Теореми про гомоморфізм.
Друга теорема про гомоморфізм

Євгенія Кочубінська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

19 жовтня 2022

FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS

Теорема про ізоморфізм

Визначимо множину

$$HN = \{hn \,|\, h \in H, n \in N\}.$$

Якщо $N \lhd G$, то для довільних $h \in G$, $n \in N$ знайдеться такий елемент $n' \in N$, що $hn = n'h$.

Теорема про ізоморфізм

Лема

Нехай G — група, H — підгрупа групи G, N — нормальна підгрупа групи G. Тоді HN — підгрупа групи G, N — нормальна підгрупа групи HN.

Доведення.

Нехай $h_1n_1, h_2n_2 \in HN$. Тоді $h_1n_1 \cdot h_2n_2 = h_1h_2 \cdot n_1' n_2 \in HN.$
Для довільного $hn \in HN$: $(hn)^{-1} = n^{-1}h^{-1} = h^{-1}n' \in HN.$
Отже, $HN < G$.

Для довільних $hn \in HN$, $n' \in N$:

$$(hn)^{-1}n'(hn) = n^{-1}h^{-1}n'hn \in N \qquad (h^{-1}n'h \in N, \text{ бо } N \triangleleft G).$$

Отже, $N \triangleleft HN$. □

Друга теорема про гомоморфізм: теорема про ізоморфізм

Теорема

Нехай G — група, H — підгрупа групи G, N — нормальна підгрупа групи G.
Тоді

- HN — підгрупа група G;
- N — нормальна підгрупа групи HN;
- $H \cap N$ — нормальна підгрупа групи H;
- $H/H \cap N \simeq HN/N$.

Теорема про ізоморфізм

Доведення.

За лемою: $HN < G$, $N \triangleleft HN$.
Розглянемо відображення

$$\alpha : H \to HN/N, \quad h \xmapsto{\alpha} hN.$$

$$\begin{tikzcd} H \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "\alpha"] & \\ H/H\cap N \arrow[r, "\overline{\alpha}"] & HN/N \end{tikzcd}$$

Відображення α — гомоморфізм.
Більше того, α — епіморфізм, бо для $a = hn \in HN$ маємо

$$aN = hnN = hN = \alpha(h).$$

Знайдемо ядро відображення α:

$$\operatorname{Ker}\alpha = \{h \in H \mid \alpha(h) = N\} = \{h \in H \mid hN = N\}$$
$$= \{h \in H \mid h \in N\} = H \cap N.$$

З властивостей ядра $H \cap N \triangleleft H$.
За основною теоремою про гомоморфізм: $H/H\cap N \simeq HN/N$. □

Теорема про ізоморфізм

$$\begin{tikzcd}[arrows=-] & HN \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ N \arrow[dr] & & H \arrow[dl] \\ & H \cap N & \end{tikzcd}$$

Приклад

Приклад

Нехай $m, n \in \mathbb{Z}$. Тоді $m\mathbb{Z}$, $n\mathbb{Z}$ — нормальні підгрупи групи $\mathbb{Z}$. Тоді за теоремою ізоморфізм

$$m\mathbb{Z}/(m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}) \simeq (m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z})/n\mathbb{Z}.$$

Для цілих чисел $m = 6$ та $n = 9$:

$$6\mathbb{Z} \cap 9\mathbb{Z} = 18\mathbb{Z} \text{ та } 6\mathbb{Z} + 9\mathbb{Z} = 3\mathbb{Z}.$$

Тоді

$$6\mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \simeq 3\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_3.$$

Приклад

Нехай V_1, V_2 — підпростори скінченновимірного векторного простору V. Тоді

$$(V_1 + V_2)/V_2 \simeq V_1/(V_1 \cap V_2),$$

$H = V_1, N = V_2 \Rightarrow HN = V_1 + V_2, H \cap N = V_1 \cap V_2$ звідси

$$\dim(V_1 + V_2) - \dim V_2 = \dim V_1 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

що дає

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$