9 класс

Первый день

9.1. Может ли сумма $(x+1)^2 + (x+2)^2 + \ldots + (x+9)^2$ быть кубом натурального числа при некотором натуральном x?

9.2. На плоскости нарисованы два многоугольника $A_1A_2\ldots A_{2025}$ и $B_1B_2\ldots B_{2025}$ без общих вершин. Помимо отрезков, которые являются сторонами многоугольников, провели ещё 2025 отрезков: A_1B_1, A_2B_2, $\ldots$, $A_{2025}B_{2025}$. Раскраска всех вершин двух многоугольников в чёрный или белый цвета называется *хорошей*, если для каждой вершины в чёрный цвет покрашено нечётное количество вершин, с которыми она соединена отрезком. Найдите количество всех хороших раскрасок.

9.3. Даны действительные числа x и y такие, что

$$x^2 + xy + y^2 \geqslant x^3 + y^3$$

Какое наибольшее значение может принимать сумма $x + y$?

9.4. На плоскости нарисована окружность Ω единичного радиуса. Два мальчика: Ма и Гео играют в игру. Вначале Ма отмечает произвольную точку X внутри Ω. После этого Гео называет число $\alpha \in (0, 90]$. Затем Ма проводит через X две прямые, угол между которыми равен α°, и отмечает точки пересечения A, B, C и D проведённых прямых с Ω. Найдите наименьшее возможное значение P, для которого Гео может добиться того, чтобы неравенство $XA^2 + XB^2 + XC^2 + XD^2 \leqslant P$ выполнялось вне зависимости от действий Ма.

9 класс

Второй день

9.5. Дана последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ ненулевых действительных чисел такая, что

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = 1 - \frac{n}{x_n}$$

при всех n от 1 до 100 включительно. Найдите значение x_{100}.

9.6. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отметили точки A_1 и B_1 такие, что $AB_1 = AC$ и $BA_1 = BC$. Описанная окружность треугольника A_1CB_1 пересекает катет AC в точках C и X, а катет BC в точках C и Y. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника ABC лежит на отрезке XY.

9.7. Лист бумаги размера 9×9 разрезали на несколько прямоугольников, стороны которых целые. Общая длина разрезов равна 104. Докажите, что хотя бы один из полученных прямоугольников имеет размер 1×1.

9.8. Дано простое число $p > 2$. Множество M, состоящее из $\frac{p-1}{2}$ натуральных чисел, назовём *хорошим*, если, выписав для каждого элемента $a \in M$ на доску числа a и $2a + 3$, получим набор из $p - 1$ чисел, дающих попарно различные остатки при делении на p.

а) Определите, существует ли хороший набор, если $p = 73$.

б) Для каждого простого числа p вида $2^k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, определите, существует ли хороший набор.