Групи порядку $2p$

Євгенія Кочубінська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

5 жовтня 2022

FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS

Групи порядку 4

Твердження

Група порядку 4 ізоморфна або $\mathbb{Z}_4$, або K_4.

Доведення.

Нехай G — група порядку 4. Якщо G містить елемент порядку 4, то $G \simeq \mathbb{Z}_4$. $\square$

Групи порядку 4

Доведення.

Нехай G не містить елементів порядку 4, тоді всі неодиничні елементи цієї групи мають порядок 2.
Побудуємо таблицю Келі для цієї групи:

$$\begin{array}{c|cccc} & e & a & b & c \\ \hline e & e & a & b & c \\ a & a & e & c & b \\ b & b & c & e & a \\ c & c & b & a & e \end{array}$$

Знайдемо ab: $ab \neq e,$ бо $a^2 = e$; $ab \neq a,$ бо $ae = e$; $ab \neq b,$ бо $eb = b \Rightarrow ab = c$. $\square$

Групи порядку $2p$, $p \neq 2$

Твердження

Нехай p — просте число, $p \neq 2$. Нехай $|G| = 2p$. Тоді $G \simeq \mathbb{Z}_{2p}$ або $G \simeq D_p$.

Доведення.

Якщо G містить елемент порядку $2p$, то $G \simeq \mathbb{Z}_{2p}$.
Нехай G не містить елементів порядку $2p$. Тоді порядки неодиничних елементів 2 або p.
Якщо всі елементи мають порядок 2, то $\{e, a, b, ab\}$, $a \neq b$, — підгрупа G, але $4 \not| 2p$.
Отже, існує елемент порядку p. $\square$

Доведення.

Отже, існує елемент порядку p. Нехай $H < G$, $|H| = p$.
Тоді $G = H \sqcup aH$, $a \in G \setminus H \Rightarrow a^2H = H \Rightarrow a^2 \in H$.
Якщо $a^2 \neq e$, то $\operatorname{ord}(a^2) = p \Rightarrow \operatorname{ord}(a) = p$.
Тоді $\langle a^2 \rangle = \langle a \rangle = H$, але $a \in G \setminus H$.
Отже, $a^2 = e$ для всіх $a \in G \setminus H$.
Таким чином,

$$H \sqcup aH = \{\text{елементи порядку } p\} \sqcup \{\text{елементи порядку } 2\} :$$

$$H \longleftrightarrow \text{ повороти }, aH \longleftrightarrow \text{ симетрії}$$

Правило множення:

$$ah_1 \cdot ah_2 = ah_1 \cdot ah_1 h_1^{-1} h_2 = h_1^{-1} h_2. \qquad \square$$

Наслідок

Група порядку 6 ізоморфна $\mathbb{Z}_6$ або $D_3 \simeq \mathcal{S}_3$.