Розкладність циклічних груп

Євгенія Кочубінська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

23 листопада 2022

FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS

Розкладність циклічних груп

Твердження

Нехай p — просте число. Тоді циклічна група порядку p^k не розкладається у прямий добуток своїх підгруп.

Доведення.

Підгрупи циклічної групи C_{p^k} утворюють ланцюг:

$$\{e\} < C_p < C_{p^2} \cdots < C_{p^k}.$$

Тоді для довільних неодиничних підгруп A і B групи C_{p^k}

$$A \cap B \neq \{e\}.$$

$\square$

Розкладність циклічних груп

Теорема

Нехай m, k — натуральні числа. Тоді

$$C_{mk} \simeq C_m \times C_k \Leftrightarrow (m, k) = 1.$$

Розкладність циклічних груп: доведення

$(\Rightarrow)$ Якщо $d = (m, k)$, то $C_k \cap C_m = C_d$.

Розкладність циклічних груп: доведення

$(\Leftarrow)$ Нехай $C_{mk} = \langle a \rangle$.

Розглянемо її підгрупи:

$$A = \langle a^m \rangle, \text{ тобто } A \simeq C_k,$$
$$B = \langle a^k \rangle, \text{ тобто } B \simeq C_m.$$

Очевидно, що $A \lhd C_{mk}$, $B \lhd C_{mk}$.

Оскільки $(m, k) = 1$, то існують $r, s \in Z$:

$$rm + sk = 1.$$

Тоді для $l = 1, \ldots, mk$:

$$a^l = a^{(rm+sk)l} = a^{rml} \cdot a^{skl} = (a^m)^{rl} \cdot (a^k)^{sl}.$$

Отже,

$$C_{mk} = \langle A, B \rangle.$$

Розкладність циклічних груп: доведення

Нехай $c \in A \cap B$.

Тоді
$$c = a^{mv} = a^{ku}, \quad v \in \{0, \dots, k-1\}, u \in \{0, \dots, m-1\}.$$

Звідси $a^{mv-ku} = e$.

З властивостей порядку $mk \mid (mv - ku)$, тобто $mv - ku \equiv 0 \pmod{mk}$.

Звідси випливає, що $k \mid v$, а $m \mid u$, але $v < k$, $u < m$.

Тому $u = v = 0$. Отже, $c = e$ та
$$A \cap B = \{e\}. \qquad \square$$

Розкладність циклічних груп

Теорема

Нехай $m_1, \ldots, m_k$ — натуральні числа. Нехай

$$G = C_{m_1} \times \cdots \times C_{m_k}.$$

Тоді G — циклічна $\Leftrightarrow (m_i, m_j) = 1$ для всіх $1 \leq i, j \leq k$, $i \neq j$.