Problema 1. Să se afle toate numerele naturale n care se pot scrie ca $d_1 + d_2 + d_3$ unde d_1, d_2 şi d_3 sunt divizori pozitivi distincţi ai lui n.

Soluţie. Să presupunem că n are aceată proprietate. Fie $n = d_1 + d_2 + d_3$. Atunci, $d_2 + d_3 = n - d_1$, dar d_1 este un divizor al lui n, deci

$$d_1 \mid n - d_1 = d_2 + d_3.$$

În mod analog, obţinem că $d_2 \mid d_1 + d_3$ şi că $d_3 \mid d_1 + d_2$. Fără a restrânge generalitatea, fie $d_1 < d_2 < d_3$. Deoarece $d_3 \mid d_1 + d_2$ şi $d_1 + d_2 < 2d_3$, atunci $d_3 = d_1 + d_2$. Prin urmare, $n = 2d_3$, adică n este divizibil cu 2.

Mai departe, deoarece $d_2 \mid d_1 + d_3$, substituind, obţinem $d_2 \mid 2d_1 + d_2$, deci $d_2 \mid 2d_1$. Ştim că $2d_1 < 2d_2$, de unde reiese că $d_2 = 2d_1$, adică $3d_1 = d_3 \mid n$, deci $3 \mid n$.

Prin urmare, dacă n are această proprietate, atunci este divizibil cu 6. Pe de altă parte, dacă $n = 6k$, atunci $n = k + 2k + 3k$, deci toate numerele divizibile cu 6 au proprietatea dorită. În concluzie, doar multiplii de 6 au proprietatea cerută.

A (1p)**.** enunţarea în mod corect a familiei numerelor care satisfac cerinţa ($n = 6k$)

B (1p)**.** demonstrarea ca orice număr de forma $n = 6k$ satisface cerinţa

C (1p)**.** demonstrarea că dacă n satisface cerinţa, atunci n este divizibil cu 2

D (1p)**.** demonstrarea că dacă n satisface cerinţa, atunci n este divizibil cu 3

E (0p)**.** rezolvarea problemei pentru orice valori particulare ale lui n

Problema 2. Fie a, b, c numere întregi cu suma egală cu zero. Să se demonstreze că

$$ab^3 + bc^3 + ca^3 \leqslant 0.$$

Soluţie. Se observă că

$$\begin{aligned}(ab^3 + bc^3 + ca^3) + \big((ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2\big) &= ab^2(a+b) + bc^2(b+c) + ca^2(c+a) \\ &= ab^2(-c) + bc^2(-a) + ca^2(-b) \\ &= -abc(a+b+c) = 0.\end{aligned}$$

Prin urmare, avem $ab^3 + bc^3 + ca^3 = -\left((ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2\right) \leqslant 0$, ceea ce trebuia demonstrat. Egalitatea are loc pentru $a = b = c = 0$.

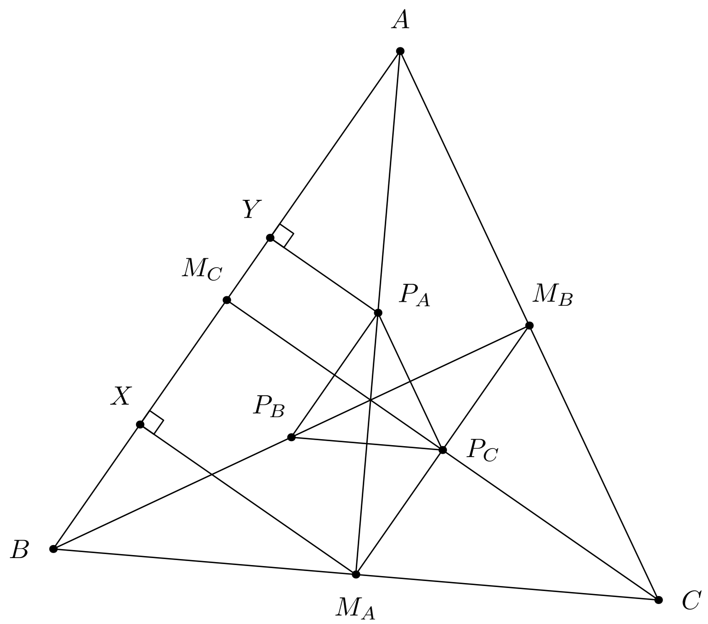
A1 (2p)**.** manipularea identităţii din enunţ prin adunarea unei identităţi auxiliare

A2 (5p)**.** finalizarea corectă a problemei în urma metodei de la punctul **A1**

B (0p)**.** rezolvarea problemei pentru orice valori particulare ale numerelor a, b, c

C (0p)**.** menţionarea cazului de egalitate

Problema 3. Fie ABC un triunghi oarecare. Se ştie că triunghiul determinat de mijloacele medianelor este echilateral. Să se demonstreze că şi triunghiul ABC este echilateral.



Soluţie. Fie M_A mijlocul laturii BC şi P_A mijlocul medianei AM_A. Definim punctele M_B, M_C şi P_B, P_C în mod analog. Vom demonstra că laturile triunghiului $P_AP_BP_C$ sunt paralele cu cele ale triunghiului ABC.

Atunci, deoarece unghiurile tirunghiului $P_AP_BP_C$ sunt de $60°$, cele ale triunghiului ABC vor fi de $60°$ sau $120°$, dar au suma $180°$, deci sunt toate de $60°$, ceea ce încheie demonstraţia.

Proiectăm punctele M_A şi P_A pe latura AB în X şi Y. Atunci, deoarece $M_AX \parallel P_AY$ şi P_A este mijlocul segmentului AM_A, obţinem că P_AY este linie mijlocie în triunghiul AM_AX, deci $P_AY = M_AX/2$, adică

$$\text{dist}(P_A, AB) = \frac{1}{2}\,\text{dist}(M_A, AB).$$

În mod analog, obţinem că $\text{dist}(P_B, AB) = \text{dist}(M_B, AB)/2$. Pentru că M_A şi M_B subt mijloacele laturilor BC şi AC, obţinem că M_AM_B este linie mijlocie în triunghiul ABC, deci $M_AM_B \parallel AB$, adică $\text{dist}(M_A, AB) = \text{dist}(M_B, AB)$. În concluzie,

$$\text{dist}(P_A, AB) = \frac{1}{2}\,\text{dist}(M_A, AB) = \frac{1}{2}\,\text{dist}(M_B, AB) = \text{dist}(P_B, AB),$$

adică $P_AP_B \parallel AB$. În mod analog, obţinem că $P_BP_C \parallel BC$ şi că $P_CP_A \parallel CA$, ceea ce încheie demonstraţia, precum a fost menţionat anterior.

A1 (1p)**.** menţionarea suficienţei paralelismului dintre laturile triunghiurilor $P_AP_BP_C$ şi ABC

A2 (2p)**.** demonstrarea suficienţei de la punctul **A1**

B1 (1p)**.** considerarea perpendicularelor punctelor P_A şi M_A etc. pe laturile triunghiului ABC

B2 (2p)**.** utilizarea ideii de la punctul **B1** pentru a demonstra paralelismul $P_AP_B \parallel M_AM_B$

C (1p)**.** finalizarea problemei prin utilizarea paralelismului $AB \parallel M_AM_B$

Problema 4. Raţiu şi Horaţiu joacă un joc pe o tablă 100×100, care iniţial are toate celulele colorate cu alb, începând cu Raţiu. La o mutare, un jucător colorează cu negru o celulă albă. Dacă un jucător colorează cu negru o celulă care are o latură comună cu altă celulă neagră, acesta pierde. Să se determine cine are strategie de câştig.

Soluţie. Vom demonstra că Horaţiu are strategie de câştig. Notăm cu $[i, j]$ celula de pe linia i şi coloana j, numerotând liniile şi coloanele în mod crescător începând cu colţul stânga-sus.

Strategia lui Horaţiu este să joace ca şi Raţiu, dar simetric faţă de centrul tablei. Dacă Raţiu colorează celula $[i, j]$, atunci Horaţiu colorează celula $[101 - i, 101 - j]$ la următoarea mutare.

Se observă că după fiecare mutare a lui Horaţiu, configuraţia de celule negre este simetrică faţă de centrul tablei. Prin urmare, daca la mutarea sa Raţiu colorează celula $[i, j]$, aceasta era precedent albă, deci din simetria tablei faţă de centru şi celula $[101 - i, 101 - j]$ este albă. Prin urmare, strategia lui Horaţiu constă doar în mutări valide.

Ramâne de demonstrat că Horaţiu nu are cum să piardă. Jocul fiind finit, acest lucru demonstrează că strategia menţionată mai sus este câştigătoare. Pentru o celulă $C = [i, j]$, vom nota cu $C' = [101 - i, 101 - j]$ simetricul lui C faţă de centrul tablei.

Să presupunem că la un moment dat, Horaţiu colorează (conform strategiei) celula C şi pierde. Atunci, mai există o celulă colorată K care are o latură comună cu C. De asemenea, acest lucru înseamnă că la mutarea precedentă, Raţiu a colorat celula $C' \neq K$ (simetricul unei celule faţă de centrul tablei nu poate fi adicant cu celula iniţailă).

Prin urmare, celula K era colorată şi înaintea mutării lui Raţiu. Atunci, folosind simetria celulelor colorate, înseamnă că şi celula K' este colorată, ceea ce ar însemna că, la mutarea sa, Raţiu colorează celula C' care are o latură comună cu K', ceea ce ar însemna că pierde, iar jocul se termină, o contradicţie.

Prin urmare, Horaţiu are strategie de câştig.

A (1p)**.** formularea unei strategii de câştig

B (2p)**.** demonstrarea că strategia de la punctul **A** constă în mutări valide

C (3p)**.** demonstrarea că strategia de la punctul **A** garantează câştigul

D (0p)**.** numirea jucătorului care are strategie de câştig

Problema 5. La o firmă de construcţii lucrează nişte muncitori, unii dintre care sunt duşmani. Aceştia vin la muncă cu 100 de autobuze, astfel încat nu există doi duşmani în acelaşi autobuz. Ajunşi pe şantier, şeful lor doreşte să îi împartă în brigăzi de măcar doi oameni, fără a include doi duşmani în aceeaşi brigadă. Să se demonstreze că există o împărţire în cel mult 100 de brigăzi, sau nu există nicio împărţire în brigăzi.

Soluţie. Să presupunem că există o împărţire a muncitorilor într-un număr oarecare de brigăzi. Numim această împărţire $\mathcal{P}_1$. Vom crea o împărţire $\mathcal{P}_2$ a muncitorilor în cel mult 100 de brigăzi în mod algoritmic.

Iniţial, formăm 100 de grupe, $G_1, \ldots, G_{100}$ unde grupa G_i conţine persoanele din al i-lea autobuz. Dacă toate grupele au zero sau măcar doi muncitori, nu facem nimic. Dacă exisă o grupă G_k cu exact un muncitor m, o alegem şi facem următorea operaţie:

Extragem colegii din brigada lui m în cadrul împărţirii $\mathcal{P}_1$ din grupele lor actuale şi îi mutăm în grupa G_k. Făcând această operaţie, ne asigurăm că G_k va conţine măcar doi oameni. În plus, la operaţiile ce urmează, oamenii din grupa G_k nu îşi mai vor schimba grupa deloc.

Ca un membru să îşi schimbe grupa în operaţiile următoare, trebuie să se afle într-o brigadă comună în cadrul împărţirii $\mathcal{P}_1$ cu un membru din noua grupă în care se duce, ceea ce este imposibil, deoarece grupa G_k este în sine o brigadă completă din împărţirea $\mathcal{P}_1$.

Prin urmare, procesul de operaţii este finit, iar cele 100 de grupe (unele dintre care pot fi vide) în urma succesiunii de operaţii vor constitui brigăzile din împarţirea dorită $\mathcal{P}_2$.

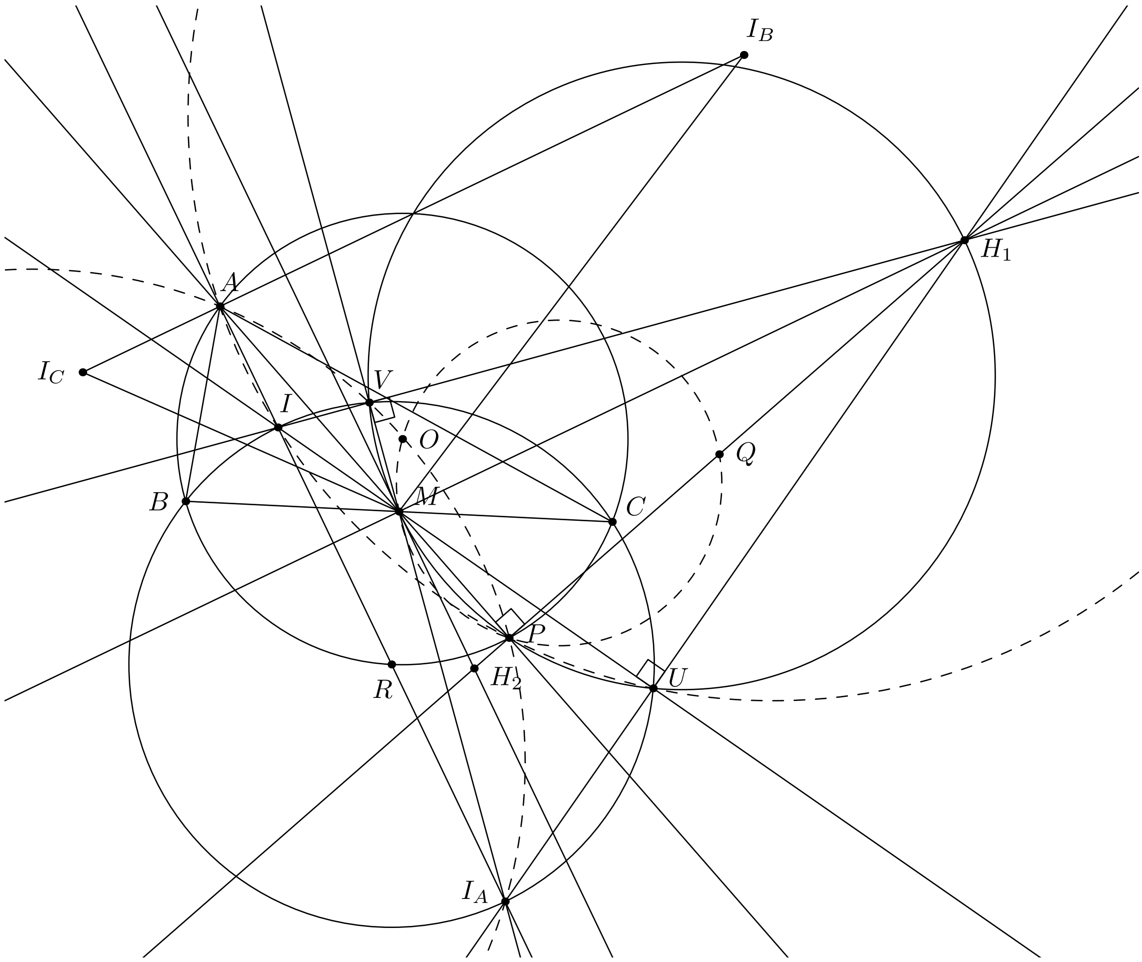
A1 (3p)**.** formularea unui algoritm de împărţire în brigăzi

A2 (7p)**.** demonstrarea validităţii algoritmului de la punctul **A1**

B (1p)**.** finalizarea soluţiei

C (0p)**.** rezolvarea problemei în orice configuraţie particulară

Problema 6. Fie ABC un triunghi, cu $AB < AC$. Notăm cu O centrul cercului circumscris, cu I centrul cercului înscris şi cu I_A, I_B şi I_C centrele cercurilor exînscrise opuse vârfurilor A, B şi C, respectiv. Fie M mijlocul laturii BC şi H_1, H_2 ortocentrele triunghiurilor MII_A şi MI_BI_C. Să se arate că paralela la BC prin O trece prin mijlocul segmentului H_1H_2.



Soluţie. Pentru orice puncte X, Y, Z, notăm cu (XYZ) cercul circumscris triunghiului XYZ. Fie P a doua intersecţie a dreptei AM cu (ABC).

Lema 1. Liniile H_1P şi MP sunt perpendiculare.

Fie U a doua intersecţie a dreptei MI cu (IBC). Se observă că I_A se află pe (IBC) şi fie V a doua intersecţie a dreptei MI_A cu (IBC). Din puterea punctului în (IBC) şi (ABC), avem

$$MI \cdot MU = MV \cdot MI_A = MB \cdot MC = MA \cdot MP,$$

aşa că mulţimile de puncte $\{A, I, P, U\}$ şi $\{A, I_A, P, V\}$ sunt conciclice. Prin urmare,

$$\angle PUM = \angle PUI = \angle PAI = \angle PAI_A = \angle PVI_A = \angle PVM.$$

În concluzie, punctele P, M, U, V sunt concliclice.

În (IBC), segmentul II_A este diametru, deci U şi V sunt proiecţiile lui I_A şi I pe dreptele IM şi I_AM, respectiv. Deoarece H_1 este ortocentrul triunghiului MII_A, atunci tripletele de puncte $\{H_1, V, I\}$ şi $\{H_1, U, I_A\}$ sunt coliniare, aşa că

$$\angle MVH_1 = 90° = \angle MUH_1,$$

deci MH_1 este diametru in (MUV). În concluzie, pentru că punctul P se află pe (MUV) reiese că $\angle MPH_1 = 90°$, deci lema este demonstrată. În mod analog, obţinem

Lema 2. Liniile H_2P şi MP sunt perpendiculare.

Fie Q mijlocul segmentului H_1H_2. Vom arăta că punctele $\{O, P, Q, M\}$ sunt conciclice, ceea ce încheie soluţia, deoarece combinând Lemele 1 şi 2, avem $\angle MPQ = 90°$, deci $\angle MOQ = 90°$ aşa că $OQ \parallel BC$, ceea ce este echivalent cu concluzia.

Din definiţiile ortocentrelor H_1 şi H_2 reiese că $MH_1 \perp II_A$ şi $MH_2 \perp I_BI_C$. În plus, ştim că $II_A \perp I_BI_C$ deci $MH_1 \perp MH_2$, deci $QH_1 = QM = QH_2$. Prin urmare,

$$\angle PQM = 2\angle PH_1M = 2\angle PUM = 2\angle PAI.$$

Fie R a doua intersecţie a dreptei AI cu (ABC). Folosind egalitatea anterioară obţinem

$$\angle PQM = 2\angle PAI = 2\angle PAR = \angle POR = \angle POM,$$

deci $\{O, P, Q, M\}$ sunt conciclice, ceea ce încheie demonstraţia precum am menţionat anterior.

A1 (1p). citarea lemei 1

A2 (3p). demonstrarea faptului că punctele P, M, U, V sunt conciclice

A3 (5p). utilizarea proprietăţii de la punctul **A2** pentru a demonstra lema 1

B (1p). citarea lemei 2 şi precizarea că demonstraţia este echivalentă cu cea a lemei 1

C1 (1p). menţionarea suficienţei conciclicitıaţii punctelor O, P, Q, M pentru finalizare

C2 (3p). demonstrarea proprietăţii de la punctul **C1** şi finalizarea soluţiei

Problema 7. Aflaţi dacă există un şir crescător de numere naturale nenule distincte astfel încât orice număr natural destul de mare poate fi scris în mod unic ca suma a doi termeni (posibil egali) ai şirului.

Soluţie. Vom demonstra că răspunsul este negativ. Să presupunem că un astfel de şir $a_1, a_2, \ldots$ există. Atunci, orice $n > n_0$ se poate scrie în mod unic ca $a_i + a_j$. Alegem T pentru care toţi termenii a_i cu $i \geqslant T$ sunt mai mari ca n_0.

Atunci, pentru orice $i, j \geqslant T$ numerele $a_i + a_j$ sunt mai mari ca n_0, prin urmare sunt distincte două câte două, aşa că şi diferenţele $a_i - a_j$ pentru $i, j \geqslant T$ sunt diferite două câte două. Pentru simplicitate, vom reindexa şirul micşorând indicii cu T

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \mapsto a_{1-T}, \ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots.$$

Conform indexării noi, diferenţele $a_i - a_j$ pentru orice $i, j > 0$ sunt diferite două câte două. Vom estima câţi termeni ai şirului mai mici ca N putem avea, pentru un număr natural N oarecare. Să presupunem ca $a_n < N$. Fixăm un număr natural $\Delta < n$. Atunci

$$\frac{\#_p^2}{2} < \sum_{k=1}^{\#_p} k \leqslant \sum_{k=1}^{\Delta} \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ j-i=k}} (a_j - a_i) \leqslant \sum_{k=1}^{\Delta} kN = N \cdot \frac{\Delta(\Delta+1)}{2},$$

unde $\#_p$ este numărul de perechi de indici $2 \leqslant i, j \leqslant n$ pentru care $1 \leqslant j - i \leqslant \Delta$. Se poate observa uşor că $\#_p \geqslant \Delta(n - \Delta)$. Substituind în inegalitatea precedentă reiese că

$$n \leqslant \Delta + \sqrt{N + \frac{N}{\Delta}}.$$

Prin urmare, avem $n \leqslant N^{1/3}$ sau putem substitui $\Delta = \lfloor N^{1/3} \rfloor$ în inegalitatea de mai sus. Astfel obţinem că $n \leqslant \sqrt{N}(1 + \varepsilon_N)$ unde ε_N este un termen de eroare care tinde la 0 când N tinde la infinit, deci avem cel mult $f(N) := T + \sqrt{N}(1 + \varepsilon_N)$ termeni ai şirului mai mici ca N.

Prin urmare, numărul de sume $a_i + a_j$ care nu depăşesc N este cel mult

$$\binom{f(N)}{2} + f(N) = N \cdot \frac{(1+\varepsilon_N)^2}{2} + \sqrt{N} \cdot \frac{3(1+\varepsilon_N)}{2} + C,$$

unde C este o constantă. Pe de altă parte, deoarece orice număr natural $n > n_0$ poate fi scris ca $a_i + a_j$, cantitatea de mai sus trebuie să fie mai mare sau egală cu $N - n_0$. Pentru N destul de mare, acest lucru este fals, rezultând într-o contradicţie.

A1 (1p). menţionarea faptului că diferenţele $a_i - a_j$ sunt distincte, de la un rang în colo

A2 (2p). demonstrarea proprietăţii de la punctul **A1**

B1 (1p). considerarea unei sume de diferenţe de forma $a_i - a_j$

B2 (2p). considerarea unei sume de diferenţe de forma $a_i - a_j$ unde $1 \leqslant |i - j| \leqslant \Delta$

B3 (5p). mărginirea în două moduri a sumei de la punctul **B2** în scopul estimării numărului termenilor şirului mai mici ca o constantă

C (2p). utilizarea estimărilor de la punctul **B3** pentru a concluziona că un şir nu există

Problema 8. Să se arate că dacă N este un număr natural destul de mare, atunci pentru orice permutare $\pi_1, \ldots, \pi_N$ a numerelor $1, \ldots, N$ măcar, 11% dintre perechile i, j de numere de la 1 la N satisfac $(i, j) = 1 = (\pi_i, \pi_j)$.

Soluţie. Considerăm un graf cu vârfurile $v_1, v_2, \ldots, v_N$. Trasăm o muchie albastră între v_i şi v_j dacă $(i, j) = 1$ şi o muchie roşie dacă $(\pi_i, \pi_j) = 1$. Astfel, problema este echivalentă cu a arăta că dacă N este destul de mare, măcar 11% dintre toate perechile de vârfuri sunt unite de muchii de ambele culori. Notând cu e_a şi e_r numărul de muchii albastre şi roşii respectiv, este suficient să demonstrăm că

$$e_a + e_r \geqslant \binom{N}{2}\left(1 + \frac{11}{100}\right). \tag{1}$$

Deoarece $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N$ este o permutare a numerelor $1, 2, \ldots, N$ se observă că $e_a = e_r$. În plus, deoarece $\varphi(k)$ numără toate numerele naturale cel mult egale cu k şi relativ prime cu k, obţinem relaţia

$$e_a = e_r = \Phi(N) := \sum_{k=1}^{N} \varphi(k). \tag{2}$$

Pentru orice $d \mid n$, fie M_d mulţimea numerelor $k \in \{1, \ldots, n\}$ pentru care $(k, n) = d$. Se observă că mulţimile M_d, luate după toţi divizorii lui n formează o partiţie a mulţimii $\{1, \ldots, n\}$. Pe de altă parte, dacă $k \in M_d$, atunci $k = d \cdot l$ unde $l \leqslant n/d$ şi $(l, n/d) = 1$, aşa că $|M_d| = \varphi(n/d)$. Prin urmare, obţinem

$$n = \sum_{d|n} |M_d| = \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

Aplicând inversiune Möbius pe această identitate şi înlocuind in ecuaţia (2), obţinem

$$\begin{aligned}\Phi(N) &= \sum_{k=1}^{N} \varphi(k) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{d|k} \mu(d) \cdot \frac{k}{d} = \sum_{k=1}^{N} k \sum_{d|k} \frac{\mu(d)}{d} \\ &= \sum_{d=1}^{N} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{\substack{k=1 \\ d|k}}^{N} k = \sum_{d=1}^{N} \mu(d) \sum_{l=1}^{\lfloor N/d \rfloor} l = \frac{1}{2} \sum_{d=1}^{N} \mu(d) \left\lfloor \frac{N}{d} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{N}{d} \right\rfloor + 1 \right).\end{aligned} \tag{3}$$

Vrem să obţinem o margine inferioară pentru $\Phi(N)$. Folosind inegalitatea $x \geqslant \lfloor x \rfloor > x - 1$ şi faptul că funcţia μ ia doar valorile $0, \pm 1$ obţinem că

$$\mu(d) \left\lfloor \frac{N}{d} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{N}{d} \right\rfloor + 1 \right) \geqslant \mu(d) \left(\frac{N}{d}\right)^2 - \frac{N}{d},$$

iar substituind acest lucru in ecuaţia (3) reiese că

$$\Phi(N) \geqslant \frac{1}{2} \sum_{d=1}^{N} \left(\mu(d) \left(\frac{N}{d}\right)^2 - \frac{N}{d} \right) = \frac{N^2}{2} \sum_{d=1}^{N} \frac{\mu(d)}{d^2} - \frac{N}{2} \sum_{d=1}^{N} \frac{1}{d}. \tag{4}$$

Vom estima, pe rând, ambele sume din ecuaţia precedentă. Pentru prima sumă, se observă că

$$\begin{aligned}\frac{N^2}{2} \sum_{d=1}^{N} \frac{\mu(d)}{d^2} &= \frac{N^2}{2} \left(\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} - \sum_{d>N} \frac{\mu(d)}{d^2} \right) \geqslant \frac{N^2}{2} \prod_{p \text{ prim}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) - \frac{N^2}{2} \sum_{d>N} \frac{1}{d^2} \\ &\geqslant \frac{N^2}{2} \prod_{p \text{ prim}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{2k}} \right)^{-1} - \frac{N^2}{2} \sum_{d>N} \frac{1}{d(d-1)} = \frac{N^2}{2\zeta(2)} - \frac{N}{2},\end{aligned} \tag{5}$$

unde $\zeta(2)$ este suma inverselor tuturor pătratelor perfecte naturale nenule. Pentru a estima a doua sumă, fie n numărul natural pentru care $2^n \leqslant N < 2^{n+1}$. Atunci, avem

$$\sum_{d=1}^{N} \frac{1}{d} \leqslant \sum_{d=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{d} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{d=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{d} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \sum_{d=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{2^k} = n+1 \leqslant \log_2 N + 1. \tag{6}$$

Folosind inegalităţile (5) şi (6) în ecuaţia (4), obţinem marginea inferioară

$$\Phi(N) \geqslant \frac{N^2}{2\zeta(2)} - \left(N + \frac{N \log_2 N}{2}\right).$$

Revenind la inegalitatea (1) şi utilizând marginea inferioară pe care am obţinut-o anterior, în urma rearanjării termenilor, este suficient să demonstrăm că pentru N destul de mare

$$N^2 \left(\frac{1}{\zeta(2)} - \frac{111}{200}\right) \geqslant N \log_2 N + N \cdot \frac{289}{200}.$$

Această inegalitate este adevărată pentru N destul de mare, dacă $1/\zeta(2) > 111/200$. Pentru a arăta acest lucru, se observă că

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{5}{4} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{7}{4},$$

aşa că $1/\zeta(2) > 4/7 > 111/200$, ceea ce trebuia demonstrat.

A (1p). interpretarea problemei în termeni de grafuri şi obţinerea inegalităţii (1)

B (1p). observarea faptului că $e_a = e_r$ şi obţinerea formulei (2)

C (1p). demonstrarea sau citarea identităţii $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

D (2p). aplicarea inversiunii Möbius pe identitatea de la punctul **C** şi obţinerea ecuaţiei (3)

E (2p). obţinerea inegalităţii (4)

F (2p). obţinerea inegalităţii (5)

G (1p). obţinerea inegalităţii (6)

H (1p). estimarea lui $\zeta(2)$ şi finalizarea problemei folosind marginea inferioara a lui $\Phi(n)$