

11 класс

Первый день

11.1. Окружность пересекает параболу $y = x^2$ в трёх точках: A , B и C , причём в точке C касательные к этим параболе и окружности совпали. Проекция отрезка AB на ось абсцисс равна 2. Найдите величину угла ACB .

11.2. Найдите все натуральные числа a , b и c , для которых выполнено равенство

$$2^a + 2b^2 = 3^c + 67.$$

11.3. На высоте $АН$ остроугольного треугольника ABC выбрана точка X . Прямые BX и CX пересекают стороны AC и AB в точках B_1 и C_1 , соответственно. Точка P — основание высоты, опущенной из вершины B на прямую HC_1 , а точка Q — основание высоты, опущенной из вершины C на прямую HB_1 . Докажите, что описанная окружность треугольника PQH проходит через середину стороны BC .


11.4. В группе из 2020 человек каждый послал по одной открытке каждому своему знакомому из этой группы. Оказалось, что каждый человек получил не более трёх открыток и для каждого человека все его знакомые получили различные количества открыток. Найдите максимально возможное количество посланных открыток.

11 класс

Второй день

- 11.5.** На доске записаны 20 различных натуральных чисел. Оказалось, что произведение любых трёх из них является полным кубом, а произведение любых семи является седьмой степенью некоторого натурального числа. Найдите наименьшее возможное произведение всех 20 чисел.
- 11.6.** Витя выбрал $n \geq 3$ действительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n . Докажите, что Маша может у некоторых из выбранных чисел поменять знак на противоположный, получив новый набор b_1, b_2, \dots, b_n , так что одновременно будут выполнены неравенства

$$b_1(b_n + b_2) \leq 0, \quad b_2(b_1 + b_3) \leq 0, \quad \dots, \quad b_n(b_{n-1} + b_1) \leq 0.$$

- 11.7.** Можно ли на сторонах равностороннего треугольника отметить пять отличных от вершин треугольника точек так, чтобы они являлись вершинами выпуклого пятиугольника, у которого все диагонали равны?
- 11.8.** На клетчатую доску размера 9×9 выкладывают без наложений уголки вида , образованные тремя клетками (уголок можно поворачивать на угол, кратный 90° , границы уголков идут по линиям сетки). Какое наименьшее количество уголков необходимо разместить на доске, чтобы больше ни одного уголка выложить было невозможно?