Санкт-Петербургский Государственный Университет
Математико-механический факультет
Прикладная математика и информатика

Вычислительный практикум

Отчёт по лабораторной работе №1

Работу выполнил:
Чулкин В.П.
Группа:
21.Б06-мм
Преподаватель:
Алцыбеев Г.О.

Санкт-Петербург
2023

Постановка задачи

Пусть дано алгебраическое или трансцендентное уравнение вида (1) $f(x) = 0$, причем, известно, что все интересующие вычислителя корни находятся на отрезке $[A, B]$, на котором функция $f(x)$ определена и непрерывна. Требуется найти все корни уравнения (1) на [A, B] нечетной кратности (здесь A, B, $f(x)$ - параметры задачи).

Решение должно быть разбито на два этапа:

1. Процедура отделения корней уравнения (1) на отрезке $[A, B]$;
2. Уточнение корней уравнения (1) на отрезках перемены знака вида $[a_i, b_i]$
   (a) Методом половинного деления (методом бисекции);
   (b) Методом Ньютона (методом касательных);
   (c) Модифицированным методом Ньютона;
   (d) Методом секущих с заданной точностью $\varepsilon > 0$ (ε –параметр задачи).

Примечания:

1. Требования к оформлению задачи: вывести на печать название темы, исходные параметры задачи: A, B, вид функции $f(x)$, ε.
2. Отделение корней произвести способом табулирования $[A, B]$ с шагом $h > 0$ (где $h = (B–A)/N$, $N \geq 2$ – параметр задачи). При реализации выбирать достаточно малые значения h. Результатом решения задачи отделения корней является последовательный вывод отрезков перемены знака функции $f(x)$ вида $[a_i, b_i]$ из $[A, B]$, а также указание их количества.
3. При уточнении корней на каждом из отрезков $[a_i, b_i]$ указанными методами выводить на печать (для каждого метода)
   - название метода (для порядка);
   - начальное(ые) приближение(я) к корню;
   - количество шагов m (в каждом методе своё) для достижения точности ε, такой что $|x_m – x_{m-1}| < \varepsilon$;
   - приближенное решение x_m уравнения (1), найденное каждым из упомянутых методов с точностью ε;
   - $|x_m – x_{m-1}|$ (в методе бисекции выводить длину последнего отрезка);
   - абсолютную величину невязки для прибл. решения $x_m : |f(x_m) – 0|$.

Решение задачи

Я решил эту задачу на языке C++ и загрузил код в github репозиторий.

Отделение корней

Для отделения корней была написана функция separate_root_segments(double func(double), double a, double b, int n), где функция double func(double) - функция $f(x)$, a и b - левая и правая границы соответственно и n - количество делений.

Она просто разделяет этот отрезок на n равных частей и возвращает список пар чисел $[a_i, b_i]$, где func(a_i) и func(b_i) отличаются знаками (в том числе вернётся пара, у которой значение на одном из концов будет равняться нулю).

Уточнение корней: метод бисекции

Для нахождения приближения к корню уравнения методом бисекции я написал функцию bisection_localize_root(double func(double), double a, double b, double eps), где функция func - функция $f(x)$, a и b - левая и правая границы соответственно и eps - искомая точность ε.

Она делит отрезок пополам и выбирает половину, где значение $f(x)$ концов имеет разный знак, если середина отрезка является корнем $f(x)$ или длина отрезка становится $\leq 2\varepsilon$, то деление прекращается.

Уточнение корней: метод Ньютона

Для нахождения приближения к корню уравнения методом Ньютона я написал функцию newtons_localize_root(double func(double), double derfunc(double), double a, double b, double eps), где функция func - функция $f(x)$, derfunc - её производная, a и b - левая и правая границы соответственно и eps - искомая точность ε.

В качестве начального приближения здесь можно выбрать любую точку из отрезка, и я решил выбрать середину $[a, b]$. Итак, $x_0 = \frac{(a+b)}{2}$, каждый последующий член последовательности будет вычисляться по формуле $x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$. Проверки на то, будет ли сходиться к корню, не предусмотрено, есть лишь проверка на то, попало ли приближение корня в изначальный отрезок $[a, b]$.

Уточнение корней: модифицированный метод Ньютона

Для нахождения приближения к корню уравнения модифицированным методом Ньютона я написал функцию newtons_modified _localize_root(double func(double), double derfunc(double), double a, double b, double eps), где функция func - функция $f(x)$, derfunc - её производная, a и b - левая и правая границы соответственно и eps - искомая точность ε.

Аналогично методу Ньютона, в качестве начального приближения здесь можно выбрать любую точку из отрезка, и я решил выбрать середину $[a, b]$. Итак, $x_0 = \frac{(a+b)}{2}$, каждый последующий член последовательности будет вычисляться по формуле $x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_0)}$. Проверки на то, будет ли сходиться к корню, не предусмотрено, есть лишь проверка на то, попало ли приближение корня в изначальный отрезок $[a, b]$.

Уточнение корней: метод Секущих

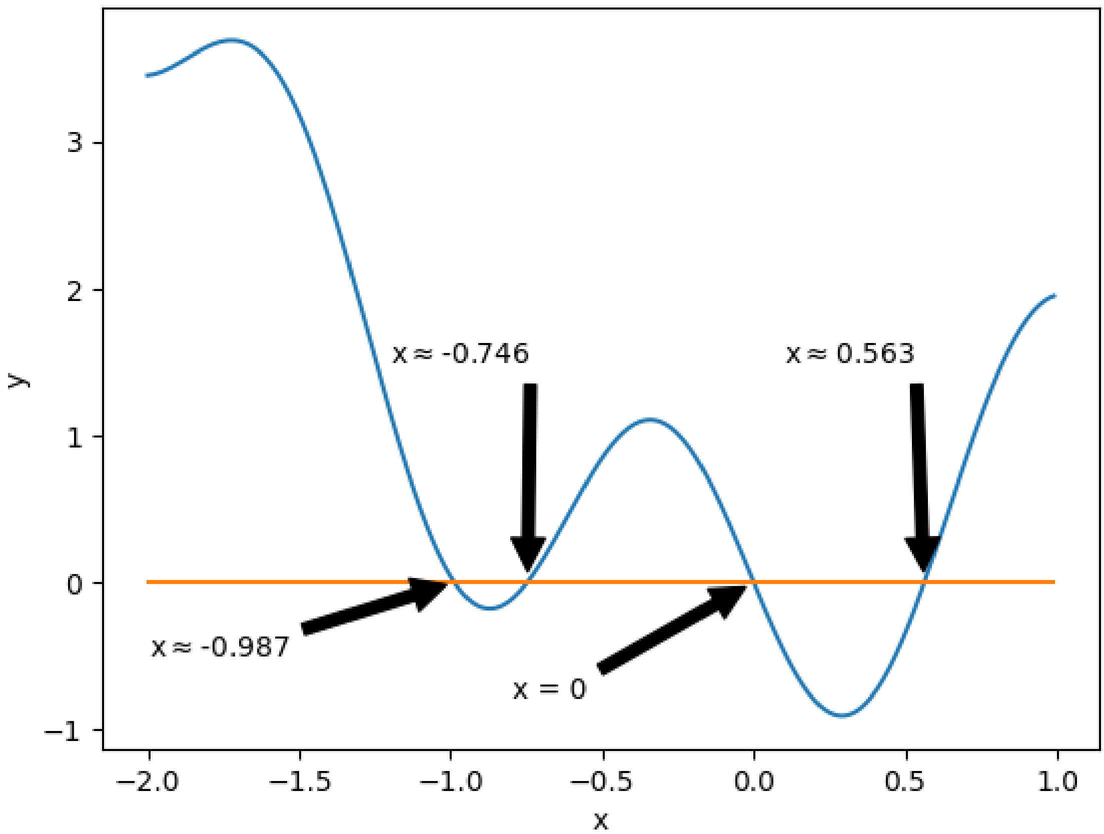
Для нахождения приближения к корню уравнения методом секущих я написал функцию secant_localize_root(double func(double), double a, double b, double eps), где функция func - функция $f(x)$, a и b - левая и правая границы соответственно и eps - искомая точность ε.

В качестве начального приближения здесь я решил выбрать левую границу a. Итак, $x_0 = b$, $x_1 = a$ каждый последующий член последовательности будет вычисляться по формуле $x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f(x_{k-1})-f(x_{k-2})}(x_{k-1} - x_{k-2})$. Проверки на то, будет ли сходиться к корню, не предусмотрено, есть лишь проверка на то, попало ли приближение корня в изначальный отрезок $[a, b]$.

Работа программы

Параметры моей задачи были следующими $\mathbf{A} = -1, \mathbf{B} = 2, \mathbf{f}(\mathbf{x}) = x^2 - \sin(5x), \varepsilon = 1e-8$. Количество отрезков n я выбрал равным 100.

Рисунок 0.1. График функции $f(x) = x^2 - \sin(5x)$



Вывод программы

```
Численные методы решения нелинейных уравнений

A=-2, B=1, f(x)=x^2-sin(5x), eps=1e-08

Отделение корней: всего отделено 4 отрезков.
1-й сегмент: [-1.01 -0.98].
2-й сегмент: [-0.77 -0.74].
3-й сегмент: [-0.02 0.01].
```

```
4-й сегмент: [0.55 0.58].

Сегмент [-1.01 -0.98].
Метод бисекций
Начальное приближение: -0.995
Количество шагов: 21
Длина последнего отрезка: 1.43051e-08
Невязка |f(x_m)|: 1.70945e-08
Приближение корня: -0.987375.
Метод Нютона
Начальное приближение: -0.995
Количество шагов: 4
Длина последнего отрезка: 2.24154e-13
Невязка |f(x_m)|: 1.11022e-16
Приближение корня: -0.987375.
Модифицированный метод Ньютона:
Начальное приближение: -0.995
Количество шагов: 6
Длина последнего отрезка: 2.94666e-09
Невязка |f(x_m)|: 5.90052e-10
Приближение корня: -0.987375.
Метод секущих
Начальное приближение: -1.01
Количество шагов: 5
Длина последнего отрезка: 4.13986e-11
Невязка |f(x_m)|: 1.11022e-16
Приближение корня: -0.987375.

Сегмент [-0.77 -0.74].
Метод бисекций
Начальное приближение: -0.755
Количество шагов: 21
Длина последнего отрезка: 1.43051e-08
Невязка |f(x_m)|: 1.03722e-08
Приближение корня: -0.746555.
Метод Нютона
Начальное приближение: -0.755
Количество шагов: 4
Длина последнего отрезка: 7.9825e-14
Невязка |f(x_m)|: 1.11022e-16
Приближение корня: -0.746555.
Модифицированный метод Ньютона:
Начальное приближение: -0.755
Количество шагов: 6
Длина последнего отрезка: 2.25824e-09
Невязка |f(x_m)|: 3.12127e-10
Приближение корня: -0.746555.
Метод секущих
Начальное приближение: -0.77
Количество шагов: 5
```

```
Длина последнего отрезка: 7.35101e-12
Невязка |f(x_m)|: 4.44089e-16
Приближение корня: -0.746555.

Сегмент [-0.02 0.01].
Метод бисекций
Начальное приближение: -0.005
Количество шагов: 21
Длина последнего отрезка: 1.43051e-08
Невязка |f(x_m)|: 1.19209e-08
Приближение корня: 2.38419e-09.
Метод Нютона
Начальное приближение: -0.005
Количество шагов: 3
Длина последнего отрезка: 3.12271e-12
Невязка |f(x_m)|: 9.75209e-24
Приближение корня: -1.95042e-24.
Модифицированный метод Ньютона:
Начальное приближение: -0.005
Количество шагов: 3
Длина последнего отрезка: 6.64305e-09
Невязка |f(x_m)|: 5.60512e-11
Приближение корня: -1.12102e-11.
Метод секущих
Начальное приближение: -0.02
Количество шагов: 4
Длина последнего отрезка: 4.67333e-13
Невязка |f(x_m)|: 3.44815e-20
Приближение корня: 6.8963e-21.

Сегмент [0.55 0.58].
Метод бисекций
Начальное приближение: 0.565
Количество шагов: 21
Длина последнего отрезка: 1.43051e-08
Невязка |f(x_m)|: 2.09315e-08
Приближение корня: 0.563656.
Метод Нютона
Начальное приближение: 0.565
Количество шагов: 3
Длина последнего отрезка: 1.93157e-12
Невязка |f(x_m)|: 1.11022e-16
Приближение корня: 0.563656.
Модифицированный метод Ньютона:
Начальное приближение: 0.565
Количество шагов: 3
Длина последнего отрезка: 3.39319e-09
Невязка |f(x_m)|: 4.49725e-11
Приближение корня: 0.563656.
Метод секущих
```

```
Начальное приближение: 0.55
Количество шагов: 4
Длина последнего отрезка: 3.6518e-10
Невязка |f(x_m)|: 4.32987e-15
Приближение корня: 0.563656.
```