# 11 класс

*Первый день*

**11.1.** Среди чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2024}$ есть 1013 единиц и 1012 двоек. Может ли многочлен

$$P(x) = a_{2024}x^{2024} + a_{2023}x^{2023} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

иметь целый корень?

**11.2.** На стороне $AB$ треугольника $ABC$ ($AB > BC$) выбрана точка $E$ такая, что $AE = BC$. На продолжении луча $CE$ за точку $E$ нашлась точка $P$, для которой $\angle APC + \angle ABC = 180^\circ$. Точка $Q$ лежит на луче $AP$ так, что $AQ = CE$. Докажите, что прямые $EQ$ и $BC$ параллельны друг другу.

**11.3.** Найдите все тройки $(x, y, z)$ натуральных чисел такие, что

$$14 \cdot 2^x + 5^y = 3^z.$$

**11.4.** Каждая клетка таблицы $n \times n$ окрашена в один из двух цветов — чёрный или белый, причём левая верхняя и правая нижняя клетки белые. Таблицу назовём *хорошей*, если в ней существует путь, начинающийся в левой верхней клетке, идущий по белым клеточкам и заканчивающийся в правой нижней клетке, причём в этом пути каждая следующая клетка находится правее или ниже предыдущей и имеет с ней общую сторону.

Для каждого $n \geqslant 2$ определите чётность количества хороших таблиц.

# 11 класс

*Второй день*

**11.5.** На координатной плоскости нарисована парабола $y = x^2$, на правой ветви которой зафиксирована произвольная точка $L$, отличная от начала координат — точки $O$. Пары точек $A$ и $B$ выбираются на правой ветви параболы так, что прямая $OL$ является биссектрисой угла $AOB$, после чего проводится прямая $AB$. Докажите, что все получаемые таким образом прямые $AB$ проходят через одну и ту же точку.

**11.6.** Дана бумажная полоска $1 \times 2024$. Вася и Петя играют в игру, делая ходы по очереди. Начинает Петя. За один ход разрешается закрасить любую ещё не закрашенную клетку полоски в любой из двух цветов — красный или синий. Когда все клетки полоски закрашены, её разрезают на минимально возможное количество полосок так, чтобы все клетки каждой полоски были одного цвета. Какое максимальное количество таких полосок может гарантировать Вася вне зависимости от действий Пети?

**11.7.** На диаметре $AB$ окружности $\omega$ выбраны точки $P$ и $Q$ так, что $0 < AP < AQ < AB$. Через точки $P$ и $Q$ проведены две параллельные прямые $\ell_p$ и $\ell_q$ соответственно. Прямая $\ell_p$ пересекает окружность $\omega$ в точках $P_1$ и $P_2$, а прямая $\ell_q$ пересекает окружность $\omega$ в точках $Q_1$ и $Q_2$, точки $P_1$ и $Q_1$ лежат в одной полуплоскости относительно прямой $AB$. Прямые $AQ_1$ и $P_1B$ пересекаются в точке $R_1$, а прямые $AQ_2$ и $P_2B$ пересекаются в точке $R_2$. Докажите, что середины отрезков $P_1P_2$, $Q_1Q_2$ и $R_1R_2$ лежат на одной прямой.

**11.8.** Найдите все функции $f$, определённые на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения, такие, что для любых действительных чисел $x$ и $y$ верно равенство

$$f(x+y) + f(f(x) + f(y) - y) = f(x) + f(y).$$