

10 класс

1. Вова, Толя, Боря и Лёня поехали на выходные к бабушке копать картошку. После работы каждый из них посчитал, сколько он выкопал картошки, и оказалось, что Вова выкопал на 124 кг меньше, чем $\frac{1}{8}$ часть от того, что выкопали все остальные; Толя выкопал на 123 кг больше, чем $\frac{1}{4}$ от того, что выкопали все остальные; У Бори получилось 248 кг плюс $\frac{1}{4}$ от того, что выкопали остальные ребята, и, наконец, у Лёни получилось 191 кг и половина картошки, которую выкопали остальные ребята. Сколько всего картошки выкопали ребята?
2. На доске написано 2018-значное число, состоящее из цифр 0, 1 и 2. Известно, что количество цифр 1 в этом числе совпадает с количеством цифр 2, а количество нулей - квадрат натурального числа. Может ли записанное число быть полным квадратом?
3. Для всех натуральных n функция f удовлетворяет условиям:

$$f(1) = 1, \quad f(2n + 1) = 2f(n), \quad f(2n) = 3f(n) + 2.$$

Для каких n значение $f(n)$ будет нечетным?

4. Дан треугольник ABC . На сторонах AB и BC взяты соответственно точки K и L , а на стороне AC — точки M и N так, что прямая KL параллельна AC , $AK = KM$, $NL = LC$. Докажите, что прямая AC перпендикулярна BP , где P — точка пересечения прямых KM и LN .
5. Пусть a — нечетное целое число, x и y — корни уравнения $t^2 + at - 1 = 0$. Докажите, что $x^4 + y^4$ и $x^5 + y^5$ — целые взаимно простые числа.