Дія групи на множині

Євгенія Кочубінська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

9 листопада 2022

FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS

Дія групи на множині

Незай G — група, M — множина.

Група G *діє на множині* M, якщо для довільних елементів $m \in M$ та $g \in G$ визначений елемент $m^g \in M$, причому

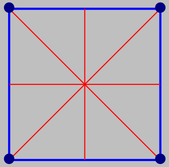
1. $m^e = m$ для всіх $m \in M$;
2. $(m^{g_1})^{g_2} = m^{g_1 g_2}$ для всіх $m \in M$, $g_1, g_2 \in G$.

(G, M) — група G діє на множині M

m^g — образ точки m під дією елемента $g \in G$

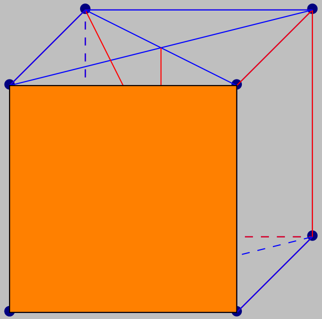
Дія групи на множині: приклади

1. Група $\mathcal{S}_n$ діє на множині $\{1, 2, \ldots, n\}$.
2. Група D_4 діє на множині
   - вершин;
   - сторін;
   - осей симетрії.



Дія групи на множині: приклади

3. Група поворотів куба діє на множині
   - вершин;
   - ребер;
   - прямих, що проходять через середини протилежних граней;
   - діагоналей;
   - граней.



Дія групи на множині: природна дія групи на собі

4. Група G діє на собі *правими зсувами*:

$$x^g = xg, \quad x, g \in G.$$

5. Група G діє на собі *спряженням*:

$$x^g = g^{-1}xg, \quad x, g \in G.$$

6. Дія правими зсувами на правих класах суміжності за довільною підгрупою H:

$$(Hx)^g = Hxg.$$

Дія групи на множині: індукована дія

7. Задано (G, M). Задамо дію групи G на множині

$$M^k = \{(m_1, \dots, m_k) \,|\, m_i \in M\} :$$
$$(m_1, m_2, \dots, m_k)^g = (m_1^g, m_2^g, \dots, m_k^g).$$

$$G = \mathcal{A}_3, M = \{1, 2, 3\}, M^2 = \{(a, b) \,|\, a, b \in M\}:$$

$$(1, 2)^{\varepsilon} = (1, 2), \quad (1, 2)^{(123)} = (2, 3), \quad (1, 2)^{(132)} = (3, 1).$$

Дія групи на множині визначає перетворення $\varphi(g)$ множини M:

$$m \xrightarrow{\varphi(g)} m^g.$$

Твердження

Для довільного $g \in G$ перетворення $\varphi(g)$ є бієкцією на множині M.

Доведення.

$$\begin{aligned}\varphi(g)(\varphi(g^{-1})(m)) = (m^{g^{-1}})^g = m^{g^{-1}g} = m^e = m = \\ = m^{gg^{-1}} = (m^g)^{g^{-1}} = \varphi(g^{-1})(\varphi(g)(m)) \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$\varphi(g)$ та $\varphi(g^{-1})$ взаємно обернені $\quad \Rightarrow \quad$ $\varphi(g)$ та $\varphi(g^{-1})$ бієктивні. $\square$

Дія групи на множині визначає перетворення $\varphi(g)$ множини M:

$$m \xrightarrow{\varphi(g)} m^g.$$

Твердження

Відображення $g \mapsto \varphi(g)$ є гомоморфізмом групи G у симетричну групу $S(M)$.

Доведення.

Для довільної точки $m \in M$:

$$\varphi(gh)(m) = m^{gh} = (m^g)^h = (\varphi(g)(m))^h = \varphi(h)(\varphi(g)(m)) = (\varphi(g)\varphi(h))(m)$$
$$\Rightarrow \quad \varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h).$$

$\square$

Приклади

1. Група D_4 діє на множині

$$\left.\begin{array}{l}\text{вершин}\\ \text{сторін}\\ \text{осей симетрії}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{гомоморфізм в } \mathcal{S}_4.$$

2. Група поворотів куба діє на множині

вершин $\Rightarrow$ гомоморфізм в $\mathcal{S}_8$;
ребер $\Rightarrow$ гомоморфізм в $\mathcal{S}_{12}$;
діагоналей $\Rightarrow$ гомоморфізм в $\mathcal{S}_4$;
прямих, що проходять через середини протилежних граней $\Rightarrow$ гомоморфізм в $\mathcal{S}_3$;
граней $\Rightarrow$ гомоморфізм в $\mathcal{S}_6$.

Ядро дії

Ядром дії групи G на множині M називається множина

$$\mathrm{Ker} = \left\{ g \in G \mid m^g = m \ \forall m \in M \right\}.$$

Зауваження

$\mathrm{Ker} = \mathrm{Ker}\,\varphi$.

Дія називається *точною*, або *ефективною*, якщо її ядро тривіальне.

Якщо G діє на M точно, то говорять про групу підстановок або про точне зображення групи підстановками.

Приклади

1. $\mathcal{S}_n$ діє точно на множині $\{1, 2, \ldots, n\}$.
2. Дія групи G на собі правими зсувами є точною.
3. Дія групи G на собі спряженням не є точною.
   Її ядром є $Z(G)$.

Твердження

Нехай K — ядро дії (G, M). Тоді для $g_1, g_2 \in G$

$$m^{g_1} = m^{g_2} \ \forall m \in M \Longleftrightarrow Kg_1 = Kg_2.$$

Доведення.

$(\Rightarrow)$

$$m^{g_1} = m^{g_2} \ \forall m \in M \quad \Rightarrow \quad m = m^{g_2 g_1^{-1}} \quad \Rightarrow \quad g_2 g_1^{-1} \in K \quad \Rightarrow \quad Kg_1 = Kg_2.$$

$(\Leftarrow)$

$$Kg_1 = Kg_2 \quad \Rightarrow \quad \exists k \in K : g_1 = kg_2 \quad \Rightarrow \quad m^{g_1} = m^{kg_2} = (m^k)^{g_2} = m^{g_2}.$$

$\square$

Подібні групи

Нехай група G діє точно на множині M, а група G' діє точно на множині M'. Групи G та G' називаються *подібними*, якщо існують такі бієкція

$$\psi : M \to M'$$

та ізоморфізм

$$\varphi : G \to G',$$

що

$$\psi(m^g) = (\psi(m))^{\varphi(g)} \text{ для всіх } m \in M, g \in G.$$

Подібні групи: приклад

Розглянемо групи

$$G_1 = \langle (1234) \rangle, \quad G_2 = \langle (1324) \rangle, \quad G_3 = \langle (1234)(56) \rangle.$$

$$G_1 \simeq G_2 \simeq G_3 \simeq C_4.$$

G_1 та G_2 подібні: $1 \xmapsto{\psi} 1$, $2 \xmapsto{\psi} 3$, $3 \xmapsto{\psi} 2$, $4 \xmapsto{\psi} 4$.

G_1 та G_3 неподібні, G_2 та G_3 неподібні.