ПРИКЛАДИ КРАТНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Приклади. 1. Якщо

$$A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in [-1, 1],\ x_1^2 - 1 \le x_2 \le x_1^4 + 3\},$$

то

$$\int\limits_A (x_1 + 2x_2) dx_1 dx_2 = \int\limits_{-1}^{1} \left(\int\limits_{x_1^2-1}^{x_1^4+3} (x_1 + 2x_2) dx_2 \right) dx_1 =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} (x_1 x_2 + x_2^2)|_{x_2 = x_1^2 - 1}^{x_2 = x_1^4 + 3} dx_1 =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} ((x_1^5 + 3x_1 + x_1^8 + 6x_1^4 + 9) - (x_1^3 - x_1 + x_1^4 - 2x_1^2 + 1)) dx_1 =$$

$$= (x_1^6/6 + 2x_1^2 + x_1^9/9 + x_1^5 + 8x_1 - x_1^4/4 + 2x_1^3/3)|_{-1}^{1} =$$

$$= 2/9 + 2/5 + 16 + 4/3 = (10 + 18 + 720 + 60)/45 = 808/45.$$

2. Якщо

$$A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 4\},$$

то перейдемо до полярних координат: $r \in [0, 2],\ \varphi \in [0, 2\pi],\ J = r$,

$$\int\limits_A (x_1 + 2x_2) dx_1 dx_2 = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^{2\pi} (r\cos\varphi + 2r\sin\varphi) r d\varphi \right) dr.$$

3. Якщо

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4,\ x_1 \leq 0\},$$

то перейдемо до сферичних координат: $r \in [0, 2],\ \varphi \in [\pi/2, 3\pi/2],\ \psi \in [-\pi/2, \pi/2],\ J = r^2 \cos\psi$,

$$\int\limits_A (x_1 + 2x_2 + x_3) dx_1 dx_2 dx_3 =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (r\cos\varphi\cos\psi + 2r\sin\varphi\cos\psi + r\sin\psi) r^2 \cos\psi d\psi \right) d\varphi \right) dr.$$

4. Якщо

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 4,\ |x_3| \leq 2\},$$

то перейдемо до циліндричних координат: $r \in [0, 2],\ \varphi \in [0, 2\pi],\ h \in [-2, 2],\ J = r$,

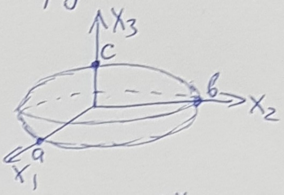
$$\int\limits_A (x_1 + 2x_2 + x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_{-2}^{2} (r\cos\varphi + 2r\sin\varphi + h) r dh \right) d\varphi \right) dr$$

НАГАДУВАННЯ З ГЕОМЕТРІЇ

$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$ – площина

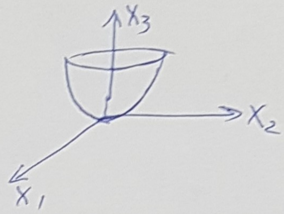
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$ – сфера (в сфер. координатах $r = R$)

$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$ – еліпсоїд

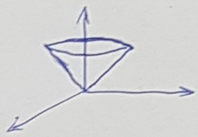


$x_3 = x_1^2 + x_2^2$ – еліптичний параболоїд

(в циліндр. координатах $h = r^2$)



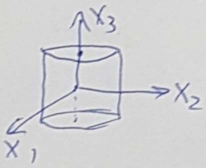
$x_3^2 = x_1^2 + x_2^2$ – конус
$(x_3 \geq 0)$



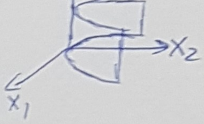
(в циліндр. коорд. $h = r$, в сферичних $\psi = \frac{\pi}{4}$)

$x_1^2 + x_2^2 = 1$ – циліндр (круговий)

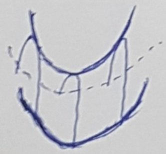
(в циліндр. коорд. $r = 1$)



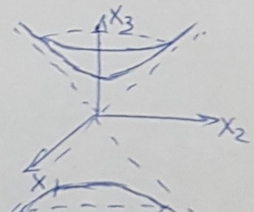
$x_2 = x_1^2$ – циліндр (параболічний)



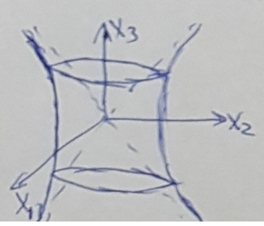
$x_3 = x_1^2 - x_2^2$ – гіперболічний параболоїд ("сідло"), також $x_3 = x_1 x_2$



$x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 + 1$ – двопорожнинний гіперболоїд



$x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 - 1$ – однопорожнинний гіперболоїд



ЗАСТОСУВАННЯ КРАТНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1. Обчислити масу фігури $A \subset \mathbb{R}^2$ зі щільністю $\rho(x_1, x_2)$, якщо A – компактна і вимірна, $\rho \in C(A)$ (Щільність плоска, з одиницями типу кг/м^2).

Розв'язок: наблизимо множину A множиною $A_{(n)}$, складеною зі стандартних квадратиків. На кожному квадратику при великих n щільність приблизно стала. Тому сумарна маса приблизно рівна

$$\sum_{Q \subset A_{(n)}} \rho(\xi(Q)) m(Q) = S_n(\rho, A).$$

При $n \to \infty$ отримаємо точну масу:

$$M(A) = \int_A \rho(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Якщо щільність – тотожна одиниця, то маса рівна площі. Тому

$$S(A) = \int_A 1 dx_1 dx_2.$$

2. Аналогічно виводиться формула для центра мас фігури. Центр мас системи матеріальних точок $A_1, ..., A_k$ з масами $M_1, M_2, ..., M_k$ має координати

$$x_{ic} = \frac{x_i(A_1)M_1 + x_i(A_2)M_2 + ... + x_i(A_k)M_k}{M_1 + M_2 + ... + M_k}.$$

При великих n брусики розбиття Q можна замінити на матеріальні точки з масами $\rho(\xi(Q))m(Q)$ в точках $\xi(Q)$. Тоді координата центра наближено рівна

$$\frac{\sum\limits_{Q \subset A_{(n)}} \xi_i(Q) \rho(\xi(Q)) m(Q)}{M(A)} = \frac{S_n(x_i \rho, A)}{M(A)}.$$

При $n \to \infty$ отримаємо точну формулу:

$$x_{ic} = \frac{1}{M(A)} \int\limits_A x_i \rho(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \ i = 1, 2.$$

3. Якщо $A \subset \mathbb{R}^3$ – компактна та вимірна, $\rho \in C(A)$, то маса тіла A

$$M(A) = \int\limits_A \rho(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3.$$

Якщо щільність – тотожна одиниця, то маса рівна об'єму. Тому

$$V(A) = \int\limits_A 1 dx_1 dx_2 dx_3.$$

Центр мас тіла має координати

$$x_{ic} = \frac{1}{M(A)} \int\limits_A x_i \rho(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3, \ i = 1, 2, 3.$$

Аналогічно отримують формули для моментів інерції та інших механічних величин.

НЕВЛАСНІ КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

Означення 1. Нехай $B \subset \mathbb{R}^p$ – необмежена множина, послідовність $\{D_n : n \geq 1\}$ компактних вимірних множин, задовольняє умови:

1) $\forall n \geq 1 \ : \ D_n \subset D_{n+1} \subset B$;

2) $\forall R > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} \ : \ B \cap \overline{B}(\overline{0}, R) \subset D_n$.

Таку послідовність $\{D_n : n \geq 1\}$ називають вичерпною для множини B.

Приклади. 1. Для множини $B = [0, +\infty)$ зручною послідовністю вичерпних множин є відрізки $D_n = [0, n], \ n \geq 1$.

2. Для множини $B = \mathbb{R}^2$ зручними послідовностями вичерпних множин є квадрати

$$D_n = [-n, n] \times [-n, n], \ n \geq 1,$$

та круги

$$D_n = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq n^2\}, \ n \geq 1.$$

3. Для множини $B = \mathbb{R}^3$ зручними послідовностями вичерпних множин є куби

$$D_n = [-n, n] \times [-n, n] \times [-n.n], \ n \geq 1,$$

та кулі

$$D_n = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq n^2\}, \ n \geq 1.$$

Означення 2. Нехай $B \subset \mathbb{R}^p$ – необмежена множина, для неї існує вичерпна послідовність $\{D_n : n \geq 1\}$, $f \in C(B)$. Інтегралом від функції f по множині B називають границю $\int\limits_B f(\vec{x})d\vec{x} = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{D_n} f(\vec{x})d\vec{x}$. Якщо вона існує, скінченна і не залежить від вибору вичерпної послідовності, інтеграл називають збіжним, інакше його називають розбіжним.

Теорема 1. Нехай $B \subset \mathbb{R}^p$ – необмежена множина, $f \in C(B)$ – невід'ємна. Для того, щоб невласний інтеграл $\int\limits_B f(\vec{x})d\vec{x}$ був збіжним, необхідно й достатньо, щоб для деякої вичерпної послідовності $\{D_n : n \geq 1\}$ послідовність інтегралів $\left\{\int\limits_{D_n} f(\vec{x})d\vec{x} \ : \ n \geq 1\right\}$ була обмежена.

Доведення. Необхідність. Якщо невласний інтеграл збіжний, то відповідна послідовність інтегралів для довільної вичерпної послідовності збіжна, а отже обмежена.

Достатність. Послідовність інтегралів неспадна та обмежена, а отже збіжна до деякого числа I. Розглянемо довільну іншу вичерпну послідовність $\{E_n : n \geq 1\}$. Тоді

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists R > 0 \ : \ E_n \subset B \cap \overline{B}(\overline{0}, R) \subset D_{k(n)}$$

для деякого номера $k(n)$ згідно означення. Тому

$$\int\limits_{E_n} f(\vec{x})d\vec{x} \leq \int\limits_{D_{k(n)}} f(\vec{x})d\vec{x} \leq I,$$

отже послідовність $\left\{\int\limits_{E_n} f(\vec{x})d\vec{x} \ : \ n \geq 1\right\}$ монотонна, обмежена і має границю, не меншу за I, тобто

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{E_n} f(\vec{x})d\vec{x} \leq \lim_{n\to\infty} \int\limits_{D_n} f(\vec{x})d\vec{x}.$$

Але в цих міркуваннях поміняти послідовності $\left\{\int\limits_{D_n} f(\vec{x})d\vec{x} \ : \ n \geq 1\right\}$ і $\left\{\int\limits_{E_n} f(\vec{x})d\vec{x} \ : \ n \geq 1\right\}$ місцями, отримаємо протилежну нерівність.

Теорема 2. Невласний кратний інтеграл збіжний тоді й лише тоді, коли він збіжний абсолютно, тобто збіжний інтеграл $\int\limits_B |f(\vec{x})|d\vec{x}$.

Зауваження. Цей факт означає, що умовно збіжних кратних інтегралів не існує. Зокрема, при $p = 1$ частковим випадком невласного кратного інтеграла не буде відомий невласний інтеграл.

Означення 3. Нехай $B \subset \mathbb{R}^p$ – необмежена множина, $f \in C(B)$. Якщо інтеграл $\int\limits_B f(\vec{x})d\vec{x}$ розбіжний, але існує і скінченна границя

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{B\cap\overline{B}(\overline{0},R)} f(\vec{x})d\vec{x},$$

то її називають головним значенням розбіжного інтеграла і позначають $v.p. \int\limits_B f(\vec{x})d\vec{x}$.

Приклади. 1. Інтеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ умовно збіжний, як звичайний невласний інтеграл, але розбіжний, як кратний. При цьому

$$v.p. \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

2. Інтеграл $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x}{x^2+1}dx$ розбіжний і як невласний, і як невласний кратний, проте $v.p. \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x}{x^2+1}dx = 0$.

Означення 1. Нехай $B \subset \mathbb{R}^p$ – обмежена множина, $x_0 \in B$, послідовність $\{D_n : n \geq 1\}$ компактних вимірних множин, задовольняє умови:

1) $\forall n \geq 1 \ : \ D_n \subset D_{n+1} \subset B$;

2) $\forall r > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} \ : \ B \backslash B(\overline{x_0}, r) \subset D_n$.

Таку послідовність $\{D_n : n \geq 1\}$ називають вичерпною для множини B.

Приклади. 1. Для множини $B = [0,1]$ і точки $x_0 = 0$ зручною послідовністю вичерпних множин є відрізки $D_n = [\frac{1}{n}, 1], \ n \geq 1$.

2. Для множини $B = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ і точки $x_0 = (0,0)$ зручною послідовністю вичерпних множин є кільця

$$D_n = \{(x_1, x_2) \mid \frac{1}{n^2} \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}, \ n \geq 1.$$

3. Для множини $B = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$ і точки $x_0 = (0,0,0)$ зручною послідовністю вичерпних множин є кільця

$$D_n = \{(x_1, x_2, x_3) \mid \frac{1}{n^2} \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}, \ n \geq 1.$$

Означення 2. Нехай $B \subset \mathbb{R}^p$ – обмежена множина, $x_0 \in B$, для неї існує вичерпна послідовність $\{D_n : n \geq 1\}$, $f \in C(B \backslash \{x_0\})$. Інтегралом від функції f по множині B називають границю

$$\int\limits_B f(\vec{x}) d\vec{x} = \lim_{n \to \infty} \int\limits_{D_n} f(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Якщо вона існує, скінченна і не залежить від вибору вичерпної послідовності, інтеграл називають збіжним, інакше його називають розбіжним.

Теорема 3. Нехай $B \subset \mathbb{R}^p$ – обмежена множина, $x_0 \in B$, $f \in C(B \backslash \{x_0\})$ – невід'ємна. Для того, щоб невласний інтеграл $\int\limits_B f(\vec{x})d\vec{x}$ був збіжним, необхідно й достатньо, щоб для деякої вичерпної послідовності $\{D_n : n \geq 1\}$ послідовність інтегралів $\left\{\int\limits_{D_n} f(\vec{x})d\vec{x} \,:\, n \geq 1\right\}$ була обмежена.

Доведення аналогічне теоремі 1.

Теорема 4. Невласний кратний інтеграл від необмеженої функції збіжний тоді й лише тоді, коли він збіжний абсолютно, тобто збіжний інтеграл $\int\limits_B |f(\vec{x})|d\vec{x}$.

Зауваження. Цей факт означає, що умовно збіжних кратних інтегралів не існує. Зокрема, при $p = 1$ частковим випадком невласного кратного інтеграла не буде відомий невласний інтеграл.

Означення 3. Нехай $B \subset \mathbb{R}^p$ – обмежена множина, $x_0 \in B$, $f \in C(B \backslash \{x_0\})$. Якщо інтеграл $\int\limits_B f(\vec{x})d\vec{x}$ розбіжний, але існує і скінченна границя $\lim\limits_{r\to 0} \int\limits_{B\backslash B(x_0,r)} f(\vec{x})d\vec{x}$, то її називають головним значенням розбіжного інтеграла і позначають $v.p. \int\limits_B f(\vec{x})d\vec{x}$.

Приклади. Інтеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ розбіжний і як невласний, і як невласний кратний, проте $v.p. \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = 0$.

Теорема 5. (Про заміну змінної). Якщо $A \subset \mathbb{R}^p$ – відкрита множина, функція $f \in C(A)$, $B \subset A$ – необмежена множина, збігається невласний кратний інтеграл $\int\limits_B f(\vec{x})d\vec{x}$. Якщо відображення $\vec{g} : A \to \mathbb{R}^p$ задовольняють умови теореми про заміну змінної на кожній множині з деякої вичерпної послідовності $\{D_n : n \geq 1\}$, то формула заміни змінної вірна для всієї множини B.

Ідея доведення. Запишемо формулу заміни змінної для кожної множини вичерпної послідовності і перейдемо до границі при $n \to \infty$. Послідовність $\{\vec{g}(D_n) \ : \ n \geq 1\}$ буде вичерпною для $\vec{g}(B)$, бо

$$\vec{g}^{-1}(\vec{g}(B) \cap \overline{B}(\overline{0}, R)) \subset B$$

– компактна, а отже, обмежена множина, а тому міститься в деякій множині D_n. (Для інтегралів від необмеженої функції міркування аналогічні).

Приклади. $\int\limits_{[0,+\infty)^2} e^{-x_1^2-x_2^2}dx_1dx_2 = \int\limits_{[0,+\infty)\times[0,\frac{\pi}{2}]} re^{-r^2}drd\varphi = \frac{\pi}{4}$.

При цьому за формулою інтегрування по циліндричній множині

$$\int\limits_{[0,+\infty)^2} e^{-x_1^2-x_2^2}dx_1dx_2 = \int\limits_{[0,+\infty)} e^{-x_1^2}dx_1 \cdot \int\limits_{[0,+\infty)} e^{-x_2^2}dx_2 = \left(\int\limits_{[0,+\infty)} e^{-x^2}dx\right)^2,$$

звідки отримаємо формулу для інтеграла Ейлера-Пуассона.