

11 класс

1. Дан остроугольный треугольник ABC . На меньшей дуге AC описанной окружности треугольника ABC отмечена точка M такая, что $2\angle CBM = \angle BAC$. Точка D отмечена на продолжении луча BC за точку C так, что $BD = \frac{BC \cdot BM}{CM}$. Найдите все возможные значения отношения $BM : MD$.
2. Числа $1, 2, \dots, 2025$ записали в некотором порядке по кругу. Для каждого записанного числа нашли модуль разности этого числа и полусуммы двух соседних с ним чисел. Могут ли все найденные числа равняться одному и тому же числу?
3. Галактика Альфамагентавра насчитывает 2024 планеты, между некоторыми из них установлены межпланетные перелёты. Каждый перелёт связывает две планеты и является двусторонним. Известно, что с любой планеты можно перелететь на любую другую, возможно, с пересадками. Космическим *маршрутом* называется любая последовательность различных планет, в которой каждая следующая соединена перелётом с предыдущей. Количество планет в маршруте — его *длина*. Исследователь Паца-Ваца определил для каждой планеты максимальную длину маршрута, который начинается в ней. Неожиданно для себя он обнаружил, что среди найденных им длин есть только две разные, причём каждая встретилась по 1012 раз.
Какое наименьшее число межпланетных перелётов может быть в Альфамагентавре?
4. Произведение всех натуральных делителей натурального числа n равно $n^2 - 14n$. Найдите все числа n , удовлетворяющие этому свойству.
5. Петя разбил числа $1, 2, \dots, 100$ на пары и вычислил все возможные произведения, состоящие из 50 множителей, всякий раз выбирая по одному множителю из каждой пары. Найдите наибольшее возможное значение суммы всех произведений, вычисленных Петей.