

10 класс

Первый день

- 10.1. Найдите все действительные значения x , удовлетворяющие равенству

$$\frac{\{x\}}{[x]} = \frac{\{2x\}}{[3x]}$$

(Здесь $[a]$ — целая часть числа a , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее a , а $\{a\}$ — дробная часть числа a , т.е. $\{a\} = a - [a]$.)

- 10.2. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла B на сторону AC опущена высота BD . На стороне AC точки M и N отмечены так, что BM и BN — биссектрисы углов ABD и CBD соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника MBN , пересекает стороны AB и BC в точках K и L соответственно. Найдите длину отрезка KL , если известно, что $AB = 6$ и $BC = 8$.
- 10.3. Известно, что коэффициенты a, b, c квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ удовлетворяют равенству $9a + b + 3c = 0$. Докажите, что у этого квадратного трёхчлена есть корень, принадлежащий отрезку $[-2; 2]$.
- 10.4. Бумажный треугольник прямолинейным разрезом разрезали на два многоугольника (получились либо два треугольника, либо треугольник и четырёхугольник). Затем один из двух получившихся многоугольников прямолинейным разрезом разрезали на два многоугольника. После этого снова один из имеющихся многоугольников прямолинейным разрезом разрезали на два многоугольника и т. д.: всякий раз один из имеющихся многоугольников прямолинейным разрезом разрезают на два многоугольника. Проведя указанную операцию несколько раз, в результате получили некоторое число многоугольников, про которые известно только то, что среди них имеется ровно шесть треугольников и хотя бы один пятиугольник. Какое наибольшее число шестиугольников могло при этом получиться?

10 класс

Второй день

- 10.5.** У Маши есть бесконечно много монет, причём для каждого натурального n у неё есть ровно по одной монете достоинством $\frac{1}{n}$ тугрика. Монет других достоинств у Маши нет. Каким наименьшим количеством монет Маша может оплатить (без сдачи) набор для шитья стоимостью $\frac{5}{7}$ тугрика?
- 10.6.** В клетки таблицы 3×3 вписаны не обязательно различные натуральные числа (в каждую клетку – одно число). Вася подсчитал суммы чисел во всех строчках таблицы и суммы чисел во всех её столбцах. Оказалось, что все шесть полученных им сумм являются попарно различными составными числами. Какое наименьшее значение может иметь сумма всех девяти чисел такой таблицы?
- 10.7.** Пусть $ABCD$ – выпуклый четырёхугольник. Описанная вокруг треугольника ABD окружность пересекает отрезки BC и CD в точках K и L соответственно. Описанная вокруг треугольника BCD окружность пересекает отрезки AB и AD в точках M и N соответственно. Описанные около треугольников MBK и NDL окружности пересекаются в точках E и F . Докажите, что точки E и F лежат на прямой AC .
- 10.8.** На прямой отмечено пять точек. Петя измерил все десять попарных расстояний между ними и записал их значения на листке бумаги в порядке неубывания (среди записанных им чисел могли быть и равные – если длины каких-то разных отрезков равны). С течением времени некоторые из записанных Петей чисел стёрлись, и на листке сохранились только четыре первых и последнее из записанных им чисел: 2, 4, 6, 8, ..., 21. Какое число записал Петя следующим после числа 8?