10 класс

Первый день

10.1. Параболы $y = x^2 - 2$ и $x = y^2 - 2$ пересекаются в точках A, B, C и D, причём точка D лежит в третьей четверти координатной плоскости. Найдите координаты центра окружности, описанной около треугольника ABC.

10.2. **а)** Найдите хотя бы одно натуральное число n, которое можно представить в виде $n = a^2 - b$ и в виде $n = c^2 - d$, где a, b, c, d — натуральные делители числа n и $a \neq c$. (К делителям числа n также относятся 1 и само число n.)

б) Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n, удовлетворяющих условию пункта **а)**.

10.3. На высоте BD остроугольного треугольника ABC отметили точку E такую, что описанные окружности треугольников ADE и BEC касаются в точке E. Угол AED равен 50°. Найдите градусную меру угла $\angle BCE$.

10.4. Про два набора $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ действительных чисел известно, что $x_i \geqslant y_j$ для любых номеров i, j. Пусть $P = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(x_i - y_j)$, а $G = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i - \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} y_i$. Докажите, что верно двойное неравенство $P \leqslant G \leqslant 2P$.

10 класс

Второй день

10.5. Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ натуральных чисел определена по следующим правилам: число a_1 задано, а для каждого натурального $n \geqslant 2$ число a_n — это наименьшее натуральное число, делящееся на n и не меньшее a_{n-1}. (Например, если $a_5 = 115$, то $a_6 = 120$, $a_7 = 126$, $a_8 = 128$.)

Докажите, что в последовательности $a_{63}, a_{64}, a_{65}, \ldots$ никакое число не встретится более одного раза при любом заданном $a_1 \leqslant 2019$.

10.6. Найдите все функции $f(x)$, заданные на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения, такие, что для всех действительных x выполнено равенство

$$x = -\frac{1}{2}f(|x|) + |f(x)|.$$

10.7. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно пересекаются в точке X. Прямая O_1X пересекает ω_2 в точках X и B, а прямая XO_2 пересекает ω_1 в точках X и A. Прямая O_1A пересекает ω_1 в точках A и D, а прямая O_2B пересекает ω_2 в точках B и C. Точка M — середина отрезка CD. Докажите, что прямые MX и AB перпендикулярны.

10.8. Петя и Андрей по очереди ставят знаки «$+$» и «$-$» в клетки полоски $n \times 1$. Петя ходит первым, и на каждом своём ходу он ставит плюс в любую свободную клетку. Андрей на своём ходу ставит минус в любую свободную клетку. Игра заканчивается, когда все клетки полоски заполнены. Выигрыш Пети — это наибольшее число k, такое, что для всех ℓ от 1 до k включительно найдутся ℓ подряд идущих клеток, в которых плюсов больше, чем минусов. Какой наибольший выигрыш может себе гарантировать Петя?