Скінченно породжені та головні ідеали

Євгенія Кочубінська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

22 лютого 2023

FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS

Скінченно породжені ідеали та головні ідеали

Нехай R — кільце, $\mathfrak{X}$ – деяка підмножина кільця R.

Ідеалом, породженим $\mathfrak{X}$, називається ідеал

$$(\mathfrak{X}) = \bigcap_{\mathfrak{X} \subseteq I, I \text{ – ідеал}} I.$$

Це найменший ідеал, що містить $\mathfrak{X}$.

Скінченно породжені та головні ідеали

Ідеал, породжений скінченною множиною елементів, називається *скінченно породженим*.

Скінченно породжений ідеал, який породжений елементами $a_1, \dots, a_n$, позначається $(a_1, \dots, a_n)$.

Скінченно породжені та головні ідеали

Ідеал, породжений скінченною множиною елементів, називається *скінченно породженим*.

Скінченно породжений ідеал, який породжений елементами $a_1, \dots, a_n$, позначається $(a_1, \dots, a_n)$.

Ідеал, який породжений одним елементом $a \in R$, називається *головним ідеалом*. Позначається (a).

Як влаштовані головні ідеали?

Нехай R — кільце, $a \in R$. Тоді

$$(a) = \{ra + as + ka + r_1 a s_1 + \ldots + r_n a s_n \,|\, r, s, r_i, s_i \in R, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Як влаштовані головні ідеали?

Нехай R — кільце, $a \in R$. Тоді

$$(a) = \{ra + as + ka + r_1as_1 + \ldots + r_nas_n \,|\, r, s, r_i, s_i \in R, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} \,.$$

♣ Позначимо $I = \{ra + as + ka + r_1as_1 + \ldots + r_nas_n \,|\, r, s, r_i, s_i \in R, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.

Як влаштовані головні ідеали?

Нехай R — кільце, $a \in R$. Тоді

$$(a) = \{ra + as + ka + r_1 a s_1 + \ldots + r_n a s_n \,|\, r, s, r_i, s_i \in R, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}.$$

♣ Позначимо $I = \{ra + as + ka + r_1 a s_1 + \ldots + r_n a s_n \,|\, r, s, r_i, s_i \in R, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.
Ідеал (a) містить $a \Rightarrow$ він містить всі добутки ra, as, $r_i a s_i$, ka та їхні суми $\Rightarrow I \subset (a)$.

Як влаштовані головні ідеали?

Нехай R — кільце, $a \in R$. Тоді

$$(a) = \{ra + as + ka + r_1 a s_1 + \ldots + r_n a s_n \,|\, r, s, r_i, s_i \in R, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}\,.$$

♣ Позначимо $I = \{ra + as + ka + r_1 a s_1 + \ldots + r_n a s_n \,|\, r, s, r_i, s_i \in R, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.
Ідеал (a) містить $a \Rightarrow$ він містить всі добутки ra, as, $r_i a s_i$, ka та їхні суми $\Rightarrow I \subset (a)$.
За критерієм ідеалу I — ідеал.

Як влаштовані головні ідеали?

Нехай R — кільце, $a \in R$. Тоді

$$(a) = \{ra + as + ka + r_1 a s_1 + \ldots + r_n a s_n \,|\, r, s, r_i, s_i \in R, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}\,.$$

♣ Позначимо $I = \{ra + as + ka + r_1 a s_1 + \ldots + r_n a s_n \,|\, r, s, r_i, s_i \in R, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.
Ідеал (a) містить $a \Rightarrow$ він містить всі добутки ra, as, $r_i a s_i$, ka та їхні суми $\Rightarrow I \subset (a)$.
За критерієм ідеалу I — ідеал.
(a) — найменший ідеал, який містить a, $a \in I \Rightarrow (a) = I$. ♠

Як влаштовані головні ідеали?

Якщо $1 \in R$, то

- $aR = \{ar \mid r \in R\}$ — правий ідеал;

Як влаштовані головні ідеали?

Якщо $1 \in R$, то

- $aR = \{ar \,|\, r \in R\}$ — правий ідеал;
- $Ra = \{ra \,|\, r \in R\}$ — лівий ідеал;

Як влаштовані головні ідеали?

Якщо $1 \in R$, то

- $aR = \{ar \mid r \in R\}$ — правий ідеал;
- $Ra = \{ra \mid r \in R\}$ — лівий ідеал;
- $(a) = RaR = \left\{r_1 a r_1' + \ldots + r_n a r_n' \mid r_i, r_i' \in R, n \in \mathbb{N}\right\}$.

Як влаштовані головні ідеали?

Якщо $1 \in R$, то

- $aR = \{ar \mid r \in R\}$ — правий ідеал;
- $Ra = \{ra \mid r \in R\}$ — лівий ідеал;
- $(a) = RaR = \left\{r_1 a r_1' + \ldots + r_n a r_n' \mid r_i, r_i' \in R, n \in \mathbb{N}\right\}$.

Якщо $1 \in R$ та R — комутативне, то

$$(a) = aR = Ra = \{ar \mid r \in R\}.$$

Як влаштовані головні ідеали?

Зауваження

Якщо кільце R не є комутативним, то правий ідеал aR, $a \in R$, у загальному випадку, не є двостороннім ідеалом. Більше того, множина $\{ras \,|\, r, s \in R\}$ не обов'язково буде ідеалом, бо вона не замкнена відносно додавання.

Як влаштовані головні ідеали?

Зауваження

Якщо кільце R не є комутативним, то правий ідеал aR, $a \in R$, у загальному випадку, не є двостороннім ідеалом. Більше того, множина $\{ras \mid r, s \in R\}$ не обов'язково буде ідеалом, бо вона не замкнена відносно додавання.

$R = M_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тоді матриця RAS — вироджена, але

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Як влаштовані головні ідеали?

Якщо $1 \in R$ та R — комутативне, $A \subset R$, то

$$(A) = \{r_1 a_1 + \cdots + r_k a_k \,|\, r_i \in R, a_i \in A, k \in \mathbb{N}\}.$$

Приклад

1. Нульовий ідеал є головним: $\{0\} = (0)$.

Приклад

1. Нульовий ідеал є головним: $\{0\} = (0)$.
2. Якщо кільце містить одиницю, то $R = (1)$.

Приклад

1. Нульовий ідеал є головним: $\{0\} = (0)$.
2. Якщо кільце містить одиницю, то $R = (1)$.
3. У кільці $\mathbb{Z}$ всі ідеали головні і мають вигляд $(n) = n\mathbb{Z}$.

Приклад

1. Нульовий ідеал є головним: $\{0\} = (0)$.
2. Якщо кільце містить одиницю, то $R = (1)$.
3. У кільці $\mathbb{Z}$ всі ідеали головні і мають вигляд $(n) = n\mathbb{Z}$.
   ♣ Очевидно, що (n) — ідеал для довільного $n \in \mathbb{N}$.

Приклад

1. Нульовий ідеал є головним: $\{0\} = (0)$.
2. Якщо кільце містить одиницю, то $R = (1)$.
3. У кільці $\mathbb{Z}$ всі ідеали головні і мають вигляд $(n) = n\mathbb{Z}$.
   ♣ Очевидно, що (n) — ідеал для довільного $n \in \mathbb{N}$.
   Нехай I — ідеал $\mathbb{Z}$, $m \in I$ — найменший додатний елемент. Розділимо $a \in I$ на m з остачею:
   $$a = mq + r, 0 \le r < m.$$

Приклад

1. Нульовий ідеал є головним: $\{0\} = (0)$.
2. Якщо кільце містить одиницю, то $R = (1)$.
3. У кільці $\mathbb{Z}$ всі ідеали головні і мають вигляд $(n) = n\mathbb{Z}$.
   ♣ Очевидно, що (n) — ідеал для довільного $n \in \mathbb{N}$.
   Нехай I — ідеал $\mathbb{Z}$, $m \in I$ — найменший додатний елемент. Розділимо $a \in I$ на m з остачею:
   $$a = mq + r, 0 \leq r < m.$$
   Тоді $r = a - mq \in I \Rightarrow r = 0$. ♠

Приклад

1. Нульовий ідеал є головним: $\{0\} = (0)$.
2. Якщо кільце містить одиницю, то $R = (1)$.
3. У кільці $\mathbb{Z}$ всі ідеали головні і мають вигляд $(n) = n\mathbb{Z}$.
   ♣ Очевидно, що (n) — ідеал для довільного $n \in \mathbb{N}$.
   Нехай I — ідеал $\mathbb{Z}$, $m \in I$ — найменший додатний елемент. Розділимо $a \in I$ на m з остачею:
   $$a = mq + r, 0 \leq r < m.$$
   Тоді $r = a - mq \in I \Rightarrow r = 0$. ♠
4. У кільці многочленів $\Bbbk[x]$ над полем $\Bbbk$ всі ідеали є головними.

Антиприклад

В кільці $\mathbb{Z}[x]$ ідеал $(2, x)$ не є головним.

Антиприклад

В кільці $\mathbb{Z}[x]$ ідеал $(2,x)$ не є головним.

$$(2,x) = \{2f(x) + xg(x) \,|\, f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]\}$$

Антиприклад

В кільці $\mathbb{Z}[x]$ ідеал $(2, x)$ не є головним.

$$(2, x) = \{2f(x) + xg(x) \,|\, f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]\}$$

Припустимо, що $(2, x) = (a(x))$ для деякого $a(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Антиприклад

В кільці $\mathbb{Z}[x]$ ідеал $(2, x)$ не є головним.

$$(2, x) = \{2f(x) + xg(x) \,|\, f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]\}$$

Припустимо, що $(2, x) = (a(x))$ для деякого $a(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Оскільки $2 \in (a(x))$, то $2 = a(x)b(x)$, а тому $a(x) \in \{\pm 1, \pm 2\}$.

Антиприклад

В кільці $\mathbb{Z}[x]$ ідеал $(2, x)$ не є головним.

$$(2, x) = \{2f(x) + xg(x) \,|\, f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]\}$$

Припустимо, що $(2, x) = (a(x))$ для деякого $a(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Оскільки $2 \in (a(x))$, то $2 = a(x)b(x)$, а тому $a(x) \in \{\pm 1, \pm 2\}$.
Якщо $a(x) = \pm 1$, то $(1) = (-1) = \mathbb{Z}[x] \neq (2, x)$.

Антиприклад

В кільці $\mathbb{Z}[x]$ ідеал $(2, x)$ не є головним.

$$(2, x) = \{2f(x) + xg(x) \,|\, f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]\}$$

Припустимо, що $(2, x) = (a(x))$ для деякого $a(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Оскільки $2 \in (a(x))$, то $2 = a(x)b(x)$, а тому $a(x) \in \{\pm 1, \pm 2\}$.
Якщо $a(x) = \pm 1$, то $(1) = (-1) = \mathbb{Z}[x] \neq (2, x)$.
Якщо $a(x) = \pm 2$, то $(2) = (-2) = 2\mathbb{Z}[x] \neq (2, x)$.

Антиприклад

В кільці $\mathbb{Z}[x]$ ідеал $(2, x)$ не є головним.

$$
\begin{aligned}
(2, x) = \{2f(x) + xg(x) \,|\, f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]\} &= \\
= \left\{2k + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \,\middle|\, k, a_i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}&
\end{aligned}
$$

Припустимо, що $(2, x) = (a(x))$ для деякого $a(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Оскільки $2 \in (a(x))$, то $2 = a(x)b(x)$, а тому $a(x) \in \{\pm 1, \pm 2\}$.
Якщо $a(x) = \pm 1$, то $(1) = (-1) = \mathbb{Z}[x] \neq (2, x)$.
Якщо $a(x) = \pm 2$, то $(2) = (-2) = 2\mathbb{Z}[x] \neq (2, x)$.