Теореми про гомоморфізм.
Перша теорема про гомоморфізм

Євгенія Кочубінська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

12 жовтня 2022

FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS

Природний гомоморфізм

Нехай G — група, $H \lhd G$. Тоді відображення

$$\pi : G \to G/H : \quad a \mapsto aH$$

є епіморфізмом.

Дійсно,

$$\pi(ab) = abH = aH \cdot bH = \pi(a)\pi(b).$$

Сюр'єктивність очевидна.

Означення

Епіморфізм π називається *природним епіморфізмом*.

Універсальна властивість природного епіморфізму

Нехай G — група, $H \lhd G$, $\pi : G \to G/H$ — природний епіморфізм.

Для довільного такого гомоморфізму $\varphi : G \to G'$, для якого $\varphi(H) = \{e\}$, існує *єдиний* гомоморфізм

$$\overline{\varphi} : G/H \to G',$$

який робить діаграму

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & G' \\
& G/H \arrow[u, "\overline{\varphi}"']
\end{tikzcd}$$

комутативною, тобто

$$\forall\, g \in G : \quad \varphi(g) = \overline{\varphi}(\pi(g)),$$

тобто $\varphi = \pi \circ \overline{\varphi}$.

Універсальна властивість природного епіморфізму

Чому це так?

Для будь-якого $g \in G$: $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h) = \varphi(g)$ для всіх $h \in H \Rightarrow \varphi(gH) = \varphi(g)$.

Тоді φ індукує гомоморфізм

$$\overline{\varphi} : G/H \to G' : \quad \overline{\varphi}(gH) = \varphi(g).$$

Це дійсно гомофорфізм, бо

$$\overline{\varphi}(gH \cdot g'H) = \overline{\varphi}(gg'H) = \varphi(gg') = \varphi(g)\varphi(g') = \overline{\varphi}(gH)\overline{\varphi}(g'H).$$

Тоді для всіх $g \in G$

$$\overline{\varphi}(\pi(g)) = \overline{\varphi}(gH) = \varphi(g).$$

Єдиність випливає з сюр'єктивності π.

Перша теорема про гомоморфізм: основна теорема про гомоморфізм для груп

Теорема

Нехай $\varphi : G \to G'$ — гомоморфізм груп G та G'. Тоді

- $\operatorname{Ker}\varphi$ — нормальна підгрупа групи G;
- $\operatorname{Im}\varphi$ — підгрупа групи G';
- гомоморфізм φ розкладається у композицію епіморфізму π, ізоморфізму $\overline{\varphi}$ та мономорфізму μ, тобто діаграма

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & G' \\ G/\operatorname{Ker}\varphi \arrow[r, "\overline{\varphi}"] & \operatorname{Im}\varphi \arrow[u, "\mu"'] \end{tikzcd}$$

є комутативною.

Основна теорема про гомоморфізм для груп

Доведення.

Вже доведено: $\operatorname{Ker}\varphi \lhd G$; $\operatorname{Im}\varphi < G'$.
Канонічний епіморфізм: $\pi : G \to G/\operatorname{Ker}\varphi : \quad g \mapsto g\operatorname{Ker}\varphi$.
Для всіх $k \in \operatorname{Ker}\varphi$: $\varphi(k) = e$.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, dashed, "\varphi"] & G' \\
G/\operatorname{Ker}\varphi \arrow[r, "\overline{\varphi}"] & \operatorname{Im}\varphi \arrow[u, "\mu"]
\end{tikzcd}$$

Відображення $g \mapsto \varphi(g) : \; G \to \operatorname{Im}\varphi$ визначає гомоморфізм

$$\overline{\varphi} : G/\operatorname{Ker}\varphi \to \operatorname{Im}\varphi : \quad g\operatorname{Ker}\varphi \mapsto \varphi(g).$$

$\overline{\varphi}$ — епіморфізм.
$\overline{\varphi}$ — мономорфізм, бо

$$\overline{\varphi}(g\operatorname{Ker}\varphi) = e \Leftrightarrow \varphi(g) = e \Leftrightarrow g \in \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow g\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Ker}\overline{\varphi} = \operatorname{Ker}\varphi.$$

Отже, $\overline{\varphi}$ — ізоморфізм.
Мономорфізм $\mu : \operatorname{Im}\varphi \to G' : \quad g' \mapsto g'$.

$$g \xrightarrow{\pi} g\operatorname{Ker}\varphi \xrightarrow{\overline{\varphi}} \varphi(g) \xrightarrow{\mu} \varphi(g) \qquad \square$$

Основна теорема про гомоморфізм для груп

Теорема

Нехай $\varphi : G \to G'$ — гомоморфізм груп G та G'. Тоді $\operatorname{Ker}\varphi$ — нормальна підгрупа групи G, $\operatorname{Im}\varphi$ — підгрупа групи G' та

$$G/\operatorname{Ker}\varphi \simeq \operatorname{Im}\varphi.$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
G/\operatorname{Ker}\varphi \arrow[r, "\overline{\varphi}"] & \operatorname{Im}\varphi
\end{tikzcd}$$

Приклад

Приклад

За допомогою основної теореми про гомоморфізм довести, що $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^*$.

Доведення.

Потрібно: епіморфізм $\varphi : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ з ядром $SL_n(\mathbb{R})$.
Візьмемо $\varphi : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^* : \quad \varphi(A) = \det A.$

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B \quad \Rightarrow \quad \varphi \text{ — гомоморфізм.}$$

$$\forall\, r \in \mathbb{R}^*\, \exists\, A \in GL_n(\mathbb{R}) : \det A = r \quad \Rightarrow \quad \varphi \text{ — епіморфізм.}$$

$$\operatorname{Ker} \varphi = SL_n(\mathbb{R}).$$

Основна теорема про гомоморфізм:

$$GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^*. \quad \square$$

Приклад

Приклад

За допомогою основної теореми про гомоморфізм довести, що $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$.

Доведення.

Потрібно: епіморфізм $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ з ядром $n\mathbb{Z}$.
Візьмемо $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n : \quad a \mapsto a \pmod n$.

$$(a+b) \pmod n \equiv a \pmod n + b \pmod n \Rightarrow \varphi \text{ — гомоморфізм.}$$

$$\forall\, \bar{r} \in \mathbb{Z}_n\, \exists\, a \in \mathbb{Z} : a = qn + r \Rightarrow \varphi \text{ — епіморфізм.}$$

$$\operatorname{Ker}\varphi = n\mathbb{Z}.$$

Основна теорема про гомоморфізм:

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n. \quad \square$$