

10 класс

1. Даны три квадратных трёхчлена $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ с положительными старшими коэффициентами. Три действительных числа d_1, d_2, d_3 таковы, что каждое из уравнений $p_1(x) = d_1, p_2(x) = d_2, p_3(x) = d_3$ имеет действительное решение. Может ли оказаться, что при этом ни одно из уравнений $p_1(x) = d_2, p_2(x) = d_3, p_3(x) = d_1$ действительных решений не имеет?
2. Найдите все пары (a, b) натуральных чисел такие, что оба числа

$$\frac{a^2 + b + 1}{2a + 1} \quad \text{и} \quad \frac{b^2 + a + 1}{2b + 1}$$

являются натуральными.

3. Несколько пиратов делили добычу, состоящую из 1010 золотых монет. Сначала первый пират взял 1 монету, второй – 2 монеты, третий – 3 монеты и т.д., каждый раз следующий пират брал на одну монету больше, чем предыдущий. После того, как взял монеты последний пират, монеты брал снова первый пират, затем второй и т.д. по кругу. Когда очередному пирату не хватило монет, которые он должен был взять, он просто забрал все оставшиеся монеты и процесс закончился. В результате оказалось, что шестому пирату досталось столько же монет, как и первому. Сколько было пиратов?
4. На основании AB равнобедренного треугольника ABC отмечена точка D такая, что $AD = CD$. На отрезке CD выбрана точка E такая, что $\angle ADE = 2\angle AED$. Найдите длину отрезка AB , если известно, что $CE = 3$ и $ED = 1$.
5. На доске написаны числа $1, 2, \dots, 100$. Разрешается стереть с доски любые два числа x, y и написать число

$$\frac{(x + y)^2 - |x^2 - y^2|}{2} - x - y + 1$$

Найдите все возможные значения числа, которое останется на доске после 99 таких операций.