ОРІЄНТОВАНІ КРИВІ ТА ПОВЕРХНІ

ОЗНАЧЕННЯ 1. Нехай $\vec{u} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, причому $\vec{u}$ – неперервно диференційовна, крім скінченної кількості точок і $\exists t \in [a, b] \ : \ \vec{u}'(t) \neq \vec{0}$. Тоді множину $\Gamma = \vec{u}([a, b])$ називають **кусково-гладкою** кривою в просторі $\mathbb{R}^3$.

Якщо $\vec{u} \in C^1([a, b])$, криву називають **гладкою**.

Якщо у кривої задано напрямок пробігання (зростання чи спадання t), криву називають **орієнтованою**.

Якщо початок і кінець кривої співпадають, її називають **замкненою**.

Зауваження. Якщо значення відображення $\vec{u}$ лежать в $\mathbb{R}^2$, то $\Gamma = \vec{u}([a, b])$ називають кривою в площині $\mathbb{R}^2$.

ПРИКЛАДИ. В усіх прикладах криву вважаємо орієнтованою так, що при її пробіганні t зростає.

1. $\vec{u}(t) = (t, t^2), \ t \in [0, 1]$, – орієнтована крива в площині, а саме парабола, що пробігається від початку координат до точки $(1, 1)$. $\vec{u}(t) = (2t, 4t^2), \ t \in [0, 1/2]$, – та сама крива.

2. $\vec{u}(t) = (1-t, (1-t)^2), \ t \in [0, 1]$, – та сама парабола, що пробігається від точки $(1, 1)$ до початку координат.

3. $\vec{u}(t) = (\cos t, \sin t, t), \ t \in [0, 4\pi]$ – гвинтова лінія в просторі, що пробігається від точки $(1, 0, 0)$ до точки $(1, 0, 4\pi)$.

4. $\vec{u}(t) = (\cos t, \sin t), \ t \in [0, 2\pi]$ – коло, що пробігається від точки $(1, 0)$ до тої ж точки проти годинникової стрілки. Ця крива замкнена.

5. $\vec{u}(t) = (1, 2, 5), \ t \in [0, 1]$, – не крива, бо $\vec{u}'(t) = 0, \ t \in [a, b]$. Геометрично це точка.

Відзначимо також формулу для дотичного вектора в кожній точці $\vec{u}(t_0)$ кривої. Якщо надати параметру приріст $\triangle t$, то вектор, направлений вздовж січної, буде

$$\triangle\vec{u}(t_0) = (u_1(t_0+\triangle t) - u_1(t_0), u_2(t_0+\triangle t) - u_2(t_0), u_3(t_0+\triangle t) - u_3(t_0)).$$

Границя

$$\lim_{\triangle t\to 0}\frac{\triangle\vec{u}(t_0)}{\triangle t} = (u_1'(t_0), u_2'(t_0), u_3'(t_0)).$$

Пронормувавши цей вектор, отримаємо формулу для вектора одиничної довжини, направленого вздовж дотичної в точці t_0 :

$$\vec{\tau}(t_0) = \frac{1}{\sqrt{(u_1'(t_0))^2 + (u_2'(t_0))^2 + (u_3'(t_0))^2}}(u_1'(t_0), u_2'(t_0), u_3'(t_0)).$$

Означення 2. Нехай $T \subset \mathbb{R}^2$ – компактна множина, межею якої є замкнена орієнтована крива ∂T, $\vec{u} \in C^1(T, \mathbb{R}^3)$, причому $\exists (t,s) \in T \ : \ rank \vec{u}'(t,s) = 2$. Тоді множину $S = \vec{u}(T)$ з заданим напрямком орієнтації ∂T називають орієнтованою поверхнею в просторі $\mathbb{R}^3$. Якщо орієнтація задана так, що ∂T пробігається проти годинникової стрілки (так, що T залишається зліва), то орієнтацію називають додатною, інакше – від'ємною.

Орієнтацію поверхні зручно уявляти собі так: при пробіганні в заданому напрямку кривої ∂T пробігається границя поверхні S. Подивимося у просторі на поверхню з такої точки, що це пробігання будемо бачити, як рух проти годинникової стрілки. Тоді вважатимемо, що обрано той бік поверхні, який ми бачимо.

Отже, задати орієнтацію поверхні можна, задавши один з двох її боків.

Поверхню, що обмежує деяку компактну множину (тіло) в просторі, будемо називати замкненою. У замкненої поверхні точки її межі мають більше одного прообразу у множині T, тому орієнтацію такої поверхні визначають, розбивши її на кілька незамкнених частин.

Приклади. 1. $\vec{u}(t,s) = (t, s, t+s)$, $(t,s) \in [0,1]^2$, границя квадрата пробігається проти годинникової стрілки. S – орієнтована поверхня, а саме частина площини $x_3 = x_1 + x_2$, причому потрібний її бік видно з додатного напрямку осі Ox_3.

2. $\vec{u}(t,s) = (\cos t \cos s, \sin t \cos s, \sin s)$, $t \in [0, 2\pi]$, $s \in [-\pi/2, \pi/2]$. Це сфера радіуса 1 з центром в нулі. Побачити орієнтацію всієї поверхні важко, бо вона замкнена. Доцільно розглянути її чверть при $(t,s) \in [0,\pi] \times [0, \pi/2]$. Тоді побачимо зовнішній бік сфери. Для інших трьох чвертей орієнтація буде та сама.

3. $\vec{u}(t,s) = (t+s, 2t+2s, 1-t-s)$, $(t,s) \in [0,1]^2$, – не поверхня, бо $\vec{u}'(t,s) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $t \in [0,1]^2$, і $rank \vec{u}'(t,s) = 1$, $(t,s) \in [0,1]^2$. Геометрично це пряма $x_2 = 2x_1 = 2 - 2x_3$.

Розглянемо тепер деяку точку поверхні, що задається параметрами (t_0, s_0). Частина поверхні при $t = t_0$ – це крива, що має в точці s_0 дотичний вектор

$$\vec{a} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial s}(t_0, s_0), \frac{\partial u_2}{\partial s}(t_0, s_0), \frac{\partial u_3}{\partial s}(t_0, s_0) \right).$$

Аналогічно при $s = s_0$ отримаємо криву з дотичним вектором

$$\vec{b} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}(t_0, s_0), \frac{\partial u_2}{\partial t}(t_0, s_0), \frac{\partial u_3}{\partial t}(t_0, s_0) \right).$$

Тоді вектор нормалі до поверхні буде ортогональним обом цим дотичним векторам, тобто коллінеарним їх декартовому добутку:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\frac{\partial(u_2, u_3)}{\partial(t, s)}(t_0, s_0), \frac{\partial(u_3, u_1)}{\partial(t, s)}(t_0, s_0), \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(t, s)}(t_0, s_0) \right) = (A, B, C).$$

Відповідний нормований вектор $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(A, B, C)$ – одиничний вектор нормалі до поверхні в точці (t_0, s_0).

Враховуючи орієнтацію векторного добутку, з кінця вектора $\vec{n}$ буде видно той бік поверхні, що має додатну орієнтацію. Це дає ще один спосіб визначення орієнтації поверхні.

ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ І РОДУ

Означення 1. Нехай $S = \vec{u}(T)$ – поверхня, $f \in C(S)$. Поверхневим інтегралом першого роду від функції f по поверхні S називають число

$$\int\limits_S f(x_1, x_2, x_3)dS = \int\limits_T f(\vec{u}(t,s))\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}dtds,$$

де

$$A = \frac{\partial(u_2, u_3)}{\partial(t,s)}, B = \frac{\partial(u_3, u_1)}{\partial(t,s)}, C = \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(t,s)},$$

– компоненти вектора нормалі до поверхні в точці $\vec{u}(t,s)$.

Зауваження. Значення інтеграла не залежить від орієнтації поверхні.

Фізична інтерпретація. Нехай є тканина, форма якої описується поверхнею $S = \vec{u}(T)$, а поверхнева щільність (відношення маси до площі) тканини описується функцією $\rho(x_1, x_2, x_3),\ (x_1, x_2, x_3) \in S$. Обчислимо масу тканини.

Розглянемо розбиття множини $T_{(n)}$ на квадрати $Q_{ij} = [t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}],\ i = \overline{0, n-1}, j = \overline{1, k-1}$. Образом кожного квадрата буде криволінійний чотирикутник. При великих n його можна вважати наближено рівним паралелограму, побудованому на векторах

$$\vec{a}_{ij} = \vec{u}(t_{i+1}, s_j) - \vec{u}(t_i, s_j),\ \vec{b}_{ij} = \vec{u}(t_i, s_{j+1}) - \vec{u}(t_i, s_j).$$

Площа цього паралелограма $S_{ij} = |[\vec{a}_{ij}, \vec{b}_{ij}]|$. Поверхневу щільність на цьому паралелограмі наближено можна вважати рівною $\rho(\vec{u}(t_i, s_j))$. Тоді шукана маса наближено рівна

$$m \approx \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} \rho(\vec{u}(t_i, s_j)) \frac{S_{ij}}{(t_{i+1} - t_i)(s_{j+1} - s_j)} m(Q_{ij}).$$

Переходячи до границі при $n \to \infty$, отримаємо

$$m = \int_T \rho(u_1(t, s), u_2(t, s), u_3(t, s)) |[\vec{u}_t'(t, s), \vec{u}_s'(t, s)]| dt ds.$$

Крім того, вектор нормалі

$$[\vec{u}_t'(t, s), \vec{u}_s'(t, s)] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} & \frac{\partial u_2}{\partial t} & \frac{\partial u_3}{\partial t} \\ \frac{\partial u_1}{\partial s} & \frac{\partial u_2}{\partial s} & \frac{\partial u_3}{\partial s} \end{vmatrix} = (A, B, C),$$

звідки випливає, що

$$m = \int\limits_S \rho(x_1, x_2, x_3) dS$$

Якщо покласти $\rho = 1$, отримаємо формулу для площі поверхні:

$$S = \int\limits_S dS.$$

Зауваження. Справджується формула

$$\int\limits_S f(x_1, x_2, x_3)dS = \int\limits_T f(\vec{u}(t,s))\sqrt{EG - F^2}dtds,$$

де $E = ||\vec{u}'_t||, G = ||\vec{u}'_s||, F = (\vec{u}'_t, \vec{u}'_s)$.

Вправа. Довести цю формулу.

ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ II РОДУ

Означення 1. Нехай $S = \vec{u}(T)$ – орієнтована поверхня, $f_1, f_2, f_3 \in C(S)$. Вираз

$$\omega = f_1(x_1, x_2, x_3)dx_2 \wedge dx_3 + f_2(x_1, x_2, x_3)dx_3 \wedge dx_1 + f_3(x_1, x_2, x_3)dx_1 \wedge dx_2$$

називають диференціальною формою другого порядку на S.

Означення 2. Поверхневим інтегралом другого роду від форми ω другого порядку по поверхні S називають число

$$\int\limits_S \omega = \pm \int\limits_T \left(f_1(\vec{u}(t,s)) \frac{\partial(u_2, u_3)}{\partial(t,s)}(t,s) + f_2(\vec{u}(t,s)) \frac{\partial(u_3, u_1)}{\partial(t,s)}(t,s) + \right.$$

$$\left. + f_3(\vec{u}(t,s)) \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(t,s)}(t,s) \right) dtds,$$

де беремо $+$, якщо поверхня додатно орієнтована, і $-$, якщо поверхня від'ємно орієнтована.

Поверхня орієнтована додатньо, якщо з кінця вектора нормалі (A, B, C), проведеного з відповідної точки поверхні, видно бік поверхні, що розглядається в задачі.

‘ Фізична інтерпретація. Нехай відбувається рух рідини і в кожній точці в заданий момент часу швидкість рідини рівна

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = (v_1(x_1, x_2, x_3), v_2(x_1, x_2, x_3), v_3(x_1, x_2, x_3)).$$

Знайдемо потік рідини крізь поверхню S, тобто відношення обсягу рідини, що протікає крізь поверхню до часу.

Розглянемо розбиття поверхні на частини $\vec{u}(Q)$, $Q \in \pi^{(n)}$, $Q = [t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$. Площа такої частини наближено дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах

$$\vec{u}(t_{i+1}, s_j) - \vec{u}(t_i, s_j), \vec{u}(t_i, s_{j+1}) - \vec{u}(t_i, s_j),$$

тобто

$$S_{ij} = |[\vec{u}(t_{i+1}, s_j) - \vec{u}(t_i, s_j), \vec{u}(t_i, s_{j+1}) - \vec{u}(t_i, s_j)]|.$$

Вектор нормалі в одній з точок цієї частинки рівний

$$\vec{n}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}(A, B, C),$$

як було показано раніше. Звідси потік через частину поверхні рівний

$$S_{ij}(\vec{v}_{ij}, \vec{n}_{ij}).$$

Сума таких потоків утворює інтегральну суму

$$\sum_{i,j} \frac{S_{ij}}{m(Q)}(\vec{v}_{ij}, \vec{n}_{ij}) m(Q),$$

яка при $n \to \infty$ прямує до інтеграла

$$\int_T (\vec{v}, (A, B, C)) dt ds,$$

де враховано, що

$$S_{ij}/m(Q) \to |[\vec{u}'_t, \vec{u}'_s]| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},\ n \to \infty.$$

Якщо при цьому вектор нормалі обирається так, що з його кінця видно сторону поверхні, крізь яку витікає рідина, потік буде додатний, інакше від’ємний.

Отже, для заданої сторони поверхні потік, що витікає з неї, рівний поверхневому інтегралу II роду:

$$\Pi = \int\limits_T \left(f_1(\vec{u}(t,s)) \frac{\partial(u_2,u_3)}{\partial(t,s)}(t,s) + f_2(\vec{u}(t,s)) \frac{\partial(u_3,u_1)}{\partial(t,s)}(t,s) + \right.$$

$$\left. + f_3(\vec{u}(t,s)) \frac{\partial(u_1,u_2)}{\partial(t,s)}(t,s) \right) dt ds = \int\limits_S \omega.$$

Встановимо тепер зв'язок між поверхневими і криволінійними та кратними інтегралами.

Теорема 1. **(Про формулу Остроградського-Гаусса).** Нехай $M \subset \mathbb{R}^3$ – об'єднання множин, кожна з яких циліндрична вздовж обох осей, причому кришки є неперервно диференційовними, а основи - компактними та вимірними. Нехай межею цієї множини є замкнена поверхня S. Нехай також $P, Q, R \in C^1(M)$. Тоді справджується формула, де у поверхні S розглядається зовнішній бік:

$$\int\limits_S P(x_1,x_2,x_3)dx_2 \wedge dx_3 + Q(x_1,x_2,x_3)dx_3 \wedge dx_1 + R(x_1,x_2,x_3)dx_1 \wedge dx_2 =$$

$$= \int\limits_M \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3.$$

Доведення. Формулу можна доводити для кожної з множин об'єднання, а потім скласти результати.

Нехай

$$M = \{(x_1,x_2,x_3) \mid g(x_1,x_2) \le x_3 \le h(x_1,x_2),\ (x_1,x_2) \in bM\}.$$

Тоді

$$\int\limits_S R(x_1,x_2,x_3)dx_1 \wedge dx_2 =$$

$$= -\int\limits_{bM} R(x_1,x_2,h(x_1,x_2))dx_1dx_2 + \int\limits_{bM} R(x_1,x_2,g(x_1,x_2))dx_1dx_2 =$$

$$= \int\limits_{bM} \left(\int\limits_{g(x_1,x_2)}^{h(x_1,x_2)} \frac{\partial R}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3)dx_3 \right) dx_1dx_2 =$$

$$= \int\limits_M \frac{\partial R}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2dx_3.$$

Аналогічно перетворюється інтеграл від функцій P, Q.

Наслідок. Для тіла M, обмеженого замкненою поверхнею S, у якої розглядається зовнішній бік, справджуються формули для об'єму:

$$V(M) = \int\limits_S x_3 dx_1 \wedge dx_2 = \int\limits_S x_2 dx_3 \wedge dx_1 = \int\limits_S x_1 dx_2 \wedge dx_3 =$$

$$= \frac{1}{3} \int\limits_S x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

Доведення. Покласти в формулі Остроградського-Гаусса $Q = x_2, P = R = 0$, або $Q = R = 0, P = x_1$, або $R = x_3, P = Q = 0$, або $P = \frac{x_1}{3},\ Q = \frac{x_2}{3},\ R = \frac{x_3}{3}$.

Теорема 2. **(Про формулу Стокса).** Нехай $T \subset \mathbb{R}^2$ – множина, що задовольняє умови формули Гріна з кусково-гладкою границею $\partial T = \vec{v}([a,b])$. Нехай $\vec{u} \in C^2(T)$, $S = \vec{u}(T) \subset \mathbb{R}^3$ – орієнтована гладка поверхня, межею якої є замкнена крива $\Gamma = \vec{u}(\partial T)$. Нехай також $P, Q, R \in C^1(S)$. Тоді справджується формула

$$\int_\Gamma P(x_1,x_2,x_3)dx_1 + Q(x_1,x_2,x_3)dx_2 + R(x_1,x_2,x_3)dx_3 =$$

$$\int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial R}{\partial x_2} - \frac{\partial Q}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial P}{\partial x_3} - \frac{\partial R}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1.$$

Доведення. Маємо

$$\int_\Gamma P(x_1,x_2,x_3)dx_1 =$$

$$= \int_a^b P(u_1(v_1(t),v_2(t)), u_2(v_1(t),v_2(t)), u_3(v_1(t),v_2(t)))\cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1}(v_1(t),v_2(t))v_1'(t) + \frac{\partial u_1}{\partial y_2}(v_1(t),v_2(t))v_2'(t)\right) dt =$$

$$= \int_{\partial T} \left(P(\vec{u}(y_1,y_2))\frac{\partial u_1}{\partial y_1}(y_1,y_2)dy_1 + P(\vec{u}(y_1,y_2))\frac{\partial u_1}{\partial y_2}(y_1,y_2)dy_2\right) =$$

$$= \int_T \left(\frac{\partial(P(\vec{u}(y_1,y_2)))}{\partial y_1}\frac{\partial u_1}{\partial y_2} + P(\vec{u}(y_1,y_2))\frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1 \partial y_2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial(P(\vec{u}(y_1,y_2)))}{\partial y_2}\frac{\partial u_1}{\partial y_1} - P(\vec{u}(y_1,y_2))\frac{\partial^2 u_1}{\partial y_2 \partial y_1}\right) dy_1 dy_2 =$$

$$= \int_T \left(\frac{\partial(P(\vec{u}(y_1,y_2)))}{\partial y_1}\frac{\partial u_1}{\partial y_2} - \frac{\partial(P(\vec{u}(y_1,y_2)))}{\partial y_2}\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\right) dy_1 dy_2 =$$

$$= \int\limits_T \left(\left(\frac{\partial P}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \frac{\partial P}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial y_1} + \frac{\partial P}{\partial x_3}\frac{\partial u_3}{\partial y_1} \right) \frac{\partial u_1}{\partial y_2} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial P}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial y_2} + \frac{\partial P}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial y_2} + \frac{\partial P}{\partial x_3}\frac{\partial u_3}{\partial y_2} \right) \frac{\partial u_1}{\partial y_1} \right) dy_1 dy_2 =$$

$$= -\int\limits_T \left(\frac{\partial P}{\partial x_2}\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(y_1, y_2)} + \frac{\partial P}{\partial x_3}\frac{\partial(u_3, u_1)}{\partial(y_1, y_2)} \right) dy_1 dy_2 =$$

$$= \int\limits_S \left(-\frac{\partial P}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial P}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \right),$$

де використана формула Гріна. Інші доданки перетворюються аналогічно.

Встановимо тепер зв'язок між інтегралами I та II роду.

1. Нехай $\Gamma = \vec{u}([a,b])$ – додатно орієнтована крива, $f_1, f_2, f_3 \in C(\Gamma)$, $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$, $\vec{\tau}$ – дотичний вектор одиничної довжини до Γ. Тоді

$$\int\limits_{\Gamma} (\vec{f}, \vec{\tau}) dl = \int\limits_{\Gamma} f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3.$$

Ця рівність випливає з формули для $\vec{\tau}$.

2. Нехай $S = \vec{u}(T)$ – додатно орієнтована поверхня, $f_1, f_2, f_3 \in C(S)$, $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$, $\vec{n}$ – вектор нормалі одиничної довжини до S. Тоді

$$\int\limits_{S} (\vec{f}, \vec{n}) dS = \int\limits_{S} f_1 dx_2 \wedge dx_3 + f_2 dx_3 \wedge dx_1 + f_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

Ця рівність випливає з формули для $\vec{n}$.