Нормальні підгрупи

Євгенія Кочубінська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

5 жовтня 2022

FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS

Означення

Нехай G — група. Підгрупа H групи G називається *нормальною*, якщо $gH = Hg$ для всіх $g \in G$.

Позначається $H \lhd G$.

Приклади

1. $\{e\} \lhd G$, $G \lhd G$.
2. Всі підгрупи абелевої групи нормальні.
3. $SL_n(\mathbb{R}) \lhd GL_n(\mathbb{R})$.
4. $Z(G) = \{a \in G \mid ag = ga \ \forall g \in G\}$ — центр групи.

Критерій нормальної підгрупи

Твердження

Підгрупа H групи G є нормальною $\Leftrightarrow g^{-1}Hg = H$ для всіх $g \in G$.

Доведення.

$H \lhd G \Leftrightarrow gH = Hg \Leftrightarrow g^{-1}gH = g^{-1}Hg \Leftrightarrow H = g^{-1}Hg$. $\square$

Приклади

1. $SL_n(\mathbb{R}) \lhd GL_n(\mathbb{R})$, бо для довільних $A \in SL_n(\mathbb{R})$, $B \in GL_n(\mathbb{R})$: $\det(B^{-1}AB) = \det B^{-1} \det A \det B = 1$.
2. $\mathcal{A}_n \lhd \mathcal{S}_n$, бо для довільних $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $\tau \in \mathcal{A}_n$ підстановка $\sigma^{-1}\tau\sigma$ — парна.

Твердження

Підгрупа H індексу 2 є нормальною підгрупою групи G.

Доведення.

$G = H + gH = H + Hg \Rightarrow gH = Hg.$ $\square$

Приклад

1. $|\mathcal{S}_n : \mathcal{A}_n| = 2 \Rightarrow \mathcal{A}_n \lhd \mathcal{S}_n$.
2. $|D_n : \Pi_n| = 2 \Rightarrow \Pi_n \lhd D_n$.

Твердження

Перетин нормальних підгруп є нормальною підгрупою.

Прості групи

Означення

Група називається *простою*, якщо вона не містить нетривіальних нормальних підгруп.

Приклад

Група $\mathcal{A}_n$, $n \geq 5$, — проста.