



Concursul Mințile Matematice

Ediția I, 2023



Sâmbătă, 30 Septembrie

Problema 1 (4p). Să se afle toate numerele naturale n care se pot scrie ca $d_1 + d_2 + d_3$ unde d_1, d_2 și d_3 sunt divizori pozitivi distincți ai lui n .

Problema 2 (5p). Fie a, b, c numere întregi cu suma egală cu zero. Să se demonstreze că

$$ab^3 + bc^3 + ca^3 \leq 0.$$

Problema 3 (5p). Fie ABC un triunghi oarecare. Se știe că triunghiul determinat de mijloacele medianelor este echilateral. Să se demonstreze că și triunghiul ABC este echilateral.

Problema 4 (6p). Rațiu și Horațiu joacă un joc pe o tablă 100×100 , care inițial are toate celulele colorate cu alb, începând cu Rațiu. La o mutare, un jucător colorează cu negru o celulă albă. Dacă un jucător colorează cu negru o celulă care are o latură comună cu altă celulă neagră, acesta pierde. Să se determine cine are strategie de câștig.

Problema 5 (8p). La o firmă de construcții lucrează niște muncitori, unii dintre care sunt dușmani. Aceștia vin la muncă cu 100 de autobuze, astfel încât nu există doi dușmani în același autobuz. Ajunși pe șantier, șeful lor dorește să îi împartă în brigăzi de măcar doi oameni, fără a include doi dușmani în aceeași brigadă. Să se demonstreze că există o împărțire în cel mult 100 de brigăzi, sau nu există nicio împărțire în brigăzi.

Problema 6 (9p). Fie ABC un triunghi, cu $AB < AC$. Notăm cu O centrul cercului circumscris, cu I centrul cercului înscris și cu I_A, I_B și I_C centrele cercurilor exînscrise opuse vârfurilor A, B și C , respectiv. Fie M mijlocul laturii BC și H_1, H_2 ortocentrele triunghiurilor MII_A și MI_BI_C . Să se arate că paralela la BC prin O trece prin mijlocul segmentului H_1H_2 .

Problema 7 (9p). Aflați dacă există un șir crescător de numere naturale nenule distincte astfel încât orice număr natural destul de mare poate fi scris în mod unic ca suma a doi termeni (posibil egali) ai șirului.

Problema 8 (11p). Să se arate că dacă N este un număr natural destul de mare, atunci pentru orice permutare π_1, \dots, π_N a numerelor $1, \dots, N$, măcar 11% dintre perechile i, j de numere de la 1 la N satisfac $(i, j) = 1 = (\pi_i, \pi_j)$.

Se notează cu (a, b) cel mai mare divizor comun al numerelor a și b .

*Timpul alocat este de 4 ore
Se pot preda maxim 4 probleme*