Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп’ютерних наук та кібернетики

Лабораторна робота №1
з дисципліни
“Технології чисельного моделювання”
на тему:

“ОБТІКАННЯ СТАЦІОНАРНОЮ ТЕЧІЄЮ ФІКСОВАНОЇ ПЕРЕШКОДИ”

Виконала
студентка групи ПМ-1
Чернорай Владислава Олегівна

2024

ЗМІСТ

УМОВА ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

Вхідні дані

1) L_d — контур в системі координат (задається впорядкованим масивом точок $\{\omega_{oj} = x_{oj} + iy_{oj}\}$, $j = 1,\dots, M$, $\{x_{oj}, y_{oj}\}$, $j = 1,\dots M$.). В даній роботі в якості контуру запропонована літера $\boldsymbol{W}$.
2) M — задана кількість дискретних властивостей;
3) Γ_0 — задана циркуляція течії навколо перешкоди;
4) $\vec{V}_\infty = (u_\infty, v_\infty)$, $|\vec{V}_\infty| = 1$.

Завдання

1. Побудувати векторне поле швидкостей

$$\vec{V}(x, y) = \vec{V}_\infty + \sum_{j=1}^{M} \Gamma_j \vec{V}_j(x, y, x_{0j}, y_{0j}) \ .$$

2. Побудувати ізолінії скалярного поля модуля швидкості
3. Побудувати ізолінії скалярного поля функції потенціалу $\varphi(x, y) = Const$
4. Побудувати ізолінії скалярного поля функції течії $\psi(x, y) = Const$

МАТЕМАТИЧНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо простір R^2 як комплексний простір C і введемо функцію ψ, спряжену до φ. Тоді аналітичний розв'язок для потоку навколо перешкоди можна записати так:

$$\Phi(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

Даний аналітичний розв'язок можна подати у вигляді інтегралу:

$$\Phi(z) = z\overline{V}_{\infty} + \frac{1}{2\pi i}\int\gamma(\omega)In(z - \omega)d\omega + Const,$$

де Φ є характеристичною функцією потоку, а γ — щільність потоку, яку необхідно визначити.

Швидкість потоку можна записати у вигляді:

$$\overline{V(z)} = u(x, y) - iv(x, y) = \frac{\partial\Phi(z)}{\partial z} = \overline{V}_{\infty} + \frac{1}{2\pi i}\int\frac{\gamma(\omega)}{z-\omega}d\omega$$

Звідси випливає додаткова умова для функції γ:

$$\Gamma_o = \int_{L_d}\gamma(\omega)d\omega,$$

де $\gamma(\omega)$ — щільність циркуляції на контурах перешкоди L_d, Γ_0— постійна циркуляції навколо перешкоди.

Для визначення щільності γ скористаємося умовою непроникності. Позначимо $\varphi = Re\Phi$, і отримаємо:

$$Re\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\gamma(\omega)n(\omega_d)}{(\omega_d - \omega)}d\omega\right\} = Re\left\{\overline{V}_{\infty}n(\omega_d)\right\}$$

Це інтегральне рівняння з регулярною правою частиною, розв'язком якого є функція щільності γ.

Розглянемо розбиття контуру L на M частин: $L = \sum_{j=1}^{M} L_j$, де кожна частина має вузли $z_{0j} = (x_{0j}, y_{0j})$.

Позначимо:

$$\Gamma_j = \int \gamma(\omega) d\omega.$$

Середнє значення γ на частині контуру L_j обчислюється за формулою:

$$\gamma_j = \frac{\Gamma_j}{|L_j|}, \text{ де } |L_j| \text{ — довжина контуру } L_j.$$

Тоді характеристична функція потоку $\Phi(z)$ може бути записана як:

$$\Phi(z) = z\overline{V}_\infty + \sum_{j=1}^{M} \frac{\Gamma_j}{2\pi i} In(z - z_0) + O(\varepsilon), \ \varepsilon = \frac{\Delta}{p_0},$$

$$\Delta = max_{j=\overline{1,M}} |L_j|, \ p_0 = min_{\omega \in L} |z - \omega|.$$

Нехтуючи доданком $O(\varepsilon)$, отримуємо наближення функції $\Phi(z)$.

Повертаючись до векторів з простору R^2 та використовуючи отримане наближення, рівняння швидкості потоку можна записати як:

$$\overline{V}(z) = V_\infty + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\gamma(\omega)}{z-\omega} d\omega$$

В точках дискретних особливостей це рівняння набуває вигляду:

$$\sum_{j=1}^{M} \Gamma_j (\overline{V}_j(x_k, y_k), \bar{n}(x_k, y_k)) =- (\overline{V}_\infty, \bar{n}(x_k, y_k)), \ k = \overline{1, M - 1},$$

$$\overline{V}_j(x_k, y_k) = (\frac{y_{0j} - y}{2\pi R_j^2}, \frac{x - x_{0j}}{2\pi R_j^2}),$$

$$R_j = max\{r_j, \sqrt{(x - x_{0j})^2 + (y - y_{0j})^2}\},$$

де r_j – параметр регуляризації.

З урахуванням умови $\int \gamma(\omega) d\omega = \Gamma_0$, можна отримати розбиття $\sum_{j=1}^{M} \Gamma_j = \Gamma_0$. Дане рівняння разом з рівнянням

$$\sum_{j=1}^{M} \Gamma_j (\overline{V}_j(x_k, y_k), \bar{n}(x_k, y_k)) =- (\overline{V}_\infty, \bar{n}(x_k, y_k))$$

утворює систему лінійних алгебраїчних рівнянь для невідомих Γ_j, де $j = \overline{1, M}$. При цьому наближення для функцій $\overline{V}$, ψ, та φ мають вигляд:

$$\overline{V}(x,\ y) \ = \overline{V}_{\infty} \ + \ \sum_{j=1}^{M} \Gamma_j (\overline{V}_j(x\ ,\ y\ )$$

$$\varphi(x,\ y) \ = x u_{\infty} \ + y v_{\infty} \ + \sum_{j=1}^{M} \frac{\Gamma_j}{2\pi} arctan(\frac{(y\ - y_{0j})}{(x\ - x_{0j})})$$

$$\psi(x,\ y) \ = y v_{\infty} - x u_{\infty} - \sum_{j=1}^{M} \frac{\Gamma_j}{2\pi} In(R_j)$$

Для отримання однозначної гілки багатозначної функції Ф слід застосовувати розрізи. В наведених формулах розрізи можна провести з кожного вузла розбиття контуру до нескінченності або ж уздовж всього контуру від першого до останнього вузла та далі до нескінченності. Таким чином, можна перейти від дискретних особливостей до диполів, тобто пар дискретних особливостей. Тоді функція φ набуде відповідного вигляду.

$$\varphi(x,\ y) = x u_{\infty} + y v_{\infty} + \sum_{j=1}^{M} \frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{(y_{0j+1} - y_{0j})(x\ - x_j) - (x_{0j+1} - x_{0j})(x\ - x_j)}{R_j^2} + \frac{\Gamma_0}{2\pi} arctan(\frac{(y\ - y_{0M})}{(x\ - x_{0M})}$$

$$R_j \ = \ max\{\delta,\ \sqrt{(x\ \ - x_{0j})^2 \ + (y\ \ - y_{0j})^2}\},$$

$$\delta \ = \ min_{j=\overline{1, M-1}} \sqrt{(x_{0j+1}\ \ - x_{0j})^2 \ + (y_{0j+1}\ \ - y_{0j})^2}$$

В даній ситуації розріз до нескінченно віддаленої точки виникає лише за умови, що $\Gamma_0 \neq 0$ в останній дискретній особливості. Це відбувається тому, що для цієї особливості не існує пари, з якою вона могла б утворити диполь.

ОПИС ПРОГРАМНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ

Програмна реалізація була виконана з використанням Python у середовищі Google Colab.

Посилання на код: Lab_1.ipynb

У роботі було використано такі основні бібліотеки:

- ***NumPy*** (для виконання чисельних операцій і роботи з масивами)
- ***Matplotlib*** (для візуалізації результатів, включно з векторними і скалярними полями)
- ***Math*** (для базових математичних операцій, таких як обчислення косинуса та синуса)

Програмний код складається з двох основних класів, які розподіляють логіку обчислень та візуалізації:

1. ***Клас Obstacle***

   Даний клас визначає характеристики перешкоди.

   Основні методи:

   1.1. Метод ***contour_length()***:

   Обчислює загальну довжину контуру перешкоди, використовуючи початкові точки.

   1.2. Метод ***calculate_discretization_points():***

   Обчислює рівномірно розподілені точки дискретизації вздовж контуру перешкоди. Використовує початкові точки перешкоди та додаткові розрахункові точки для рівномірного розподілу.

   1.3. Метод ***calculate_collocation_points():***

   Розраховує точки колокації

   1.4. Метод ***calculate_normals():***

   Обчислює нормальні вектори для кожного сегмента контуру, які використовуються для визначення напрямку потоку.

1.5. Метод ***plot_contour()***:

Візуалізує контур перешкоди, використовуючи початкові точки.

2. ***Клас Flow***

Даний клас здійснює обчислення та візуалізує результати.

2.1. Метод ***calculate_circulation():***

Обчислює Γ_j для кожної точки дискретизації на контурі, розв'язуючи систему лінійних рівнянь.

2.2. Метод ***calculate_phi_incorrect():***

Обчислює значення потенціалу φ у точці, використовуючи спрощену формулу, яка не враховує всі поправки.

2.3. Метод ***calculate_phi_correct()***:

Обчислює значення потенціалу φ з урахуванням корекцій, що забезпечує точніші результати

2.4. Метод ***calculate_psi()***:

Обчислює значення функції ψ у точці простору.

2.5. Метод ***calculate_velocity():***

Розраховує вектор швидкості у точці простору.

2.6. Метод ***calculate_velocity_contribution()***:

Розраховує внесок кожної точки дискретизації на швидкість у конкретній точці.

2.7. Метод ***plot_scalar_field_velocity()***:

Будує скалярне поле швидкостей.

2.8. Метод ***plot_scalar_field_phi_incorrect()***:

Відображає скалярне поле потенціалу φ з використанням наближеної формули для кожної точки сітки.

2.9. Метод ***plot_scalar_field_phi_correct()***:

Створює скалярне поле потенціалу φ обчислене за точною формулою для кожної точки сітки

2.10. Метод ***plot_scalar_field_psi()***:

Відображає скалярне поле функції течії ψ для кожної точки сітки.

2.11. Метод ***create_mesh_grid()***:

Створює сітку координат для візуалізації полів навколо перешкоди (допоміжна функція).

Ініціалізація параметрів та розрахунок характеристик потоку

Для дослідження обтікання перешкоди у вигляді літери ***W*** стаціонарною течією було обрано п'ять контрольних точок, що формують контур перешкоди.

1. ***Визначення точок перешкоди***: Контур перешкоди представлено п’ятьма точками, які задають геометрію літери ***W*** у декартовій системі координат.

```
obstaclePoints = tuple(map(lambda x: np.array(x),
 ((-0.8, 0), (-0.35, -0.4), (0, -0.1), (0.35, -0.4), (0.8, 0))))
```

2. ***Задання кількості точок дискретизації***: Для моделювання потоку навколо перешкоди використовувалося **200** точок дискретизації.

```
points = 200
```

3. ***Кут потоку***: Напрямок потоку вибрано перпендикулярно до горизонтальної осі.

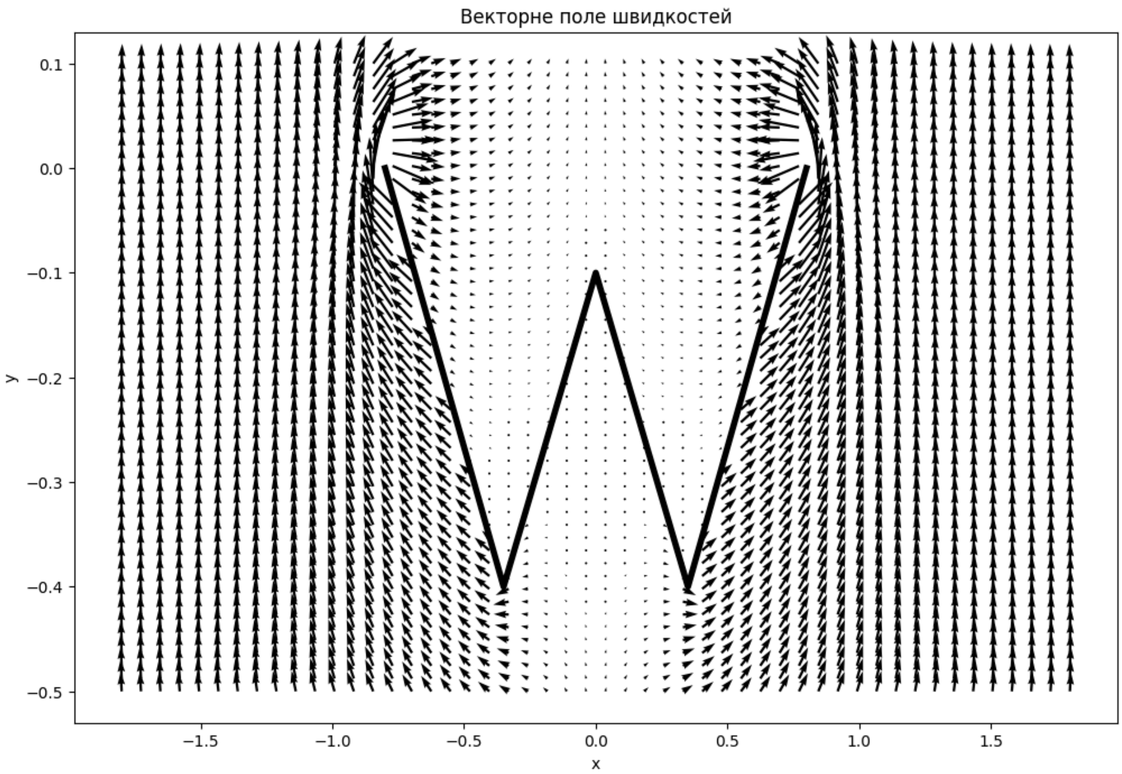
```
angle = math.pi / 2
```

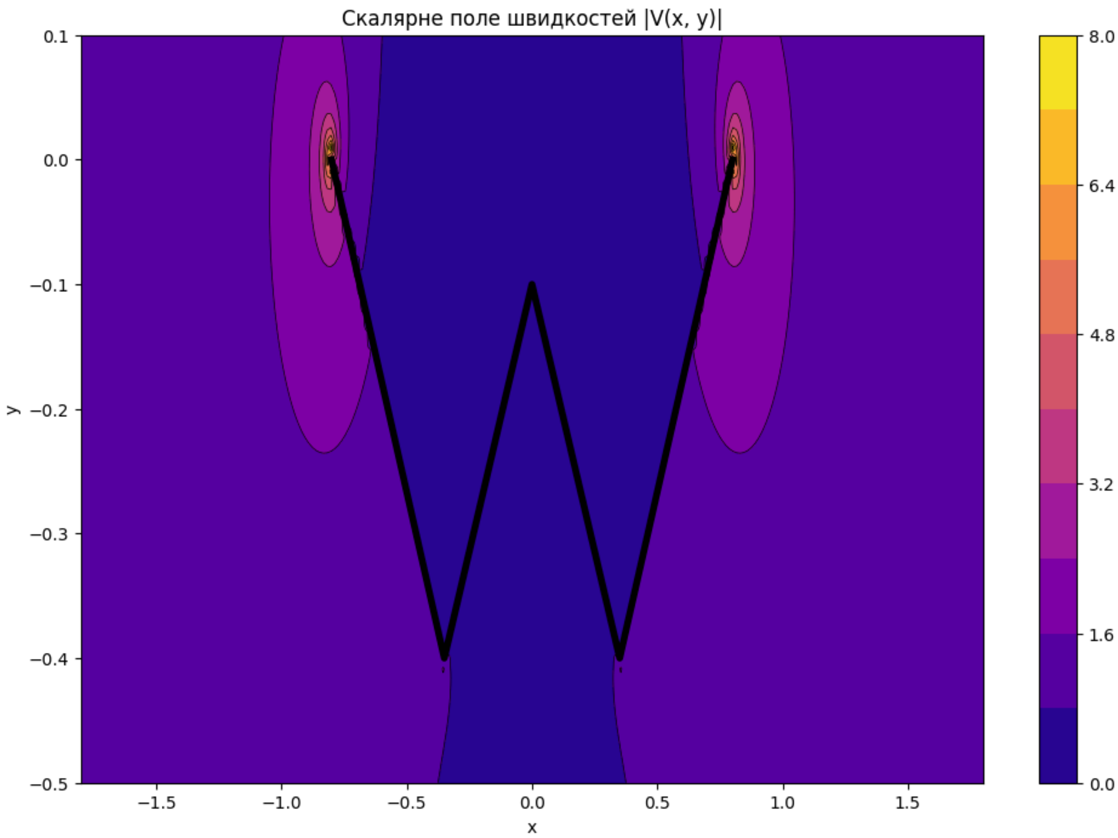
4. ***Параметр циркуляції*** Γ_0: Параметр циркуляції Γ_0 задає початкове значення циркуляції.

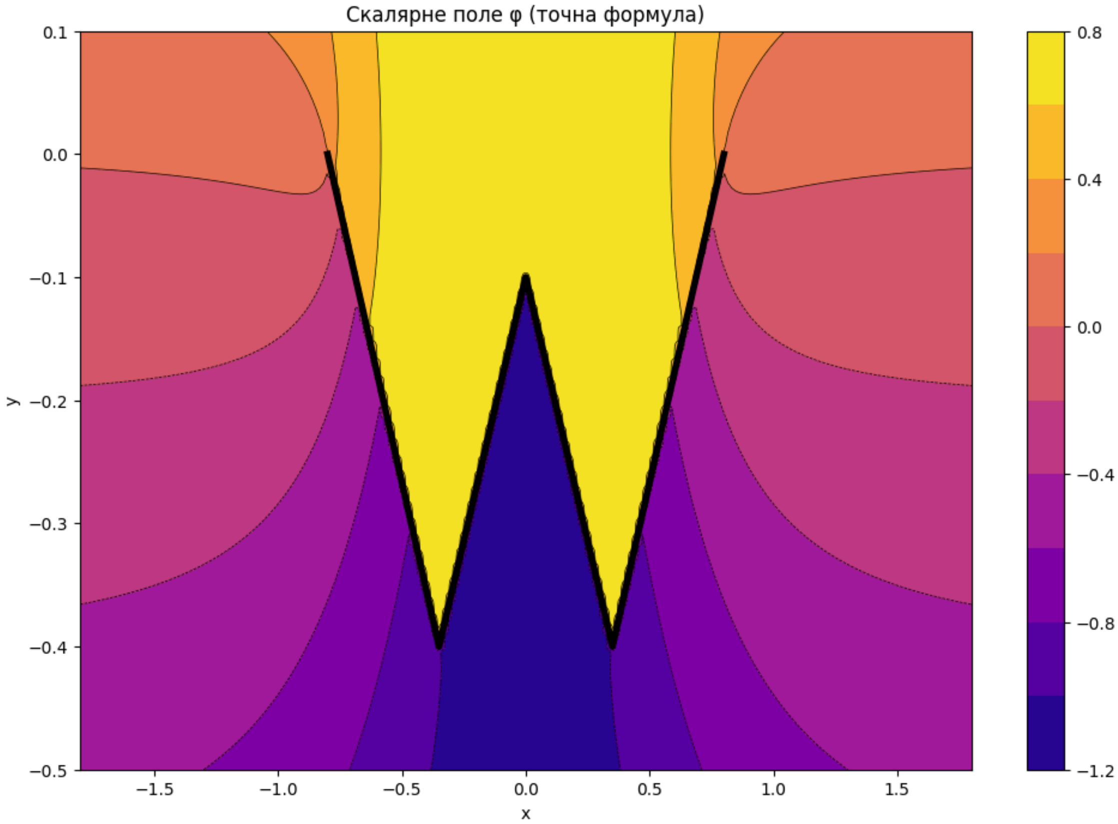
```
g0 = 0
```

РЕЗУЛЬТАТИ

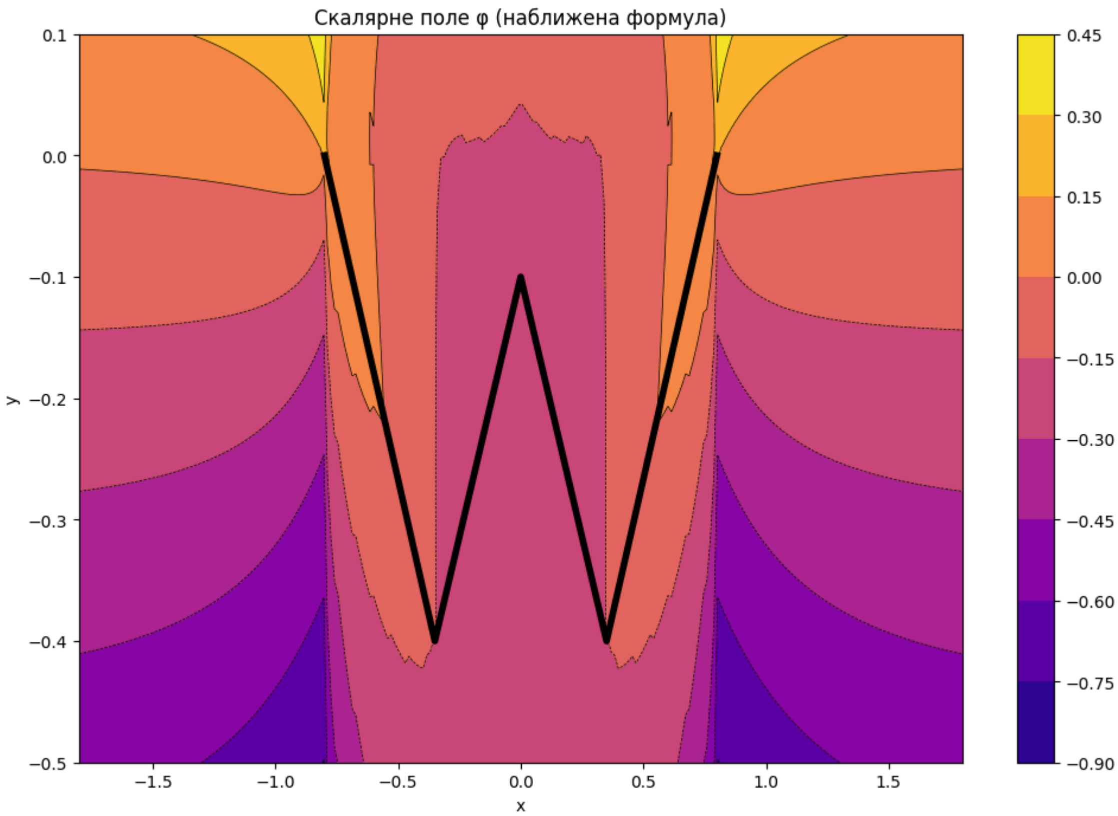
1. Кут = π/2



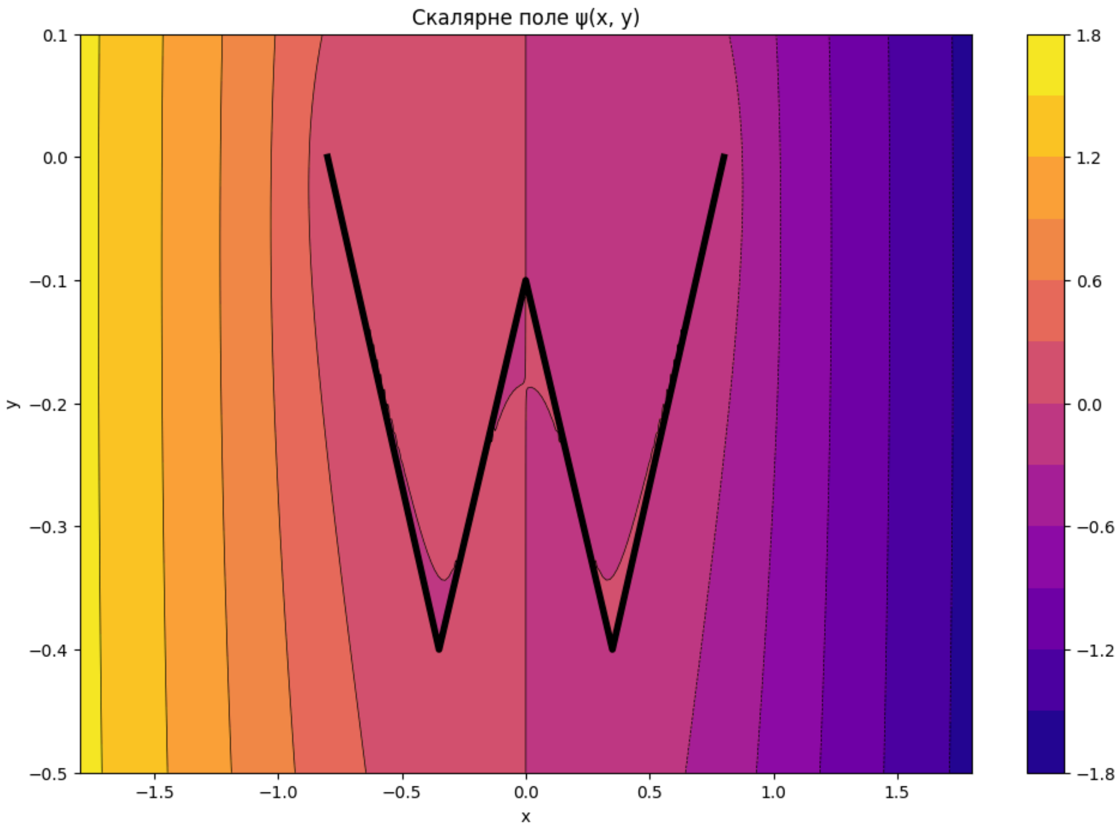




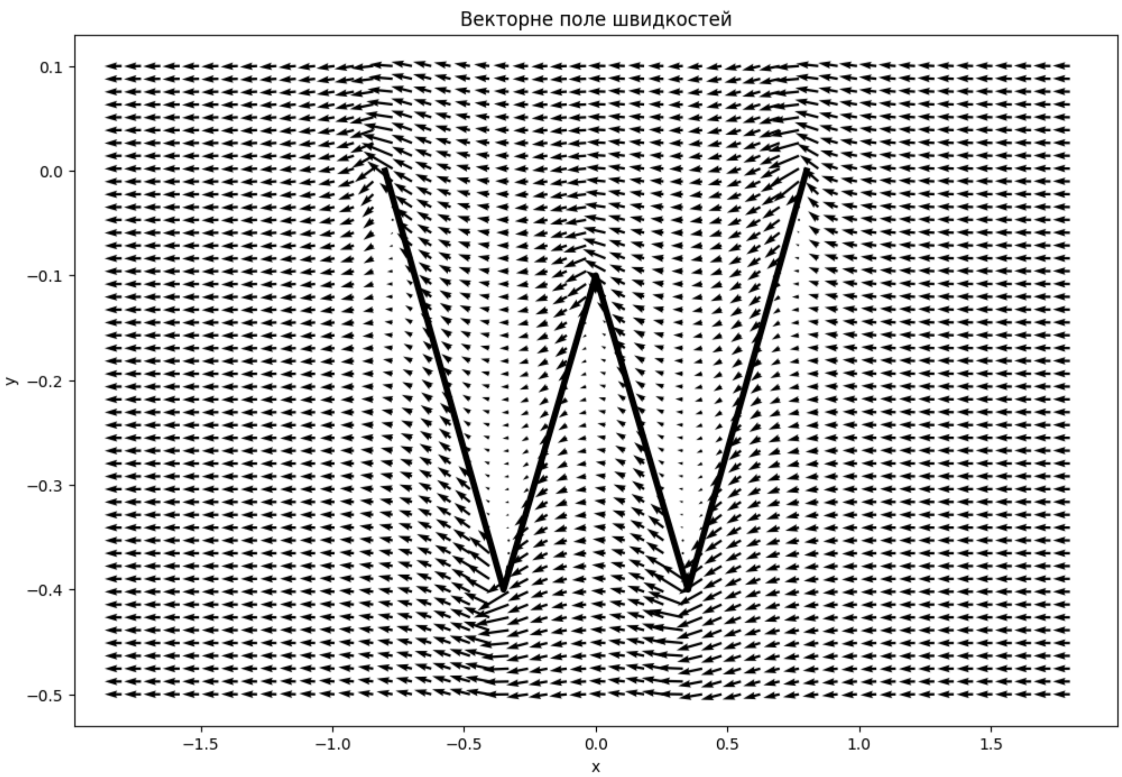
Скалярне поле φ (точна формула)
y
x
0.1
0.0
−0.1
−0.2
−0.3
−0.4
−0.5
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
0.8
0.4
0.0
−0.4
−0.8
−1.2

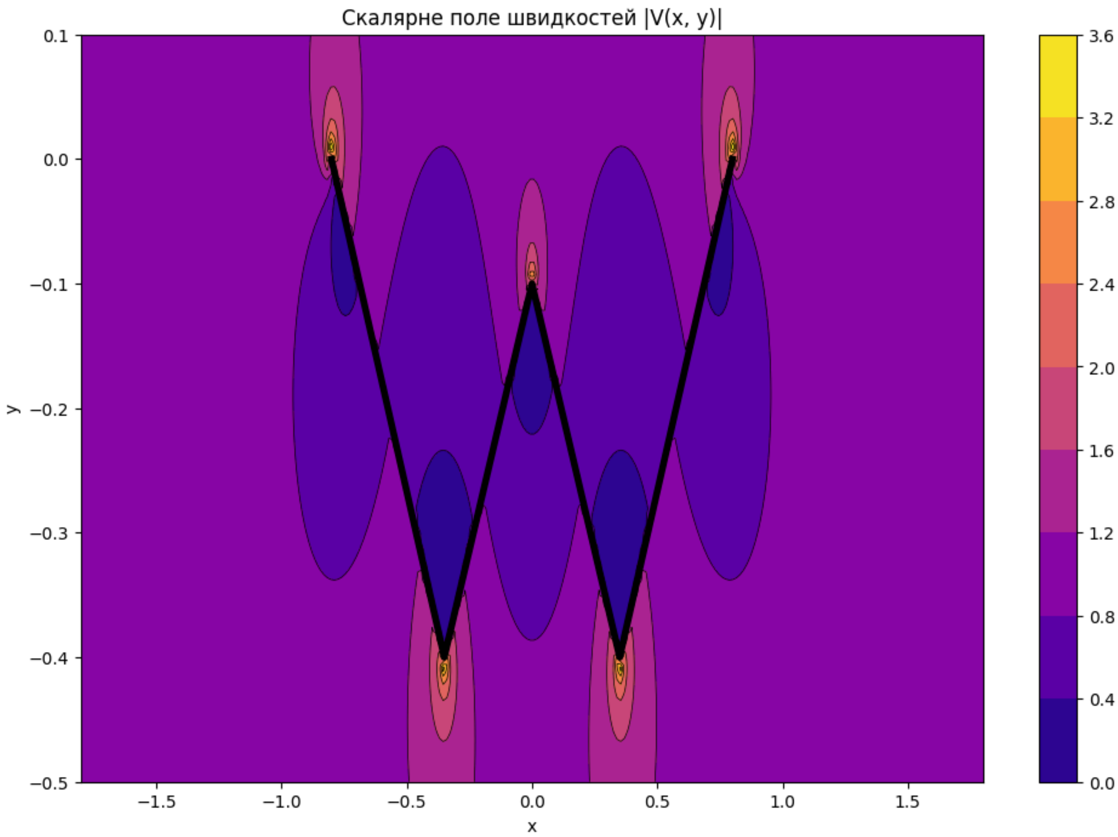


Скалярне поле φ (наближена формула)
y
x
0.1
0.0
−0.1
−0.2
−0.3
−0.4
−0.5
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
0.45
0.30
0.15
0.00
−0.15
−0.30
−0.45
−0.60
−0.75
−0.90

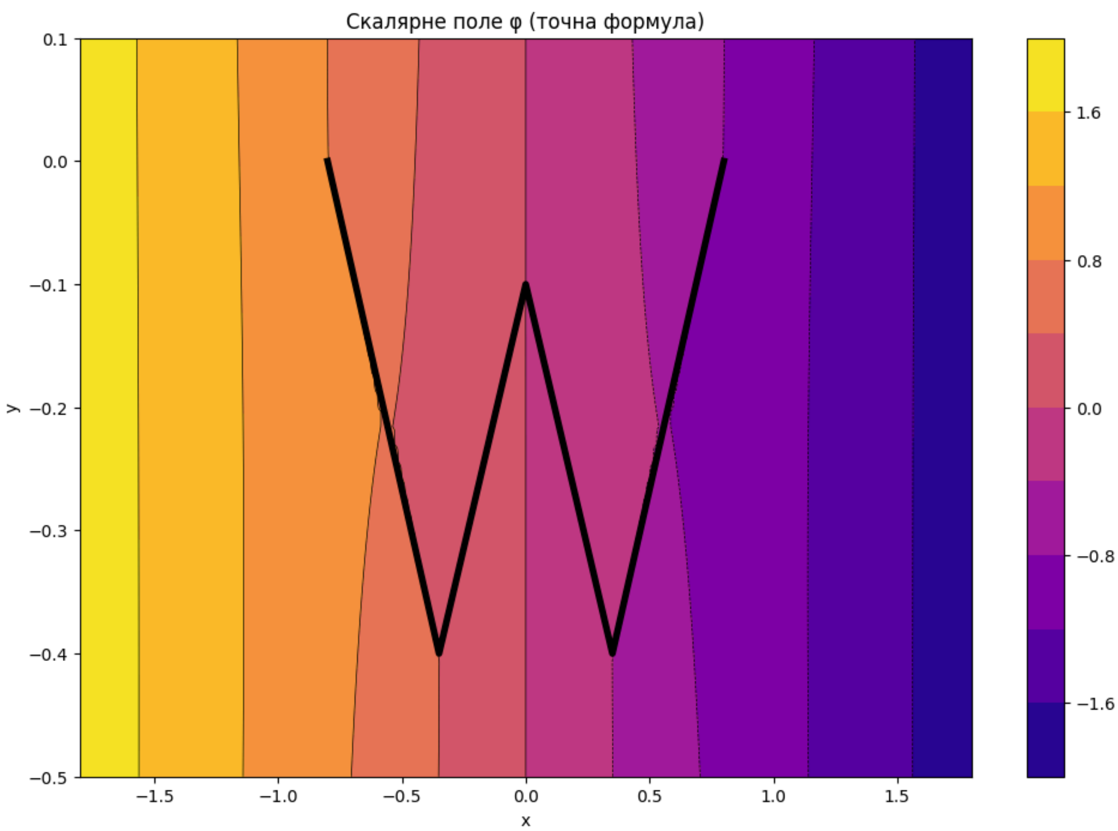

Скалярне поле ψ(x, y)
0.1
0.0
−0.1
−0.2
−0.3
−0.4
−0.5
y
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
x
1.8
1.2
0.6
0.0
−0.6
−1.2
−1.8

2. Кут = π

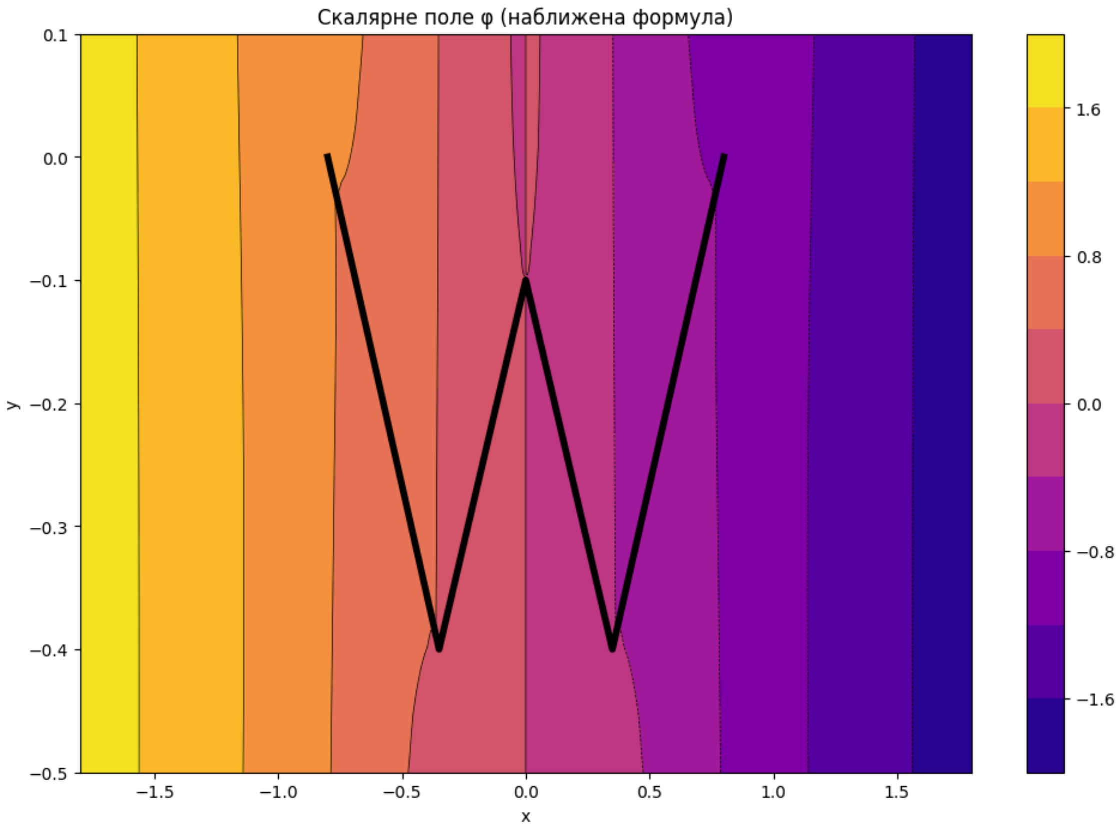

Векторне поле швидкостей
0.1
0.0
−0.1
−0.2
−0.3
−0.4
−0.5
y
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
x



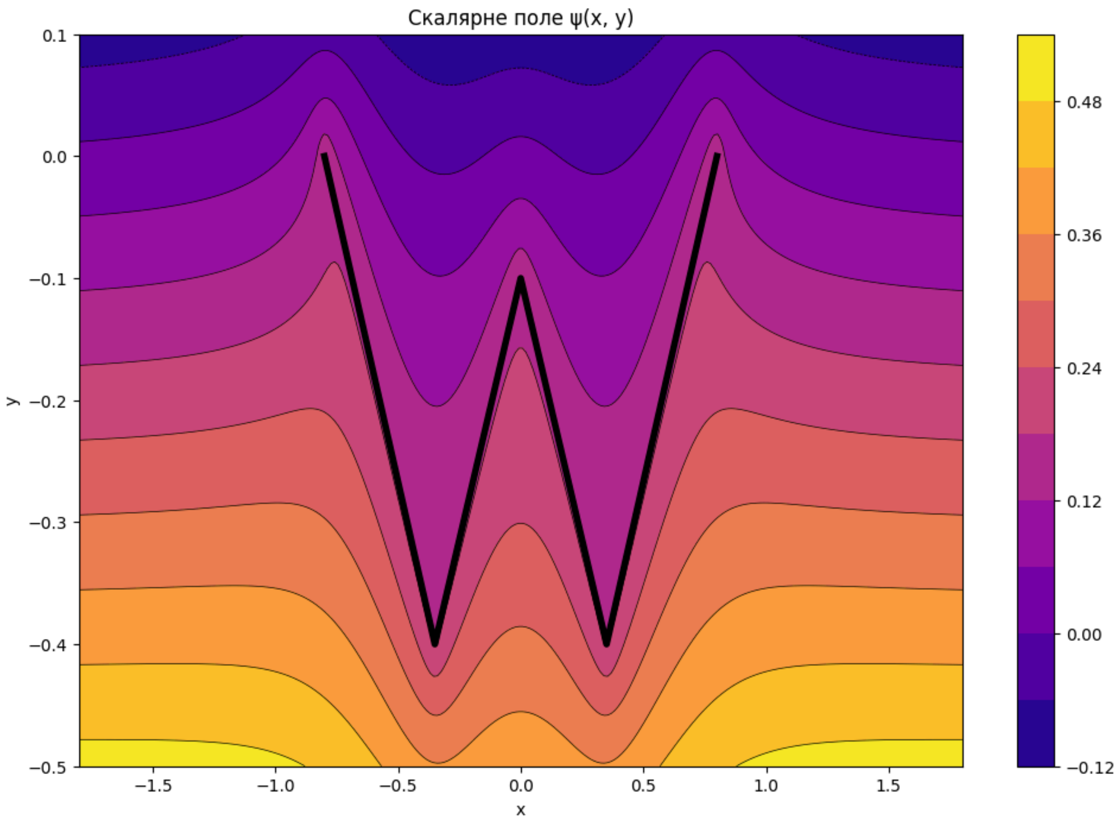
Скалярне поле швидкостей |V(x, y)|
y
x



Скалярне поле φ (точна формула)
y
x



Скалярне поле φ (наближена формула)
0.1
0.0
−0.1
−0.2
−0.3
−0.4
−0.5
y
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
x
1.6
0.8
0.0
−0.8
−1.6



Скалярне поле ψ(x, y)
0.1
0.0
−0.1
−0.2
−0.3
−0.4
−0.5
y
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
x
0.48
0.36
0.24
0.12
0.00
−0.12

ВИСНОВОК

У результаті виконання лабораторної роботи було успішно змодельовано процес обтікання стаціонарною течією перешкоди у вигляді літери ***W***. Зокрема, побудовано:

- векторне поле швидкостей,
- ізолінії скалярного поля модуля швидкості,
- ізолінії скалярного поля функції потенціалу,
- ізолінії скалярного поля функції течії.