10 класс

Первый день

10.1. Найдите все пары натуральных чисел (a, b), для которых выполняется равенство

$$(3^a - 1)^b = 3^b + a! + 3,$$

где через $a!$ обозначено произведение всех натуральных чисел от 1 до a.

10.2. Пусть n — натуральное число. На доске записана дробь $\dfrac{1}{2^n - 1}$. За ход можно увеличить либо уменьшить числитель или знаменатель записанной на доске дроби ровно на 1 так, чтобы числитель и знаменатель полученной дроби остались натуральными числами. Если числитель и знаменатель полученной дроби не взаимно просты, то можно сократить их на любой общий делитель, не потратив при этом хода. Для каждого натурального n найдите наименьшее возможное количество ходов, за которое можно получить дробь, равную единице.

10.3. Каждой паре (x, y) целых чисел сопоставили некоторое целое число и обозначили его через $x \circ y$. При этом числа $x \circ y$ и $y \circ x$ могут быть различными. Оказалось, что для любых целых чисел a, b, c и d выполняется равенство

$$(a \circ b + d) \circ c = (a - b) \circ (c - d) + 1.$$

Найдите значение $2025 \circ 1991$.

10.4. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, BC и CA в точках C_1, A_1 и B_1, соответственно. Точки D и E — середины отрезков A_1B_1 и A_1C_1, соответственно. Прямые B_1E и C_1D пересекают вписанную окружность во второй раз в точках F и G, соответственно. Докажите, что точки B, F, G и C лежат на одной окружности.

10 класс

Второй день

10.5. В треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности, а M — середина стороны AC. На стороне BC отметили произвольную внутреннюю точку D. Прямая DM повторно пересекла описанную окружность треугольника ABD в точке N. Докажите, что угол ANO прямой.

10.6. Два квадратных трёхчлена $f(x)$ и $h(x)$ с целыми коэффициентами таковы, что

$$f(\sqrt{3}) = h(-\sqrt{3}) \quad \text{и} \quad f(2) - h(-2) = 44$$

Найдите все возможные значения разности $f(7) - h(-7)$.

10.7. Будем называть *левым сапогом высоты* n фигуру, получаемую присоединением квадрата 1×1 слева к нижней клеточке вертикального прямоугольника $n \times 1$. Аналогично определим *правый сапог высоты* n. *Лесенкой высоты* n будем называть фигуру, i-ая сверху строка которой состоит из i клеток, причём последние клетки всех строк образуют вертикальный прямоугольник $n \times 1$.

а) Найдите все такие n, что лесенку высоты n можно по сторонам клеток разрезать на сапоги (любых высот и видов).

б) Для всех таких n найдите наименьшее необходимое для разрезания число левых сапогов.

10.8. Дана бесконечная последовательность a_1, a_2, … натуральных чисел. Конечное множество $S = \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ натуральных чисел назовём *квадратным*, если число $a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots + a_{n_k}$ является полным квадратом.
Может ли оказаться так, что для данной последовательности $a_1, a_2, \ldots$

а) квадратных множеств нет?

б) множество является квадратным, если и только если оно имеет вид $\{1, 2, \ldots, n\}$ для некоторого натурального n?