1 Теорвер

1. Катя верно решает пример с вероятностью 4/5, а волшебная ручка верно решает пример без помощи Кати с вероятностью 1/2. В контрольной работе 20 примеров, и на четверку достаточно правильно решить 13 из них. Сколько Кате нужно решить примеров самостоятельно, а сколько доверить волшебной ручке, чтобы математическое ожидание числа правильных ответов было не меньше 13?
Решение. Пусть x примеров Катя решает сама, а $20-x$ примеров решает ручка. Тогда математическое ожидание числа правильных решённых задач равно
$$\frac{4}{5}x + \frac{1}{2}(20 - x) = 0{,}8x + 10 - 0{,}5x = 0{,}3x + 10.$$
Из неравенства $0{,}3x + 10 \geq 13$ получаем:
$$0{,}3x \geq 3 \quad \Rightarrow \quad x \geq 10.$$
Значит, Кате нужно попробовать решить самостоятельно не менее чем 10 примеров.
Ответ: не менее 10 примеров.
2. Капризная принцесса выбирает жениха. К ней сватается 100 женихов, один другого лучше, и нет средь них двоих равных друг другу. Но только вот сватаются они в случайном порядке. Назовем жениха видным, если он нравится принцессе больше всех, кто сватался прежде. Первый по счету жених тоже видный, поскольку перед ним никого не было.
Будем говорить, что видный жених и все последующие, которые сватаются после него, но прежде следующего видного (если он есть), образуют вереницу женихов. Найдите математическое ожидание числа женихов в первой веренице.

Решение. Введем индикаторы I_k событий «k-й жених принадлежит первой веренице». Это событие эквивалентно событию «1-й жених лучший среди первых k женихов». Если это событие осуществилось, то $I_k = 1$, а если нет, то $I_k = 0$. Тогда длина первой вереницы X равна сумме всех индикаторов:
$$X = I_1 + I_2 + \cdots + I_n.$$
Первый жених принадлежит веренице, поэтому $I_1 = 1$. Первый лучше второго с вероятностью $\frac{1}{2}$. Поэтому
$$EI_2 = P(I_2 = 1) = \frac{1}{2}.$$
Первый жених самый лучший среди первых трех с вероятностью $\frac{1}{3}$, поэтому
$$EI_3 = P(I_3 = 1) = \frac{1}{3}.$$
И так далее:
$$EI_k = \frac{1}{k}.$$
Из равенства
$$X = I_1 + I_2 + \cdots + I_n,$$
переходя к математическому ожиданию, получаем:
$$EX = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$
Это число называется n-м гармоническим числом и обозначается H_n. При $n = 100$ точный расчет дает $H_{100} \approx 5,187\ldots$.
3. В лотерее «Счастливая сумма» всего N шаров с номерами от 1 до N. Во время основного тиража случайным образом выпадают 10 шаров. Во время дополнительного тиража из этого же набора шаров случайно выбирают 8 шаров. Сумма номеров на выпавших шарах в каждом тираже объявляется

счастливой суммой, и те игроки, кто эту сумму предсказал, получают выигрыш.
Может ли быть, что события A «в основном тираже счастливая сумма равна 63» и B «в дополнительном тираже счастливая сумма равна 44» равновероятны? Если да, то при каком условии?
Решение. В основном тираже всего возможно C_N^{10} комбинаций, а в дополнительном – C_N^8 комбинаций. Обозначим $S_{63,10}$ количество комбинаций в первом тираже, при которых сумма равна 63. Слагаемые – различные натуральные числа от 1 до N. Если самое малое число 2 или больше, то сумма всех десяти слагаемых не меньше, чем

$$2+3+\cdots+11=\frac{2+11}{2}\cdot 10=65.$$

Значит, самое малое число равно 1. Отбрасывая в каждом слагаемом единицу (вычитая из суммы 10), получаем, что остальная сумма 53 получена девятью различными натуральными слагаемыми. Таким образом,

$$S_{63,10}=S_{53,9}.$$

Аналогично,

$$S_{63,10}=S_{53,9}=S_{44,8}.$$

Теперь находим отношение вероятностей:

$$\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{S_{44,8}\cdot C_N^{10}}{C_N^8\cdot S_{63,10}}=\frac{C_N^{10}}{C_N^8}=\frac{(N-8)(N-9)}{90}.$$

Условие равновероятности $P(A)=P(B)$ даёт:

$$\frac{(N-8)(N-9)}{90}=1 \quad\Rightarrow\quad (N-8)(N-9)=90 \quad\Rightarrow\quad N^2-17N+72=90.$$

$$N^2-17N-18=0 \quad\Rightarrow\quad N=18 \text{ или } N=-1.$$

Подходит только $N=18$.
Ответ: Такое возможно, если в лотерее 18 шаров.

4. Имеются два несимметричных игральных кубика. Известно, что:
   - вероятность выпадения 1 очка на первом кубике равна 0,14;
   - вероятность выпадения 1 очка на втором кубике равна 0,35;
   - при всех n от 2 до 6 отношение вероятности выпадения n очков к вероятности выпадения $n-1$ очков на первом кубике в точности в $\frac{n}{n-1}$ раз больше, чем это же отношение для второго кубика.

Найдите математическое ожидание числа очков, выпадающих при бросании второго кубика.
Ответ: 2,5.
Решение. Пусть вероятности граней на первом и на втором кубиках равны $v_1,\ldots,v_6$ и $k_1,\ldots,k_6$ соответственно. Тогда

$$\frac{v_2}{v_1}=2\cdot\frac{k_2}{k_1},\quad \text{откуда } v_2k_1=2v_1k_2,$$

$$\frac{v_3}{v_1}=\frac{v_3}{v_2}\cdot\frac{v_2}{v_1}=\frac{3}{2}\cdot\frac{k_3}{k_2}\cdot 2\cdot\frac{k_2}{k_1}=3\cdot\frac{k_3}{k_1},\quad \text{откуда } v_3k_1=3v_1k_3.$$

Таким же образом получаем все равенства $v_nk_1=nv_1k_n$ при $n=2,\ldots,6$. Сложим полученные равенства почленно:

$$v_1\left(2k_2+3k_3+\cdots+6k_6\right)=k_1\left(v_2+v_3+\cdots+v_6\right).$$

Добавим к обеим частям v_1k_1:

$$v_1\left(k_1+2k_2+3k_3+\cdots+6k_6\right)=k_1\left(v_1+v_2+v_3+\cdots+v_6\right).$$

Математическое ожидание числа очков на втором кубике равно

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \cdots + 6k_6 = \frac{k_1}{v_1}(v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_6) = \frac{k_1}{v_1} = \frac{0,35}{0,14} = 2,5.$$

5. Беспроигрышная лотерея устроена по следующим правилам. Игрок покупает лотерейный билет за n рублей, причём цену он назначает сам (n — целое, большее 1). Затем генератор случайных чисел выбирает случайное натуральное число из отрезка от 1 до n включительно. Выигрыш игрока равен сумме делителей выбранного числа в рублях. Может ли игрок назначить цену лотерейного билета так, чтобы математическое ожидание выигрыша было больше его затрат?
Ответ: нет.

Решение. Сумму делителей выбранного случайного числа от 1 до n назовём X. Нужно понять, существуют ли n, при которых

$$EX > n.$$

Пусть I_k — индикатор события A_k «выбранное число делится на k», то есть $I_k = 1$, если событие A_k случилось, а в противном случае $I_k = 0$. Натуральных чисел, кратных k, на отрезке от 1 до n ровно

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor,$$

где квадратные скобки означают целую часть. Значит,

$$EI_k = P(A_k) = \frac{\lfloor n/k \rfloor}{n} \leq \frac{n}{kn} = \frac{1}{k}.$$

Выразим случайную величину X через индикаторы:

$$X = I_1 + 2I_2 + 3I_3 + \cdots + nI_n$$

и перейдём в этом равенстве к математическим ожиданиям:

$$EX = EI_1 + 2EI_2 + 3EI_3 + \cdots + nEI_n \leq 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{3} + \cdots + n \cdot \frac{1}{n} = n.$$

Значит, каким бы ни было натуральное n, выигрыш в среднем не больше цены билета. Равенство достигается при $n = 1$ и $n = 2$. При $n \geq 3$ среди неравенств

$$EI_k \leq \frac{1}{k}$$

встречаются строгие, поэтому в этом случае

$$EX < n.$$

2 Линал

1. Решите систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

Решение

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = 0.5, \\ -x_2 + x_3 = -1.5, \\ x_4 = -1.5 \end{cases}$$

$$x_1 = 0.5, \quad x_2 = x_3 + 1.5, \quad x_3 = x_3, \quad x_4 = -1.5$$

Ответ: $x_1 = 0.5$, $x_2 = x_3 + 1.5$, $x_4 = -1.5$, x_3 — любое вещественное число.

2. Решить систему уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_5 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7, \\ 9x_1 + 6x_2 + 6x_3 - 3x_4 + 4x_5 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 3. \end{cases}$$

Решение

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x_1, x_3, x_5 - главные, а x_2 и x_4 – свободные

Ответ:

$$x_1 = -\frac{2}{3}x_2 + \frac{19}{3}, \quad x_3 = \frac{1}{2}x_4 + 13, \quad x_5 = -34, \quad x_2 \in \mathbb{R} \text{ — любое число}, \quad x_4 \in \mathbb{R} \text{ — любое число}$$

3 Матан

1. **Найти предел**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+3n^2} - \sqrt{n^4+n^2+1}\right).$$

Решение Умножим и разделим на сопряжённое выражение:

$$\begin{aligned} &\sqrt{n^4+3n^2} - \sqrt{n^4+n^2+1} = \\ &= \frac{\left(\sqrt{n^4+3n^2} - \sqrt{n^4+n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^4+3n^2} + \sqrt{n^4+n^2+1}\right)}{\sqrt{n^4+3n^2} + \sqrt{n^4+n^2+1}} \\ &= \frac{(n^4+3n^2) - (n^4+n^2+1)}{\sqrt{n^4+3n^2} + \sqrt{n^4+n^2+1}} \\ &= \frac{2n^2-1}{\sqrt{n^4+3n^2} + \sqrt{n^4+n^2+1}}. \end{aligned}$$

Разделим числитель и знаменатель на n^2:

$$= \frac{2 - \frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}}.$$

При $n \to \infty$ получаем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}} = \frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{2}{1+1} = 1.$$

Ответ:

$$1$$

2. **Найти предел**

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n}{n^2+1}\right)^{3n-1}.$$

Решение. Преобразуем выражение под пределом:

$$\frac{n^2+n}{n^2+1} = \frac{(n^2+1)+(n-1)}{n^2+1} = 1+\frac{n-1}{n^2+1}.$$

Тогда исходный предел принимает вид:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{n-1}{n^2+1}\right)^{3n-1}.$$

Воспользуемся вторым замечательным пределом $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. Для этого выделим в показателе степени выражение, обратное к добавке $\frac{n-1}{n^2+1}$. Рассмотрим предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)(3n-1)}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-4n+1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = 3.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{n-1}{n^2+1}\right)^{3n-1} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{n-1}{n^2+1}\right)^{\frac{n^2+1}{n-1}}\right]^{\frac{(n-1)(3n-1)}{n^2+1}} = e^3.$$

Ответ:

$$e^3.$$

3. **Вычислить предел:**

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin 2x}{1-\cos x}.$$

Решение Преобразуем знаменатель, используя тригонометрическое тождество:

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}.$$

Тогда исходный предел можно записать в виде:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin 2x}{2\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Разделим числитель и знаменатель на x^2 (умножая и деля на соответствующие множители):

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\sin 2x}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{x^2}{\sin^2(x/2)}\right).$$

Выразим x^2 через $\sin^2(x/2)$:

$$\frac{x^2}{\sin^2(x/2)} = \left(\frac{x}{\sin(x/2)}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot(x/2)}{\sin(x/2)}\right)^2 = 4\left(\frac{x/2}{\sin(x/2)}\right)^2.$$

Учитывая, что

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{x/2}{\sin(x/2)}=1,$$

получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{1-\cos x}=1\cdot 4\cdot 1^2=4.$$

Ответ

$$4$$

4. **Вычислить производную функции**

$$f(x)=\ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}.$$

Решение. Прежде чем вычислять производную, преобразуем исходную функцию:

$$f(x)=\ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)=\frac{1}{2}\ln(1-\cos x)-\frac{1}{2}\ln(1+\cos x).$$

Теперь вычислим производную:

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\left(\frac{1}{2}\ln(1-\cos x)-\frac{1}{2}\ln(1+\cos x)\right)'\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\cos x}\cdot(\sin x)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\cdot(-\sin x)\\
&=\frac{\sin x}{2(1-\cos x)}+\frac{\sin x}{2(1+\cos x)}\\
&=\frac{\sin x(1+\cos x)+\sin x(1-\cos x)}{2(1-\cos x)(1+\cos x)}\\
&=\frac{\sin x+\sin x\cos x+\sin x-\sin x\cos x}{2(1-\cos^2 x)}\\
&=\frac{2\sin x}{2\sin^2 x}=\frac{1}{\sin x}.
\end{aligned}$$

Ответ:

$$\frac{1}{\sin x}.$$

5. Система:

$$\begin{cases} u+\ln v-x=0,\\ v-\ln u-y=0.\end{cases}$$

Найти dz в точке $(1,1)$, где $z=2u-v$.

Решение

(a) Из системы при $x=1$, $y=1$ находим $u=1$, $v=1$.

(b) Дифференцируем по x:

$$\begin{aligned} u_x+\frac{1}{v}v_x-1&=0,\\ v_x-\frac{1}{u}u_x&=0.\end{aligned}$$

При $u=v=1$ получаем $u_x+v_x=1$, $v_x=u_x$, откуда $u_x=v_x=\frac{1}{2}$.

(c) Дифференцируем по y:

$$\begin{aligned} u_y+\frac{1}{v}v_y&=0,\\ v_y-\frac{1}{u}u_y-1&=0.\end{aligned}$$

При $u=v=1$ получаем $u_y+v_y=0$, $v_y-u_y=1$, откуда $u_y=-\frac{1}{2}$, $v_y=\frac{1}{2}$.

(d) Тогда $dz = (2u_x - v_x)dx + (2u_y - v_y)dy = \left(2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) dx + \left(2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right) dy = \frac{1}{2}dx - \frac{3}{2}dy$.

Ответ: $dz(1,1) = \dfrac{1}{2}\,dx - \dfrac{3}{2}\,dy$.

6. Система:

$$\begin{cases} u^2 + v = x, \\ u + v^2 = y. \end{cases}$$

Найти dz в точке $(2,2)$, где $z = u + 3v$.

Решение

(a) Из системы при $x = 2$, $y = 2$ находим $u = 1$, $v = 1$ (так как $1^2 + 1 = 2$, $1 + 1^2 = 2$).

(b) Дифференцируем по x:

$$2uu_x + v_x = 1,$$
$$u_x + 2vv_x = 0.$$

При $u = v = 1$ получаем $2u_x + v_x = 1$, $u_x + 2v_x = 0$. Решая, находим $u_x = \frac{2}{3}$, $v_x = -\frac{1}{3}$.

(c) Дифференцируем по y:

$$2uu_y + v_y = 0,$$
$$u_y + 2vv_y = 1.$$

При $u = v = 1$ получаем $2u_y + v_y = 0$, $u_y + 2v_y = 1$. Решая, находим $u_y = -\frac{1}{3}$, $v_y = \frac{2}{3}$.

(d) Тогда $dz = (u_x + 3v_x)dx + (u_y + 3v_y)dy = \left(\frac{2}{3} - 1\right) dx + \left(-\frac{1}{3} + 2\right) dy = -\frac{1}{3}dx + \frac{5}{3}dy$.

Ответ: $dz(2,2) = -\dfrac{1}{3}\,dx + \dfrac{5}{3}\,dy$.