Concursul Minţile Matematice
Ediţia I, 2023

Sâmbătă, 30 Septembrie

Problema 1 (4p)**.** Să se afle toate numerele naturale n care se pot scrie ca $d_1 + d_2 + d_3$ unde d_1, d_2 şi d_3 sunt divizori pozitivi distincţi ai lui n.

Problema 2 (5p)**.** Fie a, b, c numere întregi cu suma egală cu zero. Să se demonstreze că

$$ab^3 + bc^3 + ca^3 \leqslant 0.$$

Problema 3 (5p)**.** Fie ABC un triunghi oarecare. Se ştie că triunghiul determinat de mijloacele medianelor este echilateral. Să se demonstreze că şi triunghiul ABC este echilateral.

Problema 4 (6p)**.** Raţiu şi Horaţiu joacă un joc pe o tablă 100×100, care iniţial are toate celulele colorate cu alb, începând cu Raţiu. La o mutare, un jucător colorează cu negru o celulă albă. Dacă un jucător colorează cu negru o celulă care are o latură comună cu altă celulă neagră, acesta pierde. Să se determine cine are strategie de câştig.

Problema 5 (8p)**.** La o firmă de construcţii lucrează nişte muncitori, unii dintre care sunt duşmani. Aceştia vin la muncă cu 100 de autobuze, astfel încat nu există doi duşmani în acelaşi autobuz. Ajunşi pe şantier, şeful lor doreşte să îi împartă în brigăzi de măcar doi oameni, fără a include doi duşmani în aceeaşi brigadă. Să se demonstreze că există o împărţire în cel mult 100 de brigăzi, sau nu există nicio împărţire în brigăzi.

Problema 6 (9p)**.** Fie ABC un triunghi, cu $AB < AC$. Notăm cu O centrul cercului circumscris, cu I centrul cercului înscris şi cu I_A, I_B şi I_C centrele cercurilor exînscrise opuse vârfurilor A, B şi C, respectiv. Fie M mijlocul laturii BC şi H_1, H_2 ortocentrele triunghiurilor MII_A şi MI_BI_C. Să se arate că paralela la BC prin O trece prin mijlocul segmentului H_1H_2.

Problema 7 (9p)**.** Aflaţi dacă există un şir crescător de numere naturale nenule distincte astfel încât orice număr natural destul de mare poate fi scris în mod unic ca suma a doi termeni (posibil egali) ai şirului.

Problema 8 (11p)**.** Să se arate că dacă N este un număr natural destul de mare, atunci pentru orice permutare $\pi_1, \ldots, \pi_N$ a numerelor $1, \ldots, N$, măcar 11% dintre perechile i, j de numere de la 1 la N satisfac $(i, j) = 1 = (\pi_i, \pi_j)$.

Se notează cu (a, b) cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b.

Timpul alocat este de 4 ore
Se pot preda maxim 4 probleme