

11 класс

1. На острове живет n жителей, каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. Каждый островитянин знает, кто из остальных рыцарь, а кто — лжец. На вопрос журналиста, сколько рыцарей проживает на острове, первый из островитян ответил: «Не более одного», второй: «Не более двух», третий: «Не более трёх» и так далее, n -й ответил: «Не более n ». Найдите все n , при которых такая ситуация возможна. Для каждого возможного n найдите число рыцарей, проживающих на острове.

2. Найдите значение выражения

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{2}{1+ab}$$

если известно, что

$$a \neq b \quad \text{и} \quad \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} = \frac{2}{1+ab}$$

3. Могут ли наибольшие общие делители пар натуральных чисел a и b , b и c , c и a равняться соответственно $10! + 114$, $20! + 252$, $30! + 378$?
4. В треугольнике ABC со сторонами $AB = BC = 5$, $AC = 6$ проведены биссектриса AD , медиана BM и высота CH . O — точка пересечения CH и AD . Найдите площадь треугольника AOC .
5. Можно ли расставить все натуральные числа от 1 до 100 в некотором порядке так, чтобы сумма любых k подряд стоящих чисел не делилась на k , для всех $2 \leq k \leq 100$?