

Теореми про гомоморфізм. Перша теорема про гомоморфізм

Євгенія Кочубінська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

12 жовтня 2022



FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS

Природний гомоморфізм

Нехай G — група, $H \triangleleft G$. Тоді відображення

$$\pi : G \rightarrow G/H : a \mapsto aH$$

є епіморфізмом.

Дійсно,

$$\pi(ab) = abH = aH \cdot bH = \pi(a)\pi(b).$$

Сюр'єктивність очевидна.

Означення

Епіморфізм π називається *природним епіморфізмом*.

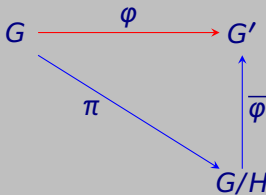
Універсальна властивість природного епіморфізму

Нехай G — група, $H \triangleleft G$, $\pi : G \rightarrow G/H$ — природний епіморфізм.

Для довільного такого гомоморфізму $\varphi : G \rightarrow G'$, для якого $\varphi(H) = \{e\}$, існує *єдиний* гомоморфізм

$$\bar{\varphi} : G/H \rightarrow G',$$

який робить діаграму



комутативною, тобто

$$\forall g \in G : \quad \varphi(g) = \bar{\varphi}(\pi(g)),$$

тобто $\varphi = \pi \circ \bar{\varphi}$.

Універсальна властивість природного епіморфізму

Чому це так?

Для будь-якого $g \in G$: $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h) = \varphi(g)$ для всіх $h \in H \Rightarrow \varphi(gH) = \varphi(g)$.

Тоді φ індукує гомоморфізм

$$\bar{\varphi} : G/H \rightarrow G' : \quad \bar{\varphi}(gH) = \varphi(g).$$

Це дійсно гомоморфізм, бо

$$\bar{\varphi}(gH \cdot g'H) = \bar{\varphi}(gg'H) = \varphi(gg') = \varphi(g)\varphi(g') = \bar{\varphi}(gH)\bar{\varphi}(g'H).$$

Тоді для всіх $g \in G$

$$\bar{\varphi}(\pi(g)) = \bar{\varphi}(gH) = \varphi(g).$$

Єдиність впливає з сюр'єктивності π .

Перша теорема про гомоморфізм: основна теорема про гомоморфізм для груп

Теорема

Нехай $\varphi : G \rightarrow G'$ — гомоморфізм груп G та G' . Тоді

- $\text{Ker } \varphi$ — нормальна підгрупа групи G ;
- $\text{Im } \varphi$ — підгрупа групи G' ;
- гомоморфізм φ розкладається у композицію епіморфізму π , ізоморфізму $\bar{\varphi}$ та мономорфізму μ , тобто діаграма

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & G' \\ \downarrow \pi & & \uparrow \mu \\ G/\text{Ker } \varphi & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & \text{Im } \varphi \end{array}$$

є комутативною.

Основна теорема про гомоморфізм для груп

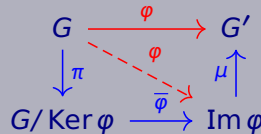
Доведення.

Вже доведено: $\text{Ker } \varphi \triangleleft G$; $\text{Im } \varphi < G'$.

Канонічний епіморфізм: $\pi : G \rightarrow G/\text{Ker } \varphi : g \mapsto g \text{Ker } \varphi$.

Для всіх $k \in \text{Ker } \varphi$: $\varphi(k) = e$.

Відображення $g \mapsto \varphi(g) : G \rightarrow \text{Im } \varphi$ визначає гомоморфізм
 $\bar{\varphi} : G/\text{Ker } \varphi \rightarrow \text{Im } \varphi : g \text{Ker } \varphi \mapsto \varphi(g)$.



$\bar{\varphi}$ — епіморфізм.

$\bar{\varphi}$ — мономорфізм, бо

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(g \text{Ker } \varphi) = e &\Leftrightarrow \varphi(g) = e \Leftrightarrow g \in \text{Ker } \varphi \Leftrightarrow g \text{Ker } \varphi = \text{Ker } \varphi \\ &\Rightarrow \text{Ker } \bar{\varphi} = \text{Ker } \varphi.\end{aligned}$$

Отже, $\bar{\varphi}$ — ізоморфізм.

Мономорфізм $\mu : \text{Im } \varphi \rightarrow G' : g' \mapsto g'$.

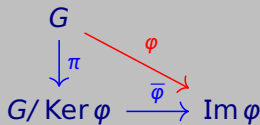
$$g \xrightarrow{\pi} g \text{Ker } \varphi \xrightarrow{\bar{\varphi}} \varphi(g) \xrightarrow{\mu} \varphi(g) \quad \square$$

Основна теорема про гомоморфізм для груп

Теорема

Нехай $\varphi : G \rightarrow G'$ — гомоморфізм груп G та G' . Тоді $\text{Ker } \varphi$ — нормальна підгрупа групи G , $\text{Im } \varphi$ — підгрупа групи G' та

$$G / \text{Ker } \varphi \simeq \text{Im } \varphi.$$



Приклад

Приклад

За допомогою основної теореми про гомоморфізм довести, що $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^*$.

Доведення.

Потрібно: епіморфізм $\varphi : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ з ядром $SL_n(\mathbb{R})$.

Візьмемо $\varphi : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^* : \varphi(A) = \det A$.

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B \Rightarrow \varphi \text{ — гомоморфізм.}$$

$$\forall r \in \mathbb{R}^* \exists A \in GL_n(\mathbb{R}) : \det A = r \Rightarrow \varphi \text{ — епіморфізм.}$$

$$\text{Ker } \varphi = SL_n(\mathbb{R}).$$

Основна теорема про гомоморфізм:

$$GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^*. \quad \square$$

Приклад

Приклад

За допомогою основної теореми про гомоморфізм довести, що $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$.

Доведення.

Потрібно: епіморфізм $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ з ядром $n\mathbb{Z}$.

Візьмемо $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n : a \mapsto a \pmod{n}$.

$$(a + b) \pmod{n} \equiv a \pmod{n} + b \pmod{n} \Rightarrow \varphi \text{ — гомоморфізм.}$$

$$\forall \bar{r} \in \mathbb{Z}_n \exists a \in \mathbb{Z} : a = qn + r \Rightarrow \varphi \text{ — епіморфізм.}$$

$$\text{Ker } \varphi = n\mathbb{Z}.$$

Основна теорема про гомоморфізм:

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n. \quad \square$$