

10 класс

1. На острове живет 2024 жителя. Каждый из них может быть либо рыцарем, который всегда говорит правду, либо лжецом, который всегда лжет, либо хитрецом, который может как лгать, так и говорить правду. Каждый островитянин знает, кто из остальных рыцарь, а кто — нет. На вопрос журналиста, сколько рыцарей проживает на острове, первый из островитян ответил: «Не более одного», второй: «Не более двух», третий: «Не более трёх» и так далее, 2024-й ответил: «Не более двух тысяч двадцати четырёх». Докажите, что на острове точно проживает хотя бы один хитрец.

2. Найдите все простые числа p и q ($p > q$) такие, что

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{pq} = \frac{1}{n}$$

где n — некоторое натуральное число.

3. Кузнечик прыгает по координатной плоскости. Стартует он в точке начала координат. Первый прыжок длины 1 см он делает вдоль оси OX . Каждый следующий прыжок на 1 см длиннее предыдущего и направлен перпендикулярно предыдущему прыжку в одну из двух сторон по выбору кузнечика. Мог ли кузнечик после 63 прыжков оказаться в точке начала координат?
4. На основаниях BC и AD трапеции $ABCD$ во внешние стороны построены квадраты $ADEF$ и $BCGH$. O — точка пересечения диагоналей трапеции AC и BD . Дано $BC = 2$, $GO = 5$, $GF = 15$. Найдите AD .
5. Найдите все функции $f(x)$, определённые на множестве всех действительных чисел, удовлетворяющие условию

$$f(y - f(x)) = 2 - x - y$$

для любых действительных x и y .