8 класс

Первый день

8.1. На интеллектуальной викторине было предложено несколько лёгких, средних и трудных вопросов. За правильный ответ на лёгкий вопрос участник получал 4 балла, на средний – 5 баллов, а на трудный – 6 баллов. За неправильный ответ на лёгкий вопрос у участника вычиталось 2 балла, за неправильный ответ на средний вопрос вычитался 1 балл, а за неправильный ответ на трудный вопрос баллы не вычитались. Петя ответил правильно на 10 вопросов и получил на 30 баллов меньше максимально возможного числа баллов. Сколько всего вопросов было предложено на викторине?

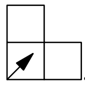
8.2. Для ненулевых чисел a, b и c выполняется равенство

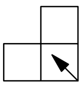
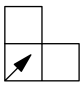
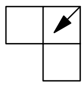
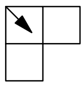
$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}=\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}-2.$$

Докажите, что какое-то из этих трёх чисел равно сумме двух других.

8.3. Точка N — середина стороны BC треугольника ABC. На стороне AC этого треугольника отмечена точка K так, что $\angle BAC = 2\angle NKC$.

Докажите, что $KC = BA + AK$.

8.4. Имеется набор плиток в виде уголка с изображенной на нём стрелкой . Восьмиклассник Вася замостил этим набором прямоугольную доску $n \times m$ (n и m – данные натуральные числа). Все плитки в этом замощении в зависимости от направления стрелки на них разбились на четыре типа: плитки направлений **A**, **B**, **C**, **D**, изображённые на рисунке ниже.

A)  **B)**  **C)**  **D)** 

Сможет ли Вася, разложив плитки на доске по-новому, снова замостить эту доску, чтобы при этом ровно одна плитка поменяла своё направление?

8 класс

Второй день

8.5. Докажите неравенство
$$\frac{a^2+b^2+1}{a+b+1} \geqslant \frac{ab+a+b}{ab+2},$$
если действительные положительные числа a и b таковы, что $(a-1)(b-1) \geqslant 0$.

8.6. Найдите все целые значения n, при которых дробь
$$\frac{n^2-2n-5}{3n-2}$$
является целым числом.

8.7. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) высота, опущенная на гипотенузу, равна $\sqrt{3}$, а разность острых углов равна 30°. Найдите длины сторон треугольника ABC.

8.8. Даны четыре попарно различных натуральных числа. Известно, что какие-то три из шести попарных сумм этих чисел равны 13, 14 и 15. Найдите наименьшее значение, которое может принимать сумма всех четырёх этих чисел.