

Задачі про розфарбування

Євгенія Кочубінська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

16 листопада 2022



FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS

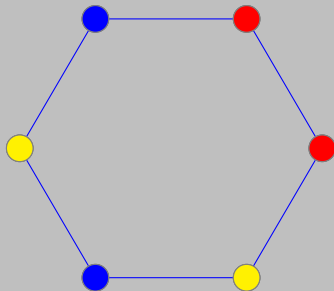
Задача 1

Задача

Скількома способами можна розфарбувати сидіння каруселі на малюнку, якщо є фарби трьох кольорів?

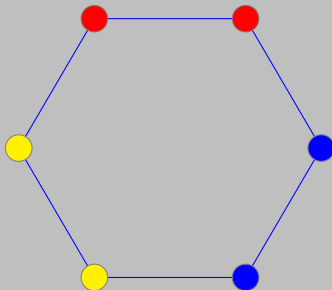


Задача 1. Розв'язання



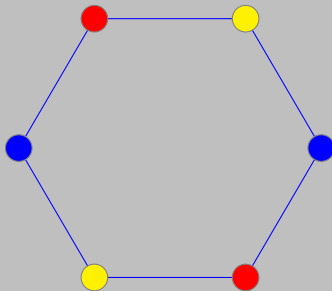
Задача 1. Розв'язання

Геометрично однакові розфарбування:



Задача 1. Розв'язання

Геометрично різні розфарбування:



Задача 1. Розв'язання

Група G — група Π_6 поворотів правильного шестикутника.

Множина M — множина розфарбованих у три кольори правильних шестикутників.

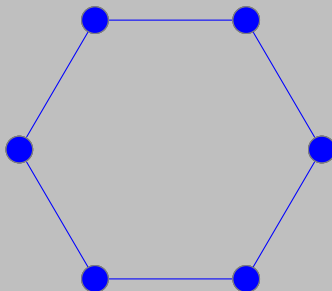
Група G діє на множині M .

Кількість геометрично різних розфарбувань = кількості орбіт дії (G, M) :

$$\frac{1}{6} \sum_{g \in \Pi_6} \chi(g).$$

Задача 1. Розв'язання

g	Цикловий тип	$\chi(g)$
0	$(\bullet)(\bullet)(\bullet)(\bullet)(\bullet)(\bullet)$	3^6
$\frac{\pi}{3}$	$(\bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet)$	3
$\frac{2\pi}{3}$	$(\bullet \bullet \bullet)(\bullet \bullet \bullet)$	3^2
π	$(\bullet \bullet)(\bullet \bullet)(\bullet \bullet)$	3^3
$\frac{4\pi}{3}$	$(\bullet \bullet \bullet)(\bullet \bullet \bullet)$	3^2
$\frac{5\pi}{3}$	$(\bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet)$	3



Кількість геометрично різних розфарбувань:

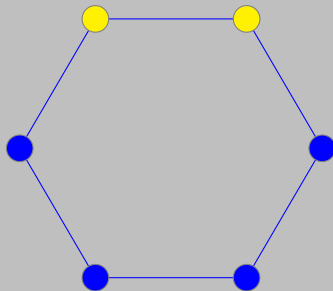
$$\frac{1}{6} \sum_{g \in \Pi_6} \chi(g) = \frac{3^6 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^2 + 3}{6} = 130.$$

Задача 2

Задача

Скільки різних разків намиста можна скласти, якщо у вас є 2 жовтні та 4 сині намистини?

Задача 2. Розв'язання



Задача 2. Розв'язання

Група G — група D_6 рухів правильного шестикутника.

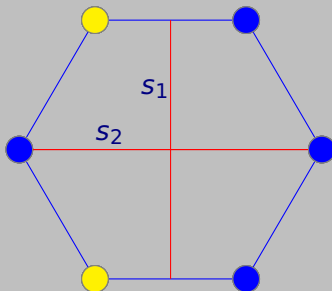
Множина M — множина розфарбованих у два кольори правильних шестикутників, у яких дві вершини жовті, а чотири сині.

Група G діє на множині M .

Кількість геометрично різних розфарбувань = кількості орбіт дії (G, M) :

$$\frac{1}{12} \sum_{g \in D_6} \chi(g).$$

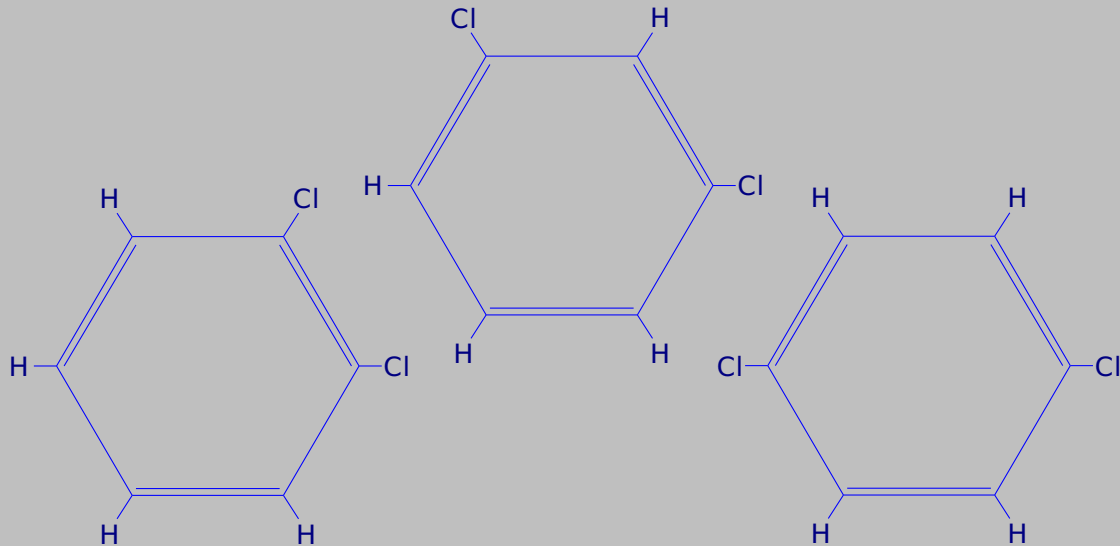
g	Цикловий тип	$\chi(g)$
0	$(\bullet)(\bullet)(\bullet)(\bullet)(\bullet)(\bullet)$	$\binom{6}{2}$
$\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$	$(\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet)$	0
$\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$	$(\bullet\bullet\bullet)(\bullet\bullet\bullet)$	0
π	$(\bullet\bullet)(\bullet\bullet)(\bullet\bullet)$	3
$3 \times s_1$	$(\bullet\bullet)(\bullet\bullet)(\bullet\bullet)$	3
$3 \times s_2$	$(\bullet)(\bullet)(\bullet\bullet)(\bullet\bullet)$	3



Кількість геометрично різних розфарбувань:

$$\frac{1}{12} \sum_{g \in D_6} \chi(g) = \frac{15 + 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3}{12} = 3.$$

Дихлорбензол $C_6H_4Cl_2$



Задача 3

Задача

Скількома геометрично різними способами можна розфарбувати ребра куба, якщо є фарби k кольорів?

Задача 3. Розв'язання

Група G — група поворотів куба.

Множина M — множина розфарбованих у k кольорів кубів.

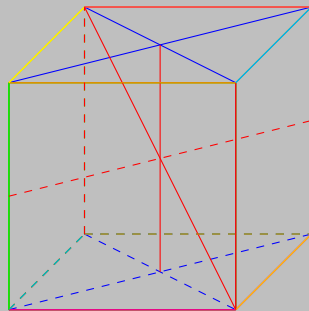
Група G діє на множині M .

Кількість геометрично різних розфарбувань = кількості орбіт дії (G, M) :

$$\frac{1}{24} \sum_{g \in G} \chi(g).$$

Задача 3

g	Кількість	Цикловий тип	$\chi(g)$
0	1	$(\bullet)(\bullet)\dots(\bullet)$	k^{12}
$\frac{\pi}{2}$	3	$(\bullet\bullet\bullet\bullet)(\bullet\bullet\bullet\bullet)(\bullet\bullet\bullet\bullet)$	k^3
π	3	$(\bullet\bullet)(\bullet\bullet)(\bullet\bullet)(\bullet\bullet)(\bullet\bullet)(\bullet\bullet)$	k^6
$\frac{3\pi}{2}$	3	$(\bullet\bullet\bullet\bullet)(\bullet\bullet\bullet\bullet)(\bullet\bullet\bullet\bullet)$	k^3
$\frac{2\pi}{3}$	4	$(\bullet\bullet\bullet)(\bullet\bullet\bullet)(\bullet\bullet\bullet)(\bullet\bullet\bullet)$	k^4
$\frac{4\pi}{3}$	4	$(\bullet\bullet\bullet)(\bullet\bullet\bullet)(\bullet\bullet\bullet)(\bullet\bullet\bullet)$	k^4
π	6	$(\bullet)(\bullet)(\bullet\bullet)(\bullet\bullet)(\bullet\bullet)(\bullet\bullet)(\bullet\bullet)$	k^7



$$\frac{1}{24} \sum_{g \in G} \chi(g) = \frac{k^{12} + 6k^3 + 3k^6 + 8k^4 + 6k^7}{24}.$$