Автоморфізми групи

Євгенія Кочубінська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

2 листопада 2022

FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS

Автоморфізми групи

Означення

Автоморфізмом групи G називається ізоморфізм з групи G в групу G.

Група авторморфізмів групи

Теорема

Множина всіх автоморфізмів групи є групою відносно суперпозиції.

Група авторморфізмів групи

Теорема

Множина всіх автоморфізмів групи є групою відносно суперпозиції.

Доведення.

Тотожне відображення є автоморфізмом $\Rightarrow$ множина всіх автоморфізмів не є порожньою.

Група авторморфізмів групи

Теорема

Множина всіх автоморфізмів групи є групою відносно суперпозиції.

Доведення.

Тотожне відображення є автоморфізмом $\Rightarrow$ множина всіх автоморфізмів не є порожньою.
Суперпозиція є асоціативною.

Група авторморфізмів групи

Теорема

Множина всіх автоморфізмів групи є групою відносно суперпозиції.

Доведення.

Тотожне відображення є автоморфізмом $\Rightarrow$ множина всіх автоморфізмів не є порожньою.
Суперпозиція є асоціативною.
Тотожне відображення є нейтральним елементом.

Група авторморфізмів групи

Теорема

Множина всіх автоморфізмів групи є групою відносно суперпозиції.

Доведення.

Тотожне відображення є автоморфізмом $\Rightarrow$ множина всіх автоморфізмів не є порожньою.
Суперпозиція є асоціативною.
Тотожне відображення є нейтральним елементом.
Оберненим елементом до заданого автоморфізму є обернене відображення. $\square$

Група авторморфізмів групи

Теорема

Множина всіх автоморфізмів групи є групою відносно суперпозиції.

Доведення.

Тотожне відображення є автоморфізмом $\Rightarrow$ множина всіх автоморфізмів не є порожньою.
Суперпозиція є асоціативною.
Тотожне відображення є нейтральним елементом.
Оберненим елементом до заданого автоморфізму є обернене відображення. $\square$

$\operatorname{Aut} G$ — група всіх автоморфізмів групи G.

Внутрішні автоморфізми

Для фіксованого $a \in G$ відображення

$$i_a : G \to G : \quad x \mapsto a^{-1}xa$$

називається спряженням групи G за допомогою елемента $a \in G$.

Внутрішні автоморфізми

Теорема

Для кожного $a \in G$ відображення

$$i_a : G \to G : \quad x \mapsto a^{-1}xa$$

є автоморфізмом групи G.

Внутрішні автоморфізми

Теорема

Для кожного $a \in G$ відображення

$$i_a : G \to G : \quad x \mapsto a^{-1}xa$$

є автоморфізмом групи G.

Доведення.

Відображення i_e є тотожним: $i_e(x) = e^{-1}xe = x$.

Внутрішні автоморфізми

Теорема

Для кожного $a \in G$ відображення

$$i_a : G \to G : \quad x \mapsto a^{-1}xa$$

є автоморфізмом групи G.

Доведення.

Відображення i_e є тотожним: $i_e(x) = e^{-1}xe = x$.
Для довільних $x, y \in G$:

$$i_a(xy) = a^{-1}xya$$

Внутрішні автоморфізми

Теорема

Для кожного $a \in G$ відображення
$$i_a : G \to G : \quad x \mapsto a^{-1}xa$$
є автоморфізмом групи G.

Доведення.

Відображення i_e є тотожним: $i_e(x) = e^{-1}xe = x$.
Для довільних $x, y \in G$:
$$i_a(xy) = a^{-1}xya = a^{-1}xa \cdot a^{-1}ya$$

Внутрішні автоморфізми

Теорема

Для кожного $a \in G$ відображення

$$i_a : G \to G : \quad x \mapsto a^{-1}xa$$

є автоморфізмом групи G.

Доведення.

Відображення i_e є тотожним: $i_e(x) = e^{-1}xe = x$.
Для довільних $x, y \in G$:

$$i_a(xy) = a^{-1}xya = a^{-1}xa \cdot a^{-1}ya = i_a(x)i_a(y)$$

Внутрішні автоморфізми

Теорема

Для кожного $a \in G$ відображення

$$i_a : G \to G : \quad x \mapsto a^{-1}xa$$

є автоморфізмом групи G.

Доведення.

Відображення i_e є тотожним: $i_e(x) = e^{-1}xe = x$.
Для довільних $x, y \in G$:

$$i_a(xy) = a^{-1}xya = a^{-1}xa \cdot a^{-1}ya = i_a(x)i_a(y) \quad \Rightarrow \quad i_a \text{— ендоморфізм.}$$

Внутрішні автоморфізми

Теорема

Для кожного $a \in G$ відображення

$$i_a : G \to G : \quad x \mapsto a^{-1}xa$$

є автоморфізмом групи G.

Доведення.

Відображення i_e є тотожним: $i_e(x) = e^{-1}xe = x$.
Для довільних $x, y \in G$:

$$i_a(xy) = a^{-1}xya = a^{-1}xa \cdot a^{-1}ya = i_a(x)i_a(y) \quad \Rightarrow \quad i_a \text{— ендоморфізм.}$$

Для $a, b \in G$:

$$i_b \circ i_a(x) =$$

Внутрішні автоморфізми

Теорема

Для кожного $a \in G$ відображення
$$i_a : G \to G : \quad x \mapsto a^{-1}xa$$
є автоморфізмом групи G.

Доведення.

Відображення i_e є тотожним: $i_e(x) = e^{-1}xe = x$.
Для довільних $x, y \in G$:
$$i_a(xy) = a^{-1}xya = a^{-1}xa \cdot a^{-1}ya = i_a(x)i_a(y) \quad \Rightarrow \quad i_a\text{— ендоморфізм.}$$

Для $a, b \in G$:
$$i_b \circ i_a(x) = i_b(i_a(x))$$

Внутрішні автоморфізми

Теорема

Для кожного $a \in G$ відображення
$$i_a : G \to G : \quad x \mapsto a^{-1}xa$$
є автоморфізмом групи G.

Доведення.

Відображення i_e є тотожним: $i_e(x) = e^{-1}xe = x$.
Для довільних $x, y \in G$:
$$i_a(xy) = a^{-1}xya = a^{-1}xa \cdot a^{-1}ya = i_a(x)i_a(y) \quad \Rightarrow \quad i_a\text{— ендоморфізм.}$$
Для $a, b \in G$:
$$i_b \circ i_a(x) = i_b(i_a(x)) = i_b(a^{-1}xa)$$

Внутрішні автоморфізми

Теорема

Для кожного $a \in G$ відображення

$$i_a : G \to G : \quad x \mapsto a^{-1}xa$$

є автоморфізмом групи G.

Доведення.

Відображення i_e є тотожним: $i_e(x) = e^{-1}xe = x$.
Для довільних $x, y \in G$:

$$i_a(xy) = a^{-1}xya = a^{-1}xa \cdot a^{-1}ya = i_a(x)i_a(y) \quad \Rightarrow \quad i_a\text{— ендоморфізм.}$$

Для $a, b \in G$:

$$i_b \circ i_a(x) = i_b(i_a(x)) = i_b(a^{-1}xa) = b^{-1}a^{-1}xab$$

Внутрішні автоморфізми

Теорема

Для кожного $a \in G$ відображення
$$i_a : G \to G : \quad x \mapsto a^{-1}xa$$
є автоморфізмом групи G.

Доведення.

Відображення i_e є тотожним: $i_e(x) = e^{-1}xe = x$.
Для довільних $x, y \in G$:
$$i_a(xy) = a^{-1}xya = a^{-1}xa \cdot a^{-1}ya = i_a(x)i_a(y) \quad \Rightarrow \quad i_a \text{— ендоморфізм.}$$
Для $a, b \in G$:
$$i_b \circ i_a(x) = i_b(i_a(x)) = i_b(a^{-1}xa) = b^{-1}a^{-1}xab = (ab)^{-1}x(ab) = i_{ab}(x).$$

Внутрішні автоморфізми

Теорема

Для кожного $a \in G$ відображення

$$i_a : G \to G : \quad x \mapsto a^{-1}xa$$

є автоморфізмом групи G.

Доведення.

Відображення i_e є тотожним: $i_e(x) = e^{-1}xe = x$.
Для довільних $x, y \in G$:

$$i_a(xy) = a^{-1}xya = a^{-1}xa \cdot a^{-1}ya = i_a(x)i_a(y) \quad \Rightarrow \quad i_a \text{— ендоморфізм.}$$

Для $a, b \in G$:

$$i_b \circ i_a(x) = i_b(i_a(x)) = i_b(a^{-1}xa) = b^{-1}a^{-1}xab = (ab)^{-1}x(ab) = i_{ab}(x).$$

Звідси $\quad i_a \circ i_{a^{-1}} = i_{a^{-1}} \circ i_a = i_e$

Внутрішні автоморфізми

Теорема

Для кожного $a \in G$ відображення

$$i_a : G \to G : \quad x \mapsto a^{-1}xa$$

є автоморфізмом групи G.

Доведення.

Відображення i_e є тотожним: $i_e(x) = e^{-1}xe = x$.
Для довільних $x, y \in G$:

$$i_a(xy) = a^{-1}xya = a^{-1}xa \cdot a^{-1}ya = i_a(x)i_a(y) \quad \Rightarrow \quad i_a \text{— ендоморфізм.}$$

Для $a, b \in G$:

$$i_b \circ i_a(x) = i_b(i_a(x)) = i_b(a^{-1}xa) = b^{-1}a^{-1}xab = (ab)^{-1}x(ab) = i_{ab}(x).$$

Звідси $$i_a \circ i_{a^{-1}} = i_{a^{-1}} \circ i_a = i_e \quad \Rightarrow \quad i_a \text{— бієкція}$$

Внутрішні автоморфізми

Теорема

Для кожного $a \in G$ відображення

$$i_a : G \to G : \quad x \mapsto a^{-1}xa$$

є автоморфізмом групи G.

Доведення.

Відображення i_e є тотожним: $i_e(x) = e^{-1}xe = x$.
Для довільних $x, y \in G$:

$$i_a(xy) = a^{-1}xya = a^{-1}xa \cdot a^{-1}ya = i_a(x)i_a(y) \quad \Rightarrow \quad i_a \text{— ендоморфізм.}$$

Для $a, b \in G$:

$$i_b \circ i_a(x) = i_b(i_a(x)) = i_b(a^{-1}xa) = b^{-1}a^{-1}xab = (ab)^{-1}x(ab) = i_{ab}(x).$$

Звідси $\quad i_a \circ i_{a^{-1}} = i_{a^{-1}} \circ i_a = i_e \quad \Rightarrow \quad i_a$ — бієкція $\quad \Rightarrow \quad i_a$ — автоморфізм.

Внутрішні автоморфізми

Автоморфізм

$$i_a : G \to G : \quad x \mapsto a^{-1}xa$$

називається *внутрішнім автоморфізмом* групи G.

Внутрішні автоморфізми

Автоморфізм

$$i_a : G \to G : \quad x \mapsto a^{-1}xa$$

називається *внутрішнім автоморфізмом* групи G.

$\mathrm{Inn}\, G$ — множина всіх внутрішніх автоморфізмів групи G.

Внутрішні автоморфізми

Розглянемо відображення

$$\psi : G \to \operatorname{Aut} G : \quad a \mapsto i_a.$$

Внутрішні автоморфізми

Розглянемо відображення

$$\psi : G \to \operatorname{Aut} G : \quad a \mapsto i_a.$$

Оскільки $i_{ab} = i_a \circ i_b$, то ψ — гомоморфізм.

Внутрішні автоморфізми

Розглянемо відображення

$$\psi : G \to \operatorname{Aut} G : \quad a \mapsto i_a.$$

Оскільки $i_{ab} = i_a \circ i_b$, то ψ — гомоморфізм.

Його образом є множина $\operatorname{Im} \psi = \operatorname{Inn} G$.

Отже, $\operatorname{Inn} G < \operatorname{Aut} G$.

Внутрішні автоморфізми

Розглянемо відображення

$$\psi : G \to \operatorname{Aut} G : \quad a \mapsto i_a.$$

Оскільки $i_{ab} = i_a \circ i_b$, то ψ — гомоморфізм.

Його образом є множина $\operatorname{Im}\psi = \operatorname{Inn} G$.

Отже, $\operatorname{Inn} G < \operatorname{Aut} G$.

Його ядром є множина

$$\operatorname{Ker}\psi = \{a \in G \mid i_a = \mathrm{id}_G\}$$

Внутрішні автоморфізми

Розглянемо відображення
$$\psi : G \to \operatorname{Aut} G : \quad a \mapsto i_a.$$
Оскільки $i_{ab} = i_a \circ i_b$, то ψ — гомоморфізм.

Його образом є множина $\operatorname{Im} \psi = \operatorname{Inn} G$.

Отже, $\operatorname{Inn} G < \operatorname{Aut} G$.

Його ядром є множина
$$\operatorname{Ker} \psi = \{a \in G \mid i_a = \mathrm{id}_G\} = \left\{a \in G \mid a^{-1}xa = x \ \forall x \in G\right\}$$

Внутрішні автоморфізми

Розглянемо відображення

$$\psi : G \to \operatorname{Aut} G : \quad a \mapsto i_a.$$

Оскільки $i_{ab} = i_a \circ i_b$, то ψ — гомоморфізм.

Його образом є множина $\operatorname{Im}\psi = \operatorname{Inn} G$.

Отже, $\operatorname{Inn} G < \operatorname{Aut} G$.

Його ядром є множина

$$\operatorname{Ker}\psi = \{a \in G \,|\, i_a = \mathrm{id}_G\} = \left\{a \in G \,|\, a^{-1}xa = x \ \forall x \in G\right\} = Z(G).$$

Внутрішні автоморфізми

Розглянемо відображення

$$\psi : G \to \operatorname{Aut} G : \quad a \mapsto i_a.$$

Оскільки $i_{ab} = i_a \circ i_b$, то ψ — гомоморфізм.

Його образом є множина $\operatorname{Im} \psi = \operatorname{Inn} G$.

Отже, $\operatorname{Inn} G < \operatorname{Aut} G$.

Його ядром є множина

$$\operatorname{Ker} \psi = \{a \in G \mid i_a = \mathrm{id}_G\} = \left\{a \in G \mid a^{-1} x a = x \ \forall x \in G\right\} = Z(G).$$

За основною теоремою про гомоморфізм

$$G/Z(G) \simeq \operatorname{Inn} G.$$

Внутрішні автоморфізми

Теорема

Множина $\operatorname{Inn} G$ є групою відносно суперпозиції.
Група $\operatorname{Inn} G$ ізоморфна факторгрупі $G/Z(G)$.

Внутрішні автоморфізми

Теорема

Множина $\operatorname{Inn} G$ є групою відносно суперпозиції.
Група $\operatorname{Inn} G$ ізоморфна факторгрупі $G/Z(G)$.

Наслідок

1. Спряжені елементи групи G мають однаковий порядок.

Внутрішні автоморфізми

Теорема

Множина $\operatorname{Inn} G$ є групою відносно суперпозиції.
Група $\operatorname{Inn} G$ ізоморфна факторгрупі $G/Z(G)$.

Наслідок

1. Спряжені елементи групи G мають однаковий порядок.
2. Множина, спряжена до підгрупи H групи G, є підгрупою групою G. Ця підгрупа ізоморфна групі H.

Внутрішні автоморфізми

Теорема

Множина $\operatorname{Inn} G$ є групою відносно суперпозиції.
Група $\operatorname{Inn} G$ ізоморфна факторгрупі $G/Z(G)$.

Наслідок

1. Спряжені елементи групи G мають однаковий порядок.
2. Множина, спряжена до підгрупи H групи G, є підгрупою групою G. Ця підгрупа ізоморфна групі H.
3. Спряжені підгрупи мають однакові індекси.

Теорема

$\operatorname{Inn} G \lhd \operatorname{Aut} G$.

Теорема

$\operatorname{Inn} G \lhd \operatorname{Aut} G$.

Доведення.

Візьмемо довільні $\varphi \in \operatorname{Aut} G$, $i_a \in \operatorname{Inn} G$.

Теорема

$\operatorname{Inn} G \lhd \operatorname{Aut} G$.

Доведення.

Візьмемо довільні $\varphi \in \operatorname{Aut} G$, $i_a \in \operatorname{Inn} G$. Тоді для довільного $x \in G$:

$$(\varphi \circ i_a \circ \varphi^{-1})(x) = \varphi(i_a(\varphi^{-1}(x)))$$

$\square$

Теорема

$\operatorname{Inn} G \lhd \operatorname{Aut} G$.

Доведення.

Візьмемо довільні $\varphi \in \operatorname{Aut} G$, $i_a \in \operatorname{Inn} G$. Тоді для довільного $x \in G$:

$$(\varphi \circ i_a \circ \varphi^{-1})(x) = \varphi(i_a(\varphi^{-1}(x))) = \varphi(a^{-1}\varphi^{-1}(x)a)$$

$\square$

Теорема

$\operatorname{Inn} G \lhd \operatorname{Aut} G$.

Доведення.

Візьмемо довільні $\varphi \in \operatorname{Aut} G$, $i_a \in \operatorname{Inn} G$. Тоді для довільного $x \in G$:

$$\begin{aligned}(\varphi \circ i_a \circ \varphi^{-1})(x) = \varphi(i_a(\varphi^{-1}(x))) = \varphi(a^{-1}\varphi^{-1}(x)a) = \\ = \varphi(a^{-1})\varphi(\varphi^{-1}(x))\varphi(a)\end{aligned}$$

$\square$

Теорема

$\operatorname{Inn} G \lhd \operatorname{Aut} G$.

Доведення.

Візьмемо довільні $\varphi \in \operatorname{Aut} G$, $i_a \in \operatorname{Inn} G$. Тоді для довільного $x \in G$:

$$\begin{aligned}(\varphi \circ i_a \circ \varphi^{-1})(x) &= \varphi(i_a(\varphi^{-1}(x))) = \varphi(a^{-1}\varphi^{-1}(x)a) = \\ &= \varphi(a^{-1})\varphi(\varphi^{-1}(x))\varphi(a) = (\varphi(a))^{-1}x\varphi(a) = i_{\varphi(a)}(x).\end{aligned}$$

$\square$

Теорема

$\operatorname{Inn} G \lhd \operatorname{Aut} G$.

Доведення.

Візьмемо довільні $\varphi \in \operatorname{Aut} G$, $i_a \in \operatorname{Inn} G$. Тоді для довільного $x \in G$:

$$\begin{aligned}(\varphi \circ i_a \circ \varphi^{-1})(x) = \varphi(i_a(\varphi^{-1}(x))) = \varphi(a^{-1}\varphi^{-1}(x)a) = \\ = \varphi(a^{-1})\varphi(\varphi^{-1}(x))\varphi(a) = (\varphi(a))^{-1}x\varphi(a) = i_{\varphi(a)}(x).\end{aligned}$$

Отже, $(\varphi \circ i_a \circ \varphi^{-1}) = i_{\varphi(a)}$.

$\square$

Теорема

$\operatorname{Inn} G \lhd \operatorname{Aut} G$.

Доведення.

Візьмемо довільні $\varphi \in \operatorname{Aut} G$, $i_a \in \operatorname{Inn} G$. Тоді для довільного $x \in G$:

$$\begin{aligned}(\varphi \circ i_a \circ \varphi^{-1})(x) &= \varphi(i_a(\varphi^{-1}(x))) = \varphi(a^{-1}\varphi^{-1}(x)a) = \\ &= \varphi(a^{-1})\varphi(\varphi^{-1}(x))\varphi(a) = (\varphi(a))^{-1}x\varphi(a) = i_{\varphi(a)}(x).\end{aligned}$$

Отже, $(\varphi \circ i_a \circ \varphi^{-1}) = i_{\varphi(a)}$.
Звідси $\operatorname{Inn} G \lhd \operatorname{Aut} G$. $\square$

Зовнішні автоморфізми

Факторгрупа $\operatorname{Aut} G/ \operatorname{Inn} G$ називається групою *зовнішніх автоморфізмів* групи G. Позначається $\operatorname{Out} G$.