Спряженість

Євгенія Кочубінська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

2 листопада 2022

FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS

Спряженість

Означення

Елемент групи $g \in G$ називається спряженим з елементом $h \in G$, якщо існує такий $x \in G$, що

$$x^{-1}gx = h.$$

Часто позначають $g^x = x^{-1}gx$.

Класи спряженості

Твердження

Відношення спряженості на групі є відношенням еквівалентності.

Доведення.

Рефлексивність: $e^{-1}ge = g$.
Симетричність: $h = x^{-1}gx \quad \Rightarrow \quad g = (x^{-1})^{-1}hx^{-1}$.
Транзитивність: $h = x^{-1}gx$, $k = y^{-1}hy \Rightarrow$

$$k = y^{-1}hy = y^{-1}x^{-1}gxy = (xy)^{-1}g(xy).$$

$\square$

Класи спряженості

Класи такого відношення еквівалентності називаються *класами спряженості*.

Клас спряженості $a \in G$:

$$C_G(a) = C(a) = \{x^{-1}ax \mid x \in G\}.$$

Класи спряженості — класи еквівалентності

$$\Rightarrow \qquad G = C(e) + C(g_1) + C(g_2) + \dots$$

$$\Rightarrow \qquad |G| = |C(e)| + |C(g_1)| + \dots + |C(g_k)|.$$

Класи спряженості: приклади

Приклад

1. В довільній групі G: $C(e) = \{e\}$.
2. Усі класи спряженості групи G є одноелементними тоді і лише тоді, коли G — абелева.

$$C(a) = \{a\} \Leftrightarrow g^{-1}ag = a \;\; \forall g \in G \Leftrightarrow ag = ga \;\; \forall g \in G.$$

3. Класи спряженості групи Q_8: $\{1\}$, $\{-1\}$, $\{i, -i\}$, $\{j, -j\}$, $\{k, -k\}$.
   $j^{-1}ij = -jij = -i$

Спряженість у групі $\mathcal{S}_n$

Цикловим типом підстановки $\sigma \in \mathcal{S}_n$ називається набір

$$(l_1, l_2, \ldots, l_n),$$

де l_1 — кількість циклів довжини 1, l_2 — кількість циклів довжини 2, $\ldots$, l_n — кількість циклів довжини n у розкладі підстановки $\sigma \in \mathcal{S}_n$ у добуток незалежних циклів.

Приклад

Цикловим типом підстановки

$$\sigma = (134)(256)(78) \in \mathcal{S}_9$$

є

$$(1, 1, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Спряженість у групі $\mathcal{S}_n$

Теорема

У симетричній групі $\mathcal{S}_n$ дві підстановки спряжені тоді і лише тоді, коли вони мають однакові циклові типи.

Доведення.

($\Rightarrow$) Нехай $\sigma_1 = (a_1 \dots a_k) \dots (c_1 \dots c_m)$.
Спряжемо σ_1 за допомогою

$$\tau = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_k & \dots & c_1 & \dots c_m \\ a_1' & \dots & a_k' & \dots & c_1' & \dots c_m' \end{pmatrix}:$$

$$\sigma_2 = \tau^{-1}\sigma_1\tau = (a_1' \dots a_k') \dots (c_1' \dots c_m').$$

($\Leftarrow$) Нехай підстановки $\sigma_1 = (a_1 \dots a_k) \dots (c_1 \dots c_m)$ та $\sigma_2 = (a_1' \dots a_k') \dots (c_1' \dots c_m')$ мають однаковий цикловий тип. Вони спряжені за допомогою підстановки

$$\tau = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_k & \dots & c_1 & \dots c_m \\ a_1' & \dots & a_k' & \dots & c_1' & \dots c_m' \end{pmatrix}. \quad \square$$

Спряженість у групі $\mathcal{S}_n$

Приклад

1. Класи спряженості в $\mathcal{S}_3$:
   $C_1 = \{\varepsilon\}$,
   $C_2 = \{(12), (13), (23)\}$, $C_3 = \{(123), (132)\}$.
2. Класи спряженості в $\mathcal{S}_4$:
   $C_1 = \{\varepsilon\}$, $C_2 = \{(12), (13), (14), (23), (24), (34)\}$,
   $C_3 = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$,
   $C_4 = \{(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}$,
   $C_5 = \{(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)\}$.

Антиприклад

1. Класи спряженості в $\mathcal{A}_3$: $C_1 = \{\varepsilon\}$, $C_2 = \{(123)\}$, $C_3 = \{(132)\}$.
2. Підстановки (123) та (132) мають однакові циклові типи в $\mathcal{A}_4$, але не є спряженими.

Підмножини A і B групи G *спряжені*, якщо існує такий елемент $g \in G$, що

$$B = A^g = \left\{ a^g \,|\, a \in A \right\}.$$

Критерій нормальності

Теорема

Нехай H — підгрупа групи G. Тоді наступні умови рівносильні:

1. H — нормальна підгрупа групи G;
2. H є об'єднанням класів спряженості;
3. для довільного $g \in G$: $H^g = H$.

Критерій нормальності

Доведення.

① ⇒ ② $H \lhd G \quad \Rightarrow \quad \forall g \in G, \forall h \in H\colon g^{-1}hg \in H \quad \Rightarrow \quad C(h) \in H.$

② ⇒ ③ $H = \bigcup C(h) \quad \Rightarrow \quad g^{-1}Hg \subseteq H.$
Припустимо, що $g^{-1}Hg \neq H$. Тоді

$$Hg = gg^{-1}Hg \subset gH,$$
$$H = Hg \cdot g^{-1} \subset gHg^{-1}.$$

Отже, знайдеться такий $h \in H$, що $ghg^{-1} \notin H$. ↯↯↯
Тому $g^{-1}Hg = H$.

③ ⇒ ① $g^{-1}Hg = H \quad \Rightarrow \quad \forall g \in G, \forall h \in H\colon g^{-1}hg \in H \quad \Rightarrow \quad H \lhd G.$ □

Критерій нормальності

Приклад

Класи спряженості в $\mathcal{S}_4$:
$C_1 = \{\varepsilon\}, C_2 = \{(12), (13), (14), (23), (24), (34)\},$
$C_3 = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\},$
$C_4 = \{(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\},$
$C_5 = \{(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)\}.$

$K_4 = \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} = C_1 \cup C_3 \Rightarrow K_4 \lhd \mathcal{S}_4.$