

11 класс

Первый день

11.1. Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение

$$x + 3y + 3z + 9w = 45$$

11.2. Найдите функции $f(x)$ и $g(x)$, удовлетворяющие системе уравнений:

$$\begin{cases} f(2x + 2) + 2g(4x + 7) = x - 1, \\ f(x - 1) + g(2x + 1) = 2x. \end{cases}$$

11.3. Дан острый угол и точка K внутри него. Постройте прямую, проходящую через точку K и отсекающую от угла треугольник наименьшей площади.

11.4. Два бегуна стартуют из одной точки кольцевой дорожки стадиона, третий бегун стартует одновременно с ними в том же направлении из диаметрально противоположной точки. Пробежав три круга, третий бегун впервые после старта догнал второго. Через 2,5 мин после этого первый бегун впервые догнал третьего. Сколько кругов в минуту пробегает второй бегун, если первый обгоняет его один раз каждые 6 мин?

11 класс

Второй день

- 11.5.** Докажите, что при всех неотрицательных действительных значениях a, b, c выполняется неравенство:

$$64a^3 + 343b^3 + 729c^3 \geq 48a^2\sqrt{7bc} + 294b^2\sqrt{ac} + 162c^2\sqrt{7ab}.$$

- 11.6.** Пусть a_1, a_2, b_1, b_2 — действительные числа, которые удовлетворяют соотношению $a_1a_2 = 2(b_1 + b_2)$. Докажите, что уравнение

$$x^4 + (a_1 + a_2)x^3 + (a_1a_2 + b_1 + b_2)x^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)x + b_1b_2 = 0$$

имеет по крайней мере один действительный корень.

- 11.7.** Четыре окружности B_1, B_2, B_3, B_4 расположены в одной плоскости так, что окружность B_2 касается окружности B_1 , окружность B_3 касается окружности B_2 , окружность B_4 касается окружности B_3 , окружность B_1 касается окружности B_4 . Все окружности касаются друг друга внешним образом. Докажите, что все четыре точки касания лежат на одной окружности.

- 11.8.** Про высший совет магов известно два факта:

- 1) каждый член высшего совета дружит ровно с n другими членами высшего совета;
- 2) для любых n членов высшего совета найдется $(n + 1)$ -й, который дружит с каждым из этих n .

Какое максимальное число магов может быть в высшем совете магов?