THE: Kooperativní hry a vyjednávání
The Cooperative Games and Bargaining

Martin Hrubý

Brno University of Technology
Brno
Czech Republic

July 17, 2020

Úvod

Čerpáno z:

- Peleg, Sudholter: Introduction to the Theory of Cooperative Games
- McCarthy, N., Mierowitz, A.: Political Game Theory: An Introduction, Cambridge University Press, 2007
- Magdaléna Hykšová: Přednášky z teorie her, Fakulta dopravní ČVUT
- Myerson, R. B.: Game theory: Analysis of Conflict, Harvard University Press, 2004
- Osborne, M., Rubinstein, A.: A Course in Game Theory, The MIT Press, 1994
- Brahms, S.: Win-Win solution

Úvod: Kooperace a vyjednávání

A/B	přijmout	zamítnout
poctivě	10,10	0,0
vychytrale	100,1	0,0

- Známe koncept nekooperativních her.
- Co znamená kooperativnost? Jak souvisí s efektivitou výstupu ze hry?
- Stabilita dohody (koalice, rozdělení výsledku).
- NE je všude. Co bude dnes hráčova strategie?
- Budeme se zabývat kooperativními hrami s přenositelným užitkem (z hráče na hráče).

Úvod: Kooperace a vyjednávání

A/B	přijmout	zamítnout
poctivě	10,10	0,0
vychytrale	100,1	0,0

Výsledky:

- Nedohoda, nekooperativní profil (vychytrale, přijmout) – Nash.
- Nedohoda, hrozba (X, zamítnout) – důvěryhodná (?) hrozba.
- Dohoda, (poctivě, přijmout).
- Dohoda, (vychytrale, přijmout) a extra dohoda o rozdělení 101 zisku.

Ze hry lze získat až 101 zisku. Kolik ovšem nabídnout pro A za jeho spolupráci?

Předpoklady pro kooperativní jednání

Zatím nerozlišujeme kooperativní herní teorii a teorii vyjednávání.

- **Každá situace s možností kooperace v sobě obsahuje nekooperativní výsledek.** Nekooperativní hry jsou základ veškerých her.
- **Individuální racionalita**.
- Hráči v kooperativním profilu musí získat více než v nekooperativním. **Pozor na iracionální altruismus.**
- Musí existovat důvěra ve vymahatelnost dohodnutého chování.
- Pokud existuje hráč, který má větší přínos pro kooperativní profil, musí mít nárok na dodatečné přerozdělení výsledku.
- Souvisí s tím formování *koalic hráčů*.
- **Koalice musí být self-enforcing.**

Budeme zkoumat předpoklady pro vyjednávání, předpoklady pro tvorbu koalic a spravedlivé přerozdělení zisku v koalici (Shapley value).

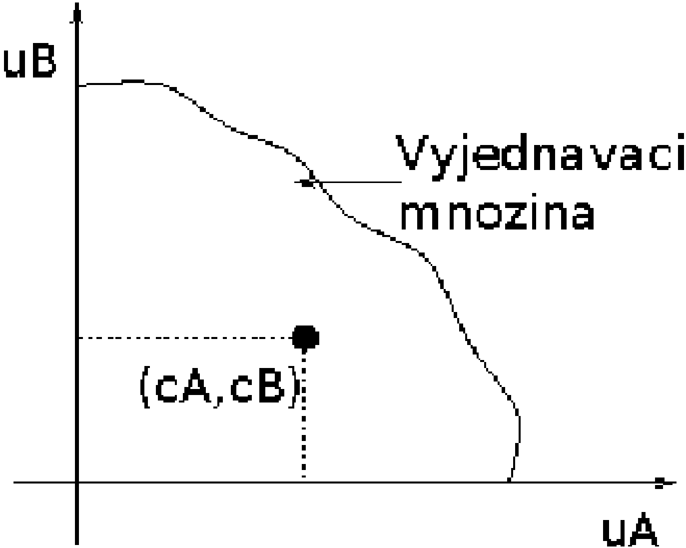
Koncept přednášky

- Teorie vyjednávání.
- Nashovo řešení (Nash Bargaining Solution).
- Teorie kooperativních her s přenositelným užitkem (TU-games).
- Koncepty řešení TU-games.

Vycházíme z klasické nekooperativní hry. **Předpokládejme, že hra umožňuje efektivnější výsledek než je nekooperativní ekvilibrium. Stabilní výsledek (co Vězňovo dilema?).**

Peter/John	vypovídat	mlčet
vypovídat	-10,-10	0,-20
mlčet	-20,0	-1,-1

Schema vyjednávání (bargaining)



Vyjednávání (bargaining)

- Vyjednávání je přirozený lidský způsob, jak dosáhnout efektivnějšího výsledku než je nekooperativní NE.
- Pokud hráči nenajdou dohodu, hraje se nekooperativní NE.
- Je evidentní, že pro všechny hráče musí být vyjednaný profil lepší než nekooperativní NE.
- Zkoumá se pouze, zda-li vyjednávání je možné a který profil je spravedlivě nejlepší pro všechny.

Všichni hráči musí věřit, že pro ně není lepší řešení než vyjednané. Pokud by ho vyžadovali, pak hra přepne na nekooperativní NE.

Vyjednávání (bargaining) – základní model

Zadání úlohy vyjednávání pro dva hráče (příklad):

- Jsou hráči A a B.
- Hráči řeší ideální rozdělení X jednotek, tzn. takovou alokaci, že $x_A + x_B \leq X$.
- Z alokace x_i má hráč užitek $u_i(x_i)$.
- V případě nedohody dostanou hráči nekooperativní výsledek hry c_i (disagreement value).
- Hledáme takovou alokaci, že $u_i(x_i) > c_i$ pro všechny i

Zatím neformálně: Nash dokázal, že dohody může být dosaženo v bodě, který odpovídá maximalizaci funkce:

$$g(x_A, x_B) = (u_A(x_A) - c_A)(u_B(x_B) - c_B)$$

s omezením

$$u_A(x_A) \geq c_A \wedge u_B(x_B) \geq c_B$$

Příklad

Peter (A) a John (B) si mají rozdělit 100 USD. Pokud nenajdou shodu, peníze propadnou, tzn. $c_i = 0$.

$$x_A + x_B \leq 100$$

$$u_A(x_A) = x_A$$

$$x_B = 100 - x_A \;\Rightarrow u_B(x_B) = 100 - x_A$$

Řešíme hledání extrémů:

$$g(x_A, x_B) = (u_A(x_A) - 0)(u_B(x_B) - 0)$$

tzn.:

$$g(x_A)' = [(x_A)(100 - x_A)]' = 0$$

$x_A = 50$, pak $x_B = 50$

Vztah mezi ziskem a užitkem

Podle vztahu k riziku rozlišujeme hráče (vztah zisk–užitek, příklady užitkových funkcí):

- Neutrální k riziku (Risk-neutral): $u(x) = x$.
- Citlivý k riziku (Risk-averse): $u(x) = \sqrt{x}$.
- Vyhledávající riziko (Risk-seeking): $u(x) = x^2$.

Příklad s nesymetrickou funkcí užitku

Předpokládejme, že Peter je chudý a rozdělujeme 30 milionů CZK. Lze očekávat, že bude náchylnější na riziko (risk-averse) než John (risk-neutral).

Užitek Petera ze získání $u_A(x_A) = \sqrt{x_A}$, $u_B(x_B) = x_B$.

Pak:

$$[\sqrt{x_A}(30 - x_A)]' = 0$$

$$\frac{30 - x_A}{2\sqrt{x_A}} - \sqrt{x_A} = 0$$

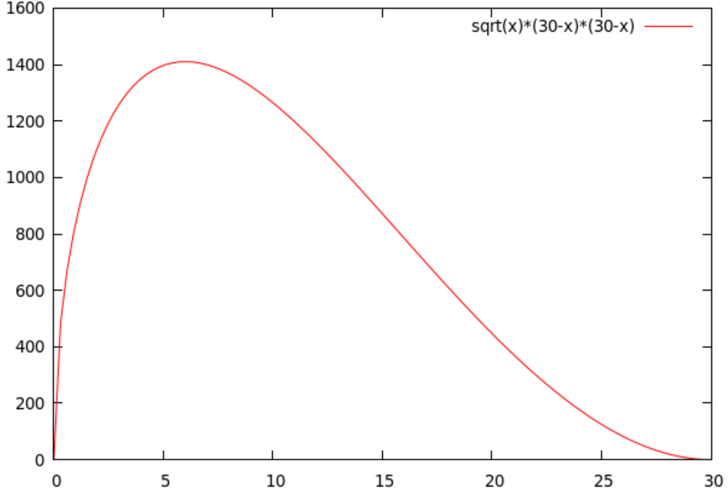
$$\Rightarrow x_A = 10 \Rightarrow x_B = 30 - 10 = 20$$

Dohoda tedy bude $[10, 20]$ s užitkem $[3.16, 20]$ pro hráče. Pro Petera je zřejmě dobré tajit své ohodnocení případného výsledku (budeme zkoumat dál v rámci mechanism design).

Jak by dohodla dopadla, kdyby byl Peter extrémně bohatý a na výsledku mu nezáleželo?

Příklad s nesymetrickou funkcí užitku

Peter je risk-averse a John je risk-seeking.



Vyjednávací problém

- Je zadán vyjednávací problém (vyjednávací množina, "disagreement value").
- Klasicky předpokládáme, že vyjednávací množina je konvexní a ohraničená.
- Hledáme algoritmus pro výpočet akceptovatelné dohody.
- Bargaining problem má více řešení.
- První předvedl John Nash. Stanovil axiomy, které by mělo řešení naplňovat (axiomatický přístup).

Následovat bude **Nash Bargaining Solution**.

Nashovy axiomy pro vyjednávání

Vyjednávání by mělo být založeno na těchto principech:

- Hráči maximalizují své očekávané užitky.
- Vyjednávání je efektivní. Rozdělení plně využívá zdroje a žádný hráč nedostane méně než je jeho nekooperativní výsledek (disagreement value).
- Rozdělení (výsledek vyjednávání) zavisí pouze na preferencích hráčů a jejich nekooperativních výsledcích.
- Independence of irrelevant alternatives.

Nash v "Nash, John (1950). The Bargaining Problem. Econometrica 18 (2)" ukázal, že pokud hra odpovídá následujícím čtyřem axiomům, pak má "bargaining solution", tzn. lze najít dohodu, která je výhodná pro všechny.

Formalizace Nashových vyjednávacích axiomů

Definice:

- Ω je množina všech dosažitelných výsledků (u_A, u_B) jako důsledků rozdělení X - tzv. *vyjednávací množina*.
- Množina Pareto-efektivních alokací je $\Omega^e = \{\omega \in \Omega | u_A \geq c_A \wedge g(u_A) \geq c_B\}$.
- Vyjednávací situace je pár (Ω, c), kde $c = (c_A, c_B)$.
- Množina všech vyjednávacích her je Σ a vyjednávací řešení je $F : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^2$. F_i bude označovat užitek hráče i.
- $F(\Omega, c)$ je tedy pro nás označení vyjednávacího řešení.

Vyjednávací řešení má charakter ekvilibria, ale nelze ho považovat za pojem totožný s vnímáním nekooperativního ekvilibria (NE).

Axiom 1. Nezávislost na lineárních transformacích užitkových funkcí

Axiom

Nechť $u'_i = \alpha_i u_i + \beta_i$ *a* $c'_i = \alpha_i c_i + \beta_i$, $\alpha_i > 0$. Ω' *je odvozeno od* Ω. *Pak* $F_i(\Omega', c') = \alpha_i F_i(\Omega, c) + \beta_i$ *pro* $i \in \{A, B\}$.

Předpokládáme tedy, že **afinní transformace** užitkových funkcí a nekooperativních užitků neovlivní vyjednávací proces.

Víme, že dosáhneme **ekvivalentní hry**, která vykazuje stejné strategické charakteristiky (dominance, BR, ekvilibria).

Axiom 2. Pareto efektivita

Axiom

Je-li $F(\Sigma) = (u_A, u_B)$, pak neexistuje jiný výsledek $(u'_A, u'_B) \in \Omega$ takový, že $u'_i > u_i$ pro některého hráče i a současně $u'_j \geq u_j$ pro $j \neq i$.

Klasická Pareto efektivita, tzn. pokud hráči dojdou dohody (u_A, u_B), pak neexistuje jiné rozdělení (bargaining solution), ve kterém by alespoň jeden hráč byl striktně lepší a zbytek hráčů přinejmenším stejně dobří.

Pozn.: Výsledek $(u'_A, u'_B) \in \Omega$ takový, že $u'_i > u_i$ pro některého hráče i a současně $u'_j < u_j$ pro $j \neq i$ nezkoumáme jako přijatelný.
Pozn.: Množina Pareto efektivních profilů leží v ohraničení vyjednávací množiny.

Axiom 3. Symetrie

Axiom

Připusťme $c_A = c_B$ *a předpokládejme, že* $(u_A, u_B) \in \Omega$ *právě tehdy pokud* $(u_B, u_A) \in \Omega$. *Pak* $F_A(\Omega, c) = F_B(\Omega, c)$.

Mají-li hráči stejné vstupní podmínky a jsou-li jejich užitky dostupné i jejich protivníkům, pak musí dojít k rovnému rozdělení X.

Axiom 4. Nezávislost na irelevantních alternativách

Independence of Irrelevant Alternatives (obecný, velmi důležitý předpoklad ve všech částech THE, kde se očekává zkoumání preferencí).

Axiom

Mějme dvě vyjednávací situace (Ω, c) *a* (Ω', c) *takové, že* $\Omega' \subseteq \Omega$ *a* $F(\Omega, c) \subseteq \Omega'$*. Pak* $F(\Omega, c) = F(\Omega', c)$*.*

Máme vyjednávací oblast Ω a její řešení $F(\Omega, c)$. Pokud zkoumáme podmnožinu $\Omega' \subseteq \Omega$ takovou, že řešení $F(\Omega, c) \in \Omega'$, pak je $F(\Omega, c)$ řešením i pro Ω'.

Nash bargaining solution

Theorem

Vyjednávací řešení $F : \Sigma \to \mathbb{R}^2$ naplňuje axiomy 1-4 právě tehdy pokud je to Nashovo vyjednávací řešení.

Nash, J. (1950). The Bargaining Problem. Econometrica 18 (2)

Nash bargaining solution, důsledek

Theorem

Existuje pouze jedna funkce $F : \Sigma \to \mathbb{R}^2$ modelující Nashovo vyjednávací řešení. Je definována tak, že

$$F(\Omega, c) = (u_A^*, u_B^*)$$

a

$$(u_A^*, u_B^*) = arg\max_{u_A, u_B}\{ (u_A - c_A)(u_B - c_B) \mid (u_A, u_B) \in \Omega \wedge u_A \geq c_A, u_B \geq c_B \}$$

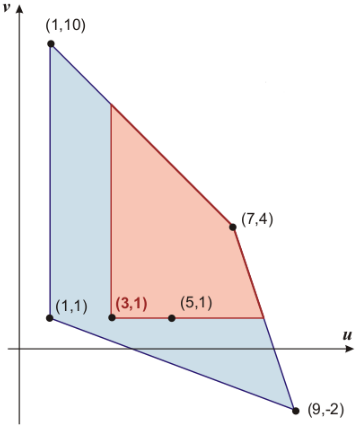
Vyjednávání v nekooperativní hře

Mějme hru:

5,1	7,4	1,10
1,1	9,-2	5,1

Ekvilibria: $\left((0,1),\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)\right),((0,1),(0,0,1))$.

Minimální očekávaný zisk: $(3,1)$. Lze vyjednat $\left(\frac{13}{2},\frac{9}{2}\right)$.



Vyjednávání v nekooperativní hře

$$g(u, v) = (u - 3)(v - 1)$$

Bereme jako nekooperativní výsledek $(3, 1)$ a vyjednávací oblast danou přímkou $v = -u + 11$. Pak

$$g(u, -u + 11) = (u - 3)(-u + 10)$$

$$(-u^2 + 13u - 30)' = 0$$

$$u = \frac{13}{2}, v = \frac{9}{2}$$

Nash bargaining solution, závěr

- Existuje třída problémů, kterým se říká vyjednávací (jsou zadány užitkovými funkcemi, nekooperativním profilem a vyjednávací množinou).
- Nash (1950) formuloval axiomatickou teorii vyjednávání a ukázal řešení problému (Nash product), které odpovídá jeho axiomům a je unikátní.
- Existují i jiné názory a vyjednávací modely.

Další podoby vyjednávání (s jinými předpoklady) jsou tématem projektů.

Kooperativní hry

- Tvorba koalic. Přerozdělování zisku.
- Uvažujme hru N hráčů, Q bude množina hráčů.
- Koalice $K \subseteq Q$. Koaliční struktura je uskupení koalic ve rámci hry.
- Protikoalicí ke koalici K se rozumí množina hráčů $K^- = Q \setminus K$.
- Množina všech hráčů se nazývá *velká koalice*. Prázdná koalice je opak.
- Je možno vytvořit 2^N koalic (pokud nebudeme uvažovat prázdnou koalici, tak $2^N - 1$).

Kooperativní hry

V čem spočívá kooperativní hra?

- Hráči vnímají nekooperativní situaci a jsou schopni vyhodnotit sílu jednotlivých koalic. Přemýšlí, které koalice se zúčastní.
- Hráči vnímají, že situace od nich očekává spolupráci hráčů.
- Je tu jistá podobnost s vyjednáváním (z dohody plyne lepší užitek než ze samostatného jednání).
- V rámci koalice dále přemýšlí, jak rozdělit společný zisk.
- Podíl na zisku (důsledek účasti v koalici) musí být větší než nekooperativní zisk jednotlivce.

Hráči mohou komunikovat.

Hra ve tvaru charakteristické funkce (von Neumann, 1928)

Předpokládáme TU-games (Transferable Utility – užitek je vztažen na koalici a dál se dělí mezi hráče).

Definition

Kooperativní TU hra ve tvaru charakteristické funkce je dána množinou hráčů

$$Q = \{1, 2, ..., N\}$$

a reálnou funkcí

$$v : 2^Q \to \mathbb{R}$$

takovou, že: $v(\emptyset) = 0$.

Charakteristickou funkcí budeme označovat celou hru. Hodnoty $v(\subseteq Q)$ udávají sílu jednotlivých možných koalic.
Notace: G^Q bude označovat všechny N-hráčové TU hry.
Jednotlivé hry budou označovány $v \in G^Q$.

Hra ve tvaru charakteristické funkce (von Neumann, 1928)

Definition

Super-aditivita: Pro každé dvě disjunktní koalice K a L platí

$$v(K \cup L) \geq v(K) + v(L)$$

Super-aditivitu budeme občas chtít ignorovat.

Hra ve tvaru charakteristické funkce (von Neumann, 1928)

Cílem hráče není utvořit koalici, ale **zajistit si lepší výsledek než je ten nekooperativní**.

- Mějme zadání hry ve tvaru charakteristické funkce.
- Stále předpokládáme **individuální racionalitu hráčů**, t.j. snahu optimalizovat **individuální zisk**.
- $v(K)$ je zisk koalice K. Je třeba ho rozdělit hráčům $i \in K$ v koalici.
- Jak se koalice utvoří? Nekooperativní výsledek je rozdělení do jednoprvkových koalic.
- Jak se hráči v koalici dohodnou na rozdělení (TU) zisku v rámci koalice?
- Jak vyjádříme individuální zisk?

Nepodstatná hra (předpokládáme super-aditivitu)

Definition

Hra ve tvaru charakteristické funkce se nazývá nepodstatná, pokud platí:

$$v(Q) = \sum_{i \in Q} v(\{i\})$$

Pokud hra není nepodstatná, pak se nazývá podstatná.

Theorem

Nechť K je libovolná koalice v nepodstatné hře, pak

$$v(K) = \sum_{i \in K} v(\{i\})$$

Závěr: v nepodstatné hře nemá smysl tvořit koalice (není žádná přidaná hodnota). Žádná synergie.

Velká koalice

Velká koalice je v mnoha modelech řešení ten velký cíl, ovšem...
Budeme odděleně zkoumat hry:

- kde je velká koalice nejhodnotnější koalicí,
- kde velká koalice NENÍ nejhodnotnější koalicí (neplatí super-aditivita),
- kde uvažujeme vznik velké koalice, ale přínos některých hráčů do ní bude nulový.

Individuální zisk pro hráče

Představme si kooperativní hru třech hráčů $Q = \{A, B, C\}$ s charakteristickou funkcí:

$$v(\emptyset) = 0, v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 1$$

$$v(\{A, B\} = v(\{A, C\}) = v(\{B, C\}) = 5, v(Q) = 100$$

Situace zřejmě vede na velkou koalici. Jaké bude rozložení zisků pro jednotlivé hráče?

Jaké bude v situaci, kdy $v(\{C\}) = 50$?

Individuální zisk pro hráče

Pro vyjádření rozdělení zisku si zavedeme vektory $a \in \mathbb{R}^N$ (tak zvané *výplatní vektory*). Pod zápisem $a(S)$, kde $S \subseteq Q$ budeme rozumět

$$a(S) = \sum_{i \in S} a_i$$

Lze tušit, že pracujeme se spojitými úlohami. Mohutnost prostoru pro vyjednávání o rozdělení individuálního zisku bude potenciálně nekonečná. Budeme pracovat s prostorem výplatních vektorů $X^{**}(v)$ takových, že

$$X^{**}(v) = \{a \in \mathbb{R}^N | a(Q) \leq v(Q)\}$$

Množina dosažitelných (feasible) užitků.

Individuální zisk pro hráče

V $X^{**}(v)$ existují takové výplatní vektory a, že $a(Q) < v(Q)$, což znamená, že by velká koalice tratila rozdíl mezi $v(Q)$ a $a(Q)$, neboť

$$a = v(Q) - \sum_{i \in Q} a_i > 0$$

Prostor dosažitelných zisků proto omezíme zdola na *prostor efektivních zisků*:

$$X^*(v) = \{a \in X^{**}(v) | a(Q) = v(Q)\}$$

Pracujeme pouze s hrami, kde $\nexists S \subset Q : v(S) > v(Q)$. Superaditivita.

Individuální zisk pro hráče

Zajímá nás především individuální racionalita jedince.

Definition

Výplatní vektor $a \in X^*(v)$ je *individuálně racionální*, pokud pro všechny $i \in Q$ platí, že:

$$a_i \geq v(\{i\})$$

Dostáváme se k definici pojmu *imputace*.

Imputace

Definition

Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce s množinou hráčů

$$Q = \{1, 2, ..., N\}$$

N-tice a reálných čísel se nazývá **imputace**, pokud jsou splněny podmínky:

- Individuální racionalita: $a_i \geq v(\{i\}); \forall i \in Q$.
- Kolektivní racionalita: $\sum_{i \in Q} a_i = v(Q)$.

Imputace je přerozdělení zisku koalice mezi její členy.

Pro chápání imputace je důležité poznání, že suma ohodnocení vzniklých koalic (rozklad hráčů) je obecně méně než $v(Q)$. Imputace ovšem plánuje přerozdělit $v(Q)$ zisku. Tzn., některé koalice mohou dostat více než je jejich hodnocení.

Imputace

Prostor všech imputací hry $v \in G^Q$ budeme označovat $X(v)$. Je zřejmé, že $X(v)$ bude prázdný pouze tehdy, pokud $v(Q) < \sum_{i \in Q} v(\{i\})$. Dále bude bude $X(v)$ jednoprvkový v nepodstatné hře (aditivní hře).

Theorem

Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce. Je-li v nepodstatná, pak má právě jednu imputaci, a to

$$a = (v(\{1\}), v(\{2\}), ..., v(\{N\}))$$

Je-li v podstatná, pak má nekonečně mnoho imputací.

Preference nad imputacemi

Definition

Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce, K je koalice a a, b jsou imputace. Řekneme, že a dominuje nad b pro koalici K, pokud:

- $a_i > b_i$ pro všechny $i \in K$
- $\sum_{i \in K} a_i \leq v(K)$

Imputace musí být jaksi shora omezená ($\sum_{i \in K} a_i \leq v(K)$). Pokud hráčí půjdou do K, pak nedostanou dohromady více než $v(K)$.

Preferenci budeme značit $a \succ_K b$.

Koncepty řešení v TU hrách

Solution concepts. Zajímá nás predikce racionálního chování hráčů. V TU kooperativních hrách je to i forma vymezení spravedlivého rozdělení zisku.

- Jádro hry (the core).
- Shapleyho hodnota.
- Další typy hodnot.
- Nukleolus.

Z předpokladu superaditivity je velká koalice nejefektivnější provedení hry. Pak nás zajímá distribuce zisků.

Jádro hry (The Core)

Definice

Jádro $C(v)$ hry $v \in G^Q$ je tvořeno množinou imputací

$$C(v) = \left\{ a \in X(v) | \sum_{i \in S} a_i \geq v(S); \quad \forall S \in 2^Q \setminus \emptyset \right\}$$

Je to taková množina imputací, že každá případná koalice S obdrží alespoň $v(S)$, tzn. může obdržet víc. Nemluví se zde o formování koalic. Srovnejme lib. $S \neq Q$ a Q.

Pokud je jádro prázdné, neexistuje stabilní kooperativní řešení, které by ustanovilo velkou koalici.

Jádro hry (Příklad)

Hráči A, B, C. Individálně $v(\{i\}) = 1$ $v(Q) = 90$.

Dvojice $AB \Rightarrow 50$, $AC \Rightarrow 20$, $BC \Rightarrow 10$

Imputace $a = (20, 20, 50)$, $b = (25, 25, 40)$, $c = (30, 30, 30)$ ...

Hráči A a B budou vyžadovat pro sebe v sumě alespoň 50. Při a nebudou tvořit Q, protože při rozdělení koalic (AB, C) dosahují minimálně $v(AB) = 50$.

$b \succ_{AB} a$

Jádro hry (The Core)

Hry se super-aditivitou:

- Přidáním jedince do koalice se nezhorší hodnota koalice. Velká koalice.
- Imputace – neprázdná množina.
- Jádro – je neprázdné.

Hry bez super-aditivity:

- Přidáním jedince do koalice se zhorší hodnota koalice. Velká koalice nemá smysl.
- Imputace – (potenciálně) prázdná množina. Není již kolektivní racionalita. Koaliční racionalita.
- Jádro – je prázdné.

Jádro hry (The Core)

- Imputace vyjadřuje herní profil.
- Pokud pro nějaký profil b najdeme profil a, že všichni hráči koalice K preferují a nad b, tak je jasné, že neutvoří koalici K s rozdělením zisku b, ale a.
- Podobně, jako v nekooperativních hrách, budeme hledat takovou podmnožinu řešení, že každé řešení z podmnožiny je stabilní.

Definition

Nechť $v \in G^Q$ je hra ve tvaru charakteristické funkce. Jádro hry v je tvořeno všemi imputacemi, které nejsou dominovány žádnou jinou imputací pro jakoukoliv koalici.

Je-li tedy vektor a v jádru hry v, pak žádná koalice ve hře nemá tendenci koalici zrušit a nahradit vektor a jiným vektorem.

Příklad bez velké koalice

$v_A = v_B = v_C = 1$
$v_{AB} = 10$
$v_{AC} = v_{BC} = 7$
$v_{ABC} = 5$
Zřejmě povede na koalici AB s vektorem $(5, 5, 1)$. Pokud by někdo z AB narušil stabilitu, může vést na vyjednávání s C a např. $(5, 1, 2)$ nebo $(1, 5, 2)$.

Nebo dokonce $(1, 5.5, 1.5)$

Co je jádro hry?

Účast hráče v koalici je jeho forma volby strategie. Hráč hledá takovou koalici, která mu společně s dohodou o rozdělení zisku přinese optimální užitek.

Každý hráč ví, že každá imputace $a \in C(v)$ mu přiřazují optimální zisky.

Mít neprázdné jádro je vlastnost hry pro ustanovitelnost velké koalice (pokud velká koalice vede k nejefektivnějšímu řešení hry).

Logicky, pokud existuje koalice $S \subseteq Q$, že $v(S) > v(Q)$, pak jádro neexistuje.

Příklad

Uvažujme tříhráčovou hru.

profil	výplata
(1,1,1)	(-2,1,2)
(1,1,2)	(1,1,-1)
(1,2,1)	(0,-1,2)
(1,2,2)	(-1,2,0)
(2,1,1)	(1,-1,1)
(2,1,2)	(0,0,1)
(2,2,1)	(1,0,0)
(2,2,2)	(1,2,-2)

$Q = \{1, 2, 3\}$. Koalice jsou
$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$.
Prozkoumáme situaci koalice $K = \{1, 3\}$ (versus $\{2\}$). Koalice K má strategie $(1, 1)$,$(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$. Protikoalice má ryzí strategie 1 a 2.

Příklad při koalici $K = \{1, 3\}$

Hráči 1 a 3 tvoří koalici proti hráči 2. Jejich zisk se tudíž sčítá.

Strategie	1	2
(1,1)	(0,1)	(2,-1)
(1,2)	(0,1)	(-1,2)
(2,1)	(2,-1)	(1,0)
(2,2)	(1,0)	(-1,2)

Hra má unikátní $MNE = \left(\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}, 0\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)$, při kterém dosahují očekávaného užitku $\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Plyne z toho, že $v(\{1,3\}) = \frac{4}{3}$, $v(\{2\}) = -\frac{1}{3}$. Podobně obdržíme: $v(\{1,2\}) = 1$, $v(\{3\}) = 0$, $v(\{2,3\}) = \frac{3}{4}$, $v(\{1\}) = \frac{1}{4}$, $v(\{1,2,3\}) = 1$, $v(\emptyset) = 0$.

Funkce v je charakteristickou funkcí (ověřte). Existuje imputace a taková, že $a_1 + a_2 + a_3 = 1, a_1 \geq \frac{1}{4}, a_2 \geq -\frac{1}{3}, a_3 \geq 0$ a je v jádře hry?

Příklad, výpočet jádra hry

Existují a_1, a_2, a_3, aby bylo splněno (neočekáváme jedno řešení, nýbrž množinu):

$$\begin{aligned}
&a_1 + a_2 + a_3 = 1\\
&a_1 \geq 1/4\\
&a_2 \geq -1/3\\
&a_3 \geq 0\\
&a_1 + a_2 \geq 1\\
&a_1 + a_3 \geq 4/3\\
&a_2 + a_3 \geq 3/4
\end{aligned}$$

Řešení neexistuje, protože $a_1 + a_2 = 1$ implikuje $a_3 = 0$, tzn. nesoulad s $a_1 + a_3 \geq 4/3$. Jádro hry je tudíž prázdné.

$H = (0.61, 0.03, 0.36)$.

Příklad II., výpočet jádra hry

K	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(K)$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	1

Soustava pro výpočet jádra generovaná z této charakteristické funkce má nekonečně mnoho řešení, např. $(1/3, 1/3, 1/3)$.

Všechny imputace z jádra umožňují sestavit koalice a hrát kooperativně. Potřebujeme další zjemnění tohoto "solution concept".

$H = (3/24, 15/24, 6/24) = (0.125, 0.625, 0.25)$

Shapley value

Nejvýznamnější koncept kooperativních her.

- Cílem je modelovat přínos hráče $i \in K$ pro koalici K.
- Slouží pro přerozdělování zisku koalice. Hráč se zúčastní koalice při imputaci, která mu přinese jeho "spravedlivý" podíl.
- Obecně: zkoumáme vliv neúčasti hráče v koalici $\delta(i, K) = v(K) - v(K \setminus \{i\})$

Koalice $K \setminus \{i\}$ má $k - 1$ členů a lze vytvořit

$$\binom{N-1}{k-1} = \frac{(N-1)!}{(k-1)!(N-k)!}$$

způsoby. Zkoumáme střední hodnotu přínosu hráče i do všech možných k-členných koalic.

Shapley value

Přínos hráče i do všech k-členných koalic:

$$h_i(k) = \sum_{K \subset Q, k=|K|, i \in K} \frac{v(K) - v(K \setminus \{i\})}{\binom{N-1}{k-1}} =$$

$$= \sum_{K \subset Q, k=|K|, i \in K} \frac{(k-1)!(N-k)!}{(N-1)!} (v(K) - v(K \setminus \{i\}))$$

Pro všechny možné koalice to je:

$$H_i = \sum_{k=1}^{N} \frac{h_i(k)}{N} = \sum_{K \subset Q, i \in K} \frac{(|K|-1)!(N-|K|)!}{N!} (v(K) - v(K \setminus \{i\}))$$

Shapley value

Definition

Mějme hru N hráčů danou charakteristickou funkcí v. Shapleyho vektor této hry je definován jako vektor

$$\mathbb{H} = (H_1, H_2, ..., H_N)$$

jehož každá i-tá složka H_i je vypočtena předchozím vztahem. Složka H_i se nazývá Shapleyho hodnota pro hráče i.

Z definice Shapleyho hodnoty je patrné, že vždy existuje.

Theorem

Shapleyho vektor zadané hry je imputací ve hře.

Důkaz (ověření individuální a kolektivní racionality) jako domácí cvičení.

Příklad

K	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$v(\emptyset)$
$v(K)$	100	10	0	150	110	20	200	0

$$
\begin{array}{ccc}
h_1(1) = 100 & h_2(1) = 10 & h_3(1) = 0 \\
h_1(2) = \frac{140+110}{2} & h_2(2) = \frac{50+20}{2} & h_3(2) = \frac{10+10}{2} \\
h_1(3) = 180 & h_2(3) = 90 & h_3(3) = 50
\end{array}
$$

Hráč 1 se může zapojit do dvou dvoučlenných koalic ($\{1,2\}, \{1,3\}$). Dle Shapleyho je jeho přínos pro dvoučlenné koalice dán

$$\frac{1}{2}(v(\{1,3\})-v(\{3\}))+\frac{1}{2}(v(\{1,2\})-v(\{2\})) = \frac{1}{2}(110-0)+\frac{1}{2}(150-10)$$

Celkem tedy $H_1 = \frac{100+125+180}{3} = 135$, $H_2 = 45$, $H_3 = 20$.
Shapleyho vektor pro zadanou hru je $\mathbb{H} = (135, 45, 20)$.

Vlastnosti Shapleyho hodnoty

- Individuální racionalita: $H_i \geq v(\{i\})$ pro všechny $i \in Q$.
- Efektivita $\sum_{i \in Q} H_i = v(Q)$.
- Symetrie: pro každé dva hráče $i, j \in Q$, pro které platí $v(K \cup \{i\}) = v(K \cup \{j\})$ pro všechny $K \subseteq Q, i \notin K, j \notin K$, je $H_i = H_j$.
- Aditivita: pokud kombinujeme dvě hry v a w stejné struktury, pak platí, že $H_i(v) + H_i(w) = H_i(v + w)$.
- Nulový hráč nebere nic: pokud existuje hráč i takový, že $v(K \cup \{i\}) = v(K), \forall K \subset Q, i \notin K$, pak je $H_i = 0$.

Příklad: šéf a zaměstnanci

- Předpokládejme situaci šéfa o a zaměstanců $w_1, w_2, ..., w_k$. $Q = \{o, w_1, w_2, ..., w_k\}$.
- Řeší se projekt, který ztroskotá bez účasti šéfa, tzn. $v(K) = 0, \forall K \subset Q, o \notin K$.
- Každý zaměstnanec má přínos p do koalice, tzn. $v(K) = (|K| - 1)p, \forall K \subseteq Q, o \in K$
- Shapley value šéfa je $\frac{(|K|-1) \cdot p}{2}$, zaměstnance $\frac{p}{2}$.

$\frac{(|K|-1) \cdot p}{2} + |K - 1| \cdot \frac{p}{2} = |K - 1| \cdot p$

Příklad: Stavba mostu

4 firmy zvažují postavit most. Cena mostu je 20 miliónů. Jednotlivé firmy jsou ochotny zaplatit maximálně $u_1 = 10$, $u_2 = 8$, $u_3 = 12$, $u_4 = 16$ miliónů. Které firmy se dohodnou na stavbě mostu a kolik každá zaplatí? Firmy utvoří akční koalici (pro stavbu mostu) pouze za předpokladu, že se dohodnou na platbě.

Pozn.: Podobné úlohy řeší *mechanism design* v situacích, kdy chtějí hráči svoje ocenění u_i tajit. Je pak třeba *nastavit pravidla*, aby to v rámci racionálního chování dobrovolně přiznali.

Příklad: Stavba mostu

$$u_1 = 10, u_2 = 8, u_3 = 12, u_4 = 16$$

Hra je dána charakteristickou funkcí

$$v(K) = \max \left[\sum_{i \in K} u_i - C, 0 \right]$$

Char. funkce vyjadřuje zisk koalice. $v(\{i\}) = 0;\ \forall i \in Q$. Celek $v(Q) = 26$.
Shapley values: $\mathbb{H} = (5.667, 4.333, 6.667, 9.333)$.

Platba hráčů: $p_i = u_i - H_i$, tzn. $\left(\frac{13}{3}, \frac{11}{3}, \frac{16}{3}, \frac{20}{3}\right)$.
Celkem $\frac{13}{3} + \frac{11}{3} + \frac{16}{3} + \frac{20}{3} = 20$.

Nucleolus (Shmeidler, 1969)

Definition

Nechť v je charakteristická funkce s N hráči, a je daná imputace a K je koalice. Číslo

$$e(K, a) = v(K) - \sum_{i \in K} a_i$$

se nazývá exces koalice K vzhledem k imputaci a (kolik musí koalice zanechat nerozděleno při imputaci a).

Dále označme symbolem $e(a)$ vektor o délce $2^{|Q|} - 1$ odpovídající excesům všech možných koalic. Seřaďme prvky $e(a)$ sestupně podle velikosti a označme tuto posloupnost symbolem $f(a)$.

Každé imputaci a se tak přiřadí $f(a)$. Pracujeme s množinou $\{f(a) | a \textit{ je imputace}\}$. Definujme na této množině lexikografické uspořádání $\leq_{(lex)}$.

Nucleolus, předpoklady

$$\leq_{(lex)} (p_1, p_2) = \begin{cases} true & p_1 = p_2 = () \\ \leq_{(lex)} (tail(p_1), tail(p_2)) & head(p_1) \leq head(p_2) \\ false & otherwise \end{cases}$$

Řekneme, že imputace b je přijatelnější (vzbuzuje méně námitek) než imputace a, pokud $f(b) \leq_{(lex)} f(a)$.

Znamená to, že imputace b ve všech myslitelných koalicích vede k lepšímu rozložení zisku.

Nucleolus, definice

Definition

Nucleolem hry je taková imputace b, pro kterou platí:

$$f(b) \leq_{(lex)} f(a)$$

pro všechny imputace a.

Vidíme, že nukleolus je forma globálního optima ve hře (stabilní bod).

Příklad

K	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(K)$	-1	-1	-1	1	1	1	0

K výpočtu nucleolu přistoupíme analyticky, budeme proto vyjadřovat vektory $e(a)$ analyticky:

$$\begin{gathered} -(a_1 + a_2 + a_3) \\ 1 - a_1 - a_2 \\ 1 - a_1 - a_3 \\ 1 - a_2 - a_3 \\ -(1 + a_1) \\ -(1 + a_2) \\ -(1 + a_3) \end{gathered}$$

Protože $v(Q) = 0$, je první složka rovna nule. Přijatelné je cokoliv, kde $a_i \geq -1$. Nukleolus je $(0, 0, 0)$.

Příklad

Mějme hru s char. funkcí: $v(Q) = 1, v(\{1\}) = \frac{1}{2}, v(\{2\}) = 0$.

Imputace:

$$a_1 \geq \frac{1}{2}, a_2 \geq 0, a_1 + a_2 = 1 \qquad a_1 \in \left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle, a_2 = 1 - a_1$$

Jádro (core):

$$a_1 \geq \frac{1}{2}, a_2 \geq 0, a_1 + a_2 = 1 \qquad a_1 \in \left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle, a_2 = 1 - a_1$$

Shapley value: $H_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3}{4}, \quad H_2 = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$
$\Rightarrow a_1 = \frac{3}{4}, a_2 = \frac{1}{4}$

Příklad, nucleolus

Připomínáme:

$$e(K,a) = v(K) - \sum_{i \in K} a_i$$

Pak

$$e(\{1\},a) = \tfrac{1}{2} - a_1, e(\{2\},a) = 0 - a_2, e(\{1,2\},a) = 1 - a_1 - a_2 = 0$$
$$e(a) = \left(-a_2, \tfrac{1}{2} - a_1, 0\right) = \left(-a_2, a_2 - \tfrac{1}{2}, 0\right)$$
$$f(a) = (0, -a_2, a_2 - \tfrac{1}{2}) \Leftrightarrow 0 \le a_2 \le \tfrac{1}{4}$$
$$f(a) = (0, a_2 - \tfrac{1}{2}, -a_2) \Leftrightarrow \tfrac{1}{4} \le a_2 \le 1$$

Pokud dáme $a_2 = 0$, pak je exces $\left(0, 0, -\frac{1}{2}\right)$. Pokud dáme $a_2 = \frac{1}{4}$, pak je exces $\left(0, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$. Vidíme, že $\left(0, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) \le_{(lex)} \left(0, 0, -\frac{1}{2}\right)$.
Co dát $a_2 = \frac{1}{2}$?
Nejpřijatelnější exces je při $a_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a_1 = \frac{3}{4}$.

Příklad, Nashovské vyjednávání

$$g(a_1, a_2) = \left(a_1 - \frac{1}{2}\right) a_2 = \left(a_1 - \frac{1}{2}\right)(1 - a_1) =$$

$$= \frac{3}{2}a_1 - a_1^2 - \frac{1}{2} = h(a_1)$$

$$h'(a_1) = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{3}{4}, a_2 = \frac{1}{4}$$

Příklad, z historie

Případ u soudu: Dva drží jeden kus oděvu. Jeden volá: "celý je můj", druhý volá: "má je polovina". Potom první dostane tři čtvrtiny a druhý jednu čtvrtinu. Talmud

Rabi Raši (1105) komentuje řešení: druhý přiznává prvnímu polovinu, ta je tedy jasná. Zbývá rozdělit tu druhou polovinu rovným dílem.

Zanedbáno

- Další modely vyjednávání.
- Důkaz Nash bargaining solution.
- Shapley-Shubikův index a další indexy.
- Stable-sets (von Neumann, Morgenstern).
- Formalizace výpočtu nucleolu.
- Case-study.

Příště

Opakované hry:

- forma her v rozšířené formě (sekvenční),
- vliv opakovaní na chování hráčů,
- skutečně to vede ke spolupráci (tzn. k efektivnějšímu výsledku konfliktu)?

Další kapitoly THE:

- Mechanism design – jak to udělat, aby se lidi chovali správně?
- Aukce – jak to udělat, aby zaplatili co nejvíc?
- Public choice – jak nastavit pravidla voleb, abychom dosáhli objektivnosti?
- Korelované ekvilibrium – existuje obecnější koncept než MNE?
- Evoluce – je výsledkem strategických konfliktů?
- Rozbor modelu energetických trhů ve střední Evropě – jak modelovat reálný složitý problém?