9 класс

Первый день

9.1. Для натурального числа n через $d(n)$ обозначим количество всех различных натуральных делителей числа n (включая 1 и n). Найдите все натуральные числа n, для которых выполняется равенство

$$d(n) + d(8n + 1) = 5$$

9.2. Даны n натуральных чисел. Из них составляли все попарные суммы. Среди полученных сумм x оказались чётными и y нечётными.

Докажите, что $x + \frac{n}{2} \geqslant y$.

9.3. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) точки K и L – точки касания вписанной в него окружности со сторонами AC и AB соответственно. На прямую KL из точек C и B опущены перпендикуляры CM и BN. Найдите отношения сторон треугольника ABC, если $MK + LN = KL$.

9.4. На стене в ряд висят n лампочек, вначале они все выключены. Возле каждой лампочки есть два переключателя: верхний и нижний. При нажатии на верхний переключатель переключается эта лампочка и все, расположенные правее неё, а при нажатии на нижний переключается эта лампочка и все, расположенные левее нее. Маша и Сережа играют в игру: они по очереди выбирают переключатель и нажимают на него; проигрывает тот, после хода которого состояние лампочек повторится, т.е. станет таким, каким оно уже когда-либо было до этого (включая и начальное состояние лампочек). Кто выиграет при правильной игре, если Маша начинает первой, но она может нажимать только на верхние переключатели, а Сережа на любые?

9 класс

Второй день

9.5. На параболе $y = x^2$ выбирается произвольная точка A, отличная от точки O — вершины параболы, и отмечается точка B — проекция точки A на ось абсцисс. Через точку B проводится прямая ℓ_A перпендикулярная прямой OA. Докажите, что все такие прямые ℓ_A пересекаются в одной точке.

9.6. Пусть $S(a)$ обозначает сумму цифр в десятичной записи числа a. Найдите все натуральные числа n, для которых выполняется равенство

$$n + 2 \cdot S(n) + 3 \cdot S(S(n)) + 4 \cdot S(S(S(n))) = 2017.$$

9.7. Квадратные трехчлены $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ удовлетворяют равенствами:

$$f(1) = g(2) = h(3), \quad f(2) = g(3) = h(1), \quad f(3) = g(1) = h(2).$$

Докажите, что многочлен $f(x) + g(x) + h(x)$ является константой.

9.8. Какое наибольшее число прямоугольников 1×9 можно вырезать из прямоугольной таблицы 94×104? (Разрезы должны проходить по границам клеток таблицы).