

8 класс

Первый день

8.1. Докажите, что для любого целого положительного n уравнения вида

$$x^2 - \text{НОД}(n, 7272) \cdot \text{НОК}(n, 7272) \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{7272} \right) x + 7272n = 0$$

имеют хотя бы один общий корень.

8.2. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что

$$n = a_1 + a_2 + \dots + a_{2022}, \quad n = b_1 + b_2 + \dots + b_{2022},$$

для некоторых натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2022}$ и $b_1, b_2, \dots, b_{2022}$, причём

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{2022}, \quad b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_{2022}, \quad a_1 > b_1$$

и

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{2022} = b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_{2022}.$$

8.3. В трапеции $ABCD$ длина основания BC в два раза больше длины основания AD . Точка N делит отрезок BC в отношении $3 : 1$, считая от точки B , а точка M — середина отрезка DN . Найдите все возможные значения отношения $\frac{S_{ABND}}{S_{AMC}}$.

8.4. Дана квадратная таблица, в каждой клетке которой записано целое число. Влад и Никита играют в игру, делая ходы поочередно. Первым ходит Никита. За один ход он выбирает столбец таблицы и поэлементно прибавляет к нему или вычитает из него любой другой столбец таблицы. Влад за один ход проделывает аналогичную операцию, только со строками. Влад выиграет, если после очередного хода кого-либо из игроков в таблице окажется строка или столбец, состоящий из нулей. Может ли Влад добиться победы независимо от игры Никиты? Если да, то как он должен играть, если исходная таблица имеет вид:

а)

1	3
2	4

б)

7	3
2	6

8 класс

Второй день

8.5. На доске написано число 98765432. Двое по очереди вычеркивают цифры. Проигрывает тот, после чьего хода либо не осталось цифр, либо число, образованное ими, делится на 3. Кто выиграет (начинающий или второй игрок) независимо от игры соперника?

8.6. Пусть

$$A + 3x + 3y + xy = 3 + x^2 + 2x^2y + y^2 + 2xy^2 + x^2y^2,$$

где x , y и A — действительные числа. Найдите наименьшее значение, которое может принимать число A .

8.7. Произведение трех натуральных чисел является кубом некоторого натурального числа, а попарные разности этих трех чисел равны 3, 4 и 7. Найдите все возможные значения, которые может принимать наименьшее из этих чисел.

8.8. На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ выбрана точка E так, что $AE = BD$, а на отрезке CE выбрана точка F так, что $\angle BFD = 90^\circ$. Найдите все возможные значения отношения $CE : CF$.