p-групи

Євгенія Кочубінська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

16 листопада 2022

FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS

Лема Коші

Лема (Коші)

Якщо порядок скінченної групи ділиться на просте число p, то в групі є елемент порядку p.

Доведення.

Нехай G — скінченна група, $p \mid |G|$.
Розглянемо множину

$$M = \{(g_1, \ldots, g_p) \mid g_1 \ldots g_p = e\}, \quad |M| = |G|^{p-1}.$$

Задамо на M дію групи $\mathbb{Z}_p$:

$$(g_1, \ldots, g_p)^{\overline{k}} = (g_{p-k+1}, \ldots, g_p, g_1, \ldots, g_{p-k}).$$

$\left|\mathbb{Z}_p\right| = p \Rightarrow$ довжина орбіти 1 або p.
Є принаймні одна орбіта довжиною 1: $\{(e, \ldots, e)\}$.
Оскільки $p \mid |M|$, то повинні існувати й інші орбіти довжиною 1. Їхній вигляд: $\{(g, \ldots, g)\}$.
Отже, $g^p = e$.

$\square$

p-група

Нехай p — фіксоване просте число.

Означення

Група G називається *p-групою*, якщо порядок кожного її елемента є степенем числа p.

Твердження

Підгрупа та факторгрупи p-групи є p-групами.

Приклад

1. $\mathbb{Z}_p$ є p-групою.
2. Групи Q_8 та D_4 є 2-групами.
3. C_{p^∞} є нескінченною p-групою.

Теорема

Скінченна група G є p-групою $\Leftrightarrow |G| = p^k$ для деякого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Доведення.

$(\Rightarrow)$ Припустимо, що порядок групи G ділиться на просте число $q \neq p$.
Тоді за лемою Коші у групі G є елемент порядку q ↯↯↯
$(\Leftarrow)$ Випливає з теореми Лагранжа. $\square$

Центр p-групи

Теорема

Центр скінченної p-групи неодиничний.

Доведення.

Нехай G — p-група. Запишемо формулу класів для цієї групи:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{k} |C_i|,$$

де $C_1, \ldots, C_k$ — всі неодноелементні класи спряженості групи G.
Оскільки $|G| = p^k$ та $|C_i| \mid |G|$, то $|C_i| = p^l$ для деякого $l < k$.
Тоді $|Z(G)| = |G| - \sum_{i=1}^{k} |C_i|$ ділиться на p. Отже, $|Z(G)| \neq \{e\}$. □

Теорема

Група порядку p^2 є абелевою.

Доведення.

$|G| = p^2 \Rightarrow G$ — p-група $\Rightarrow Z(G) \neq \{e\}$.

- $|Z(G)| = p^2 \Rightarrow G = Z(G) \Rightarrow G$ — абелева.
- $|Z(G)| = p \Rightarrow |G/Z(G)| = p \Rightarrow G/Z(G)$ — циклічна $\Rightarrow G$— абелева.

$\square$

Твердження

Нехай G — неабелева група порядку p^3. Тоді $Z(G) = [G, G]$.

Доведення.

G — неабелева $\Rightarrow Z(G) \neq G$, $[G, G] \neq \{e\}$
G — p-група $\Rightarrow Z(G) \neq \{e\}$

$$\Rightarrow |Z(G)| = \left[\begin{array}{l} p^2; \\ p. \end{array}\right.$$

$|Z(G)| = p^2 \Rightarrow |G/Z(G)| = p \Rightarrow G/Z(G)$ — циклічна $\lightning$
$|Z(G)| = p \Rightarrow |G/Z(G)| = p^2 \Rightarrow G/Z(G)$ — абелева $\Rightarrow Z(G) > [G, G] \Rightarrow Z(G) = [G, G]$. $\square$

Розв'язність p-групи

Теорема

Нехай N — нормальна підгрупа групи G. Група G є розв'язною тоді і лише тоді, коли N та G/N є розв'язними.

Розв'язність p-групи

Теорема

Скінченна p-група є розв'язною.

Доведення.

Нехай G — скінченна p-група порядку p^k.
Якщо G — абелева, то все доведено.

Нехай G — неабелева.
Індукція за $|G|$.
База індукції $|G| = p$. Тоді $|G|$ — циклічна $\Rightarrow$ абелева $\Rightarrow$ все виконується.
$Z(G) \neq \{e\} \Rightarrow |Z(G)| = p^i$, $i < k \Rightarrow |G/Z(G)| = p^{k-i}$.
За припущенням індукції $Z(G)$ та $G/Z(G)$ —розв'язні $\Rightarrow$ G — розв'язна. $\square$