

Зразки задач основних типів з математичного аналізу -2

1. Обчислити невласні інтеграли:

а) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x-1)}{2x-2} dx$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+x} dx$; в) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 3x - \cos 4x}{x} dx$; г) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2} - e^{-2x^2}}{x^2} dx$

2. Виразити через Ейлерові інтеграли та їх похідні: а) $\int_0^{+\infty} \frac{x^7}{1+x^3} dx$; б) $\int_0^{+\infty} t^{\alpha+2} e^{-2t} \ln t dx$.

3. Змінити порядок інтегрування в інтегралі: а) $\int_0^1 \left(\int_1^{x_1+1} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1$; б) $\int_0^1 \left(\int_{x_1^2}^{2x_1^2} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1$.

4. Обчислити інтеграл $\int_A x_1 x_2 dx_1 dx_2$, де множина A обмежена кривими $x_2 = x_1^2 - 2$, $x_2 = 4 - 5x_1^4$.

5. Обчислити масу фігури з заданою щільністю $\rho = x_2^2$, обмеженої заданими кривими:

$$1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 4, x_2 \geq x_1.$$

6. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$, $x_3^2 \geq x_1^2 + x_2^2$.

7. Обчислити роботу сили $\vec{F}(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2^2)$ вздовж межі півкола $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$, $x_2 \geq 0$, що пробігається за годинниковою стрілкою.

8. Обчислити $\int_{\Gamma} x_1^2 dx_2 - x_2 dx_1$, де $\Gamma = \{(t^2, t^3) | t \in [0, 2]\}$ пробігається за зростанням параметра.

9. Знайти масу кривої $x_2 = \sqrt{x_1 + 1}$, $x_1 \in [0, 1]$ зі щільністю $\rho(x_1, x_2) = x_2^2$.

10. Обчислити $\int_{\Gamma} x_1 x_2 dl$, де $\Gamma = \{(2t+1, 3t+2) | t \in [0, 2]\}$.

11. Обчислити площу поверхні $\{(3t_1 \cos t_2, 3t_1 \sin t_2, 4t_2) | 0 \leq t_1 \leq 1, 0 \leq t_2 \leq 2\pi\}$.

12. Обчислити поверхневий інтеграл $\int_S x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2$ по зовнішньому боку поверхні $x_1^2 + x_3^2 = 1$ при $x_2 \in [0, 1]$.
