

11 класс

Первый день

- 11.1.** Точка C с абсциссой -2 принадлежит гиперболу $y = 1/x$. Через C проведены две прямые с угловыми коэффициентами 2 и $1/2$, пересекающие гиперболу в точках A и B (отличных от точки C) соответственно. Найдите координаты центра описанной окружности треугольника ABC .
- 11.2.** Существует ли натуральное число n , которое можно представить как в виде $n = a^2 - b$, так и в виде $n = b^2 - c$, где a, b, c — три различных натуральных делителя числа n ? (К делителям числа n также относятся 1 и само число n .)
- 11.3.** Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке N . Известно, что вписанные окружности треугольников ABN и CBN касаются друг друга. Кроме того, вписанные окружности треугольников ADN и CDN также касаются друг друга. Найдите все возможные значения отношения $AN : NC$.
- 11.4.** В первом ряду зрительного зала 300 мест. В этом ряду сидят 25 зрителей.
- Докажите, что среди попарных расстояний между этими зрителями найдутся два равных.
 - Докажите это же утверждение для 25 зрителей и 330 мест в ряду.

11 класс

Второй день

- 11.5.** Последовательность a_1, a_2, a_3, \dots натуральных чисел определена по следующим правилам: число a_1 задано, а для каждого натурального $n \geq 2$ число a_n — это наименьшее натуральное число, делящееся на n и не меньшее a_{n-1} . (Например, если $a_5 = 115$, то $a_6 = 120$, $a_7 = 126$, $a_8 = 128$.)

Докажите, что, начиная с некоторого номера, эта последовательность совпадает с арифметической прогрессией.

- 11.6.** Найдите все функции $f(x)$, заданные на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения, такие, что для всех действительных x выполнено равенство

$$x = \frac{3}{4}f(|x|) + |f(x)|.$$

- 11.7.** Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно пересекаются в двух различных точках E и F . Прямая O_1E пересекает во второй раз ω_1 в точке A , а ω_2 — в точке C . Прямая O_2E пересекает во второй раз ω_2 в точке B , а ω_1 — в точке D . Точки M и N — середины отрезков AD и BC соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников FMD и FNC пересекаются на прямой DC .

- 11.8.** В некотором государстве $n \geq 5$ городов. Они соединены между собой дорогами так, что выполнены следующие условия:

- 1) любые два города соединены друг с другом не более чем одной дорогой;
- 2) не все города соединены между собой;
- 3) между любыми четырьмя городами проходит ровно $k \geq 1$ дорог.

Найдите все n и k , при которых это возможно.