

10 класс

Первый день

- 10.1.** На координатной плоскости нарисован график функции $y = \frac{2}{x}$. В первой четверти координатной плоскости на нём отмечены точки A_1, A_2, \dots, A_{20} , а в третьей — C_1, C_2, \dots, C_{21} . Известно, что сумма абсцисс точек A_1, A_2, \dots, A_{20} равна модулю суммы ординат точек C_1, C_2, \dots, C_{21} , а сумма ординат точек A_1, A_2, \dots, A_{20} равна модулю суммы абсцисс точек C_1, C_2, \dots, C_{21} . Точка B имеет координаты $(-2; -2)$. Найдите разность

$$(BA_1 + BA_2 + \dots + BA_{20}) - (BC_1 + BC_2 + \dots + BC_{21}).$$

- 10.2.** Решите уравнение в натуральных числах x, y, z

$$8x^2 - 67 = 3^y - 2^z$$

- 10.3.** Саша и Влад играют в игру на координатной плоскости. Вначале Саша отмечает любые три целочисленные точки (т.е. точки, у которых обе координаты — целые числа). После этого ходит Влад. За ход Влад выбирает две из трёх имеющихся точек и поворачивает одну из них вокруг другой на 90° в произвольном направлении. Влад выиграет, если ему удастся за несколько ходов добиться того, что какие-то две из трёх точек совпадут. Если же Влад не сможет этого сделать, то побеждает Саша. Кто из мальчиков имеет выигрышную стратегию, позволяющую ему выиграть независимо от действий другого?

- 10.4.** Внутри равностороннего треугольника ABC отметили точку D так, что площадь треугольника ABC равна

$$\frac{\sqrt{3}}{8}(AD^2 + BD^2 + CD^2) + \frac{3}{4}AD \cdot BD.$$

Найдите угол ADB .

10 класс

Второй день

10.5. Решите уравнение в натуральных числах a и b .


$$4 \cdot (a!)^2 = b! + 4 \cdot a!$$

10.6. Дан острый угол и точка K внутри него. Найдите геометрическое место лежащих внутри этого угла точек L таких, что через точки K и L можно провести параллельные прямые, отсекающие от угла треугольники, площадь одного из которых в 2 раза больше площади другого.

10.7. Дан квадратный трёхчлен $p(x)$ со старшим коэффициентом, равным единице. Известно, что при некотором действительном a в ряду чисел

$$p(p(a) + a), \quad p(p(a + 1) + a + 1), \quad p(p(a + 2) + a + 2), \quad \dots, \quad p(p(a + 9) + a + 9)$$

среди любых трёх подряд идущих есть нуль. Найдите все возможные значения разности корней многочлена $p(x)$.

10.8. На клетчатую доску размера 7×7 выкладывают без наложений уголки вида , образованные тремя клетками (уголок можно поворачивать на угол, кратный 90° , границы уголков идут по линиям сетки). Какое наименьшее количество уголков необходимо разместить на доске, чтобы больше ни одного уголка выложить было невозможно?