11 класс

Первый день

11.1. В некоторых клетках шахматной доски стоит по одной фишке. В каждой клетке, в которой нет фишки, записано число, равное количеству фишек в соседних с ней клетках (клетки считаются соседними, если у них есть хотя бы одна общая вершина). Сколько существует расположений фишек, при которых сумма всех записанных чисел нечётна?

11.2. Через фиксированную точку C гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$ проводятся всевозможные окружности, пересекающие гиперболу ещё в трёх других точках, сумма абсцисс которых равна нулю. Докажите, что все такие окружности имеют помимо точки C ещё одну общую точку.

11.3. Найдите все натуральные числа n, при которых $3^{n+1} + 4^{n+1} + 5^{n+1}$ делится на $2^n + 3^n + 5^n$.

11.4. В треугольнике ABC высота AH повторно пересекает его описанную окружность Ω в точке E. Касательные, проведённые к Ω через точки B и C, пересекаются в точке D и пересекают касательную, проведённую к Ω через точку E, в точках X и Y. Точка O — центр окружности Ω. Докажите, что проекция точки D на прямую OH лежит на описанной окружности треугольника DXY.

11 класс

Второй день

11.5. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BD$ и $\angle CDA = 90^\circ$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке E, а точка M выбрана на стороне AB так, что $AM = 2BM$. Докажите, что прямые AD, BC и ME пересекаются в одной точке.

11.6. Про множество H, состоящее из хотя бы двух натуральных чисел, известно, что в нём нет чисел с разностью 1 и что наибольший общий делитель всех чисел множества H равен 1. Докажите, что в H существуют различные элементы n и m такие, что ни один простой делитель числа $|n-m|$ не принадлежит H.

11.7. Найдите все действительные числа α, для которых существует непостоянная ограниченная функция f, определённая на множестве действительных чисел и принимающая действительные значения, такая, что при всех действительных значениях аргумента x верно равенство

$$f(x-1)+f(x+1)=\alpha f(x).$$

11.8. На плоскости даны $n \geqslant 3$ точек, все попарные расстояния между которыми не больше 1. Настя записала в каждую точку одно положительное действительное число таким образом, что расстояние между любыми двумя точками не меньше суммы чисел, записанных в этих точках. Докажите, что сумма записанных Настей чисел меньше $1{,}5\sqrt{n}$.