

11 класс

Первый день

- 11.1.** Для натурального числа n через $d(n)$ обозначим количество всех различных натуральных делителей числа n (включая 1 и n). Найдите все натуральные числа n , для которых выполняется равенство

$$d(7n) + d(8n + 1) = 7$$

- 11.2.** Попарно различные положительные действительные числа a, b, c таковы, что выполнено неравенство

$$\frac{a+b}{b-c} + \frac{b+c}{c-a} + \frac{c+a}{a-b} \leq \frac{b-c}{a+b} + \frac{c-a}{b+c} + \frac{a-b}{c+a}.$$

Докажите, что

$$\frac{a+c}{c-b} + \frac{b+a}{a-c} + \frac{c+b}{b-a} > 3.$$

- 11.3.** В остроугольном треугольнике ABC угол $\angle CAB$ в два раза больше угла $\angle BCA$. Пусть A_1 – основание высоты, опущенной из вершины A , а M – середина стороны AC . На стороне AB выбрана точка C_1 , такая, что прямые AA_1, BM и CC_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что точка M , основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую A_1C_1 , и точка пересечения медиан треугольника AC_1A_1 лежат на одной прямой.
- 11.4.** Жители королевства используют алфавит из 2016 букв. Название каждого из 448 городов королевства состоит из 6 различных букв. Любые два города соединены между собой таким количеством дорог, сколько общих букв встречается в их названиях. Докажите, что какие-то два города связаны не менее чем двумя различными маршрутами без общих дорог.

11 класс

Второй день

- 11.5.** На координатной плоскости Oxy изображены парабола $y = x^2$ и прямая, проходящая через точку Q с координатами $(0; q)$, $q \neq 0$. Прямая пересекает параболу в точках A и B . Точки D и C — проекции точек A и B на ось абсцисс соответственно. Докажите, что в четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда его площадь равна q^2 .
- 11.6.** Многочлены третьей степени $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ удовлетворяют равенствами:
- $$f(1) = g(2) = h(3) = 4, \quad f(2) = g(3) = h(1) = 5, \quad f(3) = g(1) = h(2) = 6.$$
- Найдите многочлен $F(x) = f(x) + g(x) + h(x)$, если известно, что $F(0) = 3$.
- 11.7.** В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ отметили точки M , N , K и L — середины сторон AB , BC , CD и DA соответственно. Пусть P и Q — середины отрезков AL и LD . Докажите, что прямые PM , LN и QK пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда прямые AD и BC параллельны.
- 11.8.** Какое наибольшее число прямоугольников 2×11 можно вырезать из прямоугольной таблицы 70×140 ? (Разрезы должны проходить по границам клеток таблицы).