На основные определения

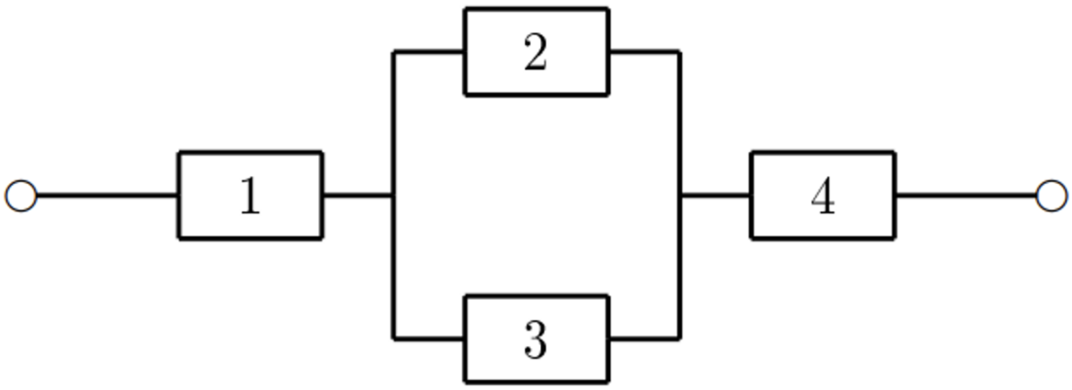
1. Происходит двукратное подбрасывание игральной кости. Постройте подходящее пространство элементарных исходов Ω для описания следующих событий:
   (a) Оба раза выпало число очков, равное трём 21 ; 12
   (b) Выпали одинаковые числа 11;22;33;44;55;66
   (c) Произведение выпавших чисел делится на 14 ∅
2. Используя подмножества из задания 1, получите результат действия следующих операций:
   (a) $\overline{A}$, $\overline{C}$
   (b) $A \cup B \cap C$
   (c) $A \cup C$
   (d) $B \cap A \cup C$

Вероятностное пространство и комбинаторика

3. Случайный эксперимент состоит в подбрасывании кости четыре раза подряд. Найдите вероятность, что числа, появлявшиеся на верхних гранях, во всех четырёх бросках будут различными. Какова вероятность, что сумма всех цифр будет делиться на два? Постройте множество вероятных исходов.
4. 10 книг на полке, среди них есть полное собрание сочинений Ницше, допустим, в двух томах. Какова вероятность, что эти два тома на полке:
   (a) окажутся рядом?
   (b) окажутся рядом в правильном порядке?
   (c) будут максимально разделены?
5. В стек помещены N ссылок на область в памяти, причём мы знаем, что k ссылок указывают на целочисленные переменные, а остальные $N - k$ — это числа с плавающей точкой, но порядок их расположения в стеке не известен. Мы извлекаем p ссылок ($p < N$), найдите вероятность того, что среди них окажутся m целочисленных значений и $p - m$ чисел с плавающей точкой.
6. Имеется n энергетических состояний и k неразличимых частиц. Частицы могут прибывать только в данных n состояниях. При этом энергия частиц — случайная величина. Сколько различных способов распределения частиц по энергиям существует?

Условная вероятность и зависимые события

7. Из колоды в 36 карт наугад вытягивают две карты подряд. Какова вероятность, что обе карты — тузы? А если вытянули одну карту, затем её вернули, перемешали колоду и вытянули вторую?
8. Дана электрическая цепь, с надёжностью элементов p_k. Предполагается, что отказы элементов являются независимыми событиями. Вычислите надёжность всей цепи:



9. Чтобы найти редкую книгу по программированию на C++, школьник старших классов решил обойти три технических библиотеки. Для каждой библиотеки одинаково вероятно, что в фондах этой книги или нет, или она есть. Если книга есть, то с вероятностью 0.5 она не занята другим читателем. Какова вероятность того, что школьник найдёт книгу?
10. Среди работающих взрослых Лапландии в возрасте 25 лет и старше 90.3% окончили среднюю школу, а 30% — колледж. Для событий H окончание средней школы и C окончание колледжа предполагается, что перед окончанием колледжа необходимо закончить среднюю школу. Рассчитайте следующие вероятности трудоустроенного жителя Лапландии:
    (a) $P(H)$
    (b) $P(H \cap C)$
    (c) $P(C \mid H)$

Полная вероятность

11. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, случайным образом извлекаются два шара и перемещаются во вторую урну, содержащую 4 белых и 4 черных шара.
    (a) Найдите вероятность того, что из второй урны достанется белый шар.
    (b) Пусть из второй урны будет извлечён белый шар. Какова вероятность того, что два белых шара были перенесены из первой урны во вторую?
12. По каналу связи может быть передана одна из трёхбуквенных последовательностей: AAAA, BBBB, CCCC. Предыдущие вероятности каждой последовательности равны соответственно: 3/10, 2/5 и 3/10. Известно, что из-за шума вероятность правильного приёма каждой передаваемой буквы составляет 3/5, а вероятности того, что каждая буква будет принята как любая другая буква, равны 1/5. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что последовательность AAAA была передана, если принятой последовательностью на принимающем устройстве является ABCA.
13. Три стрелка производят по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле для каждого из стрелков соответственно равны p_1, p_2, p_3. Какова вероятность того, что второй стрелок промахнулся, если после выстрелов в мишени оказалось две пробоины?

Математическое ожидание

14. В коробке 50 билетов: 12 выигрышных (2 билета по 1000 руб, 10 по 100 руб) и 38 без выигрыша (0 руб). Какова величина мат ожидания выигрыша в такой лотерее?
15. Найти среднее число очков за один бросок шестигранного кубика.
16. Стрелок делает 2 выстрела, вероятность попадания 0.6. Среднее число выстрелов.
17. Случайная величина принимает значение 1 с вероятностью 0.4, 2 — с вероятностью 0.2 и 10 — с вероятностью 0.2. Какова дисперсия такой случайной величины?
18. Рассчитайте мат ожидания и дисперсии по ряду распределения случайной величины: $x_1 = 1$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 4$, также $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.5$ и $p_3 = 0.2$.
19. Известно, что $M[X] = 2$, $D[X] = 4$. Найдите $D[3X - 5]$.

3. Случайный эксперимент состоит в подбрасывании кости четыре раза подряд. Найдите вероятность, что числа, появлявшиеся на верхних гранях, во всех четырёх бросках будут различными. Какова вероятность, что сумма всех цифр будет делиться на два? Постройте множество вероятных исходов.

1) $\dfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{6^4} = \dfrac{5\cdot2}{6^2} = \dfrac{5}{18}$

2) $\dfrac{3^4\cdot\left(C_4^0 + C_4^2 + C_4^4\right)}{6^4}$

делиться на два? Постройте множество вероятных исходов.

4. 10 книг на полке, среди них есть полное собрание сочинений Ницше, допустим, в двух томах. Какова вероятность, что эти два тома на полке:
   (a) окажутся рядом?
   (b) окажутся рядом в правильном порядке?
   (c) будут максимально разделены?

а) $\dfrac{9\cdot2}{10!}$

б) $\dfrac{9\cdot8!}{10!}$

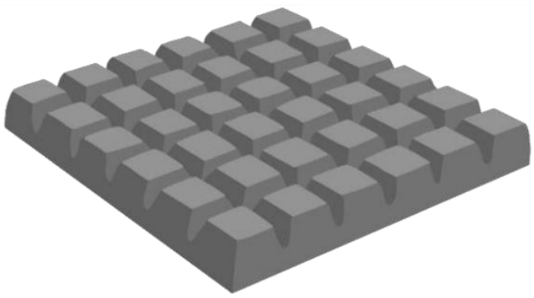
с) $\dfrac{8!}{10!}$

5. В стек помещены N ссылок на область в памяти, причём мы знаем, что k ссылок указывают на целочисленные переменные, а остальные $N - k$ — это числа с плавающей точкой, но порядок их расположения в стеке не известен. Мы извлекаем p ссылок ($p < N$), найдите вероятность того, что среди них окажутся m целочисленных значений и $p - m$ чисел с плавающей точкой.

[redacted]

1. Из цифр от 1 до 9 составлены три однозначных и три двузначных числа, причем цифры не повторяются. Найдите наименьшее возможное среднее арифметическое получившегося набора чисел.
2. В конце года директор фирмы выписал техническому отделу крупную премию. Начальник отдела хочет распределить премию между всеми десятью сотрудниками так, чтобы средний доход сотрудников отдела в декабре (с учётом и заработной платы, премии) оказался наибольшим. Начальник думает, как ему поступить:
   (a) дать премию только двум самым малооплачиваемым сотрудникам.
   (b) дать премию только двум самым высокооплачиваемым сотрудникам.
   (c) разделить премию на всех поровну.
   (d) забрать всю премию себе.
   (e) поступить как-то иначе (как?)

   Если вы выбрали какой-то вариант, обоснуйте, почему именно этот вариант даст наибольший средний доход сотрудников отдела.
3. У Вали в шкатулке лежали пять разноцветных ленточек длиной 15, 20, 24, 26 и 30 см. Коля отрезал от некоторых (возможно, от всех) ленточек по кусочку. Средняя длина ленточек уменьшилось на 5 см, а медиана и размах длин не изменились. Чему теперь равны длины ленточек?
4. Валя и Коля пошли в тир. Коля предложил:
   – Валь, давай стрелять по очереди. Кто первый попадет в мишень, тот и победил.
   – Это нечестно! Ты стреляешь лучше. Помнишь, Рассеянный Ученый совершенно точно подсчитал, что на одно попадание ты расходуешь в среднем на один выстрел меньше, чем я.
   – Хорошо, – согласился Коля. – Стреляй первой. Тогда у нас будут равные шансы на победу.
   Валя немного подумала и сказала:
   – Все равно нечестно. Давай лучше возьмем два ружья и будем стрелять одновременно, но по двум разным мишеням. Тогда может случиться ничья, а значит, вероятность того, что я хотя бы не проиграю, больше, чем при стрельбе по очереди.
   а) Прав ли Коля, утверждая, что если они будут стрелять по очереди, но Валя будет стрелять первой, то шансы у них равны?
   б) Права ли Валя, утверждая, что если стрелять по двум мишеням одновременно, то вероятность не проиграть у нее больше, чем вероятность победить при стрельбе по очереди?
5. Рассматриваются всевозможные последовательности из чисел 1 и -1 длиной n. Для каждой вычисляется квадрат суммы членов. Найдите среднее арифметическое получившихся величин.
6. В группе детского сада n человек разного роста. Они встали в круг. Ребёнок скажет, что он высокий, если он выше двух своих соседей. Сколько в среднем детсадовцев назовут себя высокими?
7. Была у братьев шоколадка, разделённая на 36 квадратиков прямолинейными бороздками (см. рисунок). Старший брат сломал шоколадку по случайной прямой и поступил по-братски: съел тот кусок, который оказался не больше другого. Потом пришёл младший брат, сломал оставшуюся часть тоже по случайной прямой и съел кусок, который оказался не меньше другого. Определите, кто из братьев съел в среднем больше – сравните математические ожидания количества квадратиков, доставшихся братьям.



8. Группа, в которой 27 студентов, сдает письменный зачёт по решению олимпиадных задач. Преподаватель заготовил зачётную работу в 3 вариантах и распределяет варианты случайным образом с един-

ственным условием: количество тех, кто получил разные варианты, должно отличаться не больше чем на единицу. Перед зачётом между студентами Сергеем и Алексеем состоялся следующий диалог.

С: Вероятность того, что у нас с тобой окажется один и тот же вариант, равна 1/3.

А: Если сегодня кто-то один не придёт на зачёт, то она окажется меньше, чем была бы, если бы пришли все.

С: Если сегодня не придут двое, то она окажется меньше, чем была бы, если бы не пришёл кто-то один.

а) Верно ли первое утверждение Сергея?

б) Верно ли утверждение Алексея?

в) Верно ли второе утверждение Сергея?

9. На знакомом нам заводе вырезают металлические диски диаметром 1 м. Известно, что диск диаметром ровно 1 м весит ровно 100 кг. При изготовлении возникает ошибка измерения, и поэтому стандартное отклонение радиуса составляет 10 мм. Инженер Сидоров считает, что стопка из 100 дисков в среднем будет весить 10000 кг. На сколько ошибается инженер Сидоров?
10. Благородные девицы пошли в театр. Девиц всего n , и билеты у всех на один ряд, в котором ровно n кресел. Если девице, чтобы занять свое место, нужно пройти мимо уже сидящей девицы, то последняя должна вежливо встать, чтобы пропустить подругу.

    а) Найдите математическое ожидание числа вставаний.

    б) Найдите математическое ожидание числа тех, кому не придётся встать ни разу.
11. Магазин «Крокус и Кактус» объявил акцию: если покупатель берет три товара, то самый дешевый из них ему достается бесплатно. Покупатель взял десять товаров, все разной цены: за 100 рублей, за 200 рублей, за 300 рублей и так далее – самый дорогой товар стоил 1000 рублей. Найдите математическое ожидание суммы, которую покупатель заплатит, если разложит покупки случайным образом.
12. На конференцию приехали 18 учёных, из которых ровно 10 знают сногсшибательную новость. Во время перерыва (кофе-брейка) все учёные разбиваются на случайные пары, и в каждой паре каждый, кто знает новость, рассказывает эту новость другому, если тот её ещё не знал.

    а) Найдите вероятность того, что после кофе-брейка число учёных, знающих новость, будет равно 13.

    б) Найдите вероятность того, что после кофе-брейка число учёных, знающих новость, будет равно 14.

    в) Обозначим буквой X количество учёных, которые знают сногсшибательную новость после кофе-брейка. Найдите математическое ожидание X.
13. В зимнем лагере в комнате живут Ваня и Гриша. Каждый вечер они бросают жребий, кому гасить свет перед сном: дело в том, что выключатель около двери, и проигравшему приходится идти к кровати в полной темноте, натыкаясь на стулья. Обычно Ваня и Гриша бросают жребий без затей, но в этот раз Гриша придумал особенный жребий:

    – Давай бросать монету. Если при каком-то чётном броске выпадет орёл, то дальше монету не бросаем: я выиграл. Если же при каком-то нечётном броске выпадет решка, то выиграл ты.

    а) Какова вероятность выигрыша Гриши?

    б) Найдите математическое ожидание числа бросков монеты до окончания жребия.

1. Из цифр от 1 до 9 составлены три однозначных и три двузначных числа, причем цифры не повторяются. Найдите наименьшее возможное среднее арифметическое получившегося набора чисел.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$\overline{X}\ \overline{X}\ \overline{X}\quad \overline{XX}\ \overline{XX}\ \overline{XX}$

?

Выбираем три числа, которые $\cdot 10$

$$\frac{\overset{1}{x_1}\cdot 10+\overset{2}{x_2}\cdot 10+\overset{3}{x_3}\cdot 10+x_4\ldots+x_9}{6} \to \frac{10+20+30+4+5+6+7+8+9}{6}$$

30 60 64 69 75 84 92 101

$$\frac{101}{6}=16\frac{5}{6}$$

2. В конце года директор фирмы выписал техническому отделу крупную премию. Начальник отдела хочет распределить премию между всеми десятью сотрудниками так, чтобы средний доход сотрудников отдела в декабре (с учётом и заработной платы, премии) оказался наибольшим. Начальник думает, как ему поступить:

(a) дать премию только двум самым малооплачиваемым сотрудникам.
(b) дать премию только двум самым высокооплачиваемым сотрудникам.
(c) разделить премию на всех поровну.
(d) забрать всю премию себе.
(e) поступить как-то иначе (как?)

Если вы выбрали какой-то вариант, обоснуйте, почему именно этот вариант даст наибольший средний доход сотрудников отдела.

3. У Вали в шкатулке лежали пять разноцветных ленточек длиной 15, 20, 24, 26 и 30 см. Коля отрезал от некоторых (возможно, от всех) ленточек по кусочку. Средняя длина ленточек уменьшилось на 5 см, а медиана и размах длин не изменились. Чему теперь равны длины ленточек?

35 59 85 115 $= S_1$

$$\frac{15+20+24+26+30}{5} = 23 = \overline{x}_1$$

медиана 24 размах 15

$$\overline{x}_2 = 23-5 = 18 \Rightarrow S_2 = 90$$

$\Rightarrow$ 115 − 90 = 25 − суммарно уменьшилось

15	20	24	26	30
−6	−11		−2	−6
9	9	24	24	24

4. Валя и Коля пошли в тир. Коля предложил:

– Валь, давай стрелять по очереди. Кто первый попадет в мишень, тот и победил.

– Это нечестно! Ты стреляешь лучше. Помнишь, Рассеянный Ученый совершенно точно подсчитал, что на одно попадание ты расходуешь в среднем на один выстрел меньше, чем я.

– Хорошо, – согласился Коля. – Стреляй первой. Тогда у нас будут равные шансы на победу.

Валя немного подумала и сказала:

– Все равно нечестно. Давай лучше возьмем два ружья и будем стрелять одновременно, но по двум разным мишеням. Тогда может случиться ничья, а значит, вероятность того, что я хотя бы не проиграю, больше, чем при стрельбе по очереди.

а) Прав ли Коля, утверждая, что если они будут стрелять по очереди, но Валя будет стрелять первой, то шансы у них равны?

б) Права ли Валя, утверждая, что если стрелять по двум мишеням одновременно, то вероятность не проиграть у нее больше, чем вероятность победить при стрельбе по очереди?

1) К: поп k, пр. $(1-k)$; В: поп b, пр $(1-b)$; $k > b$

$$P(K) = (1-b)k + (1-b)^2(1-k)k + (1-b)^2(1-k)^2 k = \ldots$$

$$= \sum_{i=0}^{n\to\infty} (1-b)^i (1-k)^i \, k(1-b) \qquad b = k(1-b), \; q = (1-b)(1-k) \Rightarrow P(K) = \frac{k(1-b)}{1-(1-b)(1-k)}$$

$$P(B) = b + (1-b)(1-k)b + (1-b)^2(1-k)^2 b =$$

$$= \sum_{i=0}^{n\to\infty} (1-b)^i (1-k)^i b \Rightarrow P(B) = \frac{b}{1-(1-b)(1-k)}$$

$$E[K'] = \sum_{i=0}^{n\to\infty} (1-k)^i k(i+1) = \sum_{i=0} (1-b)^i b(i+1) - 1$$

$$\parallel \quad E[B'] \qquad b < k$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{b} - 1 \Rightarrow b = k - kb, \quad b = k(1-b)$$

Если $P(K) = P(B) \Rightarrow \frac{1-(1-b)(1-k)}{2} = b = k(1-b)$

$P(K) = \frac{1}{2}$

$$M = y \cdot k \qquad k\left(1 - \frac{1-(1-b)(1-k)}{2}\right) = \frac{1-(1-b)(1-k)}{2}$$

$$k\left(2-1+(1-k-b+bk)\right)=k+b-bk$$

$$k(2-k-b+bk)$$

$$2k-k^2-\cancel{bk}+bk^2=k+b-\cancel{bk}$$

$$k^2(b-1)+k-b=0$$

$$k=\frac{-1\pm\sqrt{1+4b(b-1)}}{2b-2}$$

$$\frac{-1\pm\sqrt{1+4b^2-4b}}{2b-2}$$

$$\frac{-1\pm(2b-1)}{2b-2}$$

$$k=1 \qquad \frac{b}{b-1}\ \text{отр.}$$

2) $P_2(B) = b(1-k) + bk + b(1-k)(1-b)k + b(1-k)^2(1-b) =$

$$= \frac{b(1-k)}{1-(1-k)(1-b)} + \frac{bk}{1-(1-k)(1-b)} =$$

$$= \frac{b}{1-(1-k)(1-b)}$$

$$P(B) = \frac{b}{1-(1-b)(1-k)}$$

5. Рассматриваются всевозможные последовательности из чисел 1 и -1 длиной n. Для каждой вычисляется квадрат суммы членов. Найдите среднее арифметическое получившихся величин.

$$\xi = \begin{cases} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{cases}$$

$E\xi_i = 0$ $\qquad$ $D\xi = \sum D\xi_i = n$

$E\xi_i^2 = 1$ $\qquad$ $D\xi_i = M(\xi^2) - \cancel{M}(\xi)^2$, $\quad M(\xi) \to 0$

$D\xi_i = 1$ $\qquad$ $\Rightarrow M(\xi^2) = n$

6. В группе детского сада n человек разного роста. Они встали в круг. Ребёнок скажет, что он высокий, если он выше двух своих соседей. Сколько в среднем детсадовцев назовут себя высокими?

$x_1 < x_2 \ldots < x_n$

I_k $\begin{cases} 1 & \text{если выше соседей} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$ $\to \dfrac{(k-1)\cdot(k-2)}{(n-1)(n-2)}$

$$E[I] = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)\cdot(k-2)}{(n-1)(n-2)} = \frac{\sum (k-1)\cdot(k-2)}{(n-1)(n-2)}$$

11. Магазин «Крокус и Кактус» объявил акцию: если покупатель берет три товара, то самый дешевый из них ему достается бесплатно. Покупатель взял десять товаров, все разной цены: за 100 рублей, за 200 рублей, за 300 рублей и так далее – самый дорогой товар стоил 1000 рублей. Найдите математическое ожидание суммы, которую покупатель заплатит, если разложит покупки случайным образом.

$100 \ldots 1000$

$100 \cdot k$ руб $k = 1 \ldots 10$

$I_k = \begin{cases} 1 & \text{если не зап.} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

$\frac{C^2_{10-k}}{C^2_9} = \frac{(10-k)(9-k)}{72}$

$I_k \quad \begin{matrix} 0 & 1 \\ -\frac{k^2-19k+18}{72} & \frac{k^2-19k+90}{72} \end{matrix}$

$S = 100 I_1 + 200 I_2 \ldots + 1000 I_{10} =$
$= 100 \sum_{k=1}^{10} k I_k$

$ES = \sum_{k=1}^{10} 100 \frac{k(k^2-19k+98)}{72}$

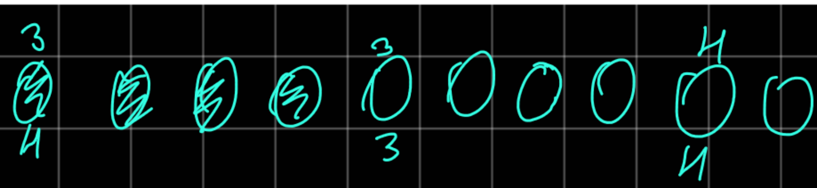
$\frac{100+1000}{2} \cdot 10 - 916\frac{2}{3} = 4583\frac{1}{3}$ р

12. На конференцию приехали 18 учёных, из которых ровно 10 знают сногсшибательную новость. Во время перерыва (кофе-брейка) все учёные разбиваются на случайные пары, и в каждой паре каждый, кто знает новость, рассказывает эту новость другому, если тот её ещё не знал.

а) Найдите вероятность того, что после кофе-брейка число учёных, знающих новость, будет равно 13.

б) Найдите вероятность того, что после кофе-брейка число учёных, знающих новость, будет равно 14.

в) Обозначим буквой X количество учёных, которые знают сногсшибательную новость после кофе-брейка. Найдите математическое ожидание X.

б) 

$C_{18}^{10} = 43758$

$C_9^4 \cdot C_5^2 \cdot 2^4 = 20160$

$$\frac{20160}{43758}$$

в) $I_k = \begin{cases} 1 \to зн \\ 0 \to нез \end{cases}$ $\quad k = 1, \dots 8$

$EI_k = \frac{10}{17}$

$X = 10 + I_1 + I_2 \dots I_k$

$EX = 10 + 8\frac{10}{17} \approx 14,7$

$I_k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{7}{17} & \frac{10}{17} \end{pmatrix}$

13. В зимнем лагере в комнате живут Ваня и Гриша. Каждый вечер они бросают жребий, кому гасить свет перед сном: дело в том, что выключатель около двери, и проигравшему приходится идти к кровати в полной темноте, натыкаясь на стулья. Обычно Ваня и Гриша бросают жребий без затей, но в этот раз Гриша придумал особенный жребий:

– Давай бросать монету. Если при каком-то чётном броске выпадет орёл, то дальше монету не бросаем: я выиграл. Если же при каком-то нечётном броске выпадет решка, то выиграл ты.

а) Какова вероятность выигрыша Гриши?

б) Найдите математическое ожидание числа бросков монеты до окончания жребия.

0 1

Р Ор

0,10101010

$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} \ldots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$

$S = \frac{b_1}{1-q}$

ОР ⇒ игр. дальше

РО > выигр. В

РР

ОО — выиграл Г