

11 класс

Первый день

11.1. Рациональные числа a и b таковы, что

$$a^2 - 2ab = -4 \quad \text{и} \quad b^3 - 2a^2b = 8.$$

Определите все возможные пары (a, b) таких чисел.

11.2. Школьник Лёша несколько раз проделал одну и ту же операцию: задумал два различных натуральных числа, дающих в сумме 2018, и перемножил задуманные числа с их положительной разностью, после чего записал результат в тетрадку. Известно, что все задуманные Лёшей пары чисел различны. Докажите, что никакое число не могло быть выписано больше двух раз.

11.3. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC построен квадрат $ABDE$ (точки E и C лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AB). Биссектриса угла $\angle ACB$ пересекает прямые AB и DE в точках L и N , соответственно. Описанная окружность треугольника ABN пересекает отрезок CL в точке K . Докажите, что $CK = KL$.

11.4. Множество A состоит из 10 элементов. Подмножество этого множества назовем *небольшим*, если оно содержит не более половины элементов исходного множества A . Какое наименьшее количество небольших подмножеств можно отметить так, чтобы для любой пары элементов из множества A нашлось отмеченное подмножество, содержащее оба элемента из этой пары?

11 класс

Второй день

11.5. Для положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \geq abc \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}$$

11.6. Найдите все определенные на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения функции f и g , удовлетворяющие равенству

$$f(f(x + y)) = xf(y) + g(x)$$

при всех действительных x и y .

11.7. На стороне BC треугольника ABC выбраны точки D и E , отличные от вершин B и C , такие, что $\angle BAD = \angle EAC$. На отрезках AB, AD, AE и AC отмечены соответственно точки D_1, B_1, C_1 и E_1 , также, что справедливы равенства

$$AD_1 = \frac{1}{2}AD, \quad AB_1 = \frac{1}{2}AB, \quad AC_1 = \frac{1}{2}AC \quad \text{и} \quad AE_1 = \frac{1}{2}AE.$$

Прямые B_1E_1 и C_1D_1 пересекаются в точке X .

а) Докажите, что прямая AX делит угол $\angle D_1XE_1$ пополам.

б) Докажите, что прямая AX перпендикулярна стороне BC .

11.8. В клетки квадратной таблицы $n \times n$ записывают числа, в каждую ровно по одному. Заполненную таблицу назовем «магическим квадратом», если сумма чисел, записанных в любой строке, равна сумме чисел, записанных в любом столбце. Дана таблица, в которой уже записаны k чисел, при этом известно, что её можно дополнить (записать числа в оставшиеся клетки) до магического квадрата. Докажите, что:

а) при $k = n^2 - 2n$ количество способов дополнить таблицу до магического квадрата бесконечно,

б) при $k = n^2 - 2n + 1$ количество способов дополнить таблицу до магического квадрата бесконечно.