Центр. Централізатор. Нормалізатор

Євгенія Кочубінська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

2 листопада 2022

FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS

Центр

Означення

Центром групи G називається множина

$$Z(G) = \{a \in G \,|\, ag = ga \ \forall g \in G\}.$$

Елементи центру називають *центральними* елементами групи.

Твердження

Група G абелевою $\Leftrightarrow Z(G) = G$.

Центр

Твердження

Елемент $a \in G$ є центральним, тоді і лише тоді, коли $|C_G(a)| = 1$.

Доведення.

$a \in Z(G) \Leftrightarrow ag = ga \ \forall g \in G \Leftrightarrow g^{-1}ag = a \ \forall g \in G \Leftrightarrow C_G(a) = \{a\} \ \Leftrightarrow |C_G(a)| = 1.$ $\square$

Наслідок

Центр є об'єднанням одноелементних класів спряженості.

Приклад

1. $Z(\mathcal{S}_3) = \{\varepsilon\}$.
2. $Z(Q_8) = \{1, -1\}$.

Центр

Теорема

Центр групи є її абелевою нормальною підгрупою.

Доведення.

Якщо $a, b \in Z(G)$, то для всіх $g \in G$:

$$\left.\begin{aligned} (ab)g = a(bg) = a(gb) = (ag)b = (ga)b = g(ab) \quad &\Rightarrow \quad ab \in Z(G), \\ ag = ga \Rightarrow ga^{-1} = a^{-1}g \quad &\Rightarrow \quad a^{-1} \in Z(G), \end{aligned}\right\} \Rightarrow Z(G) < G.$$

$Z(G)$ — об’єднання класів спряженості $\quad \Rightarrow \quad Z(G) \lhd G.$ $\square$

Теорема

Якщо G — неабелева група, то $G/Z(G)$ — не циклічна.

Доведення.

Припустимо, що $G/Z(G)$ — циклічна: $G/Z(G) = \langle gZ(G) \rangle$.
Довільний елемент з $G/Z(G)$ має вигляд $g^k Z(G)$, тому довільний елемент з G можна записати так: $g^k h$, де $h \in Z(G)$.
Для довільних $a = g^k h_1$, $b = g^l h_2$ з G:

$$ab = g^k h_1 g^l h_2 = g^k g^l h_1 h_2 = g^l g^k h_2 h_1 = g^l h_2 g^k h_1 = ba.$$

Отже, G — абелева ϟϟϟ $\square$

Централізатор

Нехай A — довільна підмножина групи G.

Централізатором множини A у групі G називається множина

$$Z_G(A) = Z(A) = \{g \in G \,|\, ag = ga \ \forall a \in A\} .$$

Зокрема, централізатор групи — це її центр.

Нормалізатор

Нехай A — довільна підмножина групи G.

Нормалізатором множини A у групі G називається множина

$$N_G(A) = N(A) = \left\{ g \in G \,|\, g^{-1}Ag = A \right\}.$$

Якщо $A = \{a\}$, то $Z(A) = N(A)$, бо $ga = ag \Leftrightarrow g^{-1}ag = a$.

Приклади

- $g \in Z_G(A)$: $ga = ag$ для всіх $a \in A$;
- $g \in N_G(A)$: $g^{-1}ag \in A$ для всіх $a \in A$, тобто існує $b \in A$: $g^{-1}ag = b \Leftrightarrow ag = gb$.

Приклад

$G = \mathcal{S}_3$, $A = \mathcal{A}_3$. Тоді

$$Z_G(\mathcal{A}_3) = \mathcal{A}_3,$$
$$N_G(\mathcal{A}_3) = \mathcal{S}_3.$$

Вправа

Доведіть, що для довільної підмножини A групи G:

1. $Z(A) < G$;
2. $N(A) < G$;
3. $Z(A) \triangleleft N(A)$.

Теорема

Для довільного елемента a групи G

$$|C_G(a)| = |G : N_G(a)|.$$

Доведення.

Показемо, що існує взаємнооднозначна відповідність між елементами класу спряженості $C_G(a)$ та правими класами суміжності за нормалізатором $N_G(a)$.
Кількість таких класів — $|G : N_G(a)|$.
Для $g, h \in G$:

$$g^{-1}ag = h^{-1}ah \Leftrightarrow hg^{-1}agh^{-1} = a \Leftrightarrow gh^{-1} \in N_G(a) \Leftrightarrow g \in N_G(a)h.$$

□

Наслідок

Якщо G — скінченна група, то $|C_G(x)|$ ділить $|G|$.

Формула класів

Теорема

Нехай $C_1, \ldots, C_k$ — всі неодноелементні класи спряженості скінченної групи G. Виберемо у кожному класі C_i представник a_i. Тоді
$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{k} |G : N_G(a_i)|.$$

Формула класів

Доведення.

Класи спряженості утворюють розбиття групи G, $Z(G)$ — об'єднання одноелементних класів спряженості. Тому

$$G = Z(G) \bigsqcup \left(\bigsqcup_{i=1}^{k} C(a_i) \right).$$

Звідси

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{k} |C(a_i)| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{k} |G : N_G(a_i)|. \qquad \square$$

Задача

Знайти ймовірність того, що два навмання обраних елементи скінченної групи комутують.

Розв'язання.

$|G| = n$, $Pr(G)$ — ймовірність того, що два навмання обраних елементи комутують.
$K = \{(x, y) \mid xy = yx\} \Rightarrow Pr(G) = \frac{|K|}{n^2}$.
$(x, y) \in K \Leftrightarrow x \in Z_G(y) \Rightarrow$

$$|K| = \sum_{x \in G} |Z_G(x)|.$$

Якщо x та y належать одному класу спряженості, то $|Z_G(x)| = |Z_G(y)|$. Якщо $C(x) = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$, то

$$|Z_G(x_1)| + |Z_G(x_2)| + \cdots + |Z_G(x_t)| = t \cdot |Z_G(x)| = |G : Z_G(x)| \cdot |Z_G(x)| = |G| = n.$$

Обравши по одному елементу у кожному з класів спряженості, одержимо

$$|K| = \sum_{x \in G} |Z_G(x)| = \sum_{i=1}^{m} |G : Z_G(x_i)| \cdot |Z_G(x_i)| = m \cdot n.$$

Отже,

$$Pr(G) = \frac{mn}{n^2} = \frac{m}{n},$$

де m — це кількість класів спряженості, а n — це порядок групи G. □

Твердження

Нехай G — неабелева скінченна група, $Pr(G)$ — ймовірність того, що два навмання обраних елементи комутують. Тоді $Pr(G) \leq \frac{5}{8}$.

Доведення.

G — неабелева $\Rightarrow Z(G) \neq G$.

G — неабелева $\Rightarrow G/Z(G)$ не циклічна $\Rightarrow |G/Z(G)| \geq 4 \Rightarrow |Z(G)| \leq \frac{|G|}{4}$.

Екстремальний випадок: $|Z(G)| = \frac{|G|}{4}$.

Решта $\frac{3}{4}\,|G|$ елементів можуть бути розподілені по 2-елементним класам спряженості.

Отже, в неабелевій групи кількість класів суміжності $\leq \frac{1}{4}\,|G| + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\,|G| = \frac{5}{8}\,|G| \Rightarrow$

$$Pr(G) \leq \frac{\frac{5}{8}\,|G|}{|G|} = \frac{5}{8}.$$

□

Чи досягається межа $\frac{5}{8}$?

Так.

Наприклад, у групі D_4. Переконайтеся ☺