Прямі добутки груп

Євгенія Кочубінська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

23 листопада 2022

FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS

Зовнішній прямий добуток груп

Зовнішнім прямим добутком груп $(A,\circ)$ та $(B,*)$ називається множина

$$A\times B=\{(a,b)\,|\,a\in A, b\in B\}$$

із дією, визначеною правилом

$$(a_1,b_1)(a_2,b_2)=(a_1\circ a_2, b_1 * b_2).$$

Позначають $A\times B$.

Зовнішній прямий добуток груп

$$\begin{aligned}((a_1, b_1)(a_2, b_2))(a_3, b_3) &= (a_1 \circ a_2, b_1 * b_2)(a_3, b_3) = \\ &= ((a_1 \circ a_2) \circ a_3, (b_1 * b_2) * b_3) = (a_1 \circ (a_2 \circ a_3), b_1 * (b_2 * b_3)) = \\ &= (a_1, b_1)(a_2 \circ a_3, b_2 * b_3) = (a_1, b_1)((a_2, b_2)(a_3, b_3));\end{aligned}$$

Якщо e_A, e_B — нейтральні в A та B відповідно, то (e_A, e_B) — нейтральний в $A \times B$:

$$(e_A, e_B)(a, b) = (e_A \circ a, e_B * b) = (a, b) = (a \circ e_A, b * e_B) = (a, b)(e_A, e_B);$$

Оберненим до (a, b) є (a^{-1}, b^{-1}):

$$(a, b)(a^{-1}, b^{-1}) = (a \circ a^{-1}, b * b^{-1}) = (e_A, e_B) = (a^{-1} \circ a, b^{-1} * b) = (a^{-1}, b^{-1})(a, b).$$

Зовнішній прямий добуток груп

Твердження

Зовнішній прямий добуток груп є групою.

Зовнішній прямий добуток груп

- Прямий добуток абелевих груп є абелевою групою.
- Якщо групи A, B — скінченні, то $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.
- Якщо порядки елементів $a \in A$, $b \in B$ — скінченні, то $\mathrm{ord}((a, b)) = \text{НСК}(\mathrm{ord}(a), \mathrm{ord}(b))$.
- Прямий добуток p-груп є p-групою.
- Прямий добуток циклічних груп не завжди є циклічною групою.

$$Z_2 \times \oplus Z_2 = \left\{(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{1}), (\overline{1}, \overline{1})\right\}.$$

Розглянемо відображення

$$\mu_A : A \to A \times B : \quad a \mapsto (a, e_B);$$
$$\mu_B : B \to A \times B : \quad b \mapsto (e_A, b).$$

Ці відображення є мономорфізмами:

$$\mu_A(a_1a_2) = (a_1a_2, e_B) = (a_1, e_B)(a_2, e_B) = \mu_A(a_1)\mu_A(a_2);$$
$$\mu_B(b_1b_2) = (e_A, b_1b_2) = (e_A, b_1)(e_A, b_2) = \mu_B(b_1)\mu_B(b_2).$$

Ін'єктивність очевидна.

Ототожнимо

$$A \longleftrightarrow A' = \mu_A(A), \quad B \longleftrightarrow B' = \mu_B(B).$$

Тоді

$$(a, b) \longleftrightarrow a'b' = (a, e_B)(e_A, b).$$

Теорема 1

Теорема

Нехай $A \times B$ — зовнішній прямий добуток груп A і B. Тоді

1. $A' \triangleleft A \times B$, $B' \triangleleft A \times B$;
2. $A' \cap B' = \{(e_A, e_B)\}$;
3. $A'B' = A \times B$;
4. довільний елемент $g \in A \times B$ розкладається у добуток $g = a'b'$, де $a' \in A'$, $b' \in B'$, єдиним чином;
5. $a'b' = b'a'$ для довільних $a' \in A'$, $b' \in B'$.

Доведення.

1. Для довільних $(\tilde{a}, e_B) \in A'$, $(a, b) \in A \times B$:
$$(a,b)^{-1}(\tilde{a}, e_B)(a,b) = (a^{-1}\tilde{a}a, b^{-1}e_B b) = (a^{-1}\tilde{a}a, e_B) \in A' \Rightarrow A' \triangleleft A \times B.$$
Аналогічно доводиться, що $B' \triangleleft A \times B$.
2. Очевидно.
3. $A'B' = \{(a, e_B)(e_A, b) \,|\, a \in A, b \in B\} = \{(a,b) \,|\, a \in A, b \in B\} = A \times B.$
4. $$\begin{aligned} a_1'b_1' = a_2'b_2' \quad &\Rightarrow \quad (a_2')^{-1}a_1' = b_2'(b_1')^{-1} \\ &\Rightarrow \quad \left((a_2')^{-1}a_1', b_2'(b_1')^{-1}\right) = (e_A, e_B) \\ &\Rightarrow \quad a_1' = a_2', b_1' = b_2'. \end{aligned}$$
5. $a'b' = (a, e_B)(e_A, b) = (a,b) = (e_A, b)(a, e_B) = b'a'.$

$\square$

Внутрішній прямий добуток груп

Група G є *внутрішнім прямим добутком* своїх підгруп A та B, якщо

1. $A \triangleleft G$, $B \triangleleft G$;
2. кожний елемент $g \in G$ однозначно записується у вигляді $g = ab$, де $a \in A$, $b \in B$.

Твердження

Умову 1) означення внутрішнього прямого добутку можна замінити умовою
1′) $ab = ba$ для довільних $a \in A$, $b \in B$.

Доведення.

1) $\Rightarrow$ 1′)
Нехай $G = A \times B$.
Тоді для довільних $a \in A$, $b \in B$:

$$\left.\begin{aligned} [a, b] &= a^{-1}b^{-1}ab = (a^{-1}b^{-1}a)b \in B \\ &= a^{-1}(b^{-1}ab) \in A \end{aligned}\right\} \Rightarrow [a, b] \in A \cap B$$

Якщо $[a, b] \neq e$, то маємо два зображення елемента $[a, b]$:

$$[a, b] = \tilde{a}e = e\tilde{b}, \text{ де } \tilde{a} = a^{-1}a_1 \in A, \tilde{b} = b_1 b \in B.$$

Отже, $[a, b] = e$ та $ab = ba$. $\square$

Твердження

Умову 1) означення внутрішнього прямого добутку можна замінити умовою
1′) $ab = ba$ для довільних $a \in A$, $b \in B$.

Доведення.

1′) $\Rightarrow$ 1) Довільний $g \in G$ єдиним чином записується у вигляді $g = ab$, де $a \in A$, $b \in B$.
Тому для кожного $a' \in A$:

$$g^{-1}a'g = b^{-1}a^{-1}a'ab = a^{-1}a'ab^{-1}b = a^{-1}a'a \in A \Rightarrow A \triangleleft G.$$

Аналогічно доводиться, що $B \triangleleft G$. $\square$

Критерій розкладності у прямий добуток

Теорема

Група G розкладається у прямий добуток своїх підгруп A і B тоді лише тоді, коли

1. $A \lhd G$, $B \lhd G$;
2. $A \cap B = \{e\}$;
3. $\langle A, B \rangle = G$.

Доведення.

(⇒) Випливає з теореми 1.
(⇐) Оскільки $A \lhd G$, $B \lhd G$, то

$$[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab \in A \cap B.$$

Але $A \cap B = \{e\}$, тому $ab = ba$ для довільних $a \in A$, $b \in B$.
З умови 3) випливає, що кожний $g \in G$ можна подати у вигляді

$$g = a_1 b_1 \dots a_k b_k, \quad a_i \in A, b_i \in B.$$

Оскільки елементи підгруп A і B комутують, то маємо

$$g = a_1 \dots a_k b_1 \dots b_k = ab, \text{ де } a = a_1 \dots a_k \in A, b = b_1 \dots b_k \in B.$$

Припустимо, що $ab = a_1 b_1$. Тоді

$$a_1^{-1}a = b_1 b^{-1} \overset{2)}{=} e.$$

Тому $a = a_1, b = b_1$. □

Приклади

Приклад

1. $C \simeq R \oplus R; \quad a + bi \mapsto (a, b)$
2. $C^* \simeq R^+ \times T; \quad r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
3. $R^* \simeq \{1, -1\} \times R^+.$

Антиприклад

1. $\mathcal{S}_3$;
2. D_4;
3. Q_8;
4. Z;
5. Q.

Нехай $G_1, G_2, \dots, G_k$ — групи.

На $G_1 \times \dots \times G_k$ введемо дію

$$(g_1, \dots, g_k)(g_1', \dots, g_k') = (g_1 g_1', \dots, g_k g_k').$$

$G_1 \times \dots \times G_k$ з такою дією є групою.

Теорема (Критерій розкладності)

Група G розкладається у внутрішній прямий добуток своїх підгруп $G_1, \dots, G_k$, якщо

1. $G = \langle G_1, \dots, G_k \rangle$;
2. $G_i \lhd G$ для $i = 1, \dots, k$;
3. $G_i \cap \langle G_j, 1 \le j \le k, j \ne i \rangle = \{e\}$.