

11 класс

Первый день

- 11.1. На отрицательной ветви гиперболы $y = \frac{1}{x}$ отмечена точка A , а на положительной ветви этой гиперболы – точки B и C так, что угол ACB треугольника ABC прямой, а начало координат – точка O – принадлежит катету AC . Найдите длину гипотенузы AB этого треугольника, если его площадь равна $8\sqrt{3}$.
- 11.2. Натуральное число N назовём *хорошим*, если для него найдутся хотя бы четыре различные пары натуральных чисел (x, y) , удовлетворяющих равенству

$$15x + 200y = N.$$

Найдите наименьшее хорошее число.

- 11.3. В треугольнике ABC угол при вершине B равен 65° . Продолжение высоты, проведённой из вершины A , пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке A_1 , отличной от точки A . Продолжение биссектрисы, проведённой из вершины C , пересекает эту же окружность в точке C_1 , отличной от точки C . Укажите все возможные значения величины угла ACB , если $AA_1 = CC_1$.
- 11.4. Клетки прямоугольной таблицы 5×6 раскрашены в шахматном порядке в чёрный и белый цвета. Во всех точках, являющихся вершинами клеток (всего 42 точки), расставлены числа 0 или 1 так, что сумма четырёх чисел в вершинах любой чёрной клетки чётная, а сумма чисел в вершинах любой белой клетки нечётная. Найдите все возможные значения, которые может принимать сумма чисел в четырёх вершинах данной прямоугольной таблицы.

11 класс

Второй день

- 11.5. Пусть x_1, x_2 — корни квадратного трёхчлена $f(x) = x^2 - 2x - 1$, а x_3, x_4 — корни квадратного трёхчлена $g(x) = x^2 - 3x - 1$. Найдите все возможные значения выражения

$$(g(x_1))^3 f(x_3) + (g(x_2))^3 f(x_4).$$

- 11.6. Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке C . Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности в точке L . Отрезки AC и BC пересекают меньшую окружность в точках A_1 и B_1 соответственно. Найдите площадь треугольника ABC , если $AL = 7$, $BL = 5$, $A_1B_1 = 9$.

- 11.7. Найдите все функции f , определённые на множестве всех положительных действительных чисел и принимающие значения в множестве неотрицательных действительных чисел, такие, что для всех положительных действительных x и y выполняется равенство

$$f(x + f(y)) = xf(y).$$

- 11.8. Даны пять попарно различных натуральных чисел. Известно, что какие-то четыре из десяти сумм этих чисел по три равны 20, 30, 40 и 50. Найдите, какое

а) наименьшее,

б) наибольшее

значение может принимать сумма этих пяти чисел.