11 класс

Первый день

11.1. Числа $1, 2, 4, \ldots, 2^{2019}$ разбили на пары. В каждой паре числа a, b заменили на $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$, после чего вычислили сумму полученных 2020 чисел. Найдите наибольшее возможное значение найденной суммы.

11.2. В вершинах $4n$-угольника в некотором порядке записаны числа. Среди них числа $1, 2, \ldots, n-1, n$ встречаются по три раза, а числа $n+1, n+2, \ldots, 2n$ — по одному разу. Для каждой стороны этого $4n$-угольника Петя вычислил сумму чисел, стоящих в концах этой стороны. Могли ли все вычисленные Петей числа оказаться различными?

11.3. На медианах AA_1 и BB_1 неравнобедренного треугольника ABC построили равнобедренные прямоугольные треугольники AA_1K и BB_1L таким образом, что вершины K и L прямых углов расположены в той же полуплоскости относительно соответствующих медиан, что и сторона AB. Точка H — основание высоты, проведённой из вершины C. Докажите, что отрезок KL перпендикулярен стороне AB тогда и только тогда, когда $AB = 2CH$.

11.4. Существует ли последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ натуральных чисел, в которой каждое натуральное число встречается ровно один раз и для любого натурального числа $n \geqslant 2$ произведение $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ первых n членов последовательности является n-й степенью натурального числа?

11 класс

Второй день

11.5. Даны 25 различных натуральных чисел, не превосходящих 50. Для каждой пары данных чисел выписали в тетрадку их наибольший общий делитель. Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из выписанных чисел.

11.6. Вписанная окружность тупоугольного треугольника ABC (с тупым углом при вершине A) касается его сторон AB, BC и AC в точках K, L и M соответственно. Прямая KL пересекает продолжение стороны AC за точку A в точке P. Прямая BM пересекает вписанную окружность второй раз в точке T. Отрезки AB и PT пересекаются в точке R. Найдите периметр треугольника APR, если $PM = 1$.

11.7. В стране 2020 городов, соединённых сетью дорог. Для каждого города рассмотрели все возможные круговые маршруты, которые начинаются и заканчиваются в нём, и выписали на доску наибольший общий делитель длин таких маршрутов (длина маршрута равна количеству дорог, из которых он состоит; маршрут может проходить через один и тот же город несколько раз; из каждого города выходит по крайней мере одна дорога). Докажите, что одно из чисел на доске повторяется не менее 45 раз.

11.8. Четыре (не обязательно различных) вещественных числа a, b, c, d удовлетворяют следующим трём условиям:

$$a+b+c+d=4, \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1 \quad \text{и} \quad abcd+16=ab+ac+ad+bc+bd+cd \geqslant 0$$

Докажите, что среди этих чисел есть равное 2.