10 класс

Первый день

10.1. Решите уравнение

$$1 + x + 2x^2 + 4x^3 + 8x^4 + \ldots + 2^{2019}x^{2020} = 0.$$

10.2. Найдите все натуральные числа m, n и простые числа p, удовлетворяющие уравнению

$$m^p \cdot p^n = n^m$$

10.3. На медианах AA_1 и BB_1 треугольника ABC построили равнобедренные прямоугольные треугольники AA_1K и BB_1L таким образом, что вершины K и L прямых углов расположены в той же полуплоскости относительно соответствующих медиан, что и сторона AB. Докажите, что середина отрезка KL равноудалена от середин медиан AA_1 и BB_1.

10.4. В городе P чемпионат по теннису проходит в несколько туров по своеобразной олимпийской системе. Если количество участников чётно, то такой тур называется чётным, все участники делятся на пары и играют на выбывание: победитель проходит в следующий тур, а проигравший выбывает из турнира. Если же количество участников нечётно, то такой тур называется нечётным, то жюри случайным образом выбирает из выбывших участников счастливчика, который возвращается в чемпионат, а далее всё проходит как в чётном туре. В 2020 всего было сыграно 199 игр, после чего остался только один участник — победитель турнира. Известно также, что было ровно 4 нечётных тура. Найдите все возможные значения количества участников чемпионата.

(Количество участников первого тура обязательно чётное)

10 класс

Второй день

10.5. Даны 20 различных натуральных чисел. Известно, что наибольший общий делитель любых двух из них не превосходит 4. Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из данных чисел.

10.6. Биссектрисы AA_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке I. Описанные окружности треугольников AIC_1 и CIA_1 пересекаются в точке J отличной от I. Отрезки AI и C_1J пересекаются в точке X, а отрезки CI и A_1J — в точке Y. Наконец, прямая XY пересекает стороны BA и BC в точках D и E соответственно. Докажите, что треугольник BDE равнобедренный.

10.7. Существует ли функция $f(x)$, определённая на множестве всех вещественных чисел и принимающая в качестве своих значений все вещественные числа такая, что для всех $x \in \mathbb{R}$ верно равенство

$$f(f(x)) = |x|f(x) + 2$$

10.8. В стране 2020 городов, соединённых сетью дорог. Для каждого города рассмотрели все отличные от него города, в которые можно попасть из данного перемещаясь по дорогам страны, и выписали на доску их количество. Найдите наибольшее число k такое, что на доске обязательно найдётся число, записанное не менее k раз.