9 класс

Первый день

9.1. В первой четверти координатной плоскости нарисован график функции $y = \dfrac{2}{x}$. На нём отмечены точки B_1, B_2 и B_3, сумма абсцисс которых равна 20, а сумма ординат равна 21. Точка A имеет координаты $(2; 2)$.

Найдите сумму $AB_1 + AB_2 + AB_3$.

9.2. Решите уравнение в действительных числах:

$$[x]\{x\} + 2x = \{x\} + 9.$$

(Здесь через $[x]$ обозначена целая часть числа x, а через $\{x\}$ — его дробная часть; $\{x\} = x - [x]$.)

9.3. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ отметили точки K и L соответственно так, что $KL \parallel AD$. Известно, что $AD = 9$, $BC = 4$ и $KL = 6$. Отрезки BL и CK пересекаются в точке P, а отрезки AL и DK — в точке T. Определите все возможные значения отношения, в котором отрезок KL может делить отрезок PT.

9.4. В футбольном турнире каждая команда сыграла с каждой ровно по одному разу. По окончании турнира выяснилось, что все команды набрали разные количества очков, а команда, занявшая последнее место, проиграла меньше матчей, чем команда-победитель турнира. Какое наименьшее количество команд могло участвовать в турнире? (В футболе команда, выигравшая матч, получает три очка, проигравшая — нуль, а в случае ничьи обе команды получают по одному очку.)

9 класс

Второй день

9.5. Центром тяжести многоугольника, нарисованного на координатной плоскости, называется точка, координаты которой равны среднему арифметическому соответствующих координат вершин многоугольника. Можно ли на координатной плоскости нарисовать два одинаковых многоугольника, у которых нет общих точек, но совпадают центры тяжести?

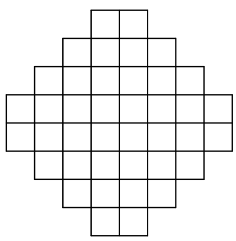
9.6. Внутри прямоугольного треугольника ABC с прямым углом при вершине C построили две окружности равного радиуса так, что они: касаются друг друга в точке Q, касаются гипотенузы AB, а также, одна из них касается катета AC, а другая — катета BC. На катете BC отметили точку P, для которой $\angle PAB = 45°$. Найдите угол между прямой PQ и гипотенузой AB.

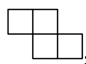
9.7. Назовём разбиение множества чисел $2^0, 2^1, \ldots, 2^{3n-1}$ на тройки $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)$, $(a_3, b_3, c_3) \ldots, (a_n, b_n, c_n)$ *хорошим*, если каждый из квадратных трёх членов

$$a_1^2x^2 + b_1x + c_1^4, \quad a_2^2x^2 + b_2x + c_2^4, \quad \ldots, \quad a_n^2x^2 + b_nx + c_n^4$$

имеет хотя бы один действительный корень. Найдите все хорошие разбиения, считая разбиения, которые отличаются лишь порядком следования троек, одинаковыми.

9.8. Ацтекским диамантом порядка n называется фигура на координатной плоскости, состоящая из единичных квадратов, центры которых удовлетворяют неравенству $|x| + |y| \leq n$.



Можно ли разрезать ацтекский диамант порядка 2020 на фигурки вида , состоящие из четырёх клеток? (Фигурки можно вращать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга.)