;
9) $A = \{(x_1, x_2)|\ x_2 - 2x_1 \le 0,\ 2x_2 - x_1 \ge 0,\ x_1 x_2 \le 2\}$;
10) $A = \{(x_1, x_2)|\ x_1 + x_2 \le 1,\ x_1 - x_2 \le 1,\ x_1 \ge 0\}$.

6. Для функції $f \in C(\mathbf{R}^2)$ змінити порядок інтегрування в інтегралах

1) $\int_0^4 \big(\int_{x_1}^{2x_1} f(x_1, x_2)\,dx_2\big)dx_1$;
2) $\int_{-6}^2 \big(\int_{\frac{x_1}{4}-1}^{2-x_1} f(x_1, x_2)\,dx_2\big)dx_1$;
3) $\int_1^e \big(\int_0^{\ln x_1} f(x_1, x_2)\,dx_2\big)dx_1$;
4) $\int_{-1}^1 \big(\int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{1-x_1^2} f(x_1, x_2)\,dx_2\big)dx_1$;
5) $\int_1^2 \big(\int_{2-x_1}^{\sqrt{2x_1-x_1^2}} f(x_1, x_2)\,dx_2\big)dx_1$;
6) $\int_0^{2\pi} \big(\int_0^{\sin x_1} f(x_1, x_2)\,dx_2\big)dx_1$;
7) $\int_{-2}^2 \big(\int_{-\sqrt{2-x_1^2/2}}^{\sqrt{2-x_1^2/2}} f(x_1, x_2)\,dx_2\big)dx_1$;
8) $\int_0^1 \big(\int_{x_2}^{\sqrt{x_2}} f(x_1, x_2)\,dx_1\big)dx_2$;
9) $\int_0^1 \big(\int_0^{x_1^{2/3}} f(x_1, x_2)\,dx_2\big)dx_1 + \int_1^2 \big(\int_0^{1-\sqrt{4x_1-x_1^2-3}} f(x_1, x_2)\,dx_2\big)dx_1$;
10) $\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \big(\int_{-1}^{\sin x_1} f(x_1, x_2)\,dx_2\big)dx_1 + \int_{\pi/2}^{5\pi/2} \big(\int_{\sin x_1}^{1} f(x_1, x_2)\,dx_2\big)dx_1$.

7. Знайти площі фігур, обмежених лініями

1) $(x_1 - x_2)^2 + x_1^2 = 1$;
2) $x_1 = x_2,\ x_1 = 2x_2,\ x_1 + x_2 = 4,\ x_1 + 3x_2 = 4$;
3) $x_1 x_2 = 1,\ x_1 x_2 = 4,\ x_2 = 3,\ x_2 = 5$;
4) $x_1 = x_2,\ x_2 = 5x_1,\ x_1 = 1$;
5) $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 1,\ x_1 + x_2 = 1$;
6) $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} = 1,\ \{a, b\} \subset (0, +\infty)$;
7) $x_2^2 = 10x_1 + 25,\ x_2^2 = -6x_1 + 9$;
8) $x_1^2 x_2 = 4,\ x_1^2 x_2 = 9,\ x_2 = 1,\ x_2 = 2$;
9) $\cos x_1 - x_2 + 1 = 0,\ x_1 = 0,\ x_1 = \pi,\ x_2 = 0$.

ЗАНЯТТЯ 13
ЗАМІНА ЗМІННОЇ В ПОДВІЙНОМУ ІНТЕГРАЛІ

Контрольні запитання

1. *Формула переходу до полярних координат.*
2. *Формула переходу до узагальнених полярних координат.*
3. *Загальна формула заміни змінних у подвійному інтегралі.*

A13

1. Нехай $A \subset \mathbf{R}^2$, $f \in C(A)$. В інтегралі $\int_A f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$ перейти до полярних координат, поклавши $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$. Звести одержаний інтеграл до повторного всіма можливими способами:

1) $A = \{(x_1, x_2) \mid 1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 4\}$;

2) $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 2x_1\}$.

2. Нехай $f \in C([0, +\infty))$. Перейти до полярних координат, поклавши $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$. Звести одержаний інтеграл до повторного всіма можливими способами:

1) $\int\limits_0^2 \left(\int\limits_{x_1}^{\sqrt{3}x_1} f\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)\, dx_2 \right) dx_1$;

2) $\int\limits_{\{(x_1,x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1\}} f\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)\, dx_1 dx_2$.

3. Обчислити інтеграл, перейшовши до полярних координат:

$$\int\limits_A \sin\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)\, dx_1 dx_2, \text{ де } A = \{(x_1, x_2) \mid \pi^2 \le x_1^2 + x_2^2 \le 4\pi^2\}.$$

4. Перейшовши до полярних координат, обчислити площу фігури

$$A = \{(x_1, x_2) \mid (x_1^2 + x_2^2)^2 \le 2(x_1^2 - x_2^2),\ \ x_1^2 + x_2^2 \ge 1\}.$$

5. Запровадити узагальнені полярні координати та обчислити якобіан переходу до цих координат. Обчислити площу фігур, обмежених лініями:

1) $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} = \dfrac{x_1}{c} + \dfrac{x_2}{d}, \quad \{a, b, c, d\} \subset (0, +\infty)$;

2) $\sqrt[4]{\dfrac{x_1}{a}} + \sqrt[4]{\dfrac{x_2}{b}} = 1, \quad x_1 = 0,\ x_2 = 0;\ \{a, b\} \subset (0, +\infty)$.

6. Обчислити площі фігур, що лежать у вказаній частині площини $\mathbf{R}^2$ і обмежені лініями:

1) $x_1x_2 = 1,\ x_1x_2 = 2,\ x_2 = x_1,\ x_2 = 2x_1,\ x_1 > 0,\ x_2 > 0;$
2) $x_2^2 = 2x_1,\ x_2^2 = 4x_1,\ x_1^2 = 6x_2,\ x_1^2 = 8x_2.$

7. Наближенням за Жорданом та методом Монте-Карло обчислити інтеграл $\int\limits_A \sin(e^{x_1-x_2})dx_1dx_2,\ A = \left\{(x_1,x_2) \mid x_1^4 + x_2^4 \le 1\right\}$. В першому методі обрати $n = 4, 6, 8$, в другому $n = 100, 1000, 10000$. В першому методі також обчислити помилку E.

Д1. Нехай $A = \{(x_1,x_2) |\ 0 \le x_1 \le x_2 \le 1\}$, $f \in C([0,1])$, $n \in \mathbf{N}$. Звести до інтеграла Рімана подвійний інтеграл

$$\int_A f(x_1)(x_2 - x_1)^n\, dx_1dx_2.$$

Д2. Нехай $f \in C(\mathbf{R}^2)$, $a \in (0, 2\pi)$. Змінити порядок інтегрування, вважаючи r та φ полярними координатами:

$$\int\limits_0^a \Big(\int\limits_0^{\varphi} f(r,\varphi)\, dr\Big) d\varphi.$$

Б13

1. Нехай $A \subset \mathbf{R}^2$, $f \in C(A)$. В інтегралі $\int_A f(x_1,x_2)\, dx_1dx_2$ перейти до полярних координат, поклавши $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$. Звести одержаний інтеграл до повторного всіма можливими способами.

1) $A = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le \pi^2\};$
2) $A = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 4,\ x_1 \le x_2\};$
3) $A = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ x_1x_2 \ge 0\};$
4) $A = \{(x_1,x_2) \mid 4 \le x_1^2 + x_2^2 \le 9,\ x_1x_2 \le 0\};$
5) $A = \{(x_1,x_2) \mid x_1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 2x_1\};$
6) $A = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 9,\ x_1 \le 2x_2\};$
7) $A = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ |x_1| \le x_2\};$
8) $A = \{(x_1,x_2) \mid 1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 4,\ |x_1| \le |x_2|\};$
9) $A = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 4x_2\};$
10) $A = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 9,\ x_1 + x_2 \ge 0\}.$

2. Нехай $f \in C(\mathbf{R}^2)$. Змінити порядок інтегрування, вважаючи r та φ полярними координатами:

1) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big(\int_0^{2\cos\varphi} f(r,\varphi)\,dr\Big)d\varphi$;

2) $\int_0^{\pi/2}\Big(\int_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} f(r,\varphi)\,dr\Big)d\varphi$;

3) $\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\Big(\int_{\frac{1}{\sin\varphi}}^{\sqrt{2}} f(r,\varphi)\,dr\Big)d\varphi$;

4) $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\Big(\int_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} f(r,\varphi)\,dr\Big)d\varphi$;

5) $\int_{\pi/2}^{\pi}\Big(\int_0^{\frac{1}{\sin\varphi-\cos\varphi}} f(r,\varphi)\,dr\Big)d\varphi$;

6) $\int_{\pi/2}^{\pi}\Big(\int_{\frac{1}{\sin\varphi-\cos\varphi}}^{2} f(r,\varphi)\,dr\Big)d\varphi$;

7) $\int_0^{\pi/2}\Big(\int_0^{\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}} f(r,\varphi)\,dr\Big)d\varphi$;

8) $\int_0^{\pi/2}\Big(\int_{\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}}^{1} f(r,\varphi)\,dr\Big)d\varphi$;

9) $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\Big(\int_{\frac{1}{\sqrt{2}\sin\varphi}}^{1} f(r,\varphi)\,dr\Big)d\varphi$;

10) $\int_0^{\pi/3}\Big(\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2\sin(\pi/3+\varphi)}} f(r,\varphi)\,dr\Big)d\varphi$.

3. Нехай $f \in C(\mathbf{R})$. Перейти до полярних координат і замінити інтеграли однократними:

1) $\int_A f(\sqrt{x_1^2+x_2^2})\,dx_1dx_2, \quad A=\{(x_1,x_2)\mid |x_2|\le|x_1|\le 1\}$;
2) $\int_A f(x_2/x_1)\,dx_1dx_2, \quad A=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\le x_1-\frac{5}{36}\}$;
3) $\int_A f(\sqrt{x_1^2+x_2^2})\,dx_1dx_2, \quad A=\{(x_1,x_2)\mid 1\le x_1^2+x_2^2\le 4\}$;
4) $\int_A f(\sqrt[3]{x_1^2+x_2^2})\,dx_1dx_2, \quad A=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\le 4,\ x_1\le x_2\}$;
5) $\int_A f(\sqrt[4]{x_1^2+x_2^2})\,dx_1dx_2, \quad A=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\le x_2\}$.

4. Обчислити інтеграли:

1) $\int_A \ln(1+x_1^2+x_2^2)\,dx_1dx_2, \quad A=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\le 1,\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\}$;
2) $\int_A \cos(x_1^2+x_2^2)\,dx_1dx_2, \quad A=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\le 1,\ x_1\ge 0,\ x_2\le 0\}$;
3) $\int_A (1-2x_1-3x_2)\,dx_1dx_2, \quad A=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\le 4\}$;
4) $\int_A \sqrt{4-x_1^2-x_2^2}\,dx_1dx_2, \quad A=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\le 2x_1\}$;
5) $\int_A \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}\,dx_1dx_2$,
$A=\{(x_1,x_2)\mid 1\le x_1^2+x_2^2\le 9,\ \frac{x_1}{\sqrt{3}}\le x_2\le\sqrt{3}x_1\}$;
6) $\int_A \left(\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}\right)^2 dx_1dx_2, \quad A=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\le 1,\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\}$;
7) $\int_A \exp(x_1^2+x_2^2)\,dx_1dx_2, \quad A=\{(x_1,x_2)\mid 1\le x_1^2+x_2^2\le 4\}$;
8) $\int_A \sin(x_1^2+x_2^2)\,dx_1dx_2, \quad A=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\le 4,\ |x_1|\le|x_2|\}$;
9) $\int_A \sqrt[3]{x_1^2+x_2^2}\,dx_1dx_2, \quad A=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\le 1,\ x_1+x_2\ge 0\}$;
10) $\int_A \operatorname{sh}(x_1^2+x_2^2)\,dx_1dx_2, \quad A=\{(x_1,x_2)\mid 4\le x_1^2+x_2^2\le 9\}$.

5. Обчислити площу фігур, обмежених лініями:

1) $(x_1^2+x_2^2)^2=x_1^2x_2$;
2) $(x_1^2+x_2^2)^3=x_1x_2^4$;
3) $x_1^2+x_2^2=1,\ x_1^2+x_2^2=2x_1$;
4) $(x_1^2+x_2^2)^2=x_1^3-3x_1x_2^2$;
5) $x_1^2+x_2^2=4,\ \frac{x_2}{2}\le x_1\le 2x_2$;
6) $x_1^2+x_2^2=1,\ x_1^2+x_2^2=4,$ $x_1\ge 1$;
7) $x_1^2+x_2^2=1,\ x_1^2+x_2^2=4,$ $x_2\ge -1$;
8) $x_1^2+x_2^2=1,\ x_1+x_2\ge 1$;
9) $x_1^2+x_2^2=2\sqrt{2}x_1-1,$ $x_1=x_2,\ x_1=-x_2$;
10) $x_1^2+x_2^2=4x_1-3,\ x_1=0,$ $x_2=-1,\ x_2=1.$

6. Обчислити площі фігур, обмежених лініями:

1) $x_1+x_2=1,\ x_1+x_2=2,\ x_2=2x_1,\ x_2=3x_1$;
2) $x_1^2=x_2,\ x_1^2=2x_2,\ x_1^3=x_2^2,\ x_1^3=2x_2^2$;
3) $x_2=x_1^5,\ x_2=2x_1^5,\ x_2=x_1^6,\ x_2=2x_1^6$;
4) $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=1,\ \sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=2,\ x_1=x_2,\ 4x_1=x_2$;
5) $\sqrt[3]{x_1^2}+\sqrt[3]{x_2^2}=1,\ \sqrt[3]{x_1^2}+\sqrt[3]{x_2^2}=4,\ x_1=x_2,\ 8x_1=x_2$;
6) $x_2=\sqrt{x_1},\ x_2=2\sqrt{x_1},\ x_1+x_2=1,\ x_1+x_2=2$;
7) $x_2=x_1^3,\ x_2=5x_1^3,\ x_2=x_1^2,\ x_2=2x_1^2$;
8) $x_2=x_1\sqrt{x_1},\ x_2=2x_1\sqrt{x_1},\ x_2=2x_1,\ x_2=\frac{1}{2}x_1$;
9) $x_2=7x_1^7,\ x_2=9x_1^7,\ x_2=7x_1^9,\ x_2=9x_1^9$;
10) $x_1x_2=4,\ x_1x_2=8,\ x_1=2x_2,\ x_1=\frac{1}{2}x_2.$

7. Обчислити площі фігур, обмежених лініями, через подвійний інтеграл по брусу у відповідній системі координат:

1) $x_1+x_2=2,\ x_1+x_2=3,\ x_1-2x_2=0,\ x_1-2x_2=1$;
2) $x_1-x_2=3,\ x_1-x_2=4,\ x_1+2x_2=1,\ x_1+2x_2=2$;
3) $6x_1+7x_2=3,\ 6x_1+8x_2=2,\ 5x_1+7x_2=4,\ 6x_1+8x_2=1$;
4) $x_1-3x_2=5,\ x_2-3x_1=6,\ x_1-3x_2=6,\ x_2-3x_1=5$;
5) $x_1+\pi x_2=3,\ \pi x_1+x_2=4,\ x_1+\pi x_2=5,\ \pi x_1+x_2=6$;
6) $6x_1+7x_2=4,\ 7x_1+8x_2=5,\ 6x_1+7x_2=6,\ 7x_1+8x_2=6$;
7) $2x_1+3x_2=1,\ 2x_1+3x_2=2,\ x_1=2x_2,\ x_2=2x_1$;
8) $x_1+2x_2=1,\ x_1+2x_2=3,\ x_1=3x_2,\ x_2=3x_1$;
9) $x_1+x_2=1,\ x_1+x_2=-1,\ x_1=2x_2,\ x_2=2x_1$;
10) $5x_1+x_2=2,\ 5x_1+x_2=3,\ x_1+5x_2=1,\ x_1+5x_2=2.$

ЗАНЯТТЯ 14
ПОТРІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

Контрольне запитання

1. *Зведення інтеграла по циліндричній множині в $\mathbf{R}^3$ до повторного інтеграла.*

А14

1. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$x_3 = x_1^2 + x_2^2, \quad x_2 = x_1^2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0.$$

2. Обчислити інтеграли:

1) $\displaystyle\int_C \frac{dx_1 dx_2 dx_3}{(2 + x_1 + x_2 + x_3)^3}$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1 + x_2 + x_3 = 2,\, x_i = 0,\ i = 1, 2, 3$;
2) $\int_C x_1 x_2^2 x_3^3 \, dx_1 dx_2 dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_3 = x_1 x_2,\ x_2 = x_1,\ x_1 = 1,\, x_3 = 0,\, x_1 \geq x_2,\, x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3$;
3) $\int_C x_1 x_2 x_3 \, dx_1 dx_2 dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\, x_i = 0,\ i = 1, 2, 3,\, x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3$;
4) $\int_C x_1 \, dx_1 dx_2 dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_2 = 1,\, x_1 + x_3 = 2,\, x_i = 0,\, i = 1, 2, 3$;
5) $\int_C (1 + 3x_1 x_2 x_3 + x_1^2 x_2^2 x_3^2) e^{x_1 x_2 x_3} \, dx_1 dx_2 dx_3$, де $C = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

3. Нехай $f \in C(\mathbf{R}^3)$. Різними можливими способами розставити межі інтегрування в інтегралах:

1) $\int_{-1}^{1} \Big(\int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} \Big(\int_{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}^{1} f(x_1, x_2, x_3) \, dx_3 \Big) dx_2 \Big) dx_1$;
2) $\int_0^1 \Big(\int_0^{1-x_1} \Big(\int_0^{x_1+x_2} f(x_1, x_2, x_3) \, dx_3 \Big) dx_2 \Big) dx_1$.

4. Нехай $f \in C([0, 1])$. Замінити інтеграл однократним

$$\int_0^1 \Big(\int_0^{x_1} \Big(\int_0^{x_2} f(x_3) \, dx_3 \Big) dx_2 \Big) dx_1.$$

5. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

1) $x_3 = x_1^2 + x_2^2$, $x_3 = 2(x_1^2 + x_2^2)$, $x_1 = x_2$, $x_2 = x_1^2$;
2) $6x_3 = x_1^2 + x_2^2$, $x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Д1. Обчислити m-кратні інтеграли:

1) $\int_{[0,1]^m} (x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^2 \, dx_1 dx_2 \ldots dx_m$;
2) $\int_A dx_1 dx_2 \ldots dx_m$, де A – m-вимірний симплекс, $A = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_m \le a,\ x_k \ge 0,\ k = 1, 2, \ldots, m\}$;
3) $\int_A \sqrt{x_1 + x_2 + \ldots + x_m} \, dx_1 dx_2 \ldots dx_m$, де A – m-вимірний симплекс, $A = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_m \le a,\ x_k \ge 0,\ k = 1, 2, \ldots, m\}$;

Д2. Обчислити m-кратні інтеграли:

1) $\int_{[0,1]^m} (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2) \, dx_1 dx_2 \ldots dx_m$;
2) $\int_{[0,1]\times[0,1]\times[0,2]^{m-2}} (x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_m^3) \, dx_1 dx_2 \ldots dx_m$;
3) $\int_{[0,\pi]^m} \sin(x_1 + x_2 + \ldots + x_m) \, dx_1 dx_2 \ldots dx_m$;
4) $\int_{[-\pi,\pi]^m} \cos^2(x_1 + x_2 + \ldots + x_m) \, dx_1 dx_2 \ldots dx_m$;
5) $\int_{[0,1]\times[0,2]^{m-1}} (x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \ldots + x_m^m) \, dx_1 dx_2 \ldots dx_m$;
6) $\int_{[0,1]\times[0,2]\times[0,1]^{m-2}} (x_1 - x_2 + x_3 - \ldots + (-1)^{m+1} x_m) \, dx_1 dx_2 \ldots dx_m$;
7) $\int_{[0,1]^m} (e^{x_1 - x_2} + e^{x_2 - x_3} + \ldots + e^{x_{m-1} - x_m} + e^{x_m - x_1}) \, dx_1 dx_2 \ldots dx_m$;
8) $\int_{[0,\pi]^m} (\sin x_1 + \sin 2x_2 + \ldots + \sin m x_m) \, dx_1 dx_2 \ldots dx_m$;
9) $\int_{[-\pi,\pi]^m} \left(\cos x_1 + \cos \frac{x_2}{2} + \ldots + \cos \frac{x_m}{m}\right) \, dx_1 dx_2 \ldots dx_m$;
10) $\int_A x_1 x_2 \ldots x_m \, dx_1 dx_2 \ldots dx_m$, де $A = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid x_1 + x_2 + \ldots + +x_m \le 1,\ x_k \ge 0,\ k = 1, 2, \ldots, m\}$.

Д3. Для функції $f \in C([0, +\infty))$ довести рівність

$$\int_0^t \Big(\int_0^{x_1} \Big(\int_0^{x_2} \Big(\ldots \Big(\int_0^{x_{m-1}} f(x_1) f(x_2) \ldots f(x_m) \, dx_m \Big) \ldots \Big) dx_3 \Big) dx_2 \Big) dx_1 = \frac{1}{m!} \left(\int_0^t f(x) \, dx \right)^m, \quad t \ge 0.$$

Вказівка. Показати, що обидві частини рівності є розв'язком тієї самої задачі Коші.

Б14

1. Зобразити одне з можливих тіл, об'єм якого дорівнює наведеному інтегралу. Виразити цей об'єм через потрійний інтеграл.

1) $\int_A (x_1 + x_2)\,dx_1 dx_2$,
$A = \{(x_1, x_2) \mid 0 \le x_1 + x_2 \le 2,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\}$;
2) $\int_A \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,dx_1 dx_2$, $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le x_2\}$;
3) $\int_A (x_1^2 + x_2^2)\,dx_1 dx_2$, $A = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| + |x_2| \le 2\}$;
4) $\int_A \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,dx_1 dx_2$, $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 4\}$;
5) $\int_A 2\,dx_1 dx_2$, $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\}$;
6) $\int_A (1 - x_1^2 - x_2^2)\,dx_1 dx_2$, $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$;
7) $\int_A (1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2})\,dx_1 dx_2$,
$A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0\}$;
8) $\int_A (1 - x_1 - x_3)\,dx_1 dx_3$,
$A = \{(x_1, x_3) \mid 0 \le x_1 + x_3 \le 1,\ x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0\}$;
9) $\int_A \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,dx_1 dx_2$,
$A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ 0 \le x_1 \le x_2\}$;
10) $\int_A \sin\left(\pi\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)\,dx_1 dx_2$,
$A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$.

2. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

1) $x_3 = 1 + x_1 + x_2,\ x_3 = 0,\ x_1 + x_2 = 1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 0$;
2) $x_1 + x_2 + x_3 = 2,\ x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_i = 0,\ i = 1, 2, 3$;
3) $x_3 = \cos x_1 \cos x_2,\ x_3 = 0,\ |x_1 + x_2| \le \frac{\pi}{2},\ |x_1 - x_2| \le \frac{\pi}{2}$;
4) $x_3 = x_1 x_2,\ x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ x_3 = 0$;
5) $x_3 = x_1^2 + x_2^2 + 1,\ x_1 = 4,\ x_2 = 4,\ x_i = 0,\ i = 1, 2, 3$;
6) $3x_1 + x_2 = 6,\ 3x_1 + 2x_2 = 12,\ x_1 + x_2 + x_3 = 6,$
$x_2 = 0,\ x_3 = 0$;
7) $x_3 = x_1^2 + x_2^2,\ x_1 + x_2 = 1,\ x_i = 0,\ i = 1, 2, 3$;
8) $x_3 = x_1^2 + x_2^2,\ x_3 = 0,\ x_2 = 1,\ x_2 = 2x_1,\ x_2 = 6 - x_1$;
9) $x_2 = \sqrt{x_1},\ x_2 = 2\sqrt{x_1},\ x_1 + x_3 = 6,\ x_3 = 0$;
10) $x_3 = 9 - x_2^2,\ 3x_1 + 4x_2 = 12,\ x_i = 0,\ i = 1, 2, 3$.

3. Обчислити інтеграли:

1) $\int_C x_1 x_2 x_3\,dx_1 dx_2 dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями
$x_1^2 + x_2^2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_3 = 1$;

2) $\int_C x_3\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $|x_1|+|x_2|=1$, $x_3=0$, $x_3=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$;
3) $\int_C x_1x_2\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $|x_1|+|x_2|=1$, $x_3=0$, $x_3=x_1^2+x_2^2$;
4) $\int_C(x_1+x_2)\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1+x_3=1$, $x_1+x_3=2$, $x_1+x_2+x_3=1$, $x_i=0$, $i=1,2,3$;
5) $\int_C x_1x_3\,dx_1dx_2dx_3$, де $C=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1^2+x_2^2\le 1,\ 0\le x_1\le x_2,\ 0\le x_3\le\sqrt{x_1^2+x_2^2}\}$;
6) $\int_C(1+x_1)^{-1}\,dx_1dx_2dx_3$, де $C=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1^2+x_2^2\le 1,\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ 0\le x_3\le x_1x_2,\}$;
7) $\int_C(x_2+x_3)\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2=1$, $x_1=x_2$, $x_3=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, $x_1=0$, $x_3=0$;
8) $\int_C(x_1x_3)^3\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_3=\sqrt[4]{x_1x_2}$, $x_1=x_2$, $x_1=1$, $x_i=0$, $i=1,2,3$;
9) $\int_C(x_1-x_3)\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_3=2\sqrt{x_1x_2}$, $x_1=x_2$, $x_1=1$, $x_i=0$, $i=1,2,3$;
10) $\int_C(1+x_1+x_2+x_3)^{-2}\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями
$x_1+x_2+x_3=1$, $x_i=0$, $i=1,2,3$.

4. Нехай $f\in C(\mathbf{R}^3)$. Різними можливими способами розставити межі інтегрування в інтегралах:

1) $\int_0^1\Big(\int_0^1\Big(\int_0^{x_1^2+x_2^2} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1$;
2) $\int_0^1\Big(\int_0^{1-x_1}\Big(\int_0^{x_2} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1$;
3) $\int_0^1\Big(\int_0^{x_1}\Big(\int_0^{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1$;
4) $\int_{-2}^2\Big(\int_0^{\sqrt{4-x_1^2}}\Big(\int_1^2 f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1$;
5) $\int_0^1\Big(\int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^0\Big(\int_0^{1-\sqrt{x_1^2+x_2^2}} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1$;
6) $\int_{-1}^1\Big(\int_0^{\sqrt{1-x_1^2}}\Big(\int_{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}^{2\sqrt{x_1^2+x_2^2}} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1$;
7) $\int_0^1\Big(\int_0^1\Big(\int_0^{x_1+x_2+1} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1$;
8) $\int_{-1}^1\Big(\int_{-1}^1\Big(\int_0^{x_1+x_2+2} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1$;
9) $\int_0^1\Big(\int_0^{x_1}\Big(\int_0^{x_1^2+x_2^2} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1$;

10) $\int_0^1 \left(\int_{x_1}^1 \left(\int_0^{x_1+x_2} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_3\right) dx_2\right) dx_1.$

5. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

1) $x_3 = x_1 + x_2,\ x_3 = x_1 x_2,\ x_1 + x_2 = 1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 0;$
2) $x_1^2 + x_3^2 = 1,\ x_1 + x_2 = \pm 1,\ x_1 - x_2 = \pm 1;$
3) $x_3 = 1 - x_1^2 - x_2^2,\ x_3 = 1 - x_1 - x_2,\ x_i = 0,\ i = 1, 2, 3;$
4) $x_3 = 6 - x_1^2 - x_2^2,\ x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2};$
5) $x_3 = 4 - x_2^2,\ x_3 = x_2^2 + 2,\ x_1 = -1,\ x_1 = 2;$
6) $x_3 = x_1^2 + x_2^2,\ x_3 = x_1^2 + 2x_2^2,\ x_2 = x_1,\ x_2 = 2x_1,\ x_1 = 1;$
7) $x_3 = x_1^2 + x_2^2,\ x_3 = 2(x_1^2 + x_2^2),\ x_2 = x_1^2,\ x_2 = x_1^3;$
8) $x_3 = \ln(x_1 + 2),\ x_3 = \ln(6 - x_1),\ x_1 = 0,\ x_1 + x_2 = 2,\ x_1 - x_2 = 2;$
9) $x_3 = x_1^2 + x_2^2,\ x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2};$
10) $x_3 = x_1^2 + x_2^2,\ x_3 = 2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$

ЗАНЯТТЯ 15
ФОРМУЛА ЗАМІНИ ЗМІННИХ У ПОТРІЙНОМУ ІНТЕГРАЛІ

Контрольні запитання

1. *Формули переходу до циліндричних та сферичних координат.*
2. *Загальна формула заміни змінних у потрійному інтегралі.*

A15

1. Обчислити інтеграли, перейшовши до сферичних координат:

1) $\int_C \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнею $x_1^2+x_2^2+x_3^2=x_3$;

2) $\displaystyle\int_0^1 \Big(\int_0^{\sqrt{1-x_1^2}} \Big(\int_{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}^{\sqrt{2-x_1^2-x_2^2}} x_3^2\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1.$

2. Обчислити інтеграл

$$\int_C (x_1^2+x_2^2)\,dx_1dx_2dx_3,$$

де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2=2x_3$ та $x_3=2$, перейшовши до циліндричних координат.

3. Перейшовши до циліндричних координат, обчислити об'єм тіла, що лежить у області $\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1^2+x_2^2 \le x_3^2\}$ і обмежене поверхнею $x_1^2+x_2^2+x_3^2=2x_3$.

4. Зробивши відповідну заміну змінних, обчислити об'єм тіла, що обмежене поверхнями $x_3=x_1^2+x_2^2$, $x_3=2(x_1^2+x_2^2)$, $x_1x_2=1$, $x_1x_2=2$, $x_1=2x_2$, $2x_1=x_2$; $\quad x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$.

5. Обчислити об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1) $x_3=x_1^2+x_2^2,\ x_1^2+x_2^2=x_1,\ x_1^2+x_2^2=2x_1,\ x_3=0;$

2) $x_3^2=x_1x_2,\ x_1^2+x_2^2=4;$

3) $x_3=x_1^2+x_2^2,\ x_1x_2=1,\ x_1x_2=2,\ x_2=\frac{x_1}{2},\ x_2=2x_1,\ x_3=0.$

6. Знайти координати центра ваги однорідного тіла, обмеженого поверхнями $4x_1^2+4x_2^2=x_3^2$, $x_3=2$.

7. Наближено обчислити масу пластинки $\big\{(x_1,x_2) \mid x_1^4+x_2^4\le 1\big\}$ при щільності $\rho(x_1,x_2)=2-x_1^2-x_2^2$.

8. Наближено обчислити масу тіла $\big\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1^2+x_2^2\le 1,\ |x_3|\le 2\big\}$ при щільності $\rho(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

7. Наближено знайти центр мас тіла

$$\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 1, x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0\}$$

зі щільністю $\rho(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2$.

Д1. Наближено знайти центр мас тіла, заданого в сферичних координатах нерівностями $r^2(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi+\sin^4\psi+\cos^4\psi+2)\le 1$ зі щільністю $\rho(r,\varphi,\ \psi)=\varphi^2+\psi^2$.

Б15

1. Обчислити інтеграли, перейшовши до сферичних координат:

1) $\int_C (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнею $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_3=0$;

2) $\int_C \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями
$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$, $x_1=2x_2$, $x_2=2x_1$;

3) $\int_C \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\,dx_1dx_2dx_3$, де
$C=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 4,\ x_i\ge 0,\ i=1,2,3\}$;

4) $\int_C \exp((x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2})\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$, $x_1^2+x_2^2+x_3^2=4$;

5) $$\int_{-1}^{1}\Big(\int_0^{\sqrt{1-x_1^2}}\Big(\int_{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}^{\sqrt{4-x_1^2-x_2^2}} x_1x_3\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1;$$

6) $$\int_1^{1/\sqrt{2}}\Big(\int_{x_1}^{\sqrt{1-x_1^2}}\Big(\int_{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}^{\sqrt{4-x_1^2-x_2^2}} x_3^3\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1;$$

7) $$\int_{-1}^{0}\Big(\int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{0}\Big(\int_{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}^{3\sqrt{x_1^2+x_2^2}} x_1x_2x_3\,dx_3\Big)dx_2\Big)dx_1;$$

8) $\int_C \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_3=x_1^2+x_2^2$, $x_1=x_2$, $x_2=1$, $x_1=0$, $x_3=0$;

9) $\int_C \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_3=x_1^2+x_2^2$, $x_3=2(x_1^2+x_2^2)$, $x_1=\pm x_2$, $x_1^2+x_2^2=1$; $x_1\ge 0$;

10) $\int_C \sin(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}\,dx_1dx_2dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$, $x_1^2+x_2^2+x_3^2=4$; $\quad x_i\ge 0,\ i=1,2,3$.

2. Обчислити інтеграли, перейшовши до циліндричних координат:

1) $\int_C (x_1^2 + x_2^2)^2\, dx_1 dx_2 dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2 + x_2^2 = x_3$, $x_1^2 + x_2^2 = 2x_3$, $x_1^2 + x_2^2 = 1$;

2) $\int_C \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, dx_1 dx_2 dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2 + x_2^2 = x_3$, $x_3 = 3$, $|x_1| \le |x_2|$;

3) $\int_C dx_1 dx_2 dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 4$, $(x_1^2 + x_2^2)^2 = 4(x_1^2 - x_2^2)$;

4) $\int_C dx_1 dx_2 dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2 + x_2^2 = x_3$, $x_1 + x_3 = 2$;

5) $\int_C dx_1 dx_2 dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1$, $x_1^2 + x_2^2 + \left(x_3 - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$;

6) $\int_C dx_1 dx_2 dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 2x_3$, $x_1^2 + x_2^2 = x_3$;

7) $\displaystyle\int_0^2 \Big(\int_0^{\sqrt{2x_1 - x_1^2}} \Big(\int_0^3 x_3\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, dx_3\Big) dx_2\Big) dx_1$;

8) $\int_C \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, dx_1 dx_2 dx_3$, де тіло C обмежене поверхнями $x_1^2 + x_2^2 = 2x_1$, $x_3 = x_1^2 + x_2^2$, $x_3 = 0$;

9) $\int_C x_3\, dx_1 dx_2 dx_3$, де тіло C є перетин куль $\overline{B}((0,0,0),1)$ і $\overline{B}((0,0,1),1)$ у евклідовій метриці;

10) $\int_C \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, dx_1 dx_2 dx_3$, де тіло C є перетин куль $\overline{B}((0,0,0),2)$ і $\overline{B}((0,0,-2),2)$ у евклідовій метриці.

3. Обчислити об'єми тіл, обмежених поверхнями:

1) $x_3 = x_1 + x_2,\ x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_3 = 0;\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$;

2) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_1^2 + x_2^2 \ge |x_1|$;

3) $x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0,\ x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_3 = 0$;

4) $x_3 = \exp(-x_1^2 - x_2^2),\ x_3 = 0,\ x_1^2 + x_2^2 = 4$;

5) $x_3 = \cos\dfrac{\pi\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{2},\ x_3 = 0,\ x_2 = \dfrac{x_1}{\sqrt{3}},\ x_2 = \sqrt{3}x_1$;

6) $x_3 = x_1^2 + x_2^2,\ x_3 = x_1 + x_2$;

7) $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} - \dfrac{x_3^2}{c^2} = -1,\ \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} = 1;\ \{a,b,c\} \subset (0,+\infty)$;

8) $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} = x_3,\ \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} = \dfrac{x_1}{a} + \dfrac{x_2}{b};\ \{a,b\} \subset (0,+\infty)$;

9) $(x_1^2 + x_2^2)^2 + x_3 = 1,\ x_3 = 0;$

10) $x_3 = x_1 x_2,\ x_1^2 = x_2,\ x_1^2 = 2x_2,\ x_2^2 = x_1,\ x_2^2 = 2x_1,\ x_3 = 0.$

4. Знайти координати центрів ваги тіл, обмежених поверхнями:

1) $x_3^2 = x_1^2 + x_2^2, x_3 = 0, x_1^2 + x_2^2 = 1;$

2) $x_3 = x_1^2 + x_2^2, x_3 = 1; \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;$

3) $x_3 = x_1^2 + 9x_2^2, x_3 = 4; \quad x_1 \geq 0;$

4) $x_3^2 = 1 - x_1^2 - x_2^2, x_3 = 0;$

5) $x_3 = x_1^2 + x_2^2, x_3 = 1; \quad x_1 \leq x_2 \leq 2x_1;$

6) $x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = \pm 1; \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;$

7) $x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = \pm 1; \quad 0 \leq x_1 \leq x_2;$

8) $x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0, x_3 = 2; \quad x_1/2 \leq x_2 \leq 2x_1;$

9) $x_3^2 = x_1^2 + x_2^2, x_3^2 = 2(x_1^2 + x_2^2), x_1^2 + x_2^2 = 1;$

10) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1; \quad x_3 \geq 0.$

ЗАНЯТТЯ 16
НЕВЛАСНІ КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

Контрольні запитання

1. *Означення невласного кратного інтеграла від необмеженої функції.*
2. *Означення невласного кратного інтеграла по необмеженій множині.*

А16

1. Дослідити, при яких $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbf{R}$ збігається невласний інтеграл

$$\int_{\mathbf{R}^2} \frac{dx_1 dx_2}{(1+|x_1|^\alpha)(1+|x_2|^\beta)}.$$

2. Дослідити, при яких $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbf{R}$ збігається невласний інтеграл

$$\int_A \frac{dx_1 dx_2}{x_1^\alpha x_2^\beta}, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 x_2 \geq 1,\ x_1 \geq 1\},$$

і обчислити його.

3. Обчислити інтеграл

$$\int\limits_{\mathbf{R}^2} \exp(-x_1^2 - x_2^2) \cos(x_1^2 + x_2^2)\, dx_1 dx_2.$$

4. Нехай $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$, $f \in C(A)$ і $f(x_1, x_2) \neq 0$, $(x_1, x_2) \in A$. При яких $\alpha \in \mathbf{R}$ збігається невласний інтеграл

$$\int_A \frac{f(x_1, x_2)}{(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)^\alpha}\, dx_1 dx_2\,?$$

5. Дослідити на збіжність невласний інтеграл

$$\int_A \frac{dx_1 dx_2}{x_1^2 + x_2^2}, \text{ де } A = \{(x_1, x_2) \mid |x_2| \leq x_1^2 \leq 1\}.$$

6. Довести співвідношення:

1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\{(x_1,x_2) \mid\ |x_1| \leq n,\ |x_2| \leq n\}} \sin(x_1^2 + x_2^2)\, dx_1 dx_2 = \pi;$

2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\{(x_1,x_2) \mid\ x_1^2 + x_2^2 \leq 2\pi n\}} \sin(x_1^2 + x_2^2)\, dx_1 dx_2 = 0.$

Чи збігається інтеграл

$$\int\limits_{\mathbf{R}^2} \sin(x_1^2 + x_2^2)\, dx_1 dx_2 \ ?$$

Д1. Довести, що інтеграл

$$\int_{\{(x_1,x_2)\,|\ x_1\ge 1,\ x_2\ge 1\}} \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}\, dx_1 dx_2$$

розбігається, хоча обидва повторні інтеграли

$$\int_1^{+\infty}\Big(\int_1^{+\infty} \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}\, dx_1\Big) dx_2 \quad \text{і} \quad \int_1^{+\infty}\Big(\int_1^{+\infty} \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}\, dx_2\Big) dx_1$$

збігаються.

Д2. Дати означення невласного інтеграла та дослідити його збіжність

$$\int_{[0,1]^2} \frac{dx_1 dx_2}{|x_1 - x_2|^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

Обчислити цей інтеграл. (Зверніть увагу на те, що при $\alpha > 0$ в околі кожної точки прямої $x_1 = x_2$ підінтегральна функція необмежена.)

Б16

1. Дослідити, при яких значеннях параметрів збігаються інтеграли:

1) $\displaystyle\int_A \frac{dx_1 dx_2}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^\alpha}, \quad A = \{(x_1, x_2)\,|\, 0 \le x_2 \le 1\},\ \alpha \in \mathbf{R};$

2) $\displaystyle\int_A \frac{dx_1 dx_2}{|x_1|^\alpha + |x_2|^\beta},$
$A = \{(x_1, x_2)\,|\, |x_1| + |x_2| \ge 1\},\ \alpha > 0,\ \beta > 0;$

3) $\displaystyle\int_A \frac{\sin x_1 \sin x_2}{(x_1 + x_2)^\alpha}\, dx_1 dx_2,$
$A = \{(x_1, x_2)\,|\, x_1 + x_2 \ge 1\},\ \alpha \in \mathbf{R};$

4) $\displaystyle\int_A \frac{\sin(x_1^2 + x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^\alpha}\, dx_1 dx_2,$
$A = \{(x_1, x_2)\,|\, x_1^2 + x_2^2 \ge 4\},\ \alpha \in \mathbf{R};$

5) $\displaystyle\int_A \frac{\cos(x_1^2 + x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^\alpha}\, dx_1 dx_2,$
$A = \{(x_1, x_2)\,|\, x_1^2 + x_2^2 \ge 1,\ x_1 \le x_2\},\ \alpha \in \mathbf{R};$

6) $\int_{\mathbf{R}^2} \exp(-(x_1^4 + x_2^4)^\alpha)\, dx_1 dx_2,\ \alpha \in \mathbf{R}$;
7) $\int_A \exp(-(x_1 + x_2)^\alpha)\, dx_1 dx_2,$
$A = \{(x_1, x_2) \mid 0 \le x_1 \le x_2\},\ \alpha \in \mathbf{R}$;
8) $\int_A (x_1^2 + x_2^2 - 1)^\alpha\, dx_1 dx_2,$
$A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \ge 4\},\ \alpha \in \mathbf{R}$;
9) $\int_{\mathbf{R}^2} \sin((x_1^2 + x_2^2)^\alpha)\, dx_1 dx_2,\ \alpha \in \mathbf{R}$;
10) $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^2} \frac{dx_1 dx_2}{(1 + |x_1| + |x_2|)^\alpha},\ \alpha \in \mathbf{R}.$

2. Обчислити інтеграли чи виразити їх через значення Γ-функції:
1) $\displaystyle\int_A \frac{dx_1 dx_2}{(x_1 + x_2)^2}, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 \ge 1,\ 0 \le x_1 \le 1\}$;
2) $\displaystyle\int_A \frac{dx_1 dx_2}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$;
3) $\displaystyle\int_A \frac{dx_1 dx_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \ge 1\}$;
4) $\displaystyle\int_A \frac{dx_1 dx_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid x_2 \ge x_1^2 + 1\}$;
5) $\int_A \exp(-(x_1 + x_2))\, dx_1 dx_2, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid 0 \le x_1 \le x_2\}$;
6) $\int_A e^{-x_1} x_2^\alpha\, dx_1 dx_2, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid 0 \le x_2 \le x_1\},\ \alpha > 0$;
7) $\int_{\mathbf{R}^2} \exp(-(x_1^2 + x_2^2)^\alpha)\, dx_1 dx_2,\ \alpha > 0$;
8) $\int_A (1 - x_1)^\alpha x_2^\beta\, dx_1 dx_2,$
$A = \{(x_1, x_2) \mid 0 \le x_2 \le x_1 \le 1\},\ \alpha > -1,\ \beta > -1$;
9) $\int_A x_1^\alpha x_2^\beta\, dx_1 dx_2, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid 0 \le x_2 \le 1 - x_1,\ x_1 \ge 0\},$
$\alpha > -1,\ \beta > -1$;
10) $\int_A (x_1^2 + x_2^2)^\alpha (1 - x_1^2 - x_2^2)^\beta\, dx_1 dx_2, \quad A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\},\ \alpha > -1,\ \beta > -1.$

3. Обчислити інтеграли:
1) $\int_A \exp(-x_1^2 - x_2^2)\, dx_1 dx_2,\ A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\}$;
2) $\int_{\mathbf{R}^2} x_1 x_2 \exp(-x_1^2 - x_2^2)\, dx_1 dx_2$;
3) $\int_{\mathbf{R}^2} \exp(-(x_1^2 + x_1 + x_2^2 - x_2))\, dx_1 dx_2$;
4) $\int_{\mathbf{R}^2} x_1 \exp(-x_1^2 + x_1 - x_2^2)\, dx_1 dx_2$;
5) $\int_{\mathbf{R}^2} x_1^3 x_2^3 \exp(-x_1^4 - x_2^4)\, dx_1 dx_2$;

6) $\int_{\mathbf{R}^2}(x_1+x_2)\exp(-(x_1^2+2x_2^2+x_1+x_2))\,dx_1dx_2$;

7) $\int_{\mathbf{R}^2}(1+x_1x_2)\exp(-(x_1^2-x_1+x_2^2))\,dx_1dx_2$;

8) $\int_{\mathbf{R}^2}(x_1^2+x_2^2)\exp(-x_1^2-x_2^2)\,dx_1dx_2$;

9) $\int_{\mathbf{R}^2}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\exp(-x_1^2-x_2^2)\,dx_1dx_2$;

10) $\int_{\mathbf{R}^2}\exp(-(2x_1^2+3x_1+5x_2^2+4x_2+1))\,dx_1dx_2$.

4. Дослідити, при яких значеннях параметрів збігаються інтеграли:

1) $\displaystyle\int_A \frac{dx_1dx_2}{|x_1|^\alpha+|x_2|^\beta},\ A=\{(x_1,x_2)\mid |x_1|+|x_2|\le 1\}$,
$\alpha>0,\ \beta>0$;

2) $\int_A |\ln(x_1^2+x_2^2)|^\alpha\,dx_1dx_2$,
$A=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\le 1\},\ \alpha>0$;

3) $\int_A (x_1^2+x_2^2)^\alpha\,dx_1dx_2,\ A=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\le x_1\},\ \alpha\in\mathbf{R}$;

4) $\displaystyle\int_{[0,1]^3}\frac{dx_1dx_2dx_3}{x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma},\ \{\alpha,\beta,\gamma\}\in\mathbf{R}$;

5) $\int_A \exp(-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^\alpha)\,dx_1dx_2dx_3$,
$A=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 1\},\ \alpha\in\mathbf{R}$;

6) $\int_A (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^\alpha\,dx_1dx_2dx_3$,
$A=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 2x_1\},\ \alpha\in\mathbf{R}$;

7) $\int_A (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^\alpha\,dx_1dx_2dx_3$,
$A=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1^2+x_2^2+x_3^2\le x_2\},\ \alpha\in\mathbf{R}$;

8) $\int_A (|x_1|+|x_2|+|x_3|)^\alpha\,dx_1dx_2dx_3$,
$A=\{(x_1,x_2,x_3)\mid |x_1|+|x_2|+|x_3|\le 1\},\ \alpha\in\mathbf{R}$;

9) $\int_A (x_1^4+x_2^4+x_3^4)^\alpha)\,dx_1dx_2dx_3$,
$A=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1^4+x_2^4+x_3^4\le 1\},\ \alpha\in\mathbf{R}$;

10) $\int_A (|x_1|^\alpha+|x_2|^\alpha+|x_3|^\alpha)^{\alpha-6}\,dx_1dx_2dx_3$,
$A=\{(x_1,x_2,x_3)\mid |x_1|^\alpha+|x_2|^\alpha+|x_3|^\alpha\le 1\},\ \alpha>0$.

ЗАНЯТТЯ 17
КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ ПЕРШОГО ТА ДРУГОГО РОДУ

Контрольні запитання

1. *Формула для обчислення криволінійного інтеграла I роду.*
2. *Формули для обчислення довжини, маси та центру ваги дуги кривої.*
3. *Означення криволінійного інтеграла другого роду та формула для його обчислення.*
4. *Фізична інтерпретація криволінійного інтеграла другого роду.*
5. *Формула для обчислення криволінійного інтеграла від диференціала.*
6. *Формула Гріна.*
7. *Формула для обчислення площі за допомогою криволінійного інтеграла.*

А17

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{\Gamma} f dl$.

1) $\Gamma = \{(a\cos t, a\sin t, bt) \mid 0 \le t \le 2\pi\}, a > 0, b > 0;$
$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3;$
2) Γ – дуга кривої $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2, x_2^2 = x_1$ від точки $(0, 0, 0)$ до точки $(1, 1, \sqrt{2})$; $f(x_1, x_2, x_3) = x_3, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$.

2. Обчислити довжину кривої $\Gamma = \{(t\cos t, t\sin t, t) \mid 0 \le t \le \pi\}$.

3. Визначити центр ваги однорідної кривої: Γ :

1) Γ – верхнє півколо кола $x_1^2 + x_2^2 = 1$;
2) Γ – дуга кривої $\left\{(3t, 3t^2, 2t^3) \mid t \in \mathbf{R}\right\}$ від точки $(0, 0, 0)$ до точки $(3, 3, 2)$.

4. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{\Gamma}(x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1)$ вздовж кривої Γ з початком у точці $(0, 0)$ і кінцем у точці $(1, 2)$, якщо:

1) Γ – відрізок прямої;
2) Γ – парабола, вісь якої – вісь ординат Ox_2;
3) Γ – ламана, що складається з відрізка OB осі Ox_1 і відрізка BA, паралельного осі Ox_2.

5. Обчислити криволінійні інтеграли:

1) $\int\limits_{\Gamma} \left[(x_1^2 - 2x_1x_2)\,dx_1 + (x_2^2 - 2x_1x_2)\,dx_2\right]$, де Γ – відрізок параболи $x_2 = x_1^2,\ x_1 \in [-1, 1]$, що пробігається відповідно зростанню x_1;
2) $\displaystyle\int_{\Gamma} \frac{(x_1 + x_2)\ dx_1 - (x_1 - x_2)\ dx_2}{x_1^2 + x_2^2}$, де Γ – коло $x_1^2 + x_2^2 = 1$, що пробігається проти руху годинникової стрілки;
3) $\int\limits_{\Gamma}(x_2\ dx_1 + x_3\ dx_2 + x_1\ dx_3)$, де Γ – виток гвинтової лінії $x_1 = \cos t,\ x_2 = \sin t,\ x_3 = 2t,\ 0 \le t \le 2\pi$, рух по Γ відповідає зростанню t.

6. Сила $\vec{F}(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2)$. Знайти роботу сили, яка витрачається на переміщення матеріальної точки по дузі параболи $x_2^2 = 8x_1$ від точки $(2, 4)$ до точки $(4, 4\sqrt{2})$.

7. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{\Gamma} \omega$:

1) Γ – контур трикутника ABC з вершинами $A(1, 1), B(0, 0), C(0, 2)$, що пробігається в додатному напрямку; $\omega = (x_1 + x_2)^2\,dx_1 - (x_1^2 + x_2^2)\,dx_2$;
2) Γ – еліпс $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0$, що пробігається в додатному напрямку; $\omega = (x_1 + x_2)\,dx_1 - (x_1 - x_2)\,dx_2$.

8. Обчислити площі фігур, обмежених заданими кривими:

1) еліпсом $\{(a\cos t, b\sin t) \mid 0 \le t \le 2\pi\}, a > 0, b > 0$;
2) параболою $(x_1 + x_2)^2 = x_1$ і віссю Ox_1;

Д1. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $(\frac{x_1}{a})^n + (\frac{x_2}{b})^n = 1; \{a, b, n\} \subset (0, +\infty)$, і осями координат. *Вказівка.* Покласти $x_1 = a(\cos\varphi)^{\frac{2}{n}}, x_2 = a(\sin\varphi)^{\frac{2}{n}}$.

Д2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{\Gamma} \omega$, доповнивши криву Γ до замкненої кривої і скориставшись формулою Гріна:

1) Γ – верхнє півколо $x_1^2 + x_2^2 = 1, x_2 \ge 0$, що пробігається від точки $A(1, 0)$ до точки $B(-1, 0)$; $\omega = x_1x_2^2\,dx_2 - x_1^2x_2\,dx_1$;
2) Γ – дуга кола $x_1^2 + x_2^2 = 4, x_1 \ge 0$, що пробігається від точки $A(0, -2)$ до точки $B(0, 2)$; $\omega = e^{-(x_1^2 - x_2^2)}(\cos(2x_1x_2)\,dx_1 + \sin(2x_1x_2)\,dx_2)$;

Б17

1. Обчислити довжину кривої Γ.

1) $\Gamma = \left\{(e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t, e^{-t}) \mid 0 \le t \le 1\right\}$.

2) Γ – дуга кривої $\left\{(x_1, \arcsin x_1, \frac{1}{4}\ln\frac{1-x_1}{1+x_1}) \mid -1 < x_1 < 1\right\}$ від точки $(0,0,0)$ до точки (x_1^0, x_2^0, x_3^0);

3) $\Gamma = \left\{(t, \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}, \frac{t^2}{2}) \mid 0 \le t \le 1\right\}$.

4) $\Gamma = \left\{(\frac{\sqrt{2}}{2}t^2, \frac{t^3}{3}, t) \mid 0 \le t \le 4\right\}$.

5) $\Gamma = \left\{(\frac{t^2}{2}, \frac{2\sqrt{2}}{5}t^{5/2}, \frac{t^3}{3}) \mid 4 \le t \le 9\right\}$.

6) $\Gamma = \left\{(t, \frac{4\sqrt{2}}{5}t^{5/4}, \frac{2}{3}t^{3/2}) \mid 0 \le t \le 1\right\}$.

7) $\Gamma = \left\{(\frac{t^4}{4}, t, \frac{2\sqrt{2}}{5}t^{5/2}) \mid 1 \le t \le 2\right\}$.

8) $\Gamma = \left\{(\frac{t^2}{2}, \sqrt{2}t, \ln t) \mid e^{-1} \le t \le e\right\}$.

9) $\Gamma = \left\{(\frac{2}{3}t^{3/2}, t\sqrt{2}, 2t^{1/2}) \mid 1 \le t \le 4\right\}$.

10) $\Gamma = \left\{(t, 2\sqrt{2}e^{t/2}, e^t) \mid \ln 2 \le t \le \ln 3\right\}$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_\Gamma f dl$.

1) Γ – межа фігури, обмеженої кривими $x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1 = x_2, x_1 \ge x_2; f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2, (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$;

2) $\Gamma = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| + |x_2| = 1\}; f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2, (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$;

3) Γ – межа трикутника з вершинами $(0,0), (2,1), (1,2); f(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2, (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$;

4) Γ – межа сектора круга $x_1^2 + x_2^2 \le 1, x_1 \ge |x_2|; f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2, (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$;

5) Γ – межа трикутника з вершинами $(0,0), (1,0), (0,1)$; $f(x_1, x_2) = x_1 x_2, (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$;

6) $\Gamma = \{(t - \sin t, 1 - \cos t) \mid 0 \le t \le 2\pi\}; f(x_1, x_2) = x_1^2, (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$;

7) $\Gamma = \{(\cos t + t\sin t, \sin t - t\cos t) \mid 0 \le t \le 2\pi\}$; $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2, (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$;

8) $\Gamma = \{(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t) \mid 0 \le t \le t_0\}, t_0 > 0; f(x_1, x_2) = x_1 x_2, (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$;

9) $\Gamma = \left\{(x_1, x_2) \mid x_1^{2/3} + x_2^{2/3} = 1\right\}; f(x_1, x_2) = x_1^{4/3} + x_2^{4/3}, (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$;

10) Γ – границя сектора $\left\{(x_1,x_2) \mid x_1^2+x_2^2 \le 1, 0 \le x_2 \le x_1\right\}$; $f(x_1,x_2) = \exp(\sqrt{x_1^2+x_2^2}), (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2$;
11) Γ – границя трикутника з вершинами $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$; $f(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2^2 + x_3^3, (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3$;
12) Γ – границя прямокутника з вершинами $(1,0,0), (1,1,0), (0,1,1), (0,0,1)$; $f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2^2x_3^3, (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3$;
13) Γ – ламана, що з'єднує послідовно точки $(1,0,0), (0,1,0), (1,0,1)$; $f(x_1,x_2,x_3) = x_1 + 2x_2 + 3x_3, (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3$;
14) Γ – границя трикутника з вершинами $(0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)$; $f(x_1,x_2,x_3) = x_2, (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3$;
15) Γ – ламана, що з'єднує послідовно точки $(0,0,0), (1,1,1), (3,2,1)$; $f(x_1,x_2,x_3) = x_1 - x_2, (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3$;
16) Γ – коло $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1, x_1+x_2+x_3 = 0$; $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2, (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3$;
17) $\Gamma = \{(t\cos t, t\sin t, t) \mid 0 \le t \le t_0\}, t_0 > 0$; $f(x_1,x_2,x_3) = x_3, (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3$;
18) Γ – чверть кола $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1, x_1 = x_2$, що лежить в першому октанті; $f(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2, (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3$;
19) Γ – чверть кола $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 4, x_1^2+x_2^2 = 1, x_3 \ge 0$, що лежить в першому октанті; $f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3, (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3$;
20) Γ – коло $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1, x_2 = x_3$; $f(x_1,x_2,x_3) = x_2 - x_3, (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3$.

3. Знайти масу кривої Γ з лінійною щільністю ρ:

1) $\Gamma = \{(x_1, \ln x_1) \mid 1 \le x_1 \le e\}, \rho(x_1,x_2) = x_1^2, (x_1,x_2) \in \Gamma$.
2) $\Gamma = \left\{(a\cos t, b\sin t) \mid 0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right\}, a > 0, b > 0; \rho(x_1,x_2) = x_2, (x_1,x_2) \in \Gamma$.
3) $\Gamma = \left\{(t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3}) \mid 0 \le t \le 1\right\}, \rho(x_1,x_2,x_3) = \sqrt{2x_2}, (x_1,x_2,x_3) \in \Gamma$.
4) $\Gamma = \left\{(x_1, \frac{x_1^2}{2}) \mid 1 \le x_1 \le 2\right\}, \rho(x_1,x_2) = \frac{x_2}{x_1}, (x_1,x_2) \in \Gamma$.
5) $\Gamma = \left\{(\ln(1+t^2), 2\operatorname{arctg} t - t) \mid 0 \le t \le 1\right\}, \rho(x_1,x_2) = x_2e^{-x_1}$, $(x_1,x_2) \in \Gamma$.

4. Визначити центр ваги однорідної кривої Γ :

1) $\Gamma = \left\{(x_1,x_2) \mid \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 1\right\}$;
2) $\Gamma = \left\{(x_1,x_2) \mid x_2^2 = x_1^3 - x_1^4\right\}$;

3) $\Gamma = \{(x_1, \operatorname{ch} x_1) \mid -1 \le x_1 \le 1\}$;

4) Γ – дуга кола радіуса a при центральному куті $2\varphi, 0 < \varphi < \pi$.

5) $\Gamma = \left\{(x_1, x_2) \mid x_1^{2/3} + x_2^{2/3} = 1, x_2 \ge 0\right\}$.

5. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_{\Gamma} \omega$:

1) Γ – границя трикутника з вершинами $(0,0), (2,1), (1,2)$, що пробігається у напрямку $(0,0) \to (2,1) \to (1,2) \to (0,0)$; $\omega = x_1^2 x_2\, dx_1 + x_1 x_2^2\, dx_2$;

2) $\Gamma = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| + |x_2| = 1\}$ пробігається за рухом годинникової стрілки; $\omega = x_1\, dx_1 - x_1 x_2\, dx_2$;

3) Γ – замкнений контур, що складається з відрізків ліній $x_2 = x_1^2,\ x_2 = x_1 + 2$ і пробігається проти руху годинникової стрілки; $\omega = x_1 x_2\, dx_1 + x_2^2\, dx_2$;

4) Γ – крива, що складається з відрізка прямої від точки $(-1, 0)$ до точки $(0, 1)$ і розташованої у першому квадранті дуги кола з центром у точці $(0, 0)$, що пробігається від точки $(0, 1)$ до точки $(1, 0)$; $\omega = x_1\, dx_1 + x_1 x_2\, dx_2$;

5) Γ – межа квадрата з вершинами $(1,1), (-1,1), (-1,-1), (1,-1)$ що пробігається проти годинникової стрілки; $\omega = -x_2(x_1^2 + x_2^2)^{-1}\, dx_1 + x_1(x_1^2 + x_2^2)^{-1}\, dx_2$;

6) Γ – крива $x_2 = 1 - |1 - x_1|,\ 0 \le x_1 \le 2$, що пробігається у напрямку зростання x_1; $\omega = (x_1^2 + x_2^2)\, dx_1 + (x_1^2 - x_2^2)\, dx_2$;

7) Γ – еліпс $\frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} = 1$, що пробігається проти годинникової стрілки; $\omega = (x_1 + x_2)\, dx_1 + (x_1 - x_2)\, dx_2$;

8) Γ – арка циклоїди $x_1 = t - \sin t,\ x_2 = 1 - \cos t,\ 0 \le t \le 2\pi$, що пробігається у напрямку зростання t; $\omega = (2 - x_2)\, dx_1 + x_1\, dx_2$;

9) Γ – відрізок прямої від точки $(0, \pi)$ до точки $(\pi, 0)$; $\omega = \sin x_2\, dx_1 + \sin x_1\, dx_2$;

10) Γ – межа фігури, обмеженої кривими $x_2 = x_1^2, x_2 = x_1$, що пробігається проти годинникової стрілки; $\omega = x_1^2 x_2\, dx_1 + 2x_1 x_2^2\, dx_2$.

6. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_{\Gamma} \omega$:

1) Γ – ламана, що з'єднує послідовно точки $(1,0,0), (1,0,2), (0,1,0)$; $\omega = -x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2 - x_3\, dx_3$;

2) Γ – відрізок прямої від точки $(0,0,0)$ до точки $(1,2,3)$; $\omega = -x_1\,dx_1 + x_2x_3\,dx_2 - x_1x_2\,dx_3$;
3) Γ – межа трикутника з вершинами $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$, що пробігається у напрямку $(1,0,0) \to (0,1,0) \to (0,0,1) \to (1,0,0)$; $\omega = x_1x_3\,dx_1 + x_1x_2\,dx_2 + x_1x_3\,dx_3$;
4) Γ – межа прямокутника, що пробігається у напрямку $(1,0,0) \to \to (1,1,0) \to (0,1,1) \to (0,0,1) \to (1,0,0)$; $\omega = x_1x_2\,dx_1 - x_2\,dx_2 + x_1x_3\,dx_3$;
5) $\Gamma = \left\{(x_1,x_2,x_3) \mid |x_2| = 4 - x_1^2, x_3 = 0\right\}$, що пробігається у напрямку від точки $(2,0,0)$ до точки $(0,4,0)$ проти годинникової стрілки, якщо дивитися з точки $(0,0,1)$; $\omega = x_1x_2\,dx_1 + x_2^2\,dx_2 + x_1x_2\,dx_3$;
6) Γ – відрізок прямої від точки $(1,1,1)$ до точки $(2,3,4)$; $\omega = x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 + (x_1 + x_2 - 1)\,dx_3$;
7) Γ – дуга гвинтової лінії $x_1 = 2\cos t, x_2 = 2\sin t, x_3 = \frac{t}{2\pi}, t \in \mathbf{R}$, від точки перетину з площиною $x_3 = 0$ до точки перетину з площиною $x_3 = 1$; $\omega = x_2x_3\,dx_1 + x_3x_1\,dx_2 + x_1x_2\,dx_3$;
8) Γ – відрізок прямої від точки $(1,1,1)$ до точки $(4,4,4)$; $\omega = \dfrac{x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 + x_3\,dx_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 - x_2 + 2x_3}}$;
9) Γ – межа прямокутника, що пробігається у напрямку $(1,0,0) \to \to (1,1,0) \to (0,1,1) \to (0,0,1) \to (1,0,0)$; $\omega = x_1x_2\,dx_1 - dx_2$;
10) Γ – ламана, що з'єднує послідовно точки $(1,0,0), (0,1,0), (1,0,1)$; $\omega = \sin x_1\,dx_1 + \sin x_2\,dx_2 + \sin x_3\,dx_3$.

7. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_\Gamma \omega$:

1) Γ – коло $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_2 = x_1$, що пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі Ox_1; $\omega = (x_2 - x_3)\,dx_1 + (x_3 - x_1)\,dx_2 + (x_1 - x_2)\,dx_3$;
2) Γ – частина кривої Вівіані $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_1^2 + x_2^2 = x_1, x_3 \geq 0$, що пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі $Ox_1 (x_1 > 1)$; $\omega = x_2^2\,dx_1 + x_3^2\,dx_2 + x_1^2\,dx_3$;
3) Γ – лінія перетину сфери $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$ і циліндра $x_1^2 + x_2^2 = 2x_1$, що лежить в області $x_3 \geq 0$ і пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з початку координат; $\omega = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(dx_1 + dx_2 + dx_3)$;

4) Γ – замкнена ламана лінія, що з'єднує точки $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ і пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з початку координат; $\omega = \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1+x_2+x_3}}\,dx_1 + \dfrac{x_2}{\sqrt{x_1+x_2+x_3}}\,dx_2 + \dfrac{x_3}{\sqrt{x_1+x_2+x_3}}\,dx_3$;

5) Γ – перетин поверхні куба $|x_i| \le 1,\ i = 1,2,3,$ і площини $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$; напрямок обходу – проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі Ox_1; $\omega = x_1\,dx_1 - x_3\,dx_2 + x_2\,dx_3$;

6) Γ – перетин циліндра $x_1^2 + x_2^2 = 1$ і площини $x_1 + x_2 + x_3 = 0$; напрямок обходу – проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі Ox_3; $\omega = x_3\,dx_1 + x_2\,dx_2 + x_1\,dx_3$;

7) Γ – перетин циліндра $|x_1| + |x_2| = 1$ і площини $x_1 = x_3$; напрямок обходу – проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі Ox_3; $\omega = x_1^2 x_2\,dx_1 + \,dx_2 + x_1\,dx_3$; $-\frac{1}{3}$;

8) Γ – перетин циліндра $\max\{|x_1|,|x_2|\} = 1$ і площини $x_2 = x_3$; напрямок обходу – проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі Ox_3; $\omega = x_1 x_2(\,dx_1 + \,dx_2 + \,dx_3)$;

9) Γ – коло $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_2 = x_1\sqrt{3}$, що пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі Ox_1;
$\omega = (x_1 + x_2)(\,dx_1 + \,dx_2 + \,dx_3)$;

10) Γ – коло $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4, x_2 = -x_1$, що пробігається за годинниковою стрілкою, якщо дивитися зі сторони додатного напрямку осі Ox_1; $\omega = (x_1 - x_2)(\,dx_1 + \,dx_2 + \,dx_3)$.

8. Нехай $\vec{F}(x_1,x_2), (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2$ – силове поле. Знайти роботу поля, що витрачається на пересування матеріальної точки з точки A в точку B вздовж орієнтованої кривої Γ, для наведених $\vec{F}$, A, B і Γ.

1) Сила $\vec{F}$ має постійну величину F і направлена вздовж додатної півосі Ox_1; $A = (1,0),\ B = (0,1)$; Γ – чверть кола $x_1^2 + x_2^2 = 1$, що лежить у першому квадранті.

2) Сила $\vec{F}$ направлена в початок координат і по модулю дорівнює відстані від точки докладання до початку координат; $A = (0,0), B = (1,1)$; Γ – відрізок прямої.

3) Задача 2) для частини параболи $x_2 = x_1^2,\ 0 \le x_1 \le 1$.

4) Напрямок сили $\vec{F}$ повернутий на кут $\frac{\pi}{2}$ за годинниковою стрілкою відносно радіус-вектора $\vec{r}$ точки її докладання, $|\vec{F}| = \dfrac{1}{|\vec{r}|}$; $A = (2,0),\ B = (0,2)$; Γ – чверть кола $x_1^2 + x_2^2 = 4$, що лежить у першому квадранті.

5) $\vec{F}(x_1,x_2) = \left(x_1x_2 + \dfrac{x_2^2 \sin x_1}{2}, \dfrac{x_1^2 - 2x_2\cos x_1}{2}\right), (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2$; $A = B = (1,0)$; Γ – коло $x_1^2 + x_2^2 = 1$, що пробігається за годинниковою стрілкою.

6) $\vec{F}(x_1,x_2) = (x_1x_2, x_1 + x_2), (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2$; $A = (0,0),\ B = (1,1)$, Γ – відрізок прямої.

7) Задача 6), де Γ – дуга параболи $x_2 = x_1^2$.

8) $\vec{F}(x_1,x_2) = (x_1 + x_2, x_1), (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2$; $A = B = (0,1)$; Γ – коло $x_1^2 + x_2^2 = 1$, що пробігається проти годинникової стрілки.

9) $\vec{F}(x_1,x_2) = (2x_1x_2, x_1^2), (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2$; $A = (1,0),\ B = (0,3)$; Γ – відрізок прямої.

10) Сила $\vec{F}$ направлена в початок координат і по модулю дорівнює відстані від точки докладання до початку координат; $A = (1,0),\ B = (0,2)$; Γ – чверть еліпса $x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} = 1$, що лежить у першому квадранті.

9. Використовуючи формулу Гріна, обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_\Gamma \omega$, де Γ – границя заданої множини F, що пробігається в додатному напрямку:

1) $F = \left\{(x_1,x_2) \,|\, (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 \le 1\right\}$; $\omega = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, dx_1 + x_2[x_1x_2 + \ln(x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2})]\, dx_2$;

2) $F = \{(x_1,x_2) \,|\, 0 \le x_1 \le 2, 0 \le x_2 \le 1 + x_1\}$; $\omega = (x_1 + 2x_2)\, dx_1 + x_1x_2\, dx_2$;

3) $F = \{(x_1,x_2) \,|\, |x_1| + |x_2| \le 1\}$; $\omega = x_1x_2^2\, dx_1 + x_1^3\, dx_2$;

4) F – множина точок квадрата $[0,1]^2$, що лежать поза кругом $(x_1 - \frac{1}{2})^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2 \le \frac{1}{4}$; $\omega = x_1^2\, dx_1 + x_1x_2\, dx_2$;

5) $F = \left\{(x_1,x_2) \,|\, x_1 \ge x_2^2 - 2, x_1 \le 2\right\}$; $\omega = (x_1 + 2x_2)\, dx_1 + x_1x_2\, dx_2$;

6) $F = \left\{(x_1,x_2) \,|\, x_1 \ge x_1^2 - 2, x_1 \le |x_2|\right\}$; $\omega = x_1x_2\, dx_1 + (x_1 + 3x_2)\, dx_2$;

7) $F = \left\{(x_1, x_2) \mid (x_1-1)^2 + x_2^2 \le 1\right\}$; $\omega = x_2\,dx_1 + x_1\,dx_2$.

10. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_\Gamma \omega$, доповнивши криву Γ до замкненої кривої і скориставшись формулою Гріна:

1) Γ – дуга еліпса $x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} = 1, x_2 \ge 0$, що пробігається від точки $A(1,0)$ до точки $B(-1,0)$; $\omega = (x_1x_2 + x_1 + x_2)\,dx_1 + (x_1x_2 + x_1 - x_2)\,dx_2$;
2) Γ – нижнє півколо $x_1^2 + x_2^2 = 2x_1, x_2 \le 0$, що пробігається від точки $O(0,0)$ до точки $A(2,0)$; $\omega = (x_1x_2 + x_1 + x_2)\,dx_1 + (x_1x_2 + x_1 - x_2)\,dx_2$;
3) Γ – чверть кола $x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$, що пробігається від точки $A(1,0)$ до точки $B(0,1)$; $\omega = (x_2 - x_1^2)\,dx_1 + (x_1 + x_2^2)\,dx_2$;
4) Γ – дуга кола $x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1 \le x_2$, що пробігається від точки $A(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ до точки $B(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$; $\omega = x_1x_2^2\,dx_1 - x_1^3\,dx_2$;
5) Γ – дуга косинусоїди $x_2 = \cos x_1, -\frac{\pi}{2} \le x_1 \le \frac{\pi}{2}$, що пробігається в напрямку зростання x_1; $\omega = (2x_1 + 3x_2)\,dx_1 + 5x_2\,dx_2$.

11. Використовуючи формулу Гріна, обчислити площі фігур, обмежених заданими кривими:

1) астроїдою $\left\{(\cos^3 t, \sin^3 t) \mid 0 \le t \le 2\pi\right\}$;
2) кривою $x_1^3 + x_2^3 = x_1^2 + x_2^2$ і осями координат;
3) кривою $(x_1 + x_2)^3 = x_1x_2$;
4) кривою $x_1^4 + x_2^4 = x_1^3 = x_2^3$ і осями координат;
5) кардіоїдою $\{(2\cos t - \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t) \mid 0 \le t \le 2\pi\}$;
6) параболою $(x_1 - x_2)^2 = x_1$ і віссю Ox_1;
7) гіпоциклоїдою $\{(2\cos t + \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t) \mid 0 \le t \le 2\pi\}$;
8) петлею декартового листа $x_1^3 + x_2^3 = 3x_1x_2$; Вказівка: покласти $x_2 = x_1 t$.
9) лемніскатою $(x_1^2 + x_2^2)^2 = x_1^2 - x_2^2$;
10) дугою гіперболи $x_1 = \operatorname{ch} t, x_2 = 2\operatorname{sh} t$ від точки $M(x_1^0, x_2^0)$ до точки перетину з віссю Ox_1, відрізком цієї осі та відрізком прямої OM.

ЗАНЯТТЯ 18
ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ ПЕРШОГО РОДУ

Контрольні запитання

1. *Формула для обчислення площі поверхні.*
2. *Формула для обчислення поверхневого інтеграла I роду.*

А18

1. Обчислити площу поверхні (випадок явного задання поверхні).

1) $x_3 = x_1x_2, x_1^2 + x_2^2 \le 1;$
2) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2, \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \le 1; 0 < b < a.$

2. Обчислити площу поверхні (випадок параметричного задання поверхні).

1) $x_1 = (b+a\cos\psi)\cos\varphi, x_2 = (b+a\cos\psi)\sin\varphi, x_3 = a\sin\psi;$ $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2, \psi_1 \le \psi \le \psi_2; 0 < a \le b, 0 \le \varphi_1 < \varphi_2 \le 2\pi, 0 \le \psi_2 < \psi_2 \le 2\pi$. Чому дорівнює поверхня всього тора $(\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 2\pi, \psi_1 = 0, \psi_2 = 2\pi)$?
2) $x_1 = r\cos\varphi, x_2 = r\sin\varphi, x_3 = \varphi; 0 \le r \le 1, 0 \le \varphi \le 2\pi.$

3. Обчислити поверхневий інтеграл I роду $\int\limits_S f d\sigma$:

1) S – поверхня $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = a^2, x_3 \ge 0, a > 0; f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3;$
2) S – поверхня тетраедра $x_1 + x_2 + x_3 \le 1, x_i \ge 0, 1 \le i \le 3;$ $f(x_1, x_2, x_3) = (1 + x_1 + x_2)^{-2}, (x_1, x_2, x_3) \in S;$
3) S – частина поверхні конуса $x_1 = r\cos\varphi\sin\alpha, x_2 = r\sin\varphi\sin\alpha,$ $x_3 = r\cos\alpha; 0 \le r \le a, 0 \le \varphi \le 2\pi; a, \alpha$ – сталі, $a > 0, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2};$ $f(x_1, x_2, x_3) = x_3^2, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3.$

4. Знайти масу параболічної оболонки
$S = \left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = (x_1^2 + x_2^2)/2, 0 \le x_3 \le 1\right\}$ з щільністю $\rho(x_1, x_2, x_3) = x_3, (x_1, x_2, x_3) \in S.$

Б18

1. Обчислити площу поверхні (випадок явного задання поверхні).

1) $x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1^2 + x_3^2 = 1;$
2) $\frac{1}{2}x_3^2 = x_1x_2, \frac{1}{2} \le x_1 + x_2 \le 1, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$

3) $x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, x_1^2 + x_2^2 \le 2x_2;$
4) $x_3 = x_1 - x_2, |x_1 - x_2| \le 1, |x_1 + x_2| \le 1;$
5) $x_1^2 + x_2^2 = 1, -x_1 \le x_3 \le x_1, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$
6) $(x_1^2 + x_2^2)^{3/2} + x_3 = 8, x_3 \ge 0;$
7) $(x_1 + 2x_2)^2 + x_3 = 1, 0 \le x_2 \le \frac{1}{2}, x_3 \ge 0;$
8) $x_3 = x_1^2 - 2x_2^2, x_1^2 + 4x_2^2 \le 1, x_3 \ge 0;$
9) $x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, x_1^2 + x_2^2 \le 1, x_2^2 \le x_1^2;$
10) $(x_1^2 + x_2^2)x_3 = x_1 + x_2, 1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 4, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

2. Обчислити площу поверхні (випадок параметричного задання поверхні).

1) $x_1 = R\cos\varphi\sin\psi, x_2 = R\sin\varphi\sin\psi, x_3 = R\cos\psi; 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \psi \le \pi; R > 0.$
2) $x_1 = R\cos\varphi\cos\psi, x_2 = R\sin\varphi\cos\psi, x_3 = R\sin\psi; \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2, \psi_1 \le \psi \le \psi_2; R > 0, 0 \le \varphi_1 < \varphi_2 \le 2\pi, 0 \le \psi_2 < \psi_2 \le \frac{\pi}{2}.$
3) $x_1 = r\cos\varphi, x_2 = r\sin\varphi, x_3 = r\sqrt{\cos 2\varphi}; -\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}, 0 \le r \le \sqrt{\cos 2\varphi}.$
4) $x_1 = \cos\varphi\cos\psi, x_2 = \sin\varphi\cos\psi, x_3 = \sin\psi; 0 \le \varphi \le 2\pi, -\frac{\pi}{2} \le \psi \le \frac{\pi}{2}, |\cos\psi| \ge |\cos\varphi|.$
5) $x_1 = \cos\varphi\sin\psi, x_2 = \sin\varphi\sin\psi, x_3 = \cos\psi; 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \psi \le \pi, |\sin\psi| \le |\sin\varphi|.$
6) $x_1 = r\cos\varphi, x_2 = r\sin\varphi, x_3 = \frac{r^2}{2}; r \ge 0, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, r^2 \le \sin 2\varphi.$
7) $x_1 = r\cos\varphi, x_2 = r\sin\varphi, x_3 = r^2\cos 2\varphi/2; 0 \le r \le 1, 0 \le \varphi \le 2\pi.$
8) $x_1 = r\cos\varphi, x_2 = r\sin\varphi, x_3 = \frac{r^2}{2}; 0 \le r \le 1, 0 \le \varphi \le 2\pi.$
9) $x_1 = r\cos\varphi, x_2 = r\sin\varphi, x_3 = r; 0 \le r \le 2\sin\varphi, 0 \le \varphi \le \pi.$
10) $x_1 = 2r\cos\varphi, x_2 = 3r\sin\varphi, x_3 = r^2(\cos^2\varphi - \frac{3\sin^2\varphi}{2}); 0 \le r \le 1, 0 \le \varphi \le 2\pi, |\cos 2\varphi| \ge \frac{\sqrt{3}|\sin\varphi|}{2}.$

3. Обчислити поверхневий інтеграл $\int\limits_S f d\sigma$:

1) $S = \left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 = 4, 0 \le x_3 \le x_2 + 3\right\};$
$f(x_1, x_2, x_3) = x_3^2,\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3;$
2) $S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_i \ge 0, 1 \le i \le 3\};$
$f(x_1, x_2, x_3) = x_1, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3;$

3) $S=\left\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_3^2=x_1^2+x_2^2, 1\le x_3\le 2\right\}; f(x_1,x_2,x_3)=$ x_1^2,
$(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$;
4) S – частина циліндра $x_1^2+x_2^2=1$, що вирізана площинами $x_3=0, x_3=x_1+2; f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_3, (x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$;
5) $S=\left\{(x_1,x_2,x_3)\mid 2x_3=x_1^2, x_2\ge 0, x_1\le 2, x_1\ge x_2\right\}$;
$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2, (x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$;
6) $S=\left\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\right\}$;
$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-2x_3^2,\ (x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$;
7) $S=\{(x_1,x_2,x_3)\mid |x_1|+|x_2|=1, 0\le x_3\le 1\}; f(x_1,x_2,x_3)=$ $x_1+2x_2+3x_3, (x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$;
8) S – поверхня призми з вершинами $(0,0,0),(0,0,1),(0,1,1),(0,1,0),$ $(1,1,0),(1,1,1); f(x_1,x_2,x_3)=x_1+2x_2+3x_3, (x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$;
9) S – поверхня куба $[0,1]^3; f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2x_3, (x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$.

4. Знайти масу:

1) півсфери $S=\left\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1^2+x_2^2+x_3^2=1, x_3\ge 0\right\}$ зі щільністю
$\rho(x_1,x_2,x_3)=x_3, (x_1,x_2,x_3)\in S$;
2) сфери $S=\left\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\right\}$ зі щільністю
$\rho(x_1,x_2,x_3)=x_3^2, (x_1,x_2,x_3)\in S$.

5. Знайти центр ваги однорідної поверхні:

1) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1, x_i\ge 0, 1\le i\le 3$;
2) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1, a\le x_3\le 1, a\in[-1,1)$;
3) $x_1=r\cos\varphi, x_2=r\sin\varphi, x_3=\varphi; 0\le r\le 1, 0\le\varphi\le\pi$;
4) $3x_3=2(x_1\sqrt{x_1}+x_2\sqrt{x_2}), x_1+x_2\le 1$;
5) $x_1^2=2-2x_3, 0\le x_2\le x_1, x_3\ge 0$;
6) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1, x_1^2+x_2^2\le x_1, x_3\ge 0$;
7) $x_3=\sqrt{x_1^2+x_2^2}, x_1^2+x_2^2\le x_1$;
8) $x_3=\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}, x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_1+x_2\le 1$.

ЗАНЯТТЯ 19
ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ ДРУГОГО РОДУ. ЗОВНІШНІЙ ДИФЕРЕНЦІАЛ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ФОРМИ

Контрольні запитання

1. *Означення поверхневого інтеграла другого роду та формули для його обчислення.*
2. *Поняття потоку поля крізь поверхню.*
3. *Зовнішній диференціал диференціальної форми.*

A19

1. Обчислити поверхневий інтеграл $\int\limits_S \omega$:

1) S – зовнішня сторона сфери $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1;\ \omega = x_1\,dx_2\wedge dx_3 + x_2\,dx_3\wedge\, dx_1 + x_3\,dx_1\wedge\, dx_2;$
2) S – зовнішня сторона поверхні симплекса $\{(x_1,x_2,x_3)\,|\, x_1+x_2+x_3\le 1, x_i\ge 0, 1\le i\le 3\}\,;$ $\omega = x_1x_2\,dx_1\wedge\, dx_2 + x_3\,dx_1\wedge\, dx_3;$
3) S – зовнішня сторона конічної поверхні $x_1^2+x_2^2=x_3^2,\ 0\le x_3\le 1;\ \omega=(x_2-x_3)\,dx_2\wedge\, dx_3+(x_3-x_1)\,dx_3\wedge\, dx_1+(x_1-x_2)\,dx_1\wedge\, dx_2;$
4) S – зовнішня сторона поверхні циліндра $x_1^2+x_3^2=1,\ |x_2|\le 2;\ \omega = x_1\,dx_2\wedge\, dx_3+x_1x_2\,dx_3\wedge\, dx_1+x_1x_2x_3\,dx_1\wedge\, dx_2;$
5) S – верхня сторона поверхні $x_1^2+x_2^2=x_3^2,\ 1\le x_3\le 2;\ \omega = x_1^2\,dx_2\wedge\, dx_3+x_2^2\,dx_3\wedge\, dx_1+x_3^2\,dx_1\wedge\, dx_2.$

2. Перевірити, що форма ω є повним диференціалом, і обчислити $\int\limits_A^B \omega$.

1) $\omega=(x_2\,dx_1-x_1\,dx_2)x_1^{-2}, A=(2,1), B=(1,2)$, шлях інтегрування не перетинає вісь Ox_2;
2) $\omega=(x_1^4+4x_1x_2^3)\,dx_1+(6x_1^2x_2^2-5x_2^4)\,dx_2, A=(-2,-1), B=(3,0);$
3) $\omega=e^{x_1}(\cos x_2\,dx_1-\sin x_2\,dx_2), A=(0,0), B=(2,3);$
4) $\omega = x_2x_3\,dx_1+x_3x_1\,dx_2+x_1x_2\,dx_3, A=(1,2,3), B=(6,1,1).$

3. Визначити функцію $z : A \to \mathbf{R}$, що має наступний диференціал в A :

1) $dz = (x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2)\,dx_1 + (x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2)\,dx_2, (x_1, x_2) \in A = \mathbf{R}^2$;
2) $dz = (x_1\,dx_2 - 2x_2\,dx_1)x_1^{-3}, (x_1, x_2) \in A = [1, +\infty) \times \mathbf{R}$;
3) $dz = \cos x_2\,dx_1 - x_1 \sin x_2\,dx_2, (x_1, x_2) \in A = \mathbf{R}^2$;
4) $dz = (x_1^2 - 2x_2x_3)\,dx_1 + (x_2^2 - 2x_1x_3)\,dx_2 + (x_3^2 - 2x_1x_2)\,dx_3$, $(x_1, x_2, x_3) \in A = \mathbf{R}^3$.

4. Знайти роботу, що виконує сила земного тяжіння по переміщенню матеріальної точки маси m з точки (x_1, x_2, x_3) у точку (y_1, y_2, y_3). Вважати вісь аплікат Ox_3 направленою вертикально вгору.

Б19

1. Обчислити поверхневий інтеграл $\int\limits_S \omega$:

1) S – верхня сторона трикутника з вершинами $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$; $\omega = (x_1 + 1)\,dx_2 \wedge dx_3 - (2x_2 + 1)\,dx_3 \wedge dx_1$;
2) S – нижня сторона поверхні $2x_3 = x_1^2 + x_2^2$, $(x_1 - 1)^2 + x_2^2 \le 1$; $\omega = x_1\,dx_2 \wedge dx_3 + x_2\,dx_3 \wedge dx_1 + x_3\,dx_1 \wedge dx_2$;
3) S – зовнішня сторона бічної поверхні циліндра $x_1^2 + x_2^2 = 1$, $|x_3| \le 1$; $\omega = dx_1 \wedge dx_3 + 2x_1\,dx_1 \wedge dx_2$;
4) S – зовнішня сторона еліпсоїда $x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 = 1$; $\omega = dx_2 \wedge dx_3 + dx_3 \wedge dx_1 + dx_1 \wedge dx_2$;
5) S – зовнішня сторона сфери $x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 + 1)^2 = 1$; $\omega = x_1^2\,dx_2 \wedge dx_3 + x_2^2\,dx_3 \wedge dx_1 + x_3^2\,dx_1 \wedge dx_2$;
6) S – зовнішня сторона нижньої половини сфери $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$; $\omega = x_1^2 x_2^2 x_3\,dx_1 \wedge dx_2$;
7) S – зовнішня сторона еліпсоїда $\dfrac{x_1^2}{9} + \dfrac{x_2^2}{4} + x_3^2 = 1$; $\omega = x_3\,dx_1 \wedge dx_2$;
8) S – та сторона поверхні $x_2^2 = 1 - x_1$, $0 \le x_3 \le x_1$, яку видно з додатного напрямку осі Ox_1; $\omega = x_2^2\,dx_2 \wedge dx_3 + x_3\,dx_3 \wedge dx_1 - x_1\,dx_1 \wedge dx_2$;
9) S – та сторона поверхні $x_3^2 = x_1, x_2^2 \le 1 - x_1, x_2 \ge 0$, яку видно з додатного напрямку осі Ox_1; $\omega = 2x_1\,dx_2 \wedge dx_3 - x_2\,dx_3 \wedge dx_1 + 3x_3\,dx_1 \wedge dx_2$;
10) S – внутрішня сторона верхньої половини сфери $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$; $\omega = x_1x_2\,dx_2 \wedge dx_3$;

11) S – зовнішня сторона поверхні призми з вершинами $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$, $(0,0,1)$, $(0,0,0)$; $\omega = x_1\,dx_2 \wedge dx_3 + x_1x_2\,dx_3 \wedge\, dx_1 + (x_1+x_3)\,dx_1 \wedge\, dx_2$;
12) S – зовнішня сторона поверхні призми з вершинами $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,0,1)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$; $\omega = x_1^2\,dx_2 \wedge dx_3 - 3x_1\,dx_3 \wedge\, dx_1 + (x_1^2 - x_2^2)\,dx_1 \wedge\, dx_2$;
13) S – внутрішня сторона поверхні симплекса $\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1+x_2+x_3 \le 1,\ x_i \ge 0;\ i=1,2,3\}$; $\omega = 2x_1\,dx_2 \wedge dx_3 + x_2\,dx_3 \wedge\, dx_1$;
14) S – зовнішня сторона поверхні куба $[0,1]^3$; $\omega = x_1x_2\,dx_2 \wedge dx_3 + 3x_1x_2x_3\,dx_1 \wedge\, dx_2$;
15) S – зовнішня сторона поверхні циліндра $|x_1|+|x_2| = 1$, $0 \le x_3 \le 2$; $\omega = x_1^2x_2^2\,dx_2 \wedge\, dx_3 - (x_1^2+x_3^2)\,dx_3 \wedge\, dx_1$;
16) S – зовнішня сторона куба, утвореного площинами $x_i = 0,\ i = 1,2,3$; $x_i = 1,\ i=1,2,3$; $\omega = x_1\,dx_2 \wedge dx_3 + x_2\,dx_3 \wedge dx_1 + x_3\,dx_1 \wedge\, dx_2$;
17) S – зовнішня сторона поверхні паралелепіпеда $0 \le x_1 \le 1$, $0 \le x_2 \le 2$, $0 \le x_3 \le 3$; $\omega = e^{x_1}\,dx_2 \wedge\, dx_3 + e^{x_2}\,dx_3 \wedge dx_1 + e^{x_3}\,dx_1 \wedge\, dx_2$;
18) S – зовнішня сторона поверхні, розташованої у першому октанті і складеної з поверхні циліндра $x_1^2+x_2^2 = 4$ і площин $x_3 = 3$, $x_i = 0$, $i = 1,2,3$; $\omega = x_2x_3\,dx_1 \wedge\, dx_2 + x_1x_3\,dx_2 \wedge\, dx_3 + x_1x_2\,dx_1 \wedge\, dx_3$;
19) S – зовнішня сторона поверхні, розташованої у першому октанті і складеної з поверхонь параболоїда обертання $x_3 = x_1^2+x_2^2$, циліндра $x_1^2+x_2^2 = 1$ і координатних площин; $\omega = x_1^2x_3\,dx_1 \wedge dx_2 + x_1x_3\,dx_2 \wedge\, dx_3 + x_1^2x_2\,dx_1 \wedge\, dx_3$;
20) S – зовнішня сторона поверхні тіла $\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1^2+x_2^2 \le 1,\ 0 \le x_3 \le 2,\ x_1 \ge 0\}$; $\omega = x_3x_1\,dx_1 \wedge\, dx_2$;
21) S – зовнішня сторона поверхні тіла $\left\{(x_1,x_2,x_3) \mid 0 \le x_3 \le 1 - x_1^2 - x_2^2\right\}$; $\omega = x_1\,dx_2 \wedge\, dx_3$;
22) S – зовнішня сторона поверхні тіла $\left\{(x_1,x_2,x_3) \mid 0 \le x_3 \le 1 - \sqrt{x_1^2+x_2^2}\right\}$; $\omega = x_2^2\,dx_1 \wedge\, dx_3$;
23) S – внутрішня сторона поверхні піраміди з вершинами $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(0,-1,0)$; $\omega = x_1x_2\,dx_1 \wedge\, dx_3$;

24) S – внутрішня сторона поверхні тіла $\left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3^2 \geq x_1^2 + x_2^2, 1 \leq x_3 \leq 2\right\}$; $\omega = (x_1 + x_2)\, dx_2 \wedge dx_3$;

25) S – зовнішня сторона поверхні куба $[-1, 1]^3$; $\omega = dx_2 \wedge dx_1$;

26) S – внутрішня сторона поверхні тіла $\left\{(x_1, x_2, x_3) \mid |x_1| + |x_2| + |x_3| \leq 1\right\}$; $\omega = x_1^2 x_2^2\, dx_2 \wedge dx_3$;

27) S – зовнішня сторона поверхні тіла $\left\{(x_1, x_2, x_3) \mid 1 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4\right\}$; $\omega = x_1\, dx_2 \wedge dx_3 + x_2\, dx_3 \wedge dx_1$;

28) S – зовнішня сторона поверхні тіла $\left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1, x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 3\right\}$; $\omega = x_3\, dx_1 \wedge dx_2$;

29) S – внутрішня сторона поверхні тіла $\left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 \leq 1, x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 3\right\}$; $\omega = (x_1 - x_3)\, dx_2 \wedge dx_3$;

30) S – зовнішня сторона поверхні тіла $\left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4, x_1 \leq x_2\right\}$; $\omega = (x_1 + x_2 + x_3)\, dx_1 \wedge dx_2$.

2. Перевірити, що форма ω є повним диференціалом, і обчислити $\int\limits_A^B \omega$.

1) $\omega = x_1\, dx_2 + x_2\, dx_1, A = (1, -2), B = (2, -1)$;

2) $\omega = x_1^2\, dx_1 + x_2^2\, dx_2, A = (1, 0), B = (-3, 2)$;

3) $\omega = (x_1 + x_2)\, dx_1 + (x_1 - x_2)\, dx_2, A = (2, 2), B = (0, 1)$;

4) $\omega = (x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2)(x_1^2 + x_2^2)^{-1/2}, A = (3, 4), B = (0, 1)$, шлях інтегрування не містить точки $(0, 0)$;

5) $\omega = (x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1)(x_1 - x_2)^{-2}, A = (-1, 0), B = (0, 1)$, шлях інтегрування не перетинає пряму $x_1 = x_2$;

6) $\omega = \cos(x_1 x_2)(x_2\, dx_1 + x_1\, dx_2), A = (0, \pi), B = (\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$;

7) $\omega = e^{x_2}(\, dx_1 + x_1\, dx_2), A = (1, 0), B = (2, 1)$;

8) $\omega = (\, dx_1 + 2\, dx_2)(x_1 + 2x_2)^{-1}, A = (e, 2e), B = (0, e)$, шлях інтегрування не перетинає пряму $x_1 + 2x_2 = 0$;

9) $\omega = (4x_1^3 + x_2)\, dx_1 + x_1\, dx_2, A = (1, 1), B = (-1, 2)$;

10) $\omega = f(x_1 + x_2)(\, dx_1 + dx_2), f \in C(\mathbf{R}), A = (0, 0), B = (5, 2)$;

11) $\omega = x_1^2\, dx_1 - x_2\, dx_2 + x_3^3\, dx_3, A = (1, 1, 1), B = (2, 0, 2)$;

12) $\omega = (x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2 + x_3\, dx_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2}, A = (1, 0, 0), B = (0, 3, 4)$, шлях інтегрування не містить точки $(0, 0, 0)$;

13) $\omega = \sin(x_1+x_2+x_3)(\,dx_1+\,dx_2+\,dx_3), A = (\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}), B = (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$;
14) $\omega = \sin(x_2x_3)\,dx_1+x_1x_3\cos(x_2x_3)\,dx_2+x_1x_2\cos(x_2x_3)\,dx_3, A = (1,1,\pi), B = (2, \frac{\pi}{2}, 3)$;
15) $\omega = 4x_1^3x_2\,dx_1+(x_1^4+2x_2x_3)\,dx_2+x_2^2\,dx_3, A = (1,-1,1), B = (-1,1,-1)$;
16) $\omega = (x_1^2+x_2^2+x_3^2)(x_1\,dx_1+x_2\,dx_2+x_3\,dx_3), A = (3,4,0), B = (0,0,5)$;
17) $\omega = e^{x_1x_2}(x_2x_3\,dx_1 + x_1x_3\,dx_2 + \,dx_3), A = (1,1,e), B = (0,2,1)$;
18) $\omega = (2x_1x_2x_3+x_2^2x_3)\,dx_1+(x_1^2x_3+2x_1x_2x_3)\,dx_2+(x_1^2x_2+x_1x_2^2)\,dx_3, A = (1,3,1), B = (3,1,3)$;
19) $\omega = (x_2x_3\,dx_1+x_3x_1\,dx_2-x_1x_2\,dx_3)x_3^{-2}, A = (1,1,1), B = (2,2,4)$, шлях інтегрування не перетинає вісь Ox_3;
20) $\omega = \operatorname{sh} x_1\,dx_1 + \operatorname{ch} x_2\,dx_2 + e^{x_3}\,dx_3, A = (0,0,0), B = (1,-1,1)$.

3. Обчислити роботу сили $\vec{F}$ по переміщенню матеріальної точки маси m з положення A в положення B.

1) $\vec{F}(x_1,x_2) = (-x_1,-x_2), (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2, A = (0,1), B = (2,0)$;
2) $\vec{F}(x_1,x_2) = (-\frac{mx_1}{(x_1^2+x_2^2)^{3/2}}, -\frac{mx_2}{(x_1^2+x_2^2)^{3/2}}), (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $A = (1,0), B = (3,4)$, шлях точки не містить точки $(0,0)$;
3) $\vec{F}(x_1,x_2) = (-mx_1(x_1^2+x_2^2-1), -mx_2(x_1^2+x_2^2-1)), (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2$, $A = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), B = (2,1)$;
4) $\vec{F}(x_1,x_2) = (x_1x_2 + \frac{x_2^2\sin x_1}{2}, \frac{x_1^2-2x_2\cos x_1}{2}), (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2$, $A = (0,0), B = (\pi,1)$;
5) $\vec{F}(x_1,x_2) = (x_1+x_2, x_1), (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2, A = B = (1,1)$;
6) $\vec{F}(x_1,x_2) = (2x_1x_2, x_1^2), (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2, A = (2,0), B = (0,1)$;
7) $\vec{F}(x_1,x_2) = (-m,-m), (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2, A = (1,2), B = (2,1)$;
8) $\vec{F}(x_1,x_2) = (m,2m), (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2, A = (1,3), B = (3,2)$;
9) $\vec{F}(x_1,x_2) = (m,-3m), (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2, A = (5,5), B = (4,6)$;
10) $\vec{F}(x_1,x_2) = (m,0), (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2, A = (2,1), B = (-5,-6)$.

4. Визначити зовнішній диференціал форми ω :

1) $\omega = x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2$;
2) $\omega = x_3\,dx_1 \wedge \,dx_2 - x_1x_2\,dx_3 \wedge \,dx_2$;

3) $\omega = P(x_1, x_2)\,dx_1 + Q(x_1, x_2)\,dx_2$, де $\{P, Q\} \subset C^{(1)}(\mathbf{R}^2)$;
4) $\omega = P(x_1, x_2, x_3)\,dx_1 + Q(x_1, x_2, x_3)\,dx_2 + R(x_1, x_2, x_3)\,dx_3$, де $\{P, Q, R\} \subset C^{(1)}(\mathbf{R}^3)$;
5) $\omega = P(x_1, x_2, x_3)\,dx_2 \wedge dx_3 + Q(x_1, x_2, x_3)\,dx_3 \wedge dx_1 + R(x_1, x_2, x_3)\,dx_1 \wedge dx_2$, де $\{P, Q, R\} \subset C^{(1)}(\mathbf{R}^3)$.

ЗАНЯТТЯ 20
ФОРМУЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО–ГАУССА І ФОРМУЛА СТОКСА

Контрольні запитання

1. *Формула Остроградського – Гаусса.*
2. *Формула Стокса.*

А20

1. Обчислити поверхневий інтеграл $\int\limits_S \omega$, де S – гладка поверхня, що обмежує тіло скінченного об'єму V, симетричне відносно координатних площин:

1) $\omega = x_2x_3\,dx_2\wedge\,dx_3 + x_3x_1\,dx_3\wedge\,dx_1 + x_1x_2\,dx_1\wedge\,dx_2$;
2) $\omega = (\frac{\partial R}{\partial x_2} - \frac{\partial Q}{\partial x_3})\,dx_2\wedge dx_3 + (\frac{\partial P}{\partial x_3} - \frac{\partial R}{\partial x_1})\,dx_3\wedge dx_1 + (\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2})\,dx_1\wedge\,dx_2$;
3) $\omega = x_1^4\,dx_2\wedge\,dx_3 + x_2^4\,dx_3\wedge\,dx_1 + x_3^4\,dx_1\wedge\,dx_2$;
4) $\omega = x_1^3\,dx_2\wedge\,dx_3 + x_2^3\,dx_3\wedge\,dx_1 + x_3^3\,dx_1\wedge\,dx_2$, де S – зовнішній бік сфери $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 4$;

2. Обчислити об'єм тіла, обмеженого тором $x_1 = (b+a\cos\psi)\cos\varphi, x_2 = (b+a\cos\psi)\sin\varphi, x_3 = a\sin\psi; \{\varphi,\psi\}\subset[0,2\pi]; 0 < a \le b.$
3. Обчислити інтеграл $\int\limits_\Gamma (x_2\,dx_1 + x_3\,dx_2 + x_1\,dx_3)$, де Γ – коло $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1, x_1+x_2+x_3 = 0$, що пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з боку додатного напрямку осі Ox_1.
4. Обчислити інтеграл $\int\limits_\Gamma [(x_2-x_1)\,dx_1 + (x_3-x_1)\,dx_2 + (x_1-x_2)\,dx_3]$, де Γ – еліпс $x_1^2+x_2^2 = 1, x_1+2x_3 = 1$, що пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з боку додатного напрямку осі Ox_1.

Б20

1. Використовуючи формулу Остроградського-Гаусса, обчислити поверхневий інтеграл $\int\limits_S \omega$, де S – задана орієнтована поверхня, ω – задана диференціальна форма:

1) S – зовнішній бік поверхні тіла $\left\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1^2+x_2^2\le 1, |x_3|\le 1\right\}$, $\omega = (x_1+2x_2)\,dx_2\wedge\,dx_3$;

2) S – внутрішній бік поверхні тіла $[0,1]^3$, $\omega = x_1x_3\,dx_2\wedge dx_3 + (x_1^2+x_3^2)\,dx_1\wedge\,dx_2$;

3) S – зовнішній бік поверхні тіла $\left\{(x_1,x_2,x_3)\,|\;x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 1\right\}$, $\omega = x_1\,dx_2\wedge\,dx_3 + 2x_2\,dx_3\wedge\,dx_1$;

4) S – внутрішній бік поверхні тіла $\left\{(x_1,x_2,x_3)\,|\;x_2^2\le 2-x_1, 0\le x_3\le x_1\right\}$, $\omega = x_1^2\,dx_2\wedge dx_3 + x_3^2\,dx_1\wedge\,dx_2$;

5) S – зовнішній бік поверхні тіла $\left\{(x_1,x_2,x_3)\,|\;x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 1\right\}$, $\omega = x_1^3\,dx_2\wedge\,dx_3 + x_2^3\,dx_3\wedge\,dx_1 + x_3^3\,dx_1\wedge\,dx_2$;

6) S – зовнішній бік поверхні $|x_1-x_2+x_3|+|x_2-x_3+x_1|+|x_3-x_1+x_2|=1$, $\omega=(x_1-x_2+x_3)\,dx_2\wedge\,dx_3+(x_2-x_3+x_1)\,dx_3\wedge\,dx_1+(x_3-x_1+x_2)\,dx_1\wedge\,dx_2$;

7) S – зовнішній бік конічної поверхні $x_1^2+x_2^2=x_3^2, 0\le x_3\le 1$; $\omega = x_1^2\,dx_2\wedge dx_3 + x_2^2\,dx_3\wedge dx_1 + x_3^2\,dx_1\wedge dx_2$; *Вказівка.* Приєднати частину площини $x_3=1, x_1^2+x_2^2\le 1$.

8) S – зовнішній бік поверхні призми $\{(x_1,x_2,x_3)\,|\;x_1+x_2\le 1, x_3\le 1, x_i\ge 0, 1\le i\le 3\}$ без нижньої основи, $\omega = x_1x_3\,dx_1\wedge dx_2 + x_3\,dx_2\wedge dx_3 + x_1x_2x_3\,dx_3\wedge dx_1$;

9) S – зовнішній бік поверхні призми $\{(x_1,x_2,x_3)\,|\;|x_1|+|x_2|\le 1, 0\le x_3\le 1\}$ без верхньої основи,
$\omega = x_1^2x_2\,dx_2\wedge\,dx_3 + \,dx_1\wedge\,dx_2$;

10) S – зовнішній бік поверхні тіла $\left\{(x_1,x_2,x_3)\,|\;x_1^2+x_2^2\le 1, x_3\le x_1^2+x_2^2, x_i\ge 0, 1\le i\le 3\right\}$ без нижньої основи $\left\{(x_1,x_2,x_3)\,|\;x_1^2+x_2^2\le 1, x_3=0, x_i\ge 0, 1\le i\le 2\right\}$,
$\omega = x_2^2x_3\,dx_1\wedge\,dx_2 + x_1^2x_3\,dx_2\wedge\,dx_3$.

2. Використовуючи формулу Остроградського – Гаусса, обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

1) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=r^2, r>0$;
2) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=2x_2$;
3) поверхнею $x_1=\cos(\varphi-\psi), x_2=\sin(\varphi-\psi), x_3=\sin\psi, \{\varphi,\psi\}\subset[0,2\pi]$, і площинами $x_3=\pm 1$.
4) поверхнею $x_1=t_1\cos t_2, x_2=t_1\sin t_2, x_3=-t_1+\cos t_2; t_1\ge 0, t_2\in[0,2\pi]$, і площиною $x_3=0$.
5) поверхнею $x_1^2+x_2^2=x_3^2$, і площиною $x_3=h, h>0$.

6) поверхнею $x_1^2+x_2^2=r^2$, і площинами $x_3=0, x_3=h, h>0, r>0$.
7) поверхнею $x_3=x_1^2+x_2^2$, і площиною $x_3=h, h>0$.
8) поверхнею $x_1^2+x_2^2+x_3^2=r^2$, і площиною $x_3=h, r>h>0, x_3\geq h$.
9) $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=1, a,b,c>0$;
10) поверхнями $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ і $(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+x_3^2=1$.

3. Використовуючи формулу Стокса, обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{\Gamma}\omega$, де Γ – задана орієнтована просторова крива, ω – задана диференціальна форма:

1) Γ – перетин поверхні $x_1^2+x_2^2=1$ і площини $x_1+x_2+x_3=1$; обхід за годинниковою стрілкою, якщо дивитися з боку додатного напрямку осі Ox_3; $\omega=(x_3-x_2)\,dx_1+(x_1-x_3)\,dx_2+(x_2-x_1)\,dx_3$;
2) Γ – перетин поверхонь $x_1^2+x_2^2+x_3^2=2Rx_1, x_1^2+x_2^2=2rx_1, x_3>0, 0<r<R$, що пробігається так, що менша область, обмежена нею на поверхні сфери, залишається зліва; $\omega=(x_2^2+x_3^2)\,dx_1+(x_1^2+x_3^2)\,dx_2+(x_1^2+x_2^2)\,dx_3$;
3) Γ – переріз поверхні куба $[0,1]^3$ площиною $x_1+x_2+x_3=\frac{3}{2}$, що пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі Ox_1; $\omega=(x_2^2-x_3^2)\,dx_1+(x_3^2-x_1^2)\,dx_2+(x_1^2-x_2^2)\,dx_3$;
4) Γ – переріз сфери $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ площиною $x_3=\frac{1}{2}$, що пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з боку додатного напрямку оі Ox_3; $\omega=(x_1+x_2)\,dx_2+(x_1-x_3)\,dx_3$;
5) Γ – переріз сфери $x_1^2+x_2^2+x_3^2=4$ площиною $x_2=1$, що пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з боку додатного напрямку осі Ox_2; $\omega=(x_1+x_2)\,dx_2+(x_1-x_3)\,dx_3$;
6) Γ – переріз сфери $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ площиною $x_1+x_2-x_3=0$, що пробігається за годинниковою стрілкою, якщо дивитися з боку додатного напрямку осі Ox_1; $\omega=(x_1^2+x_2^2)\,dx_1+(x_1^2-x_3^2)\,dx_3$;
7) Γ – переріз сфери $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ площиною $x_1+x_2+x_3=1$, що пробігається за годинниковою стрілкою, якщо дивитися з боку додатного напрямку осі Ox_1; $\omega=x_1^2\,dx_1+x_1x_2\,dx_2+x_1x_3\,dx_3$;

8) Γ – переріз еліпсоїда $x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} + x_3^2 = 1$ площиною $x_3 = \frac{1}{2}$, що пробігається за годинниковою стрілкою, якщо дивитися з боку додатного напрямку осі Ox_3; $\omega = (x_2 - x_3)\,dx_1 + (x_3 - x_1)\,dx_2 + (x_1 - x_2)\,dx_3$;
9) Γ – переріз циліндричної поверхні $x_1^2 + x_2^2 = 1$ площиною $x_1 = x_3$, що пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з боку додатного напрямку осі Ox_1; $\omega = (x_1 + x_2)\,dx_1 + x_1 x_2\,dx_3$;
10) Γ – переріз конічної поверхні $x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ площиною $x_1 + 2x_3 = 1$, що пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з початку координат; $\omega = (x_1 - x_2 + x_3)\,dx_1 + x_2 x_3\,dx_2$;
11) Γ – еліпс $\left\{(\sin^2 t, \sin 2t, \cos^2 t) \mid 0 \le t \le \pi\right\}$, що пробігається в напрямку зростання параметра t; $\omega = (x_2 + x_3)\,dx_1 + (x_3 + x_1)\,dx_2 + (x_1 + x_2)\,dx_3$;
12) Γ – крива $\{(\cos t, \cos 2t, \cos 3t) \mid 0 \le t \le 2\pi\}$, що пробігається в напрямку зростання параметра t; $\omega = x_2^2 x_3^2\,dx_1 + x_1^2 x_3^2\,dx_2 + x_1^2 x_2^2\,dx_3$;
13) Γ – крива $\{(\sin t, \sin 5t, \sin 3t) \mid 0 \le t \le \pi\}$, що пробігається в напрямку зростання параметра t; $\omega = x_1^2 x_3\,dx_1 + x_1^2 x_3\,dx_2 + x_1 x_2^2\,dx_3$;
14) Γ – виток гвинтової лінії $\{(\cos t, \sin t, t) \mid 0 \le t \le 2\pi\}$, що пробігається в напрямку зростання параметра t; *Вказівка.* Доповнити криву Γ прямолінійним відрізком. $\omega = (x_1^2 - x_2 x_3)\,dx_1 + (x_2^2 - x_3 x_1)\,dx_2 + (x_3^2 - x_1 x_2)\,dx_3$.

ЗАНЯТТЯ 21
ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

Контрольні запитання

1. *Визначення градієнта скалярного поля.*
2. *Визначення дивергенції, ротора, циркуляції і потоку векторного поля.*
3. *Векторне формулювання формул Гаусса-Остроградського і Стокса.*

A21

1. Знайти градієнт поля $u(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 + 3x_1 - 2x_2 - 6x_3, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, в точці $(2, 0, 1)$. В якій точці градієнт поля є нульовим вектором?

2. Нехай $\vec{a} \in C(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$ – векторне поле в $\mathbf{R}^3, M \in \mathbf{R}^3, S$ – гладка замкнена поверхня, що оточує точку M і обмежує тіло об'єму V, $\vec{n}(\vec{x}), \vec{x} \in S$ – зовнішня нормаль до поверхні $S, d(S) = \max\{||\vec{x} - \vec{y}|| \mid \vec{x}, \vec{y} \in S\} < +\infty$ – діаметр поверхні S. Довести, що $\mathrm{d}iv\vec{a}(M) = \lim\limits_{d(S)\to 0} \frac{1}{V} \int\limits_S (\vec{a}, \vec{n}) d\sigma$.

3. Знайти величину і напрямок $\mathrm{r}ot\vec{a}$ в точці $(1, 2, -2)$ для векторного поля $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_2}{x_3}\vec{i} + \frac{x_3}{x_1}\vec{j} + \frac{x_1}{x_2}\vec{k}, x_1x_2x_3 \neq 0$.

4. Знайти потік радіус-вектора $\vec{r}$:

1) через зовнішній бік бічної поверхні конуса $x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2, 0 \leq x_3 \leq 1$;
2) через зовнішній бік основи цього конуса.

5. Знайти роботу радіус-вектора $\vec{r}$ вздовж відрізка гвинтової лінії $\{(a \cos t, a \sin t, bt) \mid 0 \leq t \leq 2\pi\}$; $a > 0, b > 0$ – фіксовані сталі; крива пробігається в напрямку зростання параметра.

6. Знайти роботу поля $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = e^{x_2 - x_3}\vec{i} + e^{x_3 - x_1}\vec{j} + e^{x_1 - x_2}\vec{k}$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, вздовж прямолінійного відрізка від точки $(0, 0, 0)$ до точки $(1, 3, 5)$.

7. Довести, що поле $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = x_2x_3(2x_1 + x_2 + x_3)\vec{i} + x_3x_1(x_1 + 2x_2 + x_3)\vec{j} + x_1x_2(x_1 + x_2 + 2x_3)\vec{k}, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, є потенціальним, і знайти потенціал цього поля.

8. Знайти потенціал гравітаційного поля $\vec{a} = -\frac{m}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}}(x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k}), (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, що створюється масою m, розташованою в початку координат.

9. Знайти потік векторного поля з попередньої задачі через зовнішній бік гладкої замкненої поверхні, що оточує початок координат.

10. Нехай $\{e_i, 1 \le i \le n\} \subset \mathbf{R}, \{\vec{r_i}, 1 \le i \le n\} \subset \mathbf{R}^3$, ρ – евклідова метрика в $\mathbf{R}^3$. Знайти потік вектора $\vec{a}(\vec{r}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \operatorname{grad}\left(-\frac{e_i}{4\pi\rho(\vec{r},\vec{r_i})}\right)$, $\vec{r} \in \mathbf{R}^3 \setminus \{\vec{r_i}, 1 \le i \le n\}$, через зовнішній бік замкненої поверхні S, що оточує точки $\vec{r_i}, 1 \le i \le n$.

Б21

1. Знайти градієнт скалярного поля u в точці $\vec{r}_0$:

1) $u(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3 - x_2^2, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3,\ \vec{r}_0 = (1, -3, 4)$;
2) $u(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3x_1x_2x_3, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, $\vec{r}_0 = (1, -1, 1)$;
3) $u(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 1)^2}, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, $\vec{r}_0 = (2, 1, 3)$;
4) $u(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, $\vec{r}_0 = (2, 1, 1)$;
5) $u(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, $\vec{r}_0 = (1, 2, 2)$;
6) $u(x_1, x_2, x_3) = e^{x_2x_3} \sin x_1, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3,\ \vec{r}_0 = (\pi, 2, -1)$;
7) $u(x_1, x_2, x_3) = \arcsin \frac{x_1}{x_1+x_2+x_3}, x_i > 0, 1 \le i \le 3$; $\vec{r}_0 = (1, 1, 2)$;
8) $u(x_1, x_2, x_3) = x_1^{x_2 - x_3}, x_1 > 0;\ \vec{r}_0 = (2, 3, 4)$;
9) $u(x_1, x_2, x_3) = x_1 \operatorname{arctg}(x_1x_2x_3), (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, $\vec{r}_0 = (1, 3, \frac{1}{\sqrt{3}})$;
10) $u(x_1, x_2, x_3) = \cos(x_1x_2) \cdot \sin(x_1x_3), (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, $\vec{r}_0 = (\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \sqrt{\pi})$.

2. Знайти дивергенцію векторного поля $\vec{a}$ в точці $\vec{r}_0$:

1) $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{r},\ \vec{r} \in \mathbf{R}^3,\ \vec{r}_0 = (2, 2, 1)$;
2) $\vec{a}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}, \vec{r} \in \mathbf{R}^3 \setminus \{\vec{0}\},\ \vec{r}_0 = (3, 1, 1)$;
3) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1\vec{i} - x_2\vec{j} + x_3\vec{k}}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, (x_1, x_2) \ne (0, 0),\ \vec{r}_0 = (3, 4, 5)$;
4) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2\vec{i} + x_2x_3\vec{j} + x_3x_1\vec{k}, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, $\vec{r}_0 = (1, -3, \pi)$;

5) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = e^{x_1+x_2+x_3}(\vec{i}+\vec{j})+\ln(1+x_1^2)\vec{k}, (x_1,x_2,x_3)\in \mathbf{R}^3$, $\vec{r}_0 = (1,-1,1)$;

6) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = x_1^{x_2}\vec{i} + x_2^{x_3}\vec{j} + x_3^{x_1}\vec{k}, x_i > 0, 1 \le i \le 3$; $\vec{r}_0 = (2,3,1)$;

7) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = \sqrt{x_1^2+x_2^2}\vec{i}+\sqrt{x_2^2-x_3^2}\vec{j}+\sqrt{x_1^2-x_3^2}\vec{k}, |x_1| \ge |x_2| \ge |x_3|$, $\vec{r}_0 = (4,3,2)$;

8) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = \sin(x_1+x_2)\vec{i} + \cos(x_2-x_3)\vec{j} + \mathrm{tg}(x_1-x_3)\vec{k}, |x_1-x_3| < \frac{\pi}{2}$, $\vec{r}_0 = (\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6})$;

9) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1}{(1+x_1+x_2+x_3)^2}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}), x_1+x_2+x_3 \ne -1$, $\vec{r}_0 = (1,2,-2)$;

10) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1-x_2}{1+x_3^2}(\vec{i}+\vec{j})+e^{x_1x_2}\vec{k}, (x_1,x_2,x_3)\in \mathbf{R}^3$, $\vec{r}_0 = (1,2,-3)$.

3. Знайти ротор векторного поля $\vec{a}$ в точці $\vec{r}_0$:

1) $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{r}, \vec{r}\in \mathbf{R}^3, \vec{r}_0 = (2,1,2)$;

2) $\vec{a}(\vec{r}) = \exp(||\vec{r}||^2)\vec{r}, \vec{r}\in \mathbf{R}^3, \vec{r}_0 = (1,-2,-2)$;

3) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_2}{x_1}\vec{i}+\frac{x_3}{x_2}\vec{j}+\frac{x_1}{x_3}\vec{k}, x_1x_2x_3 \ne 0, \vec{r}_0 = (1,1,-1)$.

4) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}(\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}), (x_1,x_2,x_3)\in \mathbf{R}^3$, $\vec{r}_0 = (5,2,3)$.

5) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = (x_1x_2-x_3)\vec{i}+(x_2+x_3)\vec{j}-x_2\vec{k}, (x_1,x_2,x_3)\in \mathbf{R}^3$, $\vec{r}_0 = (1,2,-1)$.

6) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = (x_1^2+x_2^2)\vec{i}-x_2x_3\vec{j}+x_1x_2x_3\vec{k}, (x_1,x_2,x_3)\in \mathbf{R}^3$, $\vec{r}_0 = (3,2,1)$.

7) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = (x_1^3+x_1)\vec{i} - x_1\vec{j} + x_3\vec{k}, (x_1,x_2,x_3)\in \mathbf{R}^3$, $\vec{r}_0 = (1,1,1)$.

8) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = (x_1+2x_2)\vec{i} + 2x_2^3\vec{j} + \vec{k}, (x_1,x_2,x_3)\in \mathbf{R}^3$, $\vec{r}_0 = (2,-1,2)$.

9) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = (x_1^2+x_3^2)\vec{i} + |x_2|\vec{j} + |x_3|\vec{k}, (x_1,x_2,x_3)\in \mathbf{R}^3$, $\vec{r}_0 = (1,-1,2)$.

10) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = |x_1-x_2|\vec{i}+|x_2-x_3|\vec{j}+|x_3-x_1|\vec{k}, (x_1,x_2,x_3)\in \mathbf{R}^3$, $\vec{r}_0 = (1,2,3)$.

4. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ через зовнішній бік поверхні S :

1) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = x_2x_3\vec{i} + x_3x_1\vec{j} + x_1x_2\vec{k}, (x_1,x_2,x_3)\in \mathbf{R}^3, S$ – бічна поверхня циліндра $x_1^2+x_2^2 \le 1, 0 \le x_3 \le 1$;

2) $\vec{a}$ з п.1), S – повна поверхня циліндра $x_1^2+x_2^2 \le 4, 0 \le x_3 \le 2$;

3) $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{r}, \vec{r} \in \mathbf{R}^3, S = \left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = 1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, x_3 \ge 0\right\}$.

4) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = x_2\vec{i} + x_3\vec{j} + x_1\vec{k}, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3, S$ – піраміда, обмежена площинами $x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_i = 0, 1 \le i \le 3$;

5) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2\vec{i} + x_2^2\vec{j} + x_3^2\vec{k}, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3, S$ – бічна поверхня конуса $x_1^2 + x_2^2 \le 4x_3^2, 0 \le x_3 \le 1$;

6) $\vec{a}$ з п.5), S – повна поверхня конуса $x_1^2 + x_2^2 \le x_3^2, 0 \le x_3 \le 1$;

7) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = x_1^3\vec{i} + x_2^3\vec{j} + x_3^3\vec{k}, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3, S$ – повна поверхня циліндра $x_1^2 + x_2^2 \le 1, -1 \le x_3 \le 1$;

8) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}), (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3, S$ – поверхня куба $[0, 1]^3$;

9) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)\vec{i} + (x_2 - x_3)\vec{j} + (x_3 - x_1)\vec{k}, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, S – поверхня піраміди, обмеженої площинами $x_1 + x_2 + x_3 = 2, x_i = 0, 1 \le i \le 3$;

10) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, $S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid |x_1| + |x_2| + |x_3| = 1\}$.

5. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}$ вздовж гладкої замкненої кривої Γ :

1) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = -x_2\vec{i} + x_1\vec{j} + 2\vec{k}, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, $\Gamma = \left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\right\}$, напрямок обходу – проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі Ox_3;

2) $\vec{a}$ з п.1), $\Gamma = \left\{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1 - 2)^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\right\}$, напрямок обходу – проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напрямку осі Ox_3;

3) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = (-x_2\vec{i} + x_1\vec{j})(x_1^2 + x_2^2)^{-1}, (x_1, x_2) \ne (0, 0)$, $\Gamma \subset \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 > 0\}$;

4) $\vec{a}$ з п.3); $\Gamma = \left\{(\sin t, \cos t, t(2\pi - t)) \mid 0 \le t \le 2\pi\right\}$, крива пробігається в напрямку зростання t;

5) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_2}\vec{i} + \frac{1}{x_3}\vec{j} + \frac{1}{x_1}\vec{k}, x_1x_2x_3 \ne 0, \Gamma$ – прямолінійний відрізок від точки $(1, 1, 1)$ до точки $(2, 4, 8)$;

6) $\vec{a}(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3)\vec{i} + (2 + x_1)\vec{j} + (x_1 + x_2)\vec{k}, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, Γ – менша дуга великого кола сфери $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 25$, від точки $A(3, 4, 0)$ до точки $B(0, 0, 5)$;

7) $\vec{a}(\vec{r}) = \sin||\vec{r}||\cdot\vec{r}, \vec{r}\in \mathbf{R}^3, \Gamma$ – крива з початком у точці $(0,0,0)$ і з кінцем у точці $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \pi)$;

8) $\vec{a}(\vec{r}) = -\frac{m}{||\vec{r}||^3}\vec{r}, \vec{r}\in \mathbf{R}^3\backslash\{\vec{0}\}, m > 0; \Gamma$ – крива з початком в точці $(1,2,2)$ і кінцем в точці $(0,0,1)$, що не проходить через точку $(0,0,0)$;

9) $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = x_2x_3(2x_1+x_2+x_3)\vec{i}+x_1x_3(x_1+2x_2+x_3)\vec{j}+ x_1x_2(x_1+x_2+2x_3)\vec{k}, (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3, \Gamma$ – крива з початком в точці $(3,5,-4)$ і кінцем в точці $(0,1,2)$.

6. Переконатися в потенціальності поля $\vec{a}(x_1,x_2,x_3) = \frac{2}{(x_2+x_3)^{1/2}}\vec{i} - \frac{x_1}{(x_2+x_3)^{3/2}}\vec{j} - \frac{x_1}{(x_2+x_3)^{3/2}}\vec{k}, x_i > 0, 1 \le i \le 3$, і знайти роботу поля вздовж шляху, що лежить в першому октанті і веде від точки $A(1,1,3)$ до точки $B(2,4,5)$.