

10 класс

Первый день

- 10.1.** Для натурального числа n через $d(n)$ обозначим количество всех различных натуральных делителей числа n (включая 1 и n). Найдите все натуральные числа n , для которых выполняется равенство

$$d(n) + d(56n + 1) = 5$$

- 10.2.** Действительные числа a, b, c таковы, что $a > b > c$ и выполнено равенство

$$\frac{a-b}{b-c} + \frac{b-c}{c-a} + \frac{c-a}{a-b} = -3.$$

Докажите, что $(b-c)^3 > 4(a-b)^3$.

- 10.3.** Точки A_1, B_1 и C_1 – середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC соответственно. На сторонах AB_1 и AC_1 треугольника AB_1C_1 во внешнюю сторону построены квадраты AB_1EF и AC_1GH соответственно. Пусть AD – высота треугольника ABC . Докажите, что точки A_1, D, G и E лежат на одной окружности.
- 10.4.** В ряд записан набор из n чисел, каждое из которых равняется 0, 1, 2 или 3. Лёша и Миша играют в игру, делая ходы по очереди. За один ход можно выбрать любое из данных чисел и прибавить к нему, а также к каждому из чисел правее него, одно и тоже целое число (для разных ходов прибавляемые числа могут быть различными); после этого все полученные числа меняются на их остатки при делении на 4. Проигрывает тот игрок, после хода которого повторится упорядоченный набор чисел, который уже встречался когда-либо до этого (включая и начальный набор чисел). Кто выиграет при правильной игре, если первым ходит Лёша?

10 класс

Второй день

10.5. На координатной плоскости Oxy (O — начало координат) изображены парабола $y = x^2$ и прямая, не параллельная оси абсцисс. Прямая проходит через точку P , лежащую на оси ординат, и пересекает левую ветвь параболы в точке A , а правую ветвь — в точке B . Точки D и C — проекции точек A и B на ось абсцисс соответственно. В трапецию $APOD$ вписана окружность, радиус которой равен $\frac{3}{8}$. Докажите, что в трапецию $PBCO$ можно вписать окружность и найдите её радиус.

10.6. Квадратные трехчлены $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ таковы, что $f(1) + g(1) + h(1) = 1$ и выполняются равенства

$$f(4) = 4g(2) = 16h(1), \quad g(4) = 4h(2) = 16f(1), \quad h(4) = 4f(2) = 16g(1).$$

Докажите, что $f(x) + g(x) + h(x) = x^2$.

10.7. На сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ отложили равные отрезки AK , BL , CM и DN . Пусть X — точка пересечения прямых KM и LN , а Y — точка пересечения прямых AN и BM . Докажите, что прямые XY и BC параллельны.

10.8. Какое наибольшее число прямоугольников 1×10 можно вырезать из прямоугольной таблицы 116×174 ? (Разрезы должны проходить по границам клеток таблицы).