

# Задача Штейнера

Самсонов Владислав  
395 группа ФИВТ ПМИ  
e-mail: vvladxx@gmail.com

29 декабря 2015

## 1 Введение

В данной работе рассматривается задача построения дерева Штейнера. Кроме того, будет рассмотрен метрический вариант задачи в пространстве  $(X, \rho)$  с произвольной метрикой и решена задача построения дерева Штейнера в евклидовом пространстве  $\mathbb{E}^2$ . Алгоритм, представленный в работе, имеет оптимальное время работы  $O(n \log n)$  и показатель аппроксимации  $a = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1.15\dots$

## 2 Теоретические сведения

### 2.1 Базовые определения

<b>MST</b> ( $G$ )	Минимальное остовное дерево для графа $G$ .
<b>ST</b> ( $G, V_0$ )	Дерево Штейнера графа $G$ .
<b>EST</b> ( $P$ )	Евклидово дерево Штейнера для набора точек $P$ .
<b>DT</b> ( $P$ )	Триангуляция Делоне для набора точек $P$ .

*Деревом Штейнера* для графа  $G = (V, E)$  и набора вершин  $V_0 \subseteq V$  называется дерево  $T \subseteq G$  минимального веса, проходящее по всем вершинам  $V_0$ .

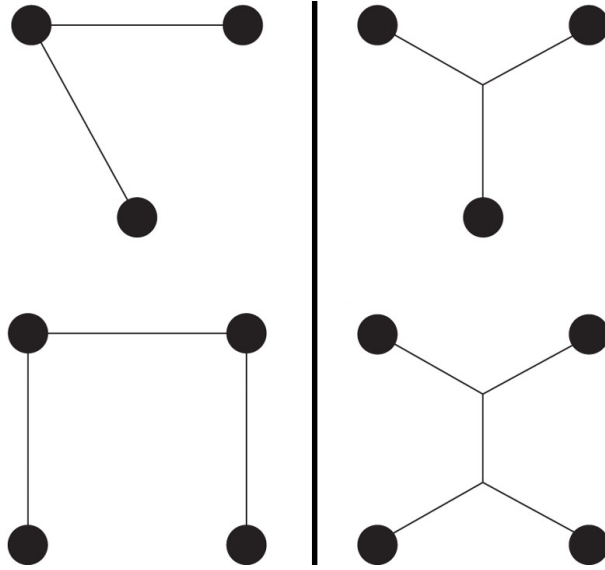


Рис. 1: MST (слева) и дерево Штейнера (справа) в  $\mathbb{E}^2$

*Метрическим деревом Штейнера* в пространстве  $(X, \rho)$  для конечного набора точек  $P \subset X$  называется  $\mathbf{ST}(G, P)$ , где  $G = (V, E)$  – полный граф,  $V = X$ , а вес ребра  $(v, u) \in X \times X$  определяется метрикой  $\rho(v, u)$ .

*Евклидовым деревом Штейнера* для конечного набора точек  $P \subset \mathbb{E}$  называется метрическое дерево Штейнера в евклидовом пространстве с евклидовой метрикой.

*Минимальным остовным деревом* для графа  $G = (V, E)$  называется дерево  $T \subseteq G$  минимального веса, проходящее по всем вершинам  $V$ .

*Триангуляцией Делоне* для набора точек  $P$  в  $\mathbb{E}^2$  называется разбиение плоскости на непересекающиеся треугольники с вершинами из  $P$  таким образом, что все точки  $P$  принадлежат хотя бы одному треугольнику и для любого треугольника  $t$  триангуляции выполняется критерий Делоне: никакая из точек  $p \in P$  не лежит строго внутри окружности, описанной вокруг  $t$ .

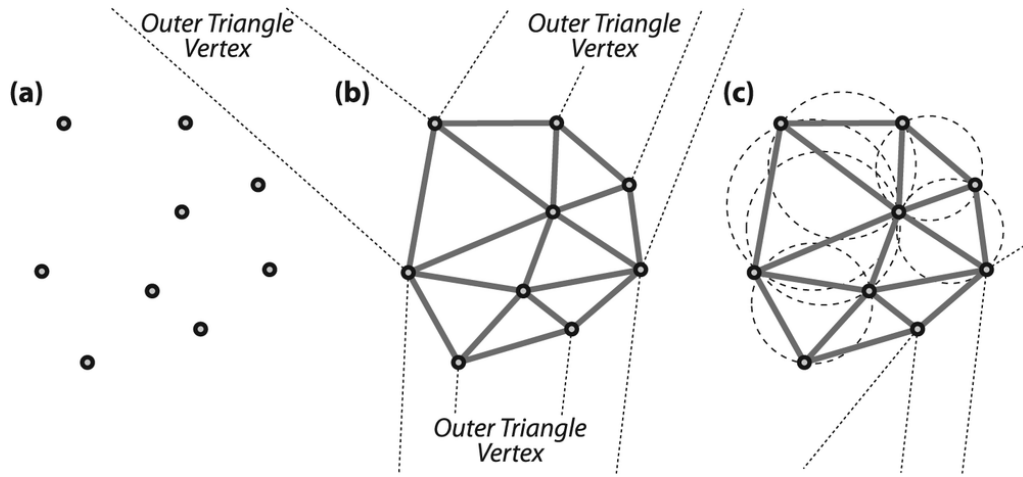


Рис. 2: Триангуляция Делоне

## 2.2 Задача Штейнера

Далее будем рассматривать соответствующую задачу распознавания: существует ли дерево Штейнера весом не более  $k$ .

**Теорема 1.** *Все постановки задачи Штейнера (общая/метрическая/евклидова) лежат в  $\mathbf{NP}$ .*

*Доказательство.* В качестве сертификата можно предъявить искомый набор рёбер. Все проверки на корректность дерева и сумму рёбер выполняются очевидным образом и за полиномиальное время.  $\square$

**Теорема 2.**  $\mathbf{ST}(G, V_0)$  является  $\mathbf{NP}$ -полной.

*Доказательство.* Из теоремы 1 и следующей теоремы очевидным образом следует утверждение этой теоремы, поскольку метрический вариант задачи является частным случаем общей постановки и сводится к общей. Будем сразу доказывать  $\mathbf{NP}$ -полноту метрической задачи Штейнера.  $\square$

**Теорема 3.** *Метрическая задача Штейнера является  $\mathbf{NP}$ -полной.*

*Доказательство.* Покажем, что задача о вершинном покрытии ( $\mathbf{VC}(G)$ ) полиномиально сводится к метрической задаче Штейнера.

Пусть дан граф  $G = (V, E)$  из задачи о вершинном покрытии. Построим

полный граф  $G'$  следующим образом: в нём  $|V| + |E|$  вершин,  $v'$  соответствуют  $v \in V$  и  $v'_{uv}$  соответствуют  $(u, v) \in E$ .

Определим расстояния между вершинами  $G'$ :

- $\forall (u, v) \in E : \rho(u', v'_{uv}) = \rho(v', v'_{uv}) = \rho(v'_{uv}, u') = \rho(v'_{uv}, v') = 1$
- $\forall u, v \in V : \rho(u', v') = \rho(v', u') = 1$
- $\forall u \in V \forall (v, z) \in E, \text{ т.ч. } u \neq v \neq z : \rho(u', v'_{vz}) = \rho(v'_{vz}, u') = 2$
- $\forall e, e' \in E$ : если рёбра  $e$  и  $e'$  имеют общую вершину, то  $\rho(v'_e, v'_{e'}) = \rho(v'_{e'}, v'_e) = 2$ , иначе  $\rho(v'_e, v'_{e'}) = \rho(v'_{e'}, v'_e) = 3$

Расстояния, определённые таким образом, удовлетворяют неравенству треугольника, а значит  $G'$  – корректная постановка метрической задачи Штейнера.

**Лемма 1.** *Если в  $G$  есть вершинное покрытие размера  $k$ , то в  $G'$  есть дерево Штейнера весом  $m + k - 1$ .*

*Доказательство.* Пусть  $S \subset V$  – вершинное покрытие. Рассмотрим точки  $\{v' \in V' : v \in V\}$  и точки  $\{v'_{uv} \in V' : (u, v) \in E\}$  и посмотрим на все рёбра длины 1 между ними. В результате такого описания получился индуцированный связный подграф  $G'$ , потому что любая вершина  $u'$  соединена ребром длины 1 с любой другой  $v'$ , а каждая  $v'_{uv}$  соединена с  $u'$ . Любое остовное дерево этого связного подграфа в  $G'$  имеет  $m + k - 1$  рёбер длины 1, а значит условие леммы выполнено.  $\square$

**Лемма 2.** *Если в  $G'$  есть дерево Штейнера весом  $\leq m + k - 1$ , то в  $G$  есть вершинное покрытие размера  $k$ .*

*Доказательство.* Пусть  $T$  – дерево Штейнера весом  $\leq m + k - 1$ . Сперва мы изменим дерево таким образом, что у него не будет рёбер длины 2 или 3. Будем повторять следующие действия:

- Если есть ребро длины 2 между  $w'$  и  $v'_{uv}$ , мы удаляем ребро (ставим  $\infty$ ) из дерева и добавляем 2 новых ребра длины 1:  $(w', u')$  и  $(u', v'_{uv})$ .
- Если есть ребро длины 2 между  $v'_{uv}$  и  $v'_{vw}$ , мы удаляем ребро (ставим  $\infty$ ) из дерева и добавляем 2 новых ребра длины 1:  $(v'_{uv}, v')$  и  $(v', v'_{vw})$ .

- Наконец, если есть ребро длины 3 между  $v'_{uv}$  и  $v'_{wz}$ , мы удаляем ребро (ставим  $\infty$ ) из дерева и добавляем 3 новых ребра длины 1:  $(v'_{uv}, v')$ ,  $(v', w')$  and  $(w', v'_{wz})$ .

Мы повторяем действия, описанные выше, пока в графе есть рёбра длины 2 или 3. Этот процесс не увеличивает стоимость и в результате получается связный граф. Мы можем получить дерево удалением рёбер (и уменьшением стоимости) если нужно.

В полученном дереве есть только рёбра длины 1 и его вес  $\leq m + k - 1$ , т.е. оно содержит  $\leq m + k$  вершин.  $m$  вершин  $v'_{uv}$  должны быть в дереве, значит в дереве  $\leq k$  вершин  $v'$ . Пусть  $S$  – множество этих вершин. Можно заметить, что это и есть вершинное покрытие для  $G$ . В самом деле, для любого ребра  $(u, v) \in G$  вершина  $v'_{uv}$  соединена с  $v'$  в дереве только рёбрами длины 1, что означает, что либо  $u'$ , либо  $v'$  в дереве, и либо  $u$ , либо  $v$  в  $S$ .  $\square$

Таким образом, мы полиномиально свели  $\mathbf{VC}(G)$  к метрической задаче Штейнера.  $\square$

**Теорема 4.** *Длина MST в метрической задаче Штейнера не более удвоенного веса минимального дерева Штейнера.*

*Доказательство.* Обозначим вес минимального дерева Штейнера за  $L_s$ . Заменим в этом дереве каждое ребро на двойное ребро. Получили дерево с чётным количеством рёбер, а значит в нём можно выделить эйлеров цикл. Теперь склеим двойные рёбра обратно в одно. Эйлеров цикл будет проходить по всем вершинам графа  $G$  (возможно по несколько раз) и иметь длину  $2L_s$ . Но, с другой стороны, граф  $G$  полный, а значит в нём существует гамильтонов цикл минимального веса  $L_g$ . Тогда  $L_g \leq 2L_s$ . Обозначим длину MST за  $L_m$ . Если удалить одно ребро из минимального гамильтонова цикла, то получится какое-то остовное дерево длины  $L$ , при этом  $L \leq L_g$  (т.к. удалили ребро) и  $L_m \leq L$  (т.к.  $L_m$  – длина минимального остовного дерева).

В итоге получаем следующую цепочку:  $L_m \leq L \leq L_g \leq 2L_s$ .  $\square$

## 2.3 Алгоритм 2-аппроксимации для метрической задачи Штейнера

Пусть в пространстве  $(X, \rho)$  требуется решить метрическую задачу Штейнера для графа  $G(X, E)$  и конечного набора точек  $P$ .

Тогда достаточно построить минимальное остовное дерево для индуцированного подграфа  $G$  вершинами  $P$ .

**Теорема 5.** *Данный алгоритм имеет показатель аппроксимации не больше 2.*

*Доказательство.* Прямое следствие из теоремы 4:

$$a = \sup \frac{p^*}{p} = \sup \frac{L_m}{L_s} \leq 2$$

Тут  $p^*$  – найденное решение,  $p$  – минимальное решение. □

**Теорема 6.** *Данный алгоритм имеет сложность  $O(|P|^2)$ .*

*Доказательство.* Так как индуцированный подграф полный и содержит  $C_{|P|}^2 \sim |P|^2$  рёбер, то задачу построения MST можно решать алгоритмом Прима для полных графов за  $O(|P|^2)$ . □

## 2.4 Алгоритм для евклидовой задачи Штейнера

Рассмотрим задачу нахождения дерева Штейнера в  $\mathbb{E}^2$ , то есть на плоскости. В этом случае, разумеется, можно решать задачу алгоритмом для метрической задачи Штейнера. Однако, в этом частном случае алгоритм можно ещё немного улучшить, как в показателе аппроксимации, так и по времени работы.

**Теорема 7** (Нижняя оценка для показателя аппроксимации).  $a \geq \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

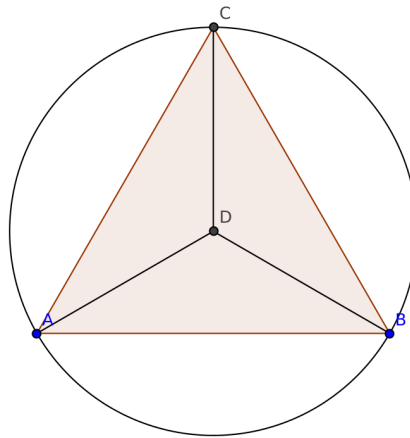


Рис. 3: Пример

*Доказательство.* Рассмотрим конфигурацию точек  $P = \{A, B, C\}$ , показанную на рисунке. Точки  $ABC$  образуют равносторонний треугольник со стороной 1. Деревом Штейнера будут отрезки  $AD$ ,  $BD$ ,  $CD$  длиной  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  каждый, то есть вес дерева Штейнера  $\sqrt{3}$ . Но вес минимального остова 2, откуда получаем  $a \geq \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .  $\square$

**Теорема 8** (Верхняя оценка для показателя аппроксимации).  $a \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

Это утверждение долгое время оставалось открытой гипотезой. Экспериментально гипотеза хорошо подтверждается. Доказательство этой теоремы можно посмотреть в [2], но в нём была найдена ошибка [3]. Поэтому, оставим эту теорему без доказательства.

Теперь будем улучшать время работы.

**Лемма 3.** В  $\mathbf{DT}(P)$  не более  $3|P| - 3$  рёбер и не более  $2|P| - 2$  треугольников.

*Доказательство.* Пусть  $T$  – количество треугольников,  $E$  – количество рёбер. Все рёбра принадлежат ровно двум треугольникам кроме тех  $K$  рёбер, которые лежат на выпуклой оболочке  $\mathbf{CONV}(P)$  – в этом случае, очевидно, ребро принадлежит только одному треугольнику.

$$2E - K = 3T \implies 2E \geq 3T$$

Далее, пользуемся  $|P| - E + (T + 1) = 2$  (формула Эйлера для планарных графов), получаем нужные соотношения.  $\square$

**Лемма 4.**  $\mathbf{MST}(P) \subseteq \mathbf{DT}(P)$

*Доказательство.* См. [4]  $\square$

**Лемма 5.**  $\mathbf{DT}(P)$  можно построить за  $O(|P| \log |P|)$ .

*Доказательство.* См. [5]  $\square$

**Теорема 9.**  $\mathbf{MST}(P)$  для  $|P|$  точек в  $\mathbb{E}^2$  можно построить за  $O(|P| \log |P|)$ .

*Доказательство.* Прямое следствие из леммы 3-5. Строим  $\mathbf{DT}(P)$ . Теперь из  $\mathbf{DT}(P)$  мы можем выделить  $\mathbf{MST}(P)$ . Так как по лемме 3 в полученном графе рёбер не слишком много, то достаточно воспользоваться алгоритмом Прима/Краскала и получить требуемый результат.  $\square$

Таким образом, полученный алгоритм имеет хороший показатель аппроксимации  $a = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1.15\dots$  и оптимальное время работы. Оптимальность следует из того, что с помощью евклидова дерева Штейнера можно сортировать действительные числа, расположив их на одной прямой. В результате построения дерева штейнера для такой конструкции соседние числа будут соединены ребром, то есть получится двусвязный список отсортированных чисел. Как известно,  $N \log N$  – нижняя граница для сортировки  $N$  произвольных действительных чисел. Те же самые рассуждения применимы и для минимального остовного дерева. Это значит, что представленный алгоритм является оптимальным.

### 3 Тестирование

Тестирование проводилось на точках, сгенерированных случайно и равномерно распределённых внутри квадрата  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Программа вычисляла аппроксимацию веса дерева Штейнера. Ошибка вычисляется относительно точного ответа по формуле  $1 - \frac{A}{A_{opt}}$ . Для большого количества точек точный ответ не известен (слишком долго считается) и ошибка не указана.

Число точек	Время работы (сек.)	Ошибка
10	0.0001	0.12
$10^2$	0.0002	0.09
$10^3$	0.0033	0.08
$10^4$	0.0401	—
$10^5$	0.1713	—

### 4 Реализация на языке C++

Исходный код можно найти в `./src`.  
`main.cpp` — основная программа.

### Список литературы

- [1] U.C. Berkeley — CS172: Automata, Computability and Complexity, Professor Luca Trevisan. 2015.



- [2] A.O. Ivanov and A.A. Tuzhilin — Minimal networks: the Steiner problem and its generalizations, CRC press, 1994. Page 167, Theorem 3.1.
- [3] A.O. Ivanov and A.A. Tuzhilin — The Steiner Ratio Gilbert-Pollak Conjecture Is Still Open, *Algorithmica* February 2012, Volume 62, Issue 1, pp 630-632.
- [4] Godfried T. Toussaint — The relative neighbourhood graph of a finite planar set, *Pattern Recognition* Vol. 12, Issue 4, 1980, Pages 261–268.
- [5] D.T. Lee, B.J. Schachter — Two algorithms for constructing a Delaunay triangulation, *International Journal of Computer & Information Sciences*, June 1980, Vol. 9, Issue 3, pp 219-242.