# СЕПАРАБЕЛЬНІСТЬ ТА ПОВНОТА МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ

Означення 1. Множину $A \subset X$ називають **скрізь щільною** в просторі $(X, d)$, якщо

$$\forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists y \in A \ : \ d(x, y) < \varepsilon.$$

Означення 2. Метричний простір, що містить не більш ніж зліченну і скрізь щільну підмножину, називають **сепарабельним**.

Приклади. 1. Простір $(\mathbb{R}^m, \rho)$ – сепарабельний, бо множина $\mathbb{Q}^m$ – скрізь щільна в ньому.

2. Простір $(C([a, b]), \rho)$ – сепарабельний, бо множина многочленів з раціональними коефіцієнтами скрізь щільна в ньому.

Означення 3. Послідовність $\{x_n : n \geq 1\}$ елементів метричного простору $(X, d)$ називають **фундаментальною,** якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall m, n \geq N \; : \; d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Означення 4. Метричний простір $(X, d)$ називають **повним,** якщо в ньому кожна фундаментальна послідовність збігається.

Приклади. 1. Простори $(\mathbb{R}^m, \rho)$ повні, бо в них збіжність і фундаментальність покоординатні.

2. Простір $(C([a, b]), \rho)$ повний за критерієм Коші для функціональних послідовностей.

3. Простір $X = (0, 1)$ з евклідовою метрикою неповний, бо фундаментальна послідовність $\left\{\frac{1}{n} \; : \; n \geq 1\right\}$ в ньому розбіжна.

Теорема 1. **(Узагальнення принципу вкладених відрізків).** Нехай $(X,d)$ – повний метричний простір, $\left\{\overline{B}(x_n,r_n) \ : \ n \geq 1\right\}$ – послідовність куль в цьому просторі, для яких справджуються умови:

1) $\forall n \geq 1 \ : \ \overline{B}(x_{n+1},r_{n+1}) \subset \overline{B}(x_n,r_n)$;
2) $r_n \to 0, \ n \to \infty$.

Тоді $\exists! \ x \in X \ \forall n \geq 1 \ : \ x \in \overline{B}(x_n,r_n)$.

Доведення. Доведемо фундаментальність послідовності $\{x_n : \ n \geq 1\}$.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ : \ r_n < \varepsilon,$$

отже

$$\forall m,n \geq N, \ m < n \ : \ d(x_n,x_m) \leq r_m < \varepsilon.$$

З фундаментальності в повному просторі випливає збіжність до деякого $x \in X$. При цьому, якщо в означенні фундаментальності спрямувати $n \to \infty$, отримаємо

$$\forall m \geq N \ : \ d(x,x_m) \leq r_m,$$

тобто $x \in \overline{B}(x_n,r_n)$ для всіх $n \geq N$, а отже, внаслідок вкладеності куль, для всіх $n$.

Нарешті, якщо існує інша точка $y \in X$ з потрібними властивостями, то

$$d(x,y) \leq d(x_n,x) + d(x_n,y) \leq 2r_n \to 0, \ n \to \infty,$$

отже $x = y$.

Приклади. 1. Таку властивість мають кулі в тривимірному просторі, круги на площині, подібні ромби на площині (кулі у відповідній метриці), і т.п.

2. Якщо простір неповний, твердження невірне. Розглянемо простір $X = (0,+\infty)$ і послідовність вкладених куль $\overline{B}(\frac{1}{n},\frac{1}{n}) = (0,\frac{2}{n}], \ n \geq 1$. Перетин всіх цих куль порожній.

Нехай $(X, d)$ – метричний простір, $f : X \to X$ – деяке відображення.

ОЗНАЧЕННЯ 5. Точку $x \in X$ називають **нерухомою точкою** відображення $f$, якщо $f(x) = x$.

ПРИКЛАДИ. 1. Якщо $X = \mathbb{R}$, то нерухома точка – це розв'язок рівняння $f(x) = x$. Наприклад, функція $y = \sin x$ має нерухому точку $x = 0$, функція $y = 2^x - 1$ має дві нерухомі точки $x = 0, x = 1$; функція $y = x + 1$ не має нерухомих точок.

2. Нехай $X = \mathbb{R}^3$, а $f$ ставить у відповідність координатам точки в фізичній системі в початковий момент її координати у деякий кінцевий момент.

Тоді при поступальному русі нерухомих точок немає, при обертальному русі є одна нерухома точка. Чи є нерухомі точки при стисканні тіла?

ОЗНАЧЕННЯ 6. Відображення $f$ називають **відображенням стиску,** якщо

$$\exists \lambda,\ 0 \leq \lambda < 1\ \forall x \in X\ \forall y \in X\ :\ d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y).$$

Теорема 2. **(Банаха).** Нехай $(X, d)$ – повний метричний простір, $f : X \to X$ – відображення стиску. Тоді відображення $f$ має єдину нерухому точку.

Доведення. Нехай $x_0 \in X$ – довільний елемент. Покладемо

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), ...$$

Доведемо, що послідовність $\{x_n : n \geq 1\}$ фундаментальна.

Маємо

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq \lambda d(x_n, x_{n-1}) \leq ...$$
$$\leq \lambda^n d(x_1, x_0), \ n \geq 1,$$

звідки для $m < n$ маємо

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + ... + d(x_{n-1}, x_n) \leq$$
$$\leq \lambda^m d(x_0, x_1) + ... + \lambda^{n-1} d(x_0, x_1) \leq \frac{\lambda^m}{1-\lambda} d(x_0, x_1).$$

В повному просторі з фундаментальності випливає збіжність до деякого елемента $x^* \in X$. Крім того,

$$d(f(x_n), f(x^*)) \leq \lambda d(x_n, x^*) \to 0, \ n \to \infty.$$

Якщо в рівності $x_{n+1} = f(x_n)$ перейти до границі при $n \to \infty$, отримаємо $x^* = f(x^*)$, тобто $x^*$ – нерухома точка.

Якщо припустити, що $z \in X$ – інша нерухома точка, то отримаємо

$$d(z, x^*) = d(f(z), f(x^*)) \leq \lambda d(z, x^*),$$

звідки $d(z, x^*) \leq 0$.

Зауваження. Спрямуємо в оцінці для фундаментальності $n \to \infty$ :

$$d(x_m, x) \leq \frac{\lambda^m}{1-\lambda} d(x_0, x_1).$$

Ця оцінка показує, наскільки вказаний у доведенні конструктивний метод наближає нас до шуканої точки.

Застосуємо теорему Банаха до розв'язання деяких рівнянь.

Означення 7. Функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ задовольняє на $[a, b]$ умову Ліпшиця зі сталою $L$, якщо

$$\forall x, y \in [a, b] \ : \ |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Позначення: $f \in Lip([a, b])$.

Теорема 3. **(Про розв'язання рівняння $f(x) = x$).** Нехай $f : [a, b] \to [a, b],\ f \in Lip([a, b])$ зі сталою $L < 1$. Тоді рівняння $f(x) = x$ має єдиний на $[a, b]$ розв'язок.

Доведення. Простір $X = [a, b]$ з евклідовою відстанню – повний, $f$ – відображення стиску, отже ця теорема випливає з теореми Банаха.

Теорема 4. **(Про розв'язання рівняння $F(x) = 0$).** Нехай $F : [a, b] \to \mathbb{R},\ F(a) < 0 < F(b)$,

$$\exists 0 < m \leq M \ \forall x \in [a, b] \ \exists F'(x) \in [m, M].$$

Тоді рівняння $F(x) = 0$ має єдиний на $[a, b]$ розв'язок.

Доведення. Простір $X = [a, b]$ з евклідовою відстанню – повний, $f(x) = x - \mu F(x)$ – відображення стиску з числом $\mu \in (0, M^{-1})$. Дійсно, використовуючи теорему Лагранжа, маємо

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y| = |1 - \mu F'(c)| \cdot |x - y| \leq (1 - \mu m)|x - y|,$$

де $\lambda = 1 - \mu m < 1$. Крім того,

$$f(a) = a - \mu F(a) > a,\ f'(x) = 1 - \mu F'(x) > 0,\ f(b) = b - \mu F(b) < b,$$

тому $f : [a, b] \to [a, b]$. Отже, ця теорема випливає з теореми Банаха.

Зауваження. 1. Існування розв'язку випливає з теореми Коші.

2. В обох цих випадках важливо, що розв'язок можна побудувати, як в теоремі Банаха, методом послідовних наближень.

Приклади. Розв'яжемо наближено рівняння $x^3 - x - 1 = 0$.

Нехай
$$F(x) = x^3 - x - 1,\ [a,b] = [1,2],\ m = 2, M = 11,\ \mu = \frac{1}{12},\ \lambda = 1 - \mu m = \frac{5}{6}.$$
Тоді
$$f(x) = \frac{21x + 1 - x^3}{20}.$$
Нехай
$$x_0 = 1,\ x_1 = \frac{21}{20},$$
отже
$$|x_n - x^*| < \left(\frac{5}{6}\right)^n \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} \left(\frac{21}{20} - 1\right) = \frac{3}{10} \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$
Тому ми точно знаємо, що значення $x_1$ наближає корінь з точністю не менше $\frac{1}{4} = 0.25$, а $x_{11}$ – з точністю не менше $0.041$.

Теорема 5. **(Про розв'язання системи лінійних рівнянь).** Нехай система з $m$ лінійних рівнянь $Ax = b$ задана матрицею $A$ $m \times m$ та вектором $b \in \mathbb{R}^m$. Нехай також $I$ – одинична матриця, тобто $I_{ij} = 0,\ i \neq j;\ I_{ii} = 1,\ 1 \leq i \leq m$, і $C = A - I$. Якщо

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} (A_{ij} - I_{ij})^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} C_{ij}^2 = \lambda^2 < 1,$$

то система має єдиний розв'язок.

Доведення. В повному метричному просторі $(\mathbb{R}^m,\ \rho)$ розглянемо відображення

$$f(x) = x - Ax + b.$$

Це відображення є відображенням стиску, бо

$$\rho^2(f(x), f(z)) = \sum_{i=1}^{m} (x_i - (Ax)_i + b - z_i + (Az)_i - b)^2 = \sum_{i=1}^{m} ((Cx)_i - (Cz)_i)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{j=1}^{m} C_{ij}(x_j - z_j) \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{j=1}^{m} C_{ij}^2 \right) \left( \sum_{j=1}^{m} (x_j - z_j)^2 \right) \leq \lambda^2 \rho(x, z).$$

**Теорема 6 (Про розв'язання диференціальних рівнянь).** Нехай $F : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задовольняє умови:

1) $F \in C([a,b] \times \mathbb{R})$;

2) $\exists L > 0 \ : \ \forall x \in [a,b] \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \ : \ |F(x,y_1) - F(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$.

Тоді для довільного $y_0 \in \mathbb{R}$ задача Коші

$$\begin{cases} y'(x) = F(x, y(x)), \ a \leq x \leq b, \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

має єдиний розв'язок.

Доведення. Задача Коші еквівалентна інтегральному рівнянню

$$y(t) = y_0 + \int_a^t F(s, y(s)) ds, \ t \in [a,b],$$

відносно функції $y \in C([a,b])$.

У повному метричному просторі $C([a,b])$ з метрикою

$$d(x,y) = \max_{t \in [a,b]} e^{-k(t-a)} |x(t) - y(t)|,$$

де $k > L$, розглянемо відображення $f : C([a,b]) \to C([a,b])$, де

$$f(y)(t) = y_0 + \int_a^t F(s, y(s)) ds, \ x \in [a,b],$$

Можна перевірити, що це відображення є відображенням стиску при $\lambda = L/k$. Дійсно,

$$d(f(x), f(y)) = \max_{t \in [a,b]} e^{-k(t-a)} \left| \int_{t_0}^t (F(s, x(s)) - F(s, y(s))) dt \right| \leq$$

$$\leq \max_{t \in [a,b]} e^{-k(t-a)} \int_a^t L \left| x(s) - y(s) \right| dt \leq$$

$$\leq \max_{t \in [a,b]} L e^{-k(t-a)} (t-a) d(x,y) = \frac{L d(x,y)}{k} = \lambda d(x,y).$$

Тому воно має нерухому точку.

Зауваження. З розв'язку ясно, що за допомогою теореми Банаха можна розв'язувати і інтегральні рівняння.