Теорема Лагранжа та наслідки з неї

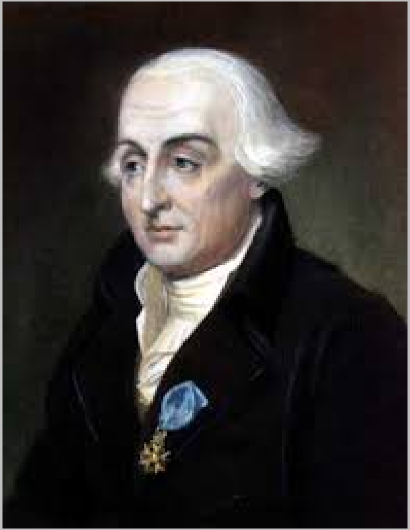
Євгенія Кочубінська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

5 жовтня 2022

FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS

Жозеф-Луї Лагранж (1736-1813)



Теорема Лагранжа

Теорема

Нехай G — скінченна група. Тоді порядок кожної підгрупи ділить порядок групи.

Теорема Лагранжа

Теорема

Нехай G — скінченна група. Тоді порядок кожної підгрупи ділить порядок групи.

Доведення.

$G = g_1H + g_2H + \cdots + g_kH \Rightarrow |G| = |g_1H| + |g_2H| + \cdots + |g_kH|.$

Теорема Лагранжа

Теорема

Нехай G — скінченна група. Тоді порядок кожної підгрупи ділить порядок групи.

Доведення.

$G = g_1H + g_2H + \dots + g_kH \Rightarrow |G| = |g_1H| + |g_2H| + \dots + |g_kH|.$

$|g_iH| = |H|,\ i = 1, \dots, k$ $\square$

Теорема Лагранжа

Теорема

Нехай G — скінченна група. Тоді порядок кожної підгрупи ділить порядок групи.

Доведення.

$G = g_1H + g_2H + \cdots + g_kH \Rightarrow |G| = |g_1H| + |g_2H| + \cdots + |g_kH|.$

$|g_iH| = |H|,\ i = 1, \ldots, k \quad \Rightarrow \quad |G| = k \cdot |H|$ $\square$

Теорема Лагранжа

Теорема

Нехай G — скінченна група. Тоді порядок кожної підгрупи ділить порядок групи.

Доведення.

$G = g_1H + g_2H + \cdots + g_kH \Rightarrow |G| = |g_1H| + |g_2H| + \cdots + |g_kH|.$

$|g_iH| = |H|, \ i = 1, \ldots, k \quad \Rightarrow \quad |G| = k \cdot |H| \quad \Rightarrow \quad |H|$ ділить $|G|$. $\square$

Наслідки з теореми Лагранжа

Наслідок

Нехай G — скінченна група, H — її підгрупа. Тоді $|G| = |H| \cdot |G : H|$.

Наслідки з теореми Лагранжа

Наслідок

Нехай G — скінченна група, H — її підгрупа. Тоді $|G| = |H| \cdot |G : H|$.

Наслідок

Порядок елемента є дільником порядку групи.

Наслідки з теореми Лагранжа

Наслідок

Нехай G — скінченна група, H — її підгрупа. Тоді $|G| = |H| \cdot |G : H|$.

Наслідок

Порядок елемента є дільником порядку групи.

Наслідок

Кожна скінченна група простого порядку є циклічною.

Наслідки з теореми Лагранжа

Наслідок

Нехай G — скінченна група, H — її підгрупа. Тоді $|G| = |H| \cdot |G : H|$.

Наслідок

Порядок елемента є дільником порядку групи.

Наслідок

Кожна скінченна група простого порядку є циклічною.

Наслідок

Якщо $|G| = n$, то $g^n = e$ для всіх $g \in G$.

Наслідки з теореми Лагранжа

Наслідок

Експонента скінченної групи не перевищує її порядок.

Наслідки з теореми Лагранжа

Наслідок

Експонента скінченної групи не перевищує її порядок.

Наслідок

У скінченній абелевій групі експонента дорівнює найменшому спільному кратному порядків її елементів.

Зауваження

$$\mathcal{A}_4 = \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23),$$
$$(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}.$$

Зауваження

$$\mathscr{A}_4 = \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23),$$
$$(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}.$$

Підгрупи групи $\mathscr{A}_4$:

Зауваження

$$\mathcal{A}_4 = \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23),$$
$$(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}.$$

Підгрупи групи $\mathcal{A}_4$:

$\{\varepsilon\}$

Зауваження

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_4 = \{&\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23),\\ &(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}.\end{aligned}$$

Підгрупи групи $\mathcal{A}_4$:

$\{\varepsilon\}$

$\{\varepsilon, (12)(34)\}, \quad \{\varepsilon, (13)(24)\}, \quad \{\varepsilon, (14)(23)\}$

Зауваження

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_4 = \{&\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23),\\ &(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}.\end{aligned}$$

Підгрупи групи $\mathcal{A}_4$:

$\{\varepsilon\}$

$\{\varepsilon, (12)(34)\}, \quad \{\varepsilon, (13)(24)\}, \quad \{\varepsilon, (14)(23)\}$

$\{\varepsilon, (123), (132)\}, \quad \{\varepsilon, (124), (142)\}, \quad \{\varepsilon, (134), (143)\}, \quad \{\varepsilon, (234), (243)\}$

Зауваження

$$\mathcal{A}_4 = \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23),\\ (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}.$$

Підгрупи групи $\mathcal{A}_4$:

$\{\varepsilon\}$

$\{\varepsilon, (12)(34)\}, \quad \{\varepsilon, (13)(24)\}, \quad \{\varepsilon, (14)(23)\}$

$\{\varepsilon, (123), (132)\}, \quad \{\varepsilon, (124), (142)\}, \quad \{\varepsilon, (134), (143)\}, \quad \{\varepsilon, (234), (243)\}$

$\{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \simeq \mathcal{K}_4$

Зауваження

$$\mathcal{A}_4 = \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23), \\ (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}.$$

Підгрупи групи $\mathcal{A}_4$:

$\{\varepsilon\}$

$\{\varepsilon, (12)(34)\}, \quad \{\varepsilon, (13)(24)\}, \quad \{\varepsilon, (14)(23)\}$

$\{\varepsilon, (123), (132)\}, \quad \{\varepsilon, (124), (142)\}, \quad \{\varepsilon, (134), (143)\}, \quad \{\varepsilon, (234), (243)\}$

$\{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \simeq \mathcal{K}_4$

$\mathcal{A}_4$

Зауваження

$$\mathcal{A}_4 = \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23),\\ (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}.$$

Підгрупи групи $\mathcal{A}_4$:

$\{\varepsilon\}$

$\{\varepsilon, (12)(34)\}, \quad \{\varepsilon, (13)(24)\}, \quad \{\varepsilon, (14)(23)\}$

$\{\varepsilon, (123), (132)\}, \quad \{\varepsilon, (124), (142)\}, \quad \{\varepsilon, (134), (143)\}, \quad \{\varepsilon, (234), (243)\}$

$\{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \simeq \mathcal{K}_4$

$\mathcal{A}_4$

Жодної підгрупи порядку 6!

Застосування теореми Лагранжа

Твердження (Мала теорема Ферма)

Нехай p — просте. Тоді для всіх $\overline{a} \in \mathbb{Z}_p^*$:

$$\overline{a}^{p-1} = \overline{1}.$$

Застосування теореми Лагранжа

Твердження (Теорема Ейлера)

Нехай $n \in \mathbb{N}$. Тоді для всіх $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n^*$:

$$\overline{a}^{\varphi(n)} = \overline{1}.$$