Teoretická informatika

Úkol 3

2. ledna 2020

Vladimír Dušek, xdusek27

Teoretická informatika (TIN) – 2019/2020
Úkol 3
(max. zisk 5 bodů – 10 bodů níže odpovídá 1 bodu v hodnocení předmětu)

1. Pomocí počátečních funkcí a operátorů kombinace, kompozice a primitivní rekurze vyjádřete funkci počítající odmocninu (zaokrouhlenou dolů na celá čísla):

$$sqrt : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N},\ sqrt(x) = z \text{ takové, že } z^2 \leq x\ \wedge\ (z+1)^2 > x.$$

   Je možné použít funkce $plus(x, y)$, $mult(x, y)$, $monus(x, y)$ a $eq(x, y)$ definované v přednáškách. Kromě nich však nepoužívejte žádné další funkce zavedené na přednáškách mimo funkce počáteční. Nepoužívejte zjednodušenou syntaxi zápisu funkcí – dodržte přesně definiční tvar operátorů kombinace, kompozice a primitivní rekurze.

   15 bodů

2. Mějme následující funkce:
   $f(n) = \sqrt{2}n^3$
   $g(n) = 10000n^2 + 500n + 211.$

   Dokažte, že $O(g(n)) \subset O(f(n))$.

   Pozn.: Nezapomeňte, že důkaz má dvě části: (i) $O(g(n)) \subseteq O(f(n))$ a (ii) $O(g(n)) \neq O(f(n))$

   10 bodů

3. Teta Květa stojí před regálem se zeleninou a nehýbá se, protože má těžký rozhodovací problém. Potřebuje sníst co nejvíce vitamínu C, aby ji přešla chřipka. Každý druh zeleniny je charakteristický obsahem vitamínu C na kilo a cenou za kilo. Teta se snaží přijít na to, jestli je možné nakoupit zeleninu za obnos O v její peněžence tak, aby úhrn vitamínu C byl alespoň C. Kromě toho s každým kilem zeleniny přidá zelinář deset deka brokolice zdarma, s obsahem B vitamínu C na kilo.

   Formulujte problém tety Květy jako rozhodovací problém, a dokažte, že je NP-úplný. Těžkost dokažte redukcí z některého problému uvedeného v odstavci „NP-complete problems“ zde:
   `https://en.wikipedia.org/wiki/NP-completeness#NP-complete_problems`

   Z dálky na tetu volá synovec Alan, ať nezoufá, že to vyřeší za chvíli (t.j., v polynomiálním čase), pomocí jakéhosi psacího stroje vlastní výroby s nekonečnou páskou. Co to znamená pro lidstvo?

   15 bodů

4. Modelujte následující kritický systém Petriho sítí. Namalujte ji a zapište formálně ve shodě s definicí.

   Převozník chce převézt z jednoho břehu na druhý hlávku zelí, kozu a vlka. Do loďky s sebou může vzít buď zelí, nebo kozu, nebo vlka, ale víc se tam nevejde. Nechá-li na břehu hlávku zelí a kozu, koza zelí sežere. Nechá-li na břehu kozu a vlka, pak vlk sežere kozu. Jakým způsobem musí převozník postupovat, aby nedošlo k žádné škodě?

   Snažte se o přehlednost a pochopitelnost modelu. Místa vhodně pojmenujte a síť nakreslete přehledně.
   (příklad ze sbírky úloh Alkuina z Yorku, Úlohy k bystření mladíků, z roku cca 735-804)

   10 bodů

Příklad 1

Použité funkce $plus(x, y)$, $monus(x, y)$, $mult(x, y)$ a $eq(x, y)$ odpovídají definicím z přednášek.

Pomocná funkce $neg(x)$:

- $neg(x) = monus(\sigma \circ \xi(), x)$

Pomocná funkce $isGreater(x, y)$:

- $isGreater(x, y) = neg \circ eq(monus(x, y), \xi())$

Pomocná funkce $foo(x, y)$:

- $foo(0, y) = \xi()$
- $foo(x + 1, y) = plus(isGreater(mult(\sigma \times \sigma(x)), y), foo(x, y))$

Výsledná funkce $sqrt(x)$:

- $sqrt(x) = monus(x, foo(x, x))$

Příklad 2

a) Vztah $O(10\,000n^2 + 500n + 211) \subseteq O(\sqrt{2}\,n^3)$

Předpokládejme, že vztah platí. Potom:

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : 10\,000n^2 + 500n + 211 \leq c \cdot \sqrt{2} \cdot n^3 ,$$

dále platí: (jelikož $10\,000n^2 + 500n + 211 \neq 0$ pro $n \in \mathbb{N}$)

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \frac{c \cdot \sqrt{2} \cdot n^3}{10\,000n^2 + 500n + 211} \geq 1$$

Nyní zkoumejme:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{c\sqrt{2}\,n^3}{10\,000n^2 + 500n + 211} = \lim_{n \to \infty} \frac{3c\sqrt{2}\,n^2}{20\,000n + 500} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{6\sqrt{2}\,cn}{20\,000} = +\infty$$

Tedy $c\sqrt{2}\,n^3$ roste rychleji než $10\,000n^2 + 500n + 211$ a

např. pro $c = 10\,000$ a $n_0 = 1$ platí $\forall n \geq n_0 : \frac{c\sqrt{2}\,n^3}{10\,000n^2 + 500n + 211} \geq 1$

a zároveň $\lim_{n \to \infty} \frac{c\sqrt{2}\,n^3}{10\,000n^2 + 500n + 211} = \infty$.

Vztah platí.

b) vztah $\sqrt{2}\, n^3 \notin O(10\,000\, n^2 + 500\, n + 211)$

Předpokládejme, že $\sqrt{2}\, n^3 \in O(10\,000\, n^2 + 500 n + 211)$, potom:

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : \sqrt{2}\, n^3 \leq c\,(10\,000\, n^2 + 500 n + 211),$$

jelikož $\sqrt{2}\, n^3 \neq 0$ pro $n \geq n_0$, tak platí:

$$\frac{c\,(10\,000\, n^2 + 500 n + 211)}{\sqrt{2}\, n^3} \geq 1$$

Zkoumejme:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{c(10\,000\, n^2 + 500 n + 211)}{\sqrt{2}\, n^3} = \lim_{n \to \infty} \frac{20\,000\, c n + 500}{3\sqrt{2}\, n^2} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{20\,000\, c}{6\sqrt{2}\, n} = 0$$

zde docházíme ke sporu, neboť $\nexists c \in \mathbb{R}^+ \; \nexists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 :$

$: \sqrt{2}\, n^3 \leq c\,(10\,000\, n^2 + 500 n + 211)$

Tedy vztah $\sqrt{2}\, n^3 \notin O(10\,000\, n^2 + 500 n + 211)$ platí.

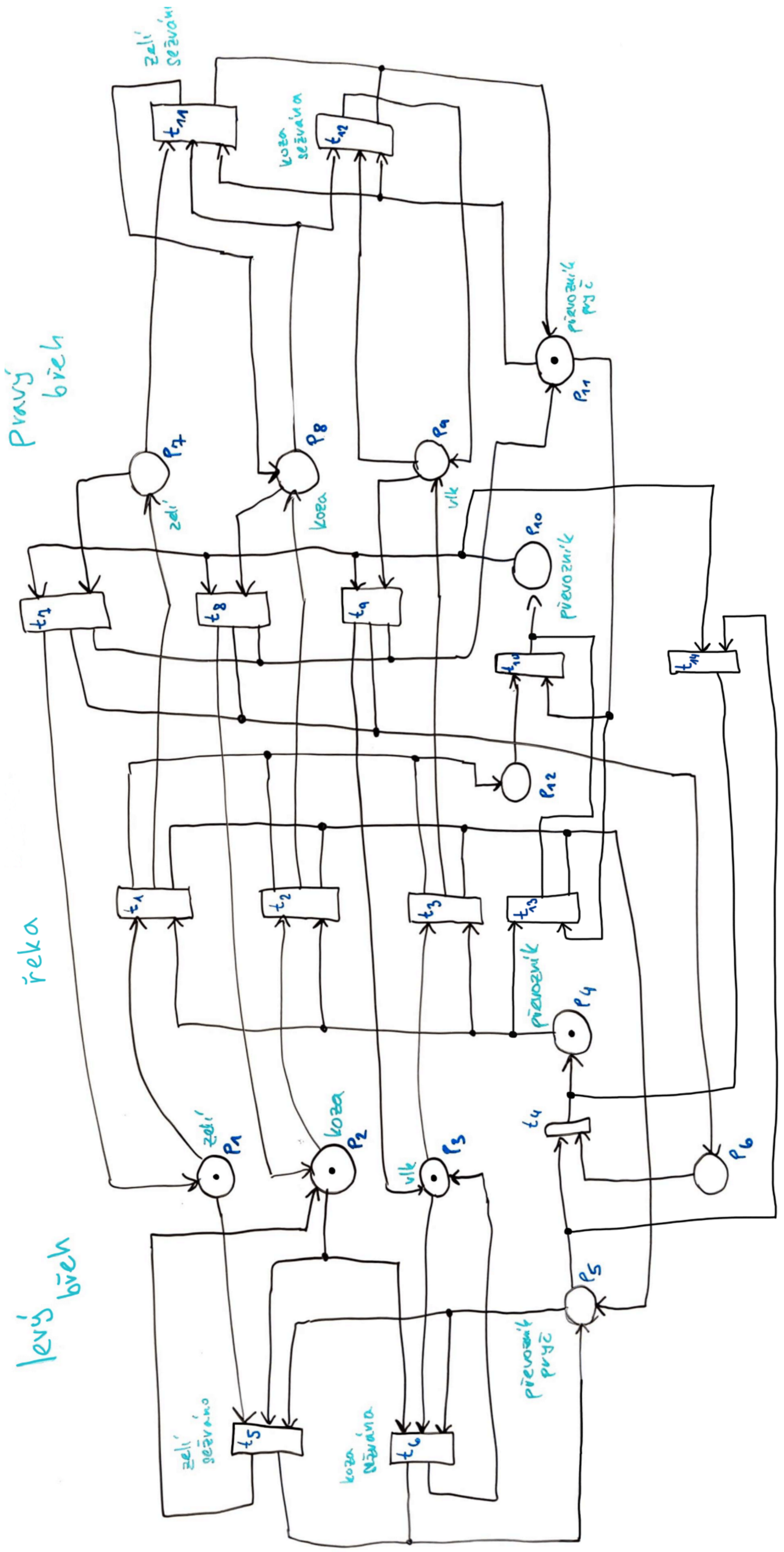
A na základě platnosti vztahů a) a b) jsme dokázali, že $O(g(n)) \subset O(f(n))$

Příklad 4

Kritický systém Vlk, koza a zelí modeluje následující Petriho síť: $PN = (P, T, F, W, K, M_0)$, kde

- $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9, p_{10}, p_{11}, p_{12}\}$
- $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{14}\}$
- $F = \{(p_1, t_1), (p_1, t_5), (p_2, t_2), (p_2, t_5), (p_2, t_6), (p_3, t_3), (p_3, t_6), (p_4, t_1), (p_4, t_2), (p_4, t_3), (p_4, t_13), (p_5, t_5), (p_5, t_6), (p_5, t_14), (p_6, t_4), (p_7, t_7), (p_7, t_{11}), (p_8, t_8), (p_8, t_{11}), (p_8, t_{12}), (p_9, t_9), (p_9, t_{12}), (p_{10}, t_7), (p_{10}, t_8), (p_{10}, t_9), (p_10, t_14), (p_{11}, t_{11}), (p_{11}, t_{12}), (p_{11}, t_{10}), (p_11, t_13), (p_{12}, t_{10}), (t_1, p_{12}), (t_1, p_7), (t_1, p_5), (t_2, p_{12}), (t_2, p_8), (t_2, p_5), (t_3, p_{12}), (t_3, (p_9), (t_3, p_5), (t_4, p_4), (t_5, p_2), (t_5, p_5), (t_6, p_3), (t_6, p_5), (t_7, p_1), (t_7, p_6), (t_7, p_{11}), (t_8, p_2), (t_8, p_6), (t_8, p_{11}), (t_9, p_3), (t_9, p_6), (t_9, p_{11}), (t_{10}, p_{10}), (t_{11}, p_8), (t_{11}, p_{11}), (t_{12}, p_9), (t_{12}, p_{11}), (t_{13}, p_{10}), (t_{14}, p_4)\}$
- $W = \{(f, 1) \mid f \in F\}$
- $K = \{(p, 1) \mid p \in P\}$
- $M_0 = \{(p_1, 1), (p_2, 1), (p_3, 1), (p_4, 1), (p_5, 0), (p_6, 0), (p_7, 0), (p_8, 0), (p_9, 0), (p_{10}, 0), (p_{11}, 1), (p_{12}, 0)\}$

Nákres Petriho sítě PN je na obrázku 1.



Obrázek 1: Petriho síť modelující systém Vlk, koza a zelí.