Київський національний університет імені Тараса Шевченка

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до лабораторних та самостійних робіт з дисципліни
"Теорія ймовірностей"

для студентів механіко-математичного факультету

Видавничо-поліграфічний центр
'Київський університет'
2007

Рецензенти:
д-р фіз.-мат.наук, проф. Ю.В.Козаченко
д-р фіз.-мат.наук, проф. Є.О.Лєбєдєв,

Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету
протокол N 10 від 26 березня 2007 року

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ до лабораторних та самостійних робіт з дисципліни "Теорія ймовірностей" / Упорядники: О.І. Василик, М.В. Карташов, В.П. Кнопова, Г.М. Шевченко, Р.Є. Ямненко - К., Видавничо-поліграфічний центр 'Київський університет', 2008 - 50 с.

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до лабораторних та самостійних робіт з дисципліни "Теорія ймовірностей"

для студентів механіко-математичного факультету

Упорядники

Василик Ольга Іванівна
Карташов Микола Валентинович
Кнопова Вікторія Павлівна
Шевченко Георгій Михайлович
Ямненко Ростислав Євгенович

Зміст

Виконання завдань

Методичні вказівки до лабораторних та самостійних робіт з нормативного курсу "Теорія ймовірностей" призначені для студентів III курсу механіко-математичного факультету спеціальностей "Математика", "Статистика".

Зміст та структура матеріалу відповідає програмі курсу та вимогам кредитно - модульної системи організації навчального процесу.

Розділи посібника містять завдання лабораторних та самостійних робіт, що входять до складу двох змістовних модулів курсу:

1. Випадкові події, величини, вектори.
2. Випадкові послідовності, граничні теореми.

Перший з цих модулів має практично-прикладний характер та призначений для вивчення застосувань теорії ймовірностей при обчисленні параметрів стохастичних моделей.

Другий модуль має теоретичне спрямування та призначений для оволодіння асимптотичними властивостями стохастичних моделей при великій кількості спостережень.

Завдання робіт з кожної теми розбито на три групи:

A – задачі аудиторних лабораторних робіт,

B – задачі позааудиторних чи самостійних робіт,

C – додаткові задачі.

Задачі розділів **A** розв'язуються в аудиторії під керівництвом та за вказівками викладача. Задачі розділів **B** є аналогічними за змістом аудиторним задачам. Позааудиторні та самостійні завдання з розділів **B** виконуються студентами самостійно на підставі прослуханих лекцій, отриманих у аудиторії навиків для позааудиторних завдань та поточних консультацій з теоретичного матеріалу для самостійних робіт. Назви останніх завершуються буквами (с). Завдання з **C** є додатковими для можливої заміни завдань з **A**,**B**.

Якість виконання вказаних завдань контролюється викладачами, оцінюється у балах, та враховується згідно кредитно-модульній системі при оцінюванні рівня знань студентів.

Змістовно матеріал посібника розбитий на теми відповідно до модуля.

1. Випадкові події, величини, вектори

1.1. Основи теорії ймовірностей

1. Стохастичний експеримент, елементарні події. Простір елементарних подій, випадкові події. Операції над випадковими подіями. Призначення: засвоєння основних понять теорії ймовірностей, оволодіння вмінням фіксувати результати стохастичного експерименту та будувати простір елементарних подій, знаходити формальне зображення висловлювань щодо результату експерименту через випадкові події, та інтерпретувати логічні операції над висловлюваннями як теоретико-множинні операції над подіями.

2. Аксіоми теорії ймовірностей. Властивості ймовірностей. Призначення: оволодіння аксіомами теорії ймовірностей шляхом їх застосування до виводу ряду важливих властивостей ймовірності.

3,4. Класичне означення ймовірностей. Призначення: на основі вміння формулювати простір елементарних подій застосувати методи комбінаторики для розв'язання задач зі скінченним простором елементарних подій, що є симетричними. Застереження: розв'язання без побудови простору елементарних подій вважаються некоректними.

5. Геометричне означення ймовірностей. Призначення: на основі побудови простору елементарних подій застосувати вміння обчислення довжин, площ та об'ємів до розв'язання задач з евклідовим простором елементарних подій.

6. Умовна ймовірність. Незалежні випадкові події. Призначення: ілюстрація означення умовної ймовірності та його інтерпретації, використання незалежності для обчислення ймовірностей складних подій.

7. Формула повної ймовірності. Формула Байеса. Призначення: застосування даних формул для обчислення ймовірностей подій, що пов'язані з багатоетапними стохастичними експериментами.

1.2. Випадкові величини, інтегрування

8, 9. Дискретні випадкові величини: розподіл, числові характеристики, сумісний розподіл, незалежність, функції від дискретних величин. Призначення: вивчення властивостей дискретного розподілу, ознайомлення з основними класами дискретних розподілів, оволодіння методами обчислення математичних сподівань і дисперсій дискретних величин та функцій від них, та обчислення ймовірностей подій, що породжені такими величинами. Вміння оперувати сумісним дискретним розподілом, знати та застосовувати властивість незалежності дискретних величин.

10, 11. Абсолютно неперервні величини: щільність, функція розподілу, числові характеристики, функції від неперервних величин. Призначення: вивчення властивостей щільності, функції розподілу, ознайомлення з основними класами абсолютно неперервних розподілів, оволодіння методами обчислення математичних сподівань і дисперсій неперервних величин та функцій від них, та обчислення ймовірностей подій, що породжені такими величинами.

12. Властивості математичного сподівання та його обчислення. Призначення: закріплення теоретичних знань про основні властивості математичного сподівання шляхом їх застосування при доведенні тотожностей, що пов'язані з математичним сподіванням.

1.3. Випадкові вектори, незалежність

13, 14. Випадкові вектори: сумісна функція розподілу, сумісна щільність, числові характеристики, функції від випадкових векторів та їх перетворення. Призначення: вивчення властивостей сумісних функцій розподілу та сумісних щільностей, оволодіння методами обчислення числових характеристик та ймовірностей подій, що пов'язані з випадковими векторами. Вміння обчислювати сумісні розподіли векторних перетворень випадкових векторів.

15. Незалежні випадкові величини та функції від них. Призначення: застосування властивості незалежності випадкових величин до обчислення числових характеристик та ймовірностей подій, що породжені цими величинами.

16. Нормальні випадкові величини та вектори. Призначення: оволодіння методами аналізу перетворень випадкових величин та векторів на прикладі нормальних величин і векторів.

17. Розподіли Пуассона, показниковий, Ерланга, гама. Призначення: оволодіння методами аналізу перетворень випадкових величин та векторів на прикладі величин з відповідними розподілами.

2. Випадкові послідовності, граничні теореми

2.4. Закони великих чисел

18. Збіжність за ймовірністю. Закон великих чисел. Призначення: закріплення знань щодо збіжності за ймовірністю встановленням певних її властивостей та щодо закону великих чисел шляхом отримання його наслідків.

19. Збіжність майже напевне. Лема Бореля-Кантеллі. Посилений закон великих чисел. Призначення: закріплення знань щодо збіжності майже напевне встановленням певних її властивостей та щодо леми Бореля-Кантеллі і посиленого закону великих чисел шляхом отримання їх наслідків.

20. Нерівності Чебишева та Колмогорова. Призначення: закріплення знань про ці нерівності шляхом їх застосувань.

2.5. Центральна гранична теорема

21. Характеристичні функції. Призначення: закріплення знань властивостей характеристичних функцій через їх використання, знайомство з застосуваннями методу характеристичних функцій для доведення граничних теорем.

22. Центральна гранична теорема. Призначення: оволодіння методом доведення центральної граничної теореми, умовами її виконання, та способами застосування.

23. Збіжність в основному та слабка. Призначення: закріплення знань про означення та властивості вказаних видів збіжності випадкових величин.

2.6. Елементи теорії випадкових процесів

24. Процеси Пуассона і Вінера. Призначення: розвиток вмінь застосування центральної граничної теореми та характеристичних функцій, знайомство з властивостями та застосуванням даних процесів.

Модульний контроль передбачає такі максимальні кількості балів.

Змістовний модуль, тема	Ауд	Поза ауд	Сам ост	Конт роль на	Ек за мен
1.1 Основи теорії ймовірностей		6	2		
1.2 Випадкові величини, інтегрування		4	2		
1.3 Випадкові вектори, незалежність		4	2		
1 Всього = 44	4	14	6	20	
2.4 Закони великих чисел		4	2		
2.5 Центральна гранична теорема		2	6		
2.6 Елементи теорії випадкових процесів					
2. Всього = 16	2	6	8		
Разом по курсу = 100	6	20	14	20	40

Сумарні показники

1-й модуль. Випадкові події, величини, вектори. 0-44 бали
- робота на аудиторних заняттях – 0-4 бали
- виконання позааудиторних робіт – 0-14 балів
- виконання самостійних робіт – 0-6 балів
- модульна контрольна робота - 0-20 балів

2-й модуль. Випадкові послідовності, граничні теореми. 0-16 балів
- робота на аудиторних заняттях – 0-2 бали
- виконання позааудиторних робіт – 0-6 балів
- виконання самостійних робіт – 0-8 балів

Якщо контрольна робота пропущена з поважної причини, то вона може бути написана без зменшення кількості балів за неї. В інших випадках контрольна робота також може бути написана (переписана), але одержані за неї бали враховуються з коефіцієнтом 0.8. Порушник правил виконання контрольної роботи позбавляється права повторного написання та отримує нульовий бал за роботу.

Література

1. *Карташов М.В.* Теорія ймовірностей та математична статистика - Київ, ВПЦ Київський університет, 2009.

2. *Карташов М.В.* Імовірність, процеси, статистика - Київ, ВПЦ Київський університет, 2007.

3. *Дороговцев А.Я.*,Сільвестров Д.С.,Скороход А.В.,Ядренко М.Й. Теория вероятностей. Сборник задач - Киев, Вища школа, 1976.

4. *Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И.* Теория вероятностей и математическая статистика. – К., 1988.

5. *Ширяев А. Н.* Вероятность, в 2-х кн. - Москва, МЦНМО, 2004.

1. Випадкові події, величини, вектори

1.1. Основи теорії ймовірностей

1. Стохастичний експеримент, елементарні події. Простір елементарних подій, випадкові події. Операції над випадковими подіями

Література: [1, с.8–12],[2,с.4-12]

A

1. Монету підкидають тричі. Описати простір елементарних подій. Описати події: A – один раз з'явиться герб, B – при другому підкиданні з'явиться герб. Описати події: $A \cap B$, $A \cup \overline{B}$, $\overline{A}$.

2. Гральний кубик підкидають двічі. Описати простір елементарних подій. Описати події: A - сума очок, які з'явилися, дорівнює 8; хоча б раз випало 6 очок. Описати події: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $\overline{B}$.

3. Монету підкидають доти, поки не з'явиться герб. Описати простір елементарних подій. Описати події: A – герб випаде не пізніше шостого підкидання, B – герб випаде при парній кількості підкидань. Описати події: $\overline{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$.

4. Випадковий експеримент полягає в тому, що вимірюються дві величини ξ_1 та ξ_2, які можуть набувати всіх значень з відрізку $[0, 1]$. Описати простір елементарних подій. Описати події: A – максимальне з ξ_1 та ξ_2 менше ніж a; B – вектор (ξ_1, ξ_2) має довжину, яка не перевищує b; C – величина, обернена до значення ξ_1, не перевищує c. Описати події: $A \cap B$, $A \cap C$, $C \cap B$, $A \cap B \cap C$.

5. Нехай A, B, C – випадкові події. Користуючись операціями додавання, множення та віднімання, знайти вирази для подій, які полягають в тому, що з подій A, B, C: а) відбулася тільки подія A; б) відбулися тільки A і B; в) відбулися всі три події; г) відбулася хоча б одна з цих подій; д) відбулася одна і тільки одна подія; е) не відбулося жодної події; є) відбулося дві і тільки дві події; ж) відбулося не більше двох подій.

6. Об'єднання $A \cup B$ двох подій можна виразити як об'єднання двох несумісних подій $A \cup B = A \cup (B \setminus A \cap B)$. Виразити аналогічним чином об'єднання трьох подій.

7. Нехай $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Знайти всі елементи найменшої алгебри, яка містить події $A = \{1, 2\}, B = \{4, 5, 6\}$.

8. Для зліченного простору $\Omega = \{\omega_n, n \geqslant 1\}$ описати найменші алгебру та сигма-алгебру, які містять усі одноточкові множини.

B

1. Подія A полягає в тому, що число, взяте навмання з відрізка $[-10, 10]$ не більше 4, а подія B - модуль цього числа не перевищує 2. Що означають події: $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$, $\overline{B}$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A}$?

2. Випадковий експеримент полягає в тому, що монету підкидають доти, поки вона не випаде двічі підряд однією і тією ж стороною. Описати простір елементарних подій. Описати події: A – експеримент закінчиться до восьмого підкидання; B – експеримент закінчиться при парній кількості підкидань; C – експеримент триватиме нескінченно довго.

3. Випадковий експеримент полягає у вимірюванні величин ξ_1 та ξ_2, кожна з яких може набувати довільного дійсного значення. Простір елементарних подій можна представити у вигляді множини точок на площині з координатами (ξ_1, ξ_2). Вказати множини точок на площині, які відповідають подіям: A – значення ξ_1 менше значення ξ_2; B – мінімальне з ξ_1 та ξ_2 менше b; C – відстань від точки (ξ_1, ξ_2) до фіксованої точки (x, y) не більша ніж c.

4. Робітник виготовив n деталей. Нехай подія $A_k, k = \overline{1, n}$, означає, що k-та деталь має дефект. Виразити через події $A_k, k = \overline{1, n}$, подію, яка полягає в тому, що: а) жодна з деталей не має дефектів; б) хоча б одна деталь має дефект; в) тільки одна деталь має дефект; г) не більше двох деталей мають дефекти; д) хоча б дві деталі не мають дефектів; е) тільки дві деталі мають дефекти.

5. Клас A є алгеброю тоді й тільки тоді, коли а) $\Omega \in A$, б) з $A, B \in A$ випливає $A \backslash B \in A$.

6. Довести, що: а) $A \backslash B = A \backslash (A \cap B)$, б) $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$, в) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$, г) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, д) $\overline{A \Delta B} = \overline{A} \Delta \overline{B}$, е) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, є) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

7. Нехай $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – випадкові події, $\mathcal{A}$ – найменша алгебра, яка містить події $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Довести, що кожна випадкова подія B, яка належить $\mathcal{A}$, є сумою деякого числа, не більшого ніж 2^n, "основних" випадкових подій виду $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k} \cap \overline{A}_{j_1} \cap \overline{A}_{j_2} \cap \ldots \cap \overline{A}_{j_{n-k}}$, де $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ – деяка k-підмножина множини $\{1, 2, \ldots, n\}$, а $\{j_1, j_2, \ldots, j_{n-k}\}$ – ті числа множини $\{1, 2, \ldots, n\}$, які не входять в $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$. Скільки множин міститься в $\mathcal{A}$?

8. Обчислити $\underline{\lim} A_n$, $\overline{\lim} A_n$ у випадку, коли: а) $\Omega = \mathbb{R}$, а події $A_n = (-\infty, a_n)$, б) $A_{2n+1} = A$, $A_{2n} = B$, в) $A_n \uparrow A$, г) $A_n \downarrow A$.

C

1. Експеримент полягає в тому, що гральний кубик підкидають доти, поки не випаде 6 очок. Описати простір елементарних подій. Скільки елементарних подій входить в подію A – експеримент закінчиться до четвертого підкидання?

2. Експеримент полягає в тому, що монету підкидають доти, поки двічі підряд не випаде герб. Описати простір елементарних подій. Скільки елементарних подій входить в подію A – експеримент закінчиться до сьомого підкидання?

3. Для довільної послідовності подій $(A_n, n \geqslant 1)$ має місце зображення $\cup_{n \geqslant 1} A_n = \cup_{n \geqslant 1} B_n$, де події $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \backslash \cup_{k=1}^{n-1} A_k, n > 1$ – попарно несумісні.

4. Випадкові події $(H_n, n \geqslant 1)$ попарно несумісні. Довести тотожність $\sigma[\{H_n, n \geqslant 1\}] = \{\cup_{i \subset I} H_i,\ I \subset \mathbb{N}\}$.

5. На множині E точок ω виділено n підмножин $A_i, i = \overline{1,n}$. Довести, що, використовуючи A_i, можна побудувати такі множини $B_k, k = \overline{1, 2^n}$, що для довільної скінченої функції $F(\omega) = f(1\!\!\mathrm{I}_{A_1}(\omega), 1\!\!\mathrm{I}_{A_2}(\omega), \ldots, 1\!\!\mathrm{I}_{A_n}(\omega))$ знайдуться такі сталі c_k, що $F(\omega) = \sum_{k=1}^{2^n} c_k 1\!\!\mathrm{I}_{B_k}(\omega)$. Тут $1\!\!\mathrm{I}_C(\omega)$ – характеристична функція множини C.

2. Аксіоми теорії ймовірностей.Властивості імовірностей (с)

Література: [1, с.1–18], [2,с.1-17]

B

1. Якщо $\mathfrak{F}$ – сигма-алгебра і множина $C \notin \mathfrak{F}$, то
$\sigma[\mathfrak{F} \cup \{C\}] = \{(A_1 \cap C) \cup (A_2 \cap \overline{C}),\ A_k \in \mathfrak{F}\}$.

2. Нехай $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$. Всім числам приписані ймовірності, пропорційні їх величинам. Знайти ці ймовірності. Яка ймовірність того, що в результаті експерименту з'явиться: а) парне число; б) непарне число; в) число, кратне q?

3. Експеримент полягає в тому, що монету підкидають доти, поки вона не випаде двічі підряд однією й тією ж стороною. Побудувати ймовірнісний простір. Знайти ймовірність того,що: а) експеримент закінчиться на парному кроці; б) експеримент закінчиться на непарному кроці; в) експеримент ніколи не закінчиться.

4. Нехай p_1, p_2, p_{12} – дійсні числа. Довести, що для того, щоб існували випадкові події A і B такі, що $\mathbf{P}(A) = p_1$, $\mathbf{P}(B) = p_2$, $\mathbf{P}(A \cap B) = p_{12}$, необхідно і достатньо, щоб виконувались нерівності: $1 - p_1 - p_2 + p_{12} \geqslant 0$, $p_1 - p_{12} \geqslant 0$, $p_2 - p_{12} \geqslant 0$, $p_{12} \geqslant 0$.

5. Довести а) рівність $\mathbf{P}(A \Delta B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - 2\mathbf{P}(A \cap B)$, б) нерівність трикутника $\mathbf{P}(A \Delta B) \leqslant \mathbf{P}(A \Delta C) + \mathbf{P}(C \Delta B)$, в) нерівність різниць $\mathbf{P}((\cup A_i) \Delta (\cup B_i)) \leqslant \sum_i \mathbf{P}(A_i \Delta B_i)$.

6. Послідовність подій A_n збігається до границі A, якщо $A = \underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n$. Довести, що тоді $\mathbf{P}(A) = \lim \mathbf{P}(A_n)$.

7. Нехай $A_k \in \mathfrak{F}$, $\mathbf{P}(A_k) = 1, k \geqslant 1$. Довести, що $\mathbf{P}(\cap_{k \geqslant 1} A_k) = 1$.

8. Розглядається експеримент з n рівноможливими, єдиним чином можливими і несумісними результатами. Події A сприяють m з цих результатів. Замість звичайного класичного означення ймовірності покладемо: а) $\mathbf{P}(A) = m^2/n^2$; б) $\mathbf{P}(A) = \sqrt{m/n}$. Отримати формули, які відповідають змісту теорем додавання і множення ймовірностей в цих випадках. Знайти таке означення ймовірності, щоб змісту теореми додавання ймовірностей відповідали формули множення ймовірностей.

C

1. Клас підмножин $\mathbb{R}$ вигляду $F \cap G$, де F – відкрита, а G – замкнена множина, утворює алгебру, але не є сигма-алгеброю.

2. Довести а) нерівність Буля: $\mathbf{P}(A\cap B)\geqslant 1-\mathbf{P}(\overline{A})-\mathbf{P}(\overline{B})$, б) нерівність $\mathbf{P}(\bigcup_{k=1}^n A_k)\geqslant \mathbf{P}(\bigcap_{k=1}^n A_k)+1-n$.

3. Для довільних подій A, B довести нерівність

$$\mathbf{P}(A\cup B)\mathbf{P}(A\cap B)\leqslant \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

4. Подія C вдвічі більш ймовірна, ніж A, а подія B настільки ж ймовірна, як події A і C разом. Ці події несумісні, і їх об'єднання співпадає з усім простором елементарних подій. Знайти ймовірності подій A, B, C.

5. Відомі ймовірності подій A, B, $A\cap B$. Знайти ймовірності подій: $A\cup B$, $\overline{A}\cup\overline{B}$, $\overline{A}\cup B$, $\overline{A}\cap B$, $\overline{A\cup B}$, $\overline{A\cap B}$.

6. Перевірити наступні тотожності, застосовуючи аксіому додавання ймовірностей для зліченої множини несумісних подій:

$$\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n=\frac{1}{1-q},\quad 0<q<1;\quad 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{m+k}{m}\frac{(N-m)^k}{(N+1)\ldots(N+k)}=\frac{N}{m}.$$

7. Нехай $\Omega=\{1,2,\ldots,2n\}$. Всім числам приписані ймовірності, пропорційні логарифмам цих чисел. Знайти ці ймовірності. Знайти ймовірність того, що в результаті експерименту з'явиться: а) парне число; б) непарне число.

8. Нехай $p_n, n=0,1,2,3,$ – ймовірність того, що відбулося рівно n подій з A, B, C. Знайти вираз для $p_n, n=0,1,2,3,$ через $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(B)$, $\mathbf{P}(C)$, $\mathbf{P}(A\cap B)$, $\mathbf{P}(A\cap C)$, $\mathbf{P}(B\cap C)$, $\mathbf{P}(A\cap B\cap C)$.

9. Нехай $\mathbf{P}(A)\geqslant 0.8$, $\mathbf{P}(B)\geqslant 0.8$. Довести, що $\mathbf{P}(A\cap B)\geqslant 0.6$.

10. Довести, що $\mathbf{P}^2(A\cap B)+\mathbf{P}^2(\overline{A}\cap B)+\mathbf{P}^2(A\cap\overline{B})+\mathbf{P}^2(\overline{A}\cap\overline{B})\geqslant 1/4$.

11. Довести. що для довільних подій A, B: $|\mathbf{P}(A\cap B)-\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|\leqslant 1/4$.

12. Нехай $(A_k, k=\overline{1,n})$ – випадкові події. Визначимо $S_0=1$, та

$$\textstyle S_k=\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n}\mathbf{P}(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}).$$

а) Нехай B_m – подія, що полягає у тому, що одночасно відбудеться точно m подій з сукупності (A_k). Довести, що $\mathbf{P}(B_m)=\sum_{k=m}^n(-1)^{k-m}C_k^m S_k$.
б) Нехай C_m – подія, що полягає у тому, що одночасно відбудеться принаймні m подій з сукупності (A_k). Довести, що

$$\textstyle\mathbf{P}(C_m)=\sum_{k=m}^n(-1)^{k-m}C_{k-1}^{m-1}S_k.$$

в) Довести для всіх $m\leqslant n/2$ нерівності Бонфероні:

$$\textstyle\sum_{k=1}^{2m}(-1)^{k-1}S_k\leqslant \mathbf{P}(\cup_{k=1}^n A_k)\leqslant \sum_{k=1}^{2m-1}(-1)^{k-1}S_k.$$

г) Довести тотожність Пуанкаре $\mathbf{P}(\cup_{k=1}^n A_k)=\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}S_k$.
д) Довести нерівності Фреше: $S_{k+1}/C_n^{k+1}\leqslant S_k/C_n^k$ при $k<n$.
е) Довести нерівності Гумбела: $(C_n^{k+1}-S_{k+1})/C_{n-1}^k\leqslant (C_n^k-S_k)/C_{n-1}^{k-1}$.

3. Класичне означення ймовірностей

Література: [1, с.19–21], [2,с.17-19]

А

1. На вершину гори ведуть сім доріг. Скількома способами можна піднятися на гору і потім спуститися з неї? Розв'язати ту ж задачу за умови, що підйом та спуск здійснюються різними шляхами.

2. Скількома способами можуть випасти три гральних кубики? В скількох випадках хоча б на одному кубику випаде шість очок? В скількох випадках на одному кубику з'явиться шість очок, а ще на одному – три?

3. З колоди, яка налічує 52 карти, вибрали 10 карт. В скількох випадках серед цих карт є: а) хоча б один туз ? б) рівно один туз ? в) не менше двох тузів ? г) рівно два тузи?

4. Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ так, щоб кожне парне число мало парний номер?

5. Підкидають 12 (різних) гральних кубиків. Скількома способами можуть випасти: а) всі грані кубика; б) кожна грань двічі?

6. Знайти ймовірність того, що серед k цифр, кожна з яких вибрана навмання (вибірка з поверненням): а) не входить 0; б) не входить 1; в) не входить ні 0, ні 1; г) не входить або 0, або 1.

7. В лотереї n білетів, серед яких m виграють. Знайти ймовірність виграшу для того, хто придбав k білетів.

В

1. На залізничній станції є n світлофорів. Скільки різних сигналів можна подати за допомогою цих світлофорів, якщо кожен з них має три стани: горить зелене, або жовте, або червоне світло?

2. Скількома способами можна вибрати з колоди, що складається з 52 карт, шість карт так, щоб серед них були всі чотири масті?

3. Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1, 2, \ldots, n\}$ так, щоб кожне число, кратне 2, и кожне число, кратне 3, мали номери, кратні 2 і 3 відповідно?

4. Скількома способами можна розділити $a + b + c$ різних предметів на три групи так, щоб в першій групі було a, в другій – b і в третій – c предметів?

5. Знайти ймовірність того, що серед трьох цифр, кожна з яких вибрана навмання, буде 2, 1, 0 повторень.

6. Учасник лотереї "Спортлото" з 49 назв видів спорту повинен назвати шість. Повний виграш отримає той, хто правильно назве всі шість видів. Виграш отримає і той, хто правильно назве не менше трьох видів. Знайти ймовірність повного виграшу. Яка ймовірність виграшу в цій лотереї ?

7. З послідовності чисел $1, 2, \ldots, n$ вибирають навмання k різних чисел. Яка ймовірність того, що: а) кожне з вибраних чисел кратне даному числу p; б) кожне з вибраних чисел кратне хоча б одному з двох взаємно простих чисел p і q; в) серед вибраних чисел є хоча б одне кратне p ?

C

1. Скільки костей доміно можна зробити, використовуючи числа $0, 1, ..., n$
?

2. Скількома способами можна розділити між трьома людьми $3n$ предметів так, щоб кожен отримав n предметів?

3. Скількома способами можна розділити колоду з 52 карт навпіл так, щоб в кожній частині було по два тузи?

4. Міжнародна комісія складається з дев'яти чоловік. Матеріали комісії зберігаються в сейфі. Скільки замків повинно бути на сейфі, скільки ключів потрібно виготовити і як їх розподілити між членами комісії, щоб доступ до матеріалів був можливим тоді і тільки тоді, коли збереться не менше шести членів комісії? Розглянути цю задачу для випадку, коли комісія складається з n членів, а сейф можна відкрити тільки в присутності не менше m членів комісії.

5. Скількома способами можна розділити n однакових подарунків серед m дітей? Скільки серед них способів, коли кожна дитина отримує хоча б один подарунок?

6. Гральний кубик підкидають шість разів. Знайти ймовірність того, що: а) випадуть всі шість граней; б) випадуть хоча б дві однакові грані; в) випадуть тільки три різні грані.

7. Скільки різних частинних похідних має ціла функція від n змінних?

8. Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1, 2, \ldots, n\}$ так, щоб числа $1, 2, 3$ стояли поруч в порядку зростання?

9. Довести, що кількість способів, якими двоє людей можуть розділити порівну $2n$ предметів першого сорту, $2n$ предметів другого сорту і $2n$ предметів третього сорту, становить $3n^2 + 3n + 1$.

10. Скільки цілих невід'ємних розв'язків має рівняння $x_1 + x_2 + ... + x_n = N$? Скільки цілих додатних розв'язків має це рівняння ?

11. Задача Банаха. Один математики носить з собою дві коробки сірників. Кожен раз, коли він хоче дістати сірник, він вибирає одну з коробок навмання. Знайти ймовірність того, що коли він вперше витягне порожню коробку, в іншій коробці виявиться k сірників ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$; n – початкова кількість сірників в кожній з цих коробок).

12. Написано n листів, але адреси на конвертах написані навмання. Яка ймовірність того, що : а) хоча б один адресат отримає призначений для нього лист; б) m адресатів отримають призначені їм листи.

13. Числа $1, 2, \ldots, n$ розташовані навмання. Яка ймовірність того, що хоча б одне з чисел буде дорівнювати номеру свого місця? Знайти границю цієї ймовірності при $n \to \infty$.

4. Класичне означення ймовірностей

Література: [1, с.19–21], [2,с.17-19]

А

1. За умови, що ймовірності попадання дня народження на кожен з місяців року однакові, знайти ймовірність того, що: а) дні народження десяти чоловік припадуть на різні місяці року; б) для 30 чоловік на шість місяців припадає по три дні народження, а на інші шість – по два.

2. n чоловік, в тому числі A та B, розташовуються в ряд у випадковому порядку. Знайти ймовірність того, що між A та B буде стояти рівно k чоловік. Показати, що якщо n чоловік стають не в ряд, а в круг, то ця ймовірність не залежить від k і дорівнює $2/(n-1)$.

3. *Статистика Максвелла-Больцмана.* Кожна з n **різних** частинок потрапляє в один з N лічильників. Знайти ймовірність того, що: а) в перший, другий, ..., N-й лічильник потрапить відповідно $n_1, n_2, \ldots, n_N$ частинок ($n_1 + n_2 + \ldots + n_N = n$); б) даний лічильник зареєструє k частинок; в) кожен лічильник зареєструє хоча б одну частинку.

4. *Статистика Бозе-Ейнштейна.* Кожна з n **однакових** частинок реєструється одним з N лічильників. Знайти ймовірність того, що перший, другий, ..., N-й лічильник зареєструє відповідно $n_1, n_2, \ldots, n_N$ частинок ($n_1+n_2+\ldots+n_N = n$), якщо рівноможливими вважаються розміщення, які відрізняються кількістю частинок, зареєстрованих лічильниками. Обчислити ймовірність того, що даний лічильник зареєструє k частинок:

$$p_k = C_{N+n-k-2}^{n-k} \; / \; C_{N+n-1}^{n}.$$

Довести, що при $N > 2$ послідовність $p_k, k \geqslant 0$, – спадна. Знайти ймовірність того, що рівно m лічильників не зареєструють жодної частинки.

5. *Статистика Фермі-Дірака.* Кожна з n **однакових** частинок реєструється одним з N лічильників. Яка ймовірність того, що перший, другий, ..., N-й лічильник зареєструє відповідно $n_1, n_2, \ldots, n_N$ частинок ($n_1 + n_2 + \ldots + n_N = n$), якщо рівноможливими вважаються розміщення, які задовольняють "умову Паулі" (кожен лічильник реєструє не більше однієї частинки).

6. В коморі знаходяться n пар черевиків. З них випадковим чином вибираються $2k$ черевиків. Яка ймовірність того, що серед вибраних черевиків: а) відсутні парні; б) є рівно одна комплектна пара; в) є дві комплектні пари?

B

1. В класі 35 учнів: 20 дівчаток та 15 хлопчиків. Вирішено за допомогою жеребу розподілити серед учнів чотири квитки в театр. Яка ймовірність, що квитки отримають: а) чотири дівчинки; б) два хлопчики та дві дівчинки?

2. В урні міститься дві білих та чотири чорних кулі. З урни одну за одною виймають всі кулі. Знайти ймовірність того, що вийнята останньою куля буде білою.

3. З колоди, що складається з 52 карт, навмання вибирають шість карт. Знайти ймовірність того, що: а) серед цих карт буде туз; б) серед цих карт будуть представники всіх мастей; в) серед них є хоча б дві карти з однаковою назвою.

4. 15 куль, серед яких десять білих і п'ять червоних, навмання розкладаються на групи по три кулі. Знайти ймовірність того, що в кожній групі буде по дві білих кулі.

5. В три вагони заходять дев'ять пасажирів, кожен з яких вибирає вагон навмання. Знайти ймовірність того, що: а) в перший вагон зайде три пасажири; б) в кожен вагон зайде по три пасажири; в) В один вагон зайде чотири, в другий – три і в третій – два пасажири.

6. n однакових куль розміщають випадковим чином в N урнах. Знайти ймовірність того, що в кожній урні буде хоча б одна куля.

7. З усіх цілих невід'ємних розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + \ldots + x_N = n$ вибирають один розв'язок. Знайти ймовірність того, що у цьому розв'язку $x_k > 0$ для всіх $1 \leqslant k \leqslant N$.

C

1. Вибирається навмання один член визначника n-го порядку. Яка ймовірність того, що він не містить елементів головної діагоналі?

2. Колода з 52 гральних карт ретельно тасується, після чого одна за одною відкриваються верхні карти до появи першого туза. Яка ймовірність того, що: а) першим тузом виявиться п'ята карта; б) першим тузом виявиться k-а карта; в) перший туз зустрінеться не пізніше k-ої карти?

3. Множина K складається з $n+1$ особи. Деяка особа A пише два листи випадково вибраним з множини K адресатам, які утворюють "перше покоління" K_1. Особа з K_1 робить те ж саме, в результаті чого утворюється "друге покоління" K_2, і т.д. Знайти ймовірність того, що особа A не входить в жодне з "поколінь " $K_1, \ldots, K_m$.

4. В гості прийшли n чоловік, причому всі були в калошах. Йдучи, гості вибирали калоші навмання. Яка ймовірність того, що кожен візьме праву і ліву калоші?

5. Кандидат A зібрав на виборах m голосів, а кандидат B – n голосів, де $m > n$. Виборці голосували послідовно. Яка ймовірність того, що протягом всього часу голосування кандидат A випереджав B за кількістю голосів?

6. В урні m білих і n чорних куль, $m < n$. Послідовно без повернення виймаються всі кулі. M_k – кількість чорних куль, а N_k – кількість білих куль, вийнятих за k кроків. Знайти ймовірність того, що для всіх $k = \overline{1, m+n}$ виконується нерівність $M_k < N_k$.

7. В місті з населенням кількістю $n+1$ чоловік дехто дізнається про новину. Він передає її першому зустрічному, той – ще одному і т.д. На кожному кроці людина, яка вперше дізналася про новину, може повідомити

її будь-кому з n чоловік з однаковою ймовірністю. Знайти ймовірність того, що за k кроків: а) новина не повернеться до людини, яка дізналася про неї першою; б) новина не буде ніким повторена. Розв'язати цю ж задачу за припущення, що на кожному кроці про новину повідомляють групі з m випадково вибраних осіб.

8. У групі n студентів. Яка ймовірність того, що хоча б у двох з них однакові дні народження ? Для яких n ця ймовірність не менша за 0.5 ?

9. Кожна з n різних частинок потрапляє в одну з m комірок. а) Знайти ймовірність того, що для кожного $k = \overline{1, m}$ у k-ту комірку потрапить n_k частинок. б) Знайти ймовірність потрапляння у фіксовану комірку k частинок. За якої умови існує границя цієї ймовірності при $n, m \to \infty$? Знайти цю границю. в) Яка ймовірність того, що буде зайнято рівно l комірок ?

10. Кожна з n ідентичних (нерозрізнимих) частинок потрапляє в одну з m комірок. Рівноможливими є всі розміщення, що відрізняються кількістю частинок у комірках. Знайти ймовірності а)-в) попередньої вправи.

11. Кожна з n ідентичних частинок потрапляє в одну з m комірок. Рівноможливими є всі розміщення, що задовольняють забороні Паулі - у кожній комірці може бути не більше однієї частинки. Знайти ймовірності з пунктів а)-в) вправи 2.

12. Із дванадцяти білетів, пронумерованих від 1 до 12, один за одним вибираються два білети. Яка ймовірність того, що цих білетах: а) обидва номери парні; б) обидва номери непарні; в) перший номер парний, а другий непарний; г) один із номерів парний, а інший непарний ?

5. Геометричне означення ймовірностей

Література: [1, с.22–25], [2,с.21-24]

А

1. Стрижень довжини l розламали в навмання обраній точці на дві частини. Яка ймовірність того, що довжина меншої частини не більша за $l/3$?

2. Два судна повинні підійти до одного й того ж причалу. Їх поява – незалежні випадкові події, рівноможливі протягом доби. Знайти ймовірність того, що одному з суден доведеться чекати звільнення причалу, якщо час стоянки першого судна – одна година, а другого – дві години.

3. На колі одиничного радіуса з центром в початку координат навмання вибирається точка. Знайти ймовірність того, що: а) проекція точки на діаметр знаходиться від центра на відстані, яка не перевищує r; б) відстань від вибраної точки до точки з координатами $(1, 0)$ менша r.

4. В квадрат з вершинами $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ навмання кинули точку. Нехай (ξ, η) – її координати. Показати, що для всіх $0 \leqslant x, y \leqslant 1$: $\mathbf{P}(\xi < x, \eta < y) = xy = \mathbf{P}(\xi < x)\mathbf{P}(\eta < y)$. Знайти: а) $\mathbf{P}(|\xi - \eta| < z)$; б) $\mathbf{P}(\xi\eta < z)$; в) $\mathbf{P}(\min(\xi, \eta) < z)$; г) $\mathbf{P}(\max(\xi, \eta) < z)$; д) $\mathbf{P}(\xi + \eta < 2z)$.

5. Монета радіуса r випадковим чином кидається на стіл, розграфлений на квадрати зі стороною l ($2r < l$). Знайти ймовірність того, що: а) монета не перетне жодної зі сторін квадратів; б) монета перетне не більше однієї сторони квадратів.

6. На відрізку $[P, Q]$ довжини l навмання вибрано дві точки A і B. Знайти ймовірність того, що: а) точка A виявиться ближчою до точки P, ніж точка B; б) точка A виявиться ближчою до точки B, ніж до P.

7. Знайти ймовірність того, що з трьох навмання взятих відрізків довжиною не більше l можна побудувати трикутник.

B

1. Точку кинули навмання всередину круга радіуса R. Знайти ймовірність того, що: а) точка знаходиться від центра на відстані, меншій ніж r ($r < R$); б) менший кут між заданим напрямком і прямою, яка з'єднує точку з початком координат, не перевищує α; в) точка потрапила всередину вписаного правильного n-кутника.

2. На колі радіуса R навмання взято дві точки. Яка ймовірність того, що відстань між ними не перевищує r?

3. В квадрат з вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ навмання кинули точку. Нехай (ξ, η) – її координати. Знайти ймовірність того, що корені рівняння $x^2 + \xi x + \eta = 0$: а) дійсні; б) додатні.

4. Навмання взято два додатних числа x та y, кожне з яких не перевищує 2. Знайти ймовірність того, що добуток xy не перевищуватиме 1, а частка y/x не буде перевищувати 2.

5. Стрижень довжиною l навмання розламали на три частини. Яка ймовірність того, що з отриманих частин можна скласти трикутник?

6. У сфері радіусу R навмання обрано N точок. Знайти ймовірність того, що відстань до центру найближчої точки не перевищуватиме r. За яких умов границя цієї ймовірності при $N, R \to \infty$ є додатною ?

7. Якої товщини повинна бути монета, щоб ймовірність її падіння на ребро дорівнювала $1/3$?

C

1. Площина розграфлена паралельними прямими, які знаходяться одна від одної на відстані $2a$. На площину навмання кидають голку довжиною $2l$ ($l < a$). Знайти ймовірність того, що голка перетне яку-небудь пряму. На площину навмання кидають опуклий контур, діаметр якого менший ніж $2a$. Яка ймовірність того, що контур перетне одну з прямих? (Задача Бюффона.)

2. Навмання вибирається хорда в крузі. Чому дорівнює ймовірність того, що її довжина перевищує довжину сторони вписаного рівностороннього трикутника? (Парадокс Бертрана.)

3. Для кожного x знайти ймовірність того, що довжина перпендикуляра, опущеного з центра кола на випадкову хорду, менша за x. Остання визначається як пряма, що проходить через дві точки, незалежно вибрані на колі.

4. Нехай (ξ, η) – координати точки, вибраної навмання всередині квадрата з координатами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$. Нехай також $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, $\varphi = \arctan(\eta/\xi)$. Знайти сумісний розподіл ρ і φ, тобто для всіх $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{R}$ знайти ймовірність $\mathbf{P}(\rho < x, \varphi < y)$.

5. Знайти ймовірність перетину навмання підкинутої голки довжини $l < h$ системи вертикальних та горизонтальних прямих, при відстані h між ними.

6. Умовна ймовірність. Незалежні випадкові події

Література: [1, с.25–27,30-32], [2,с.24-31]

А

1. Підкидають три гральних кубика. Знайти ймовірність того, що: а) хоча б раз випала шістка, якщо на всіх трьох кубиках випали різні грані; б) хоча б раз випала шістка, якщо на всіх кубиках випали однакові грані.

2. З урни, яка містить n білих та m чорних куль, послідовно виймають дві кулі (без повернення). Знайти ймовірність того, що: а) друга куля біла, якщо відомо, що перша куля біла; б) обидві кулі одного кольору; в) кулі різного кольору.

3. В урні міститься п'ять чорних, шість білих і вісім червоних куль. Послідовно без повернення з урни виймають три кулі. Знайти ймовірність того, що: а) перша куля – чорна, друга – біла, третя – червона; б) перша куля - біла, а друга і третя – червоні.

4. Урна містить M куль, серед яких M_1 білих куль. Розглядається вибір об'єму n. Нехай B_j – подія, яка полягає в тому, що вибрана на j-му кроці куля була білою, а A_k – подія, яка полягає в тому, що у вибірці об'єму n є рівно k білих куль. Показати, що як для вибору з поверненням, так і для вибору без повернення $\mathbf{P}(B_j/A_k) = k/n$.

5. Ймовірність влучення у десятку при одному пострілі дорівнює 0.2. Скільки треба зробити пострілів (з незалежними подіями влучення), щоб влучити в десятку хоча б один раз із ймовірністю не меншою за 0.9?

6. Кожна з m радіолокаційних станцій за час T робить n обертів антени і за один оберт антени виявляє об'єкт із ймовірністю p незалежно від інших станцій. Знайти ймовірність того, що: а) за час T об'єкт буде виявлено хоча б однією станцією; б) за час T об'єкт буде виявлено кожною станцією.

7. Два гравці A та B по черзі стріляють у ціль. Виграє той, хто влучить першим. Ймовірності влучення для A і B рівні відповідно p_1, p_2. Першим стріляє A. Знайти ймовірність виграшу для кожного з гравців.

8. Підкидаються два гральних кубики. Розглянемо події: A_1 – на першому кубику випала парна кількість очок; A_2 – на другому кубику випала непарна кількість очок; A_1 – сума очок на кубиках непарна. Довести, що події A_1, A_2, A_3 попарно незалежні, але не є незалежними у сукупності.

B

1. Тричі підкидають монету. Подія A – двічі випав герб, B – при другому підкиданні випав герб. Обчислити $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(B)$, $\mathbf{P}(A/B)$.

2. Відомо, що при підкиданні десяти гральних кубиків випало хоча б один раз шість очок. Яка ймовірність того, що шістка випала два і більше разів?

3. З дванадцяти білетів, пронумерованих від 1 до 12, один за одним вибираються два білети. Яка ймовірність того, що на цих білетах: а) обидва номери парні; б) обидва номери непарні; в) перший номер парний, а другий – непарний; г) один номер парний, а інший – непарний?

4. Нехай дві події A і B, визначені в одному й тому ж просторі елементарних подій, не є тотожними, і нехай $0 < \mathbf{P}(A) < 1$, $0 < \mathbf{P}(B) < 1$. Впорядкувати, використовуючи знаки "$<$" або "$=$", величини 0, $\mathbf{P}(A \cap B)$, $\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$, $\mathbf{P}(A/B)$, $\mathbf{P}(A \cup B)$, $\mathbf{P}(A)$ за припущення, що: а) події A і B несумісні; б) A і B незалежні.

5. Для підвищення надійності приладу він дублюється $n-1$ іншими такими ж приладами. Надійність кожного приладу дорівнює p. Знайти надійність цієї системи приладів. Скільки потрібно взяти приладів, щоб надійність системи була не меншою, ніж p_0? Знайти надійність системи, якщо пристрій, що вмикає дублюючий прилад, має надійність q.

6. Ймовірність того, що у результаті чотирьох незалежних випробувань подія A настане хоча б один раз, дорівнює 0.5. Визначити ймовірність появи події A при одному випробуванні, якщо ця ймовірність однакова для усіх випробувань.

7. Спрощена система контролю виробів складається з двох незалежних перевірок. У результаті k-ої перевірки ($k = 1, 2$) виріб, що відповідає стандарту, відбраковується із ймовірністю β_k, а бракований виріб приймається з ймовірністю α_k. Виріб приймається, якщо він пройшов обидві перевірки. Знайти ймовірності подій: а) бракований виріб буде прийнято; б) виріб, який відповідає стандарту, буде відбраковано.

8. Відомі ймовірності трьох незалежних подій $\mathbf{P}(A_i) = p_i, i = \overline{1,3}$. Після проведення випробування виявилось, що якісь дві події з A_i відбулися, а третя – ні. Знайти ймовірність того, що за цих умов відбулася подія A_1.

C

1. Підкидають два гральних кубика. Знайти ймовірність того, що: а) хоча б один раз випала шістка, якщо відомо, що сума очок, які випали, дорівнює 8; б) сума очок більше ніж 9, якщо відомо, що один раз випало п'ять очок.

2. Показати, що якщо $\mathbf{P}(A/C) > \mathbf{P}(B/C)$ і $\mathbf{P}(A/\overline{C}) > \mathbf{P}(B/\overline{C})$, то $\mathbf{P}(A) > \mathbf{P}(B)$.

3. Показати. що $\mathbf{P}(A/B) = \mathbf{P}(A/BC)\mathbf{P}(C/B) + \mathbf{P}(A/B\overline{C})\mathbf{P}(\overline{C}/B)$.

4. Довести, що $\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \prod_{i=1}^{n-1} \mathbf{P}(A_{i+1}/A_1 \cap \ldots \cap A_i)$.

5. В урні містяться 2 білих і 3 чорних кулі. З урни послідовно виймають 2 кулі. Знайти ймовірність того, що обидві кулі білі, якщо: а)

проводиться вибірка без повернення; б) проводиться вибірка з поверненням.

6. Події A і B незалежні. Чи є незалежними події: а) A і $\bar{B}$; б) $\bar{A}$ і $\bar{B}$?

7. *Проблема Джона Сміта.* Чи однакові шанси на успіх у трьох гравців, якщо першому потрібно отримати хоча б одну шістку при підкиданні гральної кості 6 разів, другому – не менше двох шісток при 12 підкиданнях, а третьому – не менше трьох шісток при 18 підкиданнях? (Задачу було розв'язано Ньютоном і Толлером.)

8. Радіолокаційна станція веде спостереження за n об'єктами. За час спостерігання k-ий об'єкт може бути втрачено із ймовірністю p_k. Знайти ймовірність того, що: а) жоден з об'єктів не буде втрачено; б) буде втрачено один об'єкт; в) буде втрачено не більше одного об'єкта.

9. Із урни, що містить 20 білих і 2 чорних кулі, n разів виймають кулі з поверненням. Визначити найменше число виймань, при якому ймовірність вийняти хоча б один раз чорну кулю перевищуватиме 0.5.

10. Є три попарно незалежні події, які всі разом відбутися не можуть. Припускаючи, що всі вони мають одну й ту ж ймовірність p, знайти найбільше можливе значення p.

11. П'яничка стоїть на відстані одного кроку від краю прірви. Він робить крок випадковим чином або до краю прірви, або від нього. На кожному кроці ймовірність відійти від краю дорівнює $\frac{2}{3}$, а крок до краю скелі має ймовірність $\frac{1}{3}$. Які шанси п'янички не впасти?

12. Незалежні події мають ймовірності p_1, p_2, ..., p_n. Довести, що ймовірність P того, що відбудеться принаймні одна із цих подій, задовольняє нерівності $1 - \exp\{-p_1 - p_2 - \ldots - p_n\} \leqslant P \leqslant p_1 + p_2 + \ldots + p_n$.

13. Для подій $A_1, A_2, ..., A_n$ справедливі умови

$$\mathbf{P}(A_i) = p_i,\ \mathbf{P}\left(\cap_{i=1}^{k} A_i\right) = p_1 \cdot \ldots \cdot\ p_k,\ k = \overline{1,n}.$$

Чи є події $\{A_1, \ldots, A_n\}$ незалежними у сукупності ?

14. Кидають три гральних кості. Яка ймовірність того, що випаде принаймні одна шістка, якщо відомо, що всі три очки, що випали, є різними ? Як ця умовна ймовірність відрізняється від безумовної ?

15. Обчислити ймовірність об'єднання незалежних у сукупності подій через імовірності окремих подій.

16. Кожна з m радіолокаційних станцій за час T робить n обертів антени і за один оберт антени виявляє об'єкт із ймовірністю p незалежно від інших станцій. Знайти ймовірність того, що: а) за час T об'єкт буде виявлено хоча б однією станцією; б) за час T об'єкт буде виявлено кожною станцією.

17. При підкиданні n гральних костей випала принаймні одна шістка. Яка ймовірність того, що їх не менше k ?

18. Довести, що подія A не залежить від себе самої тоді й тільки тоді, коли $\mathbf{P}(A) \in \{0, 1\}$.

19. Скільки існує пар незалежних випадкових подій у ймовірнісному просторі з простою кількістю елементарних подій при класичному означенні ймовірностей ?

20. Нехай ${}_tp_x$ означає імовірність того, що людина у віці x виживе протягом принаймні t подальших років. Розглянемо три незалежних життя у віці 40, 50 й 60 років такі, що ${}_{10}p_{40} = 0.95$, ${}_{10}p_{50} = 0.85$, ${}_{10}p_{60} = 0.70$. а) Визначити імовірність того, що точно одна із цих трьох людин виживе наступних десять років. б) Визначити імовірність того, що за умови з а) виживе саме наймолодша людина.

21. Випадкові події $(A_k, k = \overline{1,n})$ незалежні у сукупності. а) Довести, що події з породженої алгебри $\mathfrak{A}[(A_k, k = \overline{1,n-1})]$ не залежать від A_n. б) Позначимо $A^\delta = A$ при $\delta = 1$, та $A^\delta = \overline{A}$ при $\delta = 0$. Довести, що для довільних $\delta_k \in \{0,1\}$ випадкові події $(A_k^{\delta_k}, k = \overline{1,n})$ незалежні у сукупності.

22. На виставці озеленення було проведено дослідження щодо залежності рішення про закупівлю товару та рішення про відвідання виставки наступного року. Було опитано 220 осіб. 101 з них вирішили закупити товар, 69 із них мали намір повернутися в наступному році. З 119, хто не зробив закупівлю, 68 мали намір повернутися в наступному році. Припустимо, що кожен з 220 розглянутих людей відібрані випадково. Обчислити ймовірності того, що обрана особа: а) має на увазі повернутися в наступному році, за умови, що вона зробила закупівлю, б) має на увазі повернутися в наступному році, за умови, що вона не зробила закупівлю, в) зробила закупівлю, за умови, що вона має на увазі повернутися в наступному році.

23. Імовірність того, що певний компонент у двигуні ракети відмовить у момент запуску двигуна, дорівнює 0.02. Щоб досягти більшої надійності, декілька подібних компонентів були паралельно підключені до двигуна так, що двигун відмовляє лише у випадку одночасної відмови всіх компонентів. Визначити мінімальну кількість компонентів, необхідних для гарантування надійності двигуна, що дорівнює 10^{-9}, за припущенням незалежності відмов різних компонентів.

24. Із урни, що містить 20 білих і 2 чорних кулі, n разів виймають кулі з поверненням. Визначити найменше число виймань, при якому ймовірність вийняти хоча б один раз чорну кулю перевищуватиме 0.5.

25. Припустимо, що A, B, C - події з

$$\mathbf{P}(A) = 1/2,\ \mathbf{P}(B) = 1/2,\ \mathbf{P}(C) = 1/3,$$

$$\mathbf{P}(A \cup B) = 3/4,\ \mathbf{P}(A \cap C) = \mathbf{P}(B \cap C) = 1/6,\ \mathbf{P}(A \cap B \cap C) = 1/12.$$

а) Визначити, чи є незалежними події A, B. б) Знайти $\mathbf{P}(A \cup B \cup C)$.

7. Формула повної ймовірності. Формула Байеса

Література: [1, с.27–30], [2,с.26-28]

A

1. Є три зовні однакові урни. В першій урні містяться дві білих та одна чорна кулі, в другій – три білих і одна чорна, а в третій – дві білих і дві чорних кулі. Дехто навмання вибирає одну з урн і виймає з неї кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля біла.

2. З урни, яка містить три білих і дві чорних кулі, переклали дві навмання вибрані кулі в урну, яка містить чотири білих і чотири чорних кулі. Знайти ймовірність того, що навмання вийнята з другої урни куля буде білою.

3. Деяка комаха з ймовірністю $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ відкладає k яєць, $k = 0, 1, 2, \ldots$, а ймовірність розвитку комахи з яйця дорівнює p. Припускаючи взаємну незалежність розвитку яєць, знайти ймовірність того, що у комахи буде рівно n нащадків.

4. В урні міститься 1 кулька, про яку відомо, що вона або білого, або чорного кольору. Після того, як в урну поклали білу кульку, після перемішування з неї навмання вибрали кульку, колір якої виявився білим. Яка ймовірність того, що і колір кульки, що залишилась, теж білий?

5. Ймовірність влучення при кожному пострілі для трьох стрільців дорівнює відповідно $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$. При одночасному пострілі усіх трьох стрільців було 2 влучення. Знайти ймовірність того, що не влучив третій стрілець.

6. Троє мисливців одночасно вистрілили у ведмедя і вбили його однією кулею. Визначити ймовірності того, що ведмідь був убитий першим, другим чи третім мисливцем, якщо ймовірності влучення для них дорівнюють відповідно 0.2, 0.4, 0.6.

7. Проведено три випробування, в кожному з яких подія A відбувається з ймовірністю 0.2. Ймовірність появи іншої події B залежить від того, скільки разів відбулася подія A: ця ймовірність дорівнює 0.1, якщо подія A сталася одного разу; 0.3, якщо A відбулася двічі; 0.7 – тричі; якщо A не сталася жодного разу, то подія B неможлива. Визначити найбільш ймовірне число появ події A, якщо подія B відбулася.

B

1. В урну, яка містить n куль, поклали білу кулю. Яка ймовірність витягти білу кулю з цієї урни, якщо всі припущення про її початковий склад рівноможливі?

2. В двох урнах міститься відповідно m_1 і m_2 білих та n_1 і n_2 чорних куль. З кожної урни навмання виймається одна куля, а потім з цих двох куль навмання вибирається одна. Знайти ймовірність того, що ця куля – біла.

3. Нехай ймовірність p_n того, що в сім'ї n дітей, дорівнює $ap^n, n \geqslant 1$, і $p_0 = 1 - ap/(1-p)$. Припустимо, що ймовірності народження хлопчика і дівчинки однакові. Довести, що ймовірність того, що в сім'ї k хлопчиків

при $k \geqslant 1$, дорівнює $2ap^k/(2-p)^{k+1}$. Яка ймовірність того, що в сім'ї два або більше хлопчиків, якщо відомо, що в сім'ї є щонайменше один хлопчик?

4. В одній з двох урн, в кожній з яких по десять куль, одна куля мічена. Гравець має право послідовно витягти 20 куль з будь-якої урни, кожен раз повертаючи взяту кулю назад. Як слід вести гру, щоб ймовірність витягти мічену кулю була найбільшою, якщо ймовірність того, що мічена куля міститься в першій урні, дорівнює $2/3$?

5. Є 10 однакових урн, з яких у 9-ти знаходяться по 2 чорних і 2 білих кульки, а в одній – 5 білих і 1 чорна кулька. Зі взятої навмання урни вийнято білу кульку. Яка ймовірність того, що цю кульку вийняли з урни, що містила 5 білих кульок?

6. Стрільці A і B по черзі стріляють у ціль. Ймовірність влучення першими пострілами для них становить відповідно 0.4 та 0.5, а ймовірність влучення при наступних пострілах для кожного гравця збільшується на 0.05. Яка ймовірність того, що першим почав стріляти стрілець A, якщо на п'ятому пострілі було (перше) влучення?

7. Урна містила m білих і n чорних куль, але одну кулю, колір якої невідомий, загублено. При випробуванні складу урни було одразу вийнято a білих і b чорних куль. Яка ймовірність того, що загублено білу кулю?

8. В урні міститься n куль, причому колір кожної з них із рівною ймовірністю може бути білим або чорним. Послідовно виймають k куль із поверненням. Яка ймовірність того, що в урні містяться тільки білі кулі, якщо чорні кулі не виймалися?

C

1. Випадкова точка може знаходитися тільки у вершинах ромба B_j ($j = 1,2,3,4$), переходячи за один крок з B_k в B_{k+1} з ймовірністю p_k ($k = 1,2,3$), з B_k в B_{k+2} – з ймовірністю $q_k = 1 - p_k$ ($k = 1,2$), а з B_3 в B_2 – з ймовірністю $q_3 = 1 - p_3$. Знайти ймовірність переходу випадкової точки з вершини B_1 в B_4: а) не більше, ніж за n кроків ($n = 3,4$); б) коли-небудь.

2. Серед n осіб розігрується $m \leqslant n$ виграшів шляхом випадкового виймання з урни n білетів. Чи однакові шанси виграти для кожного з учасників? Коли вигідніше брати білет?

3. Є n урн, в кожній з яких по m білих і k чорних куль. З 1-ї урни навмання виймають одну кулю і перекладають в 2-у. Потім з 2-ї урни навмання виймають одну кулю і перекладають в 3-ю, і т.д. Знайти ймовірність того, що після такого перекладання з останньої урни витягнуть білу кулю.

4. В трьох урнах містяться білі та чорні кулі. В першій - дві білих та три чорних кулі, в другій – дві білих і дві чорних, в третій - три білих і одна чорна куля. З першої урни переклали кулю в другу. Потім кулю з другої урни переклали в третю. Нарешті, з третьої урни кулю переклали в першу. Який склад куль в першій урні найбільш ймовірний? Знайти ймовірність того, що склад куль в усіх урнах залишиться без змін.

5. Дві урни містять однакову кількість білих та чорних куль. З них виймають по n куль з поверненням. Відомо, що ймовірність того, що всі n куль будуть білими, якщо їх виймають з першої урни, дорівнює ймовірності того, що всі кулі чорні, якщо їх виймають з другої. Визначити склад обох урн.

6. В урні знаходяться 3 кульки, які можуть бути білими або чорними. Всі чотири припущення про початковий стан урни є рівноймовірними. Відбулося чотири досліди, які полягали в тому, що кожного разу із урни виймали одну кульку з поверненням. З'явилися такі кульки: чорна, біла, біла, біла. Знайти післядослідні ймовірності складу урни.

7. Урна містить n куль. Всі припущення про число білих куль в урні однаково ймовірні. Навмання вийнята з урни куля виявилася білою. Обчислити ймовірності всіх припущень про склад куль в урні. Яке припущення найбільш імовірне?

8. Із 18 стрільців п'ятеро влучають у мішень із ймовірністю 0.8, семеро – з ймовірністю 0.7, четверо – з ймовірністю 0.6 і двоє – з ймовірністю 0.5. Навмання обраний стрілець вистрілив, але у мішень не влучив. До якої групи він найімовірніше належить?

9. З урни, яка містить n кульок невідомого кольору, вибрали кульку, що виявилася білою. Після цього знову взяли кульку. Яка ймовірність, що друга кулька теж біла?

10. При переливанні крові потрібно враховувати групи крові донора і хворого. Людині, яка має четверту групу крові, можна перелити кров будь-якої групи; людині з другою або третьою групою крові можна перелити кров або цієї ж групи, або першої; людині з першою групою крові можна перелити лише кров першої групи. Серед населення 33.7% мають першу, 37.5% – другу, 20.9% – третю і 7.9% – четверту групу крові. Відомо, що для випадково взятих донора і хворого можна зробити переливання крові. Знайти ймовірність того, що: а) хворий має першу групу крові; б) донор має другу групу крові.

11. В урні містяться білі та чорні кульки. Загальна кількість кульок N відома, але невідомі ні число білих, ні число чорних кульок. При $m+n$-кратному вийманні кульок із урни (без повернення) m разів з'явилася біла кулька і n разів – чорна. Який вміст урни найбільш імовірний?

12. Ймовірності єдино можливих і несумісних гіпотез A_1, $...A_n$ про умови настання події B до проведення випробування рівні $p_1,...p_n$; відповідні гіпотезам ймовірності настання події B рівні $q_1,...q_n$. Відомо, що при n_1 незалежних випробуваннях подія B відбулася m_1 разів, та при наступній серії з n_2 випробувань подія B відбулася m_2 разів. Довести наступну властивість формули Байєса: апостеріорні ймовірності гіпотез, обчислені після другої серії випробувань з урахунком ймовірностей цих гіпотез після першої серії випробувань, завжди дорівнюють ймовірностям, обчисленим просто для серії n_1+n_2 випробувань, у якій подія B відбулася m_1+m_2 разів.

13. У кожній з m урн знаходяться k білих та $n-k$ чорних куль. З першої урни навмання обрали кулю та переклали у другу, потім випад-

ково обрану кулю з другої урни переклали у третю і так далі. Знайти ймовірність витягнути білу кулю з останньої урни.

14. Урна містить n пронумерованих куль. З неї навмання з поверненням k разів обирають кулю та записують її номер. Яка ймовірність того, що серед записаних є точно m різних номерів ?

15. В урні знаходиться одна куля невідомого кольору – біла чи чорна. В урну поклали білу кулю. Після цього навмання обрана з урни куля виявилася білою. Яка ймовірність того, що первісно в урні була біла куля ?

16. Урна містить $m > 3$ білих куль та n чорних. Випадково втрачено одну кулю. Для перевірки складу урни з неї навмання витягли без повернення дві кулі. Вони виявилися білими. Яка ймовірність того, що втрачена куля була білою ?

1.2. Випадкові величини, інтегрування

8. Дискретні випадкові величини: розподіл, числові характеристики, сумісний розподіл

Література: [1, с.33–38, 59–61], [2,с.31-37, 59-62]

A

1. Тричі підкидають гральний кубик. Нехай $\xi(\omega)$ – число появ шісток. Знайти розподіл випадкової величини ξ, математичне сподівання $\mathbf{E}\xi$, дисперсію $\mathbf{D}\xi$.

2. Гральний кубик підкидають доти, поки не випаде шістка. Нехай $\xi(\omega)$ – число підкидань до першої появи шістки. Знайти розподіл ξ, $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{D}\xi$, $\mathbf{P}(\xi > 10)$, $\mathbf{P}(\xi < n)$.

3. k куль послідовно кидають навмання у n урн. Знайти математичне сподівання числа непорожніх урн.

4. Підкидають дві гральні кості. Нехай ξ – число очок на першій кості, η – максимальна із двох кількостей очок, які випали на першій і другій кості. Знайти сумісний розподіл ξ і η. Обчислити $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{E}\eta$, $\mathbf{D}\xi$, $\mathbf{D}\eta$ та коваріацію величин ξ і η.

5. Нехай випадкова величина ξ набуває значення $\pm 1, \pm 2$ із ймовірностями $\frac{1}{4}$, а $\eta = \xi^2$. Знайти сумісний розподіл ξ і η. Показати, що $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = 0$. Довести, що ξ, η – залежні випадкові величини.

6. Найбільш імовірне значення k величини ξ з гіпергеометричним розподілом дорівнює $(n+1)(m+1)/(N+2) - 1$. Вказівка: відношення послідовних імовірностей має вигляд

$$(k+1)(N-n-m+k+1)/(n-k)(m-k).$$

B

1. Двічі підкидають гральну кость. Нехай ξ – сума очок, які випали. Знайти розподіл випадкової величини ξ, $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{D}\xi$.

2. Монету підкидають доти, поки не випаде герб. Нехай ξ – число підкидань до першого випадіння герба. Обчислити розподіл випадкової величини ξ, $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{D}\xi$, $\mathbf{P}(\xi > 2)$, $\mathbf{P}(\xi \leqslant n)$.

3. У мішень стріляють n разів. Попадання при різних пострілах є незалежними подіями. Ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює p. Нехай ξ – число попадань при n пострілах. Знайти розподіл випадкової величини ξ, $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{D}\xi$. Знайти n, p і найімовірніше число попадань у мішень, якщо $\mathbf{E}\xi = 12$, $\mathbf{D}\xi = 4$.

4. Підкидають дві гральні кості. Нехай ξ – число очок на першій кості, η – число очок на другій кості. Знайти сумісний розподіл ξ і η. Довести, що ξ, η – незалежні випадкові величини.

5. Нехай ξ і η – відповідно сума і різниця очок, що з'явилися у результаті підкидання двох гральний костей. Показати, що коефіцієнт кореляції випадкових величин ξ, η дорівнює нулю. Довести, що випадкові величини ξ та η залежні.

6. Довести, що математичне сподівання випадкової величини з гіпергеометричним розподілом та параметрами N, n, m дорівнює nm/N.

C

1. Які з наступних послідовностей є розподілами деяких дискретних випадкових величин?

а) $p^k q^2,\ q = 1 - p,\ 0 < p < 1,\ k = 1, 2, 3, \ldots;$

б) $p^{k-n} q,\ q = 1 - p,\ 0 < p < 1,\ k = n, n + 1, \ldots;$

в) $1/(k + 1),\ k = 1, 2, \ldots;$

г) $2^k e^{-2}/k!,\ k = 0, 1, \ldots$

2. У якому випадку найбільш імовірне значення біноміального розподілу досягається у двох точках ?

3. Гральну кость підкидають до k-ої появи шістки. Знайти математичне сподівання числа підкидань.

4. Знайти математичне сподівання числа листів, що дійдуть до адресата, у задачі про збіг із розділу про дискретний імовірнісний простір.

5. Підкидають два гральні кубики. Нехай ξ – число появ шісток при першому підкиданні, η – число появ шісток при другому підкиданні. Знайти сумісний розподіл випадкових величин ξ, η. Довести, що випадкові величини ξ, η незалежні.

6. Довести, що негативний біноміальний розподіл задовольняє рекурентну тотожність $\mathbf{P}(\xi = k) = \mathbf{P}(\xi = k - 1)(k - 1)/(k - r)$.

7. Обчислити коефіцієнт кореляції між числом появи одиниці і числом появи шістки при n підкиданнях гральної кості.

8. Нехай A – випадкова подія. Довести, що $\mathbb{1}_A(\omega)$, де $\mathbb{1}_A(\omega)$ – індикатор множини A, є випадковою величиною. Знайти функцію розподілу цієї випадкової величини. Побудувати її графік.

9. Тричі підкидають монету. Нехай $\xi(\omega)$ – число появ герба. Знайти функцію розподілу $\xi(\omega)$. Побудувати графік функції розподілу.

10. Довести, що: $1\!\!1_{A\cap B} = 1\!\!1_A\ 1\!\!1_B$, $1\!\!1_{A\cup B} = 1\!\!1_A + 1\!\!1_B - 1\!\!1_{A\cap B}$, $1\!\!1_{A\Delta B} = |1\!\!1_A - 1\!\!1_B|$, $1\!\!1_{\cup A_n} = \sum 1\!\!1_{A_n}$ для попарно несумісних A_n, $1\!\!1_{\overline{A}} = 1 - 1\!\!1_A$, $1\!\!1_A = \lim 1\!\!1_{A_n}$, якщо $A_n \uparrow A$ або $A_n \downarrow A$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \{\sum 1\!\!1_{A_n} = \infty\}$.

9. Дискретні випадкові величини: незалежність, функції від дискретних величин

Література: [1, с.33–38], [2,с.31-37, 59-62]

A

1. Випадкова величина ξ набуває значення $\pm 1, \pm 2$ із ймовірностями $\frac{1}{4}$. Знайти розподіли випадкових величин $\eta_1 = \xi^2$, $\eta_2 = e^{it\xi}$. Обчислити $\mathbf{E}\eta_1$, $\mathbf{E}\eta_2$, $\mathbf{D}\eta_1$, $\mathbf{D}\eta_2$.

2. В урні міститься N куль, серед яких n куль білих. З урни вибрали m куль. Нехай ξ – число білих куль у вибірці. Знайти розподіл ξ, $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{D}\xi$.

3. Нехай ξ і η – дискретні незалежні випадкові величини, які набувають значення x_1, x_2, ... з ймовірностями $\mathbf{P}(\xi = x_i) = p_i$, $\mathbf{P}(\eta = x_j) = q_j$. Обчислити $\mathbf{P}(\xi = \eta)$.

4. Нехай ξ і η – незалежні випадкові величини, що набувають значення з $\overline{1,n}$, причому $\mathbf{P}(\xi = k) = \mathbf{P}(\eta = k) = 1/n$. Знайти розподіл випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$.

5. Незалежні випадкові величини ξ_1 і ξ_2 мають геометричний розподіл з однаковими параметрами. Нехай $\eta = \max(\xi_1, \xi_2)$. Знайти розподіл випадкової величини η та сумісний розподіл випадкових величин η і ξ_1.

6. Купони в коробках занумеровані цифрами від 1 до n. З кожної коробки виймається один купон. Для того, щоб виграти, потрібно набрати повний комплект купонів з різними номерами. Знайти математичне сподівання числа коробок, які необхідно випробувати, щоб виграти.

B

1. Тривалість міжнародної телефонної розмови вимірюється хвилинами і є випадковою величиною, яка має геометричний розподіл. Яка ймовірність того, що розмова буде тривати ще 3 хвилини, якщо до цього вона продовжувалась 10 хвилин?

2. Нехай ξ і η – незалежні невід'ємні випадкові величини, які набувають цілі значення, причому $\mathbf{E}\xi < \infty$. Довести, що

$$\mathbf{E}\min(\xi, \eta) = \sum\nolimits_{n\geqslant 1} \mathbf{P}(\xi \geqslant n)\mathbf{P}(\eta \geqslant n).$$

3. Випадкові величини ξ_1 і ξ_2 – незалежні і мають геометричний розподіл з однаковими параметрами, тобто $\mathbf{P}(\xi_i = k) = (1-p)^{k-1}p$, $k = 1, 2, \ldots$, $i = 1, 2$. Довести, що

$$\mathbf{P}(\xi_1 = k/\xi_1 + \xi_2 = n) = 1/(n-1).$$

4. Нехай ξ_1,.., ξ_n – незалежні випадкові величини, кожна з яких набуває значення 1,..., m із ймовірностями $\mathbf{P}(\xi_j = k) = 1/m$, $k = \overline{1, m}$. Нехай $\eta = \max(\xi_j, j = \overline{1, n})$, $\zeta = \min(\xi_j, j = \overline{1, n})$. Знайти розподіли величин η і ζ.

5. Нехай ξ_1 і ξ_2 – незалежні випадкові величини, які мають розподіл Пуассона з параметрами λ_1 і λ_2 відповідно. Довести, що випадкова величина $\zeta = \xi_1 + \xi_2$ має розподіл Пуассона з параметром $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Довести, що умовний розподіл ξ_1 за умови, що $\zeta = n$, є біноміальним розподілом з параметрами n і $p = \frac{\lambda_1}{\lambda}$, тобто

$$\mathbf{P}(\xi_1 = k/\xi_1 + \xi_2 = n) = C_n^k (\lambda_1/\lambda)^k (\lambda_2/\lambda)^{n-k}.$$

6. Нехай ξ – довжина серії успіхів у послідовності випробувань Бернуллі, яка почалася з першого випробування. Знайти розподіл ξ, $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{D}\xi$. Нехай η – довжина другої серії. Знайти розподіл η, $\mathbf{E}\eta$, $\mathbf{D}\eta$, а також сумісний розподіл величин ξ і η.

C

1. Нехай випадкова величина ξ набуває скінченне число невід'ємних значень x_1, x_2, ..., x_k. Довести, що

$$\lim_{n\to\infty}(\mathbf{E}\xi^{n+1})/(\mathbf{E}\xi^n) = \max_{1\leqslant i\leqslant k} x_i = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathbf{E}\xi^n}.$$

2. Нехай ξ та η – дискретні випадкові величини, що набувають скінченне число значень. Величина ξ набуває значення x_j, $j = \overline{1, m}$, величина η – значення y_i, $i = \overline{1, n}$. Припустимо, що величини ξ^l та η^k при $l = \overline{1, m-1}$, $k = \overline{1, n-1}$, – некорельовані, тобто $\mathbf{E}\xi^l\eta^k = \mathbf{E}\xi^l\mathbf{E}\eta^k$. Довести, що ξ і η – незалежні випадкові величини.

3. Урна містить m куль, позначених номерами від 1 до m. З урни послідовно беруть n куль з поверненням. Нехай ξ – найбільший із номерів, отриманих при цьому. Знайти розподіл ξ і математичне сподівання $\mathbf{E}\xi$.

4. Нехай ξ – число випробувань у схемі випробувань Бернуллі з ймовірністю p, проведених до появи k-го успіху. Довести, що

$$\mathbf{P}(\xi = n) = C_n^{k-1} p^k (1-p)^{n-k+1},\ n = k-1, k, k+1, \ldots$$

5. Груба модель для розподілу розміру страхової вимоги X представляє X як дискретну випадкову величину, котра набуває значень 5000, 10000, і 20000 з імовірностями 0.4, 0.5, і 0.1 відповідно. Обчислити ймовірність того, що з 5 випадково вибраних вимог, 3 дорівнюють 5000, а кожна з двох інших набуває більших значень.

6. Страхова компанія має портфель великих індустріальних ризиків страхування. Досліджуються три таких незалежних ризики, марковані як A, B, C. Застраховані суми, в мільйонах, є 2.5, 4.8, 7.2 для A, B, C відповідно. Досвідчений експерт оцінює імовірності вимоги у наступний календарний рік як 0.01, 0.02, 0.005 для A, B, C відповідно. Якщо вимога дійсно виникає, то повна застрахована сума буде виплачена, і ніякі

подальші вимоги не можуть тоді виникнути для того ризику. Вищезгадані оцінки ймовірності повинні використатися всюди по цьому питанню. а) Визначити, для цієї групи трьох ризиків, використовуючи підходящі індикаторні величини, або іншим шляхом, середнє і стандартне відхилення для повної суми вимог у наступний календарний рік. б) Відомо, що виникла точно одна вимога. Обчислити середнє повної вимоги.

7. Сумісний розподіл двох випадкових величин ξ, η задано таблицею:

		η		
		2	4	6
	1	0.2	0.0	0.2
ξ	2	0.0	0.2	0.0
	3	0.2	0.0	0.2

а) Показати, що ξ та η є некорельованими, але залежні. б) Залишивши імовірності у перших і третіх рядках таблиці незмінними, змінити другий рядок так, щоб ξ та η були незалежні.

8. В умовах задачі А6 визначити математичне сподівання кількості коробок, що потрібно випробувати, щоб: а) зібрати всі купони з номерами $1, ..., m$, $m < n$, б) зібрати k повних комплектів купонів, в) отримати два однакові купони, (г) отримати k однакових купони.

9. Написано n листів, але адреси на конвертах написані у випадковому порядку. Нехай ξ_n – кількість листів, які будуть отримані тими адресатами, яким призначались. Обчислити $\mathbf{E}\xi_n$, $\mathbf{D}\xi_n$.

10. Абсолютно неперервні величини: щільність, функція розподілу, числові характеристики

Література: [1, с.51–59, 70–73], [2,с.51-58,62-76]

A

1. За яких значень параметра наступні функції є щільностями розподілу: а) $p(x) = a(x-b)(x-c)$ при $x \in [b,c]$, $p(x) = d$ при $x \notin [b,c]$; б) $p(x) = ax^{10}(1-x)^{10}$ при $x \in [0,1]$, $p(x) = 0$ при $x \notin [0,1]$; в) $p(x) = a\exp\{b|x|^c\}$?

2. Нехай Ω – квадрат з вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$; координати точок квадрата позначимо через (x,y). σ-алгебру $\mathfrak{F}$ визначимо як σ-алгебру, яка містить всі множини, утворені точками многокутників, що лежать у квадраті. Ймовірність множини, яка складається з точок фігури, що лежить у квадраті, дорівнює площі цієї фігури. Знайти функції розподілу та щільності випадкових величин, заданих на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$: $\xi_1 = x + y$, $\xi_2 = x \cdot y$, $\xi_3 = \min(x,y)$.

3. Точка P рівномірно розподілена всередині кругу радіусу R. Нехай ξ — відстань від точки P до центру кругу. Знайти: а) $P(\xi > R/2)$; б) щільність ξ; в) $\mathbf{E}\xi$; г) $\mathbf{D}\xi$.

4. Випадкова величина ξ має щільність Коші: $p(x) = 1/\pi(1+x^2)$. Обчислити ймовірності: а) $P(\xi < 1/\sqrt{2})$; б) $P(\xi^2 + \xi > 0)$; в) $P(\xi^2 - \xi > 2|\xi > 0)$.

5. Колесо вагону має тріщину на зовнішньому краю. Нехай $\xi(\omega)$ – висота тріщини над землею при випадковій зупинці вагону. Знайти функцію розподілу, щільність $\xi(\omega)$ та $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{D}\xi$.

6. На відрізку $[0,T]$ навмання беруть дві точки. Нехай ξ – відстань між ними. Знайти функцію розподілу і щільність ξ.

7. Рівнобедренний трикутник утворено одиничним вектором осі OX і одиничним вектором випадкового напрямку. Знайти щільність розподілу третьої сторони цього трикутника: а) у випадку площини; б) у випадку простору.

B

1. За яких значень параметрів наступні функції є щільностями розподілу: а) $p(x) = a\sin x$ при $x \in [0,b]$, $p(x) = 0$ при $x \notin [0,b]$; б) б) $p(x) = ax^b$ при $x \geqslant c$, $p(x) = 0$ при $x < c$ (розподіл Парето); в) $p(x) = a/(e^x + e^{-x})$.

2. Розв'язати задачу A.2 для: $\xi_4 = x^2+y^2$, $\xi_5 = \max(x,y)$, $\xi_6 = |x-y|$.

3. Випадкова величина має щільність $p(x) = e^{-2|x|}$. Обчислити а) $P(\xi < 1)$; б) $P(\xi < 3|\xi \geqslant 2)$; в) $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{D}\xi$.

4. Випадкова величина ξ має щільність $p(x)$. Знайти $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{D}\xi$ у випадку: а) $p(x) = \{\exp(-(x-1)^2/2) + \exp(-(x+1)^2/2))\}/2\sqrt{2\pi}$; б) $p(x) = 4\pi^{-1/2}x^2\exp\{-x^2\}$ при $x > 0$, $p(x) = 0$ при $x < 0$.

5. На колі радіусу R навмання взято дві точки з рівномірним розподілом. Знайти функцію розподілу відстані між ними.

6. Нехай $O = (0,0)$, $T = (0,1)$, а випадкова точка P на осі Ox така, що кут OTP рівномірно розподілений на $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Знайти щільність розподілу і математичне сподівання абсциси точки P.

7. Одиничний вектор у просторі має випадковий напрямок (тобто він є рівномірно розподіленим на сфері $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1\}$. Знайти щільність розподілу і математичне сподівання довжини проекції цього вектора: а) на фіксовану пряму Ox; б) на фіксовану площину xOy.

C

1. На відрізку $[0,1]$ навмання вибрані n точок, які розбивають його на $n+1$ частину. Доведіть, що кожен відрізок має одну і ту саму функцію розподілу. Знайти її.

2. Нехай випадкова величина ξ має щільність розподілу $p(x) = Ax^{\alpha-1}e^{-x}$ при $x > 0$, $p(x) = 0$ при $x < 0$, де $\alpha > 1$. а) Визначити A; б) довести, що $P(\xi > x+y|\xi > y) < P(\xi > x)$ для $x > 0, y > 0$.

3. Нехай випадкова величина ξ має щільність $f_\xi(x)$, а функція $g\colon \to$ кусково монотонна і кусково неперервно диференційована. Довести, що щільність розподілу величини $\eta = g(\xi)$ визначається рівністю

$$f_\eta(y) = \sum_{x:\ f(x)=y} f_\xi(x)/|g'(x)| \quad \text{м.с.}$$

4. Які з наведених нижче функцій є функціями розподілу ?

$$F_1(x) = 3/4 + (2\pi)^{-1} \arctan x, \; F_2(x) = \exp(-\exp(-x)),$$
$$F_3(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ [x]/2, & 0 < x \leqslant 2; \\ 1, & x > 2, \end{cases} \quad F_4(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ x/(x+1), & x > 0. \end{cases}$$

5. Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – ймовірнісний простір. Випадкову подію $A \in \mathcal{F}$, $\mathbf{P}(A) > 0$, називають атомом, якщо для кожного $B \in \mathcal{F}$, $B \subset A$, випливає, що $\mathbf{P}(B) = 0$ або $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)$. Довести, що випадкова величина з ймовірністю одиниця є сталою на кожному атомі.

6. Якщо $\xi(\omega)$ – випадкова величина, то для кожного $c \in R$ $\{w : \xi(w) = c\}$ – випадкова подія. Чи справджується зворотне твердження?

7. Довести, що неперервна функція розподілу є рівномірно неперервною.

8. Нехай f – обмежена щільність розподілу, що дорівнює нулю поза інтервалом $[0,1]$, $g = f \; / \sup f$, а (ξ, η) – випадкова точка всередині квадрату $[0,1]^2$. Довести, що випадкова величина ξ за умови, що $\eta \leqslant f(\xi)$, має щільність f.

9. Функція Кантора визначається на щільній множині D точок $x \in [0.1]$, які мають раціональний розклад у тернарній системі зчислення вигляду $x = 0.x_1...x_n...2222..$, $x_k \in \{0,1,2\}$, формулою $F(x) = \sum_{k:\; x_k = 2} 2^{-k}$, та продовжується за неперервністю на $[0,1]$. Довести неперервність F на D, однозначність продовження та сингулярність цієї функції.

10. Нехай алгебра $\mathfrak{A}$ підмножин $\mathbb{R}$ породжується півінтервалами $(a, b]$, а множина $D = \{1/n, \; n \geqslant 1\}$. Довести, що функція $m(A) \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ множин $A \in \mathfrak{A}$, що дорівнює кількості елементів множини $A \cap D$, адитивна на $\mathfrak{A}$, має декілька різних продовжень на $\sigma[\mathfrak{A}] = \mathfrak{B}[\mathbb{R}]$, та не є сигма-адитивною на $\mathfrak{A}$.

11. Мірою Лебега L на системі $\mathfrak{F}$ підмножин $\mathbb{R}$ називається сигма-адитивна невід'ємна ненульова функція на $\mathfrak{F}$, що є інваріантною відносно зсувів: $L(A) = L(A + x) \equiv L(\{a + x, a \in A\})$ для всіх $x \in \mathbb{R}, A \in \mathfrak{F}$ таких, що $A + x \in \mathfrak{F}$. а) Довести, що існує міра Лебега на $\mathfrak{B}[\mathbb{R}]$. б) Цю міру не можна подовжити на сигма-агебру всіх підмножин $\mathfrak{F} = 2^{\mathbb{R}}$ (для цього визначити фактор-множину $A \subset [0,1]$ таку, що $(A+p) \cap (A+q) = \varnothing$ при $p \neq q$, $p, q \in \mathbb{Q}$ та $\cup_{p \in \mathbb{Q}} \{A + p\} = \mathbb{R}$. Тоді інваріантність L суперечить сигма-адитивності та невиродженості L).

11. Абсолютно неперервні величини: функції від неперервних величин

Література: [1, с.51–59, 70–73], [2,с.51-79]

A

1. Тривалість безвідмовної роботи приладу вимірюється в роках і є випадковою величиною з щільністю $p(x) = 2/x^3$ при $x \geqslant 1$, $p(x) = 0$ при

$x < 1$. Через чотири роки прилад міняють, навіть якщо він не вийшов з ладу. Обчислити математичне сподівання тривалості роботи приладу.

2. Випадкова величина ξ має щільність Коші: $p(x) = 1/\pi(1+x^2)$. Знайти: а) $\mathbf{E}|\xi|/(1+\xi^2)$; б) $\mathbf{E}(\operatorname{arctg}\xi)^2$.

3. Випадкова величина має показниковий розподіл з параметром λ. Знайти щільність розподілу і математичне сподівання випадкових величин: а) $\eta_1 = \exp(-\xi)$; б) $\eta_2 = \xi^2$; в) $\eta_3 = \{\lambda\xi\}$.

4. Випадкова величина має нормальній розподіл $N(0,1)$. Знайти щільність розподілу величин $\eta_1 = a\xi + b$, $\eta_2 = \xi^{-2}$. Обчислити математичні сподівання тих величин, для яких воно визначене. Знайти розподіл величини $\eta = \operatorname{sign}\xi$.

5. Випадкова величина ξ має рівномірний на $[0,1]$ розподіл. Знайти щільність і математичне сподівання випадкових величин: а) $\eta = 3\xi - 2$; б) $\eta = |2\xi - 1|$; в) $\eta = -\ln\xi$.

B

1. Випадкова величина має щільність $p(x) = \exp(-2|x|)$. Визначити: а) $\mathbf{E}\max(\xi, 2)$; розподіл та математичне сподівання випадкових величин: б) $\eta = \xi^2$; в) $\eta = [\xi]$; г) $\eta = \exp(-|\xi|)$.

2. Випадкова величина має нормальній розподіл $N(0,1)$. Знайти щільність розподілу величин $\eta_3 = \xi^2$, $\eta_4 = |\xi|$. Обчислити математичні сподівання тих величин, для яких воно визначене.

3. Випадкова величина ξ має щільність $p(x) = 1/\pi\sqrt{1-x^2}$ при $|x| < 1$, $p(x) = 0$ при $|x| > 1$ (розподіл арксинуса). Знайти щільність і математичне сподівання випадкових величин: а) $\eta = \arcsin\xi$; б) $\eta = 1 + \xi^2$.

4. Випадкова величина ξ має показниковий розподіл з параметром λ. а) Довести, що при $\alpha > 0$ величина $\xi^{1/\alpha}$ має розподіл Вейбула з параметрами $\lambda^{1/\alpha}, \alpha$. б) Знайти розподіл випадкової величини $[\xi]$.

5. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Знайти щільність розподілу і математичне сподівання випадкової величини $|\sin\xi|$.

C

1. Випадкова величина ξ має неперервну функцію розподілу $F(x)$. Довести, що випадкова величина $F(\xi)$ рівномірно розподілена на відрізку $[0,1]$.

2. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на $[0,1]$. Для довільної функції розподілу F позначимо ліву обернену $F^{(-1)}(y) \equiv \sup(x : F(x) < y)$. Довести, що випадкова величина $F^{(-1)}(\xi)$ має функцію розподілу F.

3. Нехай $F(x)$ – функція розподілу випадкової величини ξ. Знайти функції розподілу випадкових величин $\eta_1 = a\xi + b$, $\eta_2 = \exp(\xi)$, $\eta_3 = F(\xi)$.

4. Нехай $\xi(\omega)$ – випадкова величина. Довести, що функції $\eta_1(\omega) = a\xi(\omega)$, $\eta_2(\omega) = |\xi(\omega)|$, $\eta_3(\omega) = \xi^2(\omega)$ теж випадкові величини.

5. Нехай $\eta(\omega) = \xi^2(\omega)$ – випадкова величина. Чи можна стверджувати, що: а) $|\xi(\omega)|$ є випадковою величиною; б) $\xi(\omega)$ є випадковою величиною?

6. Показати, що якщо ξ і η – $\mathfrak{F}$-вимірні, то $\{\omega : \xi(\omega) = \eta(\omega)\} \in \mathfrak{F}$.

7. Випадкова величина ξ має розподіл Коші. Довести, що величини: а) $1/\xi$, б) $2\xi/(1-\xi^2)$, в) $(3\xi - \xi^3)/(1-3\xi^2)$ мають розподіл Коші.

12. Властивості математичного сподівання та його обчислення (c)

Література: [1, с.59–73], [2,с.59-79]

B

1. Нехай $\mathbf{P}(B) > 0$, а ξ – дискретна випадкова величина зі значеннями $\{x_n, n \geqslant 1\}$. Визначимо умовне математичне сподівання за умови B через $\mathbf{E}(\xi \mid B) \equiv \mathbf{E}(\xi \mathbb{I}_B)/\mathbf{P}(B)$. Довести, що: а) для такого математичного сподівання виконуються всі властивості математичного сподівання дискретної випадкової величини, б) $\mathbf{E}(\xi \mid B) = \sum_{n \geqslant 1} x_n \mathbf{P}(\xi = x_n \mid B)$.

2. Випадкова величина ξ інтегровна тоді й тільки т оді, коли при деякому $h > 0$ абсолютно збігається ряд $I(\xi, h) \equiv \sum_{n \in \mathbb{Z}} nh \ \mathbf{P}(nh \leqslant \xi < nh + h)$. Ця збіжність не залежить від $h > 0$, причому $\mathbf{E}\xi = \lim_{h \to 0} I(\xi, h)$.

3. Довести справедливість формули для математичного сподівання дискретної (не простої) випадкової величини.

4. Нехай ξ – інтегровна випадкова величина. Довести абсолютну неперервність інтегралу Лебега: для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що з $A \in \mathfrak{F}$, $\mathbf{P}(A) \leqslant \delta$ випливає, що $|\mathbf{E}\xi \mathbb{I}_A| \leqslant \varepsilon$.

5. Навести приклад послідовності $(\xi_n, n \geqslant 1)$ випадкових величин таких, що $\xi_n \to 0, n \to \infty$, але $\mathbf{E}\xi_n \geqslant 1$ внаслідок порушення умови мажорованості.

6. Нехай $\xi_n \to \xi$ і $\eta_n \to \eta, n \to \infty$, м.н., та $|\xi_n| \leqslant \eta_n$, причому $\mathbf{E}\eta_n \to \mathbf{E}\eta$. Довести, що $\mathbf{E}\xi_n \to \mathbf{E}\xi, n \to \infty$.

7. Довести, що для інтегровних випадкових величин ξ, η :

$$\mathbf{E}\xi = \int_0^\infty (F_\xi(-x) + 1 - F_\xi(x))dx,$$

$$\mathbf{E}\xi - \mathbf{E}\eta = \int_{-\infty}^\infty (\mathbf{P}(\eta < x \leqslant \xi) - \mathbf{P}(\xi < x \leqslant \eta))\text{sign}(x)dx.$$

C

1. Довести, що для цілозначної невід'ємної величини

$$\mathbf{E}\xi = \sum_{n \geqslant 1} \mathbf{P}(\xi \geqslant n) = \sum_{n \geqslant 0} \mathbf{P}(\xi > n).$$

2. Випадкова величина ξ називається узагальнено інтегровною, якщо виконується умова $\min(\mathbf{E}\xi^+, \mathbf{E}\xi^-) < \infty$. В цьому разі $\mathbf{E}\xi \equiv \mathbf{E}\xi^+ - \mathbf{E}\xi^-$ визначено коректно. Вивести для таких величин твердження теореми про властивості математичного сподівання.

3. Довести, що $\mathbf{P}(\underline{\lim} A_n) \leqslant \underline{\lim}\, \mathbf{P}(A_n) \leqslant \overline{\lim}\, \mathbf{P}(A_n) \leqslant \mathbf{P}(\overline{\lim} A_n)$.

4. Довести σ-адитивність математичного сподівання: для інтегровної величини ξ та попарно несумісних $A_n \in \mathfrak{F} : \mathbf{E}\xi 1\!\!\mathrm{I}_{\cup_{n\geqslant 1} A_n} = \sum_{n\geqslant 1} \mathbf{E}\xi 1\!\!\mathrm{I}_{A_n}$.

5. Довести, що суму абсолютно збіжного ряду можна подати у вигляді інтегралу Лебега за лічильною мірою $\lambda(B) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 1\!\!\mathrm{I}_{n\in B}$.

6. Довести, що клас борелєвих функцій, які є інтегровними за нормованою мірою Лебега-Стілтьєса, містить всі обмежені та деякі необмежені функції.

7. Невід'ємна випадкова величина ξ інтегровна тоді і тільки тоді, коли а) $\int_0^\infty (1 - F_\xi(x))dx < \infty$, або б) $\exists a > 0 : \int_a^\infty (-\ln F_\xi(x))dx < \infty$.

8. Випадкова величина $|\xi|^\alpha$ з $\alpha > 0$, інтегровна тоді і тільки тоді, коли

$$\mathbf{E}\,|\xi|^\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{\alpha-1} (F_\xi(-x) + 1 - F_\xi(x))dx < \infty.$$

9. Нехай $\mathbf{P}(|\xi| \geqslant x) = o(x^\alpha), x \to \infty$, для деякого $\alpha > 0$. Довести, що а) $\mathbf{E}\,|\xi|^\beta < \infty$ при кожному $0 < \beta < \alpha$, б) попереднє твердження не завжди має місце при $\beta = \alpha$.

10. Випадкова величина ξ така, що $\mathbf{P}(|\xi| \geqslant \alpha n) = o(\mathbf{P}(|\xi| \geqslant n), n \to \infty$, для кожного $\alpha > 1$. Довести, що $\mathbf{E}\,|\xi|^\beta < \infty$ при всіх $\beta > 0$.

11. Нехай G – неспадна диференційовна функція на $[a, b]$ з похідною g, а f – інтегровна за мірою Лебега функція на $[G(a), G(b)]$. Довести формулу заміни змінної $x = G(y)$: $\int_{G(a)}^{G(b)} f(x)dx = \int_a^b f(G(y))g(y)dy$.

1.3. Випадкові вектори, незалежність

13. Випадкові вектори: сумісна функція розподілу та сумісна щільність, числові характеристики

Література: [1, с.79–87], [2,с.79-91]

A

1. Випадковий вектор (ξ, η) має сумісну щільність $p(x, y)$. Обчислити: а) $\mathbf{P}(|\xi| < 1, \eta > 0)$; б) $\mathbf{P}(\xi < \eta)$; в) $\mathbf{P}(\xi < x)$; г) $\mathbf{P}([\xi] = [\eta])$.

2. Щільність випадкового вектора (ξ, η) дорівнює $p(x, y) = x\exp(-x - xy)$ при $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $p(x, y) = 0$ у решті випадків. Знайти: а) щільності випадкових величин ξ та η; б) $\mathbf{P}(\xi < 2\eta + 4)$; в) $\mathbf{P}(\xi < \eta - 1)$; г) $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{E}\eta$, $\mathbf{E}\xi\eta$. Довести, що ξ та η залежні.

3. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на $[-1, 1]$. При яких дійсних a величини ξ та $|\xi - a|$ некорельовані? Знайти коваріації випадкових величин: а) ξ і ξ^2; б) ξ і ξ^3; в) $\sin \pi\xi$ і $\cos \pi\xi$.

4. Знайти математичне сподівання і коваріацію координат випадкового вектора, рівномірно розподіленого: а) всередині трикутника з вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$; б) всередині круга $\{(x,y) : x^2 - 2x + y^2 \leqslant 0\}$.

5. Нехай F, G – функції розподілу. Довести, що функції а) $F(x)G(y)(1+\alpha(1-F(x))(1-G(y)))$ при $\alpha \in (-1,1)$, б) $\alpha^{-1}\ln(1+(\exp(\alpha F(x))-1)(\exp(\alpha G(y))-1)/(\exp(\alpha)-1))$ при $\alpha > 0$ є сумісними функціями розподілу, причому координати відповідного випадкового вектора мають функції розподілу F та G. Узагальнити ці твердження для n функцій розподілу.

B

1. Нехай $f(x)$ — щільність розподілу, яка зосереджена на $(0,\infty)$. Довести, що функція $p(x,y) = f(x+y)/(x+y)$ при $x > 0, y > 0$, $p(x,y) = 0$ у решті випадків, є щільністю розподілу випадкового вектора. Знайти щільності розподілу координат цього вектора і їхню коваріацію.

2. Довести тотожність $\mathbf{D}(\xi+\eta) = \mathbf{D}(\xi) + 2\mathrm{Cov}(\xi,\eta) + \mathbf{D}(\eta)$.

3. Розв'язати задачу А.3 (крім пункту в) для показникового розподілу з параметром 1.

4. Розв'язати задачу А.4 для області $\{(x,y) : 0 \leqslant x^2 + y \leqslant -y^2\}$.

5. Нехай F, G – функції розподілу. а) Довести, що функція $U(x,y) = \min(F(x), G(y))$ є сумісною функцією розподілу, причому б) функції розподілу координат відповідного випадкового вектора збігаються з F та G. в) Якщо сумісна функція розподілу $V(x,y)$ задовольняє умову твердження б), то $V(x,y) \leqslant U(x,y)$ для всіх x, y.

C

1. Нехай ξ_1,..., ξ_n – випадкові величини. Довести, що $\max_{1\leqslant k\leqslant n}\xi_k$ і $\min_{1\leqslant k\leqslant n}\xi_k$ – також випадкові величини.

2. Нехай I – деяка злічення множина і при кожному $i \in I$ $\xi_i(\omega)$ – випадкова величина. Довести, що $\sup_{i\in I}\xi_i(\omega)$, $\inf_{i\in I}\xi_i(\omega)$ є випадковими величинами. Чи буде це твердження істинним, якщо множина I незлічення?

3. Нехай $G_1, ..., G_n$ – функції розподілу. Тоді $F(x_1,...,x_n) = \prod_{k=1}^n G_k(x_k)$ є сумісною функцією розподілу.

4. Функції а) $F(x_1,x_2) = 1/2 + \pi^{-1}\arctan\max(x_1,x_2)$, б) $F(x_1,x_2) = \min(x_1+x_2,1)\mathbb{1}_{x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0}$ задовольняють перші три умови у означенні сумісної функції розподілу, однак не є сумісними функціями розподілу.

5. Нехай сумісна функція розподілу F має сумісну щільність f. Довести, що приріст на паралелепіпеді $[a,b)$ дорівнює інтегралу.

$\Delta_{[a,b)}F = \int_{a_1}^{b_1}...\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,...,x_n)dx_1...dx_n.$

6. Якщо випадковий вектор $\xi = (\xi_1,...,\xi_n)$ має сумісну щільність f, то його координати мають маргінальні щільності

$f_{\xi_k}(x) = \int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,...x_{k-1},x,x_{k+1},..,x_n)dx_1...dx_{k-1}dx_{k+1}...dx_n.$

7. Довести, що коваріація $\mathrm{Cov}(\xi,\eta)$ є білінійною функцією від ξ, η.

8. Довести, що клас всіх випадкових величин, що є некорельованими з заданою системою випадкових величин, є лінійним простором.

9. Нехай F_k – функції розподілу зі щільностями f_k, і $|a| < 1$. Довести, що а) функція $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)(1 + a(2F_1(x) - 1)(2F_2(y) - 1))$ є сумісною щільністю розподілу деякого випадкового вектора (ξ_1, ξ_2), б) величини ξ_k мають щільності f_k та є залежними при $a \neq 0$.

10. Нехай $\mathbf{E}\xi_k = 0$, $\mathbf{D}\xi_k = 1$, $k = 1, 2$, та $\rho(\xi_1, \xi_2) = \rho$. Довести нерівність $\mathbf{E}\max(\xi_1^2, \xi_2^2) \leqslant 1 + \sqrt{1 + \rho^2}$.

11. Вивести із нерівності Коші, що рівність $\rho(\xi, \eta) = \pm 1$ має місце тоді й тільки тоді, коли $\eta = a \pm b\xi$ м.н. для деяких сталих $a, b > 0$.

12. Випадкові величини $\xi_k, k = \overline{1,3}$, обмежені: $|\xi_k| \leqslant 1$. Довести нерівність Белла: $|\mathbf{E}\xi_1\xi_2 - \mathbf{E}\xi_1\xi_3| \leqslant 1 - \mathbf{E}\xi_2\xi_3$.

13. Випадкові величини $\xi_k, k = 1, 2$, центровані і нормовані: $\mathbf{E}\xi_k = 0$, $\mathbf{D}\xi_k = 1$, та мають кореляцію $\rho = \mathbf{E}\xi_1\xi_2$. Довести аналог нерівності Чебишева: $\mathbf{P}(\{|\xi_1| \geqslant \varepsilon\} \cup \{|\xi_2| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \left(1 + \sqrt{1 - \rho^2}\right)/\varepsilon^2$.

14. Випадкові вектори: функції від випадкових векторів та їх перетворення

Література: [1, с.79–85], [2,с.79-91]

A

1. Щільність розподілу випадкового вектора (ξ, η) дорівнює $p(x,y) = 3y^2/\pi(1 + x^2)$ при $y \in [0,1]$, $p(x,y) = 0$ при $y \notin [0,1]$. Знайти щільності ξ та η. Довести, що ξ та η незалежні. Обчислити: а) $\mathbf{P}(\xi\eta < 1)$; б) $\mathbf{E}(\arctan \xi - \eta^2)$.

2. Випадковий вектор (ξ, η) має щільність розподілу $p(x,y) = x + y$ при $x \in [0,1]$, $y \in [0,1]$, $p(x,y) = 0$ при всіх інших x, y. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$.

3. Нехай (ρ, φ) — полярні координати вектора (ξ, η) зі щільністю розподілу $p(x,y)$, де $\eta \in [0, 2\pi)$. Знайти щільність випадкового вектора (ρ, φ) і щільності його координат. Довести, що, якщо розподіл (ξ, η) є радіально симетричним (тобто $p(x,y) = g(x^2 + y^2)$ м.с.), то: а) φ є рівномірно розподіленим; б) ρ і φ незалежні.

4. Випадкові величини ξ і η незалежні, ξ має показниковий розподіл з параметром λ, η рівномірно розподілена на відрізку $[0, \pi/2]$. Нехай $\zeta_1 = \sqrt{\xi}\cos\eta$, $\zeta_2 = \sqrt{\xi}\sin\eta$. Довести, що випадкові величини ζ_1 та ζ_2 незалежні та мають однаковий розподіл.

5. Випадкові вектор (ξ, η) має щільність розподілу $f(x,y)$. Довести, що випадкові величини $\zeta_1 = \xi\eta$ та $\zeta_2 = \xi/\eta$ мають щільності розподілу, причому: а) $f_{\zeta_1}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z/x)dx/|x|$; б) $f_{\zeta_2}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(zy, y)|y|dy$.

B

1. Щільність розподілу вектора (ξ, η) дорівнює $p(x,y) = \lambda^2\exp(-\lambda x)$ при $0 < y < x$, $p(x,y) = 0$ при всіх інших x, y. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$.

2. Випадкові величини ξ та η незалежні та мають показниковий розподіл з параметром λ. Довести, що величини $\zeta_1 = \xi + \eta$ та $\zeta_2 = \xi/\eta$ також незалежні.

3. Випадковий вектор (ξ, η) має щільність $(2\pi)^{-1}(1 + x^2 + y^2)^{-3/2}$. Знайти: а) щільність ξ; б) сумісну щільність полярних координат (ρ, φ).

4. Випадковий вектор (ξ, η, ζ) має щільність $p(x, y, z)$. Знайти щільність розподілу вектора (ρ, φ, ψ) сферичних координат (ξ, η, ζ). Окремо розглянути випадок радіально симетричного розподілу, тобто випадок $p(x, y, z) = g(x^2 + y^2 + z^2)$.

5. Випадковий вектор $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ має сумісну щільність f_ξ, а функція $g : U \to V$ неперервно диференційовна та взаємно однозначно відображає відкриту множину $U \subset \mathbb{R}^n$ на відкриту множину $V \subset \mathbb{R}^n$, причому якобіан $J_g(x) \equiv \det(\partial g/\partial x)(x) > 0$ для всіх $x \in U$. Довести, що випадковий вектор $\eta \equiv g(\xi)$ має сумісну щільність $f_\eta(y) = f_\xi(g^{-1}(y))(J_g(g^{-1}(y)))^{-1}\mathbb{1}_{y \in V}$. Розглянути приклади: а) лінійного перетворення, б) переходу до полярних координат для $n = 2$.

C

1. Щільність випадкового вектора (ξ, η) дорівнює $p(x, y) = x\exp(-x - xy)$ при $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $p(x, y) = 0$ у решті випадків. Знайти щільність випадкової величини $\xi\eta$.

2. Нехай ξ_1, ξ_2, ξ_3 — незалежні рівномірно розподілені на $[0, 1]$ випадкові величини. Довести, що величина $(\xi_1\xi_2)^{\xi_3}$ рівномірно розподілена на $[0, 1]$.

3. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — незалежні рівномірно розподілені на $[0, 1]$ випадкові величини. Впорядкуємо їх за величиною: $\xi_{(1)} \leqslant \xi_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \xi_{(n)}$. Довести, що вектор $(\xi_{(1)}, \ldots, \xi_{(n)})$: а) рівномірно розподілений у симплексі $\{(x_1, \ldots, x_n) : 0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant 1\}$; б) розподілений так само, як $(S_1/S_{n+1}, \ldots, S_n/S_{n+1})$, де $S_k = \zeta_1 + \cdots + \zeta_k$, $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ — незалежні випадкові величини, що мають показниковий розподіл з параметром 1.

4. Нехай (ξ, η) — вектор з радіально симетричним розподілом, координати якого незалежні. Довести, що координати цього вектора мають нормальний розподіл.

5. Взаємною коваріаційною матрицею квадратично інтегровних випадкових векторів ξ, η довільних розмірностей називається така матриця: $\mathrm{Cov}(\xi, \eta) \equiv \mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi) \cdot (\eta - \mathbf{E}\eta)'$, де добуток утворений попарними добутками відповідних координат. Довести, що коваріаційна матриця складеного вектора (ξ, η) дорівнює $\begin{pmatrix} \mathrm{Cov}(\xi) & \mathrm{Cov}(\xi, \eta) \\ \mathrm{Cov}(\xi, \eta)' & \mathrm{Cov}(\eta) \end{pmatrix}$.

15. Незалежні випадкові величини та функції від них

Література: [1, с.87–99], [2,с.88-99]

A

1. Нехай ξ і η — дискретні випадкові величини. Величина ξ набуває значень x_j, $j = \overline{1..m}$, величина η — значень y_i, $i = \overline{1..n}$. Припустимо, що величини ξ^k та η^l некорельовані при усіх $k = \overline{1..m-1}$, $l = \overline{1..n-1}$. Довести, що величини ξ та η незалежні.

2. Нехай ξ і η — незалежні рівномірно розподілені на $[-1, 1]$ випадкові величини. Знайти щільність розподілу величини $\zeta = \xi + \eta$.

3. Нехай ξ та η є незалежними випадковими величинами, що мають показниковий розподіл з параметром λ. Знайти щільність і математичне сподівання випадкової величини: а) $\zeta = \xi\eta$; б) $\zeta = |\xi - \eta|$.

4. Три особи A, B і C одночасно підходять до двох таксофонів. Особи A і B починають розмову одразу, а особа C — після того, як закінчить розмову або A, або B. Тривалості розмов є незалежно розподіленими випадковими величинами з однаковим показниковим розподілом. а) Яка ймовірність того, що C закінчить розмову пізніше A та B? б) Знайти щільність розподілу і математичне сподівання часу, яке проведе C з моменту прибуття до закінчення розмови.

5. Система складається з n блоків, час безвідмовної роботи k-го блоку дорівнює ξ_k. Випадкові величини ξ_k незалежні і мають мають рівномірний на $[0, T]$ розподіл. Знайти: а) щільність розподілу часу τ_1 до першої відмови у системі; б) сумісну щільність і коваріацію τ_1 і проміжку τ_2 між першою та останньою відмовами у системі.

6. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини з неперервною функцією розподілу $F(x)$. Впорядкуємо їх за величиною: $\xi_{(1)} \leqslant \xi_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \xi_{(n)}$. Знайти функцію розподілу випадкових величин: а) $\xi_{(1)} = \min(\xi_i, i = \overline{1..n})$; б) $\xi_{(n)} = \max(\xi_i, i = \overline{1..n})$; в) $\xi_{(m)}$.

В

1. Випадкові величини ξ та η незалежні та мають одну й ту саму щільність розподілу $p(x) = e^{-|x|}/2$. Знайти щільність розподілу величини $\zeta = \xi + \eta$.

2. Бігуни A і B стартували одночасно і фінішують в моменти часу, які є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, що мають показниковий розподіл з параметром λ. Знайти ймовірність того, що час того спортсмена, який виграв, перевищує той запас часу, завдяки якому він виграв.

3. Випадкові величини ξ та η незалежні та мають показниковий розподіл з параметром 1. Довести, що величини $\xi+\eta$ та $\xi/(\xi+\eta)$ незалежні. Знайти розподіл цих величин.

4. Система складається з n блоків. Нехай ξ_i — час безвідмовної роботи i-го блоку. Випадкові величини $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ незалежні і мають рівномірний розподіл на $[0, T]$. Знайти функцію розподілу часу роботи системи и його математичне сподівання, якщо: а) система працює до того часу, поки працює принаймні один блок; б) система працює до того часу, поки працюють принаймні k блоків, $k \leqslant n$.

5. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — незалежні абсолютно неперервні випадкові величини з функцією розподілу $F(x)$. а) Обчислити: $\mathbf{E}F^m(\max(\xi_1, \ldots, \xi_n)) =$

$n/(n+m)$; б) знайти при $\alpha > 0$ розподіл величин $F^{\alpha n}(\max(\xi_1, \ldots, \xi_n))$ та довести, що він не залежить від n.

6. В умовах задачі А6 для абсолютно неперервного розподілу довести, що $\mathbf{P}(\xi_{(n)} = \xi_k) = 1/n$.

C

1. Випадкові величини ξ та η незалежні і мають щільності розподілу $p_\xi(x) = 1/\pi\sqrt{1-x^2}$ при $|x| < 1$, $p_\xi(x) = 0$, $|x| \geqslant 1$; $p_\eta(x) = x\exp(-x^2/2)$ при $x \geqslant 0$, $p_\eta(x) = 0$ при $x < 0$. Довести, що величина $\zeta = \xi\eta$ має нормальний розподіл.

2. Нехай в умовах задачі А6 розподіл ξ_k — показниковий розподіл з параметром 1. Довести, що $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ також незалежні і мають показниковий розподіл з параметром 1, де $\zeta_k = (n-k+1)(\xi_{(k)} - \xi_{(k-1)})$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $\xi_0 := 0$.

3. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta$ — незалежні випадкові величини, причому кожна з величин ξ_k, $k = \overline{1..n}$, набуває значень 0 і 1 з імовірністю 1/2, а η має рівномірний розподіл на $[0,1]$. Довести, що величини а) $\sum_{k=1}^{n} \xi_k 2^{-k} + \eta 2^{-n}$, б) $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k 2^{-k}$ також рівномірно розподілені на $[0,1]$.

4. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на $[-1,1]$. Тоді величини ξ та ξ^2 некорельовані, але залежні.

5. Нехай ξ та η є незалежними випадковими величинами, що мають показниковий розподіл з параметром λ. Знайти щільність і математичне сподівання випадкової величини: а) $\zeta = \xi/\eta$, б) $\zeta = \xi/(\xi+\eta)$.

6. Випадкові величини ξ і η незалежні і рівномірно розподілені на відрізку $[0,1]$. Знайти щільності розподілу випадкових величин: а) $\zeta = \xi\eta$; б) $\zeta = \xi - \eta$; в) $\zeta = |\xi - \eta|$.

7. Незалежні випадкові величини ξ_1 і ξ_2 мають розподіл Коші. Довести, що: а) величина $(\xi_1 + \xi_2)/2$ має розподіл Коші; б) для будь-якого $p \in (0,1)$ величина $p\xi_1 + (1-p)\xi_2$ має розподіл Коші.

8. Випадкові величини $\xi_1, \ldots, \xi_n$ незалежні та рівномірно розподілені на відрізку $[0,1]$. Знайти щільність величини $\prod_{k=1}^{n} \xi_k$.

9. Дискретні випадкові величини $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ незалежні в сукупності тоді й тільки тоді, коли $\mathbf{P}(\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_n = x_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\xi_k = x_k)$ для всіх x_k.

10. Випадкові величини $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ незалежні в сукупності тоді й тільки тоді, коли $\mathbf{E} g_1(\xi_1) \ldots g_n(\xi_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{E} g_k(\xi_k)$ для всіх $g_k \in C_b(\mathbb{R})$.

11. Величини ξ_1 та ξ_2 незалежні тоді й тільки тоді, коли величини $g_1(\xi_1)$ і $g_2(\xi_2)$ некорельовані для всіх борелєвих функцій g_k таких, що ці величини квадратично інтегровні.

12. Для незалежних величин ξ, η довести, що $\mathbf{P}(\xi < \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} F_\xi(x) dF_\eta(x)$.

13. Довести для функцій розподілу F_1, F_2 тотожність

$$F_1(a)F_2(a) = \int_{(-\infty,a)} F_1(x)dF_2(x) + \int_{(-\infty,a)} F_2(x+0)dF_1(x).$$

14. Випадкові величини ξ, η незалежні, а борелєва функція g невід'ємна. Довести тотожність $\mathbf{E} g(\xi,\eta) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(g(x,\eta)\,|_{x=\xi})$.

15. Для незалежних ξ, η обчислити дисперсію добутку $\mathbf{D}(\xi\eta)$.

16. Обмежені випадкові величини ξ, η незалежні тоді й тільки тоді, коли $\mathbf{E}\xi^m\eta^n = \mathbf{E}\xi^m\mathbf{E}\eta^n$ для всіх $m, n \geqslant 1$.

17. Випадкові величини $\xi_1, ..., \xi_n$ незалежні та однаково розподілені, причому $\mathbf{E}\xi_1 = \mathbf{E}\xi_1^3 = 0$. Довести, що випадкові величини $\mu = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \xi_k$ та $\sum_{k=1}^n (\xi_k - \mu)^2$ некорельовані.

18. Розглянемо узагальнення випробувань Бернуллі, у якому ймовірність успіху в k-му випробуванні дорівнює p_k. Нехай ξ_n – кількість успіхів у n випробуваннях. а) Знайти $\mathbf{E}\xi_n, \mathbf{D}\xi_n$. б) Найбільше значення $\mathbf{D}\xi_n$ за умови $n^{-1}\sum_{k=1}^n p_k = p$ досягається при $p_k \equiv p$.

19. Для незалежних дискретних випадкових величин ξ, η

$$\mathbf{P}(\xi + \eta = a) = \sum_y \mathbf{P}(\xi = a - y)\mathbf{P}(\eta = y),$$

де сума поширюється на множину значень величини η.

20. Прості випадкові величини ξ_1, ξ_2 незалежні, однаково розподілені, а їх розподіл не є рівномірним. Довести, що

$$\max(\mathbf{P}(\xi_1 + \xi_2 = a),\ a \in \mathbb{R}) < \max(\mathbf{P}(\xi_1 = a),\ a \in \mathbb{R}).$$

21. Довести, що для кожного натурального $n > 1$, що не є простим, знайдеться пара незалежних величин ξ_1, ξ_2 таких, що всі ймовірності з розподілу $\mathbf{P}(\xi_1 + \xi_2 = k), 0 \leqslant k < n$, однакові і додатні.

22. Випадкові величини ξ_k незалежні та мають рівномірний на $[0, 1]$ розподіл. Нехай $U_n(x) = \mathbf{P}(\xi_1 + ... + \xi_n < x)$. Довести, що: а) $U'_{n+1}(x) = U_n(x) - U_n(x-1)$, б) $U_n(x) = (n!)^{-1}\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k (x-k)^n 1\!\!\mathrm{I}_{k<x}$, в) щільність суми $\xi_1 + ... + \xi_n$ дорівнює $((n-1)!)^{-1}\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k (x-k)^{n-1} 1\!\!\mathrm{I}_{k<x}$.

23. Випадкова ламана на площині виходить з початку координат, утворена n відрізками одиничної довжини, причому кути між сусідніми відрізками незалежні та дорівнюють $\pm\alpha$ з ймовірністю $1/2$. Обчислити математичне сподівання квадрата відстані міх початковою та останньою вершиною даної ламаної.

24. Нехай ξ, η – незалежні величини такі, що величини $\xi + \eta$ та ξ мають однакові функції розподілу. Довести, що $\eta = 0$ м.н.

25. Для довільних щільностей f, g згортка $f * g(x)$ неперервна.

26. Щільність $f(x)$ інтегровна у квадраті на $\mathbb{R}$. Довести, що згортка $f * f(x)$ обмежена.

16. Нормальні випадкові величини та вектори

Література: [1, с.99–106], [2,с.99-106]

A

1. Випадковий вектор (ξ, η) має нормальний $N(0, 0, 1, 1, \rho)$ розподіл. Довести, що вектор $(\xi, \eta - a\xi)$ має нормальний розподіл. За якого значення a його координати: а) некорельовані; б) незалежні?

2. Для виконання завдання необхідно X хвилин, де $X \simeq N(28, 2^2)$. Інше завдання, незалежне від першого, потребує $Y \simeq N(25, 1^2)$ хвилин, і починається через 5 хвилин після того, як почнеться виконання першого

завдання. Обчислити ймовірність того, що друге завдання буде виконане першим.

3. Нехай (α_1, α_2) – незалежні рівномірно розподілені на $(0, 1)$ величини. Довести, що величини $\xi_1 = \sqrt{-2\ln\alpha_1}\sin(2\pi\alpha_2)$, $\xi_2 = \sqrt{-2\ln\alpha_1}\cos(2\pi\alpha_2)$ – незалежні стандартні нормальні.

4. Випадкові величини ζ_1, ζ_2 незалежні та мають стандартний нормальний розподіл. Довести, що відношення ζ_1/ζ_2 має розподіл Коші.

5. Довести, що сумісну щільність нормального вектора на площині $\xi = (\xi_1, \xi_2) \simeq N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ можна зобразити у вигляді добутку $f_\xi(x_1, x_2) = f_{\xi_{12}}(x_1 \mid x_2) f_{\xi_2}(x_2)$, де $\xi_2 \simeq N(\mu_2, \sigma_2^2)$, а $f_{\xi_{12}}(x_1 \mid x_2)$ є щільністю відносно x_1 нормальної величини $\xi_{12} \simeq N(\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - \mu_2), \sigma_1^2(1 - \rho^2))$. Остання щільність називається умовною щільністю ξ_1 за умови $\xi_2 = x_2$.

6. Нехай φ – стандартна нормальна щільність, а непарна функція ψ така, що $|\psi(x)| \leqslant (2\pi e)^{-1/2} 1\!\!1_{|x|\leqslant 1}, \forall x$. Довести, що функція $\varphi(x)\varphi(y) + \psi(x)\psi(y)$ є щільністю розподілу двовимірного випадкового вектора, що не є нормальним, та обидві його координати мають стандартний нормальний розподіл.

B

1. Якщо ζ_1, ζ_2 – незалежні стандартні нормальні величини, то їх лінійні перетворення $\zeta_1 + \zeta_2$ та $\zeta_1 - \zeta_2$ – також незалежні нормальні величини.

2. Якщо $\zeta_k, k = 1, 2,$ – незалежні стандартні нормальні величини, то а) полярні координати вектора (ζ_1, ζ_2) незалежні, квадрат полярного радіусу має хі-квадрат розподіл, полярний кут рівномірно розподілений, б) величини $\zeta_1^2 + \zeta_2^2$ і ζ_1/ζ_2 також незалежні.

3. Нехай випадковий вектор (ξ_1, ξ_2) рівномірно розподілений на одиничному колі $O = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$, а $\xi = \xi_1^2 + \xi_2^2$. Довести, що величини $\zeta_k = \xi_k\sqrt{-2\xi^{-1}\ln\xi}$ є незалежними стандартними нормальними.

4. Якщо ζ_k – незалежні стандартні нормальні величини, а кут θ не залежить від них та рівномірно розподілений на $[0, 2\pi]$, то величина $\zeta_1\cos\theta + \zeta_2\sin\theta$ також стандартна нормальна.

5. Для стандартного нормального вектора (ζ_1, ζ_2) а) знайти щільність розподілу величини $\max(|\zeta_1|, |\zeta_2|)$, б) знайти сумісну щільність полярних координат (R, φ) цього вектора, в) довести, що випадкова величина $\zeta_1\zeta_2/\sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}$ має нормальний розподіл та знайти його параметри.

6. Нехай $f_k(x_1, x_2)$ щільності двовимірних нормальних розподілів з нульовими середніми, одиничними дисперсіями та різними кореляціями ρ_k. Довести, що випадковий вектор зі щільністю $(f_1(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2))/2$ не є нормальним вектором, однак його координати нормально розподілені.

C

1. Нехай $Z = XY$, де $X \simeq N(0,1)$ та $\mathbf{P}\{Y = 1\} = \mathbf{P}\{Y = -1\} = \frac{1}{2}$. Знайти розподіл пар (X, Z) та (Y, Z), а також розподіл $X + Z$. Показати, що $Z \simeq N(0,1)$ і що X та Z некорельовані, але залежні.

2. Нехай $(\xi_1, \xi_2) \simeq N_2(0,0,1,1,\rho)$. Довести, що: а) $\mathbf{P}(\xi_1 \cdot \xi_2 < 0) = (\arccos \rho)/\pi$, б) $\mathbf{E}\max(\xi_1, \xi_2) = \sqrt{(1-\rho)/\pi}$, в) щільність відношення ξ_1/ξ_2 дорівнює $\sqrt{1-\rho^2}/\ \pi(1 - 2\rho x + x^2)$.

3. Для стандартного нормального вектора $(\zeta_{11}, \zeta_{12}, \zeta_{21}, \zeta_{22}) \simeq N_4$ знайти розподіл визначника $\det(\zeta_{ij}, i, j = 1, 2)$.

4. Нехай $(\xi_1, \xi_2) \simeq N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$. Довести нерівність: $|\rho(f_1(\xi_1), f_2(\xi_2))| \leqslant |\rho|$ за квадратичної інтегровності величин під знаком коефіцієнта кореляції.

5. Довести, що $\mathbf{E}\exp(t\,\|\xi\|^2) < \infty$ для $\xi \simeq N_d(m, V)$ та $t \geqslant 0$.

6. Нехай $\xi \simeq N_d(m, AA')$. Довести, що для довільної $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} 2n^{-2} \ln \mathbf{P}(\xi/n \in B) \leqslant -\inf_{x\in B} \left\|A^{-1}(x-m)\right\|^2.$$

7. Навести приклад нормальних випадкових величин ξ, η, сума яких не має нормального розподілу.

8. Навести приклад, що вказує на суттєвість умови незалежності нормальних координат ξ_k для нормальності розподілу вектора ξ у теоремі про лінійні перетворення нормальних векторів, в).

9. Якщо ζ_k – незалежні стандартні нормальні випадкові величини, то $(\zeta_1 + \zeta_2\zeta_3)/\sqrt{1+\zeta_3^2} \simeq N(0,1)$.

10. Величини ξ та η утворюють вектор з нормальним $N(0,0,1,1,\rho)$ розподілом. Знайти щільність випадкової величини $\zeta = (\xi + \eta)/(\xi^2 + \eta^2)$.

11. Випадкові величини ξ_1 і ξ_2 незалежні та мають нормальні розподіли $N(a_1, \sigma_1^2)$ і $N(a_2, \sigma_2^2)$ відповідно. Знайти: а) $\mathbf{E}(sign(\xi_1 - a_1) + sign(\xi_2 - a_2))^2$. б) коваріацію випадкових величин $\zeta_1 = \alpha\xi_1 - \beta\xi_2$ та $\zeta_2 = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2$. в) сумісну щільність ζ_1 та ζ_2. Коли випадкові величини ζ_1 та ζ_2 незалежні?

12. Нехай $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_n$ – незалежні стандартні нормальні випадкові величини. Довести, що щільність розподілу величини $\eta = \xi/\sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}$ дорівнює

$$f_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}},\ x > 0.$$

13. Випадковий вектор $(\xi.\eta)$ має нормальний розподіл $N(0,0,1,1,\rho)$. Знайти щільність випадкової величини: а) $\zeta = \xi\eta$, б) $\zeta = \xi\eta/\sqrt{\xi^2+\eta^2}$.

14. Нехай випадкові величини $\xi_1, ..., \xi_n$ незалежні стандартні нормальні. Довести, що щільність випадкової величини $\chi^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$ дорівнює:

$$f_{\chi^2}(x) = \tfrac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}},\ \ x > 0.$$

15. Нехай $\xi_1,\ldots,\ \xi_{n,}\ \eta_1,\ldots,\eta_n$ – незалежні стандартні нормальні випадкові величини. Знайти щільність розподілу випадкової величини $(\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2)/(\eta_1^2+\ldots+\eta_n^2)$.

16. Нехай $\zeta_k, k=\overline{1,n}$, – незалежні стандартні нормальні величини, а $\sigma_k\in\mathbb{R}$. Вивести з теореми про лінійні перетворення нормальних векторів однакову розподіленість випадкових величин: $\sum_{k=1}^n(\zeta_k+\sigma_k)^2\simeq(\zeta_1+\sigma)^2+\sum_{k=2}^n\zeta_k^2$, де $\sigma=\left(\sum_{k=1}^n\sigma_k^2\right)^{1/2}$.

17. Нехай випадкові величини ξ_1,ξ_2 незалежні, а їх сумісна щільність не змінюється при поворотах вектора (ξ_1,ξ_2). Довести, що цей випадковий вектор є нормальним.

18. Нехай ζ – n-вимірний стандартний нормальний вектор, а $E_1,E_2\subset\mathbb{R}^n$ – такі лінійні підпростори, що $E_1\cap E_2=\{0\}$. Довести, що проекції $\Pi_{E_1}\zeta,\Pi_{E_2}\zeta$ є незалежними нормальними векторами.

19. Узагальнений нормальний вектор визначається як лінійне перетворення $\xi=m+A\zeta$ стандартного нормального вектора з довільною матрицею $A\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. а) Довести, що вектор ξ є узагальненим нормальним тоді і тільки тоді, коли для кожного лінійного неперервного функціоналу $l:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ величина $l(\xi)$ має нормальний розподіл або є сталою м.н. б) Довести, що розподіл ξ однозначно визначається вектором m та матрицею $V=AA'$. Довести для класу узагальнених нормальних векторів: в) теорему про інтерпретацію параметрів, г) теорему про лінійні перетворення нормальних векторів, д) теорему про нормальність суми незалежних нормальних векторів. Вказівка: нехай T' – нульове продовження на $\mathbb{R}^n$ матриці ортонормованого базису простору власних векторів матриці A. Тоді $AT'=0$, ідемпотентна матриця $J=TT'$ містить $n-\mathrm{rang}(A)=n-\mathrm{rang}(V)$ перших одиниць на діагоналі, причому для кожного $\varepsilon\neq0$ матриця $A+\ \varepsilon T$ невироджена. Отже, вектор $\xi_\varepsilon=m+(A+\varepsilon T)\zeta=\xi+\varepsilon T\zeta$ є n-вимірним нормальним, $\xi_\varepsilon\to\xi,\varepsilon\to0$, і оскільки $\mathbf{E}\xi_\varepsilon=m$, $\mathrm{Cov}(\xi_\varepsilon)=(A+\varepsilon T)(A+\varepsilon T)'=V+\varepsilon^2J$, то розподіл $\xi_\varepsilon\simeq N_n(m,V+\varepsilon^2J)$ повністю визначається параметрами ε та m,V. Тому границя $\mathbf{P}(\xi\in\Pi_x)=\lim_{\varepsilon\to0}\mathbf{P}(\xi_\varepsilon\in\Pi_x)$ залежить лише від m,V та x.

17. Розподіли Пуассона, показниковий, Ерланга, гама (с)

Література: [1, с.35–40, 95–99], [2,с.55-57, 94-99]

B

1. Довести, що розподіл Пуассона задовольняє рекурентну тотожність $\mathbf{P}(\xi=k)=\mathbf{P}(\xi=k-1)\lambda/k$.

2. Знайти найбільш імовірне значення для розподілу Пуассона.

3. Величини ξ_1,ξ_2 незалежні та мають показниковий розподіл $Exp(\lambda)$. Тоді а) різниця $\zeta=\xi_1-\xi_2$ має розподіл Лапласа зі щільністю $f_\zeta(x)=\frac{1}{2}\lambda\exp(-\lambda\,|x|)$, б) випадкові величини $\xi_1+\xi_2$ та ξ_1/ξ_2 також незалежні.

4. Випадкові величини $\xi_1, ..., \xi_n$ незалежні у сукупності та мають показникові розподіли з попарно різними параметрами $\lambda_k, k = \overline{1, n}$. Довести, що щільність суми $\xi_1 + ... + \xi_n$ має вигляд

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n c_{nk}(\lambda_1, ..., \lambda_n) \exp(-\lambda_k x), x \geqslant 0.$$

Знайти рекурентні за n рівняння для коефіцієнтів c_{nk} та обчислити ці коефіцієнти.

5. Обчислити функцію розподілу Ерланга порядку n з параметром λ: $F_n(x) = 1 - (1 + \lambda x/1! + ... + (\lambda x)^{n-1}/(n-1)!) \exp(-\lambda x),\ x \geqslant 0.$

6. Вивести з теореми про інваріантність гама-розподілів відносно згортки, що математичне сподівання $\mu(\lambda, \alpha) = \mathbf{E}\Gamma(\lambda, \alpha)$ та дисперсія $\sigma^2(\lambda, \alpha) = \mathbf{D}\Gamma(\lambda, \alpha)$ є адитивними додатними функціями параметра α і є лінійними функціями. Обчислити $\mathbf{E}\Gamma(\lambda, \alpha) = \alpha/\lambda$, $\mathbf{D}\Gamma(\lambda, \alpha) = \alpha/\lambda^2$.

C

1. Якщо ξ, η – незалежні величини з розподілами Пуассона з параметрами λ, μ відповідно,.то а) сума $\xi + \eta$ має розподіл Пуассона з параметром $\lambda + \mu$, б) $\mathbf{P}(\xi_1 = k \mid \xi_1 + \xi_2 = n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, де $p = \lambda/(\lambda + \mu)$.

2. Випадкові величини $\xi_1, \xi_2 \simeq Exp$ незалежні та мають однаковий показниковий розподіл із параметром 1. Довести що величини а) $\min(\xi_1, \xi_2)$ та $|\xi_1 - \xi_2|$ незалежні однаково розподілені, б) $\xi_1/(\xi_1 + \xi_2)$ та $\xi_1 + \xi_2$ незалежні. в) Знайти відповідні сумісні розподіли. г) Узагальнити ці твердження на випадок n незалежних однаково розподілених показникових величин.

3. Випадкові величини ξ_k незалежні та мають показникові розподіли з параметрами $\lambda_k, k = 1, 2$. Знайти функцію розподілу величин а) $\xi_1/(\xi_1 + \xi_2)$, б) $\xi_1 + \xi_2$, в) ξ_1/ξ_2, г) $(\xi_1 + \xi_2)/\xi_1$ при $\lambda_k = \lambda$.

4. Випадкові величина $\zeta \simeq \Gamma(\lambda, \alpha)$. Обчислити $\mathbf{E}\zeta^r$.

5. Випадкові величини $\zeta_k \simeq \Gamma(\lambda, \alpha_k), k = 1, 2$, незалежні. Довести, що величини $\zeta_1 + \zeta_2$ і $\zeta_1/\ (\zeta_1 + \zeta_2)$ незалежні, та знайти їх розподіли.

6. Випадкові величини $(\zeta_n, n \geqslant 1)$ незалежні однаково розподілені зі спільним показниковим розподілом $Exp(\lambda)$. а) Знайти розподіл випадкової величини $\nu = \inf(n \geqslant 1 : \zeta_1 + ... + \zeta_n \geqslant 1)$. б) Довести, що для кожного $k > 0$ величини ξ_ν та $\xi_{\nu+k}$ незалежні. в) Знайти розподіл $\xi_{\nu+k}$.

2. Випадкові послідовності, граничні теореми

2.1. Закони великих чисел

18. Збіжність за ймовірністю. Закон великих чисел

Література: [1, с.106–116], [2,с.106-109]

A

1. Збіжності $\xi_n \to^{\mathbf{P}} \xi$ та $\mathbf{E}(1-\exp(-|\xi_n-\xi|)) \to 0, n \to \infty$, еквівалентні, а останнє математичне сподівання задає метрику.

2. Послідовність випадкових величин $(\xi_n,\ n \geqslant 1)$ обмежена за ймовірністю (тобто $\sup_{n\geqslant 1} \mathbf{P}(|\xi_n| > c) \to 0, c \to \infty$), послідовність $\eta_n \to^{\mathbf{P}} 0, n \to \infty$, а g – дійсна неперервна функція. Довести збіжність $g(\xi_n + \eta_n) - g(\xi_n) \to^{\mathbf{P}} 0$ при $n \to \infty$.

3. Нехай $(\xi_n,\ n \geqslant 1)$ незалежні додатні випадкові величини. Знайти умови збіжності за ймовірністю величин $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \xi_k}$.

4. Позначимо $I_n = \int_0^1 ... \int_0^1 g((x_1 + ... + x_n)/n) dx_1...dx_n$ для функції $g \in C[0,1]$. а) Довести, що $\lim_{n\to\infty} I_n = I \equiv g(1/2)$. б) У припущенні $g \in C_2[0,1]$ обчислити $\lim_{n\to\infty} n(I_n - I\ )$.

5. Нехай $f \in C_1([0,1])$. Довести збіжність: $dB_n(f,x)/dx \to f'(x)$, $n \to \infty$, рівномірно за x.

B

1. Нехай $\xi_n \to^{\mathbf{P}} \xi$, $\eta_n \to^{\mathbf{P}} \eta$, а $f \in C(\mathbb{R}^2)$. Довести, що $f(\xi_n, \eta_n) \to^{\mathbf{P}} f(\xi, \eta), n \to \infty$.

2. Якщо $(\xi_n - \xi)^2 \to^{\mathbf{P}} 0$, то $\xi_n^2 \to^{\mathbf{P}} \xi^2, n \to \infty$.

3. Величини $(\xi_n,\ n \geqslant 1)$ незалежні та $\mathbf{P}(\xi_n = \pm n^{\alpha}) = 1/2$. Для яких α має місце закон великих чисел ?

4. Довести, що для $f \in C_b(\mathbb{R}_+)$ має місце збіжність

$\exp(-nx) \sum_{k=0}^{\infty} f\,(k/n)\,(nx)^k/\ k! \to f(x),\ n \to \infty,$

рівномірно на кожному обмеженому інтервалі. Вказівка: ліва частина дорівнює $\mathbf{E} f((\xi_1 + ... + \xi_n)/n)$, де ξ_k незалежні та мають розподіл Пуассона $\Pi(x)$.

5. Довести, що степінь поліному $B_n(f,x)$ не більший степеня поліному f.

C

1. Нехай $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ - ймовірнісний простір. а) Довести, що функція $\rho(A,B) \equiv \mathbf{P}(A \Delta B), A, B \in \mathfrak{F}$, задовольняє нерівність трикутника. б) Дві події $A, B \in \mathfrak{F}$ назвемо $\mathbf{P}$-еквівалентними, якщо $\rho(A,B) = 0$. Довести, що це відношення є відношенням еквівалентності, сукупність $\mathfrak{F}_{\mathbf{P}}$ всіх класів еквівалентності є сигма-алгеброю, а пара $(\mathfrak{F}_{\mathbf{P}}, \rho)$ є повним метричним простором.

2. Якщо $\xi_n \to^{L_2} \xi$, та $\eta_n \to^{L_2} \eta$, то $\mathbf{E}\xi_n\eta_n \to \mathbf{E}\xi\eta, n \to \infty$.

3. Довести теорему Лебега про мажоровану збіжність для збіжності за ймовірністю.

4. Якщо $\xi_n \leqslant \zeta_n \leqslant \eta_n$ м.н. та $\xi_n \to^{\mathbf{P}} \zeta$, $\eta_n \to^{\mathbf{P}} \zeta$, $n \to \infty$, то $\zeta_n \to^{\mathbf{P}} \zeta$.

5. Нехай $\xi_{1n} \leqslant \xi_{2n} \leqslant \xi_{3n}$ м.н., $\xi_{in} \to^{\mathbf{P}} \xi_i$, $n \to \infty, i = \overline{1,3}$, та $\mathbf{E}\xi_{1n} \to \mathbf{E}\xi_1$, $\mathbf{E}\xi_{3n} \to \mathbf{E}\xi_3$. Довести, що $\mathbf{E}\xi_{2n} \to \mathbf{E}\xi_2, n \to \infty$.

6. Нехай випадкові величини $(\xi_n, n \geqslant 1)$ такі, що $\sup \mathbf{D}\xi_n < \infty$ та коефіцієнти кореляції задовольняють умову $\lim_{|n|\to\infty} \sup_{k\geqslant 1} \rho(\xi_{n+k}, \xi_k) = 0$. Тоді (ξ_n) задовольняють закон великих чисел.

7. Нехай $(\xi_n,\ n \geqslant 1)$ попарно незалежні однаково розподілені випадкові величини, що є інтегровними з $\mathbf{E}\xi_1 = \mu$. Довести, що $(\xi_1 + ... + \xi_n)/n \to^{\mathbf{P}} \mu, n \to \infty$.

8. На прикладі переконатися, що в теоремі Чебишева про закон великих чисел умову на дисперсії не можна замінити на умову $\sup_{n\geqslant 1} \mathbf{E}\,|\xi_n| < \infty$, навіть для незалежних величин.

9. Випадкові величини $(\varepsilon_n,\ n \geqslant 0)$ незалежні однаково розподілені та квадратично інтегровні. Довести, що для величин $\xi_n = \sum_{k=0}^{m} c_k \varepsilon_{n-k}$ виконується закон великих чисел, де c_k – довільні сталі.

10. Нехай $(\xi_n, n \geqslant 1)$ незалежні однаково розподілені величини. Для того, щоб $(\xi_1 + ... + \xi_n - m_n)/n \to^{\mathbf{P}} 0, n \to \infty$, з деякою числовою послідовністю m_n, необхідно і достатньо, щоб $\mathbf{P}(|\xi_1| > x) = o(1/x), x \to \infty$.

11. Довести, що для $f \in C_b(\mathbb{R}_+)$ мають місце збіжності

$\sum_{k\geqslant 0} f(x + k/n)(cn)^k \exp(-cn)/k! \to f(x + c),\ n \to \infty,\ \forall x \geqslant 0,$

$\sum_{k\geqslant 0} f(k/(n+1))C_{n+k}^k x^k (1+x)^{-n-k-1} \to f(x),\ n \to \infty,\ \forall x \geqslant 0.$

12. Для $g \in C[0,1]$ обчислити границю

$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 .. \int_0^1 g\left(\sqrt[n]{x_1..x_n}\right) dx_1..dx_n.$

13. Перетворенням Лапласа неперервної обмеженої функції $f \in C_b(\mathbb{R}_+)$ називається функція $\varphi(u) \equiv \int_0^\infty \exp(-ut)f(t)dt$ від $u \in \mathbb{R}_+$. Довести формулу обернення Уідлера:

$f(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \left(\frac{n}{s}\right)^n \varphi^{(n-1)}(\frac{n}{s}),$

де $\varphi^{(k)}(u)$ – k-та похідна φ. Вказівка: звести величину під знаком границі до вигляду $\mathbf{E}f(s(\xi_1 + ... + \xi_n)/n)$, де величини ξ_k незалежні, $\xi_n \simeq Exp(1)$.

14. Нехай випадкова величина ν_n має біноміальний розподіл з параметрами n, p, а функція $H(\theta, p) = -(1-\theta)\ln\frac{1-\theta}{1-p} - \theta \ln\frac{\theta}{p}$. Довести для всіх $\theta \in (p, 1)$ нерівність $\mathbf{P}(\nu_n \geqslant n\theta) \leqslant (nH(\theta, p))$. Вивести звідси при $p = 1/2$ нерівність $\mathbf{P}(|\nu_n - n/2| \geqslant n\varepsilon) \leqslant \exp(-n\varepsilon^2/2)$.

19. Збіжність майже напевне. Лема Бореля-Кантеллі. Посилений закон великих чисел

Література: [1, с.117–125], [2,с.109-112,117-124]

A

1. Довести, що з $\xi_n \to^{\mathbf{P}} \xi$ випливає збіжність $\xi_{n_k} \to^{\mathbf{P}1} \xi$ для деякої підпослідовності $n_k \to \infty$.

2. Якщо ряд $\sum_{n\geqslant 1} \mathbf{P}(A_n \cap A)$ а) збігається для події A, то $\mathbf{P}(\overline{\lim} A_n) \leqslant 1 - \mathbf{P}(A)$, б) розбігається для всіх подій A з $\mathbf{P}(A) > 0$, то $\mathbf{P}(\overline{\lim} A_n) = 1$.

3. Випадкові величини $(\xi_n\ , n \geqslant 1)$ незалежні однаково розподілені і $\mathbf{E}\xi_1^+ = \mathbf{E}\xi_1^- \leqslant \infty$. Довести, що $\mathbf{P}(\xi_n = o(n),\ n \to \infty) = 1$ тоді й тільки тоді, коли $\mathbf{E}\,|\xi_1| < \infty$.

4. Для випадкових величин (ξ_n) ряд $\sum_{n\geqslant 1} \xi_n/n$ збігається м.н. і $\mathbf{E}\xi_n = 0$. Довести, що ці величини задовольняють посилений закон великих чисел.

5. Знайти достатню умову посиленого закону великих чисел для послідовності незалежних випадкових величин (ξ_n) таких, що а) $\xi_n \simeq \Pi(\lambda_n)$, б) $\xi_n \simeq Exp(\lambda_n)$.

B

1. Збіжність $\xi_n \to^{\mathbf{P}} \xi$ має місце тоді й тільки тоді, коли кожна підпослідовність $(\xi_{n_k},\ k \geqslant 1)$ містить підпідпослідовність, що збігається до ξ м.н.

2. У дискретному ймовірнісному просторі збіжність майже напевне еквівалентна збіжності за ймовірністю.

3. Випадкові події (A_n) незалежні у сукупності та невироджені: $\mathbf{P}(A_n) = p_n \in (0,1)$. а) Довести, що $\mathbf{P}(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n) = 1$ тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{P}(\cup_{n\geqslant 1} A_n) = 1$. б) Остання умова еквівалентна $\sum_{n\geqslant 1} p_n = \infty$. в) За таким припущенням знайти розподіл величини $\nu(\omega) = \inf(n : \omega \in A_n) < \infty$.

4. Величини $(\xi_n\ , n \geqslant 1)$ незалежні однаково розподілені і $\mathbf{E}\xi_1 = 0$. а) Якщо $\mathbf{E}\,|\xi_1|^\alpha < \infty$, то $\mathbf{P}(|\xi_n| = o(n^{1/\alpha}),\ n \to \infty) = 1$. б) Якщо $\mathbf{E}\exp(\alpha\xi_1) < \infty$, то $\mathbf{P}(\xi_n = o(\ln n),\ n \to \infty) = 1$.

5. Знайти необхідну та достатню умову посиленого закону великих чисел для послідовності незалежних випадкових величин (ξ_n) таких, що в) $\xi_n \simeq N(0, \sigma_n^2)$, г) $\xi_n \simeq B(n, p_n)$.

C

1. Побудувати приклад послідовності випадкових величин $(\xi_n), \xi$ таких, що $\overline{\lim}_{n\to\infty}\xi_n = \infty$ і $\underline{\lim}_{n\to\infty}\xi_n = -\infty$ м.н., та одночасно $\xi_n \to^{\mathbf{P}} \xi$.

2. Якщо $\xi_n \to^{\mathbf{P}} \xi,\ n \to \infty$, то для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться подія A_ε така, що $\mathbf{P}(A_\varepsilon) \geqslant 1 - \varepsilon$ та $\xi_n(\omega) \to \xi(\omega),\ n \to \infty$, рівномірно за $\omega \in A_\varepsilon$.

3. Випадкові величини $(\xi_n,\ n \geqslant 1)$ невід'ємні та $\xi_n \to^{\mathbf{P}} \xi, n \to \infty$, і $\mathbf{E}\xi_n \to \mathbf{E}\xi$. Довести, що $\mathbf{E}\,|\xi_n - \xi| \to 0, n \to \infty$. Узагальнити це твердження на випадок збіжності у $L_p, p > 1$.

4. Випадкові величини $(\xi_n,\ n \geqslant 1)$ незалежні однаково розподілені, причому $\mathbf{P}(|\xi_1| > c) > 0$ для всіх c. Довести, що існує така послідовність сталих c_n, що $c_n\xi_n \to^{\mathbf{P}} 0, n \to \infty$, та $c_n\xi_n \not\to^{\mathbf{P}1} 0$.

5. Випадкові величини $(\xi_n,\ n \geqslant 1)$ незалежні, центровані: $\mathbf{E}\xi_n = 0$ та квадратично інтегровні: $\mathbf{E}\xi_n^2 < \infty$. Визначимо послідовність $\eta(n) = n^{-1}\sum_{k=1}^n \xi_k$. а) Довести, що $\eta(n) \to^{\mathbf{P}1} 0, n \to \infty$, тоді і тільки тоді, коли $\eta(2^n) \to^{\mathbf{P}1} 0, n \to \infty$. б) У а) збіжність м.н. можна замінити на середньоквадратичну збіжність.

6. Побудувати приклад залежних подій A_n таких, що $\sum_{n\geqslant 1}\mathbf{P}(A_n)=\infty$ та $\mathbf{P}(\overline{\lim}A_n)=0$.

7. Довести нерівність $\mathbf{P}(\cup_{k\leqslant n}A_k)\sum_{i,j\leqslant n}\mathbf{P}(A_i\cap A_j)\geqslant(\sum_{k\leqslant n}\mathbf{P}(A_k))^2$. Вивести звідси, що твердження пункту б) леми Бореля-Кантеллі виконується вже за припущення попарної незалежності подій A_n.

8. Довести, що простір класів м.н. еквівалентних випадкових величин зі збіжністю м.н. не може бути метризований.

9. Випадкові величини $(\xi_n\ ,n\geqslant 1)$ незалежні та $\xi_n\to^{\mathbf{P}}\xi, n\to\infty$. Довести, що $\xi=c$ м.н. для деякої сталої c.

10. Випадкові величини $(\xi_n,\ n\geqslant 0)$ незалежні однаково експоненційно розподілені з параметром $\lambda=1$. Довести, що:
а) $\overline{\lim}_{n\to\infty}\xi_n/\ln n=1$ м.н., і б) $\underline{\lim}_{n\to\infty}\ln\xi_n/\ln n=-1$ м.н.

11. Випадкові величини $(\xi_n\ ,n\geqslant 1)$ незалежні та рівномірно розподілені на відрізку $[0,1]$. Довести, що послідовність ξ_n м.н. всюди щільна на $[0,1]$.

12. Випадкові величини $(\xi_n,n\geqslant 2)$ незалежні, $\mathbf{P}(\xi_n=\pm n)=1/n\ln n$, $\mathbf{P}(\xi_n=0)=1-2/n\ln n$, $\xi_1=0$, $S_n=\xi_1+...+\xi_n$. Довести, що $S_n/n\to^{\mathbf{P}} 0, n\to\infty$, та $\mathbf{P}(S_n/n\to 0)=0$.

13. Нехай $\xi_n\to 0, n\to\infty$, м.н. Довести, що існує борелєва додатна функція g така, що $\sum_{n\geqslant 1}g(\xi_n)<\infty$ м.н. Це твердження не виконується, якщо збіжність м.н. замінити на збіжність у середньому.

14. Випадкові величини (ξ_n) незалежні, задовольняють умови теореми Колмогорова про посилений закон великих чисел та $\mathbf{E}\xi_n=0$. Довести, що знайдеться послідовність незалежних величин (η_n) така, що: а) $\mathbf{P}(\eta_n=\xi_n$ починаючи з деякого $n)=1$, б) задовольняє посилений закон великих чисел, в) $\sum_{n\geqslant 1}\mathbf{D}\eta_n/n^2=\infty$. Отже, умова теореми Колмогорова про посилений закон великих чисел не є необхідною.

15. Випадкові події (A_n) незалежні у сукупності, $S_n=\sum_{k=1}^n 1\!\!\mathrm{I}_{A_k}$. Довести, що $S_n/\mathbf{E}S_n\to^{\mathbf{P}1} 1,\ n\to\infty$.

16. Випадкова величина ν_n збігається з кількістю успіхів у n випробуваннях Бернуллі з ймовірністю успіху p. Довести при $x\in(0,1)$ таку тотожність
$\lim_{n\to\infty}n^{-1}\ln\mathbf{P}(\nu_n\geqslant nx)=-x\ln(x/p)-(1-x)\ln((1-x)/(1-p))$.

17. Випадкові величини $(\xi_n,n\geqslant 1)$ незалежні однаково розподілені та прості, $\mathbf{E}\xi_1<0,\mathbf{P}(\xi_1<0)<1$. Позначимо $\rho=\inf_{t\in\mathbb{R}}\exp(t\xi_1)$. Довести, що $\rho\in(0,1)$ та $\lim_{n\to\infty}n^{-1}\ln\mathbf{P}(\xi_1+...+\xi_n\geqslant 0)=\ln\rho$. Вказівка: послідовність під знаком логарифму напівмультиплікативна.

18. Нехай $(\xi_n,\ n\geqslant 1)$ послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, $\mathbf{E}\xi_1=\mu,\ \mathbf{E}\xi_1^2<\infty,\ \ S_n=\xi_1+...+\ \xi_n$. Тоді $S_n-n\mu=o(n^{1/2+\delta}), n\to\infty$, майже напевне, для кожного $\delta>0$.

19. Нехай $(\xi_n,\ n\geqslant 1)$ послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, $\mathbf{E}\xi_1^+=\mathbf{E}\xi_1^-$. Для цієї послідовності виконується закон великих чисел: $(\xi_1+...+\xi_n)/n\to^{\mathbf{P}} 0$ тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{P}(|\xi_1|>n)=o$ та $\mathbf{E}\xi_1 1\!\!\mathrm{I}_{\{|\xi_1|\leqslant n\}}=o, n\to\infty$.

20. Нехай $(\xi_n,\ n \geqslant 1)$ послідовність незалежних однаково розподілених величин з $\mathbf{E}\xi_1 = \infty$, $S_n = \xi_1 + \ldots + \ \xi_n$. Довести, що а) $S_n/n \to \infty,\ n \to \infty$, м.н. б) $\overline{\lim}_{n\to\infty} |S_n/n - c_n| = \infty$ м.н. для довільної послідовності $c_n \in \mathbb{R}$.

21. Випадкові величини $(\xi_n,\ n \geqslant 1)$ незалежні однаково розподілені, а $\alpha \in (0,2)$. Довести, що послідовність $n^{-1/\alpha}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ збігається м.н. тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{E}\,|\xi_1|^{\alpha} < \infty$ та у випадку, коли $\alpha \geqslant 1$, $\mathbf{E}\xi_1 = 0$. При $\alpha = 1$ границя дорівнює $\mathbf{E}\xi_1$ та 0 у інших випадках.

22. Випадкові величини $(\xi_n,\ n \geqslant 1)$ незалежні, однаково розподілені та інтегровні, а $S_n = \xi_1 + \ldots + \ \xi_n$. Довести збіжність:
$\mathbf{E}\,|S_n/n - \mathbf{E}\xi_1| \to 0, n \to \infty$.

23. На дискретному ймовірнісному просторі збіжність майже напевне еквівалетна збіжності за ймовірністю.

20. Нерівності Чебишева та Колмогорова (c)

Література: [1, с.76–77, 119–121], [2,с.76-77,119-120]

B

1. У припущенні скінченності правої частини довести нерівність
$\mathbf{P}(\xi \geqslant x) \leqslant \exp(-ax)\mathbf{E}\exp(a\xi)$.

2. Для якої випадкової величини ξ нерівність Чебишева може перетворюватися на рівність ?

3. Випадкова величина $\xi \geqslant 0$ і $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$. Довести при $\varepsilon \in (0,1)$ нерівність
$\mathbf{P}(\xi > \varepsilon\mathbf{E}\xi) \geqslant (1-\varepsilon)^2(\mathbf{E}\xi)^2/(\mathbf{E}\xi^2)$.

4. Нехай $(p_k, k = \overline{1,n})$ – дискретний розподіл ймовірностей, а $x_k > 0$. Довести нерівність $\prod_{k=1}^{n} x_k^{p_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$.

5. Нехай g – неперервна неспадна опукла донизу функція, а послідовність (ξ_k) задовольняє умови теореми про нерівність Колмогорова. Тоді ліва частина цієї нерівності не перевищує $\mathbf{E}g(|S_n|)/g(\varepsilon)$.

6. Випадкові величини $(\xi_k, k = \overline{1,n})$ незалежні, $\mathbf{P}(\xi_k = \pm 1) = 1/2$, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Довести такі нерівності: а) $\mathbf{E}\exp(tS_k) \leqslant \exp(kt^2/2)$ при $t \in \mathbb{R}$,
б) $\mathbf{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k| \geqslant nt) \leqslant 2\exp(-nt^2/2)$ для $t > 0$.

C

1. Довести при $x > 0$ для стандартної нормальної функції розподілу Φ та її щільності φ такі включення: а) $\Phi(-x)/\varphi(x) \in [x^{-1} - x^{-3}, x^{-1}]$, б) $\Phi(-x)/\varphi(x) \in [2/(\sqrt{x^2+4}+x),\ 2/(\sqrt{x^2+2}+x)]$.

2. Для заданих сталих x, m, s^2 знайти верхню межу ймовірностей $\mathbf{P}(\xi \geqslant x)$ за умови фіксованих $\mathbf{E}\xi = m$, $\mathbf{D}\xi = s^2$.

3. У припущенні обмеженості: $|\xi| \leqslant c$, довести, що

$\mathbf{P}(|\xi - \mathbf{E}\xi| \geqslant \varepsilon) \geqslant (\mathbf{E}\xi^2 - \varepsilon^2)/c^2$.

4. Довести, що $\mathbf{P}(\xi - \mathbf{E}\xi > x\sigma_\xi) \leqslant 1/(1+x^2)$ при $x > 0$.

5. Для інтегровної величини ξ довести, що: а) при $t > 0$ $\mathbf{P}(|\xi - \mathbf{E}\xi| > t\mathbf{E}\,|\xi|) \leqslant 1/t$, б) $\mathbf{P}(|\xi| > t) = o(1/t), t \to \infty$.

6. Нехай $p, q, r > 0$ такі, що $r^{-1} = p^{-1} + q^{-1}$, а $\xi, \eta \geqslant 0$. Довести нерівність $(\mathbf{E}(\xi\eta)^r)^{1/r} \leqslant (\mathbf{E}\xi^p)^{1/p}(\mathbf{E}\eta^q)^{1/q}$.

7. Випадкові величини $(\xi_k, k = \overline{1,n})$ незалежні, $\mathbf{E}\xi_k = 0$, $\mathbf{E}\xi_k^2 < \infty$, а $S_k = \xi_1 + ... + \xi_k$. Для довільних сталих $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant ... \leqslant a_n$ довести нерівність $\mathbf{P}(|S_k| \leqslant a_k, \forall k = \overline{1,n}) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^n \mathbf{E}\xi_k^2/a_k^2$.

2.2. Центральна гранична теорема

21. Характеристичні функції (c)

Література: [1, с.134–149], [2,с.133-148]

B

1. Якщо ξ – цілозначна випадкова величина, то її характеристична функція $\varphi(t)$ має період 2π і $\mathbf{P}(\xi = n) = (2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(-itn)\varphi(t)dt$.

2. Рівність $\left|\varphi_\xi(t)\right| = 1$ для деякого $t \neq 0$ виконується тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{P}(\xi \in a + b\mathbb{Z}) = 1$ для деяких $a, b \in \mathbb{R}$.

3. Довести, що кількість успіхів у випадковому числі випробувань Бернуллі, яке не залежить від результатів окремих випробувань та має розподіл Пуассона, має пуассонівський розподіл. Знайти параметр цього розподілу.

4. Для незалежності випадкових величин ξ, η необхідно і достатньо, щоб $\mathbf{E}\exp(it\xi + is\eta) = \mathbf{E}\exp(it\xi)\mathbf{E}\exp(is\eta)$ при всіх $s, t \in \mathbb{R}$.

5. Випадкові величини $(\xi_n,\ n \geqslant 1)$ та ξ такі, що $|\xi_n| \leqslant c, |\xi| \leqslant c$ для сталої c, та $\mathbf{E}\xi_n^k \to \mathbf{E}\xi^k, n \to \infty$, при всіх $k \geqslant 1$. Довести, що $\xi_n \to^W \xi$.

C

1. За означенням випадкова величина ξ симетрична, якщо ξ та $-\xi$ мають однакові функції розподілу. Довести, що симетричність еквівалентна дійснозначності характеристичної функції.

2. Якщо випадкова величина ξ не дорівнює м.н. сталій, то $\left|\varphi_\xi(t)\right| < 1$ у деякому виколотому околі нуля.

3. Нехай $\varphi(t)$ – характеристична функція стандартного нормального розподілу. а) Інтегруванням за частинами вивести диференціальне рівняння $\varphi'(t) = -t\varphi(t)$, б) отримати звідси формулу для $\varphi(t)$.

4. Випадкова величина η набуває цілих невід'ємних значень, а випадкові величини $(\delta_k, k \geqslant 0)$ не залежать від η, і $\mathbf{P}(\delta_k = 0) = 1 - \mathbf{P}(\delta_k = 1) \in (0, 1)$. Розглянемо суми $\eta_1 = \sum_{k=0}^{\eta} \delta_k$, $\eta_0 = \sum_{k=0}^{\eta}(1 - \delta_k)$. Довести,

що а) величини η_0 та η_1 незалежні тоді і тільки тоді, коли η має розподіл Пуассона, б) η_i мають розподіл Пуассона.

5. Випадкові величини $(\xi_n, n \geqslant 1)$ та ν – незалежні в сукупності, а величина $\zeta = \sum_{k=1}^{\nu} \xi_k$. Довести, що $\mathbf{E}\zeta = \mathbf{E}\nu\mathbf{E}\xi_1$ та $\mathbf{D}\zeta = \mathbf{E}\nu\mathbf{D}\xi_1 + (\mathbf{E}\xi_1^2)\mathbf{D}\nu$.

6. Нехай випадкова величина ξ інтегровна в будь-якій степені і $\mathbf{E}\xi^n = (n+k)!/k!$ для деякого k та всіх $n \geqslant 0$. Довести, що розподіл ξ визначається однозначно та збігається з розподілом Ерланга.

7. Довести, що розподіл інтегровної випадкової величини ξ однозначно визн7ачається функцією $\mathbf{E}\left|\xi - t\right|, t \in \mathbb{R}$.

8. Довести, що з невід'ємної визначеності характеристичної функції випливає ермітовість.

9. Знайти характеристичну функцію для випадкової величини з щільністю: а) $(T - |x|)^+/T^2$, б) $(1 - \cos(Tx))/\pi T x^2$.

10. Нехай $\varphi(t)$ – характеристична функція така, що $\varphi(t) = 0$ при $|t| > a$. Вивести з теореми Бохнера-Хінчина, що періодичне продовження з періодом $2a$ функції $\varphi(t)$ є характеристичною функцією.

11. Довести, що функція з періодом $2T$, що дорівнює $(T - |x|)^+/T$ при $|x| \leqslant T$, є характеристичною.

12. Випадкова величина ξ має щільність та $\mathbf{E}\xi = 0$, $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$. Довести, що знайдеться $\delta > 0$ таке, що $\sup_{|t| \geqslant u} \left|\varphi_\xi(t)\right| \leqslant \exp(-\delta u^2)$ для всіх $u \in (0, 1)$.

13. Якщо випадкова величина ξ має щільність, то $\left|\varphi_\xi(t)\right| < 1 \ \forall t \neq 0$.

14. З використанням двох попередніх задач довести, що існують незалежні величини ξ_1, ξ_2, ξ_3 такі, що ξ_2 та ξ_3 мають різні розподіли, однак $\xi_1 + \xi_2$ і $\xi_1 + \xi_3$ – однаково розподілені.

15. Для довільних розподілу $(p_k, k = \overline{1,n})$ та додатних $(a_k, k = \overline{1,n})$ опуклий полігон $\sum_{k=1}^{n} p_k (1 - |t|\, a_k^{-1})^+$ є характеристичною функцією.

16. Нехай φ – дійсна неперервна парна функція на $\mathbb{R}$, $\varphi(0) = 1, \varphi(\infty) = 0$, причому графік φ на $\mathbb{R}_+$ є опуклим донизу. Тоді φ є характеристичною функцією. Вказівка: довести, що $\varphi(t)$ можна зобразити у вигляді $\int_0^\infty (1 - |t|/s)^+ \mu(ds)$ для деякої міри μ.

17. Величина ξ має розподіл $\mathbf{P}(\xi = \pm 2n) = C/(n^2 \ln n)$ і не є інтегровна, однак її характеристична функція диференційовна в нулі.

18. Якщо характеристична функція $\varphi_\xi(t)$ випадкової величини ξ має похідну парного порядку $2n$, то випадкова величина ξ^{2n} інтегровна.

19. Якщо $\mathbf{E}\left|\xi\right|^\alpha < \infty$ при $0 < \alpha < 1$, то $\varphi_\xi(t)$ задовольняє умову Гельдера порядку α.

20. Довести, що а) характеристична функція випадкової величини зі щільністю Коші $(\pi(1 + x^2))^{-1}$ дорівнює $\exp(-|t|)$, б) для незалежних однаково розподілених випадкових величин $\xi_1, ..., \xi_n$ зі щільністю Коші нормована сума $(\xi_1 + ... + \xi_n)/n$ має таку ж саму щільність, в) для вказаної послідовності не справджується закон великих чисел.

21. Характеристична функція рівномірного розподілу на симетричному відрізку $[-a, a]$ дорівнює $(\sin at)/at$.

22. Якщо випадкова величина ξ має гама-розподіл $\Gamma(\lambda, \alpha)$, то $\varphi_\xi(t) = (1 - it/\lambda)^{-\alpha}$.

23. Функція $\exp(-t^4)$ не є характеристичною.

24. Навести приклад залежних величин ξ, η таких, що
$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t)\ \varphi_\eta(t), \forall t \in \mathbb{R}$.

25. Випадкові величини $(\xi_k, k = \overline{1, n})$ незалежні у сукупності тоді і тільки тоді, коли величини $\xi_1 + ... + \xi_k$ та ξ_{k+1} незалежні для всіх $k = \overline{1, n-1}$.

26. Для характеристичної функції $\varphi(t)$ довести нерівність
$1 - \mathrm{Re}\,\varphi(2t) \leqslant 4 - 4\,\mathrm{Re}\,\varphi(t)$.

27. Якщо випадкова величина ξ обмежена, то функція
$t^{-2} \ln \left|\varphi_\xi(t)\right|$ обмежена та відділена від нуля у деякому околі нуля.

28. Якщо $\varphi(t)$ – характеристична функція, то а) $\varphi^n(t)$, б) $|\varphi(t)|^2$, в) $t^{-1} \int_0^t \varphi(s) ds$ – також характеристичні функції.

29. Довести, що існують різні характеристичні функції $\varphi_k(t), k = 1, 2$, такі, що $\varphi_1^2(t) = \varphi_2^2(t)$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

30. Якщо величини ξ, η незалежні, однаково розподілені і квадратично інтегровні, причому $\xi+\eta$ та $\xi-\eta$ також незалежні, то ξ, η – нормальні випадкові величини.

31. Випадкові величини ξ, η незалежні, однаково розподілені і з нульовим середнім та одиничною дисперсією. Якщо розподіл величини $(\xi + \eta)/\sqrt{2}$ збігається з розподілом ξ, то $\xi \simeq N(0, 1)$.

32. Довести методом генератрис, що а) сума незалежних величин із розподілами Пуассона, б) слабка границя величин із розподілами Пуассона знову має розподіл Пуассона.

33. Довести для невід'ємної величини $\xi \leqslant \infty$ такі тотожності:
$\lim_{t\to\infty} \mathbf{E} \exp(-t\xi) = \mathbf{P}(\xi = 0)$, $\lim_{t\downarrow 0} \mathbf{E} \exp(-t\xi) = \mathbf{P}(\xi < \infty)$.

34. Нехай величини ξ_n, ξ мають характеристичні функції φ_n, φ, причому $\int_a^b \varphi_n(t) dt \to \int_a^b \varphi(t) dt, n \to \infty$, для всіх $a < b$. Довести, що $\xi_n \to^W \xi$.

35. Довести, що твердження теореми Леві виконується, якщо характеристичні функції замінити на перетворення Лапласа та припустити, що відповідні величини невід'ємні.

36. Перевірити суттєвість умови неперервності в нулі в теореми Леві – побудувати функції розподілу F_n, що не збігаються слабко та мають характеристичні функції φ_n такі, що границя $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ існує для всіх $t \in \mathbb{R}$.

37. Випадкові величини ξ_n мають характеристичні функції φ_n. Довести, що $\xi_n \to^W 0$ тоді і тільки тоді, коли $\varphi_n(t) \to 1$ для t з деякого околу нуля.

38. Функції розподілу F_n мають характеристичні функції φ_n, і для кожного $t \in \mathbb{R}$ існує границя $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$. Довести, що існує

узагальнена функція розподілу $F \in M_{01}$ така, що $F_n \to^O F, n \to \infty$. Далі, довести еквівалентність таких тверджень: а) існує функція розподілу F така, що $F_n \to^W F, n \to \infty$, б) послідовність (F_n) слабко компактна, в) φ – характеристична функція, г) φ – неперервна, д) φ – неперервна в нулі.

39. Сім'я функцій розподілу (F_α) слабко компактна тоді і тільки тоді, коли $\sup_\alpha \sup_{|t|\leqslant\varepsilon} \left|1 - \varphi_{F_a}(t)\right| \to 0, \varepsilon \to 0$.

40. Випадкові величини $(\xi_n,\ n \geqslant 1)$ незалежні, однаково розподілені з характеристичною функцією φ. Довести, що збіжність $(\xi_1 + ... + \xi_n)/n \to^{\mathbf{P}} a$ до деякої сталої a виконується тоді і тільки тоді, коли існує похідна $\varphi'(0)$.

41. Випадкові величини $(\xi_n,\ n \geqslant 1)$ незалежні, однаково розподілені та інтегровні. Довести, що $(\xi_1 + ... + \xi_n)/n \to^{\mathbf{P}} \mathbf{E}\xi_1$. Вказівка: досить довести слабку збіжність.

42. Випадкові величини $(\xi_n,\ n \geqslant 1)$ незалежні, $\mathbf{P}(\xi_n = 0) = 1/2 = \mathbf{P}(\xi_n = 1)$. Довести, що а) сума ряду $\sum_{n\geqslant 1} 2^{-n}\xi_n$ рівномірно розподілена на $[0,1]$, б) величина $\xi = 2\sum_{n\geqslant 1} 3^{-n}\xi_n$ має (сингулярний) розподіл Кантора. Обчислити відповідну характеристичну функцію.

43. Сформулювати теоретико-ймовірнісну інтерпретацію такої тотожності: $(\sin t)/t = \prod_{n\geqslant 1} \cos(2^{-n}t)$.

44. Нехай $\varphi(t)$ – характеристична функція для функції розподілу $F(x)$. а) Тоді функція $\varphi_\alpha(t) \equiv (2\varphi(t) - \varphi(t+\alpha) - \varphi(t-\alpha))/(2 - \varphi(\alpha) - \varphi(-\alpha))$ також є характеристичною при $\alpha \in \mathbb{R}$. б) За умови абсолютної неперервності F довести, що $\varphi_\alpha(t) \to \varphi(t), \alpha \to \infty$, але відповідні щільності не збігаються

45. Довести, що в останній теоремі $a_n + \xi_n \to^W a + \xi, n \to \infty$.

46. Довести, що в попередніх вправі та теоремі послідовність сталих $a_n \to a$ можна замінити на послідовність випадкових величин $\eta_n \to^{\mathbf{P}} a$.

47. Нехай $\xi_n \to^W \xi \in \mathbb{R}^d$, а функція $g \in C(\mathbb{R}^d)$. Довести, що має місце збіжність $g(\xi_n) \to^W g(\xi), n \to \infty$.

48. Довести, що а) сумісна характеристична функція n-вимірного нормального випадкового вектора $\xi \simeq N_n(m,V)$ дорівнює $\varphi_\xi(t) = \exp(it'm - t'Vt/2)$, б) ξ є узагальненим нормальним вектором тоді і тільки тоді, коли остання рівність має місце для деяких $m \in \mathbb{R}^n$ і симетричної невід'ємно визначеної матриці V.

49. Вектор $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ є нормальним випадковим вектором тоді і тільки тоді, коли для кожного $t \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ величина $t'\xi$ має нормальний розподіл.

50. Нехай послідовності випадкових величин $(\xi_n), (\eta_n)$ такі, що ξ_n, η_n незалежні при кожному n, $\xi_n \to^W \xi$, $\eta_n \to^W \eta$, причому ξ та η незалежні. Довести слабку збіжність векторів $(\xi_n, \eta_n) \to^W (\xi, \eta)$.

51. Нехай φ, ψ, γ – характеристичні функції. Довести, що функція $\varphi(t_1)\psi(t_2)\gamma(t_1 + t_2)$ є сумісною характеристичною функцію двовимірного вектора. Побудувати цей вектор.

52. Координати випадкового вектора $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ незалежні у сукупності тоді і тільки тоді, коли їх сумісна характеристична функція дорівнює добуткові: $\varphi_\xi(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t), \forall t \in \mathbb{R}$.

53. Довести рівність $\mathbf{E}\xi\eta = \mathbf{E}\xi\mathbf{E}\eta$ для комплекснозначних незалежних інтегровних величин ξ, η.

22. Центральна гранична теорема

Література: [1, с.38-40,149–162], [2,с.149-157]

A

1. Випадкова величина $\zeta_{\lambda\alpha}$ має гама-розподіл $\Gamma(\lambda, \alpha)$. а) Довести слабку збіжність $(\lambda\zeta_{\lambda\alpha} - \alpha)/\sqrt{\alpha} \to^W \zeta \simeq N(0,1), \alpha \to \infty$. б) Розмір вимог для деякого типу полісів моделюються гама-розподілом з параметрами $\alpha = 120$, $\lambda = 21$. Обчислити наближено ймовірність того, що вимога перевищить 120.

2. Величини $(\xi_n, n \geqslant 1)$ задовольняють умови класичної центральної граничної теореми, а функція $g \in C_2(\mathbb{R})$ така, що $g'(\mu) = 0$. Довести, що а) $n\,(g(S_n/n) - g(\mu)) \to^W g''(\mu)\sigma^2\zeta^2/2$, де $\zeta \simeq N(0,1)$, б) при $\mu = 1/2$ має місце збіжність $S_n(n - S_n)/n - n/4 \to^W -\sigma^2\zeta^2/2, n \to \infty$.

3. Випадкові величини $(\xi_k, k \geqslant 1)$ незалежні, $\mathbf{P}(\xi_k = \pm k^\alpha) = k^{-\beta}/2$, $\mathbf{P}(\xi_k = 0) = 1 - k^{-\beta}$, де $2\alpha > \beta - 1$. Довести, що для загальної послідовності серій $(\xi_k, k = \overline{1,n},\ n \geqslant 1)$ умова Ліндеберга виконується тоді і тільки тоді, коли $\beta \in [0,1)$.

4. Випадкові величини $(\xi_n,\ n \geqslant 1)$ незалежні, однаково розподілені зі щільністю Коші $(\pi(1 + x^2))^{-1}$. Знайти граничний розподіл для нормованих максимумів $n^{-1} \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \xi_k$.

B

1. Випадкова величина ζ_λ має розподіл Пуассона $\Pi(\lambda)$. а) Довести, що $(\zeta_\lambda - \lambda)/\sqrt{\lambda} \to^W \zeta \simeq N(0,1), \lambda \to \infty$. б) Перевірити, що вказане наближення можна вважати прийнятним вже при $\lambda \geqslant 5$. в) Вивести звідси таку тотожність $\lim_{n\to\infty} \exp(-n) \sum_{k=0}^n n^k/k! = 1/2$.

2. Випадкові величини $(\xi_n,\ n \geqslant 1)$ незалежні, однаково рівномірно розподілені на інтервалі $[0,1]$ а) Знайти таке перетворення добутків $\prod_{k=1}^n \xi_k$, яке б слабко збігалося до стандартної нормальної випадкової величини $N(0,1)$. б) Обчислити граничний при $n \to \infty$ розподіл величин $n \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \xi_k$.

3. Випадкові величини $(\xi_k, k \geqslant 1)$ незалежні у сукупності. За яких умов існують додатні сталі $b_n \to \infty$ такі, що $b_n^{-1} \sum_{k=1}^n \xi_k \to^W \zeta \simeq N(0,1)$, якщо: а) $\mathbf{P}(\xi_k = \pm a_k) = 1/2$, б) величини ξ_k рівномірно розподілені на $[-a_k, a_k]$?

4. Випадкові величини $(\xi_{nk},\ k=\overline{1,n},\ n\geqslant 1)$ незалежні при кожному n, $\xi_{nk}\in\{0,1\}$, а ймовірності $p_{nk}\equiv\mathbf{P}(\xi_{nk}=1)$ такі, що $\max_{k\leqslant n}p_{nk}\to 0$. Довести, що збіжність $\sum_{k=1}^{n}p_{nk}\to\lambda, n\to\infty$, необхідна і достатня для того, щоб $\mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_{nk}=m\right)\to\exp(-\lambda)\lambda^m/m!$, $\forall m\in\mathbb{Z}_+$.

C

1. Довести класичну центральну граничну теорему без використання поняття логарифмічної функції на комплексній площині за допомогою нерівності $|z^n-\zeta^n|\leqslant n\,|z-\zeta|$.

2. Випадкові величини $(\xi_n,\ n\geqslant 1)$ незалежні, однаково розподілені, та $a_n^{-1}(\xi_1+...+\xi_n)-b_n\to^W\eta, n\to\infty$, для деяких $a_n>0, b_n$, причому $\eta\neq 0$ м.н. Довести, що $a_n\to\infty, a_n/a_{n-1}\to 1, n\to\infty$.

3. Випадкові вектори $(\xi_{nk}, k=\overline{1,n+1})$ рівномірно розподілені на одиничній сфері у $\mathbb{R}^{n+1}$. Довести, що $\sqrt{n}\xi_{n1}\to^W\zeta, n\to\infty,\ \zeta\simeq N(0,1)$.

4. Випадкові величини $(\xi_n,\ n\geqslant 1)$ незалежні, однаково розподілені, $\mathbf{E}\xi_1=0, \mathbf{D}\xi_1=1$. Довести, що $\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k|/\sqrt{n}\to^W 0$.

5. Випадкові величини $(\xi_n, n\geqslant 1)$ незалежні, $\mathbf{P}(\xi_n=\pm 1)=1/2$. Довести, що $\max_{1\leqslant k\leqslant n}(\xi_1+...+\xi_k)/\sqrt{n}\to^W|\zeta|, n\to\infty$, де $\zeta\simeq N(0,1)$.

6. Випадкові величини $(\xi_k, k\geqslant 1)$ незалежні, $\mathbf{P}(\xi_k=\pm 1)=(1-k^{-2})/2$, $\mathbf{P}(\xi_k=\pm k)=k^{-2}/2$. Довести, що $S_n/\sqrt{n}\to^W\zeta\simeq N(0,1)$, однак $\mathbf{D}S_n/n\to 2, n\to\infty$.

7. Випадкові величини $(\xi_k, k\geqslant 1)$ незалежні та $\mathbf{E}\xi_k=0$, $|\xi_k|\leqslant c_k$, причому має місце зображення $c_n=o(\mathbf{D}S_n),\ n\to\infty$, де $S_n=\xi_1+...+\xi_n$. Довести, що $S_n/\sqrt{\mathbf{D}S_n}\to^W\zeta\simeq N(0,1)$.

8. Випадкові величини $(\xi_n, n\geqslant 1)$ незалежні, однаково розподілені, та мають неперервну парну додатну у околі нуля щільність. Довести слабку збіжність $n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{-1}\to^W\kappa,\ n\to\infty$, де κ має розподіл Коші.

9. Випадкові величини $(\xi_k, k\geqslant 1)$ незалежні, $\mathbf{P}(\xi_k=\pm 1)=(1-k^{-1})/2$, $\mathbf{P}(\xi_k=\pm\sqrt{k})=1/2k$. Довести, що не існує таких сталих σ_n, що має місце збіжність $S_n/\sigma_n\to^W\zeta\simeq N(0,1), n\to\infty$.

10. Випадкові величини $(\xi_k, k\geqslant 1)$ незалежні та мають гама-розподіли: $\xi_k\simeq\Gamma(1,\alpha_k)$. Загальна послідовність серій $(\xi_k, k=\overline{1,n},\ n\geqslant 1)$ задовольняє умову Ліндеберга, якщо $\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^{-1}\to 0,\ n\to\infty$.

11. Випадкові величини $(\xi_k, k\geqslant 1)$ незалежні, $\mathbf{P}(\xi_k=0)=1-k^{-1}$, $\mathbf{P}(\xi_k=1)=k^{-1}$. Довести, що $(S_n-\ln n)/\sqrt{\ln n}\to^W\zeta\simeq N(0,1), n\to\infty$.

12. Випадкові величини у кожній серії $(\xi_{nk}, k=\overline{1,k_n})$ незалежні та невід'ємні. Довести, що збіжність за ймовірністю $\sum_{k=1}^{k_n}\xi_{nk}\to^{\mathbf{P}}0, n\to\infty$, має місце тоді і тільки тоді, коли для кожного $\varepsilon>0$ виконуються умови: $\sum_{k=1}^{k_n}\mathbf{P}(\xi_{nk}>\varepsilon)\to 0$ та $\sum_{k=1}^{k_n}\mathbf{E}\xi_{nk}1\!\!\mathrm{I}_{\{\xi_{nk}\leqslant\varepsilon\}}\to 0$ при $n\to\infty$.

13. Випадкові величини $(\xi_n, n\geqslant 1)$ незалежні однаково розподілені та мають симетричний розподіл: $\xi_1\simeq-\xi_1$.. Довести, що за умови

$x^2\mathbf{P}(|\xi_1| > x) = o(\mathbf{E}(\xi_1^2 1\!\!\mathrm{I}_{\{|\xi_1|\leqslant x\}})), x \to \infty$, знайдуться $\sigma_n \in \mathbb{R}$ такі, що $(\xi_1 + ... + \xi_n)/\sigma_n \to^W N(0,1), n \to \infty$.

14. Розглянемо послідовність серій $(\xi_{nk},\ k = \overline{1,n},\ n \geqslant 1)$ випадкових величин із розподілом Пуассона з параметром $1/n$ всередині n-ої серії. Доведіть, що виконані всі умови теореми Ляпунова, за винятком умови Ляпунова, причому центральна гранична теорема також не виконується.

23. Збіжність в основному та слабка (c)

Література: [1, с.125–134], [2,с.124-133]

B

1. Навести приклад послідовності функцій розподілу, які збігаються в основному і не збігаються поточково.

2. Довести, що зі збіжності функцій розподілу в основному $F_n \to^O F$ до неперервної функції розподілу F випливає рівномірна за x збіжність. Перевірити, що умова неперервності F тут є суттєвою для рівномірності.

3. Випадкові величини ξ_n, ξ – цілозначні. Довести, що $\xi_n \to^W \xi$ тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{P}(\xi_n = k) \to \mathbf{P}(\xi = k), n \to \infty$, для всіх $k \in \mathbb{Z}$.

4. Довести, що кожне з тверджень теореми про властивості слабкої збіжності еквівалентне збіжності $F_n \to^W F, n \to \infty$.

5. Якщо $\xi_n \to^W \xi$, $\eta_n \to^W c$, то $\xi_n + \eta_n \to^W \xi + c$ та $\xi_n\eta_n \to^W c\xi, n \to \infty$.

6. Довести, що для сталої c збіжність $\xi_n \to^W c$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\xi_n \to^{\mathbf{P}} c$, $n \to \infty$.

7. Послідовність нормальних розподілів $N(\mu_n, \sigma_n^2), n \in \mathbb{N}$, слабко компактна тоді і тільки тоді, коли $\sup_{n\geqslant 1}(|\mu_n| + \sigma_n^2) < \infty$.

C

1. Границя в основному не визначена однозначно, однак границею збіжної в основному послідовності з класу M_{01} завжди є елемент M_{01}.

2. Довести, що на просторі функцій розподілу F, G функція $L(F,G) = \inf(\varepsilon > 0 : F(x-\varepsilon) - \varepsilon \leqslant G(x) \leqslant F(x+\varepsilon) + \varepsilon,\ \forall x \geqslant 0)$ є метрикою, а збіжність $L(F_n, F) \to 0$ для функцій розподілу F_n, F еквівалентна збіжності в основному $F_n \to^O F$.

3. Якщо $\xi_n \leqslant \zeta_n \leqslant \eta_n$ м.н. та $\xi_n \to^O \zeta$, $\eta_n \to^O \zeta$, $n \to \infty$, то $\zeta_n \to^O \zeta$.

4. Нехай F_n, F – функції розподілу і $F_n \to^O F$ Довести, що існує ймовірнісний простір $(\Omega,\ \mathfrak{F},\ \mathbf{P})$ та випадкові величини ξ_n, ξ на ньому з функціями розподілу F_n, F відповідно такі, що $\xi_n \to^{\mathbf{P}1} \xi$, $n \to \infty$.

5. Нехай F_n функція розподілу дискретної величини, що рівномірно розподілена на множині $\{0, 1/n, 2/n..., (n-1)/n\}$. Знайти слабку границю F_n.

6. Навести приклад послідовності $F_n \to^W F$ такої, що $F_n(B) \to F(B)$ не для всіх $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, тобто умова $F(\partial B) = 0$ є суттєвою.

7. Нехай $F_n \to^W F, n \to \infty$, а функція g обмежена та неперервна майже скрізь за мірою, що породжена F. Довести, що $\int g dF_n \to \int g dF, n \to \infty$.

8. Нехай $\xi_n \to^W \xi, n \to \infty$. Довести, що $\mathbf{E}\,|\xi| \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \mathbf{E}\,|\xi_n|$.

9. Довести, що слабка збіжність $\xi_n \to^W \xi, n \to \infty$, а) має місце тоді і тільки тоді, коли $\overline{\lim}_{n\to\infty}\mathbf{E}g(\xi_n) \leqslant \mathbf{E}g(\xi)$ для всіх $g \in C_b(\mathbb{R})$, б) клас $C_b(\mathbb{R})$ у цьому твердженні можна замінити на
$Lip_b(\mathbb{R}) \equiv \{g : \sup_{x\neq y} |g(x) - g(y)| \,/\, |x - y| < \infty\} \cap C_b(\mathbb{R})$.

10. Нехай $\xi_n \to^W \xi, n \to \infty$, і $\lim_{N\to\infty} \sup_{n\geqslant 1} \int_N^\infty \mathbf{P}(|\xi_n| \geqslant x)dx = 0$. Довести, що $\mathbf{E}\xi_n \to \mathbf{E}\xi$. Перевірити, що попередня умова виконується, якщо $\sup_{n\geqslant 1} \mathbf{E}\,|\xi_n|^{1+\delta} < \infty$ для деякого $\delta > 0$.

11. Нехай $\xi_n \to^W \xi_0, n \to \infty$, а $\mu_n \equiv \operatorname{med} \xi_n$ – медіана величини ξ_n, що є розв'язком рівняння $\mathbf{P}(\xi_n < \mu_n) = 1/2$. За умови однозначної визначеності медіан довести, що $\mu_n \to \mu_0, n \to \infty$.

12. Нехай $\xi_n \to^W \xi, n \to \infty$, а послідовність випадкових величин $\tau_n \in \mathbb{N}$ така, що $\tau_n/n \to^{\mathbf{P}} \alpha \in (0, 1)$. Довести, що $\xi_{\tau_n} \to^W \xi, n \to \infty$.

13. Клас $\mathcal{F}$ функцій розподілу є слабко компактним тоді і тільки тоді, коли знайдеться невід'ємна борелева функція V така, що $V(x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$ і $\sup_{F\in\mathcal{F}} \int_{\mathbb{R}} V(x)dF(x) < \infty$.

2.3. Елементи теорії випадкових процесів

24. Процеси Пуассона та Вінера (с)

Література: [1, с.299–318], [2,с.301-307,313-321]

B

1. Довести, що процес Пуассона є стохастично неперервним, тобто $\nu(t + h) \to^{\mathbf{P}} \nu(t)$, $h \to 0$.

2. Нехай $f(n, t) = \mathbf{E}g(n+\nu_t)$. Довести, що $(\partial/\partial t)f(n, t) = \lambda g(n+1) - \lambda g(n), n \geqslant 0$.

3. Довести посилений закон великих чисел: $\nu(t)/t \to^{\mathbf{P1}} \lambda$ при $t \to \infty$.

4. Для довільних $0 < t_1 < ... < t_n$ знайти сумісну щільність величин $(w(t_1), ..., w(t_n))$.

5. Довести, що вінерівськими є такі перетворення вінерівського процесу $w(t)$: а) $-w(t), t \geqslant 0$, б) $tw(1/t), t > 0$, $w(0) \equiv 0$, в) $w(t + c) - w(c), t \geqslant 0$, г) $w(c) - w(c - t)$, $0 \leqslant t \leqslant c$, д) $c^{-1}w(c^2t)$.

6. Позначимо $t_{nk} = k2^{-n}$. Довести, що випадкові величини $\zeta_{nk} \equiv w(t_{n,2k-1}) - (w(t_{n-1,k-1}) + w(t_{n-1,k}))/2, n, k \geqslant 1, \zeta_{0k} \equiv w(t_{0k}) - w(t_{0,k-1})$, є незалежними у сукупності з нормальним розподілом. Обчислити значення $w(t_{nk})$ через ці величини.

7. Знайти розподіл величин: а) $w(t) + w(s), t < s$, б) $\int_0^1 w(s)ds$.

C

1. Нехай $(\tau_n, n \geqslant 1)$ – стохастичний потік для процесу Пуассона з параметром λ, а $(\delta_n, n \geqslant 1)$ – незалежна від нього послідовність незалежних величин таких, що $\mathbf{P}(\delta_n = 1) = p = 1 - \mathbf{P}(\delta_n = 0)$. Довести, що послідовність $(\delta_n \tau_n, n \geqslant 1)$ після усунення нульових значень є стохастичним потоком для процесу Пуассона з параметром λp. Вказівка: скористатись зауваженням до теореми про структуру траєкторій процесу Пуассона.

2. Нехай $(\tau_n^{(i)}, n \geqslant 1), i = 1, 2,$ – стохастичні потоки для незалежних процесів Пуассона з параметрами λ_i. Довести, що об'єднана послідовність $(\{\tau_n^{(1)}, n \geqslant 1\} \cup \{\tau_n^{(2)}, n \geqslant 1\})$ після впорядкування за зростанням є стохастичним потоком для процесу Пуассона з параметром $\lambda_1 + \lambda_2$. Вказівка: скористатись означенням процесу Пуассона.

3. Знайти середнє та коваріаційну функцію процесу $((-1)^{\nu_t}, t \geqslant 0)$. Чи є цей процес марковським ?

4. Нехай $\nu_k(t), t \geqslant 0, k = 1, 2,$ пара незалежних процесів Пуассона з параметрами λ_k. Довести, що ймовірність перетину двовимірним випадковим процесом $(\nu_1(t), \nu_2(t))$ прямої $\{(i, j) : i + j = n\}$ саме у точці (i, j) дорівнює $C_n^i p^i (1 - p)^{n-i}$, де $p = \lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$.

5. Позначимо через $f(x, t, y)$ щільність випадкової величини $x + at + bw(t)$ для $x, a \in \mathbb{R}, b > 0$. а) Довести, що ця функція задовольняє для всіх $t > 0$ диференціальне рівняння $(\partial/\partial t) f(x, t, y) = a(\partial/\partial x) f(x, t, y) + (b/2)(\partial^2/\partial x^2) f(x, t, y)$. б) Довести, що для довільної $g \in C_b$ наведене рівняння задовольняє також функція $f(t, x, y) = \mathbf{E} g(x + at + bw(t))$.