A2

1\. 1) $f(x,y)=\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$, $x\to0,\ y\to0$

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}x^2=0$$

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=\lim_{y\to0}y^2=0$$

$$\underset{\downarrow\atop 0}{0}\le\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\le\frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2}=\underset{\downarrow\atop 0}{x^2+y^2}\Rightarrow\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=0$$

$\left((a+b)^2\ge a^2+b^2\right.$ при $\left.a,b\ge0\right)$

2) $f(x,y)=\dfrac{x+e^y}{e^x+y}$, $x\to0$ $y\to0$

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{x+e^y}{e^x+y}=\lim_{x\to0}\frac{x+1}{e^x}=1$$

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\frac{x+e^y}{e^x+y}=\lim_{y\to0}\frac{e^y}{1+y}=1$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x+e^y}{e^x+y}=1.$$ (НЕМАЄ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ)

3) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x^4+y^4}$, $x\to+\infty$, $y\to+\infty$

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{x+y}{x^4+y^4}=\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{\overset{\to0}{\frac{x}{y^4}}+\overset{\to0}{\frac{1}{y^3}}}{\underset{\to0}{\frac{x^4}{y^4}}+1}=\lim_{x\to0}0=0$$

Інша повторна теж $=0$ (симетрія).

$$\underset{\downarrow\atop 0}{0}\le\frac{x+y}{x^4+y^4}\le\frac{x+y}{\frac12(x^2+y^2)^2}\le\frac{x+y}{\frac18(x+y)^4}=\underset{\downarrow\atop 0}{\frac{8}{(x+y)^3}}\Rightarrow\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\frac{x+y}{x^4+y^4}=0$$

$\left(a^2+b^2\le\frac12(a+b)^2,\ a\ge0,\ b\ge\right.$

4) $f(x,y)=\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$, $x\to+\infty$, $y\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}0^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}0=0$$

$$\lim_{y\to+\infty}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=\lim_{y\to+\infty}0^{+\infty}=\lim_{y\to+\infty}0=0$$

$$\underset{\downarrow\atop 0}{0}\le\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\le\underset{\downarrow\atop 0}{\left(\frac12\right)^{x^2}}\Rightarrow\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0$$

$\left(a^2+b^2\ge2ab\right)$

5) $f(x,y)=\frac{\sin(xy)}{x}, x\to 0, y\to 1$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 1}\frac{\sin(xy)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{y\to 1}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(xy)}{x}=\lim_{y\to 1}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot y=\lim_{y\to 1} y=1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{\sin(xy)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot y=\{xy\to 0\}=1\cdot 1=1$$

6) $f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}, x\to 0, y\to 0, x\neq y$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x+y}{x-y}=\lim_{x\to 0} 1=1$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x+y}{x-y}=\lim_{y\to 0}(-1)=-1$$

Повторні границі різні $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x+y}{x-y}$

7) $f(x,y)=x\sin\frac{1}{y}, x\to 0, y\to 0, y\neq 0$

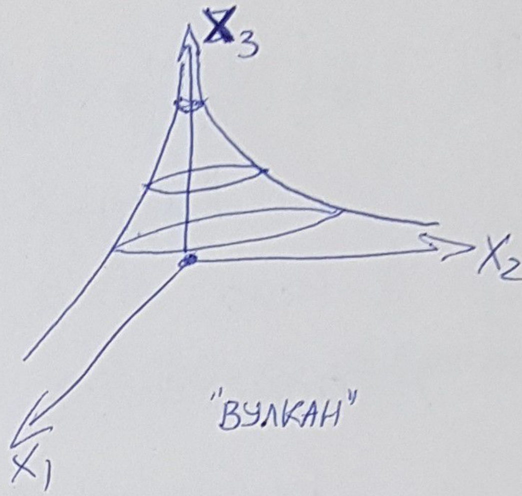
$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y}$ – не існує (за Гейне $y_n=\frac{1}{\pi n}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$
$x\cdot\sin\pi n=0\to 0$;
$y_n=\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0\Rightarrow$
$x\cdot\sin(2\pi n+\frac{\pi}{2})=x\xrightarrow[n\to\infty]{} x\neq 0$.)

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{y}=\lim_{y\to 0} 0=0$$

$$\underset{\downarrow\atop 0}{0}\le\left|x\sin\frac{1}{y}\right|\le\underset{\downarrow\atop 0}{|x|}\Rightarrow\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\sin\frac{1}{y}=0.$$

A2

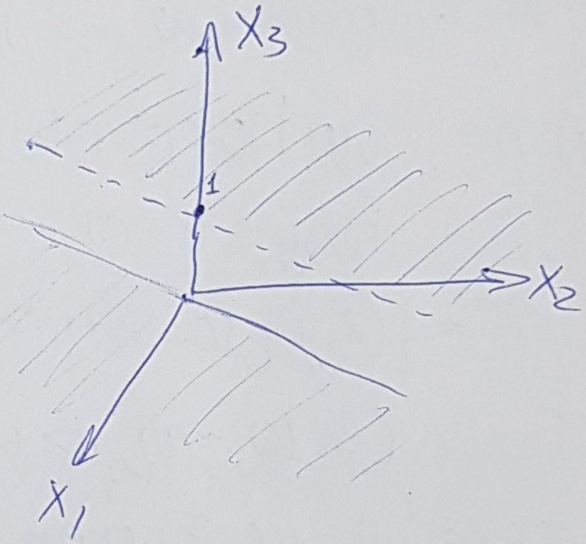
2. 1) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$



f-неперервна при $(x,y)\neq(0,0)$ за теоремами про арифм. дії та суперпоз.

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=+\infty \Rightarrow$ т. $(0,0)$ – точка розриву

2) $f(x,y)=\begin{cases}1, & y>x\\ 0, & y\leq x\end{cases}$



При $x\neq y$ f-неперервна, як стала.

В точках (a,a) f-розривна, бо за Гейне:

$(a+\frac{1}{n},a)\xrightarrow[n\to\infty]{}(a,a)$

$f(a+\frac{1}{n},a)=0\to0;$

$(a,a+\frac{1}{n})\xrightarrow[n\to\infty]{}(a,a)$

$f(a,a+\frac{1}{n})=1\xrightarrow[n\to\infty]{}1$

3) $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4+1}$ – неперервна на $\mathbb{R}^2$ за теоремою про арифм. дії

3. $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$. Довизначимо f за неперервніст

$f(0,0):=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1}{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{(+\infty)+(+\infty)}=0$

$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ – неперервна на $\mathbb{R}^2$.

4. 1) $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}=f^{-1}(\{1\})$ – замкнена, бо $\{1\}$ – замкнена, f – неперервна

$f(x,y)=x^2+y^2$ – неперервна

A – коло, $A^{\circ}=\varnothing \Rightarrow A$ – не відкрита

A – обмежена, бо $A\subset \overline{B}((0,0),1) \Rightarrow A$ – компактна

2) $A=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2<1\}$

A – відкрита куля $\Rightarrow A$ – відкрита, не замкнена, не компактна

4) $A=\{(x,y)\mid 10\le e^x+e^y\le 100\}=f^{-1}([10,100])$ – замкнена

$f(x,y)=e^x+e^y$

$A^{\circ}=\{(x,y)\mid 10<e^x+e^y<100\} \Rightarrow A$ – не відкрита.

Точки $(\ln 10,-n)$, $n\ge 1$ належать A і прямують до ∞, отже A – необмежена, не компактна

5. 2) $f(x,y,z)=\sin(x+y+z)$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),\ |x_1-x_2|<\delta, |y_1-y_2|<\delta, |z_1-z_2|<\delta:$

$|f(x_1,y_1,z_1)-f(x_2,y_2,z_2)|\overset{?}{<}\varepsilon$

$|f(x_1,y_1,z_1)-f(x_2,y_2,z_2)|=|\sin(x_1+y_1+z_1)-\sin(x_2+y_2+z_2)|=$ $\left\{\begin{array}{l}\text{Теорема}\\ \text{Лагранжа}\\ f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)\end{array}\right.$

$=|\overset{\le 1}{\cos c}\cdot(x_2+y_2+z_2-x_1-y_1-z_1)|\le |x_2-x_1|+|y_2-y_1|+|z_2-z_1|<3\delta=\varepsilon$

Отже, $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$.

6. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ на $\mathbb{R}^3$. Заперечення

$\exists \varepsilon>0\ \forall \delta>0\ \exists (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),\ |x_1-x_2|<\delta, |y_1-y_2|<\delta, |z_1-z_2|<\delta:$

$|f(x_1,y_1,z_1)-f(x_2,y_2,z_2)|\ge\varepsilon$

Нехай $(x_1,y_1,z_1)=(n,n,n)$, $(x_2,y_2,z_2)=(n+\frac{1}{n},n+\frac{1}{n},n+\frac{1}{n})$. При великих $n\in\mathbb{N}$: $\frac{1}{n}<\delta$. Але

$|f(n+\frac{1}{n},n+\frac{1}{n},n+\frac{1}{n})-f(n,n,n)|=3(n+\frac{1}{n})^2-3n^2=6+\frac{3}{n^2}\ge 6=\varepsilon.$

A2

8. 1) $f(x,y,z) = |x+y| - arctg(y+z)$

$A = \{(x,y,z) \mid 1 \le x \le 2,\ 2 \le y \le 3,\ 3 \le z \le 4\}$.

A - куб (з границями) $\Rightarrow A' = A$, A - замкнена, обмежена $\Rightarrow$ компактна

f - неперервна за Т про ар. дії та суперпозицію.

Отже, f - рівномірно непер. та досягає max, min на A

2) $f(x,y,z) = e^{x-y} + e^{y-z} + e^{z-x}$

$A = \{(x,y,z) \mid 1 \le |x|+|y|+|z| \le 2,\ xyz \ge 0\} =$

$= \{(x,y,z) \mid 1 \le |x|+|y|+|z| \le 2\} \cap \{(x,y,z) \mid xyz \ge 0\} \circleddash$

$g(x,y,z) = |x|+|y|+|z|,\ h(x,y,z) = xyz$

$\circleddash$ $g^{-1}([1,2]) \cap h^{-1}([0,+\infty))$ - замкнена $\left(\begin{array}{l} g, h \text{ - непер.,} \\ [1,2], [0,+\infty) \text{ - замкнені} \end{array}\right)$

$|x|+|y|+|z| \le 2 \Rightarrow |x| \le 2, |y| \le 2, |z| \le 2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 \le 12 \Rightarrow$

$A \subset \overline{B}((0,0,0), \sqrt{12}) \Rightarrow$ A - обмежена.

A - компактна, f - непер. за Т про ар. дії та суперпоз.

Отже, f - рівномірно непер. та досягає max, min на A.