Розв’язні групи

Євгенія Кочубінська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

2 листопада 2022

FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS

Ряд комутантів

Для довільної групи G її *ряд комутантів* визначається як такий ряд підгруп $G^{(0)}$, $G^{(1)}$, $G^{(2)}, \dots$ групи G, що

$$G^{(0)} = G, G^{(1)} = [G, G], G^{(k+1)} = [G^{(k)}, G^{(k)}], k > 1.$$

Очевидно, що

$$G^{(0)} \triangleright G^{(1)} \triangleright G^{(2)} \triangleright \dots$$

Вправа

Довести, що $G^{(k+l)} = (G^{(k)})^{(l)}$.

Розв'язні групи

Означення

Група G називається *розв'язною*, якщо існує таке $n \in \mathbb{N}$, що $G^{(n)} = \{e\}$.
Найменше таке $n \in \mathbb{N}$ називається *ступенем розв'язності* групі G.

Приклад

1. Кожна абелева група є розв'язною ступеня 1.
2. $G = \mathcal{S}_3$ є розв'язною ступеня 2: $G^{(1)} = [\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_3] = \mathcal{A}_3$, $G^{(2)} = [\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_3] = \{\varepsilon\}$.
3. $\mathcal{S}_4$ є розв'язною ступеня 3: $\mathcal{S}_4 \triangleright \mathcal{A}_4 \triangleright K_4 \triangleright \{\varepsilon\}$.
4. $\mathcal{A}_n$, $n \geq 5$, не є розв'язною.

Теорема

Нехай N — нормальна підгрупа групи G. Група G є розв'язною тоді і лише тоді, коли N та G/N є розв'язними.

$$G = G^{(0)} \triangleright G^{(1)} \triangleright G^{(2)} \triangleright \dots$$

Лема

Якщо $f : G \to H$ — гомоморфізм, то $f(G^{(i)}) < H^{(i)}$.
Якщо $f : G \to H$ — епіморфізм, то $f(G^{(i)}) = H^{(i)}$.

Доведення.

$G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}] \Rightarrow$ досить довести $f(G') < H'$.
Для довільних $g_1, g_2 \in G$:

$$f([g_1, g_2]) = f(g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2) = f(g_1)^{-1} f(g_2)^{-1} f(g_1) f(g_2) =$$
$$= [f(g_1), f(g_2)] \in H'.$$

□

Доведення теореми.

($\Rightarrow$) Нехай $\sigma : N \to G$ — канонічне вкладення, $\pi : G \to G/N$ — канонічна проекція та G — розв'язна група ступеня n.

- $\sigma(N) < G \Rightarrow N^{(n)} < G^{(n)} = \{e\} \Rightarrow N$ — розв'язна.
- $(G/N)^{(n)} = \pi(G^{(n)}) = \pi(\{e\}) = \{e\} \Rightarrow G/N$ — розв'язна.

($\Leftarrow$) Нехай N — розв'язна ступеня k, G/N — розв'язна ступеня l.
Тоді

$$(G/N)^{(l)} = \pi(G^{(l)}) = \{e\} \Rightarrow G^{(l)} < \operatorname{Ker}\pi = N.$$

Отже,

$$G^{(k+l)} = (G^{(l)})^{(k)} < N^{(k)} = \{e\} \Rightarrow G \text{ — розв'язна.} \quad \square$$

Еквівалентне означення розв'язності

Означення

Група G називається розв'язною, якщо існує такий ряд підгруп

$$G = G_0 > G_1 > G_2 \cdots > G_n = \{e\},$$

що $G_{i-1} \triangleright G_i$, $i = 1, \ldots, n$, та G_{i-1}/G_i — абелева.

Приклад

$\mathcal{S}_4$ — розв'язна, бо існує ряд нормальних підгруп

$$\{\varepsilon\} \triangleleft K_4 \triangleleft \mathcal{A}_4 \triangleleft \mathcal{S}_4,$$

у якому всі факторгрупи $K_4/\{\varepsilon\}$, $\mathcal{A}_4/K_4$ та $\mathcal{S}_4/\mathcal{A}_4$ — абелеві.

Теорема Томпсона-Фейта

Теорема

Кожна скінченна група непарного порядку є розв'язною.