

Комутант груп

Євгенія Кочубінська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

2 листопада 2022



FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS

Комутатор

Означення

Комутатором елементів a і b групи G називається елемент

$$[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab \in G.$$

Властивості комутатора

Для довільних елементів a, b, c групи G :

① $[a, b] = e \Leftrightarrow ab = ba.$

♣ $e = [a, b] = a^{-1}b^{-1}ab \Leftrightarrow ba = ba \cdot a^{-1}b^{-1}ab = ab. \spadesuit$

② $[a, b]^{-1} = [b, a];$

♣ $[a, b]^{-1} = (a^{-1}b^{-1}ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}ba = [b, a]. \spadesuit$

③ $ab = ba[a, b];$

♣ $ba[a, b] = ba \cdot a^{-1}b^{-1}ab = ab. \spadesuit$

④ $[a^c, b^c] = [a, b]^c$, де $a^c = c^{-1}ac$.

$$\begin{aligned}\clubsuit [a^c, b^c] &= (c^{-1}ac)^{-1} \cdot (c^{-1}bc)^{-1} \cdot c^{-1}ac \cdot c^{-1}bc = \\ &= c^{-1}a^{-1}c \cdot c^{-1}b^{-1}c \cdot c^{-1}ac \cdot c^{-1}bc = \\ &= c^{-1}a^{-1}b^{-1}abc = [a, b]^c. \spadesuit\end{aligned}$$

Означення

Комутантом (або похідною підгрупою) групи G називається підгрупа

$$[G, G] = \langle [a, b] \mid a, b \in G \rangle,$$

яка породжена усіма комутаторами групи G .

Ще позначають $G' = [G, G]$.

Зауваження

- 1 Добуток комутаторів не обов'язково є комутатором.
- 2 Комутант $[G, G]$ складається з усіх добутків вигляду

$$[a_1, b_1] \cdot \dots \cdot [a_k, b_k], a_i, b_i \in G.$$

Приклади

1 $[G, G] = \{e\} \Leftrightarrow G$ — абелева.

2 $[\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_n] = \mathcal{A}_n$.

♣ Для довільних $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$: $[\sigma, \tau] \in \mathcal{A}_n \Rightarrow [\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_n] \subseteq \mathcal{A}_n$.

З іншого боку, для попарно різних i, j, k :

$$(ijk) = [(ik), (ij)] \in [\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_n].$$

Отже, $\mathcal{A}_n \subseteq [\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_n]$. ♠

3 $[\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_4] = K_4$.

4 $[Q_8, Q_8] = \{1, -1\}$.

♣ $[i, j] = (-i)(-j)ij = k \cdot k = -1$. ♠

5 $[D_4, D_4] = \{0, \pi\}$.

Твердження

Комутант групи G є нормальною підгрупою групи G .

Доведення.

Для довільних $g \in G$, $h \in [G, G]$:

$$g^{-1}hg = hh^{-1}g^{-1}hg = h \cdot [h, g] \in [G, G].$$

Отже, $[G, G] \triangleleft G$.



Наслідок

Якщо G — неабелева проста група, то $[G, G] = G$.

Наслідок

Якщо $n \geq 5$, то $[\mathcal{A}_n, \mathcal{A}_n] = \mathcal{A}_n$.

Основна властивість комутанта

Теорема

Довільна підгрупа H групи G , яка містить комутант, є нормальною підгрупою G .
Факторгрупа групи G за нормальною підгрупою H є абелевою тоді і лише тоді, коли H містить комутант $[G, G]$ групи G .

Доведення.

Нехай $H \triangleleft G$. Тоді для довільних $aH, bH \in G/H$:

$$aH \cdot bH = bH \cdot aH \Leftrightarrow abH = baH \Leftrightarrow [a, b]H = H \Leftrightarrow [a, b] \in H.$$

