

9 класс

Первый день


9.1. На интеллектуальной викторине было предложено несколько лёгких, средних и трудных вопросов, всех трёх видов поровну. За правильный ответ на лёгкий вопрос участник получал 3 балла, на средний – 4 балла, а на трудный – 6 баллов. За неправильный ответ на лёгкий вопрос у участника вычиталось 3 балла, за неправильный ответ на средний вопрос вычиталось 2 балла, а за неправильный ответ на трудный вопрос баллы не вычитались. Вася правильно ответил более чем на половину вопросов и получил 30 баллов. На сколько всего вопросов Вася ответил правильно и сколько всего вопросов было предложено на викторине?

9.2. Для ненулевых чисел a , b и c выполняется равенство

$$3 \left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} \right) = 2 \left(\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab} \right) + 12.$$

Докажите, что какое-то из этих трёх чисел равно среднему арифметическому двух других.

9.3. В остроугольном треугольнике ABC центр описанной окружности, ортоцентр (точка пересечения высот), а также вершины A и B лежат на одной окружности. Найдите все возможные значения угла ACB .

9.4. У Васи есть набор плиток вида . С помощью этих плиток Вася замостил доску $n \times m$ (n и m – данные натуральные числа). В зависимости от расположения плиток в этом замощении все плитки разбились на четыре типа из восьми возможных, изображённые на рисунке ниже.



Может ли Вася, разложив эти же плитки на доске по-новому, снова замостить эту доску так, чтобы при этом ровно одна плитка поменяла свой тип на другой из указанных?

9 класс

Второй день

- 9.5. Ненулевые действительные числа a, b, c таковы, что квадратные трёхчлены

$$ax^2 + bx + c, \quad bx^2 + cx + a, \quad cx^2 + ax + b$$

не имеют действительных корней. Докажите, что $2ab + 2bc + 2ca > a^2 + b^2 + c^2$.

- 9.6. В треугольнике ABC ($AB < BC < AC$) на сторонах BC и AC отмечены соответственно точки M и N так, что $CM = AB$, $CN = CB$. Пусть S — площадь треугольника ABC , S_1 — площадь треугольника MNC , S_2 — площадь четырёхугольника $ABMN$. Определите все возможные значения, которые может принимать отношение $AC : AB$, если $S^2 \leq 4S_1S_2$.

- 9.7. Пусть M — точка пересечения диагоналей AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность. Известно, что

$$AM : MC = 3 : 1, \quad AC : BD = 2 : \sqrt{3}, \quad \angle BAC = \angle DAC.$$

Найдите все возможные значения угла BAD .

- 9.8. Даны четыре попарно различных натуральных числа. Известно, что какие-то три из шести попарных сумм этих чисел равны 11, 21 и 31. Найдите все значения, которые может принимать сумма всех четырёх этих чисел.