Задання групи твірними і співвідношеннями

Євгенія Кочубінська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

26 жовтня 2022

FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS

G — група з системою твірних $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$.

За універсальною властивістю вільної групи G є гомоморфним образом вільної групи $F(X)$ з системою твірних $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Іншими словами відображення

$$\varphi : X \to S, \quad x_i \mapsto s_i$$

продовжується до гомоморфізму

$$\varphi : F(X) \to G.$$

Нехай H — ядро цього гомоморфізму, R — така множина елементів з H, що H — це найменша нормальна підгрупа, що містить R, тобто

$$H = \langle w^{-1} w_i w \mid w_i \in R, w \in F(X) \rangle.$$

За основною теоремою про гомоморфізм

$$G \simeq F(X)/H.$$

Задання групи твірними і співвідношеннями

Група G повністю визначається заданням алфавіту X та множини R.

- $\langle X \mid R \rangle$ — *зображення Діка* групи G;
- X — *множина твірних елементів*;
- R — *множина визначальних співвідношень.*

Якщо $|X| < \infty$, то група $\langle X \mid R \rangle$ називається *скінченно породженою.*

Якщо $|X| < \infty$ та $|R| < \infty$, то група $\langle X \mid R \rangle$ називається *скінченно заданою.*

Проблеми Дена

- *Проблема рівності* двох слів у скінченно заданій групі $G = \langle X \mid R \rangle$: чи задають два слова один і той самий елементи групи G.
- *Проблема спряженості* двох слів у скінченно заданій групі $G = \langle X \mid R \rangle$: для двох слів u та v з'ясувати, чи існує таке слово w, що $u = w^{-1}vw$.
- *Проблема ізоморфізму* двох груп $G = \langle X \mid R \rangle$ та $G' = \langle X' \mid R' \rangle$.

Макс Ден (1878-1952)

Приклади

1. $F(X) \simeq \langle X \mid \varnothing \rangle$.
2. $C_n \simeq \langle a \mid a^n \rangle$.
3. $\mathcal{S}_3 \simeq \langle x, y \mid x^2, y^2, (xy)^3 \rangle$.
   ♣ $\mathcal{S}_3 = \langle (12), (13) \rangle$. Розглянемо гомоморфізм
   $$\varphi : F(x,y) \to \mathcal{S}_3, \quad x \mapsto (12), y \mapsto (13).$$
   Тоді $\varphi(xy) = (12)(13) = (123)$. Отже, $x^2, y^2, (xy)^3 \in \operatorname{Ker}\varphi$.
   $x^2 = 1, y^2 = 1, (xy)^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad yx = (xy)^2, \; xyxyx = y, \; yxyxy = x$.
   Тому кожний клас суміжності групи $F(x,y)$ за підгрупою $H = \langle x^2, y^2, (xy)^3 \rangle$ містить хоча б один з елементів
   $$1, x, y, xy, xyx, xyxy.$$
   Отже, $|F(x,y)/H| \leq 6 \Rightarrow H = \operatorname{Ker}\varphi$.
   Таким чином, $\mathcal{S}_3 \simeq \langle x, y \mid x^2, y^2, (xy)^3 \rangle$. ♠
4. $\mathcal{S}_3 \simeq \langle x, y \mid x^2, y^3, (xy)^2 \rangle$.

Приклади

5. $D_n \simeq \langle x, y \,|\, x^n, y^2, yxyx \rangle$.
   ♣ Позначимо $G = \langle x, y \,|\, x^n, y^2, yxyx \rangle$.
   Нехай r — поворот на кут $\frac{2\pi}{n}$, s — симетрія.
   Оскільки $D_n = \langle r, s \rangle$, то відображення
   $$\{x, y\} \to D_n, x \mapsto r, y \mapsto s$$
   продовжується до гомоморфізму $G \to D_n$.
   З рівностей
   $$x^n = 1, y^2 = 1, yx = x^{n-1}y$$
   випливає, що кожен з елементів групи G зображується одним з елементів
   $$1, x, \dots, x^{n-1}, y, xy, \dots, x^{n-1}y.$$
   Отже, $|G| \leq 2n$. Таким чином, φ — бієкція і вказані символи задають різні елементи групи G. ♠
6. $D_n \simeq \langle x, y \,|\, x^2, y^2, (xy)^n \rangle$.

Приклади

5. $D_4 \simeq \langle x, y \,|\, x^4, y^2, yxyx \rangle$.
   ♣ $x \longleftrightarrow \frac{\pi}{2}$, $y \longleftrightarrow s$,
   $s\frac{\pi}{2}s\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow s\frac{\pi}{2}s = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1} = \frac{3\pi}{2}$. ♠
6. $D_4 \simeq \langle x, y \,|\, x^2, y^2, (xy)^4 \rangle$.

Приклади

7. $Q_8 \simeq \langle x, y \,|\, x^4, x^2y^{-2}, yxy^{-1}x\rangle$.
   ♣ Позначимо $G = \langle x, y \,|\, x^4, x^2y^{-2}, yxy^{-1}x\rangle$.
   Оскільки $yx = x^{-1}y = x^3y$ та $x^2 = y^2$, то кожний елемент групи G можна подати у вигляді
   $$x^ky^l, \quad k = 0, \ldots, 3, \quad l = 0, 1.$$
   Отже, $|G| \leq 8$.
   Для $i, j \in Q_8$: $\quad i^4 = 1, i^2j^{-2} = 1, jij^{-1}i = 1$ та $Q_8 = \langle i, j\rangle$.
   Відображення
   $$\varphi : G \to Q_8, x^ky^l \mapsto i^kj^l$$
   є ізоморфізмом. Отже,
   $$G \simeq Q_8. \spadesuit$$

8. Узагальнена група кватерніонів Q_{2^n}, $n \geq 3$.
   $$Q_{2^n} = \langle x, y \,|\, x^{2^{n-1}}, x^{2^{n-2}}y^{-2}, yxy^{-1}x\rangle.$$