

## 11 класс

### Первый день

11.1. Найдите все действительные  $x$ , удовлетворяющие равенству

$$\frac{\{x\}}{[x]} = \frac{\{3x\}}{[3x]}$$

(Здесь  $[a]$  – целая часть числа  $a$ , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее  $a$ , а  $\{a\}$  – дробная часть числа  $a$ , т.е.  $\{a\} = a - [a]$ .)

11.2. Даны числа 1, 2, 3, ..., 2014, 2015. Какое наибольшее количество из них можно выбрать и расставить в некотором порядке так, чтобы получилась последовательность чисел, удовлетворяющая следующим двум условиям:

- 1) сумма любых трёх подряд идущих чисел делится на 5;
- 2) сумма любых пяти подряд идущих чисел не делится на 5?

11.3. В треугольнике  $ABC$  из вершины  $B$  на сторону  $AC$  опущена высота  $BD$ . На стороне  $AC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM$  и  $BN$  – биссектрисы углов  $ABD$  и  $CBD$  соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника  $MBN$ , пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно. Точка  $T$  – точка пересечения прямых  $KM$  и  $LN$ . Найдите длину отрезка  $KL$ , если известно, что  $\angle ABC = 2\angle KTL$  и  $AB = 6$ ,  $BC = 8$ .

11.4. Бумажный треугольник прямолинейным разрезом разрезали на два многоугольника (получились либо два треугольника, либо треугольник и четырёхугольник). Затем один из двух получившихся многоугольников прямолинейным разрезом разрезали на два многоугольника. После этого снова один из имеющихся многоугольников прямолинейным разрезом разрезали на два многоугольника и т. д.: всякий раз один из имеющихся многоугольников прямолинейным разрезом разрезают на два многоугольника. Проведя указанную операцию несколько раз, в результате получили некоторое число многоугольников, про которые известно только то, что среди них имеется ровно восемь треугольников и хотя бы по одному пятиугольнику и шестиугольнику. Многоугольник с каким наибольшим числом сторон может быть среди получившихся многоугольников?

## 11 класс

### Второй день

- 11.5. а) Докажите, что если  $a \geq 0$ , то для любого действительного числа  $x$  выполняется равенство

$$|x - a| + |x + a| - |x| - a = ||x| - a|.$$

- б) Для каждого  $a < 0$  найдите все действительные  $x$ , для которых выполняется указанное в п. а) равенство.

- 11.6. В клетки таблицы  $3 \times 3$  вписаны попарно различные натуральные числа (в каждую клетку – одно число). Вася подсчитал суммы чисел во всех строчках таблицы и суммы чисел во всех её столбцах. Оказалось, что все шесть полученных им сумм являются попарно различными простыми числами. Какое наименьшее значение может иметь сумма всех девяти чисел такой таблицы?

- 11.7. Точка  $M$  – середина стороны  $AB$  треугольника  $ABC$ , и  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – описанные окружности треугольников  $AMC$  и  $BMC$  соответственно. Касательная к  $\omega_1$ , проходящая через  $A$ , пересекает касательную к  $\omega_2$ , проходящую через  $B$ , в точке  $X$ . Окружность  $\omega_3$  касается прямой  $AB$  в точке  $B$  и проходит через  $X$ . Прямая  $MX$  пересекает окружность  $\omega_3$  в точках  $X$  и  $Y$ . Докажите, что  $CY \perp AB$ .

- 11.8. На прямой отмечено пять точек. Петя измерил все десять попарных расстояний между ними. Оказалось, что среди этих расстояний только пять различных. Какой может быть наибольшая из найденных Петей длин отрезков, если наименьшая из них равна 1?