Симетричні многочлени

Євгенія Кочубінська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

16 листопада 2022

Многочлени від багатьох змінних

Нехай F — деяке поле.

$F[x_1, \ldots, x_n]$ — кільце многочленів від змінних $x_1, \ldots, x_n$ з коефіцієнтами з поля F.

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum a_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$$

— многочлен від змінних $x_1, \ldots, x_n$.

Приклад

Кільце $\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$
$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2 + 2x_1 x_2 x_3 + 3x_2^2 x_3^2$

Многочлени від багатьох змінних

Степінь одночлена $a_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ — це число $i_1 + \dots + i_n$.

Приклад

$\deg(x_1^3 x_2 x_3^2) = 6$

Степінь многочлена — це найбільший зі степенів одночленів, що входять у многочлен $f(x_1, \dots x_n)$.

Приклад

Степінь многочлена

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2 + 2x_1 x_2 x_3 + 3x_2^2 x_3^2$$

дорівнює 4.

Лексикографічний порядок

Що є старшим членом многочлена

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2 + 2x_1 x_2 x_3 + 3x_2^2 x_3^2 \ ?$$

Впорядкування у *лексикографічному порядку*:

- спочатку порівнюють показники степенів при x_1;
- якщо вони однакові, то порівнюють показники степенів при x_2;
- і т. д.

Тому

$$x_1^3 x_2 \geq 2x_1 x_2 x_3 \geq 3x_2^2 x_3^2.$$

Старший член многочлена — найвищий член у лексикографічному порядку.

Симетричні многочлени

Задамо дію групи $\mathcal{S}_n$ на $F[x_1, \ldots, x_n]$.

Підстановка $\sigma \in \mathcal{S}_n$ діє на многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$ за правилом:

$$f^\sigma(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

Приклад

Нехай $\sigma = (12)$. Тоді для

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2 + 2x_1 x_2 x_3 + 3x_2^2 x_3^2$$

маємо

$$f^\sigma(x_1, x_2, x_3) = x_2^3 x_1 + 2x_2 x_1 x_3 + 3x_1^2 x_3^2.$$

Симетричні многочлени

Многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$ називається симетричним, якщо для довільної $\sigma \in \mathcal{S}_n$

$$f^\sigma = f.$$

Приклад

- $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$;
- $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_1 x_2 x_3$;
- $f(x_1, x_2, x_3) = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)$.

Антиприклад

- $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2 + 2x_1 x_2 x_3 + 3x_2^2 x_3^2$;
- $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_1^2 x_2 x_3$;
- $f(x_1, x_2, x_3) = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$.

$SF[x_1, \ldots, x_n]$ — множина всіх симетричних многочленів від змінних $x_1, \ldots, x_n$.

Теорема

Множина $SF[x_1, \ldots, x_n]$ всіх симетричних многочленів утворює кільце.

Елементарні симетричні многочлени

Елементарні симетричні многочлени:

$$\sigma_1(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n,$$
$$\ldots$$
$$\sigma_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} x_{i_1} \ldots x_{i_K},$$
$$\ldots$$
$$\sigma_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \ldots x_n.$$

Елементарні симетричні многочлени

Елементарні симетричні многочлени з $SF[x_1, x_2, x_3]$:

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3,$$
$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$
$$\sigma_3 = x_1x_2x_3.$$

Основна теорема про симетричні многочлени

Теорема

Для кожного симетричного многочлена $f(x_1,\dots,x_n)\in SF[x_1,\dots,x_n]$ існує єдиний такий многочлен $F(x_1,\dots,x_n)\in F[x_1,\dots,x_n]$, що

$$f(x_1,\dots,x_n)=F(\sigma_1(x_1,\dots,x_n),\dots,\sigma_n(x_1,\dots,x_n)).$$

Лема 1

Лема

Нехай $u = ax_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ — старший член многочлена $f(x_1, \dots, x_n)$. Тоді $k_1 \geq \dots \geq k_n$.

Доведення.

Припустимо, що $k_i < k_{i+1}$. Разом з u має містити одночлен, у якому x_i та x_{i+1} помінялися місцями.Але тоді u не є старшим. $\square$

Лема 2

Лема

Для довільного одночлена $u = ax_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$, у якого $k_1 \geq \dots \geq k_n$, існує єдиний такий набір невід'ємних чисел $l_1, \dots, l_n$, що старший член многочлена $\sigma_1^{l_1} \dots \sigma_n^{l_n}$ збігається з u.

Доведення.

Старшим членом σ_k є $x_1 \dots x_k$.Тоді старшим членом $\sigma_1^{l_1} \dots \sigma_n^{l_n}$ є

$$x_1^{l_1}(x_1x_2)^{l_2} \dots (x_1 \dots x_n)^{l_n} = x_1^{l_1+\dots+l_n} x_2^{l_2+\dots+l_n} \dots x_n^{l_n}.$$

Порівняємо з u:

$$\begin{aligned} l_1 + \dots + l_n &= k_1 \\ l_2 + \dots + l_n &= k_2 \quad \Rightarrow \qquad\qquad l_i = k_i - k_{i+1} \geq 0, i = 1, \dots, n-1 \\ &\dots \\ l_n &= k_n \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad l_n = k_n \geq 0 \end{aligned}$$

□

Доведення теореми. Існування

Нехай $f(x_1, \ldots, x_n) \in SF[x_1, \ldots, x_n]$ — довільний.

Якщо $f = 0$, то $F = 0$.

Нехай $f \neq 0$, а $u_1 = ax_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ — його старший член.

За лемою 1: $k_1 \geq \cdots \geq k_n$.

За лемою 2: Існує такий $F_1 \in F[x_1, \ldots, x_n]$, що старший член $F_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ дорівнює $u_1 = ax_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$.

Розглянемо симетричний многочлен $f_1 = f - F_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

Якщо $f_1 = 0$, то $F = F_1$.

Доведення теореми. Існування

Якщо $f_1 \neq 0$, то нехай u_2 — його старший член.

Лексикографічно: $u_1 \geq u_2$.

Тому існує такий $F_2 \in F[x_1, \dots, x_n]$, що старший член $F_2(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ дорівнює u_2.

Розглянемо симетричний многочлен $f_2 = f_1 - F_2(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$.

Якщо $f_2 = 0$, то $F = F_1 + F_2$.

Якщо $f_2 \neq 0$, то продовжуємо і т. д.

За лемою 1 через скінченну кількість кроків процес обірветься.

Отже, для деякого m: $f_m = 0$ та

$$F = F_1 + \cdots + F_m.$$

Доведення теореми. Єдиність

Припустимо, що є два зображення:

$$f = F(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = G(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

Покладемо $H = F - G \neq 0$, але $H(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 0$.

Нехай $H_1, \ldots, H_s$ — $\neq 0$ одночлени многочлена $H(x_1, \ldots, x_n)$, w_i — старші члени $H_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, $i = 1, \ldots, s$.

За лемою 2 серед $w_1, \ldots, w_s$ немає пропорційних.

Оберемо серед них старший: w_1 (без обмеження загальності).

Але тоді w_1 старший за усі члени $H_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, а також за всі члени $H_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, $i = 1, \ldots, s$.

Тому у сумі

$$H_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) + \cdots + H_s(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$$

навіть після зведення подібних збережеться доданок w_1!

Отже, $H(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \neq 0$. $\square$

Приклад

Задача

Зобразити симетричний многочлен $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ у вигляді многочлена від елементарних симетричних многочленів.

m	u_m	F_m	f_m
1	x_1^3	$F_1 = \sigma_1^3 = (x_1+x_2+x_3)^3$	$f_1 = f - F_1 =$ $= -3\sum_{i\neq j} x_i^2 x_j - 6x_1x_2x_3$
2	$-3x_1^2x_2$	$F_2 = -3\sigma_1\sigma_2 =$ $= -3(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$	$f_2 = f_1 - F_2 = 3x_1x_2x_3$
3	$3x_1x_2x_3$	$F_3 = 3\sigma_3$	$f_3 = f_2 - F_3 = 0$

$$f = F_1 + F_2 + F_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3.$$

Спосіб II. Однорідні симетричні многочлени

Задача

Зобразити симетричний многочлен $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ у вигляді многочлена від елементарних симетричних многочленів.

Потрібно обрати старший член u_1 та врахувати:

- сума показників степенів стала;
- усі можливі показники степенів старшого члена задовольняють лему 1;
- всі вони менші u_1.

Спосіб II. Однорідні симетричні многочлени

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$, $u_1 = x_1^3 x_2^0 x_3^0$

$k_1 \geq k_2 \geq k_3$	l_1, l_2, l_3	$\sigma_1^{l_1}\sigma_2^{l_2}\sigma_3^{l_3}$
$3, 0, 0$	$3, 0, 0$	σ_1^3
$2, 1, 0$	$1, 1, 0$	$\sigma_1\sigma_2$
$1, 1, 1$	$0, 0, 1$	σ_3

$$F = \sigma_1^3 + A\sigma_1\sigma_2 + B\sigma_3.$$

x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3	f	Рівняння
1	1	0	2	1	0	2	$8 + 2A = 2 \Rightarrow A = -3$
1	1	1	3	3	1	3	$27 - 27 + B = 3 \Rightarrow B = 3$

$$f = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3.$$

Формула Вієта для квадратного рівняння

$$x^2 + a_1 x + a_2 = 0$$

$SF[x_1, x_2]:$

$\sigma_1 = x_1 + x_2$

$\sigma_2 = x_1 x_2$

Якщо x_1, x_2 — корені цього рівняння, то

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + a_1 x + a_2,$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = x^2 + a_1 x + a_2.$$

Звідси $x_1 + x_2 = -a_1, \quad x_1 x_2 = a_2.$

$$a_1 = -\sigma_1(x_1, x_2), \quad a_2 = \sigma_2(x_1, x_2).$$

$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{a_1}{a_0} x + \frac{a_2}{a_0} = 0.$$

Формула Вієта для кубічного рівняння

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

Якщо x_1, x_2, x_3 — корені цього рівняння, то

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3,$$
$$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)x - x_1x_2x_3 =$$
$$= x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3.$$

Звідси

$$a_1 = -(x_1 + x_2 + x_3) = -\sigma_1(x_1, x_2, x_3),$$
$$a_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \sigma_2(x_1, x_2, x_3),$$
$$a_3 = -x_1x_2x_3 = -\sigma_3(x_1, x_2, x_3).$$

Формула Вієта для рівняння n-го степеня

$$x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

Якщо $x_1, \dots, x_n$ — корені цього рівняння, то

$$(x - x_1)\dots(x - x_n) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

Звідси

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\sigma_1(x_1, \dots, x_n),\\
a_2 &= \sigma_2(x_1, \dots, x_n),\\
a_3 &= -\sigma_3(x_1, \dots, x_n)\\
&\dots\\
a_{n-1} &= (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}(x_1, \dots, x_n),\\
a_n &= (-1)^n\sigma_n(x_1, \dots, x_n).
\end{aligned}$$

Задача

Знайдіть суму квадратів коренів рівняння $x^3 + 3x^2 + 4x + 9 = 0$.

x_1, x_2, x_3 — корені заданого рівняння. Потрібно: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 :$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2.$$

$$\sigma_1(x_1, x_2, x_3) = -3,$$

$$\sigma_2(x_1, x_2, x_3) = 4$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (-3)^2 - 2 \cdot 4 = 1.$$

Задача

Нехай x_1, x_2, x_3 — корені рівняння $x^3 + 3x^2 + 4x + 9 = 0$. Знайдіть значення виразу

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}.$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{x_1x_2x_3} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}.$$

$$\sigma_2(x_1, x_2, x_3) = 4, \quad \sigma_3 = -9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = -\frac{4}{9}.$$

$x^3+3x^2+4x+9=0:$

$$x_1=-1-\sqrt[3]{\frac{2}{3(\sqrt{3981}-63)}}+\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{3981}-63}}{3^{2/3}},$$

$$x_2=-1-\frac{(1+i\sqrt{3})\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{3981}-63}}{2\times 3^{2/3}}+\frac{1-i\sqrt{3}}{2^{2/3}\sqrt[3]{3\sqrt{3981}-63}},$$

$$x_3=-1-\frac{(1-i\sqrt{3})\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{3981}-63}}{2\times 3^{2/3}}+\frac{1+i\sqrt{3}}{2^{2/3}\sqrt[3]{3\sqrt{3981}-63}}.$$