8 класс

Первый день

8.1. В озере рыболовецкого хозяйства живут караси, карпы и одна прожорливая щука, других рыб в озере нет. Сегодня средний вес карпа в 4 раза больше среднего веса карася в озере, а средний вес всей рыбы в озере, не считая щуки, в 2 раза меньше среднего веса карпа. Каждый день щука съедает не меньше одной, но не больше четырёх рыб. Оказалось, что в какой-то из дней, вчера или сегодня, в озере оказалось ровно 2018 рыб, не считая щуки. Сколько рыб съела щука в ночь со вчера на сегодня?

8.2. Найдите все возможные пары натуральных чисел a и b, для которых дробь

$$\frac{a^2+a+1}{ab-1}$$

также является натуральным числом.

8.3. Диагонали AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите значение отношения $\dfrac{OA}{OC}$, если известно, что $AB = BC$ и $AD = DO = OB$.

8.4. Множество A состоит из 8 элементов. Подмножество этого множества назовем *небольшим*, если оно содержит не более половины элементов исходного множества A. Какое наименьшее количество *небольших* подмножеств можно отметить так, чтобы для любой пары элементов из множества A нашлось отмеченное подмножество, содержащее оба элемента из этой пары?

8 класс

Второй день

8.5. Дан квадратный трехчлен x^2-px+q с натуральными коэффициентами p и q. Компьютерная программа может выполнять только одно действие: выбрать произвольный натуральный корень a введённого трехчлена и подставить его вместо q. Если у нового полученного трёхчлена натуральных корней нет, то программа завершает работу. Докажите, что, если для некоторого трехчлена $x^2 - px + q$ программа может выполнить любое количество действий, то q делится на $p-1$.

8.6. Решите уравнение $p^8 + p^5 + 1 = q^2$ в простых числах p и q.

8.7. На сторонах AC и BC треугольника ABC отмечены точки K и N соответственно. Отрезки AN и BK пересекаются в точке M. Найдите длину отрезка AB, если $AM = MN = 4$, $KB = KC = 6$, $AK = 3$.

8.8. В каждой клетке квадратной доски $n \times n$ стоит по одной фишке. За один ход можно выбрать две фишки, стоящие в различных клетках, и переместить их либо в соседние клетки справа, либо в соседние клетки снизу. Доказать, что доску фишки не могут. При каких натуральных $n \geqslant 2$ за несколько ходов можно переместить все фишки в правый нижний угол доски, если на каждом ходу фишки перемещаются:

а) в одинаковом направлении;

б) всегда в разном направлении?