# 10 класс

*Первый день*

**10.1.** Дана окружность $\omega$ с центром $O$ и точка $P$ вне её. На окружности отмечена точка $B$, причем $O$, $B$ и $P$ не лежат на одной прямой. Пусть $C$ — середина $OB$. Около треугольника $PBC$ построена описанная окружность. Докажите, что независимо от выбора точки $B$ все эти окружности проходят через одну точку, отличную от $P$.

**10.2.** На левой ветви гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$ отмечены точки $A$ и $B$, а на правой ветви — точки $C$ и $D$. Оказалось, что прямые $AB$ и $CD$ параллельны. Пусть $E$ — точка пересечения прямых $AC$ и $BD$; точка $O$ — начало координат. Докажите, что у прямых $OE$ и $AB$ коэффициенты наклона равны по модулю, но противоположны по знаку.

**10.3.** Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел $n$ таких, что

$$n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2022}, \quad n = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_{2022},$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_{2022}$ — некоторые натуральные попарно взаимно простые числа и $b_1, b_2, \ldots, b_{2022}$ — некоторые натуральные попарно взаимно простые числа, причем

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_{2022}, \quad b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_{2022}, \quad a_1 > b_1$$

и

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2022} = b_1 + b_2 + \ldots + b_{2022}.$$

**10.4.** Найдите все функции $g$, определенные на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения, для которых равенство

$$g(x + xy) + g(y) = g(x + y) + 2yg(x) + g(xy)$$

выполняется для всех действительных значений $x$ и $y$.

# 10 класс

*Второй день*

**10.5.** На доске написано число

$$1234567891234567891234567$$

Двое по очереди вычеркивают цифры. Проигрывает тот, после чьего хода либо не осталось цифр, либо число, образованное ими, делится на 3. Кто выиграет (начинающий или второй игрок) независимо от игры соперника?

**10.6.** Известно, что положительные действительные числа $x$, $y$ и $z$ удовлетворяют равенству

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1.$$

Докажите неравенство

$$xyz+x^2+y^2+z^2 \geq 6(x+y+z).$$

**10.7.** Найдите все пары целых чисел $(x, y)$, удовлетворяющих равенству

$$x(x^3-y)=y^2(y+1)^2.$$

**10.8.** Окружность $\omega$ с центром $I$ вписана в треугольник $ABC$ и касается его сторон $BC$, $AC$ и $AB$ в точках $D$, $E$ и $F$ соответственно. Прямая $DI$ повторно пересекает $\omega$ в точке $G$, а прямая $AG$ повторно пересекает $\omega$ в точке $H$. Пусть $P$ — точка пересечения прямой $EF$ и описанной окружности треугольника $GIH$, лежащая вне $\omega$. Докажите, что $PH$ касается $\omega$.