

8 класс

Первый день

- 8.1. Найдите все двухзначные числа, которые не делятся на 10 и обладают следующим свойством: произведение этого числа и числа, полученного из него перестановкой цифр, равно квадрату натурального числа.
- 8.2. На 128 карточках записаны по разу все последовательности длины 7, составленные только из нулей и единиц, каждая последовательность — на своей карточке. Две карточки назовём *похожими*, если последовательности, записанные на них, различаются ровно в трёх позициях. Какое наибольшее количество карточек можно выбрать так, чтобы среди них не нашлось двух похожих?
- 8.3. Два квадратных трёхчлена $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что

$$f(3) + g(1) = 0, \quad f(5) + g(2) = 3 \quad \text{и} \quad f(7) + g(3) = 8$$

Найдите все возможные значения суммы $f(91) + g(45)$.

- 8.4. На плоскости нарисованы квадрат $ABCD$ с центром O и равносторонний треугольник ABK , причём точка K лежит внутри квадрата. На прямой CK отметили точку $L \neq K$ такую, что $OK = OL$. Точка M — середина отрезка CD . Докажите, что отрезок KD вдвое длиннее отрезка LM .

8 класс

Второй день

- 8.5. Даша и Максим вместе копят с нуля на новый компьютер. Для этого они устроились на работу и откладывают все заработанные деньги. Они уже проработали один месяц, но денег ещё недостаточно. Известно, что, если Максиму в следующем месяце увеличат зарплату в 2 раза, а Даше — нет, то по окончании второго месяца они смогут купить компьютер, но на два им не хватит. А если Даше в следующем месяце увеличат зарплату в 7 раз, а Максиму — нет, то по окончании второго месяца они смогут купить 2 таких компьютера, но на третий им не хватит. Сколько месяцев ушло бы у Даши, чтобы в одиночку накопить на такой компьютер?
- 8.6. Дан параллелограмм $ABCD$ и точка E вне его. Точки F и G таковы, что четырёхугольники $EBFA$ и $ECGD$ — параллелограммы. Прямые FA и GD пересекаются в точке P , а прямые FB и GC — в точке Q . Докажите, что $EP = EQ$.
- 8.7. Дана таблица $2 \times n$. Вначале Матвей заполняет клетки таблицы числами $1, 2, 3, \dots, 2n$, используя каждое число по одному разу. Потом Никита разбивает таблицу на доминошки: прямоугольники 1×2 и 2×1 . Никита хочет, чтобы у всех доминошек отличались суммы чисел, записанных в их клетки, а Матвей — чтобы какие-нибудь из этих сумм совпали. Для каждого $n \geq 4$ определите, кто из друзей может добиться желаемого вне зависимости от действий другого.
- 8.8. В каждую клетку таблицы 3×3 вписали по одному натуральному числу так, что все девять записанных чисел различны и любые два числа, записанные в клетках, имеющих общую сторону, не взаимно просты. Найдите наименьшее возможное произведение всех чисел в таблице.