Ідеали

Євгенія Кочубінська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

22 лютого 2023

FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS

Ідеали

Нехай R — кільце, I — підгрупа адитивної групи кільця R.

Очевидно, $(I, +) \lhd (R, +)$.

Означення

Адитивна підгрупа $I < R$, яка задовольняє умову $ax \in I$ для всіх $x \in I$, $a \in R$ називається *лівим* ідеалом кільця R.

Означення

Адитивна підгрупа $I < R$, яка задовольняє умову $xa \in I$ для всіх $x \in I$, $a \in R$ називається *правим* ідеалом кільця R.

Ідеали

Означення

Адитивна підгрупа $I < R$, яка задовольняє умови $ax \in I$ та $xa \in I$ для всіх $x \in I$, $a \in R$, називається *двостороннім ідеалом* кільця R.

Ідеали, які є власними підмножинами кільця, називаються *власними*.

Критерій ідеалу

Теорема

Непорожня підмножина $I \subset R$ є ідеалом тоді і лише тоді, коли

- $a - b \in I$ для всіх $a, b \in I$;
- $ra \in I$, $ar \in I$ для всіх $a \in I$, $r \in R$.

Доведення.

Подумати та довести самостійно. $\square$

Приклади

1. Тривіальні ідеали: $\{0\}, R$.
2. В полі немає нетривіальних власних ідеалів.
   Дійсно, якщо I — ненульовий ідеал, то I містить оборотний елемент $x \neq 0$.
   Тоді $a = ax^{-1}x \in I$ для довільного $a \in \Bbbk \Rightarrow I = \Bbbk$.
3. Множини $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_0$, є ідеалами кільця $\mathbb{Z}$.
4. В кільці многочленів $R[x]$ множина всіх многочленів, які діляться на фіксований елемент кільця $R[x]$, є ідеалом.

   Наприклад,
   $$\left\{(x^2+1)g(x) \mid g(x) \in \mathbb{Z}[x]\right\}$$
   є ідеалом в $\mathbb{Z}[x]$.

Приклади

5. Множина
$$\left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R}, i = 1\ldots, n\right\}$$
є правим ідеалом кільця $M_2(\mathbb{R})$, а множина
$$\left\{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R}, i = 1\ldots, n\right\}$$
— лівим.
6. Якщо R — комутативне кільце з одиницею, то множина
$$(a) = \{ar \,|\, r \in R\}$$
є ідеалом.
Для довільних $r, r' \in R$:
$$ar - ar' = a(r - r') \in I \text{ та } (ar)r' = a(rr') \in I.$$

Ідеал $\Rightarrow$ підкільце.

Підкільце $\not\Rightarrow$ ідеал.

Множина діагональних матриць є підкільцем, але не є ідеалом:

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad DA = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}.$$

Твердження

Нехай R — комутативне кільце з $1 \neq 0$.
Тоді R є полем $\Longleftrightarrow$ єдиними ідеалами в R є тривіальні ідеали $\{0\}$ та R.

Доведення.

($\Rightarrow$) Вже доведено, що поле містить лише тривіальні ідеали.
($\Leftarrow$) Візьмемо ненульовий елемент $a \in R$.
Тоді (a) — ненульовий ідеал $\quad \Rightarrow \quad R = (a)$.
$1 \in R = (a) \quad \Rightarrow \quad \exists b \in R\colon ab = 1 \quad \Rightarrow \quad R$ — поле. $\square$