Універсальна властивість вільної групи

Євгенія Кочубінська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

26 жовтня 2022

FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS

Універсальна властивість вільної групи

Теорема

Нехай група G породжується множиною елементів $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$. Тоді для вільної групи $F(X)$ з системою твірних $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ існує єдиний гомоморфізм

$$\varphi : F(X) \to G,$$

при якому

$$\varphi(x_i) = s_i, \text{ для всіх } i = 1, \ldots, n.$$

Універсальна властивість вільної групи: доведення

Нехай $\varphi : F(X) \to G$ — такий гомоморфізм, що $\varphi(x_i) = s_i$ для всіх $i = 1, \ldots, n$.

$F(X)$ — вільна група над алфавітом X, тому кожний елемент $w \in F(X)$ визначаєтеся єдиним нескоротним словом

$$w = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots x_{i_r}^{\varepsilon_r}, \text{ де } x_{i_j} \in X, \varepsilon_j \in \{1, -1\}.$$

Оскільки φ — гомоморфізм, то

$$\begin{aligned}
\varphi(x_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots x_{i_r}^{\varepsilon_r}) &= \varphi(x_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots x_{i_{r-1}}^{\varepsilon_{r-1}} \cdot x_{i_r}^{\varepsilon_r}) = \varphi(x_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots x_{i_{r-1}}^{\varepsilon_{r-1}})\varphi(x_{i_r}^{\varepsilon_r}) = \\
&= \varphi(x_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots x_{i_{r-1}}^{\varepsilon_{r-1}})\varphi(x_{i_r})^{\varepsilon_r} = \varphi(x_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots x_{i_{r-1}}^{\varepsilon_{r-1}})s_{i_r}^{\varepsilon_r} = \cdots = \\
&= \varphi(x_{i_1})^{\varepsilon_1} s_{i_2}^{\varepsilon_2} \ldots s_{i_r}^{\varepsilon_r} = s_{i_1}^{\varepsilon_1} s_{i_2}^{\varepsilon_2} \ldots s_{i_r}^{\varepsilon_r}.
\end{aligned}$$

Отже, якщо існує такий гомоморфізм, то він єдиний.

Універсальна властивість вільної групи: доведення

Відображення $\varphi : F(X) \to G, \quad \varphi(x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{i_r}^{\varepsilon_r}) = s_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots s_{i_r}^{\varepsilon_r}$ задане коректно.

Нехай $u, v \in F(X)$ та

$$u = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{i_n}^{\varepsilon_n} x_{j_1}^{\varepsilon'_1} \dots x_{j_m}^{\varepsilon'_m}, \quad v = x_{j_m}^{-\varepsilon'_m} \dots x_{j_1}^{-\varepsilon'_1} x_{i_{n+1}}^{\varepsilon_{n+1}} \dots x_{i_k}^{\varepsilon_k}$$

— відповідні нескоротні слова в алфавіті $X^{\{\pm 1\}}, x_{i_s}, x_{j_t} \in X, \varepsilon_s, \varepsilon'_t \in \{1, -1\}, x_{i_n} \neq x_{i_{n+1}}$.

Тоді

$$u \cdot v = \overline{uv} = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{i_n}^{\varepsilon_n} x_{i_{n+1}}^{\varepsilon_{n+1}} \dots x_{i_k}^{\varepsilon_k}.$$

Звідси

$$\varphi(u \cdot v) = s_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots s_{i_n}^{\varepsilon_n} s_{i_{n+1}}^{\varepsilon_{n+1}} \dots s_{i_k}^{\varepsilon_k} =$$

$$= s_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots s_{i_n}^{\varepsilon_n} s_{j_1}^{\varepsilon'_1} \dots s_{j_m}^{\varepsilon'_m} \cdot s_{j_m}^{-\varepsilon'_m} \dots s_{j_1}^{-\varepsilon'_1} s_{i_{n+1}}^{\varepsilon_{n+1}} \dots s_{i_k}^{\varepsilon_k} = \varphi(u)\varphi(v).$$

Універсальна властивість вільної групи

Теорема

Для довільного відображення $\varphi : X \to G$ існує єдиний такий гомомофізм $\varphi^* : F(X) \to G$, який продовжує відображення φ та робить наступну діаграму комутативною:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\varphi"'] & F(X) \arrow[d, dashed, "\varphi^*"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Що дає універсальна властивість?

S — скінченна система твірних групи $G \Rightarrow \varphi : F(X) \to G$ — епіморфізм.

Отже, за основною теоремою про гомоморфізм

$$G \simeq F(X)/\operatorname{Ker}\varphi.$$

Теорема

Кожна скінченно породжена група G ізоморфна факторгрупі деякої вільної групи скінченного рангу.