

10 класс

Первый день

10.1. Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение

$$x + 3y + 9z = 900$$

10.2. Человек шел домой вверх по течению ручья со скоростью в 1,5 раза большей, чем скорость течения. В руках у него были шляпа и палка. Он бросил в ручей шляпу, перепутав её с палкой, и продолжал идти с той же скоростью некоторое время. Вскоре он заметил ошибку, швырнул в ручей палку и побежал назад со скоростью вдвое большей, чем шёл вперёд. Догнав плывущую шляпу, он мгновенно выудил её из воды, повернулся и пошёл вверх по течению с первоначальной скоростью. Через 10 мин человек встретил плывущую по ручью палку. На сколько минут раньше он пришёл бы домой, если бы не перепутал шляпу с палкой?

10.3. На стороне AC треугольника ABC взяты точки X_1, X_2, \dots, X_n , через которые проведены прямые параллельные сторонам CB и AB соответственно. Первые n из этих прямых пересекают сторону AB в точках A_1, A_2, \dots, A_n (при этом получаются отрезки $X_1A_1, X_2A_2, \dots, X_nA_n$), а остальные пересекают сторону CB в точках C_1, C_2, \dots, C_n (при этом получаются отрезки $X_1C_1, X_2C_2, \dots, X_nC_n$). Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что площади треугольников, получающихся при пересечении сторон AB, BC и названных отрезков равны соответственно $S_1, S_2, \dots, S_n, S_{n+1}$.

10.4. Найдите функции $f(x)$ и $g(x)$, удовлетворяющие системе уравнений:

$$\begin{cases} f(2x+1) + 2xg(2x+1) = 4x, \\ f\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right) + g\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right) = 2x-1. \end{cases}$$

10 класс

Второй день

10.5. Докажите, что при всех неотрицательных действительных значениях a, b, c выполняется неравенство:

$$a^3 + 64b^3 + 729c^3 \geq 6a^2\sqrt{bc} + 48b^2\sqrt{ac} + 162c^2\sqrt{ab}.$$

10.6. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что если

$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = p,$$

где a, b, c и d — различные целые числа, p — простое число, то многочлен $P(x)$ не имеет целых корней.

10.7. Пусть на плоскости даны 2023 различных точек с целыми координатами. Докажите, что существует отрезок, соединяющий какие-то две данные точки, и на котором лежит не менее 44 точек с целыми координатами (с учетом концевых точек; при этом все эти 44 точки не обязательно входят в число заданных).

10.8. Про высший совет магов известно два факта:

- 1) каждый член высшего совета дружит ровно с 2022 другими членами высшего совета;
- 2) для любых 2022 членов высшего совета найдется 2023-й, который дружит с каждым из этих 2022.

Какое максимальное число магов может быть в высшем совете магов?