

# Теорема про гомоморфізм. Друга теорема про гомоморфізм

Євгенія Кочубінська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

19 жовтня 2022



FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS

# Теорема про ізоморфізм

Визначимо множину

$$HN = \{hn \mid h \in H, n \in N\}.$$

Якщо  $N \triangleleft G$ , то для довільних  $h \in G, n \in N$  знайдеться такий елемент  $n' \in N$ , що  $hn = n'h$ .

# Теорема про ізоморфізм

## Лема

Нехай  $G$  — група,  $H$  — підгрупа групи  $G$ ,  $N$  — нормальна підгрупа групи  $G$ . Тоді  $HN$  — підгрупа групи  $G$ ,  $N$  — нормальна підгрупа групи  $HN$ .

## Доведення.

Нехай  $h_1n_1, h_2n_2 \in HN$ . Тоді  $h_1n_1 \cdot h_2n_2 = h_1h_2 \cdot n'_1n_2 \in HN$ .

Для довільного  $hn \in HN$ :  $(hn)^{-1} = n^{-1}h^{-1} = h^{-1}n' \in HN$ .

Отже,  $HN < G$ .

Для довільних  $hn \in HN, n' \in N$ :

$$(hn)^{-1}n'(hn) = n^{-1}h^{-1}n'hn \in N \quad (h^{-1}n'h \in N, \text{ бо } N \triangleleft G).$$

Отже,  $N \triangleleft HN$ .



# Друга теорема про гомоморфізм: теорема про ізоморфізм

## Теорема

Нехай  $G$  — група,  $H$  — підгрупа групи  $G$ ,  $N$  — нормальна підгрупа групи  $G$ .  
Тоді

- $HN$  — підгрупа групи  $G$ ;
- $N$  — нормальна підгрупа групи  $HN$ ;
- $H \cap N$  — нормальна підгрупа групи  $H$ ;
- $H/H \cap N \simeq HN/N$ .

# Теорема про ізоморфізм

## Доведення.

За лемою:  $HN < G$ ,  $N \triangleleft HN$ .

Розглянемо відображення

$$\alpha : H \rightarrow HN/N, \quad h \mapsto hN.$$

Відображення  $\alpha$  — гомоморфізм.

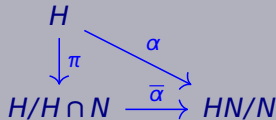
Більше того,  $\alpha$  — епіморфізм, бо для  $a = hn \in HN$  маємо  
 $aN = hnN = hN = \alpha(h).$

Знайдемо ядро відображення  $\alpha$ :

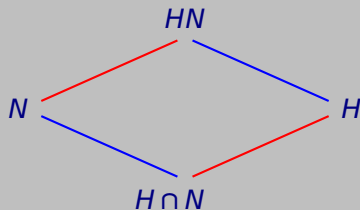
$$\begin{aligned} \text{Ker } \alpha &= \{h \in H \mid \alpha(h) = N\} = \{h \in H \mid hN = N\} \\ &= \{h \in H \mid h \in N\} = H \cap N. \end{aligned}$$

З властивостей ядра  $H \cap N \triangleleft H$ .

За основною теоремою про гомоморфізм:  $H/H \cap N \simeq HN/N$ .



# Теорема про ізоморфізм



# Приклад

## Приклад

Нехай  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Тоді  $m\mathbb{Z}, n\mathbb{Z}$  — нормальні підгрупи групи  $\mathbb{Z}$ . Тоді за теоремою ізоморфізм

$$m\mathbb{Z}/(m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}) \simeq (m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z})/n\mathbb{Z}.$$

Для цілих чисел  $m = 6$  та  $n = 9$ :

$$6\mathbb{Z} \cap 9\mathbb{Z} = 18\mathbb{Z} \text{ та } 6\mathbb{Z} + 9\mathbb{Z} = 3\mathbb{Z}.$$

Тоді

$$6\mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \simeq 3\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_3.$$

## Приклад

Нехай  $V_1, V_2$  — підпростори скінченновимірного векторного простору  $V$ . Тоді

$$(V_1 + V_2)/V_2 \simeq V_1/(V_1 \cap V_2),$$

$H = V_1, N = V_2 \Rightarrow HN = V_1 + V_2, H \cap N = V_1 \cap V_2$  звідси

$$\dim(V_1 + V_2) - \dim V_2 = \dim V_1 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

що дає

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$