11 класс

Первый день

11.1. Дана окружность ω с центром O и точка P вне её. На окружности отмечена точка B, причем O, B и P не лежат на одной прямой. На радиусе OB отмечена точка C так, что $OC : CB = 2 : 3$. Около треугольника PBC построена описанная окружность. Докажите, что независимо от выбора точки B все эти окружности проходят через одну точку, отличную от P.

11.2. На левой ветви гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$ отмечены точки A и B, а на правой ветви — точки C и D. Оказалось, что прямые AB и CD параллельны. Пусть E — точка пересечения прямых AC и BD, а F — точка пересечения прямых AD и BC. Докажите, что прямая EF проходит через начало координат.

11.3. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что

$$n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3, \quad n = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3,$$

для некоторых натуральных попарно взаимно простых чисел a_1, a_2, a_3 и натуральных попарно взаимно простых чисел b_1, b_2, b_3, причем

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3, \quad b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3, \quad a_1 > b_1$$

и

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3.$$

11.4. Найдите все функции f, определенные на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения, для которых равенство

$$f(x + xy) + 2xy + f(y) = f(x + y) + 2yf(x) + f(xy)$$

выполняется для всех действительных значений x и y.

11 класс

Второй день

11.5. На доске написано число

$$2345678912345678912345678912345678 9$$

Двое по очереди вычеркивают цифры. Проигрывает тот, после чьего хода либо не осталось цифр, либо число, образованное ими, делится на 3. Кто выиграет (начинающий или второй игрок) независимо от игры соперника?

11.6. Найдите наибольшее действительное число K такое, что для любой тройки (x, y, z) положительных действительных чисел, удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

выполняется неравенство

$$xyz + x^2 + y^2 + z^2 \geq K(x + y + z),$$

11.7. Найдите все пары целых чисел (x, z), удовлетворяющих равенству

$$x(x^3 - z + 1) = z^2(z - 1)^2.$$

11.8. Окружность ω с центром I вписана в треугольник ABC и касается его сторон BC, AC и AB в точках D, E и F соответственно. Прямая DI повторно пересекает ω в точке G, а прямая AG повторно пересекает ω в точке H. Пусть P — точка пересечения прямой EF и описанной окружности треугольника GIH, лежащая вне ω. Докажите, что прямая PH проходит через середину стороны BC.