

9 класс

Первый день

9.1. На левой ветви гиперболы $y = \frac{1}{x}$ отмечена точка A , а на правой — точка C . Перпендикуляры, восстановленные к отрезку AC в точках A и C , второй раз пересекают гиперболу в точках B и D соответственно. Пусть E — точка пересечения прямых AC и BD ; точка O — начало координат. Докажите, что $k_{OE} + k_{AB} = 0$, где k_{OE} и k_{AB} — коэффициенты наклона прямых OE и AB соответственно.

9.2. Дана окружность и точка P вне её. Для каждого диаметра BC данной окружности (точки B, C и P не лежат на одной прямой) построена описанная окружность треугольника PBC . Докажите, что независимо от выбора диаметра BC все эти описанные окружности проходят через две фиксированные точки плоскости.

9.3. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что

$$n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \quad n = b_1 + b_2 + b_3 + b_4,$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 — некоторые натуральные попарно взаимно простые числа и b_1, b_2, b_3, b_4 — некоторые натуральные попарно взаимно простые числа, причем

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4, \quad b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq b_4, \quad a_1 > b_1$$

и

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_4.$$

9.4. Дана квадратная таблица, в каждой клетке которой записано целое число. Влад и Никита играют в игру, делая ходы поочередно. Первым ходит Никита. За один ход он выбирает столбец таблицы и поэлементно прибавляет к нему или вычитает из него любой другой столбец таблицы. Влад за один ход проделывает аналогичную операцию, только со строками. Влад выиграет, если после очередного хода кого-либо из игроков в таблице окажется строка или столбец, состоящий из нулей. Может ли Влад добиться победы независимо от игры Никиты? Если да, то как он должен играть, если исходная таблица имеет вид:

а)

1	2
3	4

б)

2	9	4
7	5	3
6	1	8

9 класс

Второй день

9.5. На доске написано число 98765432198765432. Двое по очереди вычеркивают цифры. Проигрывает тот, после чьего хода либо не осталось цифр, либо число, образованное ими, делится на 3. Кто выиграет (начинающий или второй игрок) независимо от игры соперника?

9.6. Пусть

$$A + 6x + 3y = 3 + 4x^2 + xy + 4x^2y + y^2 + 2xy^2 + x^2y^2,$$

где x , y и A — действительные числа. Найдите наименьшее значение, которое может принимать число A .

9.7. Произведение трех натуральных чисел является кубом некоторого натурального числа, а попарные разности этих трех чисел равны 4, 5 и 9. Найдите все возможные значения, которые может принимать наименьшее из этих чисел.

9.8. Окружность ω с центром I вписана в треугольник ABC и касается его сторон BC , AC и AB в точках D , E и F соответственно. Прямая DI повторно пересекает ω в точке G , а прямая AG повторно пересекает ω в точке H . Пусть M — точка пересечения стороны BC и касательной к окружности ω , проведенной в точке H . Найдите все возможные значения отношения $BC : BM$.