ОЗНАЧЕННЯ КРАТНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Означення 1. Нехай $A \in \mathcal{K}_p$, $f : A \to \mathbb{R}$ – обмежена функція. Інтегральною сумою, що відповідає функції f, розбиттю простору порядку n та набору точок $\xi_Q \in Q$, $Q \in \pi^{(n)}, Q \subset A_{(n)}$, назвемо вираз

$$S_n(f, \{\xi_Q\}) = \sum_{Q \in \pi^{(n)}, Q \subset A_{(n)}} f(\xi_Q) m(Q).$$

Зауваження. Якщо $A_{(n)} = \varnothing$, вважатимемо, що $S_n(f, \{\xi_Q\}) = 0$.

Означення 2. Нехай $A \in \mathcal{K}_p$, $f : A \to \mathbb{R}$ – обмежена функція. Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{n \to \infty} S_n(f, \{\xi_Q\}) = I$, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \; \forall \{\xi_Q\} \; : \; |S_n(f, \{\xi_Q\}) - I| < \varepsilon,$$

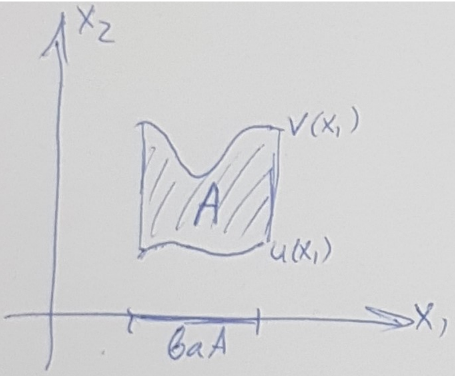
то функцію f називають інтегровною на множині A, а число I називають інтегралом від функції f по множині A.

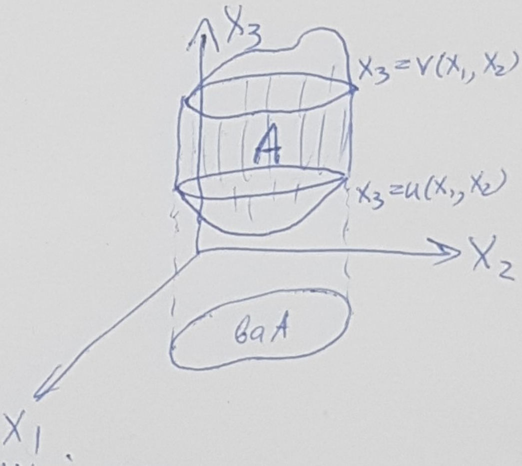
Позначення. $I = \int\limits_A f(\vec{x}) d\vec{x} = \int\limits_A f(x_1, ..., x_p) dx_1 ... dx_p$.

У випадку $p = 1$ маємо звичайний інтеграл Рімана.

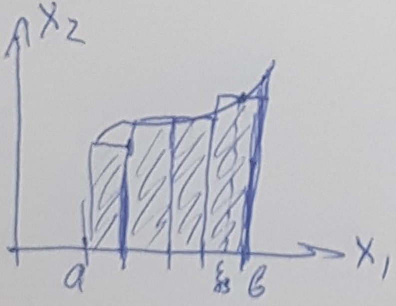
У випадку $p = 2$ маємо подвійний інтеграл $I = \int\limits_A f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int\limits_A\int f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$.

У випадку $p = 3$ маємо потрійний інтеграл $I = \int\limits_A f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \int\int\limits_A\int f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3$.

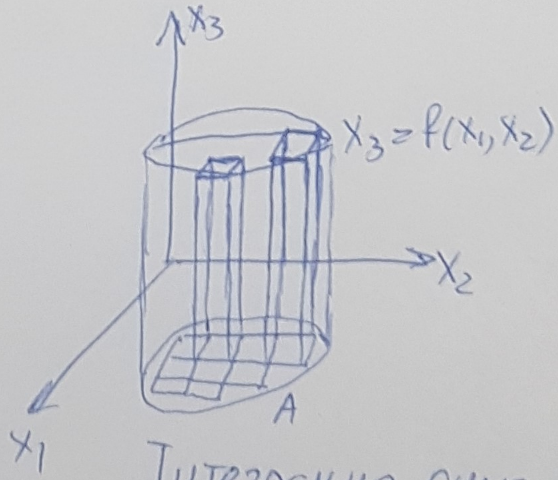




Циліндричні множини



Інтегральна сума в $\mathbb{R}$



Інтегральна сума в $\mathbb{R}^2$

Властивості інтеграла.

1. Нехай $A \in \mathcal{K}$, $c \in \mathbb{R}$ і $f(x) = c$, $x \in A$. Тоді $\int\limits_A c d\vec{x} = cm(A)$.

2. Нехай $A \in \mathcal{K}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ і $f_1, f_2 : A \to \mathbb{R}$ – обмежені на A. Тоді $\int\limits_A (c_1 f_1(\vec{x}) + c_2 f_2(\vec{x})) d\vec{x} = c_1 \int\limits_A f_1(\vec{x}) d\vec{x} + c_2 \int\limits_A f_2(\vec{x}) d\vec{x}$.

3. Нехай $A, B \in \mathcal{K}$, $m(A \cap B) = 0$, і $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ – обмежена на $A \cup B$. Тоді $\int\limits_{A \cup B} f(\vec{x}) d\vec{x} = \int\limits_A f(\vec{x}) d\vec{x} + \int\limits_B f(\vec{x}) d\vec{x}$.

4. Нехай $A \in \mathcal{K}$, і $f : A \to \mathbb{R}$ – інтегровна на A. Тоді $|f|$ інтегровна на A і $|\int\limits_A f(\vec{x}) d\vec{x}| \le \int\limits_A |f(\vec{x})| d\vec{x}$.

5. Нехай $A \in \mathcal{K}$, $f : A \to \mathbb{R}$ – інтегровна на A і $f(\vec{x}) \ge 0$, $\vec{x} \in A$. Тоді $\int\limits_A f(\vec{x}) d\vec{x} \ge 0$.

6. Нехай $A \in \mathcal{K}$, $f_1, f_2 : A \to \mathbb{R}$ – інтегровні на A і $f_1(\vec{x}) \ge f_2(\vec{x})$, $\vec{x} \in A$. Тоді $\int\limits_A f_1(\vec{x}) d\vec{x} \ge \int\limits_A f_2(\vec{x}) d\vec{x}$.

7. (Теорема про середнє). Нехай $A \in K$ – опукла множина, тобто разом з будь-якими двома своїми точками містить відрізок, що їх з'єднує, $f \in C(A)$. Тоді $\exists \vec{x}_0 \in A \ : \ \int\limits_A f(\vec{x}) d\vec{x} = f(\vec{x}_0) m(A)$.

8. Нехай $B \in \mathcal{K}$, $f : B \to \mathbb{R}$ – обмежена на B, інтегровна на $B_{(n)}$, $n \ge 1$. Тоді існує границя $J = \lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_{B_{(n)}} f(\vec{x}) d\vec{x}$, f інтегровна на B і $\int\limits_B f(\vec{x}) d\vec{x} = J$.

Доведення. 1. $S_n(f, \{\xi_Q\}) = cm(A_{(n)}) \to cm(A)$, $n \to \infty$.

2. $S_n(c_1 f_1 + c_2 f_2, \{\xi_Q\}) = c_1 S_n(f_1, \{\xi_Q\}) + c_2 S_n(f_2, \{\xi_Q\})$. Перейдемо в цій рівності до границі при $n \to \infty$.

3. $A_{(n)}$ і $B_{(n)}$ не мають спільних брусів, тому $S_n(f, \{\xi_Q(A \cup B)\}) = S_n(f, \{\xi_Q(A)\}) + S_n(f, \{\xi_Q(B)\})$, $n \ge 0$. Перейдемо в цій рівності до границі при $n \to \infty$.

4. $|S_n(f, \{\xi_Q\})| \le S_n(|f|, \{\xi_Q\})$, $n \ge 0$. Перейдемо в цій нерівності до границі при $n \to \infty$.

5. $S_n(f, \{\xi_Q\}) \ge 0$, $n \ge 0$. Перейдемо в цій нерівності до границі при $n \to \infty$.

6. $S_n(f_1, \{\xi_Q\})| \ge S_n(f_2, \{\xi_Q\})$, $n \ge 0$. Перейдемо в цій нерівності до границі при $n \to \infty$.

7. Застосувати до функції f, що розглядається на відрізку, що з'єднує точки, в яких досягаються її максимум і мінімум, теорему Коші про середнє значення.

8. Нехай функція f обмежена сталою C. Границя існує, бо ця послідовність фундаментальна:

$$|a_n - a_k| = \left| \int\limits_{B_{(n)} \setminus B_{(k)}} f(\vec{x}) d\vec{x} \right| \le Cm(B_n \setminus B_{(k)}) = C(m(B_{(n)}) - m(B_{(k)})) \to 0,$$

$$k, n \to \infty.$$

Тоді

$$|S_n(f, \{\xi_Q\}) - J| \le |S_n(f, \{\xi_Q(B_{(N)})\}) - J| + |S_n(f, \{\xi_Q(B \setminus B^0_{(N)})\})| \le$$

$$\le \left| S_n(f, \{\xi_Q(B_{(N)})\}) - \int\limits_{B_{(N)}} f(\vec{x}) d\vec{x} \right| + \left| \int\limits_{B_{(N)}} f(\vec{x}) d\vec{x} - J \right| + Cm(B \setminus B_{(N)}) < \varepsilon,$$

якщо обрати N так, що останні доданки менші за $\frac{\varepsilon}{3}$ кожен, а потім обрати $n \ge N$ так, що перший доданок менший за $\frac{\varepsilon}{3}$.

Теорема 1. Нехай $A \in \mathcal{K}_p$, $f \in C(A)$. Тоді f інтегровна на множині A.

Ідея доведення. Якщо $m(A) = 0$, то $A_{(n)} = \varnothing$, $n \geq 0$, отже інтеграл існує і рівний нулю. Припустимо, що $m(A) > 0$.

Якщо A – компактна, то, користуючись рівномірною неперервністю, можна показати фундаментальність послідовності інтегральних сум, рівномірну по наборах $\{\xi_Q\}$.

Отже, послідовність інтегральних сум фундаментальна, а тому збіжна.

Якщо ж множина не є компактною, то доведене твердження потрібно застосувати до множин $A_{(n)}$, а потім скористатися восьмою властивістю інтеграла.

Означення 3. Нехай $A \subset \mathbb{R}$, $u, v : A \to \mathbb{R}$, $u(x) \le v(x)$, $x \in A$. Тоді множину

$$C = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in A,\ u(x_1) \le x_2 \le v(x_1)\}$$

в площині називають циліндричною в напрямку осі Ox_2.

Нехай $A \subset \mathbb{R}^2$, $u, v : A \to \mathbb{R}$, $u(\vec{x}) \le v(\vec{x})$, $\vec{x} \in A$. Тоді множину

$$C = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2) \in A,\ u(x_1, x_2) \le x_3 \le v(x_1, x_2)\}$$

в просторі $\mathbb{R}^3$ називають циліндричною в напрямку осі Ox_3.

В обох випадках множину A називають основою множини C і позначають $A = baC$.

Зауваження. 1. Аналогічно визначаються циліндричні множини в просторах більших розмірностей і в напрямках інших осей.

2. Множина є циліндричною в напрямку осі Ox_p тоді й лише, тоді, коли її перетин з кожною прямою, перпендикулярною площині $x_p = 0$ є або порожня множина, або точка, або відрізок.

Приклади. 1. Множина $\{(x_1, x_2) \mid x_1 \in [0, 1],\ 0 \le x_2 \le |x_1|\}$ є циліндричною в напрямку осі Ox_2, але не є циліндричною в напрямку осі Ox_1, бо її перетин з прямою $x_2 = \frac{1}{2}$ є об'єднанням двох відрізків.

2. Кожен брус є циліндричною множиною вздовж кожної осі.

3. Множина $[-2, 2]^3 \setminus (-1, 1)^3$ не є циліндричною вздовж жодної осі. У вигляді об'єднання якої мінімальної кількості циліндричних множин її можна подати?

Теорема 2. Нехай C – циліндрична множина, її основа baC компактна та вимірна, а функції u, v неперервні. Тоді множина C компактна та вимірна і $m(C) = \int\limits_{baC} (v(\vec{x}) - u(\vec{x}))d\vec{x}$.

Ідея доведення. Множина компактна в $\mathbb{R}^p$, якщо вона обмежена і замкнена. Оскільки baC – обмежена і функції u, v обмежені (бо неперервні на компакті), то з означення циліндричної множини випливає, що всі координати її точок обмежені, отже обмежена і вся множина C.

Замкненість множини C отримаємо граничним переходом в нерівностях.

Внутрішню міру C можна записати, як суму мір "стовпчиків обмежених функціями u, v над брусками з $(baC)_{(n)}$. Тоді отримаємо інтегральну суму для наведеного інтеграла. Для зовнішньої міри - аналогічно.

Зауваження. Враховуючи третю властивість інтеграла, кожну множину, що є об'єднанням циліндричних множин, які перетинаються по множинах міри нуль, можна вважати вимірною і рахувати її міру, як суму мір частин.

Теорема 3. Нехай A – циліндрична множина в $\mathbb{R}^p$ з компактною вимірною основою baA і функціями $u, v \in C(baA)$, $f \in C(A)$, $g(x_1, ..., x_{p-1}) = \int\limits_{u(x_1,...,x_{p-1})}^{v(x_1,...,x_{p-1})} f(x_1, ..., x_p)dx_p$, $(x_1, ..., x_{p-1}) \in baA$. Тоді

$$\int\limits_A f(\vec{x})d\vec{x} = \int\limits_{baA} g(x_1, ..., x_{m-1})dx_1...dx_{m-1}$$

тобто

$$\int\limits_A f(\vec{x})d\vec{x} = \int\limits_{baA} \left(\int\limits_{u(x_1,...,x_{p-1})}^{v(x_1,...,x_{p-1})} f(x_1, ..., x_p)dx_p \right) dx_1...dx_{m-1}.$$

Доведення. Враховуючи теорему про середнє для одновимірного інтеграла від неперервної функції

$$S_n(g, \{\xi_Q(baA)\}) = \sum_{Q\in\pi_{p-1}^{(n)}, Q\subset baA} \int\limits_{u(\xi_{1Q},...,\xi_{p-1Q})}^{v(\xi_{1Q},...,\xi_{p-1Q})} f(\xi_{1Q}, ..., \xi_{p-1Q}, x_p)dx_p m(Q) \sim$$

$$\sim \sum_{Q\in\pi_p^{(n)}, Q\subset A} \int\limits_{a_p(Q)}^{b_p(Q)} f(\xi_{1Q}, ..., \xi_{p-1Q}, x_p)dx_p m(baQ) =$$

$$= \sum_{Q\in\pi_p^{(n)}, Q\subset A} f(\xi_{1Q}, ..., \xi_{p-1Q}, \xi_{pQ})m(baQ)(b_p(Q) - a_p(Q)) =$$

$$= \sum_{Q\in\pi_p^{(n)}, Q\subset A} f(\xi_{1Q}, ..., \xi_{p-1Q}, \xi_{pQ})m(Q) =$$

$$= S_n(f, \{\xi_Q(A)\}) \to \int\limits_A f(\vec{x})d\vec{x}, \ n \to \infty.$$

Наслідок. Якщо $A \subset \mathbb{R}^3$, а baA в свою чергу є циліндричною множиною, основою якої є відрізок $[a, b]$, то застосувавши доведену теорему двічі, отримаємо формулу для розстановки меж у потрійному інтегралі:

$$\int\limits_A f(\vec{x})d\vec{x} = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{u_1(x_1)}^{v_1(x_1)} \left(\int\limits_{u(x_1,x_2)}^{v(x_1,x_2)} f(x_1, x_2, x_3)dx_3 \right) dx_2 \right) dx_1.$$

На цих формулах ґрунтується розтановка меж у подвійних та потрійних інтегралах по циліндричних множинах: спочатку з'ясовуємо, на якому відрізку набуває значень одна зі змінних і пишемо інтеграл по ній, потім фіксуємо цю змінну і шукаємо проміжок, на якому змінюється друга змінна. Потім (для потрійного інтеграла) – проміжок зміни третьої змінної при двох фіксованих. Яку змінну обирати, як першу, другу і третю, залежить від задачі.

ЗАМІНА ЗМІННОЇ В КРАТНИХ ІНТЕГРАЛАХ

Лема 1. Нехай $\vec{f}:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ – лінійне відображення, що задається матрицею F. Тоді для кожної вимірної множини $A \subset \mathbb{R}^m$ її образ $\vec{f}(A)$ вимірний і $m(\vec{f}(A)) = |\det F| \cdot m(A)$.

Доведення. З алгебри відомо, що матрицю F можна подати у вигляді добутку елементарних матриць $F_1 F_2 ... F_p$, де кожна елементарна матриця є або діагональною, або матрицею вигляду $I + \lambda E(i,j)$, де I – одинична матриця, $E(i,j)$ – матриця, в якій елемент на місці (i,j) рівний 1, а всі інші – нулю. Оскільки $\det F = \det F_1 \cdot \det F_2 \cdot ... \cdot \det F_p$, то доведення досить провести лише у випадку, коли F – елементарна матриця.

I. Нехай $A = \prod\limits_{k=1}^{m} [a_k, b_k]$ – брус. Тоді якщо F – діагональна матриця, то $F(A) = \prod\limits_{k=1}^{m} [f_{kk} a_k, f_{kk} b_k]$ і шукане твердження випливає з прикладу 1. Якщо ж $F = I + \lambda E(i,j)$, то

$$F(A) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^m \mid y_k \in [a_k, b_k],\ k \neq i,\ y_i \in [a_i + \lambda y_j, b_i + \lambda y_j]\}.$$

Ця множина є декартовим добутком бруса $\prod\limits_{k \neq i,j} [a_k, b_k]$ і паралелограма, тому за властивістю 1 є вимірною і $m(f(A)) = \prod\limits_{k=1}^{m} (b_k - a_k)$.

II. Нехай A – довільна вимірна множина. Тоді $(\vec{f}(A))_{(n)} \supset (\vec{f}(A_{(i)}))_{(n)}$ і $m_*(\vec{f}(A)) \geq m(\vec{f}(A_{(k)})) = |\det F| \cdot m(A_{(k)}),\ k \geq 1$, тому $m_*(\vec{f}(A)) \geq |\det F| \cdot m(A)$. Аналогічно $m^*(\vec{f}(A)) \leq |\det F| \cdot m(A)$, отже $\vec{f}(A)$ – вимірна множина і $m(\vec{f}(A)) = |\det F| \cdot m(A)$.

Наслідок. Якщо $\vec{f}(\vec{x}) = F\vec{x} + \vec{x}_0,\ \vec{x} \in \mathbb{R}^m,\ \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^m$, то твердження леми залишається правильним.

Теорема 1. Нехай $A \subset \mathbb{R}^m$ – відкрита множина, $B \subset A$ – компактна вимірна множина, відображення $\vec{g} : A \to \mathbb{R}^m$ задовольняє умови:

1) $\vec{g}$ – бієкція між B і $\vec{g}(B)$;
2) $\vec{g} \in C^1(A, \mathbb{R}^m)$;
3) $J(\vec{x}) = \frac{\partial(g_1,\ldots,g_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_m)}(\vec{x}) \neq 0$ на B.

Тоді множина $\vec{g}(B)$ компактна, вимірна і справджується формула $m(\vec{g}(B)) = \int\limits_B \left|\frac{\partial(g_1,\ldots,g_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_m)}\right| d\vec{x}$.

Якщо додатково $f \in C(\vec{g}(B), \mathbb{R})$, то справджується формула заміни змінної

$$\int\limits_{\vec{g}(B)} f(\vec{y})d\vec{y} = \int\limits_B f(\vec{g}(\vec{x})) \left|\frac{\partial(g_1,\ldots,g_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_m)}\right| d\vec{x}.$$

Ідея доведення. 1. Якщо множину B наблизити множиною $B_{(n)}$ і розбити її на бруси, то при великих n на кожному брусі Q з великою точністю $\vec{g}(x) \approx \vec{g}(x_0) + \vec{g}'(x_0)(x - x_0)$, де x_0 – центр бруса. Але це лінійне відображення

$$\vec{h}(x) = \vec{g}'(x_0)x + (\vec{g}(x_0) - \vec{g}'(x_0)x_0)$$

переводить брус у паралелепіпед, міра якого є міра бруса, домножена (за лемою) на

$$|det\vec{g}'(x_0)| = \left|\frac{\partial(g_1, ..., g_m)}{\partial(x_1, ..., x_m)}(x_0)\right|.$$

Тому інтегральну суму для інтеграла від f по $g(B)$ можна наближено записати, як

$$\sum_{Q \subset B_{(n)}} f(g(x_0(Q))) \left|\frac{\partial(g_1, ..., g_m)}{\partial(x_1, ..., x_m)}(x_0(Q))\right| m(Q).$$

З іншого боку цей вираз є інтегральною сумою для правого інтеграла. При $n \to \infty$ отримаємо потрібне.

Наслідок. Якщо умови теореми порушуються на множині $T \subset B$ нульової міри, то твердження залишається правильним, бо теорему можна застосувати на множині $(B \backslash T)_{(n)}$ і перейти до границі при $n \to \infty$ (аналогічно п. 2 доведення).

Наприклад, можна робити заміну, переходячи до полярних, циліндричних або сферичних координат.