11 класс

1. Решите уравнение в натуральных числах

$$n! = 630 \cdot n^2$$

2. Известно, что в треугольнике ABC $\angle BAC = 60^\circ$, K — точка пересечения медианы CM и высоты BN, а отрезки $CK = 6$ см и $KM = 1$ см. Найдите углы этого треугольника.

3. Действительные неотрицательные числа a, b, c таковы, что

$$a \leqslant b \leqslant c \quad \text{и} \quad abc(a+b+c)^3 = (ab+bc+ac)^3$$

Укажите все возможные значения, которые может принимать выражение $b^2 - ac$.

4. В прямоугольном треугольнике ABC, гипотенуза AB которого равна 2, проведены медианы AM и BN. Известно, что около четырёхугольника $ABMN$ можно описать окружность. Найдите её радиус.

5. Докажите, что

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}} > 24.$$

6. В командном турнире по шахматам приняли участие три команды A, B, C, каждая из которых состояла из трёх шахматистов. Каждые две команды провели ровно один матч между собой, причём в матче любых двух команд любой шахматист одной команды сыграл ровно по одной партии с каждым шахматистом из другой команды (так, что в одном матче каждый из шахматистов сыграл ровно три партии). В матче двух команд победителем считалась команда, выигравшая большинство из девяти партий между ними.

Могло ли оказаться, что в этом турнире команда A выиграла у команды B, команда B — у команды C, а команда C — у команды A? (Все девять шахматистов имеют разную силу и в партии двух шахматистов всегда побеждает сильнейший).