

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

Лабораторна робота №1
з дисципліни
“Проблеми багатозначного аналізу”
на тему:

**“ДОСЛІДЖЕННЯ СУБДИФЕРЕНЦІАЛА ФУНКЦІЇ ТА
РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ НЕГЛАДКОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ”**

Виконала
студентка групи ПМ-1
Чернорай Владислава Олегівна

2024

ЗМІСТ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ.....	3
ОПИС МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ.....	3
ОПИС ПРОГРАМНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ.....	5
РЕЗУЛЬТАТИ.....	7
ВИСНОВОК.....	12
ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ.....	12

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Задана функція

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1x_2 + |2x_1 - x_2 - 1| + |x_1 + 2x_2 + 1|$$
$$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

Знайти субдиференціал функції $f(x)$, проаналізувати його властивості як багатозначного відображення. Побудувати графік субдиференціалу функції $f(x)$ або відобразити його характеристики. Розв'язати задачу

$$f(x) \rightarrow \min$$

застосовуючи один з числових методів негладкої оптимізації.

ОПИС МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

1. Знаходження субдиференціала функції $f(x)$

Знайдемо субдиференціал [\[1\]](#) заданої функції, яка містить абсолютні значення. Спершу переконаємось у його існуванні.

Функція, наведена в умові, є опуклою, оскільки вона складається із суми опуклих функцій. Для будь-якої опуклої функції, визначеної на відкритій опуклій множині, завжди існує принаймні один субградієнт у кожній точці цієї множини, що означає непорожність субдиференціала.

Оскільки функція включає абсолютні значення, обчислення субдиференціала виконується через розрахунок частинних похідних кожного компонента з урахуванням випадків негладкості.

1.1. Обчислення частинних похідних для гладкої частини:

$$\frac{\partial(x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1x_2)}{\partial x_1} = 2x_1 + 2x_2$$

$$\frac{\partial(x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1x_2)}{\partial x_2} = 8x_2 + 2x_1$$

1.2. Частинні похідні для негладких компонентів:

1.2.1. Для виразу $h_1(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2 - 1$

$$\frac{\partial h_1}{\partial x_1} = \begin{cases} 2 & , \text{якщо } 2x_1 - x_2 - 1 > 0, \\ -2 & , \text{якщо } 2x_1 - x_2 - 1 < 0, \\ [-2, 2] & , \text{якщо } 2x_1 - x_2 - 1 = 0. \end{cases}$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial x_2} = \begin{cases} 1 & , \text{якщо } 2x_1 - x_2 - 1 > 0, \\ -1 & , \text{якщо } 2x_1 - x_2 - 1 < 0, \\ [-1, 1] & , \text{якщо } 2x_1 - x_2 - 1 = 0. \end{cases}$$

1.2.2. Для виразу $h_2(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 + 1$

$$\frac{\partial h_2}{\partial x_1} = \begin{cases} 1 & , \text{якщо } x_1 + 2x_2 + 1 > 0, \\ -1 & , \text{якщо } x_1 + 2x_2 + 1 < 0, \\ [-1, 1] & , \text{якщо } x_1 + 2x_2 + 1 = 0. \end{cases}$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial x_2} = \begin{cases} 2 & , \text{якщо } x_1 + 2x_2 + 1 > 0, \\ -2 & , \text{якщо } x_1 + 2x_2 + 1 < 0, \\ [-2, 2] & , \text{якщо } x_1 + 2x_2 + 1 = 0. \end{cases}$$

1.3. Субдиференціал функції

Субдиференціал $\partial f(x)$ є сумою частинних похідних для всіх компонентів:

$$\partial f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 + 2x_2 + \frac{\partial h_1}{\partial x_1} + \frac{\partial h_2}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 8x_2 + 2x_2 + \frac{\partial h_1}{\partial x_2} + \frac{\partial h_2}{\partial x_2}$$

2. Розв'язання задачі мінімізації функції

Для вирішення запропонованої задачі мінімізації функції застосовано числовий метод негладкої оптимізації — генетичний алгоритм.

Генетичний алгоритм [\[2\]\[3\]](#) — це метод оптимізації, який моделює природний процес еволюції, застосовуючи операції відбору, схрещування та мутації для створення нових поколінь рішень.

Основні етапи алгоритму:

1. **Ініціалізація популяції:** Генерується початкова популяція рішень (випадкові точки у визначеному просторі).

2. **Оцінка функції пристосованості:** Для кожного рішення обчислюється значення цільової функції (fitness), що показує, наскільки добре це рішення підходить для досягнення мети.
3. **Селекція:** Відбираються найкращі рішення, які будуть використовуватися для створення наступного покоління.
4. **Схрещування:** Комбінуються частини двох рішень для створення нових варіантів.
5. **Мутація:** Змінюються деякі значення в нових рішеннях для збереження різноманітності популяції.
6. **Заміна поколінь:** Нова популяція замінює попередню, і цикл повторюється до досягнення умов зупинки.

ОПИС ПРОГРАМНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ

Програмна реалізація була виконана з використанням Python у середовищі Google Colab.

Посилання на код: [!\[\]\(bd1a142de767a21e5362c595f844a4ff_img.jpg\) Lab_1.ipynb](#)

У роботі було використано такі основні бібліотеки:

- ***numpy*:** Використовується для обчислень з масивами і для створення сітки значень координат.
- ***matplotlib*:** Використовується для побудови векторного поля, контурних ліній і кольорової шкали для величини субградієнта.
- ***mpl_toolkits.mplot3d*:** Для тривимірної візуалізації.
- ***random*:** Використовується для генерації випадкових значень у межах заданого діапазону.

Структура програмної реалізації:

1. Векторне поле субградієнту функції

- 1.1. *def partial_h1_x1(x1, x2), def partial_h1_x2(x1, x2), def partial_h2_x1(x1, x2), def partial_h2_x2(x1, x2)* : Обчислюють часткові похідні для негладких компонент функції (модулів). Залежно від знака виразів під модулем, повертають відповідне значення похідної або випадкове значення, якщо вираз дорівнює нулю.
- 1.2. *def subdifferential(x1, x2)*: Обчислює всі можливі значення субдиференціала функції, комбінуючи похідні гладкої та негладких компонентів.
- 1.3. *def visualize_subdifferential_field()*: Створює графік векторного поля субдиференціала функції.

2. Генетичний алгоритм

2.1. Параметри:

- 2.1.1. *population_size*: Кількість індивідів у кожному поколінні.
- 2.1.2. *generations*: Загальна кількість ітерацій (поколінь).
- 2.1.3. *x1_from, x1_to, x2_from, x2_to*: Межі для змінних *x1* і *x2*, які визначають простір пошуку для цільової функції.
- 2.1.4. *mutation_probability*: Частота мутації генів у кожному поколінні.
- 2.1.5. *early_stop_threshold*: Поріг для ранньої зупинки.

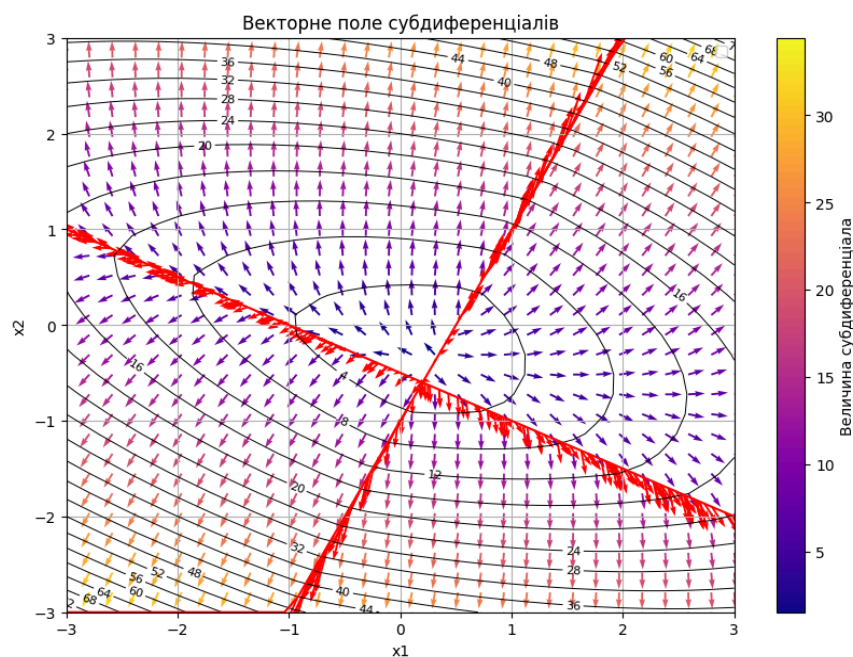
2.2. Основні функції:

- 2.2.1. *def f(x1, x2)*: Обчислює значення цільової функції, яка складається з гладкої квадратичної частини та негладких компонент, що включають модулі.
- 2.2.2. *def generate_population()*: Генерує початкову популяцію з випадкових значень координат *x1* і *x2* у визначеному діапазоні.
- 2.2.3. *def apply_function(individ)*: Обчислює значення цільової функції для заданого індивіда

- 2.2.4. **def sort_population_by_fitness(population):** Сортує популяцію за значенням цільової функції, розташовуючи індивіди з найкращим (мінімальним) значенням на початку списку.
- 2.2.5. **def crossover(first_parent, second_parent):** Створює нового нащадка шляхом схрещування двох батьківських індивідів, комбінуючи їх координати $x1$ та $x2$ з випадковим множником.
- 2.2.6. **def mutate(individ):** Виконує мутацію індивіда, додаючи випадкові зміни до його координат $x1$ і $x2$ в межах допустимого діапазону.
- 2.2.7. **def make_next_generation(previous_population):** Створює нове покоління індивідів на основі відбору, схрещування та мутації з попереднього покоління.

РЕЗУЛЬТАТИ

Знаходження субдиференціала функції $f(x)$ та дослідження багатозначності



На графіку зображено векторне поле субдиференціала функції:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1x_2 + |2x_1 - x_2 - 1| + |x_1 + 2x_2 + 1|$$

Основні елементи графіку:

- **Векторне поле:** Стрілки на графіку показують напрямок та нормовану величину субдиференціала в кожній точці області. Колір стрілок варіюється відповідно до величини субградієнта, що допомагає візуально оцінити силу субдиференціала в різних точках.
- **Червоні лінії:** Відповідають значенням, де вирази під модулем дорівнюють нулю, тобто місцям, де функція змінює свою поведінку.
- **Контурні лінії:** Чорні контурні лінії показують місця де функція набуває однакових значень і надають додаткову інформацію про форму поверхні функції в різних точках площини.

Багатозначність субдиференціала функції виникає на лініях негладкості $2x_1 - x_2 - 1 = 0$ та $x_1 + 2x_2 + 1 = 0$, де вирази під модулями дорівнюють нулю. На цих лініях субдиференціал є множиною векторів, які відповідають всім можливим напрямкам зміни функції. Це означає, що в кожній точці на червоних лініях субдиференціал включає кілька значень, а не єдиний напрямок, що відображає негладкий характер функції в цих областях.

Розв'язання задачі мінімізації функції з використанням генетичного алгоритму

Для дослідження властивостей генетичного алгоритму у задачі мінімізації функції було проведено серію експериментів з різними параметрами.

Номер	Кількість	Кількість	Коефіцієнт	Проміжок	Проміжок	Умова зупинки	Результат
-------	-----------	-----------	------------	----------	----------	---------------	-----------

експерименту	покоління	особин в поколінні	мутації	по x_1	по x_2		x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
1	50	50	0,05	[-6,6]	[-6,6]	Обчислення останнього покоління	0.30670839	-0.38480538	0.98920015
2	50	100	0,05	[-6,6]	[-6,6]	Обчислення останнього покоління	0.31343388	-0.37363829	0.98910465
3	50	200	0,05	[-6,6]	[-6,6]	Обчислення останнього покоління	0.30724401	-0.38539141	0.98826839
4	100	50	0,05	[-6,6]	[-6,6]	Обчислення останнього покоління	0.30492555	-0.38432548	0.99152058
5	100	100	0,05	[-6,6]	[-6,6]	Обчислення останнього покоління	0.30831586	-0.38326696	0.98818162
6	100	200	0,05	[-6,6]	[-6,6]	Обчислення останнього покоління	0.31132823	-0.37648601	0.98868442
7	200	50	0,05	[-6,6]	[-6,6]	Обчислення останнього покоління	0.30702780	-0.38409933	0.98921112
8	200	100	0,05	[-6,6]	[-6,6]	Обчислення останнього покоління	0.30988348	-0.37967321	0.98842274
9	200	200	0,05	[-6,6]	[-6,6]	Обчислення останнього покоління	0.31032225	-0.37933368	0.98812141
10	50	50	0.1	[-6,6]	[-6,6]	Обчислення останнього покоління	0.31386316	-0.36756203	0.99163986
11	50	100	0.1	[-6,6]	[-6,6]	Обчислення останнього покоління	0.30576225	-0.38563615	0.98985485
12	50	200	0.1	[-6,6]	[-6,6]	Обчислення останнього покоління	0.30713493	-0.38424999	0.98900600
13	100	50	0.1	[-6,6]	[-6,6]	Обчислення	0.31255740	-0.37349297	0.98916784

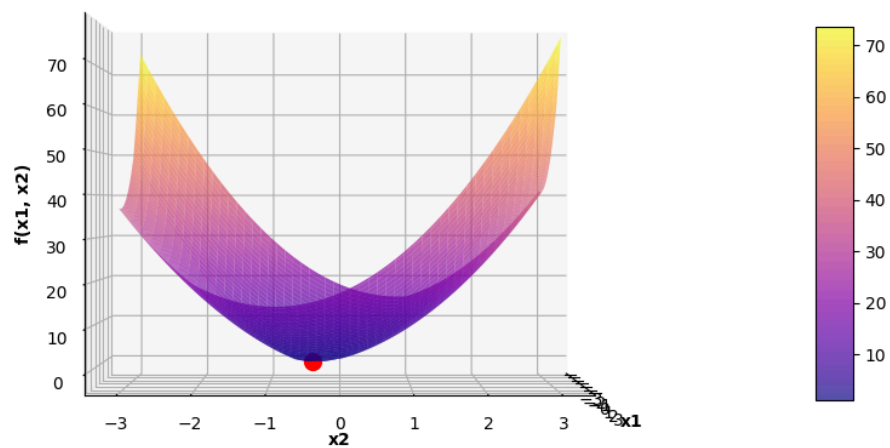
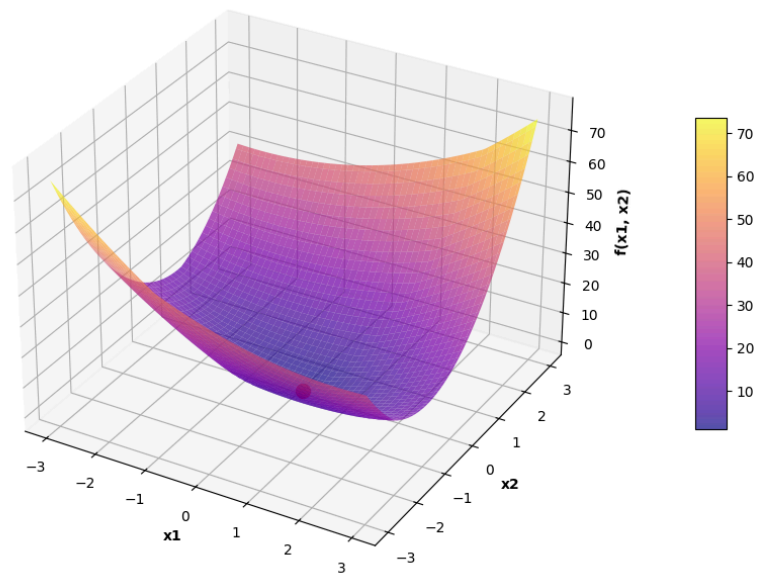
						останнього покоління			
14	100	100	0.1	[-6,6]	[-6,6]	Обчислення останнього покоління	0.31227925	-0.37513157	0.98844755
15	100	200	0.1	[-6,6]	[-6,6]	Обчислення останнього покоління	0.30977510	-0.37991422	0.98840618
16	200	50	0.1	[-6,6]	[-6,6]	Обчислення останнього покоління	0.31288636	-0.37385472	0.98856867
17	200	100	0.1	[-6,6]	[-6,6]	Обчислення останнього покоління	0.30947072	-0.38104099	0.98810532
18	200	200	0.1	[-6,6]	[-6,6]	Обчислення останнього покоління	0.30801284	-0.38384703	0.98821252

Результати показали, що:

1. **Кількість поколінь:** Збільшення до 200 поколінь не дає значного покращення, оскільки алгоритм досягає стабільного результату вже за 50–100 поколінь.
2. **Кількість особин:** Збільшення кількості особин до 200 підвищує стабільність та точність результатів, що дозволяє уникнути локальних мінімумів.
3. **Коефіцієнт мутації:** При коефіцієнті мутації 0.1 алгоритм демонструє більшу різноманітність рішень, що трохи покращує результати порівняно з мутацією 0.05.
4. **Оптимальний результат:** Найменше значення функції досягнуто в експерименті з 200 поколіннями, 200 особинами і мутацією 0.05

$$f(x_1, x_2) \cong 0.988121141$$

На графіках показано поверхню функції $f(x)$ з точкою мінімуму, позначеною червоною крапкою. Точка мінімуму є результатом роботи генетичного алгоритму і показує місце, де функція досягає найменшого значення.



ВИСНОВОК

У даній лабораторній роботі досліджено субдиференціал функції з негладкими компонентами та його багатозначність на лініях негладкості. З використанням генетичного алгоритму було розв'язано задачу мінімізації, досліджено вплив параметрів алгоритму (кількість поколінь, кількість особин у поколінні, коефіцієнт мутації) на результат.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

- [1]. Учасники проектів Вікімедіа. Субдиференціал – Вікіпедія [Електронний ресурс] / Учасники проектів Вікімедіа // Вікіпедія. – Режим доступу: <https://uk.wikipedia.org/wiki/Субдиференціал>
- [2]. ДОСЛІДЖЕННЯ ГЕНЕТИЧНИХ АЛГОРИТМІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ | Cherkasy University Bulletin: Applied Mathematics. Informatics [Електронний ресурс] // Cherkasy University Bulletin: Applied Mathematics. Informatics. – Режим доступу: <https://ami-ejournal.cdu.edu.ua/article/view/3703/>.
- [3]. Academic Journals and Conferences. – Режим доступу: <https://science.lpnu.ua/sites/default/files/journal-paper/2023/oct/31568/paper10.pdf>