8 класс

Первый день

8.1. Для каждого натурального числа n через $d(n)$ обозначим количество всех его натуральных делителей, включая 1 и само число n.

Найдите все натуральные числа n такие, что $d(n) = d(n+72) = 3$.

8.2. Существуют ли положительные действительные числа a, b и c такие, что каждое из чисел $\sqrt{2ab}$, $\sqrt{2bc}$, $\sqrt{2ca}$ больше, чем $\dfrac{a+b+c}{2}$?

8.3. Площадь равностороннего треугольника ABC равна $3\sqrt{3}$. На сторонах AB и AC отмечены соответственно точки P и Q так, что выполняется равенство $\angle ABQ = \angle BCP$. Найдите расстояние от середины отрезка PQ до прямой BC.

8.4. По кругу выписаны различные действительные числа. Для каждого записанного числа x нашли количество чисел между x и ближайшим к нему по ходу часовой стрелки числом, не превосходящим x (так, например, для наименьшего выписанного числа найденное число равно $n-1$, а для максимального числа — нулю). Чему равно максимально возможное значение суммы всех найденных чисел?

8 класс

Второй день

8.5. Друзья решили наполнить два бассейна. Для этого они использовали 4 шланга: 2 шланга типа A с одним напором, и 2 шланга типа B — с другим. Ровно в 10 часов они опустили шланги типа A в первый бассейн, а шланги типа B — во второй и включили воду. Через некоторое время они заметили, что в первом бассейне в полтора раза больше воды, чем во втором, и перенесли один шланг из первого бассейна во второй. В 13 часов один из друзей обратил внимание, что теперь во втором бассейне в полтора раза больше воды, чем в первом. В какое время друзья переносили шланг во второй бассейн?

8.6. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ угол при вершине C равен сумме углов при вершинах A и E, $AB = CD$ и $BC = DE$. Точка M — середина стороны AE. Докажите, что угол BMD прямой.

8.7. Дано натуральное число $n > 1$. Пусть a — наименьший делитель числа n, больший 1, а b — наибольший делитель числа n, меньший n. Известно, что число $a^3 - a$ делится на b. Найдите все возможные значения n.

8.8. В каждую вершину куба записали некоторое натуральное число так, что есть ровно M рёбер, у которых суммы чисел, записанных в их концах, кратны трём. Можно ли утверждать, что обязательно найдётся грань, у которой сумма чисел, записанных в вершинах, кратна трём, если

а) $M = 6$? **б)** $M = 7$?