

10 класс

Первый день

10.1. Действительные числа a , b и c удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} (a+b)(b+c) = c-a-1, \\ (a+b)(a+c) = b-c-1. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения величины $(a+c)(b+c)$.

10.2. Решите в натуральных числах k , l , m и n уравнение

$$17(klmn + kl + mn + kn + 1) = 54(lmn + l + n)$$

10.3. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность.

Известно, что $AB = 6$, $BC = BD = 8$ и BD – биссектриса угла ABC .

Найдите длину диагонали AC .

10.4. На острове жили N человек (лжецов и правдивых). Не менее половины островитян по очереди уехали с острова. Каждый из них, покидая остров, заявил: «На острове лжецов осталось больше, чем правдивых». Сколько лжецов могло быть на острове первоначально?

10 класс

Второй день

- 10.5.** Последовательность (a_n) чисел определяется по правилам: $a_1 = 2$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_4 = 8$, а каждое следующее число равно сумме всех предыдущих чисел, имеющих номера отличной от его чётности. (В частности, первые семь членов равны: 2, 0, 1, 8, 8, 11, 19.) Докажите, что в полученной последовательности каждое число, начиная с седьмого, равно сумме двух предыдущих.
- 10.6.** В параболу $y = x^2$ вписан четырёхугольник $ABCD$, у которого $AB = AD$, $BC = CD$. При этом точка A лежит на левой ветви параболы, а точки B , C , D — на правой ветви. Числа a , b , c , d — абсциссы точек A , B , C , D соответственно. Докажите, что $b^2 + d^2 + 2ac = -1$.
- 10.7.** Вне квадрата $ABCD$ выбрана точка E так, что лучи EA и EB пересекают прямую CD в точках F и G соответственно и порядок следования точек на прямой: G , C , D , F . В треугольники ADF и BCG вписаны по квадрату так, что у каждого из квадратов две стороны лежат на катетах и одна вершина — на гипотенузе соответствующего треугольника. Докажите, что сумма длин сторон вписанных квадратов равна длине стороны квадрата $ABCD$ тогда и только тогда, когда угол AEB прямой.
- 10.8.** Дан правильный шестиугольник со стороной n , все его стороны разбиты на n единичных отрезков. Через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам шестиугольника, в результате чего данный шестиугольник разбился на равносторонние треугольники со стороной 1 (единичные треугольники). Все единичные отрезки полученной треугольной сетки покрашены в три цвета, один из которых синий, так, что у каждого единичного треугольника все три стороны имеют разные цвета. Определите, какое наименьшее и какое наибольшее число единичных отрезков синего цвета может быть в такой раскраске.