Київський національний університет імені Тараса Шевченка

О.В. Капустян, Н.В. Касімова, Ю.В. Ловейкін,
А.В. Сукретна, Ю.В. Федоренко

Диференціальні рівняння: задачі, методи розв'язування, комп'ютерний практикум

Київ — 2023

УДК 517.9

Рецензенти:
доктор фіз.-мат. наук, проф. Бойчук О.А.
доктор фіз.-мат. наук, проф. Станжицький О.М.

Рекомендовано до друку Вченою радою
механіко-математичного факультету
протокол №   від   2019

Диференціальні рівняння: задачі, методи розв'язування, комп'ютерний практикум: навч. посібн. / О.В. Капустян, Н.В. Касімова, Ю.В. Ловейкін, А.В. Сукретна, Ю.В. Федоренко. — К.: ..., 2023. — 120 с.

У посібнику стисло викладено теоретичний матеріал, наведено приклади розв'язування типових задач, запропоновано задачі для самостійної роботи студентів, а також завдання для лабораторних робіт, що включають в себе комп'ютерний практикум, з основних розділів курсу звичайних диференціальних рівнянь.

Матеріал посібника розбито на шістнадцять занять, що відповідає стандартному семестровому курсу.

Для студентів математичних, комп'ютерних, технічних та природничих спеціальностей університетів.

Зміст

Вступ

Диференціальні рівняння є одним з найпотужніших математичних інструментів для моделювання та дослідження процесів навколишнього середовища. Сучасна теорія звичайних диференціальних рівнянь являє собою багаторівневу систему знань із розгалуженою внутрішньою структурою, різноманітними зв'язками з іншими розділами математики та потужним арсеналом аналітичних, геометричних та чисельних методів, багато з яких можна відзначити як виключно корисні з точки зору практичних застосувань. Тому диференціальні рівняння як навчальна дисципліна, що викладається в університетах, досить повно забезпечена літературою. Проте більшість існуючих посібників розраховані або на засвоєння елементарних навичок інтегрування та аналізу в межах загального курсу вищої математики для нематематичних спеціальностей, або на глибоке і детальне вивчення в класичному річному курсі для студентів-математиків. Тому в сучасних умовах зростаючої кількості комп'ютерних та технічних спеціальностей виникла необхідність підготувати посібник, який був би розрахований в першу чергу на студентів цих спеціальностей, враховував би їх достатньо високу математичну підготовку і забезпечував би засвоєння основних теоретичних та прикладних аспектів навчальної дисципліни "Диференціальні рівняння" в межах короткого семестрового курсу. Це обумовило структуру посібника, який складається з шістнадцяти тем, в межах кожної з яких можна виділити теоретичну, практичну та лабораторну частину. До кожної теми наведено короткі теоретичні відомості, розв'язані типові задачі, а значна кількість вправ дає можливість викладачу адаптивно, виходячи з потреб та можливостей аудиторії, здійснити підбір завдань для проведення практичних занять, самостійних та контрольних робіт, а студентам – широкі можливості для активної самостійної роботи з метою відпрацювання навичок застосування викладених прийомів та алгоритмів.

Окремо слід зупинитися на запропонованих у посібнику лабораторних роботах. З огляду на розвиток інформаційних технологій в сучасному світі неможливо залишити поза увагою користь і зручність використання відповідного програмного забезпечення до дослідження, аналізу і прогнозування поведінки моделей, що описуються за допомогою диференціальних рівнянь. Завдання лабораторних робіт складено таким чином, щоб студенти могли застосовувати як сучасні програмні пакети для розв'язання задач обчислювальної математики (Octave, MatLab, MathCad), які відомі простотою інтерфейсу та великою бібліотекою вбудованих функцій і методів, так і об'єктно-орієнтовні мови програмування (Python), для яких характерний зрозумілий синтаксис та зручні пакети для наукових, зокрема, символьних, обчислень.

Для засвоєння матеріалу посібника достатньо володіти такими стандартними розділами математичного аналізу, як "Границі", "Похідна", "Інтеграл Рімана", "Функціональні ряди", "Диференціальне числення функцій кількох змінних", а також основами лінійної алгебри та програмування.

Теоретичною основою даного посібника є підручник "Диференціальні рівняння" авторів А.М. Самойленко, М.О. Перестюк, І.О. Парасюк, навчальний посібник "Диференціальні рівняння в задачах" авторів А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, М.О. Перестюк та навчальний посібник "Збірник задач з диференціальних рівнянь" авторів М.О. Перестюк, М.Я. Свіщук.

Автори щиро вдячні завідувачу кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка, доктору фізико-математичних наук, професору, академіку НАН України *Миколі Олексійовичу Перестюку* за постійну підтримку, увагу та поради при підготовці даного посібника.

1. Утворення диференціальних рівнянь

Перш ніж розглядати диференціальне рівняння як абстрактний об'єкт, приділимо увагу питанню утворення диференціальних рівнянь. Багато процесів, що відбуваються у часі, можуть бути описані рівністю, яка пов'язує між собою шукану функцію, її похідні та аргумент, від якого ця функція залежить. Така рівність називається *диференціальним рівнянням.*

Диференціальне рівняння першого порядку записується у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

де $y = y(x)$ — шукана функція, x — аргумент шуканої функції (незалежна змінна).

Диференціальні рівняння є математичними моделями певних процесів, які можуть мати різноманітну природу, наприклад, геометричну, фізичну, біологічну, економічну, соціальну та ін. Одними з найперших задач, які зводилися до розв'язання диференціальних рівнянь, були так звані обернені задачі на дотичні. Наведемо простий приклад такої задачі.

Нехай на площині з прямокутною декартовою системою координат Oxy потрібно знайти криву, у кожній точці якої кутовий коефіцієнт дотичної пропорційний з коефіцієнтом k ординаті точки дотику. Позначимо через $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, функцію, графіком якої є шукана крива. Враховуючи геометричний зміст похідної, умову задачі можна записати у вигляді рівності

$$\frac{dy}{dx} = ky, \tag{2}$$

яка є одним з найпростіших, але дуже важливим диференціальним рівнянням. Зокрема, рівнянням (2) описуються найпростіша модель чисельності одновидової популяції, процес охолодження тіла за рахунок теплообміну з середовищем, процес розпаду радіоактивних елементів, розмір банківського рахунку при неперервному нарахуванні відсотків та ін.

Розв'язками диференціальних рівнянь є диференційовні функції, що перетворюють рівняння на тотожність. Зокрема для рівняння (2) безпосередньою підстановкою легко впевнитись, що кожна функція $y(x) = C\mathrm{e}^{kx}$, де $C \in \mathbb{R}$, задовольняє (перетворює на тотожність) це рівняння.

Розв'язки диференціальних рівнянь можуть виражатися елементарними функціями, інтегралами від них, а також неявно або параметрично. Щоб переконатися, що розв'язок дійсно перетворює рівняння на тотожність, використовуємо відомі факти з математичного аналізу.

Приклад 1. Довести, що функція $y = e^x \int\limits_0^x e^{s^2} ds + Ce^x$ є розв'язком диференціального рівняння $y' = e^{x+x^2} + y$.

Розв'язання. Використовуючи правило диференціювання добутку двох функцій та формулу для похідної від інтеграла зі змінною верхньою межею, знаходимо похідну $y' = e^x \int\limits_0^x e^{s^2} ds + e^x \cdot e^{x^2} + Ce^x$. Тоді, підставляючи в рівняння, переконуємось у справедливості тотожності:

$$y' = e^x \int\limits_0^x e^{s^2} ds + e^x \cdot e^{x^2} + Ce^x = e^{x+x^2} + y.$$

Отже, вказана функція є розв'язком заданого рівняння.

Кожне диференціальне рівняння має безліч розв'язків — ціла сім'я функцій задовольняє одне конкретне диференціальне рівняння.

Навпаки теж вірно: маючи деяку $n-$параметричну сім'ю функцій, можна знайти диференціальне рівняння, для якого ця сім'я функцій буде розв'язком. Для цього потрібно продиференціювати рівняння сім'ї кривих по x, вважаючи при цьому y функцією від x, стільки разів, скільки параметрів задають сім'ю кривих, потім вилучити з отриманих співвідношень параметри.

Приклад 2. Знайти диференціальне рівняння сім'ї кривих $y^2 = 2Cx$.

Розв'язання. Диференціюємо задану неявну функцію: $2yy' = 2C$, звідки $C = yy'$. Підставляємо знайдене значення C у вихідне рівняння і отримуємо: $y^2 = 2xyy'$ або $y - 2y'x = 0$. Це і є шукане диференціальне рівняння заданої сім'ї кривих.

Отже, диференціальне рівняння описує всі можливі еволюції, які можуть відбуватись у моделі. Для того щоб виділити певну еволюцію системи із усіх, потрібна додаткова умова. Такою умовою, як правило, виступає стан системи у певний момент часу. Найчастіше стан системи відомий на початку розгляду процесу еволюції. Тому таку додаткову умову називають *початковою умовою.*

З точки зору диференціального рівняння початкова умова означає, що при певному значенні аргумента відоме значення шуканої функції. Записується початкова умова рівністю

$$y(x_0) = y_0, \tag{3}$$

де y_0 — значення шуканої функції при значенні аргумента x_0.

Пара (1), (3) називається *задачею Коші.*

Зокрема, для рівняння (2) початкова умова (3) означає, що потрібно знайти криву, яка проходить через точку (x_0, y_0) площини xOy.

Розглянемо кілька процесів різної природи, математичний опис яких приводить до диференціальних рівнянь

Приклад 3. Тіло, що має в початковий момент часу температуру $T(0) = T_0$, помістили в середовище, температура якого підтримується постійною і рівна T_1. Як буде змінюватись з плином часу температура тіла?

Розв'язання. Позначимо через $T(t)$ температуру тіла в момент часу t. Експериментально встановлено, що за певних спрощень швидкість зміни температури тіла пропорційна різниці температур тіла і навколишнього середовища. Це означає, що

$$\frac{dT(t)}{dt} = -\gamma(T(t) - T_1), \tag{4}$$

де $\gamma > 0$ – коефіцієнт пропорційності. Знак мінус в правій частині рівняння відповідає експериментальним даним: якщо $T(t) - T_1 > 0$, то температура тіла зменшується і тому швидкість її зміни від'ємна, якщо ж $T(t) - T_1 < 0$, то температура тіла зростає, а тому швидкість її зміни додатня. Отже, процес нагрівання (або охолодження) тіла в середовищі зі сталою температурою моделюється рівнянням (4), одним із розв'язків якого є функція $T(t) = T_1$. Всі ж розв'язки цього рівняння виражаються формулою $T(t) = T_1 + Ce^{-\gamma t}$, $C \in \mathbb{R}$. Враховуючи початкову умову $T(0) = T_0$, знаходимо шукану залежність температури тіла від часу: $T(t) = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-\gamma t}$. Функція $T(t)$ зростає, якщо $T_0 - T_1 < 0$ (тіло нагрівається), і спадає, якщо $T_0 - T_1 > 0$ (тіло охолоджується). В обох випадках з ростом t її значення прямує до T_1.

Приклад 4. В посудину місткістю 10 л води неперервно зі швидкістю 2 л за хвилину надходить розчин, в кожному літрі якого міститься 0,3 кг солі. Розчин, що надходить в посудину, перемішується з водою, і суміш витікає з посудини з тією ж швидкістю. Скільки солі буде в посудині через 5 хвилин?

Розв'язання. Візьмемо за незалежну змінну час t, а за шукану функцію $y(t)$ – кількість солі в посудині через t хвилин після початку досліду. Знайдемо, на яку величину зміниться кількість солі за проміжок часу від момету t до моменту $t + \triangle t$. За одну хвилину надходить 2 л розчину, а за $\triangle t$ хвилин - $2\triangle t$ літрів; в цих $2\triangle t$ літрах міститься $0,3 \cdot 2\triangle t = 0,6\triangle t$ кг солі. Разом з тим за час $\triangle t$ із посудини витікає $2\triangle t$ літрів розчину. В момент t у всій посудині (10 л) міститься $y(t)$ кг солі, а отже, в $2\triangle t$ літрах розчину, що витікає, містилось би $0,2\triangle t \cdot y(t)$ кг солі, якщо б за час $\triangle t$ вміст солі в посудині не змінювався. Але, оскільки він за цей час змінюється на величину, нескінченно малу при $\triangle t \to 0$, то в $2\triangle t$ літрах розчину, що витікає, міститься $2\triangle t \cdot (y(t) + \alpha)$ кг солі, де $\alpha \to 0$ при $\triangle t \to 0$. Отже, в розчині, що надходить за проміжок часу $(t, t + \triangle t)$, міститься $0,6\triangle t$ кг солі, а в розчині, що витікає, міститься $0,2\triangle t(y(t) + \alpha)$ кг солі. Приріст кількості солі за цей час $y(t+\triangle t)-y(t)$ рівний різниці знайдених величин, тобто

$$y(t + \triangle t) - y(t) = 0,6\triangle t - 0,2\triangle t \cdot (y(t) + \alpha).$$

Розділимо на $\triangle t$ і перейдемо до границі при $\triangle t \to 0$. В лівій частині одержимо похідну $y'(t)$, а в правій частині одержимо $0,6 - 0,2y(t)$, оскільки $\alpha \to 0$ при $\triangle t \to 0$. Отже, маємо диференціальне рівняння $y'(t) = 0,6 - 0,2y(t)$. Всі розв'язки цього рівняння задаються сім'єю функцій

$$y(t) = 3 - Ce^{-0,2t}, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Оскільки при $t = 0$ солі в посудині не було, то $y(0) = 0$. Поклавши в (5) $t = 0$, знайдемо $y(0) = 3 - C$; $0 = 3 - C$; $C = 3$. Підставивши це значення C в (5), одержимо $y(t) = 3 - 3e^{-0,2t}$. При $t = 5$ в посудині буде

$$y(5) = 3 - 3e^{-0,2\cdot 5} = 3 - 3e^{-1} \approx 1,9 \text{ кг солі.}$$

Приклад 5. Матеріальна точка маси m вільно падає під дією сили тяжіння. Нехтуючи опором повітря, знайти закон руху точки.

Розв'язання. На вертикальній осі, вздовж якої падає точка, виберемо точку відліку O і визначимо додатній напрямок - від точки O вниз. Положення точки визначаються координатою $y(t)$, що змінюється з часом t. Точка падає під дією сили тяжіння $F_g = mg$; тому, згідно другого закону Ньютона, $ma = F$, маємо $m\frac{d^2y}{dt^2} = mg$ або $\frac{d^2y}{dt^2} = g$. Інтегруючи двічі останнє співвідношення, знаходимо

$$\frac{dy}{dt} = gt + C_1, \; y(t) = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2. \tag{6}$$

Формула (6) визначає закон руху матеріальної точки. Знаючи початкове положення точки $y(0) = y_0$ і її початкову швидкість $v(0) = v_0$, із сукупності функцій (6) виберемо ту, що описує рух точки. Оскільки швидкість точки $v(t) = \frac{dy}{dt}$, то за вказаних початкових умов $C_1 = v_0$, $C_2 = y_0$; тому шукана функція, що описує закон руху точки, має вигляд

$$y = \frac{gt^2}{2} + v_0 t + y_0.$$

Таким чином, одержали відому формулу шляху, що проходить точка в умовах рівноприскореного руху.

Вправи

Довести, що задані функції є розв'язками вказаних рівнянь ($C \in \mathbb{R}$):

1. $y = e^{\arcsin(Cx)}$, $xy' = y\,\mathrm{tg}(\ln y)$.

2. $y = e^{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}$, $y' \sin x = y \ln y$.

3. $y = x \int\limits_0^x \frac{\sin s}{s} ds$, $xy' = y + \sin x$.

4. $x = ye^{Cy+1}$, $y' = \frac{y}{\ln x - \ln y}$.

5. $x = y \ln y$, $y'(x + y) = y$.

6. Довести, що параметрично задана функція $\begin{cases} x = C\cos t, \\ y = C\sin t, \end{cases}$ при довільному ненульовому C є розв'язком рівняння $x + yy' = 0$.

Скласти диференціальні рівняння сімей кривих:

7. $y^2 + Cx = x^3$, $C \in \mathbb{R}$.

8. $x\,\mathrm{tg}(x + C) = y$, $C \in \mathbb{R}$.

9. $x^2 + y^2 = Ce^{\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y}}$ – сім'я логарифмічних спіралей, $C \in \mathbb{R}$.

10. $\ln y = ax + by$, $a, b \in \mathbb{R}$.

11. $y = ax^3 + bx^2 + cx$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

12. Знайти диференціальне рівняння всіх кіл на площині.

13. Скласти диференціальне рівняння кіл, що дотикаються одночасно до прямих $y = 0$ та $x = 0$ і розташовані в першій і третій чвертях.

14. Скласти диференціальне рівняння кривих, у яких точка перетину довільної дотичної з віссю абсцис має абсцису, вдвічі меншу за абсциту точки дотику.

15. Скласти диференціальне рівняння всіх парабол, які проходять через початок координат і для яких вісь $0x$ є віссю симетрії.

16. Знайти диференціальне рівняння кривих, для яких сума катетів трикутника, утвореного дотичною, ординатою точки дотику і віссю абсцис є велеичиною сталою і дорівнює b.

17. В умовах боротьби за існування швидкість збільшення числа особин популяції пропорційна (з коефіцієнтом a) кількості особин в наявний момент часу, а швидкість їх зменшення пропорційна (з коефіцієнтом b) квадрату кількості особин; a, b – сталі. Записати закон зміни кількості особин у вигляді диференціального рівняння.

18. За допомогою диференціального рівняння записати закон зміни струму $I(t)$ в колі з опором R та самоіндукцією L, якщо початкова сила струму I_0, а електрорушійна сила змінюється за законом $U = U_0 \sin wt$.

19. Деяка кількість нерозчиненої речовини містить у своїх порах 10 кг солі. Піддаючи її дії 90 л води, довідалися, що протягом години розчиняється половина наявної кількості солі. Швидкість розчинювання пропорційна (з коефіцієнтом a) добутку кількості нерозчиненої солі та різниці між концентрацією насиченого розчину (1 кг на 3 л) та концентрацією даної речовини (концентрацією даної речовини називають її кількість, що міститься в одиниці об'єму). Записати закон зміни кількості солі у розчині у вигляді диференціального рівняння.

20. Точка маси m рухається прямолінійно. На неї діє сила пропорційна кубові часу, який пройшов з моменту часу, коли швидкість дорівнювала нулю (коефіцієнт пропорційності a). Крім того, точка зазнає опору середовища, який пропорційний добутку часу та швидкості (коуфіцієнт пропорційності b). Записати закон зміни швидкості у вигляді диференціального рівняння.

2. Інтегровні типи диференціальних рівнянь

Диференціальне рівняння вигляду

$$y' = f(x), \tag{7}$$

де f — неперервна на деякому інтервалі $(a, b) \subset \mathbb{R}$ функція, називається *найпростішим диференціальним рівнянням першого порядку.*

Твердження. *Для довільних $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \mathbb{R}$ задача Коші*

$$y' = f(x), \quad y(x_0) = y_0,$$

де $f \in \mathrm{C}(a, b)$, має єдиний розв'язок, який задається формулою $y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(s)ds + y_0$ і визначений на (a, b).

Зауваження. *Всі розв'язки рівняння (7) задаються сім'єю функцій $y = F(x) + C$, де $F(x)$ – деяка первісна функції $f(x)$, наприклад, $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(s)ds$, $C \in \mathbb{R}$ – довільна стала.*

Приклад 1. Знайти всі розв'язки рівняння $y' = x^2 + 1$ та розв'язок задачі Коші з початковою умовою $y(1) = 2$.

Розв'язання. Всі розв'язки рівняння задаються сім'єю функцій

$$y = \int (x^2 + 1)dx = \frac{x^3}{3} + x + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

Для знаходження розв'язку задачі Коші, підставимо отримані функції $y = \frac{x^3}{3} + x + C$ у початкову умову і знайдемо значення сталої C, яка і буде визначати розв'язок задачі Коші:

$$y(1) = \frac{1}{3} + 1 + C = 2 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{2}{3}.$$

Таким чином, розв'язком задачі Коші є функція $y(x) = \frac{x^3}{3} + x + \frac{2}{3}$.

Диференціальне рівняння вигляду

$$y' = f(x)g(y), \tag{8}$$

де $f \in \mathrm{C}(a, b)$, $g \in \mathrm{C}(c, d)$, називається *диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.*

Теорема. *Нехай $f \in \mathrm{C}(a, b)$, $g \in \mathrm{C}(c, d)$ і $g(y) \neq 0$ для всіх $y \in (c, d)$. Тоді для будь-яких $x_0 \in (a, b)$ та $y_0 \in (c, d)$ існує єдиний* *розв'язок задачі Коші*

$$y' = f(x)g(y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{9}$$

який задається неявною функцією $\int\limits_{y_0}^{y} \frac{ds}{g(s)} = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$, *визначеною у деякому околі точки* x_0.

Рівність

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

називається загальним інтегралом рівняння (8).

Якщо функція $g(y)$ у жодній точці не обертається в нуль, то загальний інтеграл задає всі розв'язки рівняння (8). Якщо існують точки y_* такі, що $g(y_*) = 0$, то, щоб одержати всі розв'язки рівняння (8), до загального інтегралу цього рівняння потрібно додати функції $y = y_*$ для всіх таких y_*, що $g(y_*) = 0$.

Таким чином, всі розв'язки рівняння (8) задаються сукупністю

$$\left[\begin{array}{l} \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ y = y_* \quad \text{для всіх } y_* \text{ таких, що } g(y_*) = 0, \text{ якщо такі } y_* \text{ існують.} \end{array}\right.$$

Приклад 2. Проінтегрувати рівняння $y' = y^2$ та знайти розв'язок задачі Коші з початковою умовою $y(2) = 0$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку загальний розв'язок рівняння:

$$\int \frac{dy}{y^2} = x + C \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = x + C \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{x + C}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Функція $y = 0$ також є розв'язком рівняння, оскільки обертає праву частину на нуль.

Задовольняючи початкову умову, отримуємо розв'язок задачі Коші $y \equiv 0$.

Приклад 3. Знайти всі розв'язки рівняння $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$ та розв'язок, який задовольняє початкову умову $y(0) = -1$.

Розв'язання. Перепишемо задане рівняння у вигляді:

$$\frac{dy}{dx} = (2 - y) \operatorname{tg} x.$$

Найперше зауважимо, що функція $y = 2$ є розв'язком рівняння. Далі, відокремлючи змінні та інтегруючи, знаходимо:

$$\frac{dy}{2-y} = \operatorname{tg} x dx,$$

$$\int \frac{dy}{y-2} = -\int \operatorname{tg} x dx + C, \quad C \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \ln|y-2| = \ln|\cos x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Якщо після інтегрування невідома функція знаходиться під знаком логарифма, то, як правило, від логарифма позбуваються потенціюванням (знаходять експоненту від обидвох частин рівності). В результаті, використовуючи властивості експоненти, отримуємо

$$|y-2| = C_1|\cos x|, \quad C_1 = e^C > 0.$$

Модулі у останній рівності можна розкрити:

$$y - 2 = \pm C_1 \cos x = C_2 \cos x, \quad C_2 = \pm C_1 \neq 0.$$

Врахувавши, що при $C_2 = 0$ маємо розв'язок $y = 2$, і розширюючи область значень довільної сталої C_2 до всієї дійсної осі, остаточно отримуємо загальний розв'язок вихідного рівняння

$$y = 2 + C_2 \cos x, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Задовольнимо тепер початкову умову:

$$y(0) = 2 + C = -1 \quad \Rightarrow \quad C = -3 \quad \Rightarrow \quad y = 2 - 3\cos x.$$

Зауваження. *Не обмежуючи загальності, сталу інтегрування на кожному кроці можемо позначати однією і тією ж літерою з указанням множини значень цієї константи.*

Рівняння з відокремлюваними змінними також може бути записане *в симетричній формі*:

$$P(x)Q(y)dx + M(x)N(y)dy = 0,$$

де $P(x), M(x)$ – неперервні функції на деякому інтервалі $(a, b) \in \mathbb{R}$, $Q(y), N(y)$ – неперервні функції на деякому інтервалі $(c, d) \in \mathbb{R}$. У такій формі немає чіткого розділення на незалежну змінну та невідому функцію цієї змінної, відповідно ми можемо розглядати як $y = y(x)$, так і $x = x(y)$, або навіть параметричне задання $x = x(t), y = y(t)$. Для такого рівняння потрібно відслідкувувати не лише розв'язки вигляду $y = y_*$, де $Q(y_*) = 0$, але й розв'язки вигляду $x = x_*$, де $M(x_*) = 0$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $xydx + (x+1)dy = 0$.

Розв'язання. Насамперед зауважимо, що розв'язками будуть функції $x = -1$ при $y \neq 0$ або $y = 0$ при $x \neq -1$. Точка $(-1, 0)$ є так званою особливою точкою рівняння, до вивчення таких точок ми ще повернемося. Далі відокремлюючи змінні, отримуємо рівняння

$$\frac{x}{x+1}dx + \frac{1}{y}dy = 0,$$

інтегруючи яке, маємо

$$\int \frac{x}{x+1}dx + \int \frac{1}{y}dy = C, \quad C \in \mathbb{R},$$

тобто

$$x - \ln|x+1| + \ln|y| = C, \quad C \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad y = Ce^{-x}(x+1), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Таким чином, ми знайшли однопараметричну сім'ю розв'язків вихідного рівняння. Зауважимо, що розв'язок $y = 0$ входить в сім'ю $y = Ce^{-x}(x+1)$ при $C = 0$, а розв'язок $x = -1$ потрібно додати, щоб отримати загальний розв'язок.

Рівняння вигляду

$$y' = f(ax + by + c)$$

зводиться заміною $z = ax + by + c$, де $z = z(x)$ — нова невідома функція, до рівняння з відокремлюваними змінними

$$z' = bf(z) + a.$$

Приклад 5. Розв'язати рівняння $y' = y + 2x - 3$.

Розв'язання. Запровадимо заміну $z = y + 2x - 3$, де $z = z(x)$ – нова невідома функція, тоді $z' = y' + 2$, тобто $y' = z' - 2$, і після підстановки отримуємо рівняння $z' - 2 = z$. Відокремлюючи змінні, знаходимо

$$\frac{dz}{z+2} = dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{z+2} = \int dx + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

$$\ln|z+2| = x + C, \quad C \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad z = Ce^{x} - 2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Розв'язок $z = -2$ входить у знайдену однопараметричну сім'ю розв'язків при $C = 0$. Повертаючись до вихідної невідомої функції, маємо загальний розв'язок вихідного рівняння

$$y = z - 2x + 3 = Ce^x - 2x + 1.$$

Диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y) \tag{10}$$

називається *однорідним диференціальним рівнянням*, якщо для будь-якого додатного λ виконується рівність $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$.

Зауваження. *Також, рівняння* (10) *є однорідним, якщо існує функція* $g(z)$ *така, що*

$$f(x, y) \equiv g\left(\frac{y}{x}\right).$$

Твердження. *Однорідне диференціальне рівняння* (10) *заміною* $y = xz$, *де* $z = z(x)$ *— нова невідома функція, зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.*

Приклад 6. Розв'язати рівняння $y' = \dfrac{y}{x} + \operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$.

Розв'язання. Оскільки має місце співвідношення

$$\frac{ty}{tx} + \operatorname{tg}\frac{ty}{tx} = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x},$$

то дане рівняння є однорідним. Покладемо $y = zx$, $z = z(x)$, тоді $y' = z + xz'$. Підставляючи значення y та y' в вихідне рівняння, одержимо

$$z + xz' = z + \operatorname{tg} z \quad \Rightarrow \quad xdz = \operatorname{tg} z dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{\operatorname{tg} z} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи отримане рівняння з відокремленими змінними, знаходимо

$$\ln|\sin z| = \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \sin z = Cx, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Розв'язки $z = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ входять у отриману однопараметричну сім'ю розв'язків при $C = 0$. Повертаючись до заміни, остаточно дістанемо загальний інтеграл

$$\sin\frac{y}{x} = Cx,\ C \in \mathbb{R}.$$

Рівняння вигляду

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right) \tag{11}$$

зводиться до однорідного рівняння, якщо прямі $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ та $ax + by + c = 0$ не є паралельними. А саме, потрібно виконати одночасну заміну, як незалежної змінної, так і невідомої функції

$$\begin{cases} x = u + x_0, \\ y = v + y_0, \end{cases}$$

де (x_0, y_0) – точка перетину згаданих вище прямих прямих, тобто єдиний розв'язок системи

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + c = 0, \\ a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0. \end{cases}$$

Якщо ж вказані прямі є паралельними, тобто $ax+by = k(a_1x+b_1y)$ для деякого $k \in \mathbb{R}$, то рівняння (11), фактично, має вигляд $y' = F(ax+by)$, і зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$.

Розв'язання. Оскільки $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, то впровадимо заміну

$$\begin{cases} x = u + x_0, \\ y = v + y_0, \end{cases}$$

де x_0, y_0 знаходяться з системи

$$\begin{cases} y_0 + 2 = 0 \\ x_0 + y_0 - 1 = 0, \end{cases}$$

тобто $x_0 = 3$, $y_0 = -2$, тому остаточно маємо заміну

$$\begin{cases} x = u + 3, \\ y = v - 2. \end{cases}$$

Оскільки заміна лінійна, то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du},$$

і отримуємо однорідне диференціальне рівняння відносно невідомої функції $v = v(u)$

$$\frac{dv}{du} = 2\left(\frac{v}{u+v}\right)^2,$$

що розв'язується за допомогою заміни $v = zu$, $z = z(u)$. Тоді $v' = z'u + z$, і в результаті приходимо до рівняння

$$z'u + z = 2\left(\frac{z}{1+z}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad z'u = -\frac{z^3+z}{(z+1)^2}.$$

Зауважимо, що $z = 0$ є розв'язком останнього рівняння, тоді, послідовно повертаючись по нашим замінам, знаходимо, що $v = 0$, а отже, $y = -2$ – розв'язок вихідного рівняння. Далі, відокремлюючи змінні та інтегруючи, маємо

$$\frac{(z+1)^2}{z(z^2+1)}dz = -\frac{1}{u}du \quad \Rightarrow \quad \int\left(\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2+1}\right)dz = -\int\frac{du}{u} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|z| + 2\operatorname{arctg} z + \ln|u| = C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad \Rightarrow \quad zue^{2\operatorname{arctg} z} = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Оскільки розв'язок $z = 0$ входить у знайдену однопараметричну сім'ю функцій при $C = 0$, то, повертаючись до початкових функцій, знаходимо

$$ve^{2\operatorname{arctg}\frac{v}{u}} = C, \quad C \in \mathbb{R},$$

і остаточно отримуємо загальний розв'язок

$$(y+2)e^{2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}} = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Приклад 8. Розв'язати рівняння $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2x+2y-1}{x+y-2} = 0.$

Розв'язання. Прямі $2x+2y-1 = 0$ і $x+y-2 = 0$ паралельні, дійсно, $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, тому виконуючи заміну змінних $x+y = z$, $z = z(x)$, тримаємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{dz}{dx} - 1 + \frac{2z-1}{z-2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{z+1}{z-2}.$$

Функція $z = -1$ є розв'язком отриманого рівняння, тому $y = -1 - x$ – розв'язок вихідного рівняння. Далі відокремлюємо змінні та інтегруємо

$$\frac{z-2}{z+1}dz = -dx \quad \Rightarrow \quad \int\frac{z-2}{z+1}dz = -\int dx, \quad C \in \mathbb{R},$$

$$z + x - 3\ln|z+1| = C, \quad C \in \mathbb{R},$$

і, повертаючись до початкових функцій, знаходимо

$$y + 2x - 3\ln|y + x + 1| = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Крім того, до отриманої однопараметричної сім'ї треба додати розв'язок $y = -1 - x$.

Диференціальне рівняння (10) називається *квазіоднорідним*, якщо для деякого $\sigma \in \mathbb{R}$ та для будь-якого $\lambda > 0$ виконується рівність

$$f(\lambda x, \lambda^\sigma y) = \lambda^{\sigma-1} f(x, y).$$

Число σ називається показником квазіоднорідності даного рівняння.

Зауваження. *При $\sigma = 1$ маємо однорідне диференціальне рівняння.*

Твердження. *Квазіоднорідне рівняння* (10) *з показником квазіоднорідності σ заміною $y = x^\sigma z$, де $z = z(x)$ — нова невідома функція, зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.*

Приклад 9. Розв'язати рівняння $x^3(y' - x) = y^2$.

Розв'язання. Перепишемо вихідне рівняння у вигляді

$$y' = x + \frac{y^2}{x^3}.$$

Для правої частини рівняння перевіримо умову квазіоднорідності. Оскільки

$$f(tx, t^\sigma y) = tx + \frac{t^{2\sigma} y^2}{t^3 x^3} = tx + t^{2\sigma-3}\frac{y^2}{x^3},$$

$$t^{\sigma-1} f(x, y) = t^{\sigma-1} x + t^{\sigma-1}\frac{y^2}{x^3},$$

то рівність можлива при

$$\begin{cases} t = t^{\sigma-1}, \\ t^{2\sigma-2} = t^{\sigma-1}; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1 = \sigma - 1 \\ 2\sigma - 3 = \sigma - 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \sigma = 2.$$

Впровадимо заміну $y = zx^2$, $z = z(x)$. Тоді $y' = z'x^2 + 2xz$. Підставивши y і y' в рівняння, будемо мати

$$z'x^2 + 2xz = x + \frac{z^2 x^4}{x^3} \quad \Rightarrow \quad x^2\frac{dz}{dx} = x(1 - z)^2.$$

Стала функція $z = 1$, що є розв'язком отриманого рівняння, породжує розв'язок $y = x^2$ вихідного рівняння. Тепер можемо відокремити змінні

$$-\frac{dz}{(z-1)^2} = -\frac{dx}{x}$$

та проінтегрувати

$$\frac{1}{z-1} = -\ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad z = 1 + \frac{1}{C - \ln|x|}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Повернувшись до вихідної невідомої функції та врахувавши розв'язок $y = x^2$, отримуємо

$$\left[\begin{array}{l} y = x^2 + \dfrac{x^2}{C - \ln|x|}, \quad C \in \mathbb{R}, \\ y = x^2. \end{array}\right.$$

Зауваження. *При ірраціональному σ та раціональному σ з парним знаменником заміна $y = zx^\sigma$ для квазіоднорідного рівняння справедлива лише для $x > 0$, для $x < 0$ потрібно застосовувати заміну $y = z(-x)^\sigma$.*

Вправи

Розв'язати диференціальні рівняння. Там, де вказано, знайти розв'язок, що задовольняє початкову умову.

21. $xy' + y = y^2$, $y(1) = \dfrac{1}{2}$.

22. $y = 2\int\limits_0^x \sqrt{y}dx$.

23. $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$, $y(0) = 1$.

24. $2x^2yy' + y^2 = 2$.

25. $z' = 10^{x+z}$.

26. $y' = (x + y + 1)^2$.

27. $y' = 2x\cos^2 y$, $y(0) = \dfrac{\pi}{4}$.

28. $y' = \cos(y - x)$.

29. $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$.

30. $(y^2 + xy^2)y' + x^2 - yx^2 = 0$.

31. $e^y(1 + x^2)dy - 2x(1 + e^y)dx = 0$.

32. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$.

33. $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy$.

34. $y' - xy^2 = 2xy$.

35. $(x+2y)y' = 1$, $y(0) = -1$.

36. $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$.

37. $xdy = (ax + by)dx$.

38. $xy' = y \cos \ln \dfrac{y}{x}$.

39. $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$.

40. $x(x + 2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$.

41. $xy' - y = (x + y) \ln \dfrac{x+y}{x}$.

42. $(2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0$.

43. $(y' + 1) \ln \dfrac{x+y}{x+3} = \dfrac{x+y}{x+3}$.

44. $y' = \dfrac{xy + y^2 e^{-\frac{x}{y}}}{x^2}$.

45. $\dfrac{2}{3} xyy' = \sqrt{x^6 - y^4} + y^2$.

46. $2x^2 y' = y^3 + xy$.

47. $y' = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$.

48. $2y + (x^2 y + 1)xy' = 0$.

49. $2xdy + (x^2 y^4 + 1)ydx = 0$.

50. $ydx + x(2xy + 1)dy = 0$.

51. $2y' + x = 4\sqrt{y}$.

52. $2xy' + y = y^2 \sqrt{x - x^2 y^2}$.

53.* Знайти розв'язок рівняння $3y^2 y' + 16x = 2xy^3$, що залишається обмеженим при $x \to +\infty$

.

54.* Знайти кут між інтегральними кривими рівняння $y' = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ та прямою $y = kx$.

55.* Довести, що однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремленими змінними переходом до полярних координат.

56.* При яких m і n рівняння $\frac{dy}{dx} = ax^m + by^n$ є квазіоднорідним? Розв'язати рівняння $y' = x^m + 2y^2$ за умови, що воно є квазіоднорідним.

3. Геометрична інтерпретація диференціального рівняння першого порядку

Розглянемо *автономне рівняння* вигляду

$$y' = g(y). \tag{12}$$

Насамперед зауважимо, що якщо $g(y^*) = 0$, то функція $y = y^*$ є розв'язком рівняння (12). Крім того, якщо $y(x)$ – розв'язок рівняння (12) на деякому інтервалі (α, β), то для довільного λ функція $y_\lambda(x) = y(x - \lambda)$ теж є розв'язком рівняння (12) на $(\alpha + \lambda, \beta + \lambda)$. Отже, достатньо розглядати задачу Коші з $x_0 = 0$, тобто

$$\begin{cases} y' = g(y) \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{13}$$

Нехай $-\infty \leq c < d \leq +\infty$. Справедливий наступний результат.

Теорема. (про існування розв'язку автономного рівняння) *Якщо $g \in C(c, d)$ та $g(y) > 0$ для всіх $y \in (c, d)$, то для довільного $y_0 \in (c, d)$ існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ задачі (13), що задається неявною формулою*

$$\int\limits_{y_0}^{y} \frac{ds}{g(s)} = x, \tag{14}$$

причому цей розв'язок визначений і монотонно зростаючий на (α, β), де $\alpha = \lim\limits_{y \to c+} \int\limits_{y_0}^{y} \frac{ds}{g(s)}$, $\beta = \lim\limits_{y \to d-} \int\limits_{y_0}^{y} \frac{ds}{g(s)}$.

Зауважимо, що якщо $g(y) < 0$, то y визначений і монотонно спадний на (β, α).

Теорема. (про максимальний інтервал існування розв'язку автономного рівняння) *Нехай $g \in C(c, +\infty)$, $g(y) > 0$ для всіх $y \in (c, +\infty)$. Тоді*

1) якщо

$$g(y) = O(y), \quad y \to \infty, \tag{15}$$

то для довільного $y_0 \in (c, +\infty)$ *розв'язок* (13) *існує на* $(\alpha, +\infty)$*;*
2) якщо для деякого $k > 1$:

$$g(y) = O(y^k),\ y \to \infty, \tag{16}$$

то для довільного $y_0 \in (c, +\infty)$ *знайдеться* $\beta = \beta(y_0) < \infty$ *таке, що розв'язок задачі* (13) *існує на* (α, β) *і* $\lim\limits_{x \to \beta -} y(x) = +\infty$.

Зауважимо, що при $g(y) < 0$ або при $y_0 \in (-\infty, d)$ твердження залишається вірним з відповідною заміною інтервалів.

Значення $\beta(y_0)$ можна знайти з рівності $\beta(y_0) = \lim\limits_{y \to \infty} \int\limits_{y_0}^{y} \dfrac{ds}{g(s)}$.

Нехай тепер y^* – єдиний нуль функції $g(y)$ на інтервалі (c, d). Тоді вірний наступний результат про асимптотику розв'язків автономного рівняння.

Теорема. (про асимптотичні властивості розв'язків автономного рівняння) *Нехай* $g \in C(c, y^*)$, $g(y) > 0$ *для всіх* $y \in (c, y^*)$, $g(y^*) = 0$. *Для* $y_0 \in (c, y^*)$ *покладемо* $F(y) = \int\limits_{y_0}^{y} \dfrac{ds}{g(s)}$.
Тоді
1) якщо існує границя $\lim\limits_{y \to y^*} F(y) =: \beta(y_0) < \infty$, *то розв'язок задачі Коші* (13) *строго монотонно зростає, дотикаючись до прямої* $y = y^*$ *в точці* $x = \beta(y_0)$*;*
2) якщо ж $\lim\limits_{y \to y^*} F(y) = \infty$, *то* $y = y^*$ *– горизонтальна асимптота розв'язку* (13) *при* $x \to \infty$, *тобто* $\begin{cases} y(x) \to y^*,\ x \to \infty, \\ y'(x) \to 0,\ x \to \infty. \end{cases}$

Твердження теореми справедливе для всіх $y_0 \in (y^*, d)$, якщо вимагати виконання умов $g(y) < 0$ для всіх $y \in (y^*, d)$, $g(y^*) = 0$. При $x \to -\infty$ можна отримати аналогічні асимптотичні властивості.

Зауважимо, що якщо в умовах теореми існує похідна $g'(y)$, то виконується пункт 2).

Якщо $y_1, y_2, \ldots$ – нулі правої частини рівняння (12), то вони розбивають вісь $0y$ на проміжки знакосталості функції $g(y)$, а відповідні сталі розв'язки $y \equiv y_1$, $y \equiv y_2, \ldots$ рівняння (12) розбивають площину $0xy$ на горизогтальні смуги, в кожній з яких розв'язки рівняння є монотонними функціями, асимптотичні властивості яких можна уточнити за допомогою двох останніх теорем.

Приклад 1. Проаналізувати поведінку розв'язів задачі Коші в залежності від значення параметру y_0

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Розв'язання. Оскільки $g(y) = y^2 \in C(\mathbb{R})$, $y^* = 0$ та $g(y) > 0$ для всіх $y \in (-\infty, 0) \bigcup (0, \infty)$, $g(0) = 0$, то рівняння має один сталий розв'язок $y \equiv 0$, а всі інші розв'язки строго монотонно зростають.

Використовуючи теорему про максимальний проміжок існування розв'язку автономного рівняння та враховуючи, що $g(y) = y^2$, приходимо до висновку, що для $y_0 > 0$ розв'язки задачі Коші прямують до нескінченності за скінченний час, тобто мають вертикальну асимптоту $x = \beta(y_0) = \lim\limits_{y \to \infty} \int\limits_{y_0}^{y} \frac{ds}{s^2} = \frac{1}{y_0} > 0$. Аналогічно, для $y_0 < 0$ розв'язки відповідної задачі Коші матимуть вертикальну асимптоту $x = \beta(y_0) < 0$.

При цьому оскільки $F(y) = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{ds}{g(s)} = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{ds}{s^2} = -\frac{1}{y} + \frac{1}{y_0} \to \infty$, $y \to 0$, то використовуючи теорему про асимптотичні властивості розв'язків автономного рівняння, отримуємо, що $y = 0$ є горизонтальною асимптотою розв'язку заданої задачі Коші для кожного $y_0 \neq 0$. А саме, при $y_0 < 0$ для розв'язків відповідної задачі Коші має місце асимптотична властивість $y(x) \to 0$, $t \to \infty$, в той час, як для розв'язків задачі Коші з $y_0 > 0$ маємо $y(x) \to 0$, $t \to -\infty$.

Пересвідчитись у справедливості наших висновків можна також безпосередньо. Розв'язуючи задану задачу Коші знаходимо $y(x) = -\frac{1}{x - \frac{1}{y_0}}$, тобто для кожного $y_0 \neq 0$ графіком розв'язку є гіпербола з вертикальною асимптотою $x = \frac{1}{y_0}$ та горизонтальною асимптотою $y = 0$. Однак отримати розв'язок у явному вигляді вдається далеко не завжди, а розглянуті теореми дають змогу отримати уявлення про поведінку розв'язків рівняння.

Приклад 2. Проаналізувати поведінку розв'язів задачі Коші в залежності від значення параметру y_0

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{-y} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо $g(y) = 2\sqrt{-y} \in C(-\infty, 0)$, $y^* = 0$, $g(y) > 0$ для всіх $y \in (-\infty, 0)$, $g(0) = 0$.

За теоремою про максимальний проміжок існування розв'язку автономного рівняння всі розв'язки існують на проміжку $(0, \infty)$.

Застосовуючи теорему про асимптотичні властивості, бачимо, що оскільки $F(y) = -\sqrt{-y} + \sqrt{-y_0} \to \sqrt{-y_0}$, $y \to 0$, то розв'язок заданої задачі Коші дотикається до прямої $y = 0$ в точці $x = \sqrt{-y_0}$. Отже, кожна точка прямої $y = 0$ є точкою неєдиності розв'язку задачі Коші. Такі розв'язки диференціальних рівнянь називаються *особливими*.

Розв'язуючи задану задачу Коші для $y_0 < 0$, отримуємо

$$y(x) = -(\sqrt{-y_0} - x)^2, \quad x \le \sqrt{-y_0},$$

що ще раз підтверджує наші висновки.

Перейдемо до розгляду загального диференціального рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y) \tag{17}$$

з неперервною функцією $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Поведінка розв'язків рівняння (17) може бути набагато складніша, ніж для автономного рівняння. Однак певну інформацію ми можемо отримати безпосередньо з вигляду правої частини $f(x, y)$, не вдаючись при цьому до відшукання розв'язків в явному вигляду і подальшого аналізу отриманих функцій.

Наприклад, у області

$$D_+ = \{(x, y) \in D : f(x, y) > 0\}$$

всі розв'язки рівняння (17) строго монотонно зростають, а в області

$$D_- = \{(x, y) \in D : f(x, y) < 0\}$$

навпаки строго монотонно спадають. Точки екстремуму належать кривій

$$\Gamma_0 = \{(x, y) \in D : f(x, y) = 0\}.$$

Якщо припустити, що функція f неперервно диференційовна, то диференціюючи по x тотожність

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

що справедлива для кожного розв'язку рівняння (17), отримуємо вираз для другої похідної у термінах функції f:

$$y''(x) = \frac{d}{dx} f(x, y(x)) = f'_x(x, y(x)) + f'_y(x, y(x)) \cdot y'(x) =$$
$$= f'_x(x, y(x)) + f'_y(x, y(x)) \cdot f(x, y(x)),$$

який дозволяє виділити множини точок перегину, опуклості вгору чи вниз розв'язків, а також уточнити множини точок екстремуму, виділивши точки мінімуму та максимуму.

Полем напрямків у області $D \subseteq \mathbb{R}^2$ називається відповідність, яка кожній точці $(x_0, y_0) \in D$ зіставляє пряму $y = f(x_0, y_0)(x - x_0) + y_0$, що проходить через точку $(x_0, y_0) \in D$. Поле напрямків зображається у вигляді малого відрізку відповідної прямої. Цей об'єкт можна вважати геометричним еквівалентом диференціального рівняння. З огляду на геометричний зміст похідної очевидно, що *інтегральна крива у кожній своїй точці дотикається до поля напрямків*.

Для автономного рівняння (12) аналогом поля напрямків є *векторне поле на прямій* – залежність, яка кожній точці y_0 прямої $0y$ ставить у відвідність вектор довжини $|g(y_0)|$, що прикладений у цій точці у додатному напрямку для $g(y_0) > 0$ і у від'ємному напрямку для $g(y_0) < 0$.

Множина точок $\Gamma_k = \{(x, y) \in D : f(x, y) = k\}$, де k – дійсне число з області значень функції f, називається $k-$*ізокліною* рівняння (17). Очевидно, що *вздовж ізоклін поле напрямків паралельне*, а точки екстремума інтегральних кривих рівняння (17) лежать на $0-$ізокліні.

Використовуючи наведені вище характеристики інтегральних кривих рівняння (17) (множини спадання та зростання, опуклості вниз і вгору, точок максимуму і мімімуму), а також будуючи поле напрямків у вузлах деякої достатньо густої сітки з горизонтальних та вертикальних прямих, можна отримати достатньо чітке уявлення про поведінку розв'язків рівняння (17), не вдаючись при цьому до безпосереднього розв'язання.

Лабораторна робота, комп'ютерний практикум 1

.

Задача 1. Для диференціального рівняння $y' = f(x, y)$ виконати наступні завдання, результати відобразити на одному графіку.

1) Зобразити поле напрямків в точках $\left(m, \frac{n}{2}\right)$, $m = -6, -5, \ldots, 6$, $n = -6, -5, \ldots, 6$.
2) Описати аналітично та зобразити множини точок максимуму розв'язків.
3) Зобразити ізокліни, які характеризуються кутовими коефіцієнтами $k = \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}$.
4) Зобразити області, де інтегральні криві рівняння зростають, та області, де інтегральні криві спадають.
5) Описати аналітично та зобразити множину точок перегину інтегральних кривих.
6) Виділити області, де інтегральні криві опуклі вгору.
7) Зобразити наближено інтегральні криві, які проходять через точки $(0, -2)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$ відповідно.

Варіанти завдань.

1. $y' = y^2 - 3y + x - 2$.

2. $y' = y^2 - x$.

3. $y' = y^2 - y + x$.

4. $y' = y^2 - 3y - x + 2$.

5. $y' = y^2 + x$.

6. $y' = y^2 + y + x$.

7. $y' = y^2 - 2y + x$.

8. $y' = y^2 + y + x - 2$.

9. $y' = y^2 + x - 1$.

10. $y' = y^2 - x - 1$.

11. $y' = y^2 - 5y + x + 6$.

12. $y' = y^2 + x - 2$.

Задача 2. Для автономного рівняння $y' = g(y)$ провести наступні дослідження.

1) Зобразити векторне поле в точках 0, ± 1, ± 2, ± 3, ± 4.
2) Знайти області зростання і спадання, множину точок перегину інтегральних кривих заданого рівняння.
3) Знайти явний вигляд $y(x, y_0)$, $x \in I_{y_0}$ – непродовжуваного розв'язку рівняння такого, що $y(0, y_0) = y_0$. У разі наявності вертикальних асимптот, вказати точки, через які вони проходять, а відтак, знайти явний вигляд інтервалу I_{y_0}.
4) Для $y_0 \in [y_1, y_2]$, $y_0 \in (-\infty, y_1)$, $y_0 \in (y_2, +\infty)$ (y_1, y_2 – нулі функції $g(y)$, розташовані в порядку зростання) зобразити графік функції $y(x, y_0)$.
5) Нехай $I = (a, b)$, $J = (b, c)$ –інтервали зростання і спадання інтегральних кривих заданого рівняння, відповідно. Зобразити графіки функцій $y(x, b+1/2)$ та $y(x, b-1/2)$ для $x \geq 0$. Знайти $x \geq 0$ таке, що $|y(x, b+1/2) - y(x, b-1/2)| < 10^{-3}$.

Варіанти завдань.

1. $g(y) = y^2 + 3y + 2$.

2. $g(y) = y^2 - 2y - 3$.

3. $g(y) = y^2 - 3y + 2$.

4. $g(y) = y^2 + y - 6$.

5. $g(y) = y^2 + y$.

6. $g(y) = 2y - y^2 + 3$.

7. $g(y) = y^2 - y$.

8. $g(y) = y^2 - 1$.

9. $g(y) = y - y^2$.

10. $g(y) = y^2 - 2y$.

11. $g(y) = 3y - y^2 - 2$.

12. $g(y) = 2 - y - y^2$.

4. Лінійне рівняння, рівняння Бернуллі

Диференціальне рівняння вигляду

$$y' = a(x)y + b(x), \tag{18}$$

де $a(x)$ та $b(x)$ — задані неперервні функції, називається *лінійним неоднорідним рівнянням.* Рівняння вигляду

$$y' = a(x)y \tag{19}$$

називається *лінійним однорідним рівнянням*, що відповідає лінійному неорднорідному рівнянню (18).

Рівняння (19), крім того що є лінійним, також є рівнянням з відокремлюваними змінними, і всі розв'язки цього рівняння задаються сім'єю функцій

$$y = C\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}, \quad C \in \mathbb{R},$$

де x_0 — деяка точка з області визначення функції $a(x)$.

Найрозповсюдженішим методом знаходження розв'язків лінійного неоднорідного рівняння (18) є *метод варіації довільної сталої* (*метод Лагранжа*). Суть цього методу полягає у тому, що спочатку розв'язуємо відповідне лінійне однорідне рівняння (19), а далі розв'язки неоднорідного рівняння (18) шукаємо у вигляді

$$y = C(x)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds},$$

де $C(x)$ – нова невідома функція. Тоді після підстановки відносно $C(x)$ одержуємо диференціальне рівняння

$$C'(x)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} = b(x).$$

Звідки знаходимо $C(x) = \overline{C} + \int\limits_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{t} a(s)ds} b(t)dt$, $\overline{C} \in \mathbb{R}$, а отже, і всі розв'язки рівняння (18)

$$y = \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} \left(\overline{C} + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{t} a(s)ds} b(t)dt \right), \quad \overline{C} \in \mathbb{R}. \tag{20}$$

Теорема. *Нехай $a(\cdot), b(\cdot) \in \mathrm{C}(\alpha, \beta)$. Тоді для будь-яких $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $y_0 \in \mathbb{R}$ задача Коші*

$$y' = a(x)y + b(x), \quad y(x_0) = y_0$$

має єдиний розв'язок

$$y(x) = \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{t} a(s)ds} b(t)dt \right)$$

визначений на (α, β).

Приклад 1. Розв'язати рівняння $xy' - 2y = 2x^4$.

Розв'язання. Перепишемо задане рівняння у вигляді $y' - \dfrac{2}{x}y = 2x^3$. Розв'яжемо спочатку однорідне рівняння

$$y' - \frac{2}{x}y = 0.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння буде мати вигляд

$$y(x) = C \exp^{\int \frac{2}{x} dx} = Cx^2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Тому відповідно до методу варіації довільної сталої будемо шукати розв'язок вихідного рівняння у вигляді $y(x) = C(x)x^2$. Підставимо $y(x)$ у вихідне рівняння:

$$xC'(x)x^2 + 2x^2C(x) - 2x^2C(x) = 2x^4 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad C(x) = x^2 + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Зауважимо, що ми можемо позначати сталу інтегрування C_1 знову ж літерою C. Отже, $y(x) = x^2(x^2 + C)$, $C \in \mathbb{R}$ – загальний розв'язок вихідного лінійного неоднорідного рівняння.

Рівняння вигляду

$$y' = a(x)y + b(x)y^n, \tag{21}$$

де $a(x)$ та $b(x)$ — задані функції, $n \in \mathbb{R}$, називається *рівнянням Бернуллі.*

Зауваження. *При $n = 1$ рівняння (21) перетворюється у лінійне однорідне рівняння, при $n = 0$ — у лінійне неоднорідне рівняння.*

Для розв'язання рівняння Бернуллі при $n \neq 1$ використовується *метод Бернуллі*, відповідно до якого розв'язки рівняння (21) шукаємо у вигляді $y = uv$, де $u = u(x)$, $v = v(x)$ — поки що невизначені функції. Підставляємо у рівняння та групуємо доданки

$$u'v + uv' = a(x)uv + b(x)u^n v^n \quad \Rightarrow \quad (u' - a(x)u)v + uv' = b(x)u^n v^n.$$

Якщо тепер функцію $u = u(x)$ вибрати як будь-який ненульовий розв'язок лінійного однорідного рівняння $u' = a(x)u$, наприклад, $u(x) = \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}$, то відносно функції v приходимо до диференціального рівняння з відокремлюваними змінними

$$v' = b(x)v^n \mathrm{e}^{(n-1)\int_{x_0}^{x} a(s)ds}.$$

Розв'язавши це рівняння і домноживши знайдені розв'язки на функцію $u(x)$, одержимо всі розв'язки рівняння Бернуллі.

Відмітимо, що при $n > 0$ рівняння з відокремлюваними змінними для функції $v(x)$ має розв'язок $v \equiv 0$, тобто функція $y \equiv 0$ завжди є розв'язком рівняння Бернуллі для $n > 0$.

Зауваження. *При $n \neq 0$ та $n \neq 1$ рівняння Бернуллі можна звести до лінійного неоднорідного рівняння заміною $z = y^{1-n}$, де $z = z(x)$ — нова невідома функція. Однак зазначимо, що при такій заміні для $n > 0$ ми втрачаємо розв'язок $y = 0$, тому його слід додати до отриманої сім'ї функцій.*

Лінійне рівняння, як частинний розв'язок рівняння Бернуллі, також можна розв'язувати методом Бернуллі.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y' - \dfrac{1}{x}y = 3x$ методом Бернуллі.

Розв'язання. Задане рівняння є лінійним неоднорідним. Згідно методу Бернуллі розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді $y = uv$. Маємо $y' = u'v + v'u$. Підставивши y і y' у рівняння, одержимо:

$$u'v + v'u - \frac{1}{x}uv = 3x \quad \Rightarrow \quad uv' + v(u' - \frac{1}{x}u) = 3x.$$

Розв'язуємо рівняння $u' - \dfrac{1}{x}u = 0$. Частковим розв'язком такого рівняння з відокремленими змінними є функція $u(x) = x$. Підставивши це значення у співвідношення $uv' = 3x$, одержимо $x\dfrac{dv}{dx} = 3x$ або $\dfrac{dv}{dx} = 3$. Звідки $v(x) = 3x + C$, $C \in \mathbb{R}$. Тоді загальний розв'язок заданого лінійного неоднорідного рівняння має вигляд: $y(x) = x(3x + C)$, $C \in \mathbb{R}$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y' + \dfrac{y}{x} = y^2\dfrac{\ln x}{x}$.

Розв'язання. Задане рівняння є рівнянням Бернуллі. Розв'яжемо його двома способами.

`1-й спосіб`. Використаємо метод Бернуллі. Застосуємо заміну $y = uv$. Будемо мати:

$$u'v + v'u + \frac{uv}{x} = u^2v^2\frac{\ln x}{x} \quad \Rightarrow \quad \left(u' + \frac{u}{x}\right)v + v'u = u^2v^2\frac{\ln x}{x}.$$

Функцію u шукаємо як деякий розв'язок рівняння $u' + \dfrac{u}{x} = 0$, наприклад, $u = \dfrac{1}{x}$. Тоді для v отримуємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$v' = \frac{v^2}{x^2}\ln x.$$

Функція $v \equiv 0$ є розв'язком цього рівняння, інші розв'язки знаходимо відокремлюючи змінні

$$\frac{dv}{v^2} = \frac{\ln x}{x^2}dx \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dv}{v^2} = \int\frac{\ln x}{x^2}dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{v} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C, \quad C \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad v(x) = \frac{x}{1 + Cx + \ln x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Отже, всі розв'язки вихідного рівняння задаються сукупністю

$$\left[\begin{array}{l} y(x) = \dfrac{1}{1 + Cx + \ln x}, \quad C \in \mathbb{R}, \\ y = 0. \end{array}\right.$$

`2-й спосіб`. Застосуємо заміну $z = y^{1-2} = \dfrac{1}{y}$, $z = z(x)$, $z' = -\dfrac{1}{y^2}y'$. Відразу зауважимо, що за такої заміни втрачається розв'язок $y = 0$ вихідного рівняння. Впровадивши заміну, будемо мати:

$$-\frac{1}{z^2}z' + \frac{1}{zx} = \frac{1}{z^2}\frac{\ln x}{x} \quad \Rightarrow \quad -z' + \frac{z}{x} = \frac{\ln x}{x}.$$

Розв'язуючи останнє лінійне неоднорідне рівняння відносно z, отримаємо: $z(x) = \ln x + 1 + Cx$, $C \in \mathbb{R}$. Повертаючись до вихідної невідомої функції, одержуємо всі розв'язки вихідного рівняння Бернуллі: $y(x) = \dfrac{1}{\ln x + 1 + Cx}$, $C \in \mathbb{R}$ або $y = 0$.

Лінійне неоднорідне рівняння (18) можна також розв'язувати *методом Ейлера* (*методом інтегрувального множника*). А саме, домноживши це рівняння на функцію $e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds}$ (інтегрувальний множник), одержимо рівність

$$y'e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds} - a(x)ye^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds} = b(x)e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds}$$

або, що те саме,

$$\frac{d}{dx}\left(y\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}a(s)ds}\right)=b(x)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}a(s)ds}.$$

Проінтегрувавши останню рівність по x та виразивши явно $y = y(x)$, одержимо всі розв'язки лінійного неоднорідного рівняння у вигляді (20).

Приклад 4. Розв'язати рівняння $x^2y' + xy + 1 = 0$ методом Ейлера (методом інтегрувального множника).

Розв'язання. Перепишемо задане рівняння у вигляді $y' + \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x^2}$. Згідно медоду Ейлера домножимо останнє рівняння на $e^{\int \frac{1}{x}dx} = x$. Будемо мати:

$$xy' + y = -\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad (xy)' = -\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad xy = -\ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Тому загальним розв'язком вихідного рівняння буде сім'я функцій

$$y = -\frac{1}{x}\ln|x| + \frac{C}{x}, C \in \mathbb{R}.$$

Зауваження. *Деякі рівняння стають лінійними, якщо поміняти "ролями" шукану функцію і незалежну змінну. Однак при такій процедурі можна втратити розв'язки вигляду* $y = \mathrm{const}$, *які слід перевірити окремо та додати до сім'ї розв'язків.*

Приклад 5. Розв'язати рівняння $y = (2x + y^3)y'$.

Розв'язання. Вихідне рівняння не є лінійним відносно y. Одразу зауважимо, що серед функцій вигляду $y = \mathrm{const}$ лише $y = 0$ розв'язком. Далі перепишемо рівняння у вигляді $\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x = y^2$. Це рівняння є лінійним неоднорідним, в якому незалежною змінною є y, а шуканою функцією $x = x(y)$. Застосовуючи один із запропонованих методів для розв'язування лінійних неоднорідних рівнянь, отримуємо розв'язок $x(y) = (y + C)y^2$, $C \in \mathbb{R}$, тоді розв'язки вихідного рівняння задаються сукупністю

$$\left[\begin{array}{l} x = (y + C)y^2, \quad C \in \mathbb{R}, \\ y = 0. \end{array}\right.$$

Вправи

Розв'язати рівняння:

57. $y' \sin x - y \cos x = -\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$.

58. $(xy + e^x)dx - xdy = 0$.

59. $2x(x^2 + y)dx = dy$.

60. $(xy' - 1)\ln x = 2y$.

61. $(2e^y - x)y' = 1$.

62. $y' + 2y = y^2 e^x$.

63. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$.

64. $(2x + 1)y' = 4x + 2y$.

65. $y = x(y' - x\cos x)$.

66. $y(x) = \int\limits_0^x y(t)dt + x + 1$.

67. $\int\limits_0^x (x - t)y(t)dt = 2x + \int\limits_0^x y(t)dt$.

68. $(2x^2 y \ln y - x)y' = y$.

69. $xy' + y = xy^2 \ln x$.

70. $y' + ytgx = \dfrac{1}{\cos x}$.

71. $(x + 1)(y' + y^2) = -y$.

72. $xy^2 y' = x^2 + y^3$.

73.* Знайти періодичний розв'язок рівняння $y' = 2y\cos^2 x - \sin x$.

74.* Нехай в рівнянні $xy' + ay = f(x)$ маємо $a = const > 0$, $f(x) \to b$ при $x \to 0$. Показати, що лише один розв'язок рівняння залишаються обмеженим при $x \to 0$ і знайти границю цього розв'язку при $x \to 0$.

75.* Нехай в рівняння попередньої задачі $a = const < 0$, $f(x) \to b$ при $x \to 0$. Показати, що всі розв'язки цього рівняння мають одну і ту ж скінченну границю при $x \to 0$. Знайти цю границю.

76.* Знайти всі 2π-періодичні розв'язки рівняння $y' = y\cos x + \cos x$.

5. Рівняння Ріккаті

Рівняння Ріккаті має вигляд

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x), \tag{22}$$

де P, Q, R – неперервні функції від $x \in (a, b)$, $(a \geq -\infty,\ b \leq \infty)$.

У загальному випадку рівняння Ріккаті (22) не інтегрується в квадратурах. Однак, існує багато частинних випадків, коли інтегрування можливе.

Наприклад, при $P \equiv 0$ рівняння Рікатті перетворюється на лінійне рівняння, а при $R \equiv 0$ – на рівняння Бернуллі. Розглянемо інші випадки, коли рівняння Ріккаті можна проінтегрувати в квадратурах.

1) Якщо рівняння (22) має вигляд

$$y' = Ay^2 + B\frac{y}{x} + C\frac{1}{x^2},$$

де A, B, C – деякі дійсні сталі, то (22) – квазіоднорідне рівняння з показником $\sigma = -1$.

2) Якщо рівняння (22) має вигляд

$$y' = A\frac{y^2}{x} + \frac{1}{2}\frac{y}{x} + C, \tag{23}$$

де A, C – дійсні сталі, то заміною $y = z\sqrt{x}$, де $z = z(x)$ – нова шукана функція, воно зводиться до рівняння з відокремленими змінними.

3) Якщо відомий деякий частинний розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння (22), то заміною $y = z + \varphi(x)$, де $z = z(x)$ – нова шукана функція, то воно зводиться до рівняння Бернуллі.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$.

Розв'язання. Маємо рівняння Ріккаті. Спробуємо відшукати його частинний розв'язок у вигляді $y = \dfrac{a}{x}$, де сталу a підберемо таким чином, щоб дійсно отримати розв'язок. Підставляючи у рівняння маємо

$$x^2\left(-\frac{a}{x^2}\right) = x^2\left(\frac{a}{x}\right)^2 + x\cdot\frac{a}{x} + 1 \quad\Rightarrow\quad -a = a^2 + a + 1 \quad\Rightarrow\quad (a+1)^2 = 0.$$

Отже, при $a = -1$ отримуємо частинний розв'язок рівняння $y = -\dfrac{1}{x}$.

Тепер зробимо заміну $y = z - \dfrac{1}{x}$, $z = z(x)$. Тоді $y' = z' + \dfrac{1}{x^2}$, і маємо

$$x^2\left(z' + \frac{1}{x^2}\right) = x^2\left(z - \frac{1}{x}\right)^2 + x\left(z - \frac{1}{x}\right) + 1,$$

$$x^2 z' + 1 = x^2 z^2 - 2xz + 1 + xz - 1 + 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 z' = x^2 z^2 - xz.$$

У результаті ми дійсно прийшли до рівняння Бернулі

$$z' = z^2 - \frac{z}{x}.$$

Одразу зазначимо, що це рівняння має розв'язок $z = 0$, який породжує частинний розв'язок $y = -\dfrac{1}{x}$ вихідного рівняння, який ми вже знайшли. Інші розв'язки отримуємо за допомогою методу Бернуллі, використовуючи підстановку $z = uv$:

$$u'v + uv' = u^2v^2 - \frac{uv}{x} \quad \Rightarrow \quad \left(u' - \frac{u}{x}\right)v + uv' = u^2v^2.$$

Виберемо u як частинний розв'язок рівняння $u' - \dfrac{u}{x} = 0$, наприклад, $u = x$. Тоді відносно v приходимо до рівняння

$$xv' = x^2v^2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{dv}{v^2} = -xdx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{v} = -\frac{1}{2}x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{1}{-\frac{1}{2}x^2 + C} \quad \Rightarrow \quad z = uv = \frac{x}{-\frac{1}{2}x^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Загадуючи, що $y = z - \dfrac{1}{x}$, і приймаючи до уваги ще один розв‘язок $z = 0$, остаточно отримуємо

$$\left[\begin{array}{l} y = \dfrac{x}{-\dfrac{1}{2}x^2 + C} - \dfrac{1}{x}, \quad C \in \mathbb{R}, \\[2ex] y = -\dfrac{1}{x}. \end{array}\right.$$

4) Рівняння (22) можна звести до *рівняння Ріккаті канонічного вигляду*

$$y' = \pm y^2 + R(x),$$

за допомогою комбінації підстановок $y = \alpha(x)z$, $z = u + \beta(x)$, $z = z(x)$, $u = u(x)$. При цьому у першій підстановці функцію $\alpha(x)$ вибираємо так, щоб перетворити на ± 1 коефіцієнт при y^2, а в другій – функцію $\beta(x)$ так, щоб перетворити на 0 коефіцієнт при z, при цьому коефіцієнт при z^2 не змінюється.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y' = 4y^2 - 4x^2y + x^4 + x + 4$.

Розв'язання. Спробуємо звести рівняння до канонічного вигляду. Спочатку зробимо заміну $y = \alpha(x)z$, $z = z(x)$, і підберемо функцію $\alpha(x)$:

$$\alpha'(x)z + \alpha(x)z' = 4\alpha^2(x)z^2 - 4x^2\alpha(x)z + x^4 + x + 4,$$

$$z' = 4\alpha(x)z^2 - \left(4x^2 + \frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}\right)z + \frac{x^4 + x + 4}{\alpha(x)}.$$

Отже, якщо покласти $\alpha(x) = \dfrac{1}{4}$, то коефіцієнт при z^2 буде рівним 1, і ми отримаємо рівняння

$$z' = z^2 - 4x^2z + 4x^4 + 4x + 16.$$

Далі застосуємо заміну $z = u + \beta(x)$ і виберемо $\beta(x)$ так, щоб перетворити на 0 коефіцієнт при z :

$$u' + \beta'(x) = (u + \beta(x))^2 - 4x^2(u + \beta(x)) + 4x^4 + 4x + 16,$$

$$u' = u^2 + \left(2\beta(x) - 4x^2\right)u + 4x^4 + 4x + 16 + \beta^2(x) - 4x^2\beta(x) - \beta'(x).$$

Таким чином, якщо вибрати $\beta(x) = 2x^2$, то приходимо до рівняння

$$u' = u^2 + 16,$$

яке не лише є рівнянням Ріккаті канонічного вигляду, але й рівняннм з відокремлюваними змінними, розв'язуючи яке отримуємо

$$u = 4\,\mathrm{tg}(4x + C), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Нарешті послідовно повертаючись до шуканої функції $y = \dfrac{1}{4}z = \dfrac{1}{4}(u+2x^2)$ остаточно отримуємо

$$y = \mathrm{tg}(4x + C) + \frac{1}{2}x^2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

5) Рівняння (22) вигляду

$$y' + Ay^2 = Bx^m, \tag{24}$$

A, B – дійсні сталі, називається *рівнянням Ріккаті спеціального вигляду.* Зауважимо, що у випадку, коли $m = 0$ або $m = -2$ рівняння (24) легко інтегрується в елементарних функціях, адже маємо рівняння з відокремленими змінними та квазіоднорідне рівняння, відповідно. Для інших значень m, рівняння (24) інтегрується в квадратурах тоді і лише тоді, коли $\dfrac{m}{2m+4} = k \in \mathbb{Z}$.

`Метод інтегрування`:

а) заміною $y = \dfrac{z}{x}$, $z = z(x)$ зводимо рівняння до вигляду

$$xz' - z + Az^2 = Bx^{m+2};$$

б) проводимо заміну незалежної змінної $t = x^{m+2}$ і далі розглядаємо $z = z(t)$, в результаті отримуємо рівняння вигляду

$$tz' + \alpha z + \beta z^2 = \gamma t;$$

в) далі послідовним застосуванням однієї з двох замін

$$z = \frac{t}{a+u}, \quad \text{де} \quad a = \frac{1+\alpha}{\gamma}$$

або

$$z = a + \frac{t}{u}, \quad \text{де} \quad a = -\frac{\alpha}{\beta}$$

приходимо до рівняння (23), причому перша з указаних замін збільшує коефіцієнт при z на одиницю, а друга навпаки – зменшує.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y' = y + \dfrac{1}{x^4}$.

Розв'язання. Маємо рівняння Ріккаті спеціального вигляду з $m = -4$.

Оскільки $\dfrac{-4}{2\cdot(-4)+4=1} \in \mathbb{Z}$, то рівняння інтегрується в квадратурах.

Застосуємо описаний вище алгоритм.

Впровадимо заміну $y = \dfrac{z}{x}$. Тоді оскільки $y' = \dfrac{z'}{x} - \dfrac{z}{x^2}$, то отримуємо

$$\frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2} - \frac{z^2}{x^2} = \frac{1}{x^4} \quad \Rightarrow \quad xz' - z - z^2 = \frac{1}{x^2}.$$

Тепер робимо заміну незалежної змінної $t = \dfrac{1}{x^2}$. Тоді

$$z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dt}\frac{dt}{dx} = -\frac{2}{x^3}z'_t \quad \Rightarrow \quad xz'_x = -2tz'_t,$$

а тому приходимо до рівняння відносно функції $z = z(t)$:

$$-2tz'_t - z - z^2 = t \quad \Rightarrow \quad tz'_t + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^2 = -\frac{1}{2}t.$$

Порівнюючи отримане рівняння з (23), бачимо, що нам потрібно зменшити коефіцієнт при z на одиницю (у рівнянні (23) відповідний коефіцієнт дорівнює $-\frac{1}{2}$). Оскільки $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$, $\gamma = -\dfrac{1}{2}$, то застосовуємо заміну $z = a + \dfrac{t}{u}$ з $a = -\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1$, тобто $z = -1 + \dfrac{t}{u}$. Тоді $z' = \dfrac{1}{u} - \dfrac{tu'}{u^2}$ і підставляючи

$$t\left(\frac{1}{u} - \frac{tu'}{u^2}\right) + \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{t}{u}\right) + \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{t}{u}\right)^2 = -\frac{1}{2}t,$$

приходимо до рівняння вигляду (23)

$$u' = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^2}{t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{u}{t} + \frac{1}{2}.$$

Насамкінець застосовуємо заміну $u = v\sqrt{t}$. Зауважимо, що оскільки у нас $t = \dfrac{1}{x^2} > 0$, то операція добування кореня є коректною. Тоді оскільки $u' = v'\sqrt{t} + \dfrac{v}{2\sqrt{t}}$, то підставляючи приходимо до рівняння з відокремлюваними змінними

$$v'\sqrt{t} + \frac{v}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}v^2 + \frac{v}{2\sqrt{t}} + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad v'\sqrt{t} = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}.$$

Розв'язуючи останнє рівняння знаходимо

$$v(t) = \operatorname{tg}\sqrt{t} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Тепер залишилось лише зробити зворотні заміни і повернутися до початкової функції

$$u(t) = \sqrt{t}\left(\operatorname{tg}\sqrt{t} + C\right), \quad C \in \mathbb{R},$$

$$z(t) = -1 + \frac{t}{u} = -1 + \sqrt{t}\left(\operatorname{ctg}\sqrt{t} + C\right), \quad C \in \mathbb{R},$$

$$z(x) = -1 + \frac{1}{x}\left(\operatorname{ctg}\frac{1}{x} + C\right), \quad C \in \mathbb{R},$$

$$y(x) = \frac{z}{x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\left(\operatorname{ctg}\frac{1}{x} + C\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Лабораторна робота, комп'ютерний практикум 2

.

Задача 1.

Шляхом підбору частинного розв'язку звести рівняння Ріккаті до рівняння Бернуллі і розв'язати його.

Варіанти завдань.

1. $x^2y' + xy + x^2y^2 = 4$

2. $xy' = y^2 - (2x+1)y + x^2 + 2x$

3. $x^2y' + (xy-2)^2 = 0$

4. $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$

5. $y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$

6. $3y' + y^2 + \dfrac{2}{x^2} = 0$

7. $xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2$

8. $x^3y' - y^2 - x^2y + x^2 = 0$

9. $y' = -y^2 + x^2 + 1$

10. $y' + y^2 = x^2 - 2x$

11. $y' + y^2 = -\dfrac{1}{4x^2}$

12. $y' = \dfrac{1}{2}y^2 + \dfrac{1}{2x^2}$

Задача 2.

Розв'язати рівняння Ріккаті, попередньо звівши його до канонічного вигляду.

Варіанти завдань.

1. $y' = y^2 - \dfrac{2y}{x^3} + \dfrac{1}{x^6}$

2. $y' = -\dfrac{y^2}{x^4} + \dfrac{4y}{x} + 1$

3. $x^2y' - y^2 - 2xy - 3 = 0$

4. $y' = -y^2 + \dfrac{2y}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}$

5. $y' = y^2 - \dfrac{2y}{x} + \dfrac{3}{x^4}$

6. $x^2y' + y^2 - 2xy - 1 = 0$

7. $y' = -e^xy^2 - y + x^{-\frac{4}{3}}e^{-x}$

8. $y' = y^2 - 2x^{-\frac{1}{3}}y + x^{-\frac{2}{3}}$

9. $y' = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} - 2x^{-\frac{2}{3}} - y^2$

10. $xy' = x^{\frac{1}{3}} + \dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}$

11. $xy' + y^2 - y - x^{\frac{2}{3}} = 0$

12. $y' = y^2 - \dfrac{2y}{x} + \dfrac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$

6. Рівняння у повних диференціалах, інтегрувальний множник

Розглянемо диференціальне рівняння у симетричній формі

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \qquad (25)$$

де функції $M, N \in \mathrm{C}(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ — відкрита область, $|M(x,y)| + |N(x,y)| \neq 0$ для всіх $(x,y) \in D$.

Рівняння (25) називається *рівнянням у повних диференціалах*, якщо існує функція $U \in \mathrm{C}^1(D)$ така, що

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{і} \quad \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

в області D, тобто рівняння (25) можна переписати у вигляді

$$dU(x,y) = 0.$$

Теорема. *Нехай (25) є рівнянням у повних диференціалах. Тоді для будь-якої точки $(x_0, y_0) \in D$ існує єдина інтегральна крива цього рівняння, яка проходить через точку (x_0, y_0), визначена принаймні в деякому околі цієї точки і задається неявною функцією $U(x,y) = C_0$ для $C_0 = U(x_0, y_0)$.*

Зауваження. *Всі розв'язки рівняння у повних диференціалах (25) задаються неявно рівністю $U(x,y) = C$, $C \in \mathbb{R}$, яка називається загальним інтегралом рівняння у повних диференціалах.*

Теорема. *Нехай $M, N \in \mathrm{C}^1(D)$, D – однозв'язна область. Тоді рівняння (25) є рівнянням у повних диференціалах тоді і лише тоді, коли*

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \quad \text{для всіх} \quad (x,y) \in D.$$

Зауваження. *Для рівняння у повних диференціалах (25) функцію $U(x,y)$ можна визначити формулою*

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(s,y)ds + \int_{y_0}^{y} N(x_0,s)ds,$$

де $(x_0, y_0) \in D$ — деяка точка.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $ydx + xdy = 0$.

Розв'язання. Перевіримо для заданого рівняння умову повноти. Оскільки у нас $M(x,y) = y$, $N(x,y) = x$, то $\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x} = 1 - 1 = 0$. Отже, маємо рівняння в повних диференціалах. Очевидно, що $U(x,y) = xy$, тому загальними інтегралом буде $xy = C$, $C \in \mathbb{R}$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$.

Розв'язання. Перевіримо для заданого рівняння умову повноти. Оскільки $M(x,y) = 2xy$, $N(x,y) = x^2 - y^2$, то $\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2x - 2x = 0$. Отже, маємо рівняння в повних диференціалах. Знайдемо для нього загальний інтеграл $U(x,y) = C$, $C \in \mathbb{R}$. Відомо, що

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M = 2xy \quad \Rightarrow \quad U = \int 2xydx + \varphi(y) = x^2y + \varphi(y).$$

Тоді з одного боку

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y + \varphi(y)\right) = x^2 + \varphi'(y),$$

з іншого боку з рівняння

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 - y^2,$$

тому, прирівнюючи праві частини, знаходимо

$$\varphi'(y) = -y^2 \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = -\frac{y^3}{3} \quad \Rightarrow \quad U(x,y) = x^2y - \frac{y^3}{3}.$$

Отже, загальний інтеграл рівняння $x^2y - \dfrac{1}{3}y^3 = C$, $C \in \mathbb{R}$.

Не кожне рівняння вигляду (25) є рівнянням у повних диференціалах. Однак можна спробувати звести рівняння (25) до рівняння у повних диференціалах, домножуючи його на деяку функцію. Таким чином, ми приходимо до поняття інтегрувального множника.

Функцію $\mu(x,y) \in \mathrm{C}(D)$, яка не перетворюється в нуль у жодній точці області D, називається *інтегрувальним множником* рівняння (25), якщо після домноження на цю функцію рівняння (25) перетворюється на рівняння у повних диференціалах.

Припустимо, що у рівнянні (25) $M, N \in \mathrm{C}^1(D)$ і D є однозв'язною областю. Тоді для того щоб функція $\mu(x,y) \in \mathrm{C}^1(D)$ була інтегрувальним множником цього рівняння необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu(x,y)M(x,y)\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\mu(x,y)N(x,y)\Big) \tag{26}$$

в області D.

Для одержання інтегрувального множника достатньо відшукати один нетривіальний розв'язок $\mu(x,y)$ рівняння (26), знаходити всі розв'язки цього рівняння не потрібно. Зокрема, у деяких випадках інтегрувальний множник можна знайти як функцію однієї змінної, або $\mu = \mu(x)$, або $\mu = \mu(y)$. У таких випадках рівність (26) перетворюється на звичайне диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. А саме, якщо дріб

$$\frac{M'_y - N'_x}{N} = \varphi(x)$$

є функцією лише змінної x, то інтегрувальний множник знаходиться як розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{M'_y - N'_x}{N} \quad \text{для} \quad \mu = \mu(x).$$

Аналогічно, якщо дріб

$$\frac{N'_x - M'_y}{M} = \psi(y)$$

є функцією лише змінної y, то інтегрувальний множник знаходиться як розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{N'_x - M'_y}{M} \quad \text{для} \quad \mu = \mu(y).$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння $(x^2 - \sin^2 y)dx + x\sin 2y dy = 0$.

Розв'язання. Перевіримо умову повноти:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -2\sin y\cos y - \sin 2y = -2\sin 2y \neq 0.$$

Отже, умова повноти не виконується. Тому задане рівняння не є рівнянням в повних диференціалах. Спробуємо знайти інтегрувальний множник вигляду $\mu = \mu(x)$:

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-2\sin 2y}{x\sin 2y} = -\frac{2}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu'}{\mu} = -\frac{2}{x}.$$

Отже, ми прийшли до диференціального рівняння з відокремлюваними змінними, розв'язком якого, наприклад, є функція $\mu = \dfrac{1}{x^2}$. Далі, домножуючи вихідне рівняння на цей інтегрувальний множник, отримуємо рівняння

$$\left(1 - \frac{\sin^2 y}{x^2}\right) dx + \frac{\sin^2 y}{x} dy = 0.$$

Це рівняння вже є рівнянням у повних диференціалах. Знайдемо його загальний інтеграл:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\sin 2y}{x} \quad \Rightarrow \quad U = \frac{1}{x} \int \sin 2y dy + \varphi(x) = \frac{\sin^2 y}{x} + \varphi(x),$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}: \quad -\frac{\sin^2 y}{x^2} + \varphi'(x) = 1 - \frac{\sin^2 y}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \varphi'(x) = 1 \quad \Rightarrow \varphi(x) = x.$$

Отже, $U(x, y) = \dfrac{\sin^2 y}{x} + x$, тобто маємо загальний інтеграл

$$\frac{\sin^2 y}{x} + x = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Зауважимо, що наш інтегральний множник $\mu(x) = \dfrac{1}{x^2}$ невизначений при $x = 0$, тому його використання звужує початкову область визначення рівняння і, таким чином, може привести до втрати розв'язків. Дійсно, функція $x \equiv 0$ є розв'язком вихідного рівняння, тому її треба додати до множини розв'язків:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\sin^2 y}{x} + x = C, \quad C \in \mathbb{R}, \\ x = 0. \end{array}\right.$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння $y(x + y)dx + (xy + 1)dy = 0$.

Розв'язання. Перевіримо умову повноти:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = x + 2y - y = x + y \neq 0.$$

Отже, умова повноти не виконується. Тому задане рівняння не є рівнянням в повних диференціалах. Спробуємо відшукати інтегрувальний множник вигляду $\mu = \mu(y)$:

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \frac{x + y}{-yx + y} = -\frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu'}{\mu} = -\frac{1}{y}.$$

Таким чином, ми отримали рівняння з відокремлюваними змінними для знаходження інтегрувального множника, одним з його розв'язків, наприклад, є функція $\mu = \dfrac{1}{y}$. Тепер помножимо вихідне рівняння на інтегрувальний множник:

$$(x+y)dx + \left(x + \frac{1}{y}\right)dy = 0$$

– отримали рівняння в повних диференціалах. Знайдемо його загальний інтеграл:

$$xdx + ydx + xdy + \frac{dy}{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad d\left(\frac{1}{2}x^2 + xy + \ln|y|\right) = 0.$$

Тому загальним інтегралом заданого рівняння є

$$U(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xy + \ln|y| = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Оскільки ми використовували інтегрувальний множник $\mu = \dfrac{1}{y}$ невизначений при $y = 0$, то безпосередньою перевіркою встановлюємо, що функція $y \equiv 0$ теж є розв'язком рівняння.

Іноді інтегрувальний множник можна шукати у вигляді $\mu = \mu(\omega(x,y))$, де $\omega(x,y)$ – деяка функція, зокрема, найчастіше використовуються варіанти: $\omega(x,y) = x^2 \pm y^2$, $\omega(x,y) = xy$, $\omega(x,y) = x \pm y$. У цьому випадку з рівності (26) отримуємо рівняння для знаходження $\mu = \mu(\omega(x,y))$:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial \omega}{\partial x} - M\dfrac{\partial \omega}{\partial y}} = f(\omega).$$

Якщо виявиться, що права частина цього рівняння залежить лише від $\omega(x,y)$, то рівняння (25) допускає інтегрувальний множник вигляду $\mu = \mu(\omega(x,y))$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $(x^2 + y^2 + y)dx - xdy = 0$.

Розв'язання. Перевіримо умову повноти:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2y + 2 \neq 0.$$

Отже, умова повноти не виконується. Тому задане рівняння не є рівнянням в повних диференціалах. Знайдемо інтегрувальний множник вигляду

$\mu = \mu(\omega)$, де $\omega = x^2 + y^2$. Оскільки

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial \omega}{\partial x} - M\dfrac{\partial \omega}{\partial y}} = \frac{y+1}{-x^2(y+1) - y^2(y+1)} == -\frac{1}{x^2+y^2} = -\frac{1}{\omega},$$

то рівняння допускає інтегрувальний множник такого вигляду, і ми можемо його знайти як один з розв'язків рівняння

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{d\omega}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{x^2+y^2}.$$

Тепер домножимо вихідне рівняння на інтегрувальний множник:

$$\left(1 + \frac{y}{x^2+y^2}\right)dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy = 0.$$

Отримали рівняння в повних диференціалах, загальним інтегралом якого є

$$x + \operatorname{arctg}\frac{x}{y} = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

При відшуканні інтегрувальних множників можна використовувати наступний результат.

Теорема. ***(про загальний вигляд інтегрувального множника.)*** *Якщо* $\mu(x,y)$ *— інтегрувальний множник рівняння* (25), $U(x,y)$ *— інтеграл рівняння*

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y) = 0$$

і $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *— довільна неперервна функція, то функція* $f(U(x,y))\mu(x,y)$ *також є інтегрувальним множником рівняння* (25).

Приклад 6. Розв'язати рівняння

$$\left(\frac{y}{x} + 3x^2\right)dx + \left(1 + \frac{x^3}{y}\right)dy = 0.$$

Розв'язання. Перепишемо вихідне рівняння у вигляді:

$$\left(\frac{y}{x}dx + dy\right) + \left(3x^2dx + \frac{x^3}{y}dy\right) = 0.$$

Для рівняння $\dfrac{y}{x}dx + dy = 0$ інтегрувальним множником є функція $\mu_1 = x$, а інтегралом є функція $U_1 = xy$. Відповідно, для рівняння

$3x^2dx + \dfrac{x^3}{y}dy = 0$ інтегрувальним множником є функція $\mu_2 = y$, а інтегралом є $U_2 = x^3y$. Якщо ми зможемо підібрати функції $\varphi, \psi \in C^1$ таким чином, щоб $x\varphi(xy) = y\psi(x^3y)$, то цей вираз буде одночасно інтегрувальним множником і для першої, і для другої дужки, тобто інтегрувальними всього рівняння. Для $\varphi(t) = t^2$, $\psi(s) = s$ потрібна рівність буде виконуватись, а отже, спільне значення $\mu = x^3y^2$ буде інтегрувальним множником для вихідного рівняння, після домноження на який отримуємо рівняння

$$\left(x^2y^3dx + x^3y^2dy\right) + \left(3x^5y^2dx + x^6ydy\right) = 0$$

загальний інтеграл якого легко знайти

$$U = \frac{1}{3}x^3y^3 + \frac{1}{2}x^6y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Відмітимо, що ми домножили вихідне рівняння на функцію $\mu = x^3y^2$, що обертається на нуль вздовж прямих $x = 0$, $y = 0$. Разом з тим множини $x = 0$, $y = 0$ не належать до множини допустимих значень рівняння, тому їх слід виключити зі знайденого загального інтегралу:

$$\begin{cases} U = \frac{1}{3}x^3y^3 + \frac{1}{2}x^6y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}, \\ x \neq 0, \quad y \neq 0. \end{cases}$$

Останній вираз також можна переписати наступним чином.

Помітимо, що при $x = 0$ або $y = 0$ значення параметру $C = 0$.

З іншого боку, якщо $C = 0$, то окрім значень $x = 0$ та $y = 0$ рівність $U = \dfrac{1}{3}x^3y^3 + \dfrac{1}{2}x^6y^2 = 0$ задовольняє функція $y = -\dfrac{3}{2}x^3$, яка є розв'язком вихідного рівняння, тому маємо

$$\begin{cases} U = \frac{1}{3}x^3y^3 + \frac{1}{2}x^6y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ x \neq 0, \quad y \neq 0. \end{cases}$$

Вправи

Розв'язати рівняння:

77. $(y + e^x)dx + xdy = 0.$

78. $\dfrac{x}{x^2 + y^2}dx + \dfrac{y}{x^2 + y^2}dy = 0.$

79. $\left(\dfrac{1}{x} + y\right)dx + (3y^2 + x)dy = 0.$

80. $2xye^{x^2}dx + (2 - e^{x^2})dy = 0.$

81. $\dfrac{x}{y^2}dx - \dfrac{x^2}{y^3}dy = 0.$

82. $yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy = 0.$

83. $(x^2 - 4xy - 2y^2)dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)dy = 0.$

84. $3x^2(1 + \ln y)dx = \left(2y - \dfrac{x^3}{y}\right) dy.$

85. $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0.$

86. $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0.$

87. $ydx - (x + x^2 + y^2)dy = 0.$

88. $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = 0.$

89. $dx + (x + e^{-y}y^2)dy = 0.$

90. $\left(y - \frac{ay}{x} + x\right) dx + ady = 0$, a – параметр, $\omega = x \pm y$.

91. $(x^2 + y^2 + y)dx - xdy = 0$, $\omega = x^2 \pm y^2$.

92. $(x^2 + y^2 + 1)dx - 2xydy = 0.$

93. $y^2(x - 3y)dx + (1 - 3xy^2)dy = 0.$

94. $(2xy + ax)dx + dy = 0$, a – параметр.

95. $(2y^2 - 9xy)dx + (3xy - 6x^2)dy = 0$, $\mu = x^\alpha y^\beta$.

96. $(2x - 2y - x^2 + 2xy)dx + (2x^2 - 4xy - 2x)dy = 0$, $\mu = e^{ax}e^{by}$.

97. $(x^3 - xy^2 - y)dx + (xy^2 - y^3 + x)dy = 0.$

98.* Методом інтегрувального множника розв'язати однорідне диференціальне рівняння $(py - qx)dx - (px - qy)dy = 0$.

99.* Знайти інтегрувальний множник для лінійного рівняння $dy - (a(x)y + b(x))dx = 0$.

100.* Знайти інтегрувальний множник рівняння $yg(xy)dx + xh(xy)dy = 0$.

101.* За яких умов рівняння $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ має інтегрувальний множник у формі $\mu(x, y) = h(xy)$?

7. Фазові портрети автономних систем на площині

Нехай $M, N \in C(D)$, D – деяка область в $\mathbb{R}^2$, і нехай виконується умова

$$|M(x,y)| + |N(x,y)| \neq 0 \quad \forall (x,y) \in D. \tag{27}$$

Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку в симетричній формі

$$M(x,y)dx - N(x,y)dy = 0. \tag{28}$$

Поряд із рівнянням (28) розглянемо автономну систему другого порядку

$$\begin{cases} \dot{x} = N(x,y), \\ \dot{y} = M(x,y); \end{cases} \tag{29}$$

тут $\dot{\Box}$ позначає похідну за змінною t, тобто $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$.

Означення. ***Фазова траєкторія*** *системи* (29) *– це гладка крива* $\Gamma = \{(x(t),\, y(t)),\, t \in (\alpha, \beta)\}$ *така, що для довільного* $t \in (\alpha, \beta)$ *точка* $(x(t), y(t)) \in D$ *і виконується*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = N(x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) = M(x(t), y(t)). \end{cases}$$

Має місце наступний результат про зв'язок між автономною системою і рівнянням в симетричній формі.

Теорема. *За умови* (27) *довільна фазова траєкторія автономної системи* (29) *є інтегральною кривою диференціального рівняння* (28) *і навпаки.*

Означення. *Точка* (x_0, y_0) *називається* ***особливою точкою*** *рівняння* (28)*, якщо*

$$\begin{cases} M(x_0, y_0) = 0, \\ N(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

Зауваження. *Якщо* (x_0, y_0) *– особлива точка рівняння* (28)*, то* $x(t) \equiv x_0$, $y(t) \equiv y_0$ *– стаціонарний розв'язок системи* (29) *або* ***положення рівноваги****. Основна задача полягає у вивченні поведінки фазових траєкторій системи* (29) *в околі положення рівноваги.*

Зауваження. *Заміною $\bar{x} = x - x_0$, $\bar{y} = y - y_0$ дослідження в околі точки (x_0, y_0) зводиться до дослідження в околі точки $(0,0)$. Тому надалі вважатимемо, що $(x_0, y_0) = (0,0)$.*

Нехай $M, N \in C^1(D)$, $(0,0) \in D$, $M(0,0) = N(0,0) = 0$. Тоді

$$M(x,y) = M'_x(0,0) \cdot x + M'_y(0,0) \cdot y + o(\sqrt{x^2+y^2})$$

$$N(x,y) = N'_x(0,0) \cdot x + N'_y(0,0) \cdot y + o(\sqrt{x^2+y^2})$$

при $(x,y) \to (0,0)$.

Означення. *Систему*

$$\begin{cases} \dot{x} = N'_x(0,0) \cdot x + N'_y(0,0) \cdot y \\ \dot{y} = M'_x(0,0) \cdot x + M'_y(0,0) \cdot y \end{cases} \tag{30}$$

називають лінеаризованою (або системою першого наближення) для системи (29).

Зауваження. *Виявляється, що фазові портрети систем* (29) *і* (30) *тісно пов'язані. Тому достатньо вивчити систему* (30).

Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by, \\ \dot{y} = cx + dy. \end{cases} \tag{31}$$

Очевидно, що $(0,0)$ – розв'язок системи

$$\begin{cases} ax + by = 0, \\ cx + dy = 0; \end{cases} \tag{32}$$

тому $(0,0)$ – положення рівноваги системи (31).

Нехай

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Тоді систему (31) можна переписати у векторній формі

$$\dot{\vec{v}} = A\vec{v}.$$

Нехай λ_1, λ_2 – власні числа матриці A, тобто розв'язки характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розглянемо можливі випадки.

I. Нехай $\det A = 0$. Тоді система (32) має нетривіальні розв'язки.

У цьому випадку принаймні одне з власних чисел нульове, скажімо $\lambda_1 = 0$, та $cx + dy = k(ax + by)$, і положення рівноваги системи (31) – це кожна точка прямої $ax + by = 0$ (тобто кожна точка прямої $ax + by = 0$ є окремою фазовою траєкторією).

При $ax + by \neq 0$ від системи (31) можемо перейти до диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = k,$$

всі розв'язки якого зображуються формулою $y = kx + C$, $C \in \mathbb{R}$.

1) Якщо $\lambda_2 \neq 0$, то кожна пряма $y = kx + c$ складається з трьох фазових траєкторій системи (31): це положення рівноваги, що є перетином прямих $y = kx + c$ і $ax + by = 0$, та два промені, рух вздовж яких відповідає знаку λ_2 : якщо $\lambda_2 < 0$, то рух відбувається до положення рівноваги, якщо $\lambda_2 > 0$ – рух від положення рівноваги.

2) При $\lambda_2 = 0$ прямі $y = kx + c$ і $ax + by = 0$ паралельні. Кожна з прямих $y = kx + c$ є фазовою траєкторією, для уточненням напрямку руху вздовж якої потрібно скористатись вектором фазової швидкості

$$\dot{\vec{v}}|_{(x_0, y_0)} = \begin{pmatrix} ax_0 + by_0 \\ cx_0 + dy_0 \end{pmatrix},$$

що обчислюється в довільній точці (x_0, y_0) відмінній від положення рівноваги. Напрям вектора $\dot{\vec{v}}|_{(x_0, y_0)}$ має узгоджуватись з напрямом руху по фазовим траєкторіям.

II. Нехай $det\, A \neq 0$. Тоді $\vec{v} \equiv 0$ – єдине положення рівноваги, а власні числа є розв'язком квадратного рівняння, тому можливі наступні ситуації.

1) Власні числа $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ – дійсні та різні: $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

У цьому випадку кожному власному числу λ_i відповідає один власний вектор $\vec{s}_i$, $i = 1, 2$. При цьому власні числа можуть бути одного знаку або мати різні знаки.

а) Власні числа одного знаку: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$.

У цьому випадку маємо фазовий портрет типу *"вузол"*.

Фазовими траєкторіями системи (31) є положення рівноваги $(0,0)$, напівпрямі, що проходять вздовж власних векторів $\vec{s}_1, \vec{s}_2$, гілки парабол, які в точці $(0,0)$ дотикаються до власного вектора, що відповідає меншому за модулем власному числу.

Рух вздовж траєкторій відповідає знаку λ_1, λ_2:
– якщо $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, то рух відбувається від положення рівноваги,
– якщо $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$, – рух до положення рівноваги.

б) Власні числа різних знаків: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$.

У цьому випадку маємо фазовий портрет типу *"сідло"*.

Фазовими траєкторіями системи (31) є положення рівноваги $(0,0)$, напівпрямі, що відповідають власним векторам $\vec{s}_1, \vec{s}_2$, і криві типу гіпербол, для яких ці напівпрямі є асимптотами.

Рух на напівпрямих визначається знаком відповідного власного числа. Нехай для визначеності $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$. Тоді на напівпрямих вздовж вектора $\vec{s}_1$ рухаємося до положення рівноваги, а на напівпрямих вздовж вектора $\vec{s}_2$ – від положення рівноваги. Рух вздовж інших траєкторій узгоджується з цими рухами.

2) Власні числа дійсні та однакові $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$.

Тоді можливі два випадки.

а) Матриця A – діагональна:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

тобто система (31) має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x, \\ \dot{y} = \lambda y; \end{cases}$$

А отже, переходячи до рівняння, отримуємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y = Cx, \quad C \in \mathbb{R}.$$

У цьому випадку маємо фазовий портрети типу *"дикритичний вузол"*.

Фазові траєкторії системи (31) – це положення рівноваги $(0,0)$ та напівпрямі $y = Cx$, $x \neq 0$, рух вздовж яких відповідає знаку

λ: при $\lambda < 0$ – рух до положення рівноваги, при $\lambda > 0$ – рух від положення рівноваги.

б) Матриця A – не діагональна.

У цьому випадку маємо фазовий портрет типу *"вироджений вузол"*.

Нехай $\vec{s}$ – власний вектор, що відповідає λ. Тоді фазові траєкторії системи (31) складаються з положення рівноваги $(0,0)$, двох напівпрямих, що проходять вздовж власного вектора $\vec{s}$, і $S-$подібних кривих, які примикають до положення рівноваги, дотикаючись цих напівпрямих. Рух визначається знаком λ: якщо $\lambda < 0$, то рух відбувається до положення рівноваги, якщо $\lambda > 0$ – від положення рівноваги. Один з двох можливих варіантів фазового портрету визначає вектор фазової швидкості.

3) Власні числа – це пара комплексно-спряжених чисел:

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}.$$

а) Якщо дійсна частина ненульова $\alpha \neq 0$, то маємо фазовий портрет типу *"фокус"*.

Всі фазові траєкторії окрім положення рівноваги мають вигляд спіралей, що "навиваються" на положення рівноваги.

Напрям руху визначає знак дійсної частини α: якщо $\alpha < 0$, то рух по спіралям відбувається таким чином, щоб поступово наближатись до положення рівноваги, при $\alpha > 0$ – рух від положення рівноваги. Один з двох можливих варіантів фазового портрету (те, як намотуються спіралі: за чи проти годинникової стрілки) визначає вектор фазової швидкості.

б) Якщо власні числа суто уявні, тобто $\alpha = 0$. то маємо фазовий портрет типу *"центр"*.

Всі фазові траєкторії окрім положення рівноваги мають вигляд еліпсів, розташованих навколо положення рівноваги, напрям руху по яким визначає вектор фазової швидкості.

Повернемось до аналізу систем (29) і (30).

Справедливий наступний результат щодо коректності методу лінеаризації.

Теорема. ***(Гробмана-Хартмана)*** *Якщо дійсні частини власних чисел матриці*

$$A = \begin{pmatrix} N'_x(0,0) & N'_y(0,0) \\ M'_x(0,0) & M'_y(0,0) \end{pmatrix}$$

відмінні від нуля, то в деякому околі точки $(0,0)$ *існує близька до тотожньої заміна координат, що переводить фазові траєкторії системи* (30) *в фазові траєкторії системи* (29).

Таким чином, при виконанні умов теореми фазові портрети систем (29) і (30) є близькими.

Приклад 1. Знайти та дослідити особливі особливі точки диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y^2 - x^2}{2xy - 4y - 8}. \tag{33}$$

Розв'язання.

Поряд з рівнянням (33) розглянемо автономну систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy - 4y - 8, \\ \dot{y} = 4y^2 - x^2. \end{cases} \tag{34}$$

Особливі точки рівняння (33) (та положення рівноваги системи (34)) знаходяться з системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 2xy - 4y - 8 = 0, \\ 4y^2 - x^2 = 0; \end{cases} \tag{35}$$

розв'язуючи яку маємо

$$\begin{cases} 2xy - 4y - 8 = 0, \\ (2y - x)(2y + x) = 0; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 2x, \\ y^2 - y - 2 = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} y = -2x, \\ y^2 + y + 2 = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Таким чином, з першої системи отримуємо дві особливі точки $(x_1, y_1) = (-2, -1)$ і $(x_2, y_2) = (4, 2)$, а друга система немає розв'язків на дійсній площині.

Оскільки система (34) нелінійна, то випишемо лінеаризовану систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y_0(x - x_0) + (2x_0 - 4)(y - y_0), \\ \dot{y} = -2x_0(x - x_0) + 8y_0(y - y_0); \end{cases} \tag{36}$$

і дослідимо окремо кожне з положень рівноваги.

1. Точка $(x_1, y_1) = (-2, -1)$.

Лінеаризована система має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x} = -2(x+2) - 12(y+1), \\ \dot{y} = 4(x+2) - 8(y+1). \end{cases} \tag{37}$$

Впровадивши заміну $\xi_1 = x+2$, $\eta_1 = y+1$, у площині $0\xi_1\eta_1$ приходимо до системи вигляду (32) з матрицею

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Власні числа матриці A_1 знаходяться з характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -8 \\ 4 & -8-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 + 10\lambda + 48 = 0,$$

яке має пару комплексно-спряжений коренів $\lambda_{1,2} = -5 \pm i\sqrt{23}$ з від'ємною дійсною частиною. Тому $(x_1, y_1) = (-2, -1)$ є особливою точкою типу фокус, в її околі всі фазові траєкторії системи (37) (а отже, і вихідної системи (34)) є спіралями, рух по яким відбувається до точки $(-2, -1)$. Ці спіралі можуть закручуватися за або проти годинникової стрілки, щоб уточнити, як саме, потрібен вектор фазової швидкості, порахований у точці близький до особливої. Візьмемо, наприклад, точку $(-2, 0)$. Тоді вектор фазової швидкості

$$\dot{\vec{v}}|_{(-2,0)} = \begin{pmatrix} -4(-2+2) - 6(0+1) \\ 2(-2+2) + -8(0+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -8 \end{pmatrix}$$

направлений вниз і ліворуч, отже, спіралі намотуються проти годинникової стрілки.

2. Точка $(x_2, y_2) = (4, 2)$.

Лінеаризована система має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x} = 4(x-4) + 4(y-2), \\ \dot{y} = -8(x-4) + 16(y-2). \end{cases} \tag{38}$$

Впровадивши заміну $\xi_2 = x-4$, $\eta_2 = y-2$, у площині $0\xi_2\eta_2$ приходимо до системи вигляду (32) з матрицею

$$A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -8 & 16 \end{pmatrix}.$$

Власні числа матриці A_2 знаходяться з характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 \\ -8 & 16-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 20\lambda + 96 = 0,$$

яке має пару дійсних від'ємних коренів $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 12$. Тому $(x_2, y_2) = (4, 2)$ є особливою точкою типу вузол.

Знайдемо власні вектори $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$:

$$\vec{s}_1 : \quad \begin{pmatrix} 4-8 & 4 \\ -8 & 16-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} \sim (1, -1) \quad \Rightarrow \quad \vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{s}_2 : \quad \begin{pmatrix} 4-12 & 4 \\ -8 & 16-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} \sim (-2, 1) \quad \Rightarrow \quad \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Отже, в околі точки $(4, 2)$ фазові траєкторії системи (38) (а отже, і вихідної системи (34)) складаються з чотирьох променів, які утворюють дві прямі, що проходять через точку $(4, 2)$ паралельно векторам $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$, та гілок парабол. Параболи дотикаються прямої, що проходить через особливу точку паралельно власному вектору, який відповідає меншому за модулем власному числу $\lambda_1 = -8$, тобто $y = x - 2$. Рух по траєкторіям відбувається від точки $(4, 2)$.

Лабораторна робота, комп'ютерний практикум 3

.

Задача 1.

1) Знайти, під яким кутом фазові траєкторії перетинають пряму $y = x$.
2) Для фазових траєкторій, що примикають до початку координат, знайти кут, під яким вони примикають до точки $(0, 0)$.
3) Зобразити фазові траєкторії.

Варіанти завдань.

1. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 4x + y; \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 3y, \\ \dot{y} = x - y; \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 2x + 7y; \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x, \\ \dot{y} = 3x - y; \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 5x - 3y; \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y, \\ \dot{y} = -9x - 3y; \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y, \\ \dot{y} = 2x + 3y; \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 3y, \\ \dot{y} = -2x - y; \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = x + 4y, \\ \dot{y} = x + y; \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = 5y - x, \\ \dot{y} = x - 2y; \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 3y, \\ \dot{y} = -4x + 2y; \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = -4y - x, \\ \dot{y} = -3x - y. \end{cases}$

Задача 2.

1) Знайти всі положення рівноваги системи диференціальних рівнянь, для кожного з положень рівноваги записати відповідну систему першого наближення.
2) Зобразити на фазовій площині напрямки векторного поля у точках (m, n), де $m = -6, -5, \ldots, 6$, $n = -6, -5, \ldots, 6$.
3) Визначити тип усіх положення рівноваги.
4) Зобразити на фазовій площині фазові траєкторії в околах положень рівноваги.

Варіанти завдань.

1. $\begin{cases} \dot{x} = 2xy - 4y - 8, \\ \dot{y} = 4y^2 - x^2; \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = -2y(x - y), \\ \dot{y} = 2 + x - y^2; \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = y^2 + x^2 - 2; \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = x + y + 1, \\ \dot{y} = y + \sqrt{2x^2 + 1}; \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - 1, \\ \dot{y} = x^3 - y^3 - 7; \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = y^2 - xy + 12, \\ \dot{y} = x^2 - xy - 28; \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = x^2y + xy - 6, \\ \dot{y} = xy + x + y - 5; \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = x^3 + y^3 - 9, \\ \dot{y} = xy - 2; \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = (2x - y)^2 - 9, \\ \dot{y} = (x - 2y)^2 - 9; \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + xy - 15, \\ \dot{y} = y^2 + xy - 10; \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = y - x, \\ \dot{y} = \sqrt{3x + y^2} - 2; \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = 4x^2 - y^2, \\ \dot{y} = 2xy - 4x - 8. \end{cases}$

8. Існування, єдиність та продовжуваність розв'язку задачі Коші

Розглядаємо задачу Коші

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{39}$$

у прямокутнику $\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$, де $a > 0$, $b > 0$ — деякі числа.

Основні результати щодо існування та єдиності розв'язку задачі Коші (39) дають теореми Пеано про існування розв'язку та Пікара про існування та єдиність розв'язку.

Теорема. ***(Пеано)*** *Нехай функція $f(x, y) \in \mathrm{C}(\Pi)$. Тоді на відрізку $I_h = [x_0 - h, x_0 + h]$, де $h = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$, $M = \max\limits_{(x,y)\in\Pi} |f(x, y)|$, існує єдиний розв'язок $y(x)$ задачі Коші (39).*

Теорема. ***(Пікара)*** *Нехай функція $f(x, y) \in \mathrm{C}(\Pi)$ задовольняє умову Ліпшиця щодо змінної y, тобто існує стала $L > 0$ (стала Ліпшиця) така, що для довільних точок $(x, \bar{y}), (x, \tilde{y}) \in \Pi$ виконується*

$$|f(x, \bar{y}) - f(x, \tilde{y})| \leq L|\bar{y} - \tilde{y}|.$$

Тоді на відрізку

$$I_h = [x_0 - h, x_0 + h], \quad \text{де} \quad h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \quad M = \max_{(x,y)\in\Pi} |f(x, y)|,$$

існує єдиний розв'язок $y(x)$ задачі Коші (39). Цей розв'язок є границею рівномірно збіжної послідовності функцій $\{y_k(x), k = 0, 1, 2, \ldots\}$, визначеної рекурентними формулами методу послідовних наближень

$$y_0(x) \equiv y_0, \quad y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_k(s))ds, \quad x \in I_h, \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

При цьому має місце оцінка швидкості збіжності

$$\|y(x) - y_k(x)\| \leq \frac{M}{L} \frac{(Lh)^{k+1}}{(k+1)!} \quad \forall t \in I.$$

Зауваження. *Умова Ліпшиця виконується, наприклад, якщо існує неперервна частинна похідна $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in \mathrm{C}(\Pi)$.*

Теорема Пікара гарантує існування та єдиність розв'язку на деякому невеличкому відрізку довкола початкової точки x_0. Послідовно застосовуючи теорему Пікара можна продовжити розв'язок до виходу на границю прямокутника П, однак питанння продовження на весь інтервал $I_h = [x_0 - a, x_0 + a]$ залишається відкритим. Наступні результати можна застосовувати при дослідження питання продовження розв'язку.

Теорема. ***(порівняння)*** *Припустимо, що* $D \subset \mathbb{R}^2$ *— опукла область і функції* $f(x,y), f_1(x,y), f_2(x,y) \in \mathrm{C}(D)$ *задовольняють умову*

$$f_1(x,y) < f(x,y) < f_2(x,y) \quad \textit{для всіх} \quad (x,y) \in D.$$

Нехай $y_k(x) : I_k \mapsto \mathbb{R}$ *— непродовжуваний розв'язок задачі Коші* $y' = f_k(x,y)$, $y(x_0) = y_0$, $k = 1, 2$; *графік якого належить області* D, $(x_0, y_0) \in D$ *— спільна початкова точка. Тоді розв'язок задачі Коші (39) допускає продовження на інтервал* $I = I_1 \cap I_2$ *і задовольняє нерівність*

$$y_1(x) < y(x) < y_2(x) \quad \textit{для всіх} \quad x \in I.$$

Твердження. *Якщо функція* $f(x,y) \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^2)$ *задовольняє умову* $|f(x,y)| \leq a(x)|y| + b(x)$ *для всіх* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *де* $a(x), b(x) \in \mathrm{C}(\mathbb{R} \mapsto [0, \infty])$, *то кожен розв'язок рівняння* $y' = f(x,y)$ *продовжується на всю дійсну вісь.*

Приклад 1. Для задачі Коші

$$\begin{cases} y' = x - y^2, \\ y(0) = 0; \end{cases}$$

у прямокутнику $\Pi = \{(x,y) : |x| \leq 1, \ |y| \leq 1\}$ перевірити умови теореми Пікара, знайти третє наближення до точного розв'язку і оцінити похибку.

Розв'язання. У нашому випадку $f(x,y) = x - y^2$, $a = 1$, $b = 1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Очевидно, що $f \in C(\Pi)$ як степенева функція і існує $f'_y = -2y$ обмежена на П, а тому умови теореми Пікара виконуються. Знайдемо проміжок, на якому теорема Пікара гарантує існування та єдиність розв'язку задачі Коші. Оскільки $M = \max\limits_{(x,y)\in\Pi}|x - y^2| = 2$, $L = \max\limits_{(x,y)\in\Pi}|-2y| = 2$, то $h = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\} = \min\left\{1, \dfrac{1}{2}\right\} = \dfrac{1}{2}$. Отже, за теоремою Пікара існує і єдиний розв'язок задачі Коші $y = y(x)$ принаймні на проміжку $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$. Побудуємо три пікарівські наближення до точного розв'язку:

$$y_0(x) = 0,$$

$$y_1(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y_0)ds = 0 + \int\limits_{0}^{x}(s - 0)ds = \frac{x^2}{2},$$

$$y_2(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))ds = 0 + \int\limits_{0}^{x}\left(s - \left(\frac{s^2}{2}\right)^2\right)ds = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20},$$

$$y_3(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y_2(s))ds = 0 + \int\limits_{0}^{x}\left(s - \left(\frac{s^2}{2} - \frac{s^5}{20}\right)^2\right)ds =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} - \frac{x^{11}}{4400}.$$

Похибка

$$\triangle_3 = \max_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}|y(x) - y_3(x)| \le \frac{ML^{3-1}}{3!}h^3 = \frac{2\cdot 2^2}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}.$$

Приклад 2. Знайти максимальний проміжок існування розв'язку задачі Коші

$$\begin{cases} y' = (x^2 + y^2)e^{1-x^2-y^2}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Візьмемо у якості прямокутника Π квадрат $\Pi = \{(x, y) : |x| \le a,\ |y| \le a\}$, $a > 0$. Тоді

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{1-x^2-y^2} \in C(\Pi),$$

$$f'_y(x, y) = 2ye^{1-x^2-y^2} - 2y(x^2 + y^2)e^{1-x^2-y^2} = 2y(1 - x^2 - y^2)e^{1-x^2-y^2}$$

і f'_y – обмежена на Π. Отже, за теоремою Пікара існує єдиний розв'язок задачі Коші, визначений на $[-h, h]$, де $h = \min\left\{a, \dfrac{a}{M}\right\}$, $M = \max\limits_{(x,y)\in\Pi}|f(x, y)| = \max\limits_{(x,y)\in\Pi}(x^2 + y^2)e^{1-x^2-y^2}$.

Розглянемо функцію $g(t) = te^{1-t}$ при $t \geq 0$. Тоді $M = \max\limits_{|x|\leq a,\, |y|\leq a} g(t)$. Покажемо, що максимум досягається при $t = 1$. Дійсно, оскільки $g'(t) = e^{1-t} - te^{1-t} = (1-t)e^{1-t}$, то єдиною критичною точкою функції $g(t)$ буде $t = 1$. У точці $t = 1$ похідна похідна $g'(t)$ змінює знак з "+" на "-", тому $t = 1$ – єдина точка максимуму функції $g(t)$. Тому $\max\limits_{t\in[0,2a^2]} g(t) = g(1) = 1$. Звідси

$$\max_{(x,y)\in\Pi} |f(x,y)| = 1 \quad \Rightarrow \quad M = 1 \quad \Rightarrow \quad h = \min\left\{a, \frac{a}{M}\right\} = a.$$

Таким чином, для довільного $a > 0$ розв'язок існує на $[-a, a]$, а отже і на всьому $\mathbb{R}$.

Приклад 3. Знайти розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} y' = x + y, \\ y(0) = 1; \end{cases}$$

як границю пікарівських наближень.

Розв'язання. Побудуємо послідовність $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$y_0(x) = y_0 = 1,$$

$$y_1(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y_0(s))ds = 1 + \int\limits_{0}^{x} (s+1)ds = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$y_2(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))ds = 1 + \int_{0}^{x} \left(s + 1 + s + \frac{s^2}{2}\right) ds =$$

$$= 1 + \int\limits_{0}^{x} \left(1 + 2s + \frac{s^2}{2}\right) ds = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{2\cdot 3},$$

$$y_3(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y_2(s))ds = 1 + \int\limits_{0}^{x} \left(s + 1 + s + s^2 + \frac{s^3}{2\cdot 3}\right) ds =$$

$$= 1 + \int\limits_{0}^{x} \left(1 + 2s + s^2 + \frac{s^3}{2\cdot 3}\right) ds = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4\cdot 3\cdot 2};$$

$$y_4(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y_3(s))ds =$$

$$= 1 + \int\limits_0^x \left(s + 1 + s + s^2 + \frac{s^3}{3} + \frac{s^4}{4 \cdot 3 \cdot 2} \right) ds =$$

$$= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4 \cdot 3} + \frac{x^5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \dots$$

У побудованих наближеннях вже проявляється закономірність, яка дає можливість сформулювати гіпотезу про те, що

$$y_n(x) = 1 + x + 2 \cdot \frac{x^2}{2!} + 2 \cdot \frac{x^3}{3!} + \dots + 2 \cdot \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Перевіримо цю гіпотезу за допомогою методу математичної індукції:

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^x f(s, y_n(s)) ds =$$

$$= 1 + \int\limits_0^x \left(s + 1 + s + 2 \cdot \frac{s^2}{2!} + 2 \cdot \frac{s^3}{3!} + \dots + 2 \cdot \frac{s^n}{n!} + s^{n+1}(n+1)! \right) ds =$$

$$= 1 + x + 2 \cdot \frac{x^2}{2!} + 2 \cdot \frac{x^3}{3!} + \dots + 2 \cdot \frac{x^n}{n!} + 2 \cdot x^{n+1}(n+1)! + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}.$$

Отже, гіпотеза вірна. Знайдемо тепер границю $y_n(x)$ при $n \to \infty$:

$$y_n(x) = 1 + x + 2 \cdot \frac{x^2}{2!} + 2 \cdot \frac{x^3}{3!} + \dots + 2 \cdot \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}(n+1)! =$$

$$= 2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \right) - x - 1 + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 2e^x - x - 1,\ n \to \infty.$$

Неважко перевірити, що отриманий таким способом розв'язок співпадає з розв'язком задачі Коші для лінійного рівняння, що можна отримати одним із запропонованих вище методів.

Вправи

102. Знайти найменше з M, які обмежують функцію $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2(2-x-y)$ у прямокутнику $\Pi = \{(x,y) : |x-1| \le a,\ |y-1| \le b\}$.
103. Перевірити, що функція $f(x,y) = y^2 \sin x + e^x$ в смузі $\Pi = \{(x,y) : |y| \le b\}$ задовольняє умову Ліпшиця за y рівномірно відносно $x \in \mathbb{R}$. Знайти найменшу зі сталих Ліпшиця.

Використовуючи достатні умови єдиності, виділити такі області площини, через кожну точку яких проходить єдина інтегральна крива:

104. $y' = xy + y^3$.

105. $(x-1)y' = y^{1/2} - x$.

106. $(y-x)y' = y\ln y$.

Вказати відрізок, на якому задача Коші має розв'язок:

107. $y' = e^y + x$, $y(-3) = 0$.

108. $y' = 2y^2 + 3xe^y \sin(xy)$, $y(2) = 4$.

109. $y' = x + y^3$, $y(0) = 0$.

Для наступних задач Коші побудувати п'ять послідовних наближень Пікара:

110. $y' = 4 - y$, $y(0) = 0$.

111. $y' = 2 - x$, $y(2) = -2$.

112. $y' = y\sin x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Застосовуючи метод послідовних наближень Пікара, знати точний розв'язок задачі Коші:

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x), \\ y(\alpha) = \beta; \end{cases}$$

Розв'язати задану задачу Коші методом Лагранжа та порівняти результати.

113. $a(x) = 1$, $b(x) = 2x - x^2$, $y(0) = 1$.

114. $a(x) = -x$, $b(x) = x^3$, $y(0) = -1$.

115. $a(x) = 1$, $b(x) = -1$, $y(0) = 2$.

116. $a(x) = 1$, $b(x) = 2x$, $y(0) = 1$.

117. Для задачі Коші

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2, \\ y(0) = 0; \end{cases}$$

у прямокутнику $\Pi = \{(x,y) : |x| \le 1, |y| \le 1\}$ перевірити умови теореми Пікара, знайти третє наближення до точного розв'язку і оцінити похибку.

118. Як поводять себе на проміжку $[0,2]$ послідовні наближення Пікара для диференціального рівняння $y' = y^2$, якщо $y(0) = 1$?

119. При яких невід'ємних значеннях змінної m порушується єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння

$$\frac{dy}{dx} = |y|^m$$

та в яких точках?

120.* Довести, що розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} y' = \sin(xy)y - y^3, \\ y(0) = 1; \end{cases}$$

існує для всіх $x \geq 0$.

121.* Довести, що розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} y' = x^3 - y^3, \\ y(x_0) = y_0; \end{cases}$$

існує на $[x_0, +\infty)$.

Лабораторна робота, комп'ютерний практикум 4

.

Задача 1. У прямокутнику

$$\Pi = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\big\}$$

для задачі Коші

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

виконати наступні завдання.

1) Знайти сталу Ліпшиця функції $f(x, y)$ в Π та перевірити виконання умов теореми Пікара.
2) На якому проміжку $[x_0 - h, x_0 + h]$ теорема Пікара гарантує збіжність послідовних наближень?
3) Знайти третє пікарівське наближення $y_3(x)$, $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ до розв'язку заданої задачі Коші.
4) Оцінити похибку $\triangle_n = \max\limits_{|x - x_0| \leq h} |y(x) - y_3(x)|$. При якому n буде виконуватись нерівність $\triangle_n \leq 10^{-3}$?

5) Для заданого $x_1 \in [x_0 - h, x_0 + h]$ знайти $y(x_1)$ з точністю до 10^{-6}.

Варіанти завдань.

1. $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $a = 2$, $b = 1$;
2. $f(x,y) = x^2 - y^2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $a = 1$, $b = 2$;
3. $f(x,y) = x^2 - y^2$, $x_0 = 2$, $y_0 = 0$, $a = 1$, $b = 1$;
4. $f(x,y) = x + y^2$, $x_0 = 3$, $y_0 = 0$, $a = 3$, $b = 1$;
5. $f(x,y) = x - y^2$, $x_0 = 5$, $y_0 = 2$, $a = 2$, $b = 2$;
6. $f(x,y) = x - y^2$, $x_0 = -4$, $y_0 = 2$, $a = 2$, $b = 3$;
7. $f(x,y) = 2xy + y^2$, $x_0 = 5$, $y_0 = 3$, $a = 3$, $b = 2$;
8. $f(x,y) = x^2 + y^2$, $x_0 = 7$, $y_0 = 0$, $a = 3$, $b = 1$;
9. $f(x,y) = e^x + y^2$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $a = 2$, $b = 2$;
10. $f(x,y) = x + y^2$, $x_0 = 2$, $y_0 = 3$, $a = 1$, $b = 2$;
11. $f(x,y) = xe^x + x^2y^2$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $a = 2$, $b = 2$;
12. $f(x,y) = e^x + y^2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $a = 2$, $b = 1$.

Задача 2. В області $K \subset \mathbb{R}^2$ задано задачу Коші

$$\begin{cases} y' = g(y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

1) Чи виконані для заданої задачі Коші умови теореми Пеано? На якому інтервалі ця теорема гарантує існування розв'язку заданої задачі Коші?
2) Знайти всі розв'язки заданої задачі Коші. Вказати максимальний та мінімальний розв'язки цієї задачі. (Тут під максимальним розв'язком задачі Коші ми розуміємо такий її непродовжуваний розв'язок $y_{\max} = y_{\max}(x)$, що для будь-якого іншого розв'язку $y = y(x)$ цієї задачі має місце нерівність $y(x) \leq y_{\max}(x)$. Мінімальний розв'язок $y_{\min} = y_{\min}(x)$ визначається аналогічно).
3) Зобразити геометричну фігуру G, яку "заповнюють" інтегральні криві – графіки розв'язків заданої задачі, та розв'язок задачі, що для $x \neq x_0$ лежить сторого між мінімальним і максимальним розв'язком.

Варіанти завдань.

1. $g(y) = 3y^{2/3}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$,
$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\};$

2. $g(y) = -3y^{2/3}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$,
$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 2\right\};$

3. $g(y) = 4(y-1)^{3/4}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$,
$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1, x^2 + y^2 - 2y \leq 3\right\};$

4. $g(y) = 2\sqrt{y}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$,
$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\right\};$

5. $g(y) = 4(2-y)^{3/4}$, $x_0 = -1$, $y_0 = 2$,
$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2y \leq 5\right\};$

6. $g(y) = \sqrt{-y}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$,
$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\right\};$

7. $g(y) = -\sqrt{y}$, $x_0 = 2$, $y_0 = 0$,
$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\right\};$

8. $g(y) = (y-2)^{3/4}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$,
$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2y \leq 5\right\};$

9. $g(y) = -\sqrt{-y}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$,
$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 8\right\};$

10. $g(y) = -(y+2)^{3/4}$, $x_0 = -1$, $y_0 = -2$,
$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16\right\};$

11. $g(y) = (1 - 1/2y)^{1/3}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 2$,
$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 5y \leq 6\right\};$

12. $g(y) = -2\sqrt{y}$, $x_0 = -1$, $y_0 = 0$,
$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16\right\}.$

9. Диференціальні рівняння вищих порядків

Будемо розглядати диференціальне рівняння $n-$го порядку вигляду

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{40}$$

або

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right). \tag{41}$$

Функція $y = y(x)$ називається *розв'язком* рівняння (41) на інтервалі (a, b), якщо:

1) $y(x)$ має на (a, b) неперервні похідні до порядку n включно;
2) точка $\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\right)$ належить області витзначення функції f для всіх $x \in (a, b)$;
3) $y(x)$ обертає рівняння (41) на тотожність, що справедлива для всіх $x \in (a, b)$.

Задача Коші полягає у знаходженні розв'язку $y(x)$ рівняння (41), для якого виконуються умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Рівняння (41) завжди можна звести до, так званої, *нормальної системи* диференціальних рівнянь, а саме, покладаючи $y_1(x) = y(x)$, отримуємо

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ \ldots, \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = f(x, y_1, \ldots, y_n). \end{cases}$$

Розв'язок рівняння (40) (або (41)) може бути записаний в одному з трьох наступних виглядів:
$y = y(x, C_1, \ldots C_n)$ – загальний розв'язок;
$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0$ – загальний інтеграл;
$\begin{cases} x = x(t, C_1, \ldots, C_n), \\ y = y(t, C_1, \ldots, C_n); \end{cases}$ – загальний розв'язок в параметричній формі (тут $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ – довільні сталі).

Розглянемо випадки, коли рівняння (41) інтегрується в квадратурах.

1. Якщо рівняння (41) має вигляд

$$y^{(n)} = f(x),$$

де f – неперервна на $I = (a, b)$ функція; то множину його розв'язків можна знайти послідовним інтегруванням:

$$y = \underbrace{\int \dots \int}_{n \text{ разів}} f(x)\, dx \dots dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_n, \quad C_1, \dots C_n \in \mathbb{R}.$$

Приклад 1. Розв'язати задачу Коші

$$\begin{cases} y'' = -6x, \\ y(0) = 3, \\ y'(0) = -2. \end{cases}$$

Розв'язання. Послідовно інтегруючи, знаходимо загальний розв'язок:

$$y' = \int (-6x)\, dx + C_1 = -3x^2 + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R};$$

$$y = \int \left(-3x^2 + C_1\right) dx = -x^3 + C_1 x + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Для знаходження розв'язку задачі Коші скористаємося початковими умовами:

$$y(0) = C_2 = 3, \quad y'(0) = C_1 = -2 \quad \Longrightarrow \quad y(x) = -x^3 - 2x + 3.$$

2. Якщо рівняння (41) має вигляд

$$y^{(n)} = f\left(y^{(n-1)}\right),$$

то, ввівши нову невідому функцію $u(x) = y^{(n-1)}(x)$, приходимо до автономного рівняння

$$u' = f(u),$$

звідки

$$x + C_1 = \int \frac{du}{f(u)} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Припустимо, що з отриманої рівності легко знайти

$$u = \varphi(x, C_1), \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Тоді приходимо до диференціального рівняння $(n-1)$-го порядку

$$y^{(n-1)} = \varphi(x, C_1).$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y'' + 2y' = 0$.

Розв'язання. Впровадивши заміну $u = y'$, приходимо до рівняння $u' + 2u = 0$, розв'язок якого має вигляд $u = C_1 e^{-2x}, C_1 \in \mathbb{R}$. Тоді

$$y = C_1 \int e^{-2x} dx + C_2 = -\frac{C_1}{2}\, e^{-2x} + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Беручи до уваги довільність сталих C_1, C_2, загальний розв'язок рівняння також можна переписати у вигляді

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Якщо рівняння (41) має вигляд

$$y^{(n)} = f\left(y^{(n-2)}\right),$$

то заміною $u(x) = y^{(n-2)}(x)$ приходимо до рівняння другого порядку

$$z'' = f(z).$$

Домножуючи обидві частини отриманого рівняння на $2u'$

$$2u'u'' = 2u' f(u),$$

отримуємо рівняння у повних диференціалах

$$d(u')^2 = 2f(u)du,$$

після інтегрування якого маємо автономне рівняння першого порядку

$$(u')^2 = \int 2f(u)du + C_1 \quad \Longrightarrow \quad u' = \pm\sqrt{2\int f(u)\, du + C_1}, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Повертаючись до вихідних змінних, тобто підставляючи знайдені значення u в співвідношення $y^{(n-1)} = u'$, дістанемо рівняння $(n-1)$-го порядку вигляду 2.

Приклад 3. Розв'язати задачу Коші

$$\begin{cases} y'' = e^y, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = -\sqrt{2}. \end{cases}$$

Розв'язання. Скористаємося описаним алгоритмом.

Оскільки ми маємо рівняння другого порядку, то заміну робити не потрібно, а можна одразу домножити праву та ліву частину рівняння на $2y'$:

$$2y'y'' = 2y'e^y \quad \Longrightarrow \quad dy'^2 = 2e^y dy \quad \Longrightarrow \quad y'^2 = 2e^y + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Враховуючи, що нам потрібно знайти розв'язок задачі Коші, одразу визначимо значення довільної сталої C_1 з початкових умов:

$$\left(-\sqrt{2}\right)^2 = 2e^0 + C_1.$$

Отже, $C_1 = 0$, і приходимо до рівняння першого порядку

$$y' = \pm\sqrt{2}e^{\frac{y}{2}}.$$

Оскільки $y'(0) = -\sqrt{2} < 0$, то в останньому рівнянні потрібно взяти знак "$-$".

Таким чином, ми отримали автономне рівняння першого порядку, а тому після відокремлення змінних та інтегрування приходимо до розв'язку

$$-2e^{-\frac{y}{2}} = -\sqrt{2}x + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Далі з початкових умов знаходимо, що $C_2 = -2$.

Отже, остаточно отримуємо розв'язок задачі Коші

$$e^{-\frac{y}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + 1.$$

Як ми побачили, диференціальне рівняння n-го порядку (40) має загальний розв'язок

$$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0, \quad C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R};$$

при отриманні якого отримуємо деякі проміжні результати вигляду

$$\varphi_k(x, y, y', \ldots, y^{(n-k)}, {}_1, \ldots, {}_k) = 0. \tag{42}$$

Вираз (43) називають *k-им інтегралом* рівняння (40).

Перехід від рівняння (40) до його k-го інтегралу (43) називається *зниженням порядку.* Рівняння (43) теоретично простіше за рівняння (40), і тому придатніше для подальших досліджень.

У вже розглянутих випадках **1–3** ми фактично теж послідовно знижували порядок рівняння.

Розглянемо типи рівнянь, що допускають зниження порядку.

4. Для рівняння вигляду

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

заміна $u = y^{(k)}$, де $u = u(x)$, знижує порядок на k одиниць.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $y''' = 2xy''$.

Розв'язання. Впроваджуючи заміну $u = y''$, приходимо до рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними $u' = 2xu$, розв'язок якого має вигляд $u = C_1e^{x^2}$, $C_1 \in \mathbb{R}$. повертаючись до вихідної функції приходимо до рівняння другого порядку

$$y'' = C_1e^{x^2}, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Таким чином, ми знизили порядок вихідного рівняння на одиницю, разом з тим отримане рівняння є найпростішим рівнянням типу **1,** тобто розв'язується послідовним інтегруванням. Остаточно знаходимо

$$y = C_1 \int\int e^{x^2} dx dx + C_2x + C_3, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

5. Якщо рівняння не містить явно незалежної змінної, тобто є *автономним*:

$$F\left(y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0,$$

то заміна $u = y'$, де $u = u(y)$ – нова невідома функція аргументу y, знижує порядок на одиницю. При цьому враховуємо, що

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx} = u'u,$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{d(u'u)}{dy}u = u''u^2 + u'^2u$$

і т.д.

Зауваження. *При такій заміні можна втратити розв'язки вигляду $y = const$.*

Приклад 5. Розв'язати рівняння $yy'' = y'^2$.

Розв'язання. Це автономне рівняння, тому після заміни $u = y'$, де $u = u(y)$, маємо

$$yuu' = u^2.$$

Таким чином, ми знизили порядок рівняння на одиницю і отримали диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними, розв'язками якого є функції $u = 0$ та $u = C_1y$, $C_1 \in \mathbb{R}$. Зауважимо, що функція $u = 0$ входить до сім'ї функцій $u = C_1y$, $C_1 \in \mathbb{R}$, при $C_1 = 0$.

Виконуючи зворотню заміну, приходимо до диферецiального рівняння першого порядку з відокремленими змінними

$$y' = C_1y, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

розв'язуючи яке знаходимо загальних розв'язок

$$y(x) = C_2e^{C_1x} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

6. Якщо рівняння (40) *однорідне* відносно змінних $y, y', \dots, y^{(n)}$, тобто

$$F\left(x, ty, ty', ty'', \dots, ty^{(n)}\right) = t^m F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right), \quad t > 0,$$

і тому інваріантне відносно розтягів $(x, y) \to (x, ty)$, то його порядок можна знизити на одиницю заміною

$$y' = uy,$$

де $u = u(x)$ – нова невідома функція. При цьому

$$y'' = (y')' = (uy)' = u'y + uy' = u'y + u^2y = (u' + u^2)y,$$

$$y''' = (y'')' = ((u' + u^2)y)' = (u'' + 3uu' + u^3)y, \dots .$$

Підставляючи в (40) та використовуючи однорідність, отримуємо розв'язок $y = 0$ та рівняння $(n-1)-$го порядку

$$F(x, 1, u, u' + u^2, \dots) = 0.$$

Приклад 6. Розв'язати рівняння $xyy'' - xy'^2 - yy' = 0$.

Розв'язання. Неважко помітити, що рівняння є однорідним. Тоді впроваджуючи заміну $y' = yu$, маємо $y'' = (u' + u^2)y$ і рівняння переписується у вигляді

$$x(u' + u^2)y^2 - xu^2y^2 - uy^2 = 0.$$

Розкриваючи дужки, бачимо, що або $y = 0$, або приходимо до диференціального рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

$$xu' - u = 0,$$

загальний розв'язок якого має вигляд $u = C_1x$, $C_1 \in \mathbb{R}$.

Повертаючись до вихідної функції, знову отримуємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$y' = c_1xy.$$

Таким чином, отримуємо загальний розв'язок

$$y = C_2e^{C_1x^2}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Зауважимо, що розв'язок $y = 0$ отримується з останньої формули при $C_2 = 0$, тому ця формула містить всі розвєязки рівняння.

7. Якщо рівняння (40) є *квазіоднорідним (або узагальнено однорідним)*, тобто для деякого $k \in \mathbb{R}$ та довільного $t > 0$ виконується умова

$$F\left(tx, t^ky, t^{k-1}y', \ldots, t^{k-n}y^{(n)}\right) = t^mF\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

(у цьому випадку ще кажуть, що рівняння (40) інваріантне щодо розтягів $(x, y) \to (tx, t^ky)$), то заміна

$$\begin{cases} x = e^t, \\ y = ue^{kt}, \end{cases} \tag{43}$$

де $u = u(t)$, зводить рівняння до однорідного рівняння $n-$го порядку, яке вже допускає зниження порядку.

При заміні (43) похідні перетворюються за формулами

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot e^{-t} = (u' + ku)\cdot e^{(k-1)t}; \\ y'' &= \frac{dy'}{dt}\cdot e^{-t} = \left[u'' + (2k-1)\,u' + k(k-1)\,u\right]\cdot e^{(k-2)t}, \ldots. \end{aligned} \tag{44}$$

Підставляючи вирази (43), і використовуючи умову квазіоднорідності, приходимо до автономного рівняння $n-$го порядку.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $x^2y'' - 3xy' + 4y + x^2 = 0$.

Розв'язання. Підберемо k таким чином, щоб виконувалась умова квазіоднорідності. Оскільки $F(x, y, y', y'') = x^2y'' - 3xy' + 4y + x^2$, то умова квазіоднорідності означає, що вірною є рівність

$$(tx)^2 \left(t^{k-2}y''\right) - 3(tx)\left(t^{k-1}y'\right) + 4t^k y + (tx)^2 = t^m \left(x^2y'' - 3xy' + 4y + x^2\right),$$

що можливо лише при $k = 2$ (при цьому $m = 2$ теж).

Отже, нам потрібно виконати заміну

$$\begin{cases} x = e^t, \\ y = ue^{2t}. \end{cases}$$

Тоді за формулами (44):

$$y' = (u' + 2u)e^t, \quad y'' = u'' + 3u' + 2u,$$

і підставляючи в рівняння, приходимо до рівняння

$$e^{2t}(u'' + 3u' + 2z) - 3(u' + 2u)e^{2t} + 4ue^{2t} + e^{2t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad u'' = -1,$$

яке не лише автономне, але й легко розв'язується послідовним інтегруванням:

$$u = -\frac{1}{2}\, t^2 + C_1 t + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Знаючи функцію $u = u(t)$, легко знаходимо

$$y(t) = e^{2t}u(t) = e^{2t}\left(-\frac{1}{2}\, t^2 + C_1 t + C_2\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

А беручи до уваги заміну незалежної змінної $x = e^t$ або $t = \ln x$, отримуємо остаточний роз'язок

$$y(x) = x^2\left(-\frac{1}{2}\ln^2 x + C_1 \ln x + C_2\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Зауваження. *Вказана вище заміна* (43) *застосовна при* $x > 0$, *при* $x < 0$ *потрібна заміна*

$$\begin{cases} x = -e^t, \\ y = ze^{kt}. \end{cases}$$

Проте можна показати, що для отримання відповіді при $x \in \mathbb{R}$ достатньо в результаті, що отриманий при $x > 0$, замість x поставити $|x|$.

Зокрема, як легко побачити у Прикладі 7, рівняння не зміниться, якщо впровадити заміну $\xi = -x$. Тому разом з розв'язком $y(x)$, розв'язком також буде $y(-x)$. Отже, всі розв'язки задаються формулою

$$y(x) = x^2 \left(-\frac{1}{2} \ln^2 |x| + C_1 \ln |x| + C_2 \right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

9. Якщо рівняння (40) має форму повної похідної, тобто

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = \frac{d}{dx}\, G\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right),$$

то воно допускає очевидне зниження порядку на одиницю. А саме, в результаті інтегрування дістанемо:

$$G\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right) = {}_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Останнє співвідношення називають *першим інтегралом рівняння.*

Приклад 8. Розв'язати рівняння $y'' = xy' + y + 1$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді $y'' - xy' - y = 1$. Тепер нескладно помітити, що його ліва частина є повною похідною

$$(y' - xy)' = 1.$$

А отже, отримуємо перший інтеграл:

$$y' - xy = x + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

який у свою чергу є лінійним диференціальним рівнянням першого порядку.

Домножуючи ліву і праву частину цього рівняння на $e^{-\frac{x^2}{2}}$, знову отримуємо рівняння у формі повної похідної

$$\left(y e^{-\frac{x^2}{2}} \right)' = x e^{-\frac{x^2}{2}} + C_1 e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Інтегруємо останню рівність

$$ye^{-\frac{x^2}{2}} = -e^{-\frac{x^2}{2}} + C_1 \int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R};$$

і приходимо до розв'язку вихідного рівняння

$$y = C_1 e^{\frac{x^2}{2}} \int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + C_2 e^{\frac{x^2}{2}} - 1, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

8. Якщо рівняння (40) не має форми повної похідної, то у деяких випадках воно може набути бажаної форми при домноженні його на деяку функцію $\mu\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right)$ – інтегрувальний множник. Слід мати на увазі, що якщо при цьому для деяких значень своїх змінних $\mu = 0$, то можуть з'явитися зайві розв'язки, а якщо інтегрувальний множник має вужчу область визначення, ніж саме рівняння, то навпаки можлива втрата деяких розв'язків.

Приклад 9. Розв'язати рівняння $yy'' = y'^2$.

Розв'язання. Домножуючи ліву і праву частини рівняння на інтегрувальний множник $\frac{1}{y^2}$, приходимо до рівняння

$$\frac{y''y - y'^2}{y^2} = 0,$$

ліва частина якого є повною похідною:

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' = 0.$$

Тому після інтегрування приходимо до першого інтегралу, що є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними

$$\frac{y'}{y} = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R};$$

розв'язуючи яке знаходимо розв'язок вихідного рівняння

$$y = C_2 e^{C_1 x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Зауважимо, що використовуючи інтегральний множник $\frac{1}{y^2}$, ми могли втратити розв'язок $y = 0$, але цей розв'язок входить у цю сім'ю розв'язків при $C_2 = 0$.

Вправи

Знизити порядок рівнянь, там, де це можливо, розв'язати рівняння або знайти розв'язок задачі Коші.

122. $y''' = e^{-x}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0.$

123. $xy^{(4)} = 1.$

124. $y'' = e^x + \dfrac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}.$

125. $y'' = \dfrac{1}{(x-1)^3} - \dfrac{1}{(x+1)^3}.$

126. $y'(1 + y'^2) = ay''.$

127. $yy''^2 = 1.$

128. $y^4 - y^3y'' = 1.$

129. $y'''y'^2 = 1.$

130. $y''' = 2xy''.$

131. $x^2y'' = y'^2.$

132. $y''x\ln x = y'.$

133. $xy'' = y'\ln\left(\dfrac{y'}{x}\right).$

134. $y''^3 + xy'' = 2y'.$

135. $2y'(y'' + 2) = xy''^2.$

136. $y''' + (y-2)y' = 0.$

137. $y^2(y'y''' - 2y''^2) - yy'^2y'' = 2y'^4.$

138. $yy'y''' + 2y'^2y'' = 3yy''^2.$

139. $yy'' = y'^2.$

140. $1 + y'^2 = 2yy''.$

141. $2yy'' + y^2 + y'^4 = 0.$

142. $y''^2 - 2y'y''' + 1 = 0.$

143. $y'''y'^2 = y''^3.$

144. $2yy'' = y^2 + y'^2.$

145. $(y' + 2y)y'' = y'^2$

146. $yy'' = y^2 - y'^3.$

147. $yy'' = y'^2 + 2xy^2.$

148. $y''^2 - yy''' = \left(\dfrac{y'}{x}\right)^2.$

149. $y'^2 + 2xyy'' = 0.$

150. $x^2(y^2y''' - y'^3) - 2y^2y' - 3xyy'^2 = 0.$

151. $x^2yy'' = (y - xy')^2.$

152. $yy'' - y'^2 = \dfrac{yy'}{\sqrt{1+x^2}}.$

153. $x^2(yy'' - y'^2) + xyy' = y\sqrt{x^2y'^2 + y^2}.$

154. $yy'' = y'^2 + 15y^2\sqrt{x}.$

155. $(x^2+1)(y'^2 - yy'') = xyy'.$

156. $y(xy'' + y') = xy'^2(1 - x).$

157. $x^2(y'^2 - 2yy'') = y^2.$

158. $y'' + \cos xy' - \sin xy = 0.$

159. $y'' + \dfrac{2}{x}\,y' + y^2 = 0.$

160. $x^2yy'' + 1 = (1 - y)xy'.$

161. $y(2xy'' + y') = xy'^2 + 1.$

162. $yy' + xyy'' - xy'^2 = x^3.$

163. $\dfrac{y^2}{x^2} + y'^2 = 3xy'' + \dfrac{2yy'}{x}.$

164. $x^2(yy'' - y'^2) + xyy' = (2xy' - 3y)\sqrt{x^3}.$

165. $x^4(y'^2 - 2yy'') = 4x^3yy' + 1.$

166. $x^2y'' - 3xy' + 4y + x^2 = 0.$

167. $xyy'' + yy' - x^2y'^3 = 0.$

168. $y'' - \dfrac{1}{x}\,y' + \dfrac{1}{x^2}\,y = 1.$

169. $y'' = 2yy'.$

170. $y''y + y'^2 = 1.$

171. $xy'' = 2yy' - y'.$

172. $y'' = xy' + y + 1.$

173. $yy''' - y'y'' = 0.$

174. $yy'' = y'.$

175. $y'' = y'^2y.$

176. $5y'''^2 - 3y''y^{(4)} = 0.$

10. Лінійні рівняння вищих порядків

Диференціальне рівняння вигляду

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x), \qquad (45)$$

де $a_j(x), b(x) : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, — задані функції, називається *лінійним неоднорідним рівнянням (ЛНР)*.

Рівняння вигляду

$$L[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \qquad (46)$$

називається *лінійним однорідним рівнянням (ЛОР)*, що відповідає ЛНР (45).

Функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_k(x) : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, називаються *лінійно залежними* на (α, β), якщо існують сталі $C_1, C_2, \dots, C_k$, які одночасно не обертаються в нуль, такі, що

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_ky_k(x), \equiv 0 \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_k(x)$ називаються *лінійно незалежними* на (α, β), якщо $C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_ky_k(x) \equiv 0$ на (α, β) тоді і лише тоді, коли $C_1 = C_2 = \dots = C_k = 0$.

Приклад 1. Дослідити лінійну незалежність функцій 1, x, x^2, ..., x^k, $x \in \mathbb{R}$.

Розв'язання. Ця система функцій є лінійно незалежною на будь-якому інтервалі $I \subseteq \mathbb{R}$. Дійсно, лінійна комбінація $C_1 + C_2x + \dots + C_{k+1}x^k$ є многочленом і за умови $|C_1| + \dots + |C_{k+1}| \neq 0$ обертається в нуль не більше, ніж у k ізольованих точках дійсної осі, а тотожно дорівнювати нулю може лише при $C_1 = \dots = C_{k+1} = 0$.

Розглянемо систему функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x) : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, кожна з яких є розв'язком рівняння (46).

Фундаментальною системою розв'язків (ФСР) рівняння (46) називається набір з n лінійно незалежних розв'язків цього рівняння.

Теорема. *Якщо $a_j(x) \in \mathrm{C}(\alpha, \beta)$, $j = 1, \dots, n$, то фундаментальна система розв'язків рівняння* (46) *існує.*

Твердження. *Будь-який набір з* $n+1$ *розв'язків рівняння* (46) *- лінійно залежний.*

Твердження. *Якщо* $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\dots$, $y_n(x)$ *— фундаментальна система розв'язків рівняння* (46)*, то загальний розв'язок цього рівняння задається формулою*

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x),\ c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

.

Якщо $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\dots$, $y_n(x) \in \mathrm{C}^{n-1}(\alpha, \beta)$, то визначник

$$W[y_1(x), \dots, y_n(x)] := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

називається *визначником Вронського* (*вронськіаном*) цієї системи функцій.

Твердження. *Якщо функції* $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\dots$, $y_n(x) \in \mathrm{C}^{n-1}(\alpha, \beta)$ *лінійно залежні на* (α, β)*, то* $W[y_1(x), \dots, y_n(x)] \equiv 0$*. Якщо ж* $W[y_1(x_0), \dots, y_n(x_0)] \neq 0$ *хоча б в одній точці* $x_0 \in (\alpha, \beta)$*, то функції* $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\dots$, $y_n(x)$ *є лінійно незалежними на* (α, β).

Теорема. *Нехай* $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\dots$, $y_n(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$ *– лінійно незалежні розв'язки рівняння* (46) *і* $x_0 \in (\alpha, \beta)$ *– фіксована точка. Тоді справедлива формула Остроградського–Ліувілля*

$$W[y_1(x), \dots, y_n(x)] = W[y_1(x_0), \dots, y_n(x_0)] \mathrm{e}^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(s) ds}, \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Твердження. *Нехай* $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\dots$, $y_n(x) \in \mathrm{C}^{n-1}(\alpha, \beta)$ *– розв'язки лінійного однорідного рівняння* (46)*. Тоді якщо існує* $x_0 \in (\alpha, \beta)$ *таке, що* $W[y_1(x_0), \dots, y_n(x_0)] = 0$*, то ці розв'язкі лінійно залежні. Якщо ж* $W[y_1(x_0), \dots, y_n(x_0)] \neq 0$ *хоча б в одній точці* $x_0 \in (\alpha, \beta)$*, то функції* $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\dots$, $y_n(x)$ *є лінійно незалежними на* (α, β)*, тобто є фундаментальною системою розв'язків, причому вронскіан не перетворються на нуль у жодній точці інтервалу* (α, β).

Приклад 2. Дослідити на лінійну незалежність розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ рівняння

$$y'' + \frac{1}{x}\, y' + \left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right) y = 0, \quad x \neq 0, a = \text{const}$$

на $I = (0, +\infty)$, якщо відомо, що:

а) $y_1(1) = 3,\ y_2(1) = 0,\ y_1'(1) = -1,\ y_2'(1) = -2;$

б) $y_1(1) = -6,\ y_2(1) = \dfrac{1}{3}\ ,\ y_1'(1) = 2,\ y_2'(1) = -\dfrac{1}{9}\ .$

Знайти $W[y_1, y_2]$.

Розв'язання. Використовуючи формулу Ліувілля – Остроградського, знаходимо

$$W[y_1, y_2] = W(1)e^{-\int\limits_1^x \frac{ds}{s}} = W(1)e^{-\ln|x|} = \frac{W(1)}{|x|}.$$

Тоді для розв'язків, що задовольняють початковим умовам з пункту а), маємо

$$W(1) = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

а тому ці розв'язки лінійно незалежні.

Для початкових умов з пункту б) маємо:

$$W(1) = \begin{vmatrix} -6 & \dfrac{1}{3} \\ & \\ 2 & -\dfrac{1}{9} \end{vmatrix} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0,$$

тобто $W(x) \equiv 0$, і розв'язки лінійно залежні.

Нехай $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ задані лінійно незалежні функції змінної x, що мають неперервні похідні до n-того порядку включно. Тоді рівняння

$$\begin{vmatrix} y(x) & y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y'(x) & y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y^{(n)}(x) & y_1^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0.$$

є лінійним однорідним рівнянням $n-$го порядку з фундаментальною системою розв'язків $y_1(x), \ldots \ldots, y_n(x)$.

Якщо відомо r лінійно незалежних частинних розв'язків рівняння (46), то порядок рівняння можна знизити на r одиниць.

Твердження. *Нехай $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_r(x)$ — лінійно незалежні розв'язки рівняння* (46) *і $y_1(x)$ не перетворюється в нуль на (α, β). Тоді заміна $y = y_1(x)\int u(x)dx$, де $u = u(x)$ – нова невідома функція, зводить це рівняння до лінійного однорідного рівняння $(n-1)$-го порядку відносно невідомої функції $u = u(x)$, яке має $r-1$ лінійно незалежних розв'язків вигляду $v_j(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y_{j+1}(x)}{y_1(x)}\right)$, $j = 1, \ldots, r-1$.*

При розв'язанні рівнянь другого порядку вигляду

$$y'' + p(x)y' + q(x) = 0, \quad p, q \in C(\alpha, \beta), \tag{47}$$

зручно користуватися таким результатом: якщо відомий один частковий розв'язок $y_1(x)$ рівняння (46) такий, що $y_1(x) \neq 0$ на (α, β), то загальний розв'язок можна знайти за *формулою Абеля*:

$$y = C_1 y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\,dx + C_2 y_1(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y''' - \dfrac{3}{x}\,y'' + \dfrac{6}{x^2}\,y' - \dfrac{6}{x^3}\,y = 0.$

Розв'язання. Легко бачити, що $y_1(x) = x$ – розв'язок рівняння. Тоді заміна

$$y = x\int u dx$$

знизить порядок рівняння на одиницю. Дійсно, при такій заміні

$$y' = \int u dx + xu, \quad y'' = 2u + xu', \quad y''' = 3u' + xu'',$$

і підставляючи в рівняння, отримуємо рівняння другого порядку

$$xu'' + 3u' - 3u' - \frac{6}{x}\,u + \frac{6}{x}\,u + \frac{6}{x^2}\int u dx - \frac{6}{x^2}\int u dx = 0 \quad u'' = 0.$$

Розв'язок цього рівняння $u = C_1 x + C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, і виконуючи зворотню заміну знаходимо розв'язок вихідного рівняння

$$y = x\int (C_1 x + C_2)dx = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Приклад 4. $y'' + \dfrac{2}{x}\, y' + y = 0, \quad y_1(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

Розв'язання. Скористаємося формулою Абеля

$$y = C_1 \frac{\sin x}{x} \int \frac{x^2 e^{-\int \frac{2}{x}\,dx}}{\sin^2 x}\, dx + C_2 \frac{\sin x}{x} =$$

$$= C_1 \frac{\sin x}{x} \int \frac{dx}{\sin^2 x}\, dx + C_2 \frac{\sin x}{x} = -C_1 \frac{\cos x}{x} + C_2 \frac{\sin x}{x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Для знаходження загального розв'язку ЛНР (45), окрім загального розв'язку відповідного ЛОР (46), достатньо знайти деякий частинний розв'язок ЛНР.

Найчастіше для знаходження частинного розв'язку ЛНР (45) застосовують метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа). Цей метод використовується для довільної неперервної функції $f(x)$ і полягає в тому, що частинний розв'язок ЛНР (45) шукають у формі

$$\tilde{y} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \ldots + C_n(x)y_n, \tag{48}$$

де $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n,(x)\}$ – ФСР відповідного лінійного однорідного рівняння (46), $C_i(x)$ – невідомі функції, які можна знайти, розв'язавши систему

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n = 0; \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n' = 0; \\ \ldots \\ C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0; \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = a_0^{-1}(x) f(x) \end{cases}$$

відносно $C_1', C_2', \ldots, C_n'$ і проінтегрувавши отримані диференціальні рівняння вигляду $\dfrac{dC_i}{dx} = \varphi(x), i = \overline{1,n}$.

Вправи

Дослідити на лінійну незалежність функції в області їх визначення:

177. $y_1 = x,\ y_2 = 2x,\ y_3 = x^2$.

178. $y_1 = \cos x,\ y_2 = \cos(x+1),\ y_3 = \cos(x-2)$.

179. $y_1 = x,\ y_2 = a^{\log_a x}$.

180. $y_1 = 2\pi,\ y_2 = \operatorname{arctg} \frac{x}{2\pi},\ y_3 = \operatorname{arcctg} \frac{x}{2\pi}$.

181. $y_1 = e^{-\frac{ax^2}{2}},\ y_2 = e^{-\frac{ax^2}{2}} \cdot \int\limits_0^x e^{\frac{a\xi^2}{2}} d\xi$.

182. Функції $y_1 = x$, $y_2 = x^5$, $y_3 = |x^5|$ задовольняють рівняння $x^2y^{''} - 5xy' + 5y = 0$. Чи є ці функції лінійно залежними при $x \in (-1, 1)$? Відповідь аргументувати.

183. Дано чотири розв'язки рівняння $y'''+xy = 0$. Відомо, що графіки цих розв'язків дотикаються один до одного в одній точці. Скільки лінійно незалежних функцій може бути серед цих розв'язків?

184. Довести, що якщо два розв'язки рівняння $y^{''}+p(x)y'+q(x)y = 0$ з неперервними коефіцієнтами мають максимум при одному й тому самому значенні x , то вони лінійно залежні.

185. Лінійне однорідне рівняння якого порядку може мати на інтервалі $(-1, 1)$ чотири розв'язки вигляду:

$$y_1 = x^2 - 2x + 2;\ y_2 = (x - 2)^2;\ y_3 = x^2 + x - 1;\ y_4 = 1 - x?$$

Знайти загальні розв'язки рівнянь, застосовуючи зниження порядку та формулу Абеля:

186. $y^{''}(\cos x + \sin x) - 2\cos xy' + (\cos x - \sin x)y = 0, \quad y_1 = \cos x$.

187. $y^{'''} + \dfrac{4x-3}{x(2x-1)}y^{''} - \dfrac{2}{x(2x-1)}y' + \dfrac{2}{x^2(2x-1)}y = 0,$

$y_1 = x,\ y_2 = \dfrac{1}{x}$.

188. Рівняння $(x - 1)y^{''} - (x + 1)y' + 2y = 0$ має розв'язок у вигляді многочлена. Знайти його фундаментальну систему розв'язківю

Скласти ЛОР якомога нижчого порядку, яке має розв'язки:

189. $y_1 = x,\ y_2 = e^x$.

190. $y_1 = 3x,\ y_2 = x - 2,\ y_3 = e^x + 1$.

11. Лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо алгебраїчне рівняння

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \tag{49}$$

(49)– характеристичне рівняння для ЛОР (46).

Теорема. *(Про ФСР для ЛОР зі сталими коефіцієнтами) Нехай відомі* $\{\lambda_1, \cdot, \lambda_n\}$ *– корені характеристичного рівняння (34). Тоді ФСР (33) може бути знайдена в елементарних функціях.*

Шукаємо розв'язок (46) у вигляді $y(x) = e^{\lambda x}, \lambda \in C$.

$$L[y] = L[e^{\lambda x}] = e^{\lambda x}\underbrace{(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n)}_{p(\lambda)} = 0.$$

Звідки λ – корінь рівняння (49).

I) $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ –дійсні, різні. Тоді $\{y_i(x) = e^{\lambda_i x}\}_{i=1}^n$ — лінійно незалежні розв'язки (ЛНЗ) (46) звідси $e^{\lambda_i x}\}_{i=1}^n$ – ФСР (46).

II) $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ – різні, але серед них є комплексні.

Нехай $\alpha \pm i\beta$ – пара таких коренів. Потрібно знайти 2 ЛНЗ розв'язки, що їм відповідають.

$Z = e^{(\alpha+i\beta)x}$ – розв'язок (46). Звідси випливає $ReZ = e^{\alpha x}\cos\beta x, ImZ = e^{\alpha x}\sin\beta x$ – шукані розв'язки. $\alpha - i\beta$ не породжує нових ЛНЗ розв'язків. Отже парі $\alpha \pm i\beta$ в ФСР відповідають 2 ЛНЗ розв'язків $\{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x\ \}$.

III) Серед $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ є кратні. Нехай λ – $k-$кратний корінь (49).

Тобто

$$p(\lambda) = p'(\lambda) = \ldots = p^{(k-1)}(\lambda) = 0, p^k(\lambda) \neq 0.$$

Розглянемо тотожність

$$L[e^{\lambda x}] = p(\lambda)e^{\lambda x}.$$

Тоді для $m \leq k-1$

$$\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}L[e^{\lambda x}] = L[x^m e^{\lambda x}] = \frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}p(\lambda)e^{\lambda x}) =$$

(формула Лейбница)

$$= \sum_{j=0}^{m} C_m^j \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} p^{\lambda x}(\lambda) \cdot \frac{\partial^{m-i}}{\partial \lambda^{m-j}} e^{\lambda x} = 0.$$

Отже, k –кратному кореню (49) в ФСР відповідають k – ЛНЗ розв'язки $\{e^{\lambda x}, \lambda e^{\lambda x}, \ldots, \lambda^{k-1} e^{\lambda x}\}$.

Рівняння Ейлера.

$$x^n y^{(n)} + a_1(x) x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) x y' + a_n(x) y = 0, \qquad (50)$$

зводиться до рівняння зі сталими коефіцієнтами на$(0, +\infty)$ заміною: $x = e^t$, t – нова незалежна змінна

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = y'_t e^{-t},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} e^{-t} = (y'_t e^{-t})'_t e^{-t} = (y''_t - y'_t) e^{-2t}$$

і так далі.

$$y^{(n)} = L_n[y] e^{-nt},$$

де L_n – диференційний оператор n-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Тоді при підстановці в (35) маємо:

$$e^{nt} L_n[y] e^{-nt} + a_1 e^{(n-1)t} L_{n-1}[y] e^{-(n-1)t} + \cdot + a_n y = 0.$$

Звідки $\tilde{L}[y] = 0$ – ЛОР зі сталими коефіцієнтами.

Приклад 1. Розв'язати рівняння Ейлера $x^2 y'' + 6xy' + 4y = 0$

Розв'язання Шукаємо розв'язок рівняння Ейлера у вигляді $y = x^r$, підставляємо його у вихідне рівняння, попередньо знайшовши перші дві похідні від нього

$x^2 r(r-1) x^{r-2} + 6x r x^{r-1} + 4x^r = 0$

$r(r-1) + 6r + 4 = 0$

$r^2 + 5r + 4 = 0$

Розв'язуючи дане квадратне рівняння, отримаємо, що $r_1 = -1$, $r_2 = -4$

тому загальний розв'язок $y = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-4}$

Метод невизначених коефіцієнтів

Нехай маємо рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x) \tag{51}$$

якщо

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_{m_1}(x)\cos\beta x + P_{m_2}(x)\sin\beta x) \tag{52}$$

де $P_{m_1}(x)$ - многочлен ступені m_1 , $P_{m_1}(x)$ - многочлен ступені m_2,то частковий розв'язок завжди можна знайти у вигляді

$$\bar{y}(x) = e^{\alpha x}x^r(Q_m^{(r)}(x)\cos\beta x + Q_m^{(r)}(x)\sin\beta x),$$

де $m = \max\{m_1, m_2\}, r$ – кратність $\alpha + i\beta$ як кореня x, p ($r = 0$, якщо $\alpha + i\beta$ не є коренем) і коефіцієнти многочленів $Q_m^{(1)}, Q_m^{(2)}$ – невідомі, що знаходяться підставивши (52) в (51).

Знайти загальний розв'язок рівняння:

191. $y'' + 3y' + 2y = 0$

192. $y'' - 8y' + 16y = 0$

193. $y'' - 8y' = 0$

194. $y'' - 2y' + 9y = 0$

195. $y''' + 8y = 0$

196. $y'' - 2y = 0.$

197. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0.$

198. $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0.$

199. $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y''' = 0.$

Вказівка. У разі необхідності користуватися формулою Муавра

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi \pm 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi \pm 2\pi k}{n}\right),$$

де $\varphi = \arg z, \rho = |z|, k = 0, 1, ..., n-1.$

Розв'язати рівняння методом варіації довільних сталих (методом Лагранжа):

200. $y'' + y =$
$tgx.$

201. $y'' - 2y + y = \frac{e^x}{x}.$

202. $y'' + y' + 2y = \frac{1}{\sin x}.$

Розв'язати рівняння, шукаючи частинні розв'язки МНК:

203. $y^{(4)} - y = 4e^x$.

Вказівка. Скористатися формулою Лейбніца для n-ї похідної від добутку:

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \cdots + uv^{(n)}.$$

Написати вигляд частинного розв'язку рівняння, користуючись МНК (числових значень коефіцієнтів не шукати):

204. $y^{''} - y = xe^x \sin x$

.

205. $y^{''} + 7y' + 10y = xe^{-2x} \cos 5x$.

206. $y^{(4)} - 4y^{'''} + 8y^{''} - 8y' + 4y = e^x(\sin x + x \cos x)$.

Розв'язати рівняння, звівши їх до лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

207. $x^2y^{''} - xy^{'} - 3y = 0$.

208. $x^3y^{'''} + xy^{'} - y = 0$.

209. $x^2y^{''} - xy^{'} - 3y = 5x^4$.

210. $x^2y^{''} - xy^{'} = -x + \frac{3}{x}$.

Лабораторна робота, комп'ютерний практикум 5

.

Записати загальний розв'язок лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами, при цьому частинний розв'язок неоднорідного рівняння подати у вигляді суми двох доданків, один з яких шукати за допомогою методу невизначених коефіцієнтів, інший за допомогою методу варіації довільних сталих.

Задача 1.

Варіанти завдань.

1. $y^{''} - 2y' + 2y = e^x + \dfrac{e^x}{\sin x}$.

2. $y^{'''} + y' = \cos^3 x + \dfrac{1}{\cos x}$.

3. $y^{''} - 6y' + 9y = \dfrac{e^{3x}}{x^2} + xe^{3x}$.

4. $y^{''} - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x} + xe^{2x}$.

5. $x^3(y^{''} - y) = x^2 - 2 + x^{-4}e^x$.

6. $y'' + 2y' + y = xe^x + \dfrac{1}{xe^x}$.
7. $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}(\cos^2 x + \operatorname{tg} x)$.
8. $y'' + y = 3\sin x + \operatorname{ctg} x$.
9. $y''' + y' = \sin^3 x + \dfrac{2 + x^2}{x^3}$.
10. $y'' + 4y = 2\operatorname{tg} x + \cos^2 x$.
11. $y''' - 3y' + 2y = 9e^x + \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.
12. $y'' + 2y' + y = 5e^{-x}\sqrt{x+1} + (3x + 7)e^x$.

Задача 2.

Знайти розв'язки рівнянь, які задовольняють вказані початкові умови:

Варіанти завдань.

1. $y'' - 5y' + 4y = 0, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 1.$
2. $y'' + y = 0, \qquad y(-\frac{\pi}{2}) = 1, y'(-\frac{\pi}{2}) = 0.$
3. $y'' - 2y' = 2e^x, \qquad y(1) = 1, y'(1) = 0.$
4. $y'' + 2y = 0, \qquad y(3) = 0, y'(3) = 0.$
5. $y'' + 4y = \sin 2x, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 0.$
6. $y^{(4)} - 3y' - 2y = 9e^{2x}, \qquad y(0) = -2, y'(0) = 1, y''(0) = y'''(0) = 0.$

Задача 3.

Розв'язати рівняння, звівши їх до лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

Варіанти завдань.

1. $(2x + 1)^2 y'' - 4(2x + 1)y' + 8y = -8x - 4.$
2. $x^2 y'' - xy' + y = 6x \ln x.$
3. $x^2 y'' - xy' = -x + \frac{3}{x}.$
4. $x^2 y'' + xy' + y = 2\sin(\ln x).$
5. $x^2 y'' - xy' + y = 8x^3.$
6. $x^2 y'' + xy' + 4y = 10x.$
7. $x^3 y'' - 2xy = 6\ln x.$
8. $x^2 y'' - 6xy = 5x^3 + 8x^2.$
9. $(x - 2)^2 y'' - 3(x - 2)y' + 4y = x.$
10. $(2x + 3)^3 y''' + 3(2x + 3)y' - 6y = 0.$

11. $x^2y'' - 2y = \frac{3x^2}{x+1}$.

12. $x^2y'' - xy' + y = \frac{\ln}{x} + \frac{x}{\ln x}$.

12. Лінійні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Розглядаємо лінійну однорідну систему

$$\dot{x} = Ax, \tag{53}$$

де $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ — матриця розміру $n \times n$.

Поліном $P(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ називається *характеристичним поліномом* системи (53).

Для знаходження розв'язків системи (53) потрібно знайти корені характеристичного полінома $P(\lambda)$. Нехай $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — корені $P(\lambda)$.

Кожному простому кореню λ_j характеристичного полінома відповідає розв'язок системи (53) $x_j(t) = \mathrm{e}^{\lambda_j t} h_j$, де h_j — власний вектор матриці A, що відповідає власному числу λ.

Якщо кратному кореню λ кратності $k > 1$ відповідає рівно k незалежних власних векторів $h_1, \dots, h_k$, то цьому власному числу відповідає k розв'язків системи (53) $x_j(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} h_j$, $j = 1, \dots, k$.

Якщо кратному кореню λ кратності $k > 1$ відповідає менше, ніж k незалежних власних векторів $h_1, \dots, h_m$, $m < k$, то для кожного власного вектора h_j відповідає p_j (p_j — розмір клітини Жордана, що відповідає вектору h_j) розв'язків системи (53) вигляду

$$\begin{aligned}
&x_{j,1}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} h_j, \\
&x_{j,2}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\left(t h_j + h_{j,1}\right), \\
&x_{j,3}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\left(\tfrac{t^2}{2!} h_j + t h_{j,1} + h_{j,2}\right), \\
&\dots\dots \\
&x_{j,p_j}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\left(\tfrac{t^{p_j-1}}{(p_j-1)!} h_j + \tfrac{t^{p_j-2}}{(p_j-2)!} h_{j,1} + \dots + \tfrac{t}{1!} h_{j,p_j-1} + h_{j,p_j}\right),
\end{aligned}$$

де h_j — власний вектор матриці A, $h_{j,1}, \dots, h_{j,p_j}$ — приєднані вектори, які визначаються із системи:

$$\begin{aligned}&(A - \lambda E)h_j = 0, \quad h_j \neq 0,\\&(A - \lambda E)h_{j,1} = h_j,\\&(A - \lambda E)h_{j,2} = h_{j,1},\\&\dots\dots\\&(A - \lambda E)h_{j,p_j} = h_{j,p_j-1},\end{aligned}$$

система $(A - \lambda E)h_{j,p_j+1} = h_{j,p_j}$ є несумісною і, відповідно, вектор h_{j,p_j+1} не може бути визначений і, крім того, несумісність цієї системи є умовою для визначення кількості розв'язків (розміру клітини Жордана), що відповідає вектору h_j. Загальна кількість розв'язків системи (53), що відповідають кратному власному числу λ, дорівнює кратності цього власного числа.

Парі комплексно спряжених власних чисел $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta \in \mathbb{C}$ відповідає пара дійсних розв'язків системи (53) $x_1(t) = \operatorname{Re} z(t)$, $x_2(t) = \operatorname{Im} z(t)$, де $z(t) = \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t}h$, h — власний вектор (з комплексними координатами), що відповідає власному числу $\alpha + \mathrm{i}\beta$.

Після запису всіх часткових розв'язків, що відповідають всім кореням характеристичного полінома, одержуємо n лінійно незалежних розв'язків системи (53) $\{x_i(t)\}_{i=1}^n$ – фундаментальну систему розв'язків системи (53).

Матриця $X(t)$, стовпцями якої слугує фундаментальна система розв'язків (53), називається фундаментальною матрицею системи (53).

Формула

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t) = X(t)(C_1, \dots, C_n)^T$$

дає загальний розв'язок системи (53).

Загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи (ЛНС) зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t), \tag{54}$$

можна подати у вигляді суми

$$x = \overline{x} + \tilde{x},$$

де $\overline{x}$ – загальний розв'язок відповідної однорідної системи, $\tilde{x}$ – довільний частинний розв'язок неоднорідної системи (54) .

Для знаходження частинного розв'язку $\tilde{x}$ неоднорідної системи при будь-якій неперервній функції $f(t)$ можна користуватися методом варіації довільних сталих. Суть його полягає в тому, що частинний розв'язок $\tilde{x}$ неоднорідної системи шукають у формі, інваріантній до загального розв'язку $\tilde{x}$ відповідної однорідної системи, замінюючи довільні сталі на невідомі функції, які знаходять підставленням $\tilde{x}$ у неоднорідну систему.

Приклад 1. Розв'язати систему $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 4y - 4x \end{cases}$

Розв'язання. Спочатку запишемо матрицю системи $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$.
Далі потрібно скласти характеристичне рівняння
$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 5\lambda = 0$
Звідки корені цього рівняння $\lambda_1 = 0$ і $\lambda_2 = 5$.

Для власного числа $\lambda_1 = 0$ власним вектором буде $\bar{v}_1 = (1, 1)$, а для власного числа $\lambda_2 = 5$ власний вектор $\bar{v}_2 = (1, -4)$.

Отже, фундаментальна система розв'язків складається з 2 векторфункцій

$$e^{0t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Загальний розв'язок

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2e^{5t} \\ c_1 - 4c_2e^{5t} \end{pmatrix}$$

Отже, у відповіді отримаємо

$x(t) = c_1 + c_2e^{5t}$, $y(t) = c_1 - 4c_2e^{5t}$.

Приклад 2. Розв'язати систему $\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = 4x - y \end{cases}$

Розв'язання. Спочатку запишемо матрицю системи $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ Далі потрібно скласти характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda)+4 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

Звідки отримаємо один корінь цього рівняння, але кратності 2 $\lambda_{1,2} = 1$.

В загальному вигляді власний вектор, що відповідає $\lambda_1 = 1$, має вигляд $\bar{v}_0 = (a, 2a)$ Тепер знайдемо приєднаний до нього

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix}$$

Звідки отримаємо систему: $\begin{cases} 2b - c = a \\ 4b - 2c = 2a \end{cases}$ Отже $c = 2b - a$ і $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} b \\ 2b-a \end{pmatrix}$

Отримаємо, що $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = te^t \begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} b \\ 2b-a \end{pmatrix}$

І загальний розв'язок $x(t) = ate^t + be^t, y(t) = 2ate^t + (2b-a)e^t$

Приклад 3. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$

Розв'язання. Спочатку знайдемо $\mathbf{x}_{\text{з.о.}}$, для цього запишемо матрицю системи

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - 1\cdot 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

$\Longrightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 4$

$\underline{\lambda_1 = 1}: \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda_2 = 4}: \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{з.о.}} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Для знаходження $\mathbf{x}_{\text{ч.н.}}$ скористаємося методом невизначених коефіцієнтів.

Оскільки права частина має вигляд $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 4e^{5t} \\ 0 \end{pmatrix} = e^{5t}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} =$ $e^{5t}\mathbf{P}_0(t)$

і 5 не є власним числом матриці системи, то

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{ч.н.}} = e^{5t}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_{\text{ч.н.}}(t) = ae^{5t}, \\ y_{\text{ч.н.}}(t) = be^{5t}; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x}_{\text{ч.н.}}(t) = 5ae^{5t}, \\ \dot{y}_{\text{ч.н.}}(t) = 5be^{5t}. \end{cases}$$

І, підставляючи в систему маємо

$$\begin{cases} 5ae^{5t} = 3ae^{5t} + 2be^{5t} + 4e^{5t}, \\ 5be^{5t} = ae^{5t} + 2be^{5t}; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 5a = 3a + 2b + 4, \\ 5b = a + 2b; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2a - 2b = 4, \\ a - 3b = 0; \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a = 3b, \\ a - b = 2; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 3, \\ b = 1; \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{ч.н.}} = e^{5t}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{з.н.}} = C_1e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2e^{4t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{5t}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Відповідь: $x(t) = C_1e^{t} + 2C_2e^{4t} + 3e^{5t}$, $y(t) = -C_1e^{t} + C_2e^{4t} + e^{5t}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Приклад 4. $\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$

Розв'язання. Спочатку знайдемо $\mathbf{x}_{\text{з.о.}}$, для цього запишемо матрицю системи

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(1-\lambda) - 1\cdot 2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$\Longrightarrow \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2$

$\underline{\lambda_1 = -1}:\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda_2 = 2}:\quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{з.о.}} = C_1e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Для знаходження $\mathbf{x}_{\text{ч.н.}}$ скористаємося методом невизначених коефіцієнтів.

Оскільки права частина має вигляд

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} -5\cos t \\ 0 \end{pmatrix} = e^{0t}\left(\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\sin t\right) =$$

$= e^{0t}\left(\mathbf{P}_0^1(t)\cos t + \mathbf{P}_0^2(t)\sin t\right)$

і $0 + 1\cdot i = i$ не є власним числом матриці системи, то

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{ч.н.}} = e^{0t}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\sin t\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_{\text{ч.н.}}(t) = a\cos t + c\sin t, \\ y_{\text{ч.н.}}(t) = b\cos t + d\sin t; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x}_{\text{ч.н.}}(t) = -a\sin t + c\cos t, \\ \dot{y}_{\text{ч.н.}}(t) = -b\sin t + d\cos t. \end{cases}$$

І, підставляючи в систему маємо

$$\begin{cases} -a\sin t + c\cos t = b\cos t + d\sin t - 5\cos t, \\ -b\sin t + d\cos t = 2a\cos t + 2c\sin t + b\cos t + d\sin t; \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -a = d, \\ c = b - 5, \\ -b = 2c + d \\ d = 2a + b; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} d = -a, \\ c = b - 5, \\ -b = 2b - 10 - a \\ -a = 2a + b; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} d = -a, \\ c = b - 5, \\ b = -3a \\ a - 3b = -10; \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a = -1, \\ b = 3, \\ c = -2 \\ d = 1; \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{ч.н.}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\sin t$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{з.н.}} = C_1e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\sin t$$

Відповідь:

$x(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} - \cos t - 2\sin t,$

$y(t) = -C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t} + 3\cos t + \sin t,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Приклад 5. $\begin{cases} \dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ \dot{y} = -x + \operatorname{tg} t; \end{cases}$

Розв'язання. Спочатку знайдемо $\mathbf{x}_{\text{з.о.}}$, для цього запишемо матрицю системи

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(-\lambda) - 1\cdot 1 = \lambda^2 + 1 = 0$$

$\Longrightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$

$\underline{\lambda_1 = i}:\quad \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -i & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

$$e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = (\cos t + i\sin t)\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{з.о.}} = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

За методом варіації довільних сталих

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{з.н.}} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{tg}^2\ t - 1 \\ \mathrm{tg}\ t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} C_1'(t)\cos t + C_2'(t)\sin t = \mathrm{tg}^2\ t - 1, \\ -C_1'(t)\sin t + C_2'(t)\cos t = \mathrm{tg}\ t; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C_1'(t) = -\cos t, \\ C_2'(t) = \sin t\ \mathrm{tg}^2 t; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1(t) = -\int \cos t\ dt + \tilde{c}_1 = -\sin t + \tilde{c}_1, \\ C_2'(t) = \displaystyle\int \sin t\ \mathrm{tg}^2 t\ dt + \tilde{c}_2 = -\int \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}\ d\cos t + \tilde{c}_2 = \cos t + \frac{1}{\cos t} + \tilde{c}_2. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin t + C_1 \\ \cos t + \dfrac{1}{\cos t} + C_2. \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1\cos t + C_2 \sin t + \mathrm{tg}\ t \\ -C_1 \sin t + C_2\cos t + 2. \end{pmatrix}$$

Відповідь: $x(t) = C_1\cos t + C_2\sin t + \mathrm{tg}\ t$, $y(t) = -C_1\sin t + C_2\cos t + 2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Вправи

Розв'язати системи методом виключення:

211. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 6y + z; \\ \dot{y} = x - z \\ \dot{z} = -6z. \end{cases}$

212. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y; \\ \dot{y} = 2y + z \\ \dot{z} = 2z. \end{cases}$

Розв'язати системи методом Ейлера

213. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y; \\ \dot{y} = -6x - 3y. \end{cases}$

214. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y; \\ \dot{y} = 6x - 5y. \end{cases}$

215. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z; \\ \dot{y} = 12x - 4y - 12z \\ \dot{z} = -4x + y + 5z. \end{cases}$

216. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y - 2z; \\ \dot{y} = x + z; \\ \dot{z} = 6x - 6y + 5z, \end{cases}$

Розв'язати задачу Коші

217. $\begin{cases} \dot{x} = y + z; & x(0) = -1; \\ \dot{y} = x + z & y(0) = 1; \\ \dot{z} = x + y; & z(0) = 0. \end{cases}$

Розв'язати системи методом варіації довільних сталих:

218. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + \frac{1}{\cos t}; \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

219. $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \frac{2}{e^t - I}; \\ \dot{y} = 6x + 3y - \frac{3}{e^t - I}. \end{cases}$

13. Знаходження розв'язків лінійних неоднорідних систем

Загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи (ЛНС) зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t), \tag{55}$$

можна подати у вигляді суми

$$x = \overline{x} + \tilde{x},$$

де $\overline{x}$ – загальний розв'язок відповідної однорідної системи, $\tilde{x}$ – довільний частинний розв'язок неоднорідної системи (55) .

Якщо функція $f(t)$ є векторним квазімногочленом, то частинний розв'язок $\tilde{x}$ неоднорідної системи можна знайти методом невизначених коефіцієнтів.

Нехай

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)), f_i(t) = P_{m_i}(t)e^{\gamma t},$$

де $P_{m_i}(t)$ –многочлен порядку m_i. Тоді частинний розв'язок $\tilde{x} = (\tilde{x_1}, \tilde{x_2}, \ldots, \tilde{x_n})$ можна подати у вигляді

$$\tilde{x_i} = Q^i_{m+s}(t)e^{\gamma t}, i = \overline{1, n},$$

де $m = \max\limits_{i=\overline{1,n}}\{m_i\}, s$ – кратність γ як кореня характеристичного рівняння.

Аналогічно визначаються степені многочленів у разі, коли $f_i(t)$ містять $e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t$, а число $\gamma = \alpha + i\beta$ є коренем характеристичного рівняння.

Теорема. *Про експоненту матриці*

Нехай $A(x) \equiv A$. Розглянемо ЛОС

$$y' = Ay, \tag{56}$$

Фундаментальна матриця (56) нормована в точці $x = 0$, має вигляд

$$x = e^{Ax} = E + Ax + \frac{A^2x^2}{2} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^nx^n}{n!} \tag{57}$$

Потрібно показати, що формула визначає таку, що

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}Y(x) = AY(x) \\ Y(0) = E \end{cases}. \tag{58}$$

Розглянемо рекурентну послідовність:

$$Y_0(x) \equiv E, \quad Y_k(x) = E + \int\limits_0^x AY_{k-1}(s)ds, \ k \geq 1.$$

Тоді $Y_1(x) = E + Ax, \quad Y_2(x) = E + Ax + \frac{Ax^2}{2}, \ldots$

Отже $Y_k(x)$ – часткова сума ряду (57) для будь-яких $[\lambda, \beta] \in R$

$$\max_{[\lambda,\beta]} ||Y_k(x) - Y_{k-1}(x)|| \leq \frac{||A||^k |\beta|^k}{k!} =: a_k$$

Оскільки $Y_k = \sum\limits_{i=1}^{k}(Y_i - Y_{i-1)+E})$ і ряд $\sum_k$ – збігається, то $Y_k(x) \rightrightarrows Y(x)$ на $\forall[\alpha, \beta]$, де Y задовольняє $Y9x) = E + \int\limits_0^x AY(s)ds \Rightarrow Y$ задовольняє (58).

Властивості e^{Ax}:

1) Розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad y(x) = e^{Ax}y_0.$$

2) Якщо $AB = BA$, то $e^{(A+B)x} = e^{Ax} \cdot e^{Bx}$. Дійсно,

$$e^{Ax} \cdot B = Be^{Ax} \Rightarrow \frac{d}{dx}(e^{Ax} \cdot e^{Bx}) =$$

$$= Ae^{Ax}e^{Bx} + e^{Ax}Be^{Bx} = (A+B)e^{Ax}e^{Bx} \Rightarrow e^{Ax} \cdot e^{Bx}.$$

задовольняє $\begin{cases} Y' = (A+B)Y \\ Y(0) = E \end{cases} \Rightarrow e^{Ax} \cdot e^{Bx} = e^{(A+B)x}$.

3) Якщо $A = diag[A_1, \ldots, A_p]$, то $e^{Ax} = diag[e^{A_1 x}e^{A_p x}]$ зокрема, для

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}, \quad e^{Ax} = \begin{pmatrix} e^{a_1 x} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{a_n x} \end{pmatrix}$$

4) $e^{Ax} = Hdiag[e^{\lambda_1 x} \cdot T_{m_1}(x) \dots e^{\lambda_s x} \cdot T_{m_s}(x)]H^{-1}$, де $detH \neq 0$,

$$T_m(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & \dots & \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \\ & & \ddots & \\ & \ddots & & x \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix},$$

$m_1 + \ldots + m_s = n, \lambda_i$ – власні числа A, S відровідає кількості жорданових клітин в ЖНО A.

Зокрема, якщо $\forall \lambda$ - власні числа A, $Re\lambda < -\gamma$, то $\exists C(\gamma)$: $\forall\ x \ \geqslant\ 0\ \ ||e^{Ax}|| \leq C(\gamma)e^{-\gamma x}$.

Лабораторна робота, комп'ютерний практикум 6

.

Задача 1. Розглядається система диференціальних рівнянь

$$y' = Ay + f(t), \tag{59}$$

де A — стала матриця розміру 3×3; $y, f(t)$ — тривимірні вектори.

1) Знайти загальний розв'язок відповідної однорідної системи $y' = Ay$.
2) Знайти розв'язок неоднорідної системи (59), використовуючи метод невизначених коефіцієнтів.
3) Знайти розв'язок задачі Коші з початковими даними $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

Варіанти завдань.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} + 2e^{t} \\ 2e^{3t} + e^{t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & -3 \\ 7 & 1 & -6 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-2t} \\ -e^{-2t} \\ e^{-2t} + e^{-t} \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ 3e^{2t} \\ e^{2t}+1 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ -2\cos t \\ -\sin t + e^{t} \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} \cos t + e^{-t} \\ 2\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$.

6. $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t \\ -e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 9 & 22 & -6 \\ -1 & -4 & 1 \\ 8 & 16 & -5 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} 3e^{t} \\ -e^{t} - 5e^{-2t} \\ 2e^{t} \end{pmatrix}$.

8. $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-4t} \\ 2 \end{pmatrix}$.

9. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} -e^{t} \\ 5e^{t}+1 \\ 3e^{t} \end{pmatrix}$.

10. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{t} \\ 2e^{t} \end{pmatrix}$.

11. $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 2\operatorname{sh} t \\ 2e^{t} \end{pmatrix}$.

12. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} 24 \\ -e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$.

Задача 2. Розв’язати системи $\dot{x} = Ax$ матричним методом:

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

7. $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

8. $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

14. Стійкість розв'язків систем диференціальних рівнянь

Розглядаємо систему

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{60}$$

визначену в області $\Omega = [a, \infty) \times D$, $D \subset \mathbb{R}^n$ — область. Нехай розв'язок задачі Коші з будь-якими початковими даними з Ω для системи (60) має властивість єдиності.

Розв'язок $x^*(t)$ системи (60) називається *стійким за Ляпуновим*, якщо цей розв'язок визначений на $[a, \infty)$ і для будь-яких $\varepsilon > 0$ та $t_0 \geq a$ знайдеться таке $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, що для будь-якого розв'язку $x(t)$ цієї ж системи, такого, що $|x(t_0) - x^*(t_0)| < \delta$, він визначений на $[t_0, \infty)$ та виконується нерівність $|x(t) - x^*(t)| < \varepsilon$ для всіх $t > t_0$.

Розв'язок $x^*(t)$ системи (60) називається *асимптотично стійким за Ляпуновим*, якщо цей розв'язок є стійким за Ляпуновим і для будь-якого $t_0 \geq a$ можна вказати $\Delta = \Delta(t_0) > 0$ таке, що для кожного розв'язку $x(t)$ цієї ж системи такого, що $|x(t_0) - x^*(t_0)| < \Delta$, виконується $\lim\limits_{t \to \infty} |x(t) - x^*(t)| = 0$.

Приклад 1. Дослідити на стійкість розв'язок рівняння $3(t-1)\dot{x} = x$, який задовольняє початкову умову $x(2) = 0$.

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{3(t-1)} \implies \ln|x| = \frac{1}{3}\ln|t-1| + C \implies x(t) = C\sqrt[3]{t-1}$$

$$x(2) = C = 0 \implies x(t) \equiv 0$$

Отже, нам потрібно дослідити на стійкість нульовий розв'язок $\widetilde{x}(t) \equiv 0$, але $x(t) - \widetilde{x}(t) = C\sqrt[3]{t-1}$ необмежене при великих t, тому тривіальний розв'язок нестійкий.

Приклад 2. Дослідити на стійкість розв'язок рівняння $\dot{x} = 4x - t^2 x$, який задовольняє початкову умову $x(0) = 0$.

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2-t} + \frac{1}{2+t}\right)dt \implies \ln|x| = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right| + C \implies$$

$$\implies x(t) = C\sqrt[4]{\left|\frac{2+t}{2-t}\right|}$$

$x(0) = C = 0 \implies x(t) \equiv 0$

Отже, нам потрібно дослідити на стійкість нульовий розв'язок $\widetilde{x}(t) \equiv 0$, але

$x(t) - \widetilde{x}(t) = C\sqrt[4]{\left|\dfrac{2+t}{2-t}\right|} = C\sqrt[4]{\left|\dfrac{4}{2-t} - 1\right|} \to C, \ t \to +\infty \implies$ розв'язок нестійкий.

Розглянемо лінійну однорідну систему

$$\dot{x} = A(t)x \tag{61}$$

з неперервними коефіцієнтами на $[a, \infty)$.

Розв'язки лінійної системи (61) одночасно є або стійкі, або асимптотично стійкі, або нестійкі. Тому коректним є поняття стійкості, асимптотичної стійкості, нестійкості лінійних систем.

Теорема. *Для стійкості лінійної однорідної системи* (61) *необхідно і достатньо, щоб її фундаментальна матриця була обмежена на* $[a, \infty)$.
Для асимптотичної стійкості системи (61) *необхідно і достатньо, щоб норма її фундаментальної матриці прямувала до нуля при* $t \to \infty$.

Розглянемо n-вимірну автономну систему

$$\dot{x} = f(x). \tag{62}$$

Нехай x_* — положення рівноваги цієї системи ($f(x_*) = 0$), $U_{x_*} \ni x_*$ — відкритий окіл точки x_*.

Теорема. *Нехай* $f(x) \in \mathrm{C}^1(U_{x_*})$ *і* $f(x_*) = 0$. *Якщо дійсні частини всіх власних чисел матриці* $A := \frac{\partial f(x_*)}{\partial x}$ *системи першого наближення є строго від'ємними, то положення рівноваги* x_* *системи* (62) *є асимптотично стійким.*
Якщо у матриці A *існує хоча б одне власне число зі строго додатною дійсною частиною, то положення рівноваги* x_* *системи* (62) *є нестійким.*

Зауваження. *Випадок, коли дійсні частини власних чисел матриці* A *є недодатними, називається критичним, і у цьому випадку* *лише по системі першого наближення характер стійкості положення рівноваги x_* системи* (62) *визначити неможливо.*

Розглянемо далі систему (62) і, не обмежуючи загальності, вважатимемо положенням рівноваги цієї системи точку $x_* = 0$.

Уведемо до розгляду функцію $V(x) : U_0 \mapsto \mathbb{R}$, де U_0 — деякий окіл положення рівноваги $x_* = 0$.

Функція $V(x) \in \mathrm{C}^1(U_0)$ називають *функцією Ляпунова* системи (62), якщо:
1) вона є додатно визначеною в U_0, тобто $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ для всіх $x \in U_0 \setminus \{0\}$;
2) похідна унаслідок системи $\dot{V}_f(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} f_i(x) \equiv \mathrm{grad} V(x) \cdot f(x)$ є недодатною в U_0.

Теорема. *Якщо система* (62) *в деякому околі U_0 має функцію Ляпунова, то положення рівноваги $x_* = 0$ є стійким.*

Теорема. *Якщо система* (62) *в деякому околі U_0 має функцію Ляпунова, похідна унаслідок системи якої є від'ємно визначеною в U_0, то положення рівноваги $x_* = 0$ є асимптотично стійким.*

Теорема. *Припустимо, що в околі $U_0 \ni x_* = 0$ для системи* (62) *існують функція $V(x) \in \mathrm{C}^1(U_0)$ така, що похідна унаслідок системи якої є знаковизначеною в U_0, а сама функція V не є знакосталою зі знаком, протилежним $\dot{V}_f$, в будь-якому околі нуля. Тоді положення рівноваги $x_* = 0$ є нестійким.*

Вправи

220. Дослідити стійкість нульового розв'язку системи, якщо відомий її загальний розв'язок:

а) $x = C_1 \cos^2 t - C_2 e^{-t}$, $y = C_1 t^4 e^{-t} + 2C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$;
б) $x = \frac{C_1 - C_2 t}{1+t}$, $y = (C_1 t^3 + C_2) e^{-t}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Користуючись означенням стійкості, дослідити стійкість розв'язків задач Коші:
221. $\frac{dx}{dt} = t(x-1)$: а) $x(1) = 2$, б) $x(1) = 0$.

Дослідити на стійкість нульовий розв'язок систем:

222. $\begin{cases} \dot{x} = 2x; \\ \dot{y} = x - 5y. \end{cases}$

223. $\begin{cases} \dot{x} = -5x + y; \\ \dot{y} = x - 7y. \end{cases}$

224. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2x; \\ \dot{y} = 3x^2 - x + 3y. \end{cases}$

225. Дослідити на стійкість розв'язок $x = -t^2,\ y = t$ системи

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - 2ty - 2y - x; \\ \dot{y} = 2x + 2t^2 + e^{2t-2y}. \end{cases}$$

Дослідити стійкість нульових розв'язків наступних систем:

226. $\begin{cases} \dot{x} = y - x + xy; \\ \dot{y} = x - y - x^2 - y^3. \end{cases}$

227. $\begin{cases} \dot{x} = xy - x^3 + y^3; \\ \dot{y} = x^2 - y^3. \end{cases}$

228. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x - y^3; \\ \dot{y} = x - 2y. \end{cases}$

229. $\begin{cases} \dot{x} = -x - xy; \\ \dot{y} = y^3 - x^3. \end{cases}$

15. Стійкість за першим наближенням

Для ЛОС зі сталою матрицею

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{63}$$

дослідження стійкості тривіального розв'язку залежить від характеру власних чисел матриці A. Так, якщо всі власні числа матриці A мають від'ємні дійсні частини ($Re\lambda_i < 0, i = \overline{1,n}$), то всі розв'язки системи (63) є асимптотично стійкими. Якщо ж є хоча б одне власне число λ_s таке, що ($Re\lambda_s > 0$, то всі розв'язки (63) є нестійкими.

Якщо ($Re\lambda_i \geq 0$ і, крім того, кожному власному числу з нульовою дійсною частиною відповідає одновимірна клітина Жордана, то всі розв'язки системи (63) стійки в сенсі Ляпунова.

Для вивчення $Re\lambda_i$ не обов'язково знаходити всі λ_i з характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda E) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdot + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{64}$$

Критерій Рауса-Гурвіца: Для того, щоб усі розв'язки рівняння (64) малі від'ємні дійсні частини необхідно і достатньо, щоб головні мінори матриці Гурвіца

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

були додатними: $\Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix} > 0$ і т.д.

Лабораторна робота, комп'ютерний практикум 7

.

Задача 1.

1) Знайти всі положення рівноваги системи диференціальних рівнянь, для кожного з положень рівноваги записати відповідну систему першого наближення.

2) Дослідити на стійкість усі положення рівноваги.
3) Наближено зобразити на фазовій площині фазові траєкторії в околах положень рівноваги, вказати напрямок руху вздовж траєкторій.

Варіанти завдань.

1. $\begin{cases} \dot{x} = 2xy - 4y - 8, \\ \dot{y} = 4y^2 - x^2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x^2 - y^2 - y - 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = y^2 + x^2 - 2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = x + y + 1, \\ \dot{y} = y + \sqrt{2x^2 + 1}. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - 1, \\ \dot{y} = x^3 - y^3 - 7. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = y^2 - xy + 12, \\ \dot{y} = x^2 - xy - 28. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 y + xy - 6, \\ \dot{y} = xy + x + y - 5. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = x^3 + y^3 - 9, \\ \dot{y} = xy - 2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + xy - 15, \\ \dot{y} = y^2 + xy - 10. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = x^3 - y^3 - 65, \\ \dot{y} = x^2 y + y^2 x - 20. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = y - x, \\ \dot{y} = \sqrt{3x + y^2} - 2. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = 4x^2 - y^2, \\ \dot{y} = 2xy - 4x - 8. \end{cases}$

Задача 2.

Записати матрицю Гурвіца та застосувати критерій Рауса-Гурвіца для дослідження асимптотичної стійкості нульового розв'язку.

Варіанти завдань.

1. $y^{(5)} + 4y^{(4)} + 16y^{(3)} + 25y'' + 13y' + 9y = 0.$
2. $y^{(5)} + 3y^{(4)} + 10y^{(3)} + 22y'' + 23y' + 12y = 0.$
3. $y^{(5)} + 5y^{(4)} + 15y^{(3)} + 48y'' + 44y' + 74y = 0.$
4. $y^{(5)} + 2y^{(4)} + 14y^{(3)} + 36y'' + 23y' + 68y = 0.$
5. $y^{(5)} + 4y^{(4)} + 9y^{(3)} + 16y'' + 19y' + 13y = 0.$
6. $y^{(5)} + 3y^{(4)} + 6y^{(3)} + 7y'' + 4y' + 4y = 0.$

16. Крайові задачі

Розглянемо крайову задачу для лінійного диференціального рівняння другого порядку

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(p(t)\dot{x}) - q(t)x = F(t), \quad t \in (0,l), \\ &\alpha_1 x(0) + \beta_1 \dot{x}(0) = \gamma_1, \quad \alpha_2 x(l) + \beta_2 \dot{x}(l) = \gamma_2, \end{aligned} \tag{65}$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ — задані числа, причому $|\alpha_j| + |\beta_j| \neq 0$, $j = 1; 2$.

Якщо $\beta_1 = \beta_2 = 0$, то такі крайові умови називаються *умовами першого роду*, якщо $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ — *умовами другого роду*, у решті випадків — *умовами третього роду*.

Якщо $F(t) \equiv 0$ і $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, то крайову задачу (65) називають *однорідною*:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(p(t)\dot{x}) - q(t)x = 0, \quad t \in (0,l), \\ &\alpha_1 x(0) + \beta_1 \dot{x}(0) = 0, \quad \alpha_2 x(l) + \beta_2 \dot{x}(l) = 0. \end{aligned} \tag{66}$$

Якщо ж або $F(t) \not\equiv 0$, або $|\gamma_1| + |\gamma_2| \neq 0$ — *неоднорідною* крайовою задачею.

Крайову задачу (65) завжди можна звести до вигляду

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(p(t)\dot{x}) - q(t)x = (t), \quad t \in (0,l), \\ &\alpha_1 x(0) + \beta_1 \dot{x}(0) = 0, \quad \alpha_2 x(l) + \beta_2 \dot{x}(l) = 0, \end{aligned} \tag{67}$$

Зрозуміло, що кожна однорідна крайова задача (66) має тривіальний розв'язок $x(t) \equiv 0$, інших розв'язків однорідна крайова задача може не мати.

Розглянемо невироджений випадок крайової задачі, який характеризується тим, що відповідна однорідна задача має лише тривіальний розв'язок.

Твердження. *Якщо у невиродженому випадку існує розв'язок крайової задачі* (67)*, то він — єдиний.*

Функція $G(t,s) : [0,l] \times [0,l] \to \mathbb{R}$ з властивостями:

1) $G(t,s)$ неперервна у квадраті $K := [0,l] \times [0,l]$, має неперервні частинні похідні $G'_t(t,s)$, $G''_{tt}(t,s)$ у кожному із трикутників $\{(t,s) \in K : t > s\}$, $\{(t,s) \in K : t < s\}$;
2) для кожного фіксованого $s \in (0,l)$ функція $x_s(t) := G(t,s)$ задовольняє лінійне однорідне рівняння $\frac{d}{dt}(p(t)\dot{x}) - q(t)x = 0$ при всіх $t \in [0,l] \setminus \{0\}$, а також однорідні крайові умови $\alpha_1 x(0) + \beta_1 \dot{x}(0) = 0$, $\alpha_2 x(l) + \beta_2 \dot{x}(l) = 0$;
3) на діагоналі $t = s$ квадрата K похідна $G'_t(t,s)$ має розрив першого роду зі стрибком $1/p(s)$;

називається *функцією Гріна* крайової задачі (67).

Позначимо через $x_1(t)$ та $x_2(t)$ нетривіальні розв'язки лінійного однорідного рівняння, які задовольняють, відповідно, першу і другу крайові умови з (66). Кожен з цих розв'язків існує і визначений з точністю до сталого множника.

Теорема. *Нехай існує функція Гріна крайової задачі* (67)*. Тоді, якою б не була функція* $f(t) \in \mathrm{C}(0,l)$*, ця задача має єдиний розв'язок, і його можна подати у вигляду*

$$x(t) = \int_0^l G(t,s)f(s)ds,$$

де

$$G(t,s) = \frac{1}{\omega} \begin{cases} x_1(t)x_2(s), & 0 \le t \le s \le l, \\ x_2(t)x_1(s), & 0 \le s \le t \le l, \end{cases}$$

$\omega = p(0)W[x_1(0), x_2(0)]$.

Приклад 1. Розв'язати крайову задачу

$$\begin{cases} x^2y'' + 5xy' + 3y = 0; \\ y'(1) = 3, \ y(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ при } x \to +\infty; \end{cases}$$

Розв'язання. Спочатку розв'яжемо рівняння.

$x^2y'' + 5xy' + 3y = 0$ – це рівняння Ейлера

$\lambda(\lambda-1) + 5\lambda + 3 = 0 \Longrightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = -3$

$y(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{-3t} \Longrightarrow y(x) = \dfrac{c_1}{x} + \dfrac{c_2}{x^3}$

Задовольнимо крайові умови

$y(x) = O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ при $x \to +\infty \Longrightarrow y(x) = \dfrac{c_2}{x^3}$

$y(1) = c_2 = 3 \Longrightarrow y(x) = \dfrac{3}{x^3}$

Відповідь: $y(x) = \dfrac{3}{x^3}$.

Приклад 2. Побудувати функцію Гріна для крайової задачі

$$\begin{cases} y'' + y = 0; \\ y(\pi) = 0,\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

$y'(0) = 0 \Longrightarrow -c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = c_2 = 0 \Longrightarrow y_1(x) = \cos x$

$y(\pi) = 0 \Longrightarrow c_1 \cos \pi + c_2 \sin \pi = -c_1 = 0 \Longrightarrow y_2(x) = \sin x$

$$G(x,s) = \begin{cases} c_1(s) \cos x, & x \in [0,s], \\ c_2(s) \sin x, & x \in [s,\pi]; \end{cases}$$

$G(s-0,s) = G(s+0,s) \Longrightarrow c_1(s)\cos s = c_2(s) \sin s$

$G'_x(s+0,s) - G'_x(s-0,s) = \dfrac{1}{a(x)} \Longrightarrow c_2(s) \cos s + c_1(s) \sin s = 1$

$$\begin{cases} c_1(s) \cos s - c_2(s) \sin s = 0, \\ c_1(s) \sin s + c_2(s) \cos s = 1; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1(s) = \sin s, \\ c_2(s) = \cos s. \end{cases}$$

Відповідь: $G(x,s) = \begin{cases} \sin s \cos x, & x \in [0,s], \\ \cos s \sin x, & x \in [s,\pi]. \end{cases}$

Вправи

230. Чи має крайова задача розв'язок:

а) $y'' - y = 0,\ y(0) = 0,\ y(2\pi) = 1;$

б) $y'' + y = 0,\ y(0) = 0,\ y(2\pi) = 1.$

Розв'язати крайові задачі:

231. $y'' + y = 1; \quad y(0) = 0, y'(\frac{\pi}{2}) = 1.$

232. $y'' - 2y' - 3y = 0; \quad y(0) = 1, \lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0.$

233. $y'' - 2y' - 3y = 0; \quad y(0) = 1, \lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 2.$

234. $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0; \quad y(x) = O(x)$ при $x \to 0, y(1) = 2.$

235. $y'' + y = 1; \quad y(1) = 1, y'(0) = 0.$

236. $y'' - y = 0; \quad y(0) = -1, y'(1) - y(1) = 2.$

237. $y'' + y = 1; \quad y(0) = 0, y'(\pi) = 0.$

Побудувати функцію Гріна для крайових задач:

238. $y'' + y = f(x); \quad y(\pi) = 0, y'(0) = 0.$

239. $y'' + y' = f(x); \quad y(0) = 0, y(1) = 0.$

240. $y'' = f(x); \quad y(0) = 0, y(1) = 0.$

241. $x^2y'' + 2xy' = f(x); \quad y(1) = 0, y'(3) = 0.$

242. $xy'' - y' = f(x); \quad y(2) = 0, y'(1) = 0.$

243. $y'' = f(x); \quad y(0) = 0, y(x)$ обмежена при $x \to +\infty$.

244. $y'' - y = f(x); \quad y'(0) = 0, y'(2) + y(2) = 0.$

245. $y'' + y' = f(x); \quad y(+\infty) = 0, y'(0) = 0.$

246. $y'' + 4y' + 3y = f(x);\ y(0) = 0, y(x) = O(e^{-2x})$ при $x \to +\infty$.

247. $x^2y'' + 2xy' - 2y = f(x);\ y(0)$обмежена, $y(1) = 0.$

17. Інтегрування диференціальних рівнянь рядами

Розглядаємо диференціальне рівняння

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0, \tag{68}$$

в якому коефіцієнти $p(t)$, $q(t)$ є аналітичними функціями в околі деякої точки t_0, тобто розвиваються в околі цієї точки у збіжні степеневі ряди. Тоді таку саму властивість мають і розв'язки цього рівняння. Не обмежуючи загальності, можемо вважати, що $t_0 = 0$.

Теорема. *Якщо розвинення коефіцієнтів рівняння* (68) *у степеневі ряди* $p(t) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} p_j t^j$, $q(t) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} q_j t^j$ *збігаються на інтервалі* $(-r, r)$, *то кожен розв'язок цього рівняння можна представити сумою степеневого ряду* $x(t) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j t^j$, *збіжного на тому самому інтервалі* $(-r, r)$.

Розглянемо рівняння

$$t^2\ddot{x} + tp(t)\dot{x} + q(t)x = 0, \tag{69}$$

де $p(t)$, $q(t)$ є аналітичними функціями в околі точки $t_0 = 0$, тобто розвиваються у степеневі ряди $p(t) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} p_j t^j$, $q(t) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} q_j t^j$, збіжні в деякому околі $|t| < r$.

Точка $t_0 = 0$ є *регулярною особливою точкою* для рівняння (69) при умові $|p_0| + |q_0| + |q_1| \neq 0$.

Рівність $\lambda(\lambda - 1) + p_0\lambda + q_0 = 0$ називається *визначальним рівнянням* диференціального рівняння (69).

Нехай λ_1, λ_2 — дійсні корені визначального рівняння, $\lambda_2 \leq \lambda_1$.

Теорема. *Нехай у рівнянні* (69) *функції* $p(t)$ *та* $q(t)$ *розвиваються у збіжні на інтервалі* $(-r, r)$ *степеневі ряди. Тоді це рівняння завжди має розв'язок у вигляді узагальненого степеневого ряду* $x(t) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j t^{j+\lambda_1}$, *причому ряд* $\sum\limits_{j=0}^{\infty} |c_j t^j|$ *збігається при* $|t| < r$. *Якщо додатково виконується умова* $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}$, *то рівняння* (69) *має два лінійно незалежних розв'язки у вигляді збіжних при* $|t| < r$

узагальнено степеневих рядів

$$x_1(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{1,j} t^{j+\lambda_1}, \quad x_2(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{2,j} t^{j+\lambda_2}.$$

Розглянемо задачу Коші

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{70}$$

де $f(t,x) \in \mathrm{C}^{\infty}(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$, $(t_0, x_0) \in D$.

Тоді для кожного натурального N при $t \to t_0$ для розв'язку задачі Коші (70) має місце формула Тейлора

$$x(t) = x_0 + a_1(t-t_0) + a_2(t-t_0)^2 + \cdots + a_N(t-t_0)^N + \mathrm{o}((t-t_0)^N),$$

де коефіцієнти $a_j = \frac{1}{j!}\frac{d^j x(t_0)}{dt^j}$, $j = 1, \ldots, N$. Ці коефіцієнти можна визначити не знаючи явного вигляду самого розв'язку $x(t)$ рекурентними формулами, а саме,

$$\begin{aligned} a_1 &= \dot{x}(t_0) = f(t_0, x_0), \\ a_2 &= \frac{\ddot{x}(t_0)}{2!} = \frac{1}{2}\left(f'_t(t_0,x_0) + f'_x(t_0,x_0) f(t_0,x_0)\right), \\ a_j &= \frac{1}{j!} \left.\frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}}\right|_{t=t_0} f(t, x(t)), \quad j = 3, \ldots, N. \end{aligned}$$

Чи можна представити розв'язок задачі Коші (70) у вигляді збіжного степеневого ряду, дає така теорема.

Теорема. *Нехай ряд Тейлора функції $f(t,x)$ збігається в деякому околі точки (t_0, x_0). Тоді існує таке дійне число $\rho = rho(t_0, x_0) > 0$, що розв'язок задачі Коші (70) можна представити сумою збіжного на інтервалі $(t_0 - \rho, t_0 + \rho)$ степеневого ряду $x(t) = x_0 + \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j (t-t_0)^j$, де $a_j = \frac{1}{j!} \left.\frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}}\right|_{t=t_0} f(t, x(t))$, $j = 1, 2, \ldots$.*

Приклад 1. $y'' - xy' = 0$

Розв'язання. За теоремою 1:

$y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$

$y'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1},$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2},$$

підставляємо в рівняння

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}x^k = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[c_{k+2}(k+2)(k+1) - c_{k-1}\right]x^k + 2c_2 = 0.$$

Звідси, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, маємо

$c_2 = 0$

$$c_{k+2} = \frac{c_{k-1}}{(k+1)(k+2)} \Longrightarrow c_{k+3} = \frac{c_k}{(k+1)(k+2)}\ , \quad k \geq 0$$

$c_0 = 0,\ c_1 = 1 \Longrightarrow c_{3k} = c_{3k+2} = 0, c_{3k+1} = \dfrac{c_{3k-2}}{3k(3k+1)} = \displaystyle\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{3i(3i+1)}\ ,\ k \geq 1$

$c_0 = 1,\ c_1 = 0 \Longrightarrow c_{3k+1} = c_{3k+2} = 0, c_{3k} = \dfrac{c_{3k-3}}{3k(3k-1)} = \displaystyle\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{3i(3i-1)}\ ,\ k \geq 1$

Відповідь: $y_1(x) = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{3i(3i-1)}\right)x^k$, $y_2(x) = x + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{3i(3i+1)}\right)x^k$, $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Приклад 2. $x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0$ в околі особливої точки $x_0 = 0$

Розв'язання. $y'' + \left(\dfrac{3}{x-1} - \dfrac{1}{x(x-1)}\right)y' + \dfrac{1}{x(x-1)}\ y = 0$

$$y'' + \frac{1}{x}\left(\frac{3x}{x-1} - \frac{1}{x-1}\right)y' + \frac{1}{x^2}\ \frac{x}{x-1}\ y = 0$$

За теоремою 2: визначальне рівняння $\rho(\rho-1) + \rho = 0 \Longrightarrow \rho = 0$ (кратність 2)

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1},$$

$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2},$

підставляємо в рівняння

$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^k - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} 3kc_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0,$

$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)c_{k+1} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} 3kc_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)c_{k+1} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0,$

Звідси, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, маємо

$k = 0: \quad -c_1 + c_0 = 0 \Longrightarrow c_1 = c_0$

$k = 1: \quad -2c_2 + 3c_1 - 2c_2 + c_1 = 0 \Longrightarrow c_0 = c_1 = c_2$

$k \geq 2: \quad c_{k+1}(k^2 + k + k + 1) = c_k(k^2 - k + 3k + 1) \Longrightarrow c_{k+1} = c_k$

$c_0 = 1 \Longrightarrow c_k = 1,\ k \geq 0 \Longrightarrow y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \dfrac{1}{1-x}\ .$

За теоремою 2: $y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{c}_k x^k + \gamma\ \dfrac{\ln x}{x-1}\ .$

Позначимо $z(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$ і підставимо в рівняння

$z(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$

$z'(x) = \dfrac{1}{x(x-1)} - \dfrac{\ln x}{(x-1)^2}$

$z''(x) = -\ \dfrac{1}{x^2(x-1)} - \ \dfrac{2}{x(x-1)^2} + \dfrac{2\ln x}{(x-1)^3}$

$-\ \dfrac{1}{x} - \ \dfrac{2}{(x-1)} + \dfrac{2x\ln x}{(x-1)^2} + \dfrac{3}{x-1} - \dfrac{3x\ln x}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x(x-1)} + \dfrac{\ln x}{(x-1)^2} + \dfrac{\ln x}{x-1}\ \ \equiv 0$

Таким чином, $y_2(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}\ .$

Відповідь: $y(x) = \dfrac{c_1}{x-1} + \dfrac{c_2 \ln x}{x-1},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

Вправи

Знайти два лінійно незалежних частинних розв'язки рівнянь в околі особливої точки $x_0 = 0$ у вигляді узагальнених степеневих рядів, або рядів що містять додатково $\ln x$:

248. $x(x-1)y'' + (3x-2)y' + y = 0.$

249. $x(x-1)y'' + (2x-2)y' - 2y = 0.$

250. $x(x-1)y'' + (x+1)y' - y = 0.$

251. $x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0.$

252. $x^2y'' - (3x + x^2)y' + 4y = 0.$

253. $x(x-1)^2y'' + x(x-1)y' - y = 0.$

254. $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0.$

255. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0.$

Знайти у вигляді ряду за степенями x один частинний розв'язок, який задовольняє поставлені початкові умови. Знайти суму ряду та побудувати другий частинний розв'язок за формулою Абеля:

256. $y'' - 2xy' + 2y = 0; \quad y_1(0) = 0, y_1'(0) = 2.$

257. $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0; \quad y_1(0) = 0, y_1'(0) = 1.$

258. $(1-x)y'' + xy' - y = 0; \quad y_1(0) = 1, y_1'(0) = 1.$

259. $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0; \quad y_1(0) = 0, y_1'(0) = 1.$

260. $(1-x^2)y'' - xy' = 0; \quad y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0.$

Знайти розв'язки, які виражаються степеневими або узагальненими степеневими рядами:

261. $xy'' + y' - xy = 0.$

262. $xy'' - xy' - y = 0.$

263. $x^2y'' + 2xy' - (x^2 + 2x + 2)y = 0.$

264. $x^2y'' - x^2y' + (x-2)y = 0.$

Знайти у вигляді степеневих рядів розв'язки задач Коші. Обчислити коефіцієнти рядів (до третього включно):

265. $y' = y^2 - x; \quad y(0) = 1.$

266. $y' = x + \frac{1}{y}; \quad y(0) = 1.$

267. $y' = y + xe^y; \quad y(0) = 0.$

268. $y' = 2x + \cos y; \quad y(0) = 0.$

Література

[1] Самойленко А.М. Диференціальні рівняння : підручник / А.М. Самойленко, М.О. Перестюк, І.О. Парасюк. — К.: ВПЦ "Київський університет 2010. — 527 с.

[2] Самойленко А.М. Диференціальні рівняння в задачах: навч. посібник для студентів вищих навчальних закладів / А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, М.О. Перестюк. — К.: Либідь, 2003. — 504 с.

[3] Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: РХД, 2000. — 368 с.

[4] Перестюк М.О., Свіщук М.Я. Збірник задач з диференціальних рівнянь : Навч. посібник. — К.: ТВіМС, 2004. — 224 с.

[5] Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. 9-е изд. — М.: Наука, 2000. — 176 с.

[6] Гудименкл Ф.С., Павлюк І.А., Волкова В.О. Збірник задач з диференціальних рівнянь. — К.: Вища школа, 1972. — 154 с.

[7] Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 384 с.

[8] Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Под ред. А.Г. Мышкиса, О.А. Олейник. — 7-е изд., исправ. — М.: Изд-во МГУ, 1984. — 296 с.

[9] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — 5-е изд. — М.: Наука: Главная редакция физико-математической литературы, 1982. — 331 с.

[10] Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. — 6-е изд. — М.: ГИФМЛ, 1953. — 468 с.

[11] Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. — 3-е изд. перераб. и доп. — М.: Высшая школа, 1967. — 565 с.

[12] Constanda C. Differential Equations : Textbook. — Springer International Publishing, 2017. 297 p.

[13] Ross Clay C. Differential Equations : Textbook. — N.-Y.: Springer-Verlag, 2004. — 434 p.

[14] Braun M. Differential Equations and Their Applications : Textbook. — N.-Y.; Heidelberg; Berlin: Springer-Verlag, 1993. — 578 p.

[15] Said-Houari B. Differential Equations: Methods and Applications : Textbook. — Springer International Publishing, 2015. 212 p.

Навчальне видання

Капустян О.В.
Касімова Н.В.
Ловейкін Ю.В.
Сукретна А.В.
Федоренко Ю.В.

Диференціальні рівняння: задачі, методи розв'язування, комп'ютерний практикум

Навчальний посібник