Вільні групи

Євгенія Кочубінська

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

26 жовтня 2022

FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS

Нехай $X = \{x_i \mid i \in I\}$ — деяка множина символів.

Множину X називатимемо *алфавітом*, а її елементи — *буквами*.

Слово в алфавіті X — це скінченна послідовність w (можливо, порожня) елементів з X:

$$w = x_{i_1} \dots x_{i_k}, \quad x_{i_j} \in X.$$

Кількість k букв у записі слова називається *довжиною* слова, яку позначатимемо $l(w)$.

Порожнє слово позначатимемо Λ та покладемо $l(\Lambda) = 0$.

Приклад

$X = \{a, b, c\}$
$w = abbcba$

Розглянемо множину

$$X^{-1} = \{x^{-1} \,|\, x \in X\}.$$

Покладемо

$$X^{\pm 1} = X \cup X^{-1}.$$

Для букви $y \in X^{\pm 1}$ визначимо y^{-1} за правилом

$$y^{-1} = \begin{cases} x^{-1}, & \text{якщо } y = x \in X^{\pm 1}; \\ x, & \text{якщо } y = x^{-1} \in X^{\pm 1}. \end{cases}$$

Груповим словом w в алфавіті X називається або порожнє слово, або скінченна послідовність вигляду

$$w = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{i_k}^{\varepsilon_k}, \quad x_{i_j} \in X, \varepsilon_j \in \{1, -1\}.$$

Групове слово w називається *нескоротним*, якщо воно

- або порожнє,
- або в ньому немає пар вигляду xx^{-1} або $x^{-1}x$.

В іншому разі слово називається *скоротним*.

Приклад

Слово $w = aa^{-1}bcba$ — скоротне.
Слово $w = bcba$ — нескоротне.

Процес видалення пари aa^{-1} або $a^{-1}a$ зі слова w називатимемо *елементарним скороченням* слова w.

Приклад

$aa^{-1}bcba \to bcba$.

Скорочення слова w — це послідовне застосування елементарних скорочень, що розпочинаються зі слова w та закінчуються нескоротним словом:

$$w \to w_1 \to \ldots \to w_n, \quad \text{де } w_n \text{—нескоротне.}$$

Приклад

$$cabb^{-1}a^{-1}c^{-1}ca \to ca\cancel{bb^{-1}}a^{-1}c^{-1}ca \to c\cancel{aa^{-1}}c^{-1}ca \to \cancel{cc^{-1}}ca \to ca.$$

$$cabb^{-1}a^{-1}c^{-1}ca \to cabb^{-1}a^{-1}\cancel{c^{-1}c}a \to ca\cancel{bb^{-1}}a^{-1}a \to ca\cancel{a^{-1}a} \to ca.$$

Лема

Для довільних елементарних скорочень

$$w \to w_1 \text{ та } w \to w_2$$

групового слова w над алфавітом X існують елементарні скорочення

$$w_1 \to w_0 \text{ та } w_2 \to w_0,$$

які роблять діаграму

$$\begin{tikzcd} & w \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ w_1 \arrow[dr, dashed] & & w_2 \arrow[dl, dashed] \\ & w_0 & \end{tikzcd}$$

комутативною.

Доведення

Нехай $w \xrightarrow{\lambda_1} w_1$ та $w \xrightarrow{\lambda_2} w_2$ — два елементарних скорочення слова w. Є два способи виконати скорочення λ_1 та λ_2:

1. скорочення не накладаються;
2. скорочення накладаються.

Доведення

Випадок 1. У цьому випадку:

$$w = u_1 y_1 y_1^{-1} u_2 y_2 y_2^{-1} u_3, \quad y_i \in X^{\pm 1},$$

та λ_i видаляє підслово $y_i y_i^{-1}$, $i = 1, 2$. Тоді

$$w \xrightarrow{\lambda_1} u_1 u_2 y_2 y_2^{-1} u_3 \xrightarrow{\lambda_2} u_1 u_2 u_3,$$
$$w \xrightarrow{\lambda_2} u_1 y_1 y_1^{-1} u_2 u_3 \xrightarrow{\lambda_1} u_1 u_2 u_3.$$

Доведення

Випадок 2. У цьому випадку $y_1 = y_2$ та слово має вигляд

$$w = u_1 y y^{-1} y u_2, \quad y \in X^{\pm 1}.$$

Тоді

$$w = u_1 y (y^{-1} y) u_2 \xrightarrow{\lambda_1} u_1 y u_2,$$
$$w = u_1 (y y^{-1}) y u_2 \xrightarrow{\lambda_2} u_1 y u_2.$$

Твердження

Нехай w — групове слово над алфавітом X. Тоді для довільних двох скорочень слова w:

$$w \to w_1' \to \ldots \to w_n',$$
$$w \to w_1'' \to \ldots \to w_m''.$$

його нескоротні форми однакові, тобто $w_n' = w_m''$.

Доведення

Індукція за $l(w)$.

Якщо $l(w) = 0$, то $w = \Lambda$ і все доведено.

Нехай тепер $l(w) \geq 1$ та

$$w \to w'_1 \to \ldots \to w'_{n'},$$
$$w \to w''_1 \to \ldots \to w''_m$$

два скорочення слова w. За лемою існують елементарні скорочення

$$w'_1 \to w_0 \text{ та } w''_1 \to w_0.$$

Розглянемо процес скорочення для слова w_0: $w_0 \to w_1 \to \ldots \to w_k$.

Йому відповідає діаграма:

$$
\begin{tikzcd}
& & w \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
& w'_1 \arrow[ddl, dashed] \arrow[dr, dashed] & & w''_1 \arrow[dl, dashed] \arrow[ddr, dashed] & \\
& & w_0 \arrow[dd, dashed] & & \\
w'_n & & & & w''_m \\
& & w_k & &
\end{tikzcd}
$$

За індукцією кожне зі слів слово w'_1 та w''_1 має єдину нескоротну форму.

Оскільки w_k — нескоротна форма обох слів w'_1 та w''_1, то $w'_n = w_k = w''_m$. $\square$

Конкатенація та редукція

Позначимо $\overline{w}$ — єдина нескоротна форма слова w над алфавітом X.

Нехай $F(X)$ — множина всіх нескоротних слів над алфавітом X.

Для нескоротних слів $u, v \in F(X)$ визначимо множення на множині $F(X)$ за правилом:

$$u \cdot v = \overline{uv}.$$

Приклад

Нехай $u = abcb^{-1}a$, $v = a^{-1}babc^{-1}$. Тоді

$$u \cdot v = abcb^{-1}\cancel{aa^{-1}}babc^{-1} \to abc\cancel{b^{-1}b}abc^{-1} \to abcabc^{-1}.$$

Теорема

Множина $F(X)$ є групою відносно дії $\cdot$.

Доведення.

Асоціативність. Досить довести, що для $u, v, w \in F(X)$

$$\overline{\overline{(uv)}w} = \overline{u\overline{(vw)}}.$$

Кожне з нескоротних слів $\overline{\overline{(uv)}w}$ та $\overline{u\overline{(vw)}}$ можна отримати зі слова uvw за допомогою послідовності елементарних скорочень. Тому за попереднім твердженням

$$\overline{\overline{uv}w} = \overline{uvw} = \overline{u\overline{vw}}.$$

Нейтральним елементом є порожнє слово Λ.

Обернений елемент. Нехай $w = x_1 \dots x_k$, $x_i \in X^{\pm 1}$. Тоді слово

$$w^{-1} = x_k^{-1} \dots x_1^{-1}$$

теж є нескоротним та

$$w \cdot w^{-1} = \overline{x_1 \dots x_k x_k^{-1} \dots x_1^{-1}} = \Lambda = \overline{x_k^{-1} \dots x_1^{-1} x_1 \dots x_k} = w^{-1} \cdot w. \quad \square$$

Вільна група

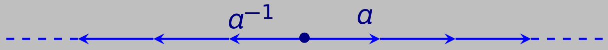
Означення

Група $F(X)$ з дією

$$u \cdot v = \overline{uv}$$

називається *вільною групою* з системою твірних X.
Потужність множини X називається *рангом* вільної групи.

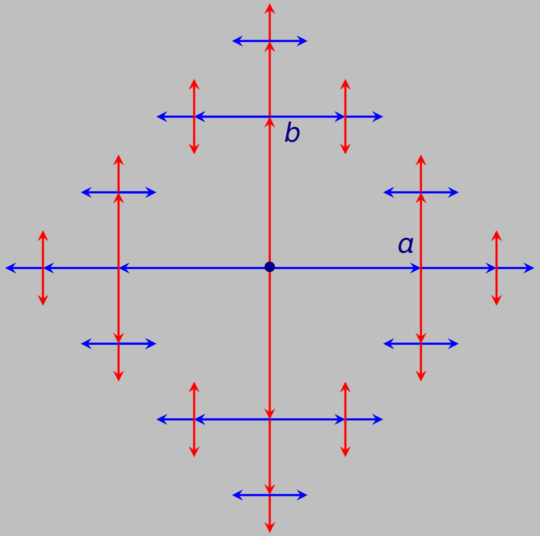
Приклад $X = \{a\}$



$F(X) \simeq \mathbb{Z}$;

$\mathbb{Z}$ — вільна абелева група.

Приклад $X = \{a, b\}$



Вправа

Якщо $|X| = 1$, то $F(X) \simeq \mathbb{Z}$. Якщо $|X| \geq 2$, то $F(X)$ — неабелева.

Вправа

У вільній групі немає відмінних від порожнього слова елементів скінченого порядку.

Теорема

$F(X) \simeq F(Y) \Leftrightarrow |X| = |Y|$.

Теорема (Нільсена-Шрайєра)

Підгрупи вільної групи вільні.