9 класс

Первый день

9.1. На диаметре AB окружности ω отмечена точка C. На окружности ω выбраны точки D и E, лежащие в одной полуплоскости относительно прямой AB так, что $\angle ACD = \angle BCE = 60^\circ$, $CD = 3$ и $CE = 4$. Найдите расстояние от точки C до центра окружности ω.

9.2. Существует ли бесконечная последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ натуральных чисел такая, что все её элементы попарно различны и для каждого натурального числа n верно равенство

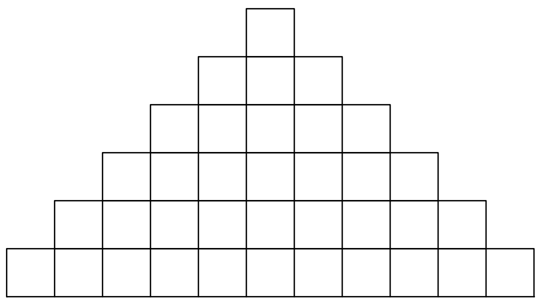
$$\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}} + \ldots + \frac{1}{a_{2n}}?$$

9.3. Найдите все тройки (a, b, c) попарно различных натуральных чисел, для которых числа $ab + 3$, $bc + 3$ и $ca + 3$ можно расставить в один ряд слева направо так, что первое число будет делиться на второе, а второе — на третье.

9.4. В каждую клетку фигуры, изображённой на рисунке, необходимо записать 0 либо 1.

а) Найдите количество способов сделать это так, чтобы сумма чисел в каждом вертикальном ряду была нечётной, а в каждом горизонтальном — чётной.

б) Найдите количество способов сделать это так, чтобы сумма чисел в каждом вертикальном ряду была чётной, а в каждом горизонтальном — нечётной.



9 класс

Второй день

9.5. Набор, состоящий из 27 гирек: по три массы 1 г, три массы 2 г, $\ldots$, три массы 9 г, разложили на 9 групп по три гирьки в каждой. При этом оказалось, что суммарные массы гирек в каждой из групп попарно различаются. Найдите все возможные значения суммарной массы средней (пятой) по величине группы.

9.6. Найдите все пары (n, k) натуральных чисел, для которых можно провести в окружности n синих и k белых хорд так, чтобы все синие хорды пересекали различные количества белых хорд, а все белые хорды пересекали различные количества синих хорд.

9.7. Треугольники ABC и DEF вписаны в окружность Ω и описаны около окружности ω так, что прямая AD проходит через центр ω. Докажите, что прямая, проходящая через точки касания окружности ω со сторонами BC и EF, параллельна прямой AD.

9.8. Непустое множество S натуральных чисел назовём *особым*, если для любого его элемента a множество S содержит различные числа b и c, отличные от a, такие, что $a = 2023 \cdot \text{НОД}(b, c) + 1$.

Существует ли особое множество, в котором количество элементов

а) конечно; **б)** бесконечно?