Математична логіка

Зміст

1 Лекція 1. Висловлювання та дії над ними. 17.02

1.1 Вступ

Коли говорять про предмет логіки, то часто кажуть, що це *наука про закони мислення.* Означення гарне, лишається тільки з'ясувати, що таке наука, що таке закони і що таке мислення. Що таке про, філологи вже з'ясували.

Тому наведене означення майже нічого не прояснює і його слід сприймати дуже обережно — межі компетенції логіки насправді значно вужчі. За цими межами лишаються, наприклад, історичні, психологічні і тому подібні закономірності процесу мислення. Логіку цікавлять лише *формальні, структурні* властивості цього процесу, які, можливо, відображають деякі властивості реального мислення. І не всього мислення (наприклад, за межами логіки лишається образне, асоціативне мислення митців), а лише так званих "правильних міркувань". Нам часто доводиться переконувати співрозмовника в істинності того чи іншого твердження. Логіка виникла з вивчення тих сторін мови, які суттєві для цієї мети. Виявилося — і в цьому й полягає сила логіки — що про коректність того чи іншого міркування (зокрема, математичного доведення) часто можна судити виключно на підставі форми тверджень, що складають ці міркування. Тому логіка цікавиться лише формою міркувань, тобто способами переходу від одних тверджень (які називають *засновками*) до інших (які називають *висновками*). "Правильність" міркувань означає, що з вірних засновків повинні одержуватися вірні висновки.[1]

Зокрема, одним із завдань логіки є систематизація і формалізація тих способів міркувань, які гарантують істинність висновку, якщо всі засновки — істинні. А самі по собі істинність чи хибність окремих засновків та висновків, їх конкретний зміст логіку не цікавлять.

Якщо ж у першу чергу досліджуються математичні міркування (трохи ширше — міркування, що використовуються в точних науках), а в ході досліджень застосовується математичний апарат, то таку науку природно назвати *математичною логікою.*

[1]Зауважимо однак, що схильність до правильних міркувань не дуже властива людям. Як писав датський вчений Х.І.Ульдалль, "Логічне мислення ... схоже швидше на танці коней, тобто на трюк, якому декого таки можна навчити, але далеко не всіх, причому цей трюк може виконуватися лише з великими зусиллями і з різним рівнем майстерності, і навіть кращі представники не в змозі повторити його багато разів підряд".

Позаяк наш курс невеликий, то ми звузимо предмет математичної логіки ще більше. Нашою головною метою буде намагання з'ясувати точний зміст двох центральних математичних понять: що таке "доведення" (як стверджують Бурбакі, ще з часів древніх греків говорити "математика" означає говорити "доведення") і що таке "алгоритм". У повному своєму обсязі ці поняття належать математиці не більше, ніж, скажімо, психології. Адже доведення, наприклад, це просто міркування, здатне переконати нас настільки, що ми готові за його допомогою переконувати інших. Але інтуїтивного розуміння понять доведення та алгоритму виявилося для математики не досить. Ще в XIX ст. після двотисячолітніх марних спроб виникла підозра про неможливість доведення певних тверджень (наприклад, знаменитого п'ятого постулату Евкліда про паралельність) чи неіснування певних алгоритмів (наприклад, трисекції кута за допомогою циркуля та лінійки). І хоча для цих двох конкретних проблем неіснування доведення/алгоритму зрештою вдалося довести[2], список подібних проблем швидко зростав.

Серед математиків ще довго панувало переконання, що кожну таку проблему рано чи пізно вдасться розв'язати. Найбільш афористично це переконання сформулював Гільберт: "Ми хочемо це знати — ми будемо це знати". Однак поступово прийшло розуміння одного принципового моменту. Переконливим свідченням існування певного доведення (алгоритму) служить демонстрація самого цього доведення (алгоритму). У той же час неможливість пред'явити конкретне доведення чи алгоритм може свідчити не про їх неіснування, а лише про нашу нездатність знайти їх (через обмеженість наших здібностей, надзвичайну складність доведення, тощо). Для доведення неіснування чогось спочатку треба чітко і недвозначно вказати, неіснування чого ми хочемо довести. Так виникла потреба у строгому означенні понять доведення і алгоритму.

1.2 Висловлювання

Висловлювання — це певні твердження (тобто розповідні речення) про певні об'єкти, за змістом яких доречно ставити питання про їх істинність чи хибність, причому відповідь на це питання має бути однозначною (хоча, можливо, і невідомою нам). Зокрема, більшість речень, що

[2] У першому випадку була побудована нова геометрія, в якій п'ятий постулат *a priori* не виконувавсь і яка була настільки ж несуперечливою, наскільки несуперечливою є класична евклідова геометрія. У другому випадку вдалося в алгебричних термінах описати усі геометричні конструкції, які можна побудувати за допомогою циркуля та лінійки, і трисекції кута серед них не виявилося.

зустрічаються в математичних текстах, є висловлюваннями. Не є ними означення, запитання, наказові та окличні речення, тощо.[3]

Сказане не слід сприймати за означення висловлювання. *Логіка висловлювань* будується таким же чином, як і багато інших розділів математики (алгебра, геометрія, теорія ймовірностей і т.д.). В основу кладеться деякий клас об'єктів (у нашому випадку — *прості висловлювання*) разом із деяким набором властивостей і відношень між ними. Зокрема, ми дотримуємося т.зв. *принципу 2-значності суджень*:

Кожне висловлювання, в якому формулюється певна чітко виражена думка, є або ***істинним****, або* ***хибним****, незалежно від того, чи стосується воно речей і подій відомих, чи невідомих, минулих, майбутніх чи теперішніх. При цьому жодне висловлювання не може бути одночасно і хибним, й істинним.*[4]

Ці поняття є вихідними, первісними,[5] і всередині даного розділу математики не вимагають подальших означень (можуть лише роз'яснюватися на прикладах). Звичайно, вихідні властивості і відношення вибираються так, щоб вони відповідали змістовній практиці, яку ця математична теорія збирається описувати. Зокрема, логіка створювалася для дослідження висловлювань (і певних маніпуляцій з ними — так званих міркувань) у живих, неформальних мовах. Але в процесі формалізації довелося абстрагуватися від конкретного змісту висловлень і перейти до формальних мов, в яких висловлювання ототожнюються з певними послідовностями символів (так званими правильно побудованими формулами) і визначаються, таким чином, синтаксисом цих мов.

Якщо висловлювання істинне, то кажуть, що *значенням істинності* (або *логічним значенням*) цього висловлювання є "істина" (і позначають це значення символом "**і**", або "**t**" — від англійського true, або "1"). Аналогічно значення істинності хибного висловлювання позначають символом "**х**" (або "**f**" — від англійського false, або "0").

Логіка висловлювань вивчає лише ті їх властивості, які можуть бути сформульовані лише в термінах їх істинності чи хибності (і не апелюють до змісту висловлювань). Переваги такого підходу ми зможемо оцінити

[3] Точніше, висловлюваннями є не самі розповідні речення, а їх зміст. Те саме висловлювання може бути виражене різними розповідними реченнями.

[4] Так є в математиці, принаймні, в класичній. Однак у повсякденному житті з поділом висловлювань на істинні й хибні трохи гірше. Яка Ваша думка з приводу істинності висловлювання "Зараз на вулиці хороша погода"?

[5] Ми лишимо філософам з'ясовувати глибинну суть таких понять, як істина і хибність. Для нас досить, що вони можуть бути значеннями істинності висловлювань.

вже в наступному параграфі при вивченні дій над висловлюваннями (особливо добре це буде видно на прикладі імплікації).

Зауваження. Спочатку ідея позначення значень істинності висловлювань числами може видатися досить безглуздою: із числами можна виконувати різні дії, а який зміст можуть мати ці дії для значень істинності? Виявляється, що можуть. Частково ми в цьому переконаємося пізніше.

За текстом самого висловлювання, взагалі кажучи, ще не можна встановити його істинності. Треба ще врахувати контекст (або точніше: *зафіксувати ситуацію*). Наприклад, щоб визначити істинність висловлювання "на вулиці йде дощ", треба знати час і місце події. Не завжди допомагає і контекст: наївне переконання, що кожному розповідному реченню можна розумним (принаймні, несуперечливим) чином приписати певне значення істинності, спростовується так званим "парадоксом брехуна". Якщо хтось говорить: "Розповідне речення, яке я зараз виголошую, є хибним висловлюванням", то спроба приписати цьому реченню певне значення істинності негайно приводить до суперечності. Справді, якщо припустити, що воно істинне, то внаслідок свого власного змісту воно повинно бути хибним, і навпаки.[6] Тому такі речення ми не вважаємо висловлюваннями.

Навіть тоді, коли ми переконані, що маємо справу з висловлюванням, ми не завжди можемо встановити його значення істинності. Встановлення цього значення може вимагати від нас нереальних матеріальних витрат чи інтелектуальних зусиль. До перших належать висловлювання типу "На найближчій планетній системі існують органічні форми життя", до других — багато математичних гіпотез. Лише кілька прикладів:
— існують непарні досконалі числа;
— існує нескінченно багато простих "чисел–близнюків";
— кожне більше за 2 парне число є сумою двох простих чисел;
— "$\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$".

Більше того, для багатьох математичних теорій, зокрема, для арифметики, доведено неіснування алгоритмів, які б дозволяли встановлювати логічні значення довільних висловлювань цих теорій (навіть

[6] "Парадокс брехуна" лежить в основі кількох знаменитих теорем математичної логіки (зокрема, теореми Ґеделя про неповноту арифметики і теореми Тарського про невиражальність поняття істини).

якщо знехтувати будь-якими обмеженнями на час роботи, об'єм пам'яті і т.п.).[7]

Висловлювання, які істинні в усіх можливих ситуаціях, називаються *абсолютно істинними*. Аналогічно визначаються *абсолютно хибні* висловлювання. Абсолютно істинні та абсолютно хибні висловлювання називають ще *логічними константами*.

1.3 Дії над висловлюваннями (логічні зв'язки)

Розповідні речення бувають прості й складні. Прості речення з'єднуються в складні за допомогою різних сполучників і мовних конструкцій. Найбільш уживаним з таких конструкцій у логіці висловлювань відповідають *дії над висловлюваннями* (їх ще називають *логічними операціями*, *логічними зв'язками* або *логічними функторами*). За допомогою цих дій із простих висловлювань утворюють *складні*.[8]

Але конструкції живої мови неоднозначні, їх тлумачення залежить від контексту. Досить порівняти вживання сполучника "або" в реченнях "Студент Логіченко має видатні математичні здібності або він уже розв'язував подібні задачі раніше" і "Студент Логіченко отримає на екзамені з математичної логіки "добре" або "відмінно". Тому при визначенні логічної дії з усіх можливих варіантів і відтінків уживання певної граматичної конструкції вибирається і фіксується один. З іншого боку, в логіці висловлювань дозволяються будь-які граматично правильні способи творення складних речень. Вимагається лише, щоб за формою відповідної конструкції і логічними значеннями простих висловлювань-компонент логічне значення утвореного складного висловлювання встановлювалося однозначно. Причому це значення повинно залежати саме від логічних значень простих компонент, а не від їх змісту.[9]

Таким чином, логічна зв'язка повністю визначається своєю *таблицею істинності* (ця таблиця вказує, яких логічних значень набуває складне висловлювання для різних наборів логічних значень простих висловлювань, що до нього входять).

---

[7]Однак встановлення значення істинності конкретних висловлювань і не входить у компетенцію логіки висловлювань.

[8]Під простими висловлюваннями ми будемо розуміти такі висловлювання, внутрішня структура яких нас зовсім не цікавить (принаймні, в межах логіки висловлювань). Нам треба лише вміти розпізнавати і розрізняти їх. Тому далі прості висловлювання ми позначатимемо малими буквами латинського алфавіту (зазвичай з його першої половини).

[9]У цьому сенсі логіку висловлювань можна вважати теорією логічних зв'язок.

Розглянемо найбільш уживані логічні операції. Найпростішою з них є

Заперечення. Ця операція утворена на основі звороту "невірно, що ..." і позначається символом $\neg$. Логічне значення $\neg a$ (читається "не a") характеризується такою таблицею істинності:

a	0	1
$\neg a$	1	0

Кон'юнкція. Ця операція утворена на основі сполучника "і"; позначається символом $\wedge$. Логічне значення виразу $a \wedge b$ (читається "a і b") визначається такою таблицею істинності:

a	0	0	1	1
b	0	1	0	1
$a \wedge b$	0	0	0	1

У живій мові кон'юнкція може виражатися й іншими сполучниками та конструкціями: "а" ("На городі бузина, а в Києві дядько"), "але", "хоча" ("Він зайшов у річку, хоча й не вмів плавати"), "незважаючи на те, що", ..., і навіть взагалі без сполучника: "На городі бузина, у Києві дядько". У живій мові ці сполучники не є тотожними, вони мають різні смислові відтінки, які в реальних життєвих обставинах можуть бути дуже важливими. Однак у логіці висловлювань ми ці відтінки не розрізняємо.

Диз'юнкція та альтернатива. Обидві ці операції утворені на основі сполучника "або": *диз'юнкція* відповідає з'єднувальному "або" і позначається символом $\vee$ (вираз $a \vee b$ читається "a або b");[10] *альтернатива* відповідає розділовому "або" і позначається символом $\oplus$ (вираз $a \oplus b$ читається "або a, або b"). Ці операції характеризуються такими таблицями істинності:

a	0	0	1	1
b	0	1	0	1
$a \vee b$	0	1	1	1

a	0	0	1	1
b	0	1	0	1
$a \oplus b$	0	1	1	0

Еквіваленція. Ця операція утворена на основі мовних конструкцій "... тоді й лише тоді, коли ...", "... є необхідною й достатньою умовою для ...", "... рівносильне ...", тощо. Еквіваленція позначається символом $\leftrightarrow$ (вираз $a \leftrightarrow b$ читається "a еквівалентне b") і задається такою таблицею істинності:

[10] Символ $\vee$ походить від першої літери латинського слова `vel`, яке якраз і має значення з'єднувального `або`.

a	0	0	1	1
b	0	1	0	1
$a \leftrightarrow b$	1	0	0	1

Імплікація. Ця операція утворена на основі звороту "якщо ..., то ..." і позначається символом $\rightarrow$. Логічне значення виразу $a \rightarrow b$ (читається "a імплікує b" або "якщо a, то b") визначається такою таблицею істинності:

a	0	0	1	1
b	0	1	0	1
$a \rightarrow b$	1	1	0	1

Висловлювання a називається *умовою, засновком* або *антецедентом* імплікації, а висловлювання b — її *наслідком* або *консеквентом.*

Проте відповідність між уживанням звороту "якщо ... , то ..." в живій мові і імплікацією як дією над висловлюваннями дуже неповна. У першу чергу це пов'язане з тим, що в мовній практиці зазвичай не використовують складні речення вигляду "якщо a, то b" тоді, коли про речення a напевно відомо, що воно є хибним. Вважається, що такі речення безглузді. І справді, чому ми повинні вважати речення вигляду "якщо $2 \times 2 = 5$, то $3 \times 7 = 9$" або "якщо на Північному полюсі ростуть ананаси, то $2 \times 2 = 2$" не тільки не позбавленими глузду, а навіть істинними?

Але така позиція не може бути прийнятною в математиці. Наприклад, один із найпоширеніших методів доведення — від супротивного — ґрунтується якраз на виводі наслідків із твердження, в хибності якого ми впевнені. З іншого боку, багато важливих теорем теорії чисел мають вигляд "якщо гіпотеза Рімана правильна, то має місце твердження b", тобто вигляд імплікацій $a \rightarrow b$, де a — гіпотеза Рімана. Однак досі не відомо, чи справді ця гіпотеза є правильною. Зустрічається в математиці й ситуація, коли одна й та ж аксіома в одній теорії вважається істинною, а в іншій — хибною (досить згадати аксіому паралельності в геометрії або аксіому вибору в теорії множин).

Ще два аргументи на користь загальноприйнятої таблиці істинності для імплікації:

а) умовні обіцянки: "якщо складеш екзамен з логіки, то вийду за тебе заміж". Обіцянку можна вважати порушеною (хибною) лише в тому випадку, коли умова виконана (істинна), а друга частина — ні;

b) математичні міркування типу "якщо n ділиться на 6, то n ділиться на 3". Оскільки ми вважаємо таке міркування істинним, то ми повинні вважати його істинним і для конкретних n. Якщо взяти, наприклад, $n = 9, 10, 12$, то виходить, що для кожного з наборів значень істинності $(0, 1)$, $(0, 0)$ і $(1, 1)$ висловлювань $a =$"n ділиться на 6" і $b =$"n ділиться на 3" імплікація $a \to b$ повинна бути істинною.

Таким чином, якщо ми хочемо, щоб імплікація $\mathbf{t} \to \mathbf{f}$ була хибною і щоб математичні міркування типу "якщо дане число ділиться на 6, то воно ділиться на 3" вважалися законними, то таблиця істинності для імплікації визначається однозначно.

У зв'язку з цим у жодному разі не можна розглядати імплікацію як твердження про те, що засновок є причиною наслідку (у тому сенсі, як це прийнято в природничих науках). Дотримуючись нашого означення, імплікацію "якщо в зайця куций хвіст, то головною посадовою особою в університеті є ректор" слід визнати істинною, бо істинним є висновок імплікації: "головною посадовою особою в університеті є ректор". Але при розумінні засновку як причини (як це розуміють у природничих науках чи — більш широко — у повсякденній практиці) такий висновок жодним чином не випливає із засновку (хоча останній також істинний). Адже між ними немає жодного причинного зв'язку. Розуміння імплікації як причинно-наслідкового зв'язку між засновком і висновком не може бути реалізоване засобами логіки висловлювань, позаяк його не можна сформулювати лише в термінах істинності-хибності.

У звичайній мові зворот "якщо ... , то ..." може вживатися і в інших значеннях: для вираження послідовності подій у часі або просторі, для вираження зв'язку мети і засобів ("якщо хочеш рибки, то лізь у воду"), для вираження умовної домовленості ("якщо складеш екзамен, то отримаєш стипендію"), тощо, у кожному з яких він має свою специфіку. Однак в імплікації $a \to b$ ми абстрагуємося від природи зв'язку між a та b, і надаємо імплікації тільки того змісту, який виражається таблицею істинності.

Кожну логічну зв'язку ми характеризували певною таблицею істинності. Але кожну таку таблицю можна розглядати як табличне задання деякої функції, визначеної на множині логічних значень $B = \{0, 1\}$ (як у випадку заперечення) або на декартовому квадраті $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$ цієї множини (як в інших випадках) і яка набуває значень з цієї ж множини. Такий підхід природно узагальнюється на довільну кількість аргументів і дозволяє ототожнювати логічні операції з функціями вигляду $\{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$. Зокрема, він дозволяє вводити нові операції, вже не спираючись безпосередньо на мовну практику. Приклади таких операцій з'являться у нас пізніше.

Число n називається *арністю* операції. При $n = 1$ операцію називають *унарною*, при $n = 2$ — *бінарною*, при $n = 3$ — *тернарною*.

Для тих логічних зв'язок, що ми розглянули, в літературі зустрічаються й інші позначення. Наведемо найбільш поширені з них:

для заперечення — N, $^{-}$, $\sim$, C;
для диз'юнкції — D, $+$;
для кон'юнкції — C, $\&$, $\cdot$;
для імплікації — $\supset$, $\Rightarrow$;
для еквіваленції — $\sim$, $\equiv$, $\Leftrightarrow$.

Символи $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ і $\equiv$ ми також будемо використовувати, але не для позначення операцій, а з іншою метою.

Підсумовуючи, наведемо таблицю всіх тих бінарних зв'язок, в яких результат залежить від обох аргументів. Для тих зв'язок, які ще не зустрічалися, наводимо також їх найпоширеніші назви і позначення:

a	b	$a \wedge b$	$a \not\rightarrow b$	$a \not\leftarrow b$	$a \downarrow b$	$a \leftrightarrow b$	$a \oplus b$	$a \vee b$	$a \leftarrow b$	$a \rightarrow b$	$a \mid b$
0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0

$a \leftarrow b$ — *зворотна* (або *обернена*) *імплікація*; $a \not\leftarrow b$ — *зворотна* (або *обернена*) *антиімплікація*; $a \mid b$ (або $a \uparrow b$) — *антикон'юнкція* (або *штрих Шефера*, або *несумісність*); $a \not\rightarrow b$ — *антиімплікація*; $a \downarrow b$ — *антидиз'юнкція* (або *стрілка Пірса*, або *стрілка Лукасевича*).

1.4 Формули

1.4.1 Формули

За допомогою логічних операцій ми тепер можемо будувати як завгодно складні висловлювання. Записувати їх ми будемо у вигляді *формул* логіки висловлювань. Інтуїтивно зрозуміло, що таке формули, але щоб їх можна було вивчати, корисно мати строге означення. Для цього перш за все фіксуємо *алфавіт*,[11] за допомогою якого записуватимемо формули. Алфавіт логіки висловлювань складається із символів трьох типів:

[11] *Алфавітом* називається довільна множина попарно різних символів. Елементи алфавіту часто називають *буквами*.

а) малі літери латинського алфавіту (можливо, з індексами), які ми будемо називати *пропозиційними змінними* (або просто *змінними*), і символи $0, 1$ — для позначення простих висловлювань;

b) символи $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\oplus$, $\to$, $\leftrightarrow$ логічних операцій;

c) допоміжні символи — ліва дужка "(" і права дужка ")" — для фіксації порядку виконання дій.

Формулами логіки висловлювань будуть певні слова (тобто послідовності символів) у цьому алфавіті. Точніше:

а) кожен символ для позначення простих висловлювань є формулою;

b) якщо A і B — формули, то слова $(\neg A)$, $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \oplus B)$, $(A \to B)$, $(A \leftrightarrow B)$ також будуть формулами;

c) слово буде формулою тоді й лише тоді, коли його можна одержати з простих висловлювань, застосовуючи скінченну кількість разів правила із пункту b).

Таким чином, строге означення формули має *рекурсивний* характер: спочатку вказуються деякі вихідні формули (пункт а), а потім формулюються правила, які дозволяють з уже побудованих формул будувати нові (пункт b).

Рекурсивні означення досить поширені в математиці. Зокрема, вони неодноразово зустрічатимуться і в нас. Такі означення конструктивні (наприклад, неважко побудувати алгоритм, який для кожної послідовності символів розпізнає, чи є вона формулою логіки висловлювань, а потім запрограмувати його і передовірити перевірку властивості "бути формулою" комп'ютеру). Крім того, вони добре пристосовані для доведень за індукцією (наприклад, щоб довести, що всі формули мають певну властивість, досить перевірити цю властивість для найпростіших формул, а потім показати, що кожне правило побудови нових формул цю властивість зберігає).

Логічна зв'язка, яка при побудові формули використовувалася останньою, називається *головною зв'язкою* формули. Кількість зв'язок у формулі називається її *довжиною*. Якщо формула A має вигляд $A = A_1 A_2 A_3$, де слово A_2 також є формулою, то A_2 називається *підформулою* формули A.

Нагромадження дужок у великих формулах часто робить їх важкими для сприйняття. Уникнути цього нагромадження можна за рахунок домовленості про порядок виконання дій (подібно тому, як це робиться в арифметиці). Для цього кожній зв'язці приписується певний ранг:

$$\neg, \quad \wedge, \quad \vee, \quad \oplus, \quad \to, \quad \leftrightarrow$$

(зв'язки виписані в порядку убування їх рангів), і операції більшого рангу виконуються першими. Операції однакового рангу виконуються зліва направо. Дужки використовуються головно для того, щоб змінити обумовлений цими домовленностями порядок виконання дій. Зовнішні дужки зазвичай також опускаються.[12]

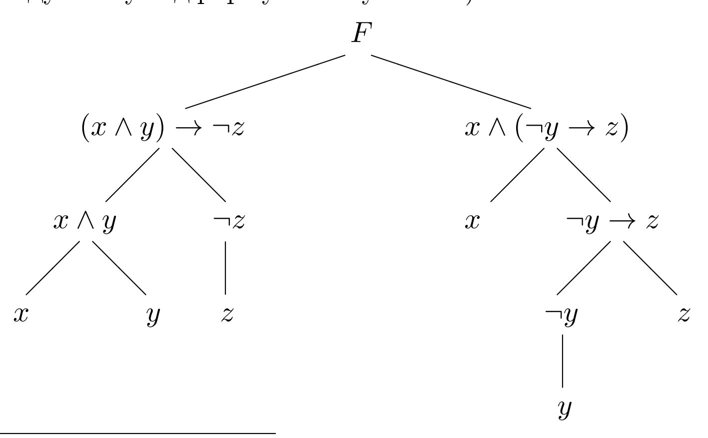
Тому надалі ми будемо вживати, взагалі кажучи, не формули, а вирази, які відрізнятимуться від формул деякими вольностями (наприклад, у них може бути пропущена частина дужок). У разі потреби строго дотримуватися означення ми говоритимемо про *правильно побудовані формули* (скорочено: ппф).

Якщо F_1 і F_2 — дві підформули формули F, то або вони не перетинаються, або одна з них міститься в іншій. Звідси випливає, що підформули відносно включення утворюють дерево (*дерево підформул*) і це дерево визначене однозначно. Дерево підформул формули F є кореневим із коренем F, а висячі вершини відповідають найкоротшим підформулам, тобто простим висловлюванням, що зустрічаються в F.

Для прикладу розглянемо дерево підформул для формули

$$F = ((x \wedge y) \to \neg z) \vee (x \wedge (\neg y \to z))$$

(зовнішні дужки у підформулах опускаємо):



[12]Не слід зловживати цими домовленостями. Формули, які містять замало дужок, також важкі для сприйняття.

Зауваження. **1.** Сама по собі формула логіки висловлювань не є істинною чи хибною: це лише побудований за певними правилами рядок символів. Ми одержимо хибне чи істинне висловлювання лише після того, як підставимо у формулу замість змінних конкретні висловлювання і виконаємо над ними відповідні операції.

2. Запис $F = F(x_1, \dots, x_n)$ (або просто $F(x_1, \dots, x_n)$) означає, що F розглядається як формула від змінних $x_1, \dots, x_n$. Однак при цьому деякі змінні можуть бути *фіктивними*, тобто явно у формулі не зустрічатися. До того ж у формулі F можуть зустрічатися й інші змінні, окрім $x_1, \dots, x_n$. Тому, наприклад, запис $x_1 \vee x_2 = F(x_2, x_3)$ є коректним. Коли пишемо $F = F(x_1, \dots, x_n)$, то це означає, що в даний момент нас цікавить залежність формули F саме від змінних $x_1, \dots, x_n$.

1.4.2 Таблиці істинності

Таблицю істинності можна будувати не тільки для зв'язок, а й для довільних формул логіки висловлювань. Для прикладу розглянемо побудову таблиці істинності для формули $F = ((x \wedge y) \to \neg z) \vee (x \wedge (\neg y \to z))$. У верхньому рядку таблиці виписуємо всі підформули даної формули у порядку зростання їх складності. Зокрема, спочатку виписуються усі прості висловлювання (змінні), а останньою — сама формула. Для змінних розглядаємо усі можливі варіанти значень. Стовпчики зручно заповнювати послідовно зліва направо, використовуючи для побудови стовпчика з даною підформулою таблицю істинності головної зв'язки цієї підформули.

x	y	z	$x \wedge y$	$\neg z$	$\neg y$	$\neg y \to z$	$(x \wedge y) \to \neg z$	$x \wedge (\neg y \to z)$	F
0	0	0	0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1	0	1	1

Часто таблиця істинності записується значно компактніше: виписується тільки сама формула і для кожної із змінних, що входять у формулу, виділяється одне з її входжень (наприклад, перше). Логічні значення змінних виписуються під їх виділеними входженнями, а логічні значення підформул — під їх головними зв'язками (позаяк головна зв'язка підформули визначена однозначно і різні підформули мають різні головні зв'язки, то жодних непорозумінь такий запис не викликає). Таблиці істинності у такій компактній формі введені Постом у 1921 і називаються *таблицями Поста*. Для даної формули F таблиця Поста має вигляд

$((\boldsymbol{x}$	$\wedge$	$\boldsymbol{y})$	$\to$	$\neg$	$\boldsymbol{z})$	$\vee$	$(x$	$\wedge$	$(\neg\, y$	$\to$	$z))$
0	0	0	1	1	0	1		0	1	0	
0	0	0	1	0	1	1		0	1	1	
0	0	1	1	1	0	1		0	0	1	
0	0	1	1	0	1	1		0	0	1	
1	0	0	1	1	0	1		0	1	0	
1	0	0	1	0	1	1		1	1	1	
1	1	1	1	1	0	1		1	0	1	
1	1	1	0	0	1	1		1	0	1	

Інколи при побудові таблиці істинності формули F доводиться враховувати не тільки всі ті змінні, які у ній зустрічаються явно, але й деякі інші (у цьому випадку говорять, що додаткові змінні зустрічаються у формулі F неявно). Така необхідність, наприклад, виникне у нас пізніше при доведенні рівносильності формул.

Зауваження. На таблиці істинності логічних операцій можна дивитися двояко. Можна вважати зв'язки $\wedge, \vee, \neg, \to, \leftrightarrow, \oplus$ скороченими позначеннями відомих конструкцій і будувати таблиці, уже маючи перед собою цю інтерпретацію зв'язок (вище ми так і робили). А з другого боку, можна вважати таблиці істинності означеннями операцій $\wedge, \ldots, \leftrightarrow, \oplus$ (не спираючись на яку-небудь інтерпретацію цих символів). Цей другий підхід дуже важливий для подальшого.

1.4.3 Труднощі перекладу

Як для перекладу з однієї живої мови на іншу, так і для перекладу із звичної розмовної мови на мову формул логіки висловлювань і навпаки немає формальних процедур. Такий переклад є неоднозначним, вимагає аналізу висловлювань не тільки за формою, а й за змістом, і є творчим процесом. Пояснюється це тим, що в живих мовах немає взаємно однозначної відповідності між змістом та формою його вираження: та сама думка може бути виражена різними способами (синонімія), а в залежності від контексту те саме речення може виражати різні думки (омонімія).

Наприклад, в залежності від контексту сполучник "або" може означати як диз'юнкцію $\vee$, так і альтернативу $\oplus$. Зворот "якщо .., то ..." може означати як імплікацію $\to$, так і еквіваленцію $\leftrightarrow$ (зокрема, в означеннях: "якщо послідовність має границю, то вона — збіжна") або кон'юнкцію $\wedge$ ("якщо в планіметрії вивчають плоскі фігури, то в стереометрії — просторові тіла"). Навпаки, імплікація $\to$ в українській мові може виражатися зворотами "якщо ... , то ...", "оскільки ... , то ...", "позаяк ... , то ...", "... , бо ...", "коли ... , тоді ...", "з ... випливає ...", "... тягне за собою ...", "... лише тоді, коли ...", "як (тільки) ... , зараз ...", і т.д. Кон'юнкція $\wedge$ може виражатися зворотами "і", "а", "але", "якщо, то", "хоч", "незважаючи на", ... ; еквіваленція $\leftrightarrow$ може передаватися зворотами "... тоді й лише (тільки) тоді, коли ...", "для ... необхідно й достатньо, щоб ...", "якщо ... , то ...", "... рівносильне (еквівалентне) ...", "... якщо і тільки якщо ...", і т.д.

Схожі приклади можна навести й для інших зв'язок.

Для прикладу, як здійснюється переклад на мову формул логіки висловлювань, розглянемо таке речення з Остапа Вишні: "Собак вони своїми іклами одним ударом січуть на беф-строганов, а охотник, як побачить сікача, зараз бере на мушку або дуба, або грушу і сидить там тихий, як горличка".

Спочатку виділимо всі прості висловлювання, які входять до складу даного складного висловлювання. У даному випадку будемо вважати простими такі висловлювання: "Собак вони (тобто сікачі) своїми іклами одним ударом січуть на беф-строганов", "Охотник побачить сікача", "[Охотник] бере на мушку дуба", "[Охотник] бере на мушку грушу", "[Охотник] сидить тихий, як горличка". Позначимо їх буквами a, b, c, d, e.

Далі потрібно виявити логічні зв'язки, за допомогою яких будується дане складне висловлювання. Сполучник "а" вживається тут у значенні кон'юнкції. Зворот "як ..., зараз ..." можна, очевидно, інтерпретувати, як імплікацію. Сполучник "або" тут вживається в розділовому значенні, тому йому відповідає альтернатива. Нарешті, сполучник "і" в кінці речення вживається у значенні кон'юнкції.

Насамкінець треба проаналізувати порядок, в якому дане складне висловлювання будується з простих.

Лише після такого, досить суб'єктивного, аналізу тексту ми можемо написати відповідну формулу:

$$a \wedge (b \to ((c \oplus d) \wedge e)) \,.$$

1.4.4 Класифікація формул

Впорядковані набори $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ логічних значень будемо називати *булевими*[13] *векторами*, компоненти $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — *координатами* булевого вектора, а число n — його *довжиною* або *розмірністю*. Два булеві вектори $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ і $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ вважаються рівними тоді й лише тоді, коли рівні їх відповідні координати: $\varepsilon_1 = \delta_1, \ldots, \varepsilon_n = \delta_n$.

Нехай $F(a_1, \ldots, a_n)$ — формула логіки висловлювань, яка не містить інших простих висловлювань, крім $a_1, \ldots, a_n$. Множина $\mathcal{O}(F)$ всіх тих наборів $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ логічних значень, для яких $F(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = 1$, називається *областю істинності* формули F. Її доповнення до множини всіх булевих векторів довжини n називається *областю хибності* формули F (тобто це множина всіх таких наборів $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, що $F(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = 0$).

Формула логіки висловлювань називається *виконливою*, якщо її область істинності не є пустою. Виконлива формула називається *тавтологією* (або *тотожно істинною*), якщо її область істинності містить усі булеві вектори відповідної довжини (або, що те саме, область хибності є порожньою). Формули з непорожньою областю хибності називаються *спростовуваними*. Спростовувана формула називається *суперечністю* (або *тотожно хибною)*, якщо її область істинності — порожня множина. Формули, для яких і область істинності, і область хибності — непорожні, називаються *нейтральними*.

Однією з центральних задач у логіці висловлювань (до неї зводиться багато інших) є задача встановлення типу формули (тавтологія, тотожно хибна чи нейтральна). Легко зрозуміти, що досить вміти перевіряти формули лише на тавтологічність. Справді, формула F є тотожно хибною, якщо її заперечення $\neg F$ є тавтологією, і нейтральною, якщо ні F, ні $\neg F$ не є тавтологіями. Найпростішим, хоча й громіздким, методом перевірки формули на тавтологічність є побудова її таблиці істинності.

[13] На честь англійського логіка Дж.Буля (1815–1864).