Vlada Gromova, 323770, grupa 1, projekt 2, zadanie 11

Wstęp

Zadanie polegało na napisaniu funkcji obliczającej całkę oznaczoną na przedziale $[a, b]$ za pomocą 3-punktowej złożonej kwadratury Gaussa-Legendre'a. Najpierw wejsciowy przedział $[a, b]$ należało podzielic na m podprzedziałów, a następnie podwajać podział aż do momentu uzyskania wartości bezwzględnej różnicy kolejnych przybliżeń mniejszej od δ, gdzie δ - parametr wejściowy funkcji oznaczony jako tol. Dodatkowo, w celu uniknięcia bardzo dużej liczby podprzedziałów, jako parametr wejściowy funkcji podana była maksymalna liczba podprzedziałów m_{max}.

Z eksperymentów numerycznych wywnioskowano, że metoda obliczania całki oznaczonej za pomocą kwadratury Gaussa-Legendre'a działa nie gorzej (a czasem nawet lepiej), gdy stosujemy ją na przedziale $[-1, 1]$, czyli na "wzorcowym" przedziale dla tej kwadratury.

Opis kwadratury Gaussa-Legendre'a

Z Metod Numerycznych 1 wiemy, że można przybliżyć wartość całki oznaczonej

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

za pomocą kwadratur postaci

$$S(f) = \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k)$$

gdzie w_k to są współczynniki kwadratury, a x_k - węzły kwadratury z przedziału $[a, b]$.

Załóżmy teraz, że $[a, b] = [-1, 1]$ i chcemy znaleźć 3-punktową kwadraturę o maksymalnym rzędzie r, czyli taką, która będzie dokładna dla wszystkich wielomianów stopnia mniejszego niż r (także powinien istnieć wielomian stopnia r dla którego kwadratura nie będzie dokładna). Szukaną kwadraturą jest kwadratura Gaussa-Legendre'a, węzłami której są pierwiastki wielomianu Legendre'a 3-go stopnia:

$$p_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

Współczynniki w_i obliczają się ze wzoru:

$$w_i = \frac{2}{(1 - x_i^2)[p_3'(x_i)]^2}$$

Rząd 3-punktowej kwadratury Gaussa-Legendre'a wynosi 6, a zatem kwadratura będzie dokładna dla wszystkich wielomianów stopnia 5 i niżej.

Załóżmy teraz, że chcemy zastosować kwadraturę opisaną wyżej na dowolnym przedziale $[a, b]$. Żeby to zrobić trzeba zmienić przedział całkowania stosując wzór wymieniony niżej:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \sum_{k=0}^{2} w_k f(\frac{b-a}{2} x_k + \frac{a+b}{2})$$

Eksperymenty numeryczne

Dla ekperymentów numerycznych zostały wybrane następujące podstawowe funkcje: x^a, $exp(x)$, $sin(x)$, a^x. Dla pewnych ekperymentów wymienione wyżej funkcje zdecydowano podnieść do potęgi.

Kwadratura Gaussa-Legendre'a "klasycznie" stosuje się do obliczania całek na przedziale $[-1, 1]$. Podczas przeprowadzenia ekperymentów numerycznych zaobserwowano, że przesunięcie tego przedziału o 1 z zachowaniem długości może znacznie zwolnić proces obliczania, co zilustrowano w tabeli 1. Za miarę szybkośći przyjęta liczba końcowych podprzedziałow.

Zauważmy, że w przypadku funkcji trygonometrycznych i potęgowych sytuacja wygląda inaczej, co jest pokazane w tabeli 2.

Tabela 1: Dla każdego przykładu $tol = 10^{-9}$, $m = 10$, $m_{max} = 10^6$ W pierwszej kolumnie są przedstawione funkcje wejściowe, w druiej i trzeciej - liczba iteracji niezbędna do osiągnięcia żądanej dokładności na przedziałach $[-1, 1]$ oraz $[0, 2]$ odpowiednio.

	$[-1, 1]$	$[0, 2]$
x^9	20	80
x^{24}	160	1280
x^{50}	320	655360
$exp(x)$	20	20
$(exp(x))^{10}$	320	655360

Tabela 2: Dla każdego przykładu $tol = 10^{-9}$, $m = 10$, $m_{max} = 10^6$ W pierwszej kolumnie są przedstawione funkcje wejściowe, w druiej i trzeciej - liczba iteracji niezbędna do osiągnięcia żądanej dokładności na przedziałach $[-1, 1]$ oraz $[0, 2]$ odpowiednio.

	$[-1, 1]$	$[0, 2]$
$(sin(x))^2$	20	20
$(sin(x))^9$	20	40
$(sin(x))^{20}$	40	40
$(cos(5x))^9$	80	160
$(cos(5x))^{20}$	80	160
2^x	20	20
10^x	40	40
0.2^x	20	20

Podsumowując: 3-punktowa złożona kwadratura Gaussa-Legendre'a ma największy możliwy rząd, daje wystarczająco dokładny wynik przy małej liczbie iteracji. Wzór jest łatwy do implementacji i można go stosować na innym przedziale, niż $[-1, 1]$, ale należy pamiętać, że nawet mała zmiana tego przedziału może znacznie zwolnić program.