BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY

Teoretická informatika

Úkol 1

2. prosince 2019

Vladimír Dušek, xdusek27

Teoretická informatika (TIN) – 2019/2020
Úkol 1
(max. zisk 5 bodů – 10 bodů níže odpovídá 1 bodu v hodnocení předmětu)

1. Uvažujme operaci $\circ$ definovanou následovně: $L_1 \circ L_2 = L_1 \cup \overline{L_2}$. S využitím uzávěrových vlastností dokažte, nebo vyvraťte, následující vztahy:
   (a) $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_3$
   (b) $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2^D$
   (c) $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2$

   $\mathcal{L}_2^D$ značí třídu deterministických bezkontextových jazyků, $\mathcal{L}_2$ třídu bezkontextových jazyků a $\mathcal{L}_3$ třídu regulárních jazyků.

   10 bodů

2. Mějme jazyk L nad abecedou $\{a, b, \#\}$ definovaný následovně: $L = \{a^i b^j \# a^k b^l \mid i + 2j = 2k + l\}$
   Sestrojte deterministický zásobníkový automat M_L takový, že $L(M_L) = L$. 10 bodů

3. Dokažte, že jazyk L z předchozího příkladu není regulární.

   10 bodů

4. Navrhněte algoritmus, který pro daný nedeterministický konečný automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ rozhodne, zda $\forall w \in L(A) : |w| \geq 5$.
   Dále demonstrujte běh tohoto algoritmu na automatu $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a\}, \delta, q_0, \{q_4\})$, kde δ je definována jako
   $\delta(q_0, a) = \{q_1, q_0\}$, $\delta(q_1, a) = \{q_1, q_2\}$,
   $\delta(q_2, a) = \{q_0, q_3\}$, $\delta(q_3, a) = \{q_0, q_4\}$,
   $\delta(q_4, a) = \{q_0\}$.

   10 bodů

5. Dokažte, že jazyk $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \ mod\ 2 \neq 0 \ \wedge \ \#_b(w) \leq 2\}$ je regulární. Postupujte následovně:
   - Definujte $\sim_L$ pro jazyk L.
   - Zapište rozklad $\Sigma^* / \sim_L$ a určete počet tříd tohoto rozkladu.
   - Ukažte, že L je sjednocením některých tříd rozkladu $\Sigma^* / \sim_L$.

   10 bodů

Příklad 1

a) Podle věty 3.22[1] plyne z definice regulárních množin a ekvivalence regulárních množin a regulárních jazyků, že třída regulárních jazyků je uzavřena vzhledem k operaci sjednocení.

Na základě věty 3.23[1] tvoří třída regulárních jazyků Booleovu algebru. Z její definice plyne, že Booleova algebra je uzavřena vzhledem k operaci doplněk.

Jelikož $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \cup \overline{L_2} \in \mathcal{L}_3$ a operace $\circ$ je definována jako $L_1 \circ L_2 = L_1 \cup \overline{L_2}$, tak i $L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_3$.

Zadané tvrzení platí.

b) Podle věty 4.27[1] jsou deterministické bezkontextové jazyky uzavřené vůči operaci doplněk a operaci průnik s regulárními jazyky.

$L_1 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow \overline{L_1} \in \mathcal{L}_3$ a $L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2^D$

$L_1 \in \mathcal{L}_3 \wedge L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_2^D$

$\overline{L_1} \cap L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow \overline{\overline{L_1} \cap L_2} \in \mathcal{L}_2^D$

Dle De Morganových zákonů platí: $\overline{\overline{L_1} \cap L_2} = L_1 \cup \overline{L_2}$

Nyní můžeme říct, že $L_1 \in \mathcal{L}_3 \wedge L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow L_1 \cup \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2^D$ a jelikož je operace $\circ$ definována jako $L_1 \circ L_2 = L_1 \cup \overline{L_2}$, tak i $L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2^D$.

Zadané tvrzení platí.

c) Podle věty 4.24[1] nejsou bezkontextové jazyky uzavřeny vůči operaci doplněk a průnik.

Podle De Morganových zákonů platí: $L_1 \cup \overline{L_2} = \overline{\overline{L_1} \cap L_2}$

Z výše uvedeného vyplývá: $L_1 \in \mathcal{L}_3 \wedge L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_1 \cup \overline{L_2} \notin \mathcal{L}_2$ a jelikož je operace $\circ$ definována jako $L_1 \circ L_2 = L_1 \cup \overline{L_2}$, tak i $L_1 \circ L_2 \notin \mathcal{L}_2$.

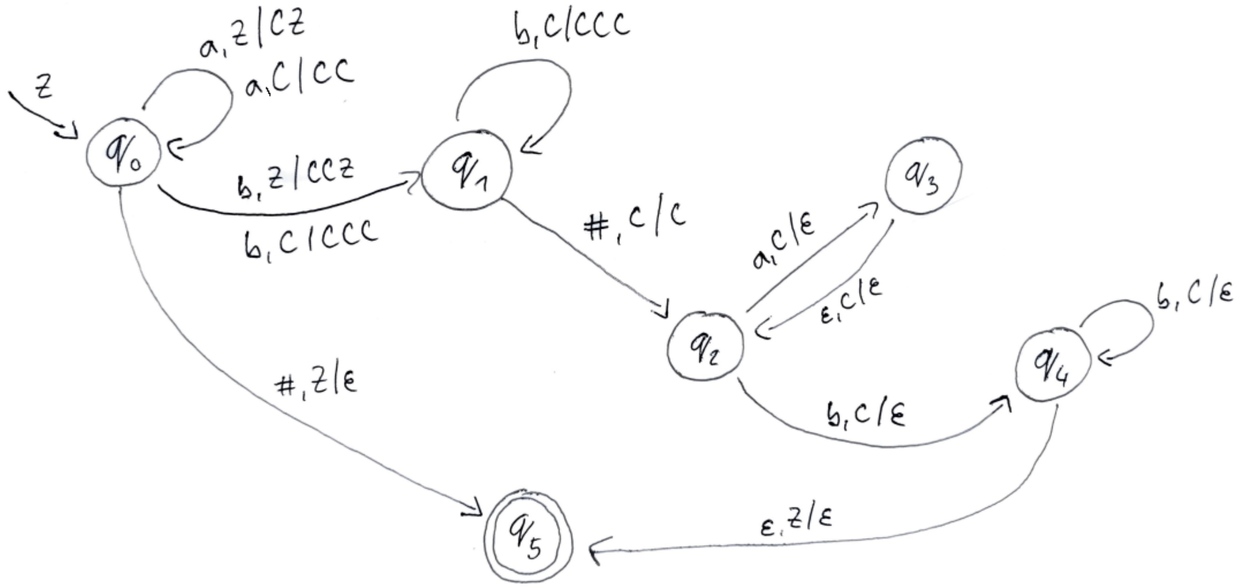
Zadané tvrzení neplatí.

[1] http://www.fit.vutbr.cz/study/courses/TIN/public/Texty/TIN-studijni-text.pdf

Příklad 2

$M_L = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{a, b, \#\}, \{Z, C\}, \delta, q_0, Z, \{q_5\})$

$\delta(q_0, a, Z) = (q_0, CZ)$
$\delta(q_0, a, C) = (q_0, CC)$
$\delta(q_0, b, Z) = (q_1, CCZ)$
$\delta(q_0, b, C) = (q_1, CCC)$
$\delta(q_0, \#, Z) = (q_5, \epsilon)$
$\delta(q_1, b, C) = (q_1, CCC)$
$\delta(q_1, \#, C) = (q_2, C)$
$\delta(q_2, a, C) = (q_3, \epsilon)$
$\delta(q_2, b, C) = (q_4, \epsilon)$
$\delta(q_3, \epsilon, C) = (q_2, \epsilon)$
$\delta(q_4, b, C) = (q_4, \epsilon)$
$\delta(q_4, \epsilon, Z) = (q_5, \epsilon)$



Příklad 3

- Předpokládejme, že jazyk $L = \{a^i b^j \# a^k b^l \mid i + 2j = 2k + l \ ; \ i, j, k, l \in \mathbb{N}_0\}$ nad abecedou $\Sigma = \{a, b, \#\}$ je regulární.
- Poté, podle Pumping lemma (věta 3.18[1]) $\exists p > 0 : \forall w \in L : |w| \geq p \Rightarrow \exists x, y, z \in \Sigma^* : w = xyz \wedge y \neq \epsilon \wedge |xy| \leq p \wedge \forall m \in \mathbb{N}_0 : xy^m z \in L$.
- Uvažujme libovolný parametr $p > 0$ a pomocí něho zapišme nějaký řetězec $w \in L$ takový, aby splňoval výše uvedené.
  - $w = b^p \# a^p$
  - $\forall p > 0 : w \in L$
  - $|w| \geq p \Leftrightarrow 2p + 1 \geq p$
- Nyní uvažme všechna rozdělení řetězce w na podřetězce x, y, z takové, aby platily výše uvedené podmínky. Může nastat následující situace:
  - $x = b^{p-k-l}$
  - $y = b^k$
  - $z = b^l \# a^p \ ; \ l \geq 0, k \geq 1$
- Nyní pro všechna $m \geq 0$ musi platit, že $xy^m z \in L$
  - Pro $m = 2$ má řetězec w tvar $xy^2 z = b^{p-k-l} b^{2k} b^l \# a^p$.
  - Aby byl řetězec w součástí jazyka L, muselo by platit, že počet b před znakem $\#$ se rovná počtu a za ním. Tedy rovnice $p - k - l + 2k + l = p$. Ta má řešení $k = 0$.
  - $k = 0$ je přímo ve sporu s předpokladem, že $k \geq 1$ a tím pádem $xy^2 z \notin L$
- Řetězec $w = b^p \# a^p$ není možné rozložit na takové podřetězce x, y, z, které by splňovaly podmínky Pumping lemma. Z toho vyplývá, že jazyk L není regulární.

Příklad 4

Návrh algoritmu

- **Vstup:** Nedeterministický konečný automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
- **Výstup:** True/False
- **Metoda:**

  1. Pokud $\nexists w \in \Sigma^* : (q_0, w) \vdash^* (q_f, \epsilon)$, $q_f \in F$, tak $L(A) = \emptyset$, tvrzení $\forall w \in L(A) : |w| \geq 5$ neplatí a ukončeme provádění algoritmu.
  2. Sestavme množinu řetězců $W = \{w | w \in \Sigma^* \wedge |w| < 5\}$.
  3. Pokud $W = \emptyset$, tak tvrzení $\forall w \in L(A) : |w| \geq 5$ platí a ukončeme provádění algoritmu.
  4. Vyjměme libovolný řetězec w z množiny W.
  5. Pokud pro řetězec w platí $(q_0, w) \vdash^* (q_f, \epsilon)$, $q_f \in F$, tak $\exists w \in L(A) : |w| < 5$. Tvrzení $\forall w \in L(A) : |w| \geq 5$ tedy neplatí a ukončeme provádění algoritmu. Jinak pokračujme krokem 3.

Demonstrace běhu algoritmu

1. Máme nedeterministický konečný automat A, viz zadání.
2. Jelikož pro $w = aaaa$ platí $(q_0, w) \vdash^* (q_4, \epsilon)$, řetězec w je přijímán automatem A a jazyk $L(A) \neq \emptyset$.
3. $W = \{\epsilon, a, aa, aaa, aaaa\}$.
4. $W \neq \emptyset$.
5. $w = \epsilon$.
6. $(q_0, w) \nvdash^* (q_4, \epsilon)$.
7. $W \neq \emptyset$ $(W = \{a, aa, aaa, aaaa\})$.
8. $w = a$.
9. $(q_0, w) \nvdash^* (q_4, \epsilon)$.
10. $W \neq \emptyset$ $(W = \{aa, aaa, aaaa\})$.
11. $w = aa$.
12. $(q_0, w) \nvdash^* (q_4, \epsilon)$.
13. $W \neq \emptyset$ $(W = \{aaa, aaaa\})$.
14. $w = aaa$.
15. $(q_0, w) \nvdash^* (q_4, \epsilon)$.
16. $W \neq \emptyset$ $(W = \{aaaa\})$.
17. $w = aaaa$.
18. $(q_0, w) \vdash^* (q_4, \epsilon)$, tvrzení $\forall w \in L(A) : |w| \geq 5$ neplatí.

Příklad 5

$\forall u, v \in \Sigma^* : u \sim_L v \Leftrightarrow (\#_a(u)\ mod\ 2 = \#_a(v)\ mod\ 2) \wedge ((\#_b(u) > 2 \wedge \#_b(v) > 2) \vee (\#_b(u) = \#_b(v)))$

$\Sigma^*/\sim_L$:
$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_b(w) = 0 \wedge \#_a(w)\ mod\ 2 = 0\}$
$L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_b(w) = 0 \wedge \#_a(w)\ mod\ 2 = 1\}$
$L_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_b(w) = 1 \wedge \#_a(w)\ mod\ 2 = 0\}$
$L_4 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_b(w) = 1 \wedge \#_a(w)\ mod\ 2 = 1\}$
$L_5 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_b(w) = 2 \wedge \#_a(w)\ mod\ 2 = 0\}$
$L_6 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_b(w) = 2 \wedge \#_a(w)\ mod\ 2 = 1\}$
$L_7 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_b(w) > 2 \wedge \#_a(w)\ mod\ 2 = 0\}$
$L_8 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_b(w) > 2 \wedge \#_a(w)\ mod\ 2 = 1\}$

$L = L_2 \cup L_4 \cup L_6$

Relace $\sim_L$ má konečný index (8) a jazyk L je tvořen sjednocením některých tříd rozkladu (L_2, L_4, L_6). Podle Myhill-Nerodovy věty (věta 3.20[1]), jsou tato tvrzení ekvivalentní s tvrzením, že jazyk L je přijímaný deterministickým konečným automatem. Každý jazyk přijímaný deterministickým konečným automat je regulární. Jazyk L je regulární.