Класи суміжності

Євгенія Кочубінська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

5 жовтня 2022

Класи суміжності

G — група, $H < G$.

Для довільного $g \in G$ множина

$$gH = \{gh \mid h \in H\}$$

називається *лівим класом суміжності* групи G за підгрупою H.

Множина

$$Hg = \{hg \mid h \in H\}$$

правим класом суміжності групи G за підгрупою H.

Твердження

Довільні два ліві (праві) класи суміжності або не перетинаються, або збігаються.

Доведення.

Нехай g_1H, g_2H — два ліві класи суміжності.
Припустимо, що $g_1H \cap g_2H \neq \varnothing$. Нехай $a \in g_1H \cap g_2H$. Тоді існують $h_1, h_2 \in H$:

$$a = g_1h_1 = g_2h_2.$$

Тоді $\forall\ g_2h \in g_2H$:

$$g_2h = g_1h_1h_2^{-1}h \in g_1H \quad \Rightarrow \quad g_2H \subset g_1H.$$

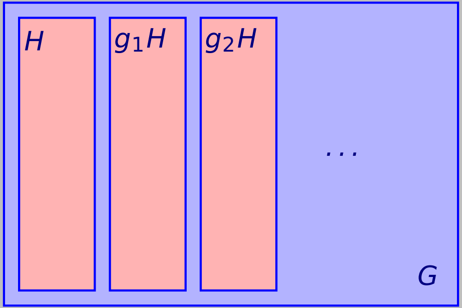
Аналогічно доводиться $g_1H \subset g_2H$. Отже, $g_1H = g_2H$. □

Ліві (праві) класи суміжності утворюють *розбиття* групи G, тобто

$$G = H \sqcup g_1 H \sqcup g_2 H \sqcup \ldots (\text{ для лівих }).$$

Позначається

$$G = H + g_1 H + g_2 H + \ldots$$



Аналогічно для правих класів.

Твердження

Нехай $H < G$. Тоді

1. $aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$;
2. $Ha = Hb \Leftrightarrow ba^{-1} \in H \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$.

Доведення.

$(\Rightarrow)$ $aH = bH \Rightarrow \exists h \in H : b = ah \Rightarrow a^{-1}b \in H.$

$(\Leftarrow)$ $a^{-1}b \in H : \exists h \in H : h = a^{-1}b$.
Тоді $b = ah \;\Rightarrow aH \cap bH \neq \varnothing$, бо $b \in aH \cap bH$. Отже, $aH = bH$. $\square$

Приклади

1. $G = \mathcal{S}_3$, $H = \{\varepsilon, (12)\}$.
   Ліві класи суміжності: $\varepsilon H = H$, $(13)H = \{(13), (132)\}$, $(23)H = \{(23), (123)\}$.
   Праві класи суміжності: $H = H\varepsilon$, $H(13) = \{(13), (123)\}$, $H(23) = \{(23), (132)\}$.
2. $G = \mathcal{S}_3$, $H = \mathcal{A}_3$.
   Ліві класи суміжності: H, $(12)H = \{(12), (13), (23))\}$.
   Праві класи суміжності: H, $H(12) = \{(12), (13), (23))\}$.
3. $G = \mathbb{Z}$, $H = n\mathbb{Z}$.
   Ліві $=$ праві класи суміжності: $a + n\mathbb{Z} = b + n\mathbb{Z} \Leftrightarrow a - b \in n\mathbb{Z}$:
   $$n\mathbb{Z}, 1 + n\mathbb{Z}, \dots, (n-1) + n\mathbb{Z}.$$
4. $G = GL_n(\mathbb{R})$, $H = SL_n(\mathbb{R})$.
   Ліві класи суміжності: $AH = BH \Rightarrow A^{-1}B \in H \Leftrightarrow \det(A^{-1}B) = 1 \Leftrightarrow \det A = \det B$.
   Праві аналогічно.

Твердження

Всі класи суміжності групи G за підгрупою H рівнопотужні.

Доведення.

Відображення

$$H \to gH : \quad h \mapsto gh$$

є бієкцією.

Отже, $|H| = |gH| \ \forall g \in H$. $\square$

Твердження

Відображення

$$gH \mapsto Hg^{-1}$$

є бієкцією між множинами правих та лівих класів суміжності.

Доведення.

Коректність. $g_1H = g_2H \Rightarrow g_1^{-1}g_2 \in H \Rightarrow g_1^{-1}(g_2^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow Hg_1^{-1} = Hg_2^{-1}$.
Ін'єктивність. $g_1H \neq g_2H \Rightarrow g_1^{-1}g_2 = g_1^{-1}(g_2^{-1})^{-1} \notin H \Rightarrow Hg_1^{-1} \neq Hg_2^{-1}$.
Сюр'єктивність. g^{-1} пробігає всі елементи $G \Rightarrow$ довільний клас Hg є образом класу $g^{-1}H$. □

Індекс підгрупи

Означення

Кількість правих (або лівих) класів суміжності групи G за підгрупою H називається *індексом* підгрупи H у групі G.

Позначаться $|G : H|$.

1. $|\mathcal{S}_3 : \mathcal{A}_3| = 2$;
2. $|\mathbb{Z} : n\mathbb{Z}| = n$;
3. $|GL_n(\mathbb{R}) : SL_n(\mathbb{R})| = \infty$.