9 класс

Первый день

9.1. Обозначим через $\overline{ab}$ двузначное число, составленное из цифр a, b. Найдите всевозможные числа $\overline{ab}$ такие, что

$$\overline{ab} \cdot \overline{ba} = a^3 + (a+b)^3$$

9.2. На стороне AC треугольника ABC взяты точки X_1, X_2, X_3, X_4, через которые проведены прямые параллельные сторонам CB и AB соответственно. Первые четыре из этих прямых пересекают сторону AB в точках A_1, A_2, A_3, A_4 (при этом получаются отрезки X_1A_1, X_2A_2, X_3A_3, X_4A_4), а остальные пересекают сторону CB в точках C_1, C_2, C_3, C_4 (при этом получаются отрезки X_1C_1, X_2C_2, X_3C_3, X_4C_4). Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что площади треугольников, получающихся при пересечении сторон AB, BC и названных отрезков равны соответственно S_1, S_2, S_3, S_4, S_5.

9.3. Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение

$$x + 2y + 2z + 4t = 20$$

9.4. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист. Весь путь разбит на пять участков. Известно, что длина второго в 8 раз больше длины четвертого. Определите среднюю скорость движения велосипедиста на всем пути, если известно, что она равна скорости движения на нечетных участках, на 4 км меньше скорости движения на втором участке и на 26 км больше половины скорости движения на четвертом участке.

9 класс

Второй день

9.5. Положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таковы, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. Докажите, что

$$\frac{x_1^2}{2x_1 + 3x_2} + \frac{x_2^2}{2x_2 + 3x_3} + \ldots + \frac{x_n^2}{2x_n + 3x_1} > \frac{1}{12}.$$

9.6. Пусть на плоскости даны 50 различных точек с целыми координатами. Докажите, что существует отрезок, соединяющий какие-то две данные точки, и на котором лежит не менее семи точек с целыми координатами (с учетом концевых точек; при этом все эти семь точек не обязательно входят в число заданных).

9.7. На сторонах AB и AC равностороннего треугольника ABC взяты точки E и D соответственно так, что $AD : DC = BE : EA = 1 : 2$. Пусть F — точка пересечения отрезков BD и CF. Докажите, что прямые AF и CE пересекаются под прямым углом.

9.8. Про высший совет магов известно два факта:

1) каждый член высшего совета дружит ровно с десятью другими членами высшего совета;
2) для любых десяти членов высшего совета найдется 11-тый, который дружит с каждым из этих десяти.

Какое максимальное число магов может быть в высшем совете магов?