Лема Бернсайда

Євгенія Кочубінська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

16 листопада 2022

FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS

Нерухомі точки та стабілізатори

Нехай група G діє на множині M.

Стабілізатором точки $m \in M$ називається множина

$$\mathrm{St}_G(m) = \left\{ g \in G \,|\, m^g = m \right\}.$$

Нерухомою точкою відносно елемента $g \in G$ називається така точка $m \in M$, що $m^g = m$.

Приклад

Нехай

$$\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{smallmatrix} \right) = (124)(35).$$

$G = \langle \sigma \rangle = \{\varepsilon, (124)(35), (142), (35), (124), (142)(35)\}$
Нерухомі точки відносно $\sigma^2 = (142)$: $3, 5, 6$.

Лема Коші-Фробеніуса-Бернсайда

Лема (Коші-Фробеніуса-Бернсайда)

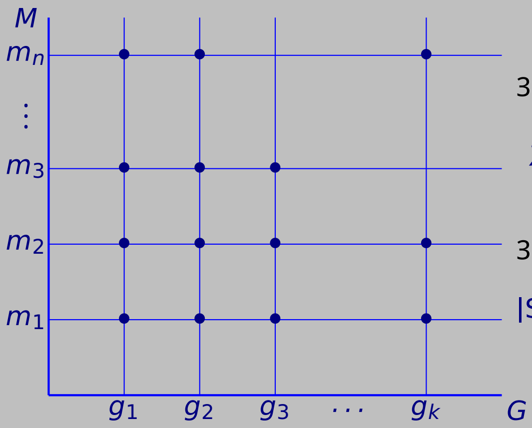
Нехай скінченна група G діє на множині M. Нехай $\chi(g)$ — кількість нерухомих точок елемента $g \in G$. Тоді кількість орбіт дії групи G на множині M дорівнює

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g).$$

Лема Бернсайда: доведення

Обчислимо двома способами кількість таких пар (g, m), $g \in G$, $m \in M$, що

$$m^g = m.$$



З одного боку, ця кількість дорівнює

$$\chi(g_1) + \chi(g_2) + \cdots + \chi(g_k) = \sum_{g \in G} \chi(g).$$

З іншого боку, ця кількість дорівнює

$$|\mathrm{St}_G(m_1)| + |\mathrm{St}_G(m_2)| + \cdots + |\mathrm{St}_G(m_n)| = \\ = \sum_{m \in M} |\mathrm{St}_G(m)|.$$

Лема Бернсайда: доведення

Теорема

Нехай група G діє на множині M. Якщо G — скінченна, то $|\mathcal{O}(m)| = |G : \mathrm{St}_G(m)| = \frac{|G|}{|\mathrm{St}_G(m)|}$.

Наслідок

1. Якщо G — скінченна, то $|\mathcal{O}(m)|$ ділить $|G|$.
2. Якщо $a, b \in \mathcal{O}(m)$, то $\left|\mathrm{St}_g(a)\right| = |\mathrm{St}_G(b)|$:

$$|\mathrm{St}_G(a)| = \frac{|G|}{|\mathcal{O}(a)|} = \frac{|G|}{|\mathcal{O}(m)|} = \frac{|G|}{|\mathcal{O}(b)|} = |\mathrm{St}_G(b)|\,.$$

Лема Бернсайда: доведення

Якщо m_i, m_j належать одній орбіті, то $|\mathrm{St}_G(m_i)| = \left|\mathrm{St}_G(m_j)\right|$.

Нехай $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \ldots, \mathcal{O}_s$ — орбіти дії (G, M). Перепишемо суму:

$$\sum_{m\in M} |\mathrm{St}_G(m)| = \sum_{m\in \mathcal{O}_1} |\mathrm{St}_G(m)| + \sum_{m\in \mathcal{O}_2} |\mathrm{St}_G(m)| + \cdots + \sum_{m\in \mathcal{O}_s} |\mathrm{St}_G(m)|.$$

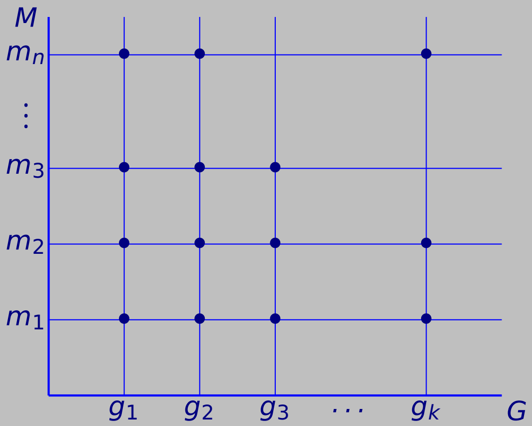
Кожний з доданків правої частини можна перетворити так:

$$\sum_{m\in \mathcal{O}_i} |\mathrm{St}_G(m)| = \sum_{m\in \mathcal{O}_i} \frac{|G|}{|\mathcal{O}(m)|} = \sum_{m\in \mathcal{O}_i} \frac{|G|}{|\mathcal{O}_i|} = \frac{|G|}{|\mathcal{O}_i|} \sum_{m\in \mathcal{O}_i} 1 = \frac{|G|}{|\mathcal{O}_i|} |\mathcal{O}_i| = |G|.$$

Тоді

$$\sum_{m\in M} |\mathrm{St}_G(m)| = \underbrace{|G| + \cdots + |G|}_{s}.$$

Лема Бернсайда: закінчення доведення



$$\sum_{g\in G}\chi(g)=s\cdot|G|$$

$$\Rightarrow s=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g).$$

Приклади

Приклад

Знайти кількість орбіт групи $\mathcal{S}_3$.

g	Нерухомі точки	$\chi(g)$
ε	$1, 2, 3$	3
(12)	3	1
(13)	2	1
(23)	1	1
(123)	Немає	0
(132)	Немає	0

Кількість орбіт

$$\frac{3+1+1+1}{6} = 1.$$

Приклади

Приклад

Нехай $\sigma = (124)(35) \in \mathcal{S}_6$. Знайти кількість орбіт групи $G = \langle\sigma\rangle = \{\varepsilon, (124)(35), (142), (35), (124), (142)(35)\}$.

g	Нерухомі точки	$\chi(g)$
ε	$1, 2, 3, 4, 5, 6$	6
$(124)(35)$	6	1
(142)	$3, 5, 6$	3
(35)	$1, 2, 4, 6$	4
(124)	$3, 5, 6$	3
$(142)(35)$	6	1

Кількість орбіт $\frac{6+1+3+4+3+1}{6} = 3$.

Орбіти: $\mathcal{O}_1 = \{1, 2, 4\}$, $\mathcal{O}_2 = \{3, 5\}$, $\mathcal{O}_3 = \{6\}$.