Гомоморфізми груп

Євгенія Кочубінська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

12 жовтня 2022

FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS

Гомоморфізм груп

Означення

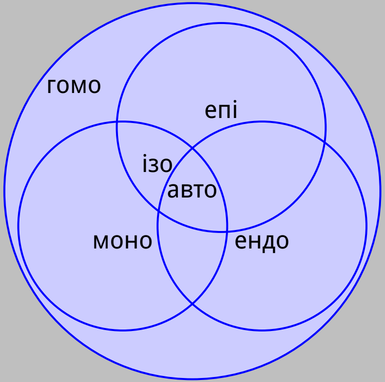
Гомоморфізмом групи $(G, *)$ в групу $(G', \circ)$ називається відображення

$$\varphi : G \to G',$$

яке зберігає дію, тобто

$$\varphi(g_1 * g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2).$$

Ін'єктивний гомоморфізм називається *мономорфізмом*.
Сюр'єктивний гомоморфізм називається *епіморфізмом*.
Бієктивний гомоморфізм називається *ізоморфізмом*.
Гомоморфізм групи в себе називається *ендоморфізмом*.
Ізоморфізм групи в себе називається *автоморфізмом*.



Твердження

Нехай $\varphi : G \to G'$ — гомоморфізм груп, тоді

1. $\varphi(e_G) = e_{G'}$;
2. $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$ для всіх $g \in G$.

Доведення.

1. $\varphi(e_G) = g' \quad \Rightarrow \quad (g')^2 = (\varphi(e_G))^2 = \varphi(e_G^2) = \varphi(e_G) = g' \quad \Rightarrow \quad g' = e_{G'}$.
2. $\varphi(e_G) = \varphi(gg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(g^{-1}) = e_{G'} \quad \Rightarrow \quad \varphi(g)^{-1} = \varphi(g^{-1})$.

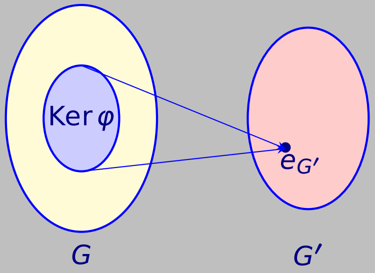
$\square$

Ядро гомоморфізму

Означення

Ядром гомоморфізму $\varphi : G \to G'$ груп G та G' називається множина

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{g \in G \mid \varphi(g) = e_{G'}\}\,.$$



Ядро гомоморфізму

Твердження

Нехай $\varphi : G \to G'$ — гомоморфізм груп. Тоді $\operatorname{Ker}\varphi \lhd G$.

Доведення.

$e_G \in \operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi \neq \varnothing$.

$g_1, g_2 \in \operatorname{Ker}\varphi$:
$\varphi(g_1 g_2^{-1}) = \varphi(g_1)\varphi(g_2^{-1}) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)^{-1} = e_{G'} \;\Rightarrow\; g_1 g_2^{-1} \in \operatorname{Ker}\varphi \;\Rightarrow\; \operatorname{Ker}\varphi < G$.

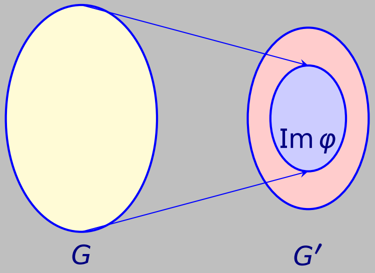
$g \in G, a \in \operatorname{Ker}\varphi :$
$\varphi(g^{-1}ag) = \varphi(g^{-1})\varphi(a)\varphi(g) = \varphi(g)^{-1}\varphi(g) = e_{G'} \;\Rightarrow\; g^{-1}ag \in \operatorname{Ker}\varphi \;\Rightarrow\; \operatorname{Ker}\varphi \lhd G$. $\square$

Образ гомоморфізму

Означення

Образом гомоморфізму $\varphi : G \to G'$ груп G та G' називається множина

$$\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(g) \mid g \in G\} = \left\{g' \in G' \mid \exists g \in G : \ \varphi(g) = g'\right\}.$$



Образ гомоморфізму

Твердження

Нехай $\varphi : G \to G'$ — гомоморфізм груп. Тоді $\operatorname{Im}\varphi < G'$.

Доведення.

$e_{G'} \in \operatorname{Im}\varphi \Rightarrow \operatorname{Im}\varphi \neq \varnothing$.

$g_1', g_2' \in \operatorname{Im}\varphi \Rightarrow \exists g_1, g_2 \in G : \varphi(g_1) = g_1', \varphi(g_2) = g_2'$.
Тоді $g_1'(g_2')^{-1} = \varphi(g_1)\varphi(g_2)^{-1} = \varphi(g_1)\varphi(g_2^{-1}) = \varphi(g_1 g_2^{-1}) \in \operatorname{Im}\varphi \Rightarrow \operatorname{Im}\varphi < G'$. $\square$

Вправа

Вправа

1. Гомоморфізм $\varphi : G \to G'$ є мономорфізмом $\Leftrightarrow \operatorname{Ker}\varphi = \{e\}$.
2. Гомоморфізм $\varphi : G \to G'$ є епіморфізмом $\Leftrightarrow \operatorname{Im}\varphi = G'$.
3. Гомоморфізм $\varphi : G \to G'$ є ізоморфізмом $\Leftrightarrow \operatorname{Ker}\varphi = \{e\}$ та $\operatorname{Im}\varphi = G'$.

Приклади гомоморфізмів

1. $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^* : \quad x \mapsto x^n.$

   $\varphi(xy) = (xy)^n = x^n y^n = \varphi(x)\varphi(y) \Rightarrow \varphi$— ендоморфізм.

   $\operatorname{Ker}\varphi = \mathbb{C}_n, \operatorname{Im}\varphi = \mathbb{C}^*.$

Приклади гомоморфізмів

2. $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n : \quad a \mapsto a \pmod n$.

   $\varphi(a+b) = (a+b) \pmod n \equiv a \pmod n + b \pmod n = \varphi(a) + \varphi(b)$.

   $\operatorname{Ker} \varphi = n\mathbb{Z}$, $\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{Z}_n$.

Приклади гомоморфізмів

3. $\varphi : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^* : \quad A \mapsto \det A$.

   $\varphi(AB) = \det(AB) = \det A \det B = \varphi(A)\varphi(B)$.

   $\operatorname{Ker} \varphi = SL_n(\mathbb{R}), \operatorname{Im} \varphi = \mathbb{R}^*$.

Приклади гомоморфізмів

4. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^* : \quad x \mapsto e^x$.

   $\varphi(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = \varphi(x)\varphi(y)$.

   $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}, \operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^*_{>0}$.

Приклади гомоморфізмів

5. $\varphi : \mathcal{S}_n \to \mathbb{Z}^* : \quad \sigma \to \operatorname{sign}\sigma.$

   $\varphi(\sigma\tau) = \operatorname{sign}(\sigma\tau) = \operatorname{sign}\sigma \cdot \operatorname{sign}\tau = \varphi(\sigma)\varphi(\tau).$

   $\operatorname{Ker}\varphi = \mathcal{A}_n, \operatorname{Im}\varphi = \mathbb{Z}^*.$