ЕЙЛЕРОВІ ІНТЕГРАЛИ

Означення 1. **Гамма-функцією Ейлера** називають функцію

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \ \alpha > 0.$$

Зауваження. 1. Інтеграл збіжний за ознаками порівняння:
в околі т.0 $t^{\alpha-1}e^{-t} \sim t^{\alpha-1}, \ t \to 0+, \ \int_0^1 t^{\alpha-1} dt < +\infty (\alpha > 0)$,
в околі $+\infty : |t^{\alpha-1}e^{-t}| \leq Ce^{-t/2}, \ \int_1^{+\infty} e^{-t/2} dt < +\infty (\alpha \in \mathbb{R})$.

2. Гамма-функцію можна довизначити при інших значеннях α таким чином, використовуючи розклад експоненти в ряд Тейлора:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^1 t^{\alpha-1} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+\alpha)} + \int_1^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

Останній вираз визначений при $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0, -1, -2, -3, ...\}$.

Властивості гамма-функції:

1. $\Gamma(\alpha) > 0,\ \alpha > 0.$

Доведення. Як інтеграл від додатної функції.

2. $\Gamma \in C^\infty((0,+\infty)),\ \Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \ln^n t \cdot e^{-t} dt,\ \alpha > 0.$

Доведення. На кожному відрізку з додатних чисел можна застосувати теорему про диференціювання по параметру (рівномірна збіжність доводиться за ознакою Вейєрштрасса).

3. $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha),\ \alpha > 0.$

Доведення. Інтегруємо частинами:

$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt = -t^\alpha e^{-t}|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \alpha t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \alpha\Gamma(\alpha),\ \alpha > 0.$

Зауваження. За допомогою цієї формули також можна довизначити гамма-функцію при $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0, -1, -2, -3, ...\}$. Отримані значення будуть ті самі, що і в зауваженні до означення.

4. $\Gamma(n) = (n-1)!,\ n \in \mathbb{N}.$

Доведення. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$. Далі індуктивно застосовуємо попередній пункт.

5. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$

Доведення. $\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = |t = x^2| = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$

6. $\lim\limits_{\alpha \to 0+} \alpha\Gamma(\alpha) = 1.$

Доведення. $\alpha\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha+1) \to \Gamma(1) = 1,\ \alpha \to 0+.$

7. Функція $\ln\Gamma$ опукла вниз (тобто, Γ – логарифмічно опукла) на $(0,+\infty)$.

Нагадування: функція g опукла вниз на (a,b), якщо

$$g(tx_1+(1-t)x_2)\le tg(x_1)+(1-t)g(x_2),\ t\in(0,1),\ x_1,x_2\in(a,b).$$

Доведення.

$$(\ln\Gamma)'=\frac{\Gamma'}{\Gamma},\ (\ln\Gamma)''=\frac{\Gamma''\Gamma-(\Gamma')^2}{\Gamma^2}.$$

При цьому за нерівністю Коші-Буняковського

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2\le\int_a^b f^2(t)dt\cdot\int_a^b g^2(t)dt$$

маємо

$$(\Gamma'(\alpha))^2=\left(\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}\ln te^{-t}dt\right)^2=$$

$$=\left(\int_0^{+\infty}t^{(\alpha-1)/2}\ln te^{-t/2}\cdot t^{(\alpha-1)/2}e^{-t/2}dt\right)^2\le$$

$$\le\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}\ln^2 te^{-t}\cdot\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt=\Gamma''(\alpha)\Gamma(\alpha).$$

Зауваження. 1. З логарифмічної опуклості випливає звичайна:

$$\forall\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R},\ \forall t\in[0,1]\ :\ \Gamma(t\alpha_1+(1-t)\alpha_2)=e^{\ln\Gamma(t\alpha_1+(1-t)\alpha_2)}\le$$

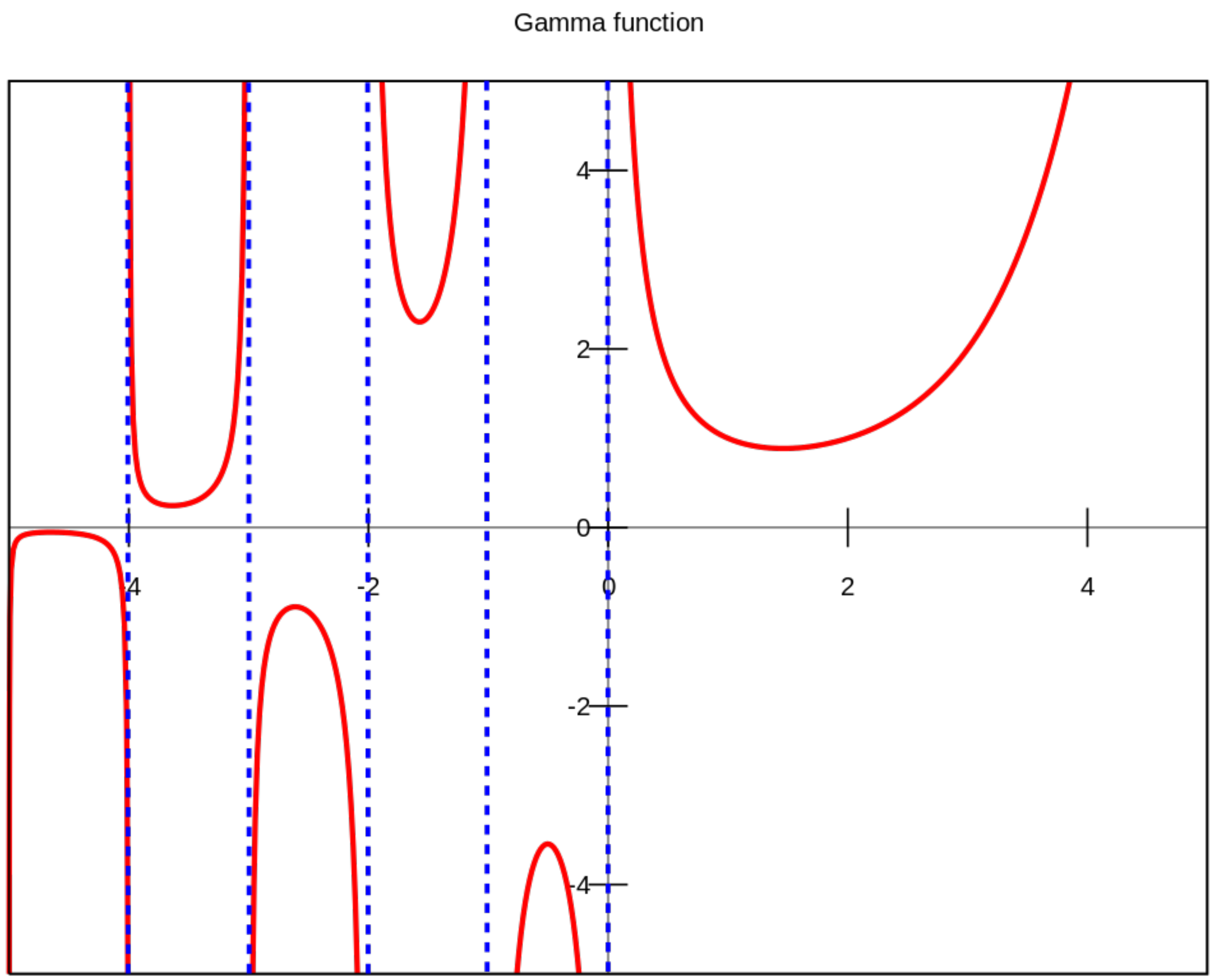
$$\le e^{t\ln\Gamma(\alpha_1)+(1-t)\ln\Gamma(\alpha_2)}\le$$

$$\le te^{\ln\Gamma(\alpha_1)}+(1-t)e^{\ln\Gamma(\alpha_2)}=t\Gamma(\alpha_1)+(1-t)\Gamma(\alpha_2),$$

де враховано опуклість вниз експоненти.

2. Зі звичайної опуклості не випливає логарифмічна. Наприклад, $f(t)=t^2$ – опукла вниз на $(0,+\infty)$, але $\ln t^2=2\ln t$ – опукла вгору на цій множині.

8. Графік.


Gamma function
4
2
0
-2
-4
-4
-2
0
2
4

Теорема 1. (Основна теорема теорії гамма-функції) Нехай функція $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ задовольняє умови:

1. $f(1) = 1$;
2. $\forall \alpha > 0 \ : \ f(\alpha + 1) = \alpha f(\alpha)$;
3. f – логарифмічно опукла на $(0, +\infty)$.

Тоді $f(\alpha) = \Gamma(\alpha), \ \alpha > 0$.

Доведення. З умов 1 і 2 випливає, що $f(n) = (n-1)!, \ n \in \mathbb{N}$. Нехай $\alpha \in (0,1)$. Використаємо логарифмічну опуклість для точок $n, n+\alpha, n+1 (n \geq 1)$:

$$\ln f(n+\alpha) = \ln f\left((1-\alpha)n + \alpha(n+1)\right) \leq (1-\alpha)\ln f(n) + \alpha \ln f(n+1) =$$

$$= (1-\alpha)\ln((n-1)!) + \alpha \ln f(n!),$$

отже

$$f(n+\alpha) \leq ((n-1)!)^{1-\alpha}(n!)^{\alpha} = (n-1)! n^{\alpha}.$$

Використаємо логарифмічну опуклість для точок $n-1, n, n+\alpha (n \geq 2)$:

$$\ln f(n) = \ln f\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}(n-1) + \frac{1}{1+\alpha}(n+\alpha)\right) \leq$$

$$\leq \frac{\alpha}{1+\alpha}\ln f(n-1) + \frac{1}{1+\alpha}\ln f(n+\alpha) =$$

$$= \frac{\alpha}{1+\alpha}\ln((n-2)!) + \frac{1}{1+\alpha}\ln f(n+\alpha),$$

отже

$$(n-1)! \leq ((n-2)!)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} f(n+\alpha)^{\frac{1}{1+\alpha}} \ \Rightarrow$$

$$f(n+\alpha) \geq ((n-1)!)^{1+\alpha}((n-2)!)^{-\alpha} = (n-1)!(n-1)^{\alpha}.$$

Враховуючи умову 2, отримаємо при $n \geq 2$:

$$\frac{(n-1)!(n-1)^{\alpha}}{(n+\alpha-1)(n+\alpha-2)\cdot \ldots \cdot \alpha} \leq f(\alpha) \leq \frac{(n-1)! n^{\alpha}}{(n+\alpha-1)(n+\alpha-2)\cdot \ldots \cdot \alpha} \Leftrightarrow$$

$$\frac{n+\alpha}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\alpha} \leq f(\alpha)\frac{(\alpha+n)(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\cdot \ldots \cdot \alpha}{n! n^{\alpha}} \leq \frac{n+\alpha}{n}.$$

За теоремою про три функції існує границя

$$\lim_{n\to\infty} f(\alpha)\frac{(\alpha+n)(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\cdot \ldots \cdot \alpha}{n! n^{\alpha}} = 1 \ \Leftrightarrow$$

$$f(\alpha)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^{\alpha}}{(\alpha+n)(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\cdot\ldots\cdot\alpha}$$

Ця формула однозначно визначає функцію f при $\alpha\in(0,1)$, а умова 2 - при інших $\alpha>0$. Оскільки гамма-функція задовольняє умови теореми, то вона збігається з функцією f.

Наслідки. 1. (Формула Ейлера)

$$\Gamma(\alpha)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^{\alpha}}{(\alpha+n)(\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\cdot\ldots\cdot\alpha},\ \alpha\in\mathbb{R}\backslash\{0,-1,-2,-3,...\}$$

Доведення. При додатних α формула доведена при доведенні теореми, при інших α отримується індуктивно.

2. (Зображення Вейєрштрасса)

$$\Gamma(\alpha)=e^{-\gamma\alpha}\frac{1}{\alpha}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\alpha/n}}{1+\alpha/n},$$

де $\gamma=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln n\right)$.

Доведення. Виходячи з формули Ейлера

$$\Gamma(\alpha)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha}\frac{e^{\alpha\ln n}}{(1+\frac{\alpha}{n})(1+\frac{\alpha}{n-1})\cdot\ldots\cdot(1+\frac{\alpha}{1})}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-\alpha(1+1/2+\ldots+1/n-\ln n)}}{\alpha}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{\alpha/k}}{1+\alpha/k}=$$

$$=e^{-\gamma\alpha}\frac{1}{\alpha}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\alpha/n}}{1+\alpha/n},\ \alpha\in\mathbb{R}\backslash\{0,-1,-2,-3,...\}.$$

Теорема 2. (Розклад синуса)

$$\sin \pi\alpha = \pi\alpha \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2}\right), \ \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0, -1, -2, -3, ...\}.$$

Теорема 3. (Функціональне рівняння Ейлера)

$$\forall\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0, -1, -2, -3, ...\} \ : \ \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.$$

Доведення.

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = -\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(-\alpha) = -\alpha e^{-\gamma\alpha}\frac{1}{\alpha}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\alpha/n}}{1+\alpha/n}e^{\gamma\alpha}\frac{1}{-\alpha}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha/n}}{1-\alpha/n} =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{\alpha^2}{n^2}} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.$$

Теорема 3. (Про формулу Стірлінга)

$$\forall\alpha > 0 \ : \ \Gamma(\alpha) = \sqrt{2\pi}\alpha^{\alpha-1/2}e^{-\alpha}e^{\theta(\alpha)/(12\alpha)},$$

де $0 < \theta(\alpha) < 1$.

Наслідок. $n! \sim (\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}, \ n \to \infty.$

Приклад. Обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}}e^{-1} = e^{-1}.$$

Означення 2. **Бета-функцією Ейлера** називають функцію

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx,\ \alpha>0,\ \beta>0.$$

Зауваження. Інтеграл збігається в обох точках невласності за ознакою порівняння аналогічно до гамма-функції.

Властивості:

1. $B\in C^\infty((0,+\infty)\times(0,+\infty))$.

Доведення. Інтеграл рівномірно збіжний на будь-якому відрізку з додатних чисел за ознакою Вейєрштрасса.

2. $\forall\alpha>0\ \forall\beta>0\ :\ B(\alpha,\beta)=B(\beta,\alpha)$.

Доведення.

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx=|x=1-t,dx=-dt|=$$

$$=-\int_1^0(1-t)^{\alpha-1}t^{\beta-1}dt=\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}dt=B(\beta,\alpha).$$

3. B – логарифмічно опукла по кожній зі змінних.

Доведення аналогічне гамма-функції.

4. $\forall\alpha>0\ \forall\beta>0\ :\ B(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}dx$.

Доведення.

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx=|x=\frac{t}{t+1},dx=\frac{dt}{(1+t)^2}|=$$

$$=\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{t+1}\right)^{\beta-1}\frac{dt}{(1+t)^2},\ \alpha>0,\ \beta>0.$$

5. $\forall\alpha > 0\ \forall\beta > 0\ :\ B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

Доведення. Покажемо, що функція $f(\alpha) = \frac{B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)}$, $\alpha > 0$, задовольняє умови основної теореми теорії гамма-функції. Дійсно,

$$1. f(1) = \frac{B(1,\beta)\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(\beta)} = \beta B(1,\beta) = \beta\int_0^1 x^{\beta-1}dx = 1.$$

$$2. f(\alpha+1) = \frac{B(\alpha+1,\beta)\Gamma(\alpha+1+\beta)}{\Gamma(\beta)} =$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{\alpha}dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (\alpha+\beta)x^{\alpha+\beta-1}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\alpha}dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)}\left(x^{\alpha+\beta}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\alpha}|_0^1 + \int_0^1 x^{\alpha+\beta}\alpha\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{x^2}dx\right) =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)}\alpha B(\alpha,\beta) = \alpha f(\alpha),\ \alpha > 0.$$

3. $f-$логарифмічно опукла, як добуток логарифмічно опуклих функцій.

Отже, $f = \Gamma$.

Наслідки. 1.

$$B(1/2,1/2) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = 2\int_0^1 \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = 2\arcsin(\sqrt{x})|_0^1 = \pi.$$

Тому $\pi = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1)}$, отже $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

2. Інтеграл Ейлера-Пуассона (інший спосіб обчислення):

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = |t = x^2| = \int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

МІРА ЖОРДАНА

Поняття довжини, площі та об'єму мають багато спільних рис. Всі ці числові характеристики множин невід'ємні та адитивні. Обчислення об'ємів та площ здійснювалося на першому курсі за допомогою інтеграла, проте лише в деяких зручних ситуаціях. Для того, щоб мати можливість рахувати ці числові характеристики для більш складних множин, введемо нове поняття - міру, що узагальнює три наведені вище, і навчимося її обчислювати та користуватися нею.

Означення 1. **Брусом** у просторі $\mathbb{R}^p$ будемо називати декартів добуток відрізків $Q = \prod\limits_{k=1}^{p} [a_k, b_k]$. **Діаметром бруса** Q назвемо число $d(Q) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{p} (b_k - a_k)^2}$. **Мірою бруса** Q назвемо число $m(Q) = \prod\limits_{k=1}^{p} (b_k - a_k)$.

Зауваження. На прямій $\mathbb{R}$ брус – це відрізок, в площині $\mathbb{R}^2$ – прямокутник, в просторі $\mathbb{R}^3$ – прямокутний паралелепіпед. Діаметр – це довжина діагоналі, міра – відповідно довжина, площа, об'єм.

ОЗНАЧЕННЯ 2. Розбиттям прямої $\mathbb{R}$ порядку n називають її представлення у вигляді об'єднання відрізків виду $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$, де $k, l \in \mathbb{Z}$.

Розбиттям площини $\mathbb{R}^2$ порядку n називають її представлення у вигляді об'єднання квадратів виду $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}] \times [\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}]$, де $k, l \in \mathbb{Z}$.

Розбиттям простору $\mathbb{R}^3$ порядку n називають його представлення у вигляді об'єднання кубів виду $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}] \times [\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}] \times [\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}]$, де $k, l, m \in \mathbb{Z}$.

Зауваження. 1. Розбиття площини зручно уявляти собі, як листочок у клітинку.

2. При збільшенні n на одиницю, довжини відрізків, сторін квадратів та ребер кубів зменшуються вдвічі.

3. Для розбиттів порядку n: а) сторона квадрата рівна $\frac{1}{2^n}$, діагональ рівна $\frac{\sqrt{2}}{2^n}$, площа рівна $\frac{1}{4^n}$; б) сторона куба рівна $\frac{1}{2^n}$, діагональ рівна $\frac{\sqrt{3}}{2^n}$, об'єм рівний $\frac{1}{8^n}$.

4. Аналогічно можна визначити розбиття простору довільної розмірності.

Позначення: $\pi_p^{(n)}$ – розбиття порядку n для $\mathbb{R}^p$.

ОЗНАЧЕННЯ 3. Нехай $F \subset \mathbb{R}^p$ – обмежена в $(\mathbb{R}^p, \rho)$ множина. Для кожного $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ позначимо

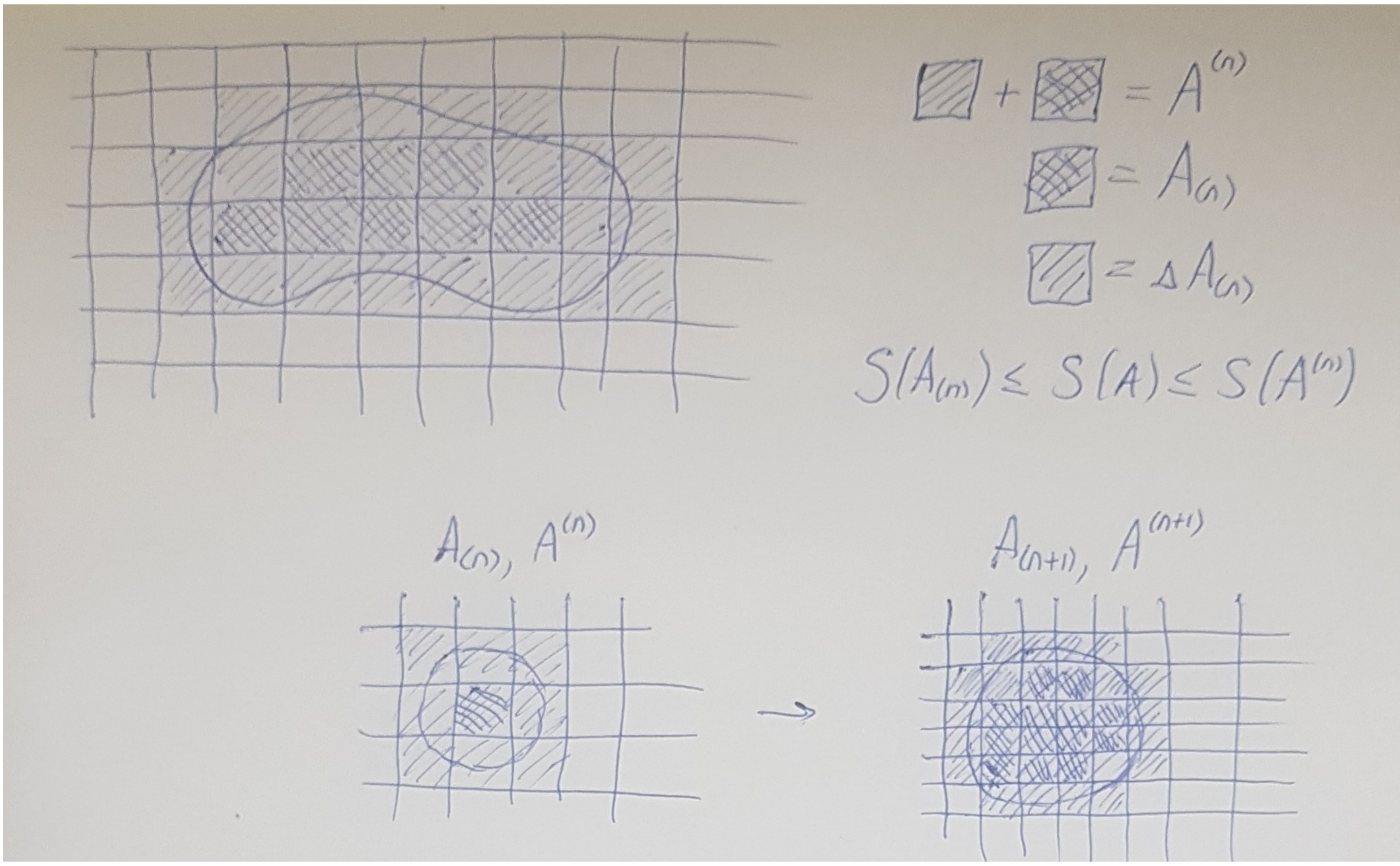
1) $F_{(n)}$ – об'єднання всіх брусів з $\pi_p^{(n)}$, які повністю лежать у F;

2) $F^{(n)}$ – об'єднання всіх брусів з $\pi_p^{(n)}$, які перетинають F;

3) $\triangle F_{(n)}$ – об'єднання всіх брусів з $\pi_p^{(n)}$, які частково лежать у F.

Зауваження. 1. При цьому $F_{(n)} \subset F \subset F^{(n)},\ F^{(n)} \backslash F_{(n)} \subset \triangle F_{(n)}$.

2. Мірою введених множин будемо вважати суму мір брусків Q, з яких вони складаються.


+ = A^(n)
= A_(n)
= ΔA_(n)
S(A_(n)) ≤ S(A) ≤ S(A^(n))
A_(n), A^(n)
A_(n+1), A^(n+1)

ОЗНАЧЕННЯ 4. Внутрішньою мірою обмеженої множини $F \subset \mathbb{R}^p$ називають невід'ємне число $m_*(F) = \lim\limits_{n\to\infty} m(F_{(n)})$.

Зовнішньою мірою обмеженої множини $F \subset \mathbb{R}^p$ називають невід'ємне число $m^*(F) = \lim\limits_{n\to\infty} m(F^{(n)})$.

Зауваження. Обидві границі завжди існують, бо відповідні послідовності монотонні та обмежені. Це випливає з включень

$$F_{(n)} \subset F_{(n+1)},\ F^{(n+1)} \subset F^{(n)},\ n \geq 0.$$

ОЗНАЧЕННЯ 5. Обмежену множину $F \subset \mathbb{R}^p$ називають вимірною в сенсі Жордана, якщо справджується рівність $m_*(F) = m^*(F)$. Для вимірної множини число $m(F) := m_p(F) := m_*(F) = m^*(F)$ називають мірою Жордана (p-вимірною мірою Жордана) множини F.

Зауваження. 1. Клас множин з $\mathbb{R}^p$, вимірних за Жорданом, позначають $\mathcal{K}_p$.

2. Цей клас є кільцем, тобто якщо $A, B \in \mathcal{K}$, то $A \cup B,\ A \backslash B \in K,\ A \cap B \in K$.

Приклади.

1. $F=\varnothing,\ F_{(n)}=\varnothing,\ F^{(n)}=\varnothing,\ m_*(F)=m^*(F)=0$, отже $m(F)=0$.

2. $F=[0,2]^2,\ F_{(n)}=[0,2]^2,\ F^{(n)}=[-\frac{1}{2^n},2+\frac{1}{2^n}]^2$

$$m_*(F)=\lim_{n\to\infty}2^2=4,\ m^*(F)=\lim_{n\to\infty}(2-2^{1-n})^2=4,$$

отже $m_*(F)=m^*(F)=4$ і $m(F)=4$.

3. $F=\mathbb{Q}\cap(0,1),\ F_{(n)}=\varnothing,\ F^{(n)}=[0,1],\ m_*(F)=0,\ m^*(F)=1$, отже F – невимірна (не має довжини) за Жорданом.

Властивості міри Жордана.

Нехай $m = m_p$ – p-вимірна міра Жордана, $\mathcal{K}_p$ – кільце вимірних множин у просторі $\mathbb{R}^p$. Тоді справджуються наступні властивості міри Жордана:

1. *(невід'ємність)* Якщо $A \in \mathcal{K}_p$, то $m(A) \geq 0$.

2. *(монотонність)* Якщо $A, B \in \mathcal{K}_p,\ A \subset B$, то $m(A) \leq m(B)$.

3. *(напівадитивність)* Якщо $A, B \in \mathcal{K}_p$ то $m(A \cup B) \leq m(A) + m(B)$.

4. *(адитивність)* Якщо $A, B \in \mathcal{K}_p$, $A^0 \cap B^0 = \varnothing$, то $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

5. *(міра декартового добутку)* Якщо $A \in \mathcal{K}_r$, $B \in \mathcal{K}_s$, то $A \times B \in \mathcal{K}_{r+s}$ і $m_{r+s}(A \times B) = m_r(A) \cdot m_s(B)$.

Доведення. Зауважимо спочатку, що у випадку, коли A, B – скінченні об'єднання брусків з $\pi_p^{(n)}$, наведені властивості випливають безпосередньо з означення міри об'єднання брусків.

1. Оскільки $m(A_{(n)}) \geq 0,\ n \geq 1$, то $m(A) = \lim\limits_{n\to\infty} m(A_{(n)}) \geq 0$.

2. Оскільки $m(A_{(n)}) \geq m(B_{(n)}),\ n \geq 1$, то $m(A) = \lim\limits_{n\to\infty} m(A_{(n)}) \geq \lim\limits_{n\to\infty} m(B_{(n)}) = m(B)$.

3. Маємо $m(A \cup B) \leq m(A^{(n)} \cup B^{(n)}) \leq m(A^{(n)}) + m(B^{(n)})$. Тому $m(A \cup B) \leq \lim\limits_{n\to\infty} (m(A^{(n)}) + m(B^{(n)})) = m(A) + m(B)$.

4. Враховуючи властивість 3, достатньо довести, що $m(A \cup B) \geq m(A)+m(B)$. Враховуючи монотонність міри і адитивність для множин $A_{(n)}$ і $B_{(n)}$, які не мають спільних внутрішніх точок, маємо $m(A \cup B) \geq m(A_{(n)} \cup B_{(n)}) = m(A_{(n)}) + m(B_{(n)})$, тому $m(A \cup B) \geq \lim\limits_{n\to\infty} (m(A_{(n)}) + m(B_{(n)})) = m(A) + m(B)$.

5. Справджуються рівності $(A \times B)_{(n)} = A_{(n)} \times B_{(n)}$ і $(A \times B)^{(n)} = A^{(n)} \times B^{(n)}$. Тому

$$m_{r+s\,*}(A \times B) = \lim_{n\to\infty} m_{r+s}(A_{(n)} \times B_{(n)}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} m_r(A_{(n)}) m_s(B_{(n)}) = m_r(A) m_s(B)$$

і, аналогічно, $m^*_{r+s}(A \times B) = \lim\limits_{n\to\infty} m_{r+s}(A^{(n)} \times B^{(n)}) = m_r(A) m_s(B)$. З рівності внутрішньої і зовнішньої мір випливає вимірність декартового добутку.

Приклади.

1. В просторі $\mathbb{R}$ відрізок $[a,b]$ – вимірна множина і $m([a,b]) = b-a$.

Нехай a'_n, a''_n – двійкові раціональні наближення до числа a з точністю 2^{-n} знизу і зверху відповідно, аналогічно для числа b. Тоді $[a,b]_{(n)} = [a''_n, b'_n]$ і $m_*([a,b]) = \lim\limits_{n\to\infty} m([a,b]_{(n)}) = \lim\limits_{n\to\infty}(b'_n - a''_n) = b-a$. Аналогічно $[a,b]^{(n)} = [a'_n, b''_n]$ і $m^*([a,b]) = \lim\limits_{n\to\infty} m([a,b]^{(n)}) = \lim\limits_{n\to\infty}(b''_n - a'_n) = b-a$.

2. З прикладу 1 і властивості 5 випливає, що брус $A = \prod\limits_{k=1}^{m}[a_k, b_k]$ – вимірна множина і $m(A) = \prod\limits_{k=1}^{m}(b_k - a_k)$.

3. В просторі $\mathbb{R}$ міра m – довжина, тому: $m([0,1]) = 1,\ m([3,7]) = 4$,

$$m(\{4\}) = 0,\ m([3,5]\cup\{7\}) = 2,\ m((2,8)) = 6,\ m((-1,5]) = 6.$$

Взагалі, $m([a,b]) = m((a,b)) = m([a,b)) = m((a,b]) = b-a,\ b > a$, $m(\{a\}) = 0,\ a\in\mathbb{R}$. $m(\mathbb{Q}\cap[1,2])$ не існує, бо

$$m_*(\mathbb{Q}\cap[1,2]) = 0,\ m^*(\mathbb{Q}\cap[1,2]) = 1.$$

4. В просторі $\mathbb{R}^2$ міра m – площа, тому

$$m([0,1]\times(7,9)) = 2,\ m([3,7]\times\{1\}) = 0.$$

Взагалі, $m([a,b]\times[c,d]) = (b-a)(d-c),\ m([a,b]\times\{c\}) = 0$, $m(\{(a,c)\}) = 0,\ b > a, d > c$. Замість відрізків можна брати інтервали або напівінтервали. $m(\mathbb{Q}^2\cap([1,2]\times[3,5]))$ не існує, бо $m_*(\mathbb{Q}^2\cap([1,2]\times[3,5])) = 0,\ m^*(\mathbb{Q}^2\cap([1,2]\times[3,5])) = 2$.

5. В просторі $\mathbb{R}^3$ міра m – об'єм, тому

$$m([0,1]\times(7,9)\times[-1,3)) = 8.$$

Взагалі,

$$m([a,b]\times[c,d]\times[k,l]) = (b-a)(d-c)(l-k),\ b\ge a, d\ge c, l\ge k.$$

Замість відрізків можна брати інтервали або напівінтервали. $m(\mathbb{Q}^3\cap([1,2]\times[3,5]\times[-1,2)))$ не існує, бо

$$m_*(\mathbb{Q}^3\cap([1,2]\times[3,5]\times[-1,2))) = 0,\ m^*(\mathbb{Q}^3\cap([1,2]\times[3,5]\times[-1,2))) = 6.$$