

9 класс

Первый день

- 9.1. Элементы двух последовательностей неотрицательных вещественных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ и $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ удовлетворяют неравенствам

$$a_1 \leq 1, \quad a_2 \leq 1 + a_1 b_1, \quad \dots, \quad a_{n+1} \leq 1 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n, \quad \dots \text{ и т.д.}$$

Докажите, что для любого натурального числа n верно неравенство

$$a_{n+1} \leq (1 + b_1)(1 + b_2) \dots (1 + b_n).$$

- 9.2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC биссектрисы углов A и C пересекаются в точке E , а биссектрисы углов B и D пересекаются в точке F . Докажите, что точки A, F, E и D лежат на одной окружности.

- 9.3. Найдите все натуральные числа x, y и простые числа p , удовлетворяющие уравнению

$$x^y \cdot y^p = p^x$$

- 9.4. В городе P чемпионат по теннису проходит по своеобразной олимпийской системе. В каждом туре участники делятся на пары и играют на выбывание: победитель проходит в следующий тур, а проигравший выбывает из турнира. Если количество участников тура нечётно, то, ещё до разбиения на пары, жюри случайным образом выбирает счастливчика, который проходит в следующий тур без игры. В 2020 году двое участников, прошедших во второй тур, снялись с чемпионата из-за травм, а игрок, прошедший в третий тур, был отстранён допинговой комиссией. Далее эти игроки в чемпионате не участвовали и никем не были заменены. Всего было сыграно 195 игр, после чего остался только один участник — победитель турнира. Найдите все возможные значения количества участников чемпионата.

9 класс

Второй день

- 9.5. Существует ли функция $f(x)$, определённая на множестве всех вещественных чисел и принимающая вещественные значения такая, что для всех $x, y \in \mathbb{R}$ верно неравенство

$$f(x + y) \geq \frac{1}{2}f(x) + |y|?$$

- 9.6. Даны 10 составных натуральных чисел, любые два из которых взаимно просты. Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из них.
- 9.7. На окружности в указанном порядке отмечены точки A, B, C, D, E и F , при этом точки B и E — середины дуг AC и DF соответственно. Отрезки AE и FB пересекаются в точке K , а CE и DB — в точке L . Докажите, что

$$S_{AKB} \cdot S_{DLE} = S_{FKE} \cdot S_{CLB},$$

где через S_{XYZ} обозначена площадь треугольника XYZ .

- 9.8. В стране 2020 городов, соединённых сетью дорог. Для каждого города рассмотрели все отличные от него города, в которые можно попасть из данного, перемещаясь по дорогам страны, и выписали на доску их количество. Докажите, что одно из чисел на доске повторяется не менее 45 раз.