Математична логіка

Зміст

1 Лекція 3. Логічний наслідок. Нормальні форми. 03.03

1.1 Логічний наслідок

Нехай $\Delta = \{A_1, \ldots, A_n\}$ — набір формул, B — формула, $x_1, \ldots, x_k$ — список усіх змінних, які зустрічаються принаймні в одній з цих формул. Кажуть, що формула B є *логічним наслідком* з формул $A_1, \ldots, A_n$, якщо для кожного набору логічних значень змінних $x_1, \ldots, x_k$, при яких усі формули $A_1, \ldots, A_n$ є істинними, формула B також буде істинною (тобто якщо перетин областей істинності формул $A_1, \ldots, A_n$ міститься в області істинності формули B). Інколи зручніше рівносильне означення: якщо на якомусь наборі логічних значень змінних $x_1, \ldots, x_k$ формула B хибна, то на цьому наборі принаймні одна з формул $A_1, \ldots, A_n$ також буде хибною.

Той факт, що B є логічним наслідком набору формул $\Delta = \{A_1, \ldots, A_n\}$, позначають $A_1, \ldots, A_n \models B$ або $\Delta \models B$. Говорять також, що B є *висновком*, а формули $A_1, \ldots, A_n$ — *засновками* логічного наслідку.

Поняття логічного наслідку легко узагальнюється на довільні множини формул: формула F є *логічним наслідком* множини формул Δ, якщо кожна модель для Δ буде моделлю і для F.

Зокрема, множина Δ може бути пустою. Тоді з означення логічного наслідку випливає, що B буде істинною на кожному наборі логічних значень змінних $x_1, \ldots, x_k$. Таким чином, запис $\models B$ означає, що формула B є тавтологією.

Твердження 1.1. *$A \models B$ тоді й лише тоді, коли формула $A \to B$ є тавтологією.*

Доведення. Співвідношення $A \models B$ виконується тоді й лише тоді, коли з істинності A випливає істинність B, тобто коли формула $A \to B$ є тотожно істинною. □

Наслідок 1.1.

$$A_1, \ldots, A_n \models B \ \Leftrightarrow \models A_1 \to (A_2 \to (\cdots \to (A_n \to B) \cdots)).$$

Формули $A_1 \to (A_2 \to (\cdots \to (A_n \to B) \cdots))$ і $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \to B$ рівносильні. Тому

$$A_1, \ldots, A_n \models B \ \Leftrightarrow \models (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \to B. \tag{1}$$

Нарешті, із співвідношення (1) і твердження 1.1 випливає, що

$$A_1, \ldots, A_n \models B \;\Leftrightarrow\; A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \models B. \tag{2}$$

Таким чином, поняття логічного наслідку й тавтології виявляються тісно пов'язаними: питання про правильність певного висновку зводиться до питання про тавтологічність деякої формули. З іншого боку, поняття логічного наслідку можна вважати дуже широким узагальненням поняття імплікації: якщо останнє пов'язує окремі висловлювання, то логічний наслідок — цілі множини висловлювань.

Поняття логічного наслідку дозволяє дати строге означення *логічності міркування*: міркування є логічним, якщо при його формалізації у вигляді послідовності формул засновки і висновок виявляються пов'язаними відношенням логічного наслідку. Тобто це міркування, що мають цілком певну форму.

Приклад. З'ясуємо, чи є логічними наступні міркування:

Кава смачна, а ліки не є смачними. Якщо людина хвора, то вона має приймати ліки або дотримуватися режиму. Дотримуватися режиму і не приймати ліки неможливо. Отже, якщо людина п'є каву, то вона не хвора.

Насамперед виділимо прості висловлювання:

a — "кава смачна";
b — "ліки смачні";
c — "людина хвора";
d — "людина дотримується режиму";
e — "людина приймає ліки";
f — "людина п'є каву".

Після цього формалізуємо висловлювання, з яких складається дане міркування:

$a \wedge \neg b$ — "кава смачна, а ліки не є смачними";

$c \to (d \vee e)$ — "якщо людина хвора, то вона має приймати ліки або дотримуватися режиму";

$\neg(d \wedge \neg e)$ — "дотримуватися режиму і не приймати ліки неможливо";

$f \to \neg c$ — "якщо людина п'є каву, то вона не хвора".

Тепер питання про логічність міркувань можна переформулювати таким чином: *чи правильно стоїть знак* $\models$ *у співвідношенні*

$$a \wedge \neg b,\; c \to (d \vee e),\; \neg(d \wedge \neg e) \models f \to \neg c.$$

Висновок $f \to \neg c$ буде хибним, коли $f = c = 1$. Спробуємо підібрати такі значення істинності решти a, b, d, e простих висловлювань, щоб усі формули зліва від знаку $\models$ стали істинними. Очевидно, що це буде тоді, коли $a = 1$, $b = 0$, а формули $d \vee e$ і $d \wedge \neg e$ набувають відповідно значень 1 і 0. Останнє буде, зокрема, коли $e = 1$.

Отже, ми змогли підібрати такі значення істинності простих висловлювань, при яких усі формули зліва від знаку $\models$ істинні, а висновок хибний. Тому знак $\models$ стоїть неправильно і міркування не є логічними.

У загальному випадку формалізація ланцюжка міркувань є процедурою творчою, зокрема, тому, що в живій мові деякі висловлювання можуть бути присутніми неявно і вгадуватися лише з контексту. Особливо часто таке трапляється в математичних текстах. Пропущені фрагменти міркувань можуть бути позначені (однак не завжди) словами “очевидно”, “легко бачити” і т.п.

Крім логічних міркувань часто, особливо в природничих науках, вживаються ще так звані “фактичні міркування” — в яких правильність висновку випливає не тільки з логічної структури засновків, але й з певних причинно-наслідкових зв’язків. Наприклад: “якщо по провіднику проходить струм, то він нагрівається”. Аналіз правильності таких міркувань виходить поза межі математичної логіки.

Одним з основних завдань логіки є класифікація найможливіших форм логічних міркувань. Першим кроком у цьому напрямку є виділення найбільш поширених типів логічних наслідків:

Теорема 1.1 (Основні типи логічних наслідків)**.**

1. *modus ponens*[1]: $A, A \to B \models B$;
2. *modus tollens*[2]: $A \to B, \neg B \models \neg A$;
3. *Правило силогізму*: $A \to B, B \to C \models A \to C$;
4. *Введення диз’юнкції та кон’юнкції*: $A \models A \vee B$, $A, B \models A \wedge B$;
5. *Вилучення диз’юнкції та кон’юнкції*: $A \wedge B \models A$, $A \vee B, \neg B \models A$;
6. *Правило контрапозиції*: $A \to B \models \neg B \to \neg A$;
7. *Закони Клавіуса*: $\neg A \to A \models A$, $A \to \neg A \models \neg A$;
8. *Закон Дунса Скотта*: $A \wedge \neg A \models B$;
9. *ex falsoquod libet*[3]: $\neg A \models A \to B$;
10. *Метод зведення до абсурду*: $\neg A \to B, \neg A \to \neg B \models A$;
11. *Метод вичерпування можливостей для умови*:
    $A_1 \vee \dots \vee A_n, A_1 \to B, \dots, A_n \to B \models B$;

[1] Modus ponens (лат.) — правило ствердження
[2] Modus tollens (лат.) — правило заперечення
[3] Ex falsoquod libet (лат.) — з брехні що завгодно

12. *Метод вичерпування можливостей для наслідку*:
$B \to (A_1 \vee \dots \vee A_n), \neg(B \to A_2), \dots, \neg(B \to A_n), \models B \to A_1$.

Доведення. Перші 10 співвідношень легко перевіряються за допомогою таблиць істинності.

11. Припустимо, що всі формули зліва від символу $\models$ є істинними. Тоді має бути істинною і якась із формул A_i. Але з істинності формул A_i та $A_i \to B$ випливає істинність формули B.

12. Знову припустимо, що всі формули зліва від символу $\models$ є істинними. Якщо $\neg(B \to A_i)$ істинна, то $B \to A_i$ хибна, що можливо лише коли B істинна, а A_i хибна. Із істинності формул B і $B \to (A_1 \vee \dots \vee A_n)$ випливає істинність $A_1 \vee \dots \vee A_n$. Але $A_2, \dots, A_n$ — хибні. Тому A_1 має бути істинною. □

Перевірити безпосередньо правильність співвідношення $\Delta \models B$ інколи буває складно. Полегшити таку перевірку може наступне очевидне, але корисне

Твердження 1.2. *a)* $A_1, \dots, A_n \models A_i$ *для довільного* $1 \le i \le n$;

b) якщо для довільного $1 \le j \le m$ $A_1, \dots, A_n \models C_j$ *і* $C_1, \dots, C_m \models B$, *то* $A_1, \dots, A_n \models B$.

Користуючись цим твердженням, доведення правильності співвідношення $A_1, \dots, A_n \models B$ можна подати у вигляді ланцюжка формул D_1, $D_2, \dots, D_k$, де $D_k = B$, а присутність у ланцюжку кожної з формул D_j обґрунтовується одним із правил:

(1) формула D_j збігається з одним із засновків A_i;

(2) знайдуться такі формули $D_{j_1}, \dots, D_{j_m}$, які передують D_j (тобто $j_1, \dots, j_m < j$), що $D_{j_1}, \dots, D_{j_m} \models D_j$.

Зауваження. 1. Логічні наслідки, які використовуються у правилі (2), можуть бути спеціального простого вигляду (наприклад, з теореми 1.1).

2. У ланцюжок $D_1, \dots, D_k$ можна включати будь-яку тавтологію (для тавтології D і довільних формул $D_1, \dots, D_r$ завжди $D_1, \dots, D_r \models D$).

3. Зі схожими правилами ми ще зіткнемося пізніше, коли будемо розглядати формальні теорії.

1.1.1 Суперечливі множини формул

Множина Δ формул (можливо, нескінченна) називається *суперечливою* або *несумісною*, якщо $\Delta \models F$ для кожної формули F. Позаяк F може бути тотожно хибною, то це означає, що для кожного набору логічних значень змінних, що входять у формули з множини Δ, принаймні одна з цих формул буде хибною. У противному разі множина Δ називається *несуперечливою* (або *сумісною* чи *виконливою*).

У термінах моделей суперечливість множини формул означає, що ця множина не має моделі.

Твердження 1.3. *Множина формул Δ буде суперечливою тоді й лише тоді, коли тотожно хибна формула буде логічним наслідком з Δ.*

Доведення. Необхідність умови випливає безпосередньо з означення суперечливої множини. З другого боку, якщо для якогось набору логічних значень змінних усі формули з Δ будуть істинними, то тотожно хибна формула не буде логічним наслідком з Δ. $\square$

Твердження 1.4 (Доведення від супротивного (reductio ad absurdum))**.** $\Delta \models B$ *тоді й лише тоді, коли множина формул* $\Delta \cup \{\neg B\}$ *є суперечливою.*

Доведення. Нехай $\Delta \models B$. Тоді для кожного набору логічних значень змінних, для якого всі формули з Δ істинні, істинною буде і формула B, а формула $\neg B$ — хибною. Отже, для кожного набору логічних значень змінних буде хибною або принаймні одна із формул з Δ, або $\neg B$. Тому множина $\Delta \cup \{\neg B\}$ є суперечливою.

Навпаки, якщо множина $\Delta \cup \{\neg B\}$ є суперечливою, то для кожного набору логічних значень змінних, коли всі формули з Δ істинні, формула $\neg B$ має бути хибною. Але тоді формула B буде істинною. Тому $\Delta \models B$. $\square$

1.2 Двоїстість

Нехай формула F утворена тільки за допомогою зв'язок $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$, $\oplus$, 0, 1. Формула F^* називається *двоїстою* до F, якщо вона отримується з F заміною кожного входження зв'язки $\vee$ на $\wedge$ і навпаки, а також кожного входження $\oplus$ на $\leftrightarrow$ і навпаки та 0 на 1 і навпаки. Легко бачити, що $(F^*)^* = F$.

Лема 1.1. *Нехай формула F утворена тільки за допомогою зв'язок $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$, $\oplus$, 0, 1. Позначимо через F' формулу, що одержується з F заміною кожного символу змінної його запереченням* (тобто якщо $F = F(x_1, \ldots, x_n)$, то $F' = F(\neg x_1, \ldots, \neg x_n)$) *. Тоді* $F' \equiv \neg F^*$.

Доведення. Застосуємо індукцію за довжиною формули F. Для формул довжини 0 твердження очевидне.

Нехай тепер для формул, коротших ніж F, лема вже доведена. Далі можливі два випадки:

1. $F = \neg G$. У цьому випадку $F^* = \neg G^*$ і за припущенням індукції $G' \equiv \neg G^*$. Тому

$$F' = \neg G' \equiv \neg\neg G^* = \neg F^*.$$

2. $F = G_1 \circ G_2$, де $\circ$ — якась із бінарних зв'язок $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$, $\oplus$. У цьому випадку $F^* = G_1^* \overset{*}{\circ} G_2^*$, де $\overset{*}{\circ}$ — зв'язка, двоїста до $\circ$. Враховуючи закони де Моргана і рівносильності

$$A \leftrightarrow B \equiv \neg A \leftrightarrow \neg B, \qquad A \oplus B \equiv \neg A \oplus \neg B,$$

отримуємо:

$$F' = G_1' \circ G_2' \equiv \neg G_1^* \circ \neg G_2^* \equiv \neg(G_1^* \overset{*}{\circ} G_2^*) = \neg F^*.$$ □

Теорема 1.2 (Принцип двоїстості). *Якщо $F \equiv G$, то $F^* \equiv G^*$.*

Доведення. Використовуючи теорему про підстановку (теорема **??**) і лему 1.1, отримуємо такий ланцюжок імплікацій:

$$F \equiv G \quad \Rightarrow \quad F' \equiv G' \quad \Rightarrow \quad \neg F^* \equiv \neg G^* \quad \Rightarrow \quad F^* \equiv G^*.$$ □

1.3 Булеві функції і нормальні форми

Бонусна задача (5 балів):

Нехай $A(n)$ — кількість тих булевих функцій від n змінних, які явно залежать від кожної змінної, а $B(n)$ — кількість всіх булевих функцій від n змінних. Доведіть, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A(n)}{B(n)} = 1$.

1.3.1 Булеві функції

Нехай $F(x_1, \dots, x_n)$ — формула логіки висловлювань, яка не містить інших змінних, окрім $x_1, \dots, x_n$. При інтерпретаціях цим змінним надаються певні логічні значення. На кожному наборі $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ таких значень формула F набуває логічного значення $F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Тим самим формула $F(x_1, \dots, x_n)$ визначає певну функцію вигляду

$$F : \{0,1\}^n \to \{0,1\}\,, \quad (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \mapsto F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)\,. \tag{3}$$

Впорядковані набори $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ логічних значень називають *булевими векторами довжини* (або *розмірності*) n, а довільні функції вигляду (3) — *булевими* функціями арності n.[4]

[4]Названі так на честь англійського логіка Дж. Буля (1815–1864.)

Таким чином, кожна формула логіки висловлювань визначає деяку булеву функцію.

Теорема 1.3. *Існує* 2^n *булевих векторів довжини* n *і* 2^{2^n} *різних булевих функцій від* n *аргументів.*

Доведення. Перша частина твердження випливає з того, що кожна з n координат булевого вектора може набувати будь–якого з двох значень 0 і 1, причому різні координати набувають цих значень незалежно. Друга частина доводиться аналогічно: на кожному з 2^n булевих векторів функція може набувати будь-якого з двох значень 0 і 1, причому ці значення на різних векторах можна вибирати незалежно. $\square$

Подібно тому, як це було для формул, можна говорити про *область істинності*

$$O(f) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \mid f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = 1\}$$

та *область хибності*

$$\overline{O(f)} = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \mid f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = 0\}$$

булевої функції f від n аргументів.

Найпростішим способом задання булевих функцій є таблиці. При такому заданні зручно виписувати булеві вектори у певному фіксованому порядку. Зазвичай користуються лексикографічним порядком (який збігається з порядком зростання булевих векторів, якщо їх розглядати як записи натуральних чисел у двійковій системі числення).

Незабаром ми побачимо, що кожну булеву функцію можна задати відповідною формулою логіки висловлювань. Однак різних булевих функцій від n аргументів скінченна кількість, а різних формул від цих же аргументів — нескінченно багато. Тому та сама булева функція може задаватися багатьма (взагалі кажучи, нескінченною кількістю) формул. Зрозуміло, що дві формули від тих самих змінних будуть визначати ту саму булеву функцію тоді й лише тоді, коли вони рівносильні.[5]

[5]Уточнення 'від тих самих змінних' важливе. Рівносильні формули формально можуть залежати від різних наборів змінних. Наприклад, формули $x \vee \neg x$ і $y \vee \neg y$ рівносильні, однак формально перша визначає тотожно істинну функцію від змінної x, а друга — від змінної y. Щоб можна було говорити про ту саму булеву функцію, її треба розглядати вже як функцію двох змінних — x та y. Так з'являються неявні (фіктивні) змінні.

Зауваження. Кожну булеву функцію від n аргументів можна розглядати як n-арну операцію на множині $B = \{0, 1\}$ логічних значень. Алгебру, утворену множиною B разом з усіма можливими операціями на ній, називають *алгеброю логіки*.

1.3.2 Повні системи зв'язок

Якщо на множині B визначена деяка операція (наприклад, бінарна операція $*$), то для кожної множини A ця операція природно — поточково — переноситься на функції з A в B:

$$(f * g)(x) := f(x) * g(x) \quad \text{для всіх} \quad x \in A\,.$$

Це дозволяє всі операції, визначені на множині $B = \{0, 1\}$ значень істинності, застосовувати й до булевих функцій. Але на множинах функцій (зокрема, й булевих) є й свої операції, пов'язані саме з функціональною природою елементів цих множин. Найважливішою з таких операцій є *суперпозиція*.

Нехай $f_1(x_1, \ldots, x_n)$, …, $f_m(x_1, \ldots, x_n)$ і $g(y_1, \ldots, y_m)$ — булеві функції (тут x_1, …, x_n — список усіх змінних, від яких залежить хоча б одна із функцій f_1, …, f_m. Тому якісь із цих функцій можуть залежати від частини змінних фіктивно). *Суперпозицією* цих функцій (або *підстановкою* функцій $f_1, \ldots, f_m$ у функцію g) називається функція

$$h(x_1, \ldots, x_n) = g\big(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)\big).$$

Замиканням $[S]$ системи S булевих функцій називається називається сукупність усіх булевих функцій, які можна одержати з S за допомогою суперпозиції.

Система S булевих функцій називається *повною*, якщо її замикання $[S]$ збігається з множиною всіх булевих функцій, тобто якщо будь-яку булеву функцію можна подати у вигляді суперпозиції функцій із S.

Аналогічно система логічних зв'язок називається *повною*, якщо кожну булеву функцію можна задати формулою, записаною за допомогою зв'язок тільки з цієї системи.

Зрозуміло, що кожна система булевих функцій (логічних зв'язок), яка містить повну систему, сама є повною, а кожна система, яка міститься в неповній — сама є неповною.

Теорема 1.4. *Система зв'язок* $\{\vee, \wedge, \neg\}$ *є повною. Іншими словами, кожну булеву функцію* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *можна задати формулою* $F(x_1, \ldots, x_n)$, *записаною за допомогою лише зв'язок* $\{\vee, \wedge, \neg\}$. *Зокрема, для кожної формули логіки висловлювань існує рівносильна їй формула, записана лише за допомогою зв'язок* $\{\vee, \wedge, \neg\}$.

Доведення. Застосуємо індукцію за кількістю n змінних. Безпосередньо перевіряється, що кожна булева функція $f(x)$ від змінної x задається однією з формул

$$x, \quad \neg x, \quad x \vee \neg x, \quad x \wedge \neg x\,.$$

Припустимо тепер, що для функцій від n змінних теорема вже доведена. Для функції $f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ розглянемо функції $g(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n, 0)$ і $h(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n, 1)$. За припущенням індукції їх можна задати формулами $G(x_1, \ldots, x_n)$ і $H(x_1, \ldots, x_n)$ відповідно. Тоді $f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ задається формулою

$$F(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \big(G(x_1, \ldots, x_n) \wedge \neg x_{n+1}\big) \vee \big(H(x_1, \ldots, x_n) \wedge x_{n+1}\big)\,.$$

Справді, для довільного набору $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ булевих значень

$$F(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, 0) = \big(G(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \wedge \neg 0\big) \vee \big(H(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \wedge 0\big) \equiv$$
$$\equiv \big(G(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \wedge 1\big) \vee 0 \equiv G(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \equiv g(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = f(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, 0).$$

Аналогічно доводиться, що $F(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, 1) \equiv f(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, 1)$.

Нарешті, нехай A — довільна формула логіки висловлювань, а f — булева функція, яку вона задає. За доведеним вище f можна задати формулою F, записаною лише за допомогою зв'язок $\{\vee, \wedge, \neg\}$. Тоді $A \equiv F$. $\square$

Зв'язки $\{\vee, \wedge, \neg\}$ називаються *булевими.* Дуже часто, особливо в застосуваннях алгебри логіки в техніці, користуються заданням булевих функцій лише за допомогою цих зв'язок (повнота системи булевих зв'язок дозволяє це робити).[6] Взагалі замість класичного набору

$$\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \oplus\}$$

можна обмежитися будь-якою повною системою зв'язок (навіть з однієї зв'язки), і часто це зручно. Однак формули при цьому стають значно громіздкішими. Та й змістовно класичні логічні дії, особливо імплікація, відіграють важливу роль.

[6]Це викликано тим, що зв'язки $\{\vee, \wedge, \neg\}$ природно реалізуються "в залізі" за допомогою паралельного та послідовного з'єднання відповідних схем та логічних інверторів.

Щоб довести повноту якоїсь системи зв'язок, досить показати, що кожна зв'язка із системи, про яку вже відомо, що вона повна, виражається через зв'язки з даної системи.

Твердження 1.5. *Кожна із систем зв'язок:* $\{\vee, \neg\}$, $\{\wedge, \neg\}$, $\{\neg, \to\}$, $\{\to, \oplus\}$, $\{0, \to\}$ *є повною.*

Доведення. Із теореми 1.4 і законів де Моргана випливає повнота систем $\{\vee, \neg\}$ і $\{\wedge, \neg\}$. Далі із рівносильності $x \vee y \equiv \neg x \to y$ випливає повнота системи $\{\neg, \to\}$. У свою чергу, з рівносильності $\neg x \equiv x \to (x \oplus x)$ випливає повнота системи $\{\to, \oplus\}$. Нарешті, з рівносильності $\neg x \equiv x \to (x \to 0)$ випливає повнота системи $\{0, \to\}$. □

Зауваження Системи $\{\neg, \to\}$ і $\{0, \to\}$ часто використовуються для побудови різних варіантів числення висловлювань.

Твердження 1.6. *Система зв'язок* $\{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$ *є неповною.*

Доведення. Якщо формула $F(x_1, \ldots, x_n)$ побудована за допомогою зв'язок із $\{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$, то $F(1, \ldots, 1) = 1$. Тому задати такою формулою функцію, яка на наборі $(1, \ldots, 1)$ набуває значення 0, не можна. □

Теорема 1.5. *Кожна із систем* $\{|\}$ (штрих Шефера) *і* $\{\uparrow\}$ (стрілка Пірса) *є повною. Інших повних систем, які б складалися з однієї бінарної зв'язки, не існує.*

Доведення. Повнота штриху Шефера:

$$\neg a \equiv a \mid a\,, \qquad a \wedge b \equiv \neg(a \mid b) \equiv (a \mid b) \mid (a \mid b)\,.$$

Повнота стрілки Пірса:

$$\neg a \equiv a \uparrow a\,, \qquad a \vee b \equiv \neg(a \uparrow b) \equiv (a \uparrow b) \mid (a \uparrow b)\,.$$

Якщо бінарна зв'язка $x * y$ явно не залежить від змінних, то вона набуває або лише значення 1, або лише значення 0. Якщо ж вона явно залежить лише від однієї змінної, то вона або дорівнює цій змінній, або є її запереченням (і тоді не можна отримати, наприклад, функцію, яка тотожно дорівнює 1). Отже, якщо система $\{*\}$ повна, то формула $x * y$ явно залежить від обох змінних. Крім того, із міркувань, подібних до тих, що використовувалися при доведенні твердження 1.6, випливає, що мають виконуватися рівності $1 * 1 = 0$ і $0 * 0 = 1$. Із таблиці для бінарних логічних операцій видно, що ці умови задовольняють лише штрих Шефера і стрілка Пірса. □

1.3.3 Нормальні форми

Раніше вже говорилося, що та сама булева функція може задаватися багатьма різними формулами логіки висловлювань. Тому природно виникає питання про вибір серед цих формул у певному сенсі найпростіших, свого роду "канонічних представників".

Далі (і не тільки при обговоренні булевих функцій) буде корисним наступне позначення: для довільних $\alpha \in \{0, 1\}$ та пропозиційної змінної a

$$a^\alpha := \begin{cases} a, & \text{якщо } \alpha = 1; \\ \neg a, & \text{якщо } \alpha = 0. \end{cases}$$

Вираз a^α називається *літералом* змінної a.

Кон'юнктивним членом (або просто *кон'юнктом*) від змінних a_1, a_2, $\ldots$, a_n називається формула вигляду

$$a_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \wedge a_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \wedge \cdots \wedge a_{i_k}^{\alpha_{i_k}},$$

в якій зустрічаються змінні лише зі списку $a_1, a_2, \ldots, a_n$, причому жодна змінна не зустрічається двічі.

Аналогічно визначається *диз'юнктивний член* (або просто *диз'юнкт*) $a_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \vee a_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \vee \cdots \vee a_{i_k}^{\alpha_{i_k}}$.

Кон'юнктивний (диз'юнктивний) член від змінних a_1, a_2, $\ldots$, a_n називається *елементарним*, якщо він містить усі змінні із цього списку.

Зрозуміло, що два кон'юнктивні (диз'юнктивні) члени будуть рівносильними тоді й лише тоді, коли вони містять однакові літерали і розрізняються лише порядком цих літералів.

Кажуть, що формула логіки висловлювань має *нормальну форму* (коротко: НФ), якщо вона містить лише булеві зв'язки, причому знак заперечення $\neg$ зустрічається лише біля змінних. Із доведення теореми 1.4 випливає, що для кожної формули існує рівносильна їй НФ.

Частковими випадками нормальної форми є так звані *диз'юнктивна нормальна форма* (коротко: ДНФ), яка є диз'юнкцією кон'юнктивних членів, причому серед цих членів немає рівносильних, і *кон'юнктивна нормальна форма* (коротко: КНФ), яка є кон'юнкцією диз'юнктивних членів, причому серед цих членів немає рівносильних.

Диз'юнктивна (відповідно кон'юнктивна) нормальна форма називається *досконалою*, якщо всі її кон'юнктивні (відповідно диз'юнктивні) члени є елементарними. Коротко писатимемо ДДНФ (відповідно ДКНФ).