

11 класс

1. Существует ли шесть подряд идущих членов последовательности

$$a_n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n,$$

делящихся на 7?

2. В записи трехзначного числа нет нулей. Найдите максимальное значение произведения этого числа на сумму чисел, обратных его цифрам. Например, для числа 123 искомое произведение равно $123 \cdot (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})$.
3. На доске записаны 2015 натуральных чисел. За один ход разрешается любые два из них, одновременно не равные нулю, например, a и b , заменить на числа $a - b/2$ и $b + a/2$. Можно ли через несколько таких ходов получить на доске исходные числа?
4. Найдите все функции $f(x)$, определенные при всех действительных x , такие что

$$2f(1 - x) + 1 = xf(x).$$

5. Серединные перпендикуляры к диагоналям BD и AC вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекают сторону AD в точках X и Y соответственно. Докажите, что середина стороны BC равноудалена от прямых BX и CY .