ВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ З ПАРАМЕТРОМ

Нехай $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ – функція двох змінних $f(x, \alpha)$. Розглянемо інтеграл

$$J(\alpha) := \int_a^b f(x, \alpha)dx, \ \alpha \in [c, d].$$

В цьому інтегралі змінну α можна розглядати як параметр. При всіх значеннях α, при яких можна обчислити інтеграл, отримуємо певні числові значення, які визначають функцію J. Це – новий спосіб задання функції (згадаємо інтеграл зі змінними межами, границю функціональної послідовності, суму функціонального ряду). Подібні функції часто виникають в теорії диференціальних та інтегральних рівнянь.

Наприклад,

$$J(\alpha) := \int_0^1 \frac{\sin(\alpha x)}{x^2 + \alpha^2} dx, \ \alpha \in [1, 2].$$

Дослідимо властивості функції J, заданої таким чином. При цьому буде використовуватись позначення $f(\cdot, \alpha)$ для функції $g(x) = f(x, \alpha)$ при фіксованому значенні α, і аналогічно $f(x, \cdot)$ для функції $h(\alpha) = f(x, \alpha)$ при фіксованому значенні x.

Теорема 1. (Про неперервність інтеграла з параметром). Нехай $f \in C([a,b] \times [c,d])$. Тоді $J \in C([c,d])$.

Доведення. Функція J визначена для всіх $\alpha \in [c,d]$, бо неперервна функція $f(\cdot,\alpha)$ є інтегровною. Крім того, оскільки функція f неперервна на компакті, то за теоремою Кантора вона рівномірно неперервна:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall (x_1,\alpha_1),(x_2,\alpha_2) \in [a,b]\times[c,d],\ |x_1-x_2| < \delta,\ |\alpha_1-\alpha_2| < \delta\ :$$

$$|f(x_1,\alpha_1) - f(x_2,\alpha_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Тоді

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \alpha_1,\alpha_2 \in [c,d],\ |\alpha_1 - \alpha_2| < \delta\ :$$

$$|J(\alpha_1) - J(\alpha_2)| = \left| \int_a^b (f(x,\alpha_1) - f(x,\alpha_2))dx \right| \le$$

$$\le \int_a^b |f(x,\alpha_1) - f(x,\alpha_2)|dx \le \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon,$$

тобто функція J рівномірно неперервна на $[c,d]$.

Теорема 2. (Про диференційовність інтеграла з параметром). Нехай $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ і виконуються умови:

1) $\forall \alpha \in [c,d] \ : \ f(\alpha, \cdot) \in C([a,b])$;

2) $\forall (x,\alpha) \in [a,b] \times [c,d] \ \exists \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)$;

3) $\frac{\partial f}{\partial \alpha} \in C([a,b] \times [c,d])$.

Тоді $J \in C^1([c,d])$ і $J'(\alpha) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)dx, \ \alpha \in [c,d]$.

Доведення. За теоремою 1 функція $J_1(\alpha) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)dx, \ \alpha \in [c,d]$, визначена і неперервна на $[c,d]$. Покажемо, що вона є похідною функції J. Функція $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ за теоремою Кантора рівномірно неперервна на компакті $[a,b] \times [c,d]$:

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall (x_1, \alpha_1), (x_2, \alpha_2) \in [a,b] \times [c,d], \ |x_1 - x_2| < \delta, \ |\alpha_1 - \alpha_2| < \delta \ :$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x_1, \alpha_1) - \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x_2, \alpha_2) \right| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Враховуючи теорему Лагранжа при заданому $\varepsilon > 0$, відповідному $\delta > 0$ та $|\alpha - \alpha_0| < \delta$, маємо:

$$\left| \frac{J(\alpha) - J(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} - J_1(\alpha_0) \right| = \left| \int_a^b \left(\frac{f(x,\alpha) - f(x,\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} - \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha_0) \right) dx \right| =$$

$$\left| \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha_*(x)) - \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha_0) \right) dx \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha_*(x)) - \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha_0) \right| dx \leq \varepsilon,$$

тому за означенням похідної функція J_1 є похідною функції J.

Теорема 3. (Про формулу Лейбніца). Нехай $f \in C^1([a,b] \times [c,d]), \ u, v : [c,d] \to [a,b]$, і $\forall \alpha \in [c,d] \ \exists u'(\alpha), v'(\alpha)$. Тоді існує похідна

$$\left(\int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} f(x,\alpha)dx \right)'_{\alpha} = \int_{u(\alpha)}^{v(\alpha)} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)dx + f(v(\alpha),\alpha)v'(\alpha) - f(u(\alpha),\alpha)u'(\alpha).$$

Теорема 4. (Про інтегровність інтеграла з параметром). Нехай $f \in C([a,b] \times [c,d])$. Тоді

$$\int_c^d J(\alpha)d\alpha = \int_a^b \int_c^d f(x,\alpha)d\alpha dx$$

$$\left(\int_c^d \int_a^b f(x,\alpha)dxd\alpha = \int_a^b \int_c^d f(x,\alpha)d\alpha dx\right).$$

Доведення. Розглянемо функції

$$g(z) = \int_c^z J(\alpha)d\alpha,\ h(z) = \int_a^b \int_c^z f(x,\alpha)d\alpha dx,\ z \in [c,d].$$

Продиференціюємо ці функції, застосувавши до g теорему про диференціювання інтеграла зі змінною межею (функція J за теоремою 1 неперервна), а до h – теорему 2 при $f_1(x,z) = \int_c^z f(x,\alpha)d\alpha$. Отримаємо $g'(z) = h'(z) = J(z),\ z \in [c,d]$. Тоді за наслідком з теореми Лагранжа

$$\exists C > 0\ \forall z \in [c,d]\ :\ g(z) = h(z) + C.$$

Оскільки $g(c) = h(c) = 0$, то $C = 0$. Тому $g(d) = h(d)$, що і треба було довести.

Теорема 5. (Про граничний перехід) Нехай $f : [a,b] \times M \to \mathbb{R},\ M \subset \mathbb{R},\ g : [a,b] \to \mathbb{R},\ f(\cdot,\alpha) \in R([a,b]),\ \alpha \in M,\ \alpha_0 \in M'$,

$$f(x,\alpha) \rightrightarrows g(x),\ \alpha \to \alpha_0, \text{тобто} \sup_{x \in [a,b]} |f(x,\alpha) - g(x)| \to 0,\ \alpha \to \alpha_0.$$

Тоді $g \in R([a,b])$ та

$$\int_a^b f(x,\alpha)dx \to \int_a^b g(x)dx,\ \alpha \to \alpha_0.$$

Зауваження. Якщо за умов теореми всі функції $f(\cdot,\alpha)$ додатково неперервні при $\alpha \in M$, то функція g також неперервна.

НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ З ПАРАМЕТРОМ

Нехай $f : [a, +\infty) \times M \to \mathbb{R}$ та невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx$ збіжний при кожному $\alpha \in M$, тобто при кожному $\alpha \in M$

$$\int_a^A f(x,\alpha)dx \to J(\alpha) = \int_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx,\ A \to +\infty,$$

або, що те саме,

$$\int_A^{+\infty} f(x,\alpha)dx \to 0,\ A \to +\infty.$$

ОЗНАЧЕННЯ 1. Невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx$ називають **рівномірно збіжним на** M, якщо

$$\sup_{\alpha \in M} \left| \int_A^{+\infty} f(x,\alpha)dx \right| \to 0,\ A \to +\infty.$$

Приклади. 1. Невласний інтеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

рівномірно збіжний на $[2, +\infty)$, бо

$$\sup_{\alpha \in [2,+\infty)} \left| \int_A^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \right| = \int_A^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{A} \to 0,\ A \to +\infty,$$

не є рівномірно збіжним на $(1, +\infty)$, бо

$$\sup_{\alpha \in (1,+\infty)} \left| \int_A^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \right| = \sup_{\alpha \in (1,+\infty)} \frac{A^{1-\alpha}}{\alpha - 1} = +\infty \to +\infty,\ A \to +\infty,$$

Теорема 1. (Критерій Коші). Невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx$ рівномірно збіжний на M тоді і лише тоді, коли

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists A > a \; \forall A_1 > A, A_2 > A \; \forall \alpha \in M \; : \; \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x,\alpha)dx \right| < \varepsilon.$$

Доведення. Випливає з критерію Коші для функціональних послідовностей.

Теорема 2. (Ознака Вейєрштрасса). Нехай $f : [a,+\infty) \times M \to \mathbb{R}$, $g : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ і виконуються умови:

1) $\forall x \in [a,+\infty) \; \forall \alpha \in M \; : \; |f(x,\alpha)| \leq g(x)$;

2) $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ збіжний.

Тоді $\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx$ рівномірно збіжний на M.

Доведення. За критерієм Коші

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists A > a \; \forall A_1 > A, A_2 > A \; \forall \alpha \in M \; :$$
$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x,\alpha)dx \right| \leq \int_{A_1}^{A_2} g(x)dx < \varepsilon.$$

Теорема 3. (Ознака Діріхлє). Нехай $f, g : [a,+\infty) \times M \to \mathbb{R}$, $\forall \alpha \in M \; : \; f(\cdot,\alpha) \in C([a,+\infty))$, $g(\cdot,\alpha) \in C^1([a,+\infty))$ і виконуються умови:

1) $\exists C > 0 \; \forall A \geq a \; \forall \alpha \in M \; : \; |\int_a^A f(x,\alpha)dx| \leq C$;

2) $\forall \alpha \in M \; : \; g(\cdot,\alpha)$ – монотонна на $[a,+\infty)$;

3) $\sup_{\alpha \in M} |g(x,\alpha)| \to 0, \; x \to +\infty$.

Тоді $\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)g(x,\alpha)dx$ рівномірно збіжний на M.

Теорема 3. (Ознака Абеля). Нехай $f, g : [a,+\infty) \times M \to \mathbb{R}$, $\forall \alpha \in M \; : \; f(\cdot,\alpha) \in C([a,+\infty))$, $g(\cdot,\alpha) \in C^1([a,+\infty))$ і виконуються умови:

1) $\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx$ рівномірно збіжний на M;

2) $\forall \alpha \in M \; : \; g(\cdot,\alpha)$ – монотонна на $[a,+\infty)$;

3) $\exists C > 0 \; \forall \alpha \in M \; : \forall x \geq a \; : \; |g(x,\alpha)| \leq C$.

Тоді $\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)g(x,\alpha)dx$ рівномірно збіжний на M.

Нехай $f : [a, +\infty) \times [c, d] \to \mathbb{R}$. Розглянемо інтеграл

$$J(\alpha) := \int_a^{+\infty} f(x, \alpha)dx, \ \alpha \in [c, d].$$

Теорема 4. (Про неперервність невласного інтеграла з параметром). Нехай $f \in C([a, +\infty) \times [c, d])$ та інтеграл $J(\alpha) = \int_a^{+\infty} f(x, \alpha)dx$ рівномірно збіжний на $[c, d]$. Тоді $J \in C([c, d])$.

Доведення. За означенням рівномірної збіжності

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A_0 > a \ \forall A \geq A_0 \ \forall \alpha \in [c, d] \ : \ \left| \int_A^{+\infty} f(x, \alpha)dx \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

За теоремою про неперервність власного інтеграла з параметром інтеграл $\int_a^{A_0} f(x, \alpha)dx$ неперервний в довільній точці $\alpha_0 \in [c, d]$, тому

$$\exists \delta > 0 \ \forall \alpha \in [c, d], \ |\alpha - \alpha_0| < \delta \ : \ \left| \int_a^{A_0} f(x, \alpha)dx - \int_a^{A_0} f(x, \alpha_0)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тоді при $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ маємо

$$|J(\alpha) - J(\alpha_0)| = \left| \int_a^{+\infty} (f(x, \alpha) - f(x, \alpha_0))dx \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_a^{A_0} (f(x, \alpha) - f(x, \alpha_0))dx \right| + \left| \int_{A_0}^{+\infty} f(x, \alpha)dx \right| + \left| \int_{A_0}^{+\infty} f(x, \alpha_0)dx \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + 2\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Теорема 5. (Про граничний перехід). Нехай $f : [a,b] \times M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(\cdot,\alpha) \in R([a,b])$, $\alpha \in M$, $\alpha_0 \in M'$, виконані умови

1)$\forall A \geq a \ \sup_{x\in[a,A]} |f(x,\alpha) - g(x)| \to 0, \ \alpha \to \alpha_0$;

2) інтеграл $J(\alpha) = \int_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx$ рівномірно збіжний на M.

Тоді

$$\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx \to \int_a^{+\infty} g(x)dx, \ \alpha \to \alpha_0.$$

Теорема 6. (Про інтегровність інтеграла з параметром). Нехай $f \in C([a,+\infty) \times [c,d])$ і інтеграл $J(\alpha) = \int_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx$ рівномірно збіжний на $[c,d]$. Тоді

$$\int_c^d J(\alpha)d\alpha = \int_a^{+\infty} \int_c^d f(x,\alpha)d\alpha dx$$

$$\left(\int_c^d \int_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx d\alpha = \int_a^{+\infty} \int_c^d f(x,\alpha)d\alpha dx \right).$$

Теорема 7. (Про диференційовність невласного інтеграла з параметром). Нехай $f : [a,+\infty) \times [c,d] \to \mathbb{R}$ і виконуються умови:

1) $\forall (x,\alpha) \in [a,+\infty) \times [c,d] \ \exists \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)$;

2) $\frac{\partial f}{\partial \alpha} \in C([a,+\infty) \times [c,d])$;

3) $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)dx$ рівномірно збіжний на $[c,d]$;

4) $\exists \alpha_0 \in [c,d] \ : \ \int_a^{+\infty} f(x,\alpha_0)dx$ – збіжний.

Тоді $J \in C^1([c,d])$ і $J'(\alpha) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)dx, \ \alpha \in [c,d]$.

Означення 2. Невласний інтеграл $\int_a^b f(x,\alpha)dx$ від необмеженої в околі точки b функції $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ рівномірно збіжний на M, якщо

$$\sup_{\alpha \in M} \left| \int_{b-\varepsilon}^b f(x,\alpha)dx \right| \to 0, \ \varepsilon \to 0+.$$

Властивості невласних інтегралів з параметром від необмежених функцій аналогічні доведеним.

Зауваження. Аналогічно досліджуються інтеграли з точкою невласності в лівому кінці відрізку чи на $-\infty$.

ДЕЯКІ ВАЖЛИВІ ІНТЕГРАЛИ

Теорема 1. (Про інтеграл Діріхле). $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Доведення. Інтеграл збіжний (в т. 0 довизначається за неперервністю, а на нескінченності - за ознакою Діріхле). Розглянемо інтеграл

$$J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx,\ \alpha \geq 0.$$

Цей інтеграл рівномірно по α збіжний за ознакою Абеля, отже $J \in C([0, +\infty))$. Крім того, за теоремою про диференціювання по параметру

$$J'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx,\ \alpha > 0.$$

Дійсно, цей інтеграл рівномірно збіжний за ознакою Вейєрштрасса на кожному відрізку з додатних чисел. Отриманий інтеграл легко обчислити частинами:

$$J'(\alpha) = e^{-\alpha x} \cos x|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} \cos x dx =$$

$$= -1 + \alpha e^{-\alpha x} \sin x|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \alpha^2 e^{-\alpha x} \sin x dx = -1 - \alpha^2 J'(\alpha),\ \alpha > 0,$$

звідки

$$J'(\alpha) = -\frac{1}{1+\alpha^2},\ \alpha > 0.$$

Тому

$$J(\alpha) = -\operatorname{arctg} \alpha + C,\ \alpha \geq 0.$$

Крім того, $J(\alpha) \to 0,\ \alpha \to +\infty$, бо

$$|J(\alpha)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \to 0,\ \alpha \to +\infty.$$

Тому $C = \frac{\pi}{2}$, отже $J(0) = \frac{\pi}{2}$.

Теорема 2. (Про інтеграл Фруллані). Нехай $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, b > a > 0$. Тоді

1. якщо $f \in R([0,1])$, $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ збіжний та функція f неперервна в точці 0, то

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = -f(0) \ln \frac{b}{a}.$$

2. якщо $f \in C^1([0, +\infty))$, $f(+\infty) := \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$, то

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = (f(+\infty) - f(0)) \ln \frac{b}{a}.$$

Доведення. 2. Використовуючи теорему про інтегрування для невласного інтеграла, отримаємо

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_a^b f'(\alpha x) d\alpha \right) dx =$$

$$= \int_a^b \left(\int_0^{+\infty} f'(\alpha x) dx \right) d\alpha =$$

$$= \int_a^b \frac{f(+\infty) - f(0)}{\alpha} d\alpha = (f(+\infty) - f(0)) \ln \frac{b}{a}.$$

Приклади. 1.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(bx) - \cos(ax)}{x} dx = -\ln \frac{b}{a}.$$

2.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(bx) - \operatorname{arctg}(ax)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \ln \frac{b}{a}.$$

Теорема 3. (Про інтеграл Ейлера-Пуассона). $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Ідея доведення.

$$J^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2-t^2}dt\right) dx = |t = xs| =$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2-x^2s^2}xds\right) dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2-x^2s^2}xdx\right) ds =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-x^2(1+s^2)}}{2(1+s^2)}\Big|_{x=0}^{x=+\infty}ds = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(1+s^2)}ds = \frac{\pi}{4}.$$

Враховуючи, що $J > 0$, отримаємо потрібне значення.

Означення 1. Нехай $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx<+\infty$. **Інтегралом Фур'є** для функції f називають інтеграл

$$\int_0^{+\infty}(a(\lambda)\cos(\lambda x)+b(\lambda)\sin(\lambda x))d\lambda,\ \ x\in\mathbb{R},$$

де

$$a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos(\lambda x)dx,\ \ b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin(\lambda x)dx,\ \ \lambda\in\mathbb{R}$$

– **коефіцієнти Фур'є.**

Інтеграл Фур'є має властивості, аналогічні рядам Фур'є, зокрема умови збіжності:

1. Якщо $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx<+\infty$ та функція f в точці $x\in\mathbb{R}$ має похідну, то інтеграл Фур'є функції f в точці x збіжний до $f(x)$.

2. Якщо $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx<+\infty$ та функція f в точці $x\in\mathbb{R}$ має розрив першого роду та після перевизначення в точці x – похідні справа та зліва, то інтеграл Фур'є функції f в точці x збіжний до $\frac{f(x-)+f(x+)}{2}$.

Означення 2. Нехай $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx<+\infty$. **Перетворенням Фур'є** функції f називають комплекснозначну функцію

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{i\lambda x}dx,\ \ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Зауваження. $\hat{f}(\lambda)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}(a(\lambda)+ib(\lambda)),\ \ \lambda\in\mathbb{R}$.

Теорема 4. (Формула обертання) Нехай $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx<+\infty$, функція f має похідну в точці x. Тоді

$$f(x)=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}\hat{f}(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda.$$

Доведення.

$$I:=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}\hat{f}(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda=$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2}\int_{-A}^{A}(a(\lambda)+ib(\lambda))(\cos(\lambda x)-i\sin(\lambda x))d\lambda.$$

Оскільки інтеграл від непарної функції по симетричному проміжку рівний нулю, то

$$I=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2}\int_{-A}^{A}(a(\lambda)\cos(\lambda x)+b(\lambda)\sin(\lambda x))d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(a(\lambda)\cos(\lambda x)+b(\lambda)\sin(\lambda x))d\lambda=$$

$$=\int_{0}^{+\infty}(a(\lambda)\cos(\lambda x)+b(\lambda)\sin(\lambda x))d\lambda=f(x)$$

за ознакою збіжності інтеграла Фур'є.

Зауваження. Якщо додатково до умов теореми $\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(x)|dx<+\infty$, то $f(x)=\hat{\hat{f}}(-x)$.