ОПУКЛІСТЬ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Означення 1. Множину $A \subset \mathbb{R}^m$ називають **опуклою**, якщо

$$\forall x, y \in A \ \forall \alpha \in (0,1) \ : \ \alpha x + (1-\alpha) y \in A.$$

Означення 2. Нехай $A \subset \mathbb{R}^m$ – опукла множина. Функцію $f : A \to \mathbb{R}$ називають **опуклою вниз** на A, якщо

$$\forall x, y \in A \ \forall \alpha \in (0,1) \ : \ f(\alpha x + (1-\alpha) y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

Функцію $f : A \to \mathbb{R}$ називають **строго опуклою вниз** на A, якщо

$$\forall x, y \in A \ \forall \alpha \in (0,1) \ : \ f(\alpha x + (1-\alpha) y) < \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

Функцію $f : A \to \mathbb{R}$ називають **опуклою вгору** на A, якщо

$$\forall x, y \in A \ \forall \alpha \in (0,1) \ : \ f(\alpha x + (1-\alpha) y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

Функцію $f : A \to \mathbb{R}$ називають **строго опуклою вгору** на A, якщо

$$\forall x, y \in A \ \forall \alpha \in (0,1) \ : \ f(\alpha x + (1-\alpha) y) > \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

Теорема 1. Нехай $A \subset \mathbb{R}^m$ – опукла множина, $f \in C^2(A)$, f'' – додатно визначена на A. Тоді f – строго опукла вниз на A.

Доведення. Нехай $x, y \in A$, $x \neq y$. Позначимо

$$\varphi(t) := f(tx + (1-t)y),\ t \in [0,1].$$

Оскільки внаслідок додатної визначеності другої похідної функції f

$$\varphi''(t) = f''(tx + (1-t)y)(x-y)^2 > 0,\ t \in [0,1],$$

то φ – опукла вниз на $[0,1]$, зокрема

$$\forall \alpha \in (0,1)\ :\ \varphi(\alpha \cdot 0 + (1-\alpha)\cdot 1) \leq \alpha\varphi(0) + (1-\alpha)\varphi(1).$$

Підставляючи вираз з означення функції φ, отримаємо потрібну нерівність.

Приклади. Функція $f(x_1, x_2) = x_1^4 - x_1^2 + x_2^4 - 2x_2^2,\ x \in \mathbb{R}^2$, опукла вниз на множині $(\frac{1}{\sqrt{6}}, +\infty) \times (\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$, опукла вгору на множині $(0, \frac{1}{\sqrt{6}}) \times (0, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Дійсно,

$$f'' = \begin{pmatrix} 12x_1^2 - 2 & 0 \\ 0 & 12x_2^2 - 4 \end{pmatrix}$$

ВЕКТОРНІ ФУНКЦІЇ

Означення 1. **Векторною функцією (відображенням)** називають функцію $f : A \to \mathbb{R}^n,\ A \subset \mathbb{R}^m$.

Приклади. 1. В процесі руху потоку рідини (наприклад, річки), швидкість рідини в кожній точці має різну величину і напрямок, тому швидкість – це векторна величина, що залежить від точки в просторі і часу: $\vec{v} = f(t, x_1, x_2, x_3),\ f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$. Тому швидкість – це векторна функція.

2. Якщо необхідно здійснити перехід до іншої системи координат в просторі, то кожному набору координат (x_1, x_2, x_3) в початковій системі координат відповідає набір координат (y_1, y_2, y_3) в кінцевій системі. Маємо векторне відображення $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Аналогічно за допомогою векторного відображення $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ переходять до інших координат в площині.

2а. На першому курсі обговорювалася **полярна система координат**, яку в механіці часто використовують для опису обертального руху в площині. Зв'язок її з декартовими координатами описувався відображенням

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix},\ r \geq 0,\ \varphi \in [0, 2\pi].$$

Для опису рухів в просторі використовуються дві аналогічні полярній системи координат.

2б. **Циліндричні координати.** r, φ – полярні координати проекції точки на площину Ox_1x_2, $h = x_3$. Отже,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ h \end{pmatrix}, \; r \geq 0, \; \varphi \in [0, 2\pi], \; h \in \mathbb{R}.$$

Назва пов'язана з тим, що в цих координатах дуже легко записати рівняння прямого кругового циліндра: $r = const$.

2в. **Сферичні координати.** φ – полярна координата проекції точки на площину Ox_1x_2, r – відстань від точки до початку координат, ψ – кут між радіус-вектором точки і площиною Ox_1x_2 (при $x_3 > 0$ він змінюється від 0 до $\frac{\pi}{2}$, при $x_3 < 0$ – від $-\frac{\pi}{2}$ до 0).Отже,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\psi \\ r\sin\varphi\cos\psi \\ r\sin\psi \end{pmatrix}, \; r \geq 0, \; \varphi \in [0, 2\pi], \; \psi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Назва пов'язана з тим, що в цих координатах дуже легко записати рівняння сфери: $r = const$.

3. Іншим прикладом векторних відображень є лінійні відображення. Як відомо з алгебри, лінійні відображення $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ задаються матрицями $m \times n$. Зауважимо також, що якщо лінійне відображення задається матрицею D розміру $m \times m$, яка має обернену, то воно має обернене відображення D^{-1}. Лінійні відображення важливі тим, що в околі кожної точки гладке відображення гарно наближається лінійним (за допомогою диференціала).

Означення 2. Нехай $f : A \to \mathbb{R}^n,\ A \subset \mathbb{R}^m$ – відкрита, $x^0 \in A$. Відображення f називають **неперервним в точці** x^0, якщо

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = f(x^0),$$

тобто якщо

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x,\ \rho_m(x, x^0) < \delta\ :\ \rho_n(f(x), f(x_0)) < \varepsilon,$$

Відображення неперервне на множині A, якщо воно неперервне в кожній точці множини A.

Зауваження. Правильне також означення неперервності за Гейне, що доводиться так само, як в попередньому розділі.

З прикладів видно, що векторне відображення задається, як набір з n функцій, кожна з яких залежить від m змінних. Позначатимемо ці функції $f_1, ..., f_n$. Називатимемо їх координатними функціями функції f.

Теорема 1. **(Критерій неперервності векторних функцій).** Нехай $f : A \to \mathbb{R}^n,\ A \subset \mathbb{R}^m$. Відображення f неперервне на A тоді і лише тоді, коли неперервні на A всі функції $f_1, ..., f_n$.

Доведення. Збіжність в $(\mathbb{R}^n, \rho_n)$ покоординатна, тому $f(x) \to f(x^0) \Leftrightarrow f_k(x) \to f_k(x^0),\ k = \overline{1, n}$.

Наслідок. Лінійне відображення неперервне.

Залишаються правильними ряд властивостей неперервних функцій, що були доведені раніше:

1.Якщо f, g – неперервні функції, $c \in \mathbb{R}$, то $cf, f+g$ – неперервні функції;

2. Якщо $f : A \to B,\ g : B \to \mathbb{R}^l,\ A \subset \mathbb{R}^m,\ B \subset \mathbb{R}^n,\ f$ неперервна в точці $x_0 \in A,\ g$ неперервна в точці $f(x_0) \in B$, то суперпозиція $h(x) = g(f(x)),\ x \in A$, неперервна в точці x_0.

3. Відображення $f : A \to \mathbb{R}^n,\ A \subset \mathbb{R}^m$, неперервне тоді й лише тоді, коли для довільної відкритої в $\mathbb{R}^n$ множини G множина $f^{-1}(G)$ відкрита в (A, ρ_m).

Те ж саме правильно для замкнених множин.

4. Образ компактної множини при неперервному відображенні – компакт.

5. Неперервна функція на компакті обмежена.

6. Неперервна функція на компакті рівномірно неперервна.

Доведення. 1. Застосувати до координатних функцій теорему про арифметичні дії.

2. Застосувати означення Гейне.

3,4,5. Повторити доведення теореми з попереднього розділу.

Означення 3. Нехай $f : A \to \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ – відкрита, $x^0 \in A$. Відображення f називають **диференційовним в точці** x^0, якщо існує лінійне відображення з $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$ з матрицею D таке, що

$$||f(x^0 + a) - f(x^0) - Da|| = o(||a||),\ a \to 0.$$

Матрицю D називають **похідною відображення** f в точці x^0, або **матрицею Якобі** і пишуть $D = f'(x^0)$.

Якщо $m = n$, її визначник називають **якобіаном відображення** f і позначають $\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}(x^0)$.

Приклади. Нехай

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 \\ x_2 \end{pmatrix},\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Тоді похідна (матриця Якобі)

$$f' = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Якобіан

$$\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 6x_3 - 2x_1.$$

Теорема 2. **(Критерій диференційовності векторного відображення).** Нехай $f : A \to \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^m$. Відображення f диференційовне в точці $x_0 \in A$ тоді і лише тоді, коли диференційовні в цій точці всі функції $f_1, ..., f_n$. При цьому $(f'(x))_{jk} = \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x^0)$.

Доведення. Необхідність. Якщо f – диференційовна і має похідну D, то при всіх $1 \le j \le n$ маємо

$$\left| f_j(x^0 + a) - f_j(x^0) - \sum_{k=1}^{m} d_{jk} a_k \right| \le$$

$$\le \left(\sum_{i=0}^{n} \left(f_i(x^0 + a) - f_i(x^0) - \sum_{k=1}^{m} d_{ik} a_k \right)^2 \right)^{1/2} =$$

$$= ||f(x^0 + a) - f(x^0) - Da|| = o(||a||), \ a \to 0.$$

Отже, функція f_j диференційовна і за теоремою про обчислення диференціала $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x^0) = d_{jk}, \ 1 \le k \le n.$

Достатність. Нехай в точці x^0 диференційовні всі функції $f_1, ..., f_n$. Покладемо $d_{jk} := \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x^0), \ 1 \le j \le m, \ 1 \le k \le n.$ Тоді

$$||f(x^0+a)-f(x^0)-Da|| = \left(\sum_{i=0}^{n} \left(f_i(x^0 + a) - f_i(x^0) - \sum_{k=1}^{m} d_{ik} a_k \right)^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n} o(||a||^2) \right)^{1/2} = o(||a||), \ a \to 0.$$

Наслідок. Диференційовне відображення є неперервним.

Означення 4. Будемо казати, що $f \in C^k(A, \mathbb{R}^n)$, якщо $f_1, ..., f_n \in C^k(A)$.

Приклади. Обчислимо якобіани відображень переходу до інших систем координат.

Для полярних координат:

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Для циліндричних координат:

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(r, \varphi, h)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Для сферичних координат:

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(r, \varphi, \psi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\cos\psi & -r\cos\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\psi & r\cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & r\cos\psi \end{vmatrix} = r^2\cos\psi.$$

Відзначимо, що якобіани обертаються в нуль в тих точках, де координати визначені неоднозначно. Тому взагалі нулі якобіанів називають точками виродження відображення.

Теорема 3. **(Правило диференціювання складної функції).** Нехай $f : A \to B,\ g : B \to \mathbb{R}^l,\ A \subset \mathbb{R}^m,\ B \subset \mathbb{R}^n$ – відкриті множини, f диференційовна в точці $x^0 \in A$, g диференційовна в точці $y^0 := f(x^0) \in B$. Тоді суперпозиція $h(x) = g(f(x)),\ x \in A$, диференційовна в точці x^0 і $h'(x^0) = g'(f(x^0))f'(x^0)$.

Зауваження. Останній добуток – це добуток матриць у звичайному сенсі.

Наслідок. При $m = n = l$ маємо правило множення для якобіанів:

$$\frac{\partial(h_1, h_2, ..., h_m)}{\partial(x_1, ..., x_m)}(x^0) = \frac{\partial(g_1, g_2, ..., g_m)}{\partial(y_1, ..., y_m)}(y^0) \cdot \frac{\partial(f_1, f_2, ..., f_m)}{\partial(x_1, ..., x_m)}(x^0).$$