

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ВОПРОС ПО ВЫБОРУ

**Изучение метода множественных
фазовых экранов (MPS) в оптике и его
применение для решения задач
распространения электромагнитной
волны в ионосфере и других
анизотропных средах**

Алейник Владислав (ФРТК)

Аль-Харба Кирам (ФРТК)

Назаров Константин (ФРТК)

27 МАЙ, 2020 ГОД

Цели:

1. Изучить метод множественных фазовых экранов и его вариации, используемые для моделирования распространения волнового фронта в анизотропной среде
2. Использовать его для численного описания распространения пучка в различных средах

Теория:

Метод множественных фазовых экранов, обоснование:

Рассмотрим распространение электромагнитного пучка от источника за пределами ионосферы Земли к приемнику на ее поверхности. По тем или иным причинам, в ионосфере могут возникнуть возмущения электронной плотности, из-за чего она становится случайной средой. Сигнал, распространяющийся через нее, претерпевает быстрые фазовые и амплитудные изменения, что приводит к нежелательному эффекту "мерцания" когда освещённость изображения меняется случайным образом по площади изображения и во времени (и эти изменения не связаны с интенсивностью самого источника).

На данный момент может быть непонятно, зачем разрабатывать отдельную теорию для описания распространения в случайной среде (по сути, случайного процесса), если для шумов в радиотехнике уже давно придумано описание стационарными случайными функциями. Рассмотрим осциллограмму температуры воздуха в атмосфере от времени (именно она является основной причиной оптической неоднородности):

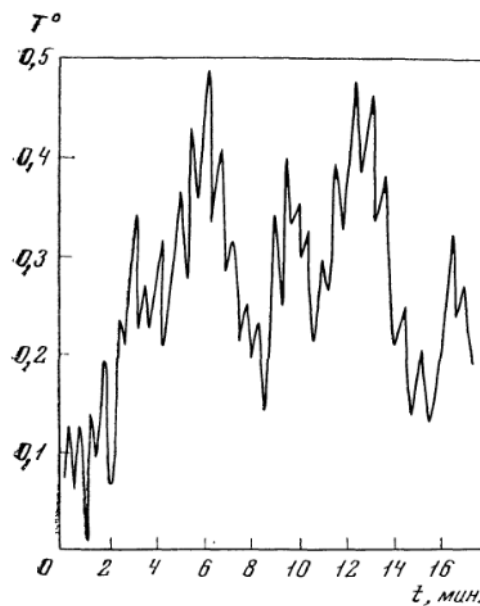


Рис. 1: Изменение температуры со временем

На этой осциллограмме явно видно что помимо быстрых изменений температуры имеется еще и "регулярный" ход. Однако если рассмотреть более длинную реализацию, то этот "регулярный" ход исчезнет, превратившись в беспорядочные флуктуации, но появится более медленный "регулярный" ход. Поэтому результаты, полученные для стационарных функций требуют обобщения на атмосферные процессы, что является нетривиальной задачей и почти не будет затрагиваться в данном ВПВ. Это первая из особенностей электронных возмущений, происходящих в атмосфере.

Второй особенностью является то, что коэффициент преломления плазмы (ионосферы) есть функция от частоты, следовательно, для слишком широкой полосы передаваемого сигнала может быть выявлена неоднородность поведения фронта на разных частотах. Для описания этого процесса вводятся время когерентности T_c и когерентность на всей ширине полосы

B_c . Для случаев, когда эти параметры можно рассчитать или они известны заранее существует много методов восстановления и передачи сигнала, но это уже выходит за пределы рассмотрения этого ВПВ.

Для оценки возможных возмущений было создано множество аналитических решений, которые применимы в тех или иных случаях. Однако эти решения базируются на таких существенных предположениях как: гомогенность среды вдоль линии зрения (ЛЗ) или одинаковость спектральной плотности мощности электронов в пространстве. В связи с этим, для численной оценки возможных возмущений без необходимости введения лишних допущений были созданы следующие методы: метод множественных фазовых экранов (MPS) и метод множественных фазовых кругов (MPC), цель которого - расширить область применения MPS, при этом качественно не изменяя процедуры вычисления.

Метод множественных фазовых экранов, описание:

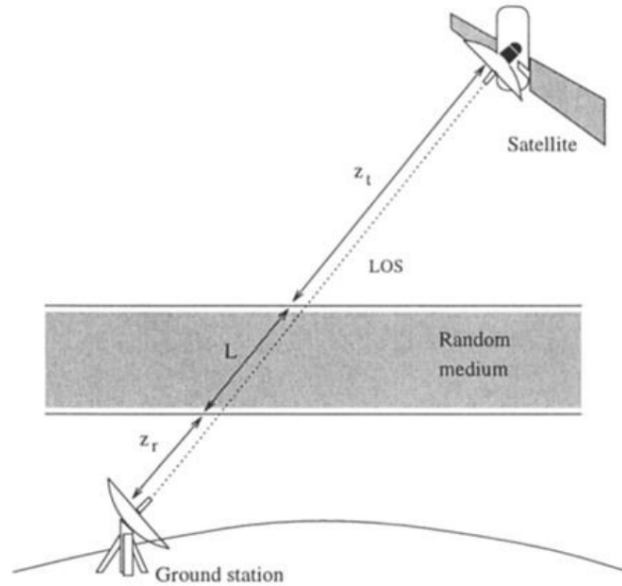


Рис. 2: Геометрия задачи

MPS работает в приближении прямоугольной геометрии области нерегулярностей и плоских волн, которое справедливо для большей части прикладных случаев. Для более общего описания существует MPC, о котором речь пойдет позже.

В данном методе область нерегулярностей заменяется множеством тонких дифракционных экранов, перпендикулярных ЛЗ. Каждый из экранов вносит изменение по фазе, эквивалентное тому участку, который он отображает. Пространственно промодулированный фронт после экрана распространяется до следующего в вакууме (free-space). В этом разбиении и состоит эффективность MPS: решение задачи о распространении сводится к двум пространственным преобразованиям Фурье, которые быстро разрешаются методом быстрого преобразования Фурье (FFT).

Выведем основные уравнения. Рассмотрим электрическое поле такое, что:

$$E(x, z) = u(x, z)e^{-ikz}$$

Где $u(x, z)$ - комплексная амплитуда, $k = \omega/c$ - волновое число, а оси x и z направлены вдоль и перпендикулярно ЛЗ соответственно. Тогда параболическое волновое уравнение (полученное из уравнения Гельмгольца в приближении $kz \gg 1$) примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} + 2k^2 \Delta n(x, z, \omega)u = 0 \quad (1)$$

Где $\Delta n(x, z, \omega)$ - изменение коэффициента отражения относительно среднего значения. Рассмотрим это уравнение подробнее

Его можно разделить на два уравнения (метод Фурье работы с уравнением в частных производных):

$$-2ik \frac{\partial u}{\partial z} + 2k^2 \Delta n(x, z, \omega) u = 0 \quad (2)$$

Которое описывает изменение по фазе, и:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

Описывающее распространение в свободной среде.

Из уравнения (2) получаем связь поля до и после фазового экрана:

$$u^+ = u^- e^{i\phi(x, \omega)} \quad (4)$$

Где $\phi(x, \omega)$ - описывает фазовый экран. Из уравнения (3) получим вид распространения в свободной среде от z_1 до z_2 .

$$E(x, z_2, \omega) = e^{-ik(z_2 - z_1)} \int_{-\infty}^{+\infty} F(E(K, z_1, \omega)) e^{iKx + iK^2(z_2 - z_1)/2k} dK \quad (5)$$

Где $F(E) = F(u)e^{-ikz}$, а $F(u)$ - пространственное преобразование Фурье для u в пл-ти z :

$$F(u(K, z, \omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, z, \omega) e^{-iKx} dx \quad (6)$$

Стоит отметить, что хотя во всех преобразованиях Фурье указаны пределы интегрирования от $-\infty$ до $+\infty$, на высоких значениях аргумента будет происходить быстрое затухание. Следовательно, при непосредственном подсчете на компьютерной модели участок интегрирования можно дискретизировать для простоты вычислений, но об этом позже.

Используя уравнения (4) (5) можно рассчитать распространение волны от источника до ресивера через возмущенную среду: сразу по прохождении фазовой пластинки фаза волны изменяется согласно (4). После чего к измененной волне применяется преобразование Фурье $F(E(K, z, \omega))$ и используя (5) получается фронт в конце первого экрана.

Метод множественных фазовых экранов, критерии применимости:

Применение MPS требует, чтобы поле и фаза были определены в каждой из точек дискретизации. Их число и распределение должны удовлетворять следующим логичным требованиям:

1. Распределение фаз на экране должно адекватно представлять фазу полностью. Применим теорему Котельникова из курса РТ-цепей и сигналов, согласно которой изменение по фазе от одной точки дискретизации до другой должно быть меньше π :

$$\begin{aligned} \phi(x_2) - \phi(x_1) &< \pi \\ \Delta x \frac{d\phi}{dx} &< \pi \end{aligned}$$

Это условие накладывает ограничение как на функцию ϕ , так и на частоту дискретизации.

2. Эффекты, связанные с распространением за и на край экрана должны быть минимальны. В связи с необходимостью выполнения ЗСЭ и дискретной природой MPS, энергия, покидающая один конец дискретной решетки, обязана появиться на другой стороне. Однако чем больше энергии "перекидывается" от края к краю, тем хуже, т.к. по сути происходит наложение друг на друга нескольких спектров, из-за чего портится общая картина (см. алиасинг). Следовательно, мы должны добиться того, чтобы вышедший из фазовой пластинки фронт полностью поместился на следующей пластинке. Запишем выражение для угла разброса на экране. Т.к. $E \sim e^{i\phi}$, то:

$$\theta = \frac{1}{k} \frac{d\phi}{dx}$$

Отсюда размер экрана L должен быть:

$$L > z\theta = \frac{z}{k} \frac{d\phi}{dx}$$

Для каждого из слоев. Опять же, если ϕ не случайная, т.е. происходит моделирование детерминировано анизотропной среды, оба эти параметра можно посчитать заранее. При подсчете распространения в случайной среде мы можем только примерно оценить эти параметры и в дальнейшем просто следить за их выполнением.

Метод множественных фазовых экранов, техническая реализация:

// FIXME

Метод множественных фазовых кругов, описание:

Чтобы избавиться от привязки к прямоугольной геометрии задачи (зачастую это неудобно), полезно перейти в цилиндрическую СК. Снова предполагаем 2-мерную геометрию задачи, и отсутствие зависимости по z .

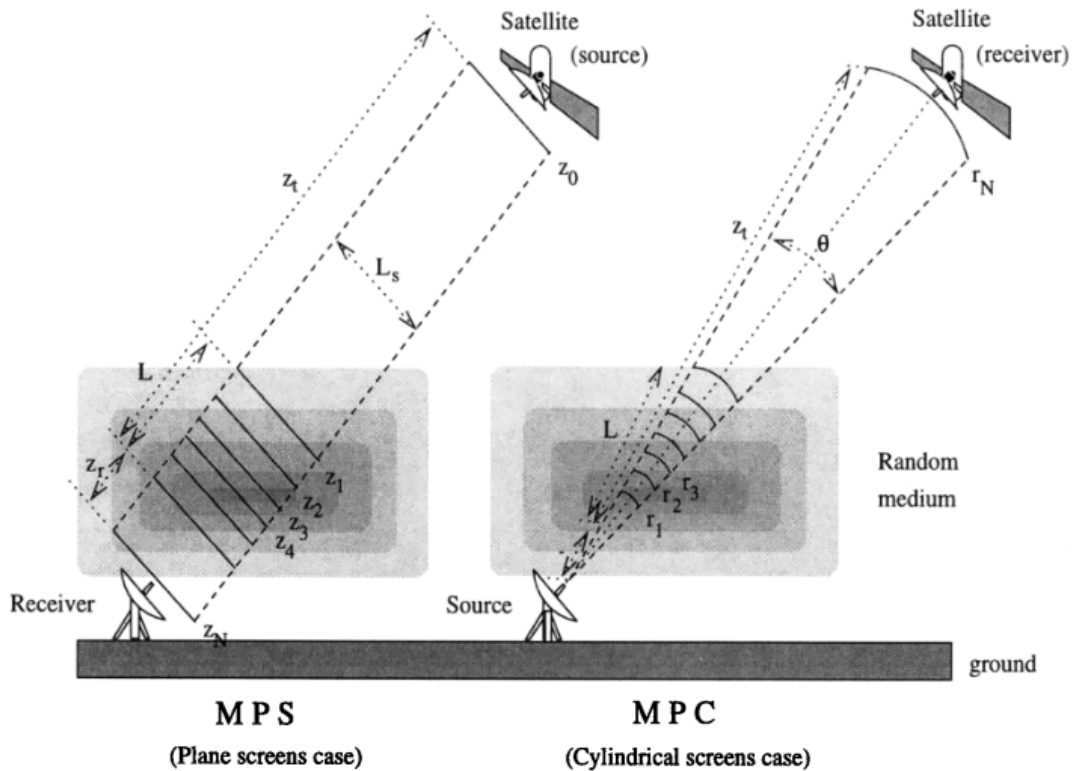


Рис. 3: Геометрия задачи

Тогда поле, создаваемое точечным источником:

$$E(r, \theta, z) = u(r, \theta, z) \frac{e^{-ikr}}{r}$$

И для него параболическое приближение запишется в следующем виде (пренебрегаем $\partial^2 \theta / \partial r^2$):

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial r} = \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} - 2k^2 \Delta n(r, \theta, \omega) \right) u$$

Как можно увидеть, общий вид остался тот же, что и в прямоугольном рассмотрении, следовательно, шаги, необходимые для получения фронта на выходе те же самые. Различие в подходах MPS и MPC на рисунке ниже. На практике MPC удобнее тем, что оценка угла расхождения (и последовательное радиальное разбиение этого угла) зачастую проще и удобнее, чем выделение прямоугольной области и последующее ее разбиение на экраны.

На этом необходимая теория закончена и можно приступить к описанию и результатам эксперимента.

Эксперимент:

Для проверки приведенной выше теории мы провели серию экспериментов, которая должна была провалидировать наше понимание и реализацию данного алгоритма.

Дифракция на щели:

На щель размером 13 m направлен пучок с длиной волны 0.1 m . Дифракция наблюдается на расстояниях от 0 до 6.5 km . Теоретические оценки параметров дифракционной картины:

- Расхождение дифракционной картины: $h = \theta_d * L = \lambda L / D \simeq 50 \text{ m}$. Где L - длина распространения интерференционного фронта, D - размер щели.
- Начало зоны Фраунгофера: $z_1 = D^2 / \lambda \simeq 1690 \text{ m}$

Полученные данные:

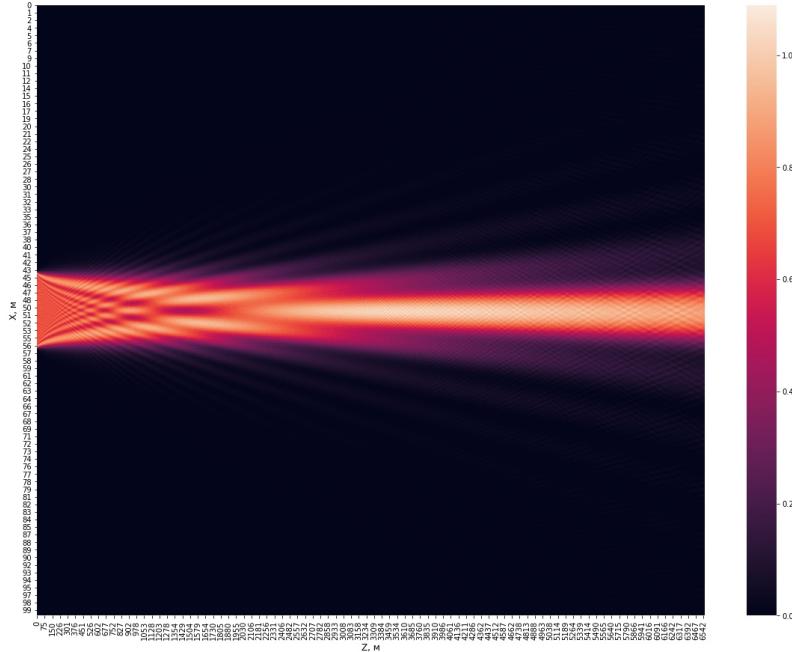


Рис. 4: Зависимость интенсивности от координаты

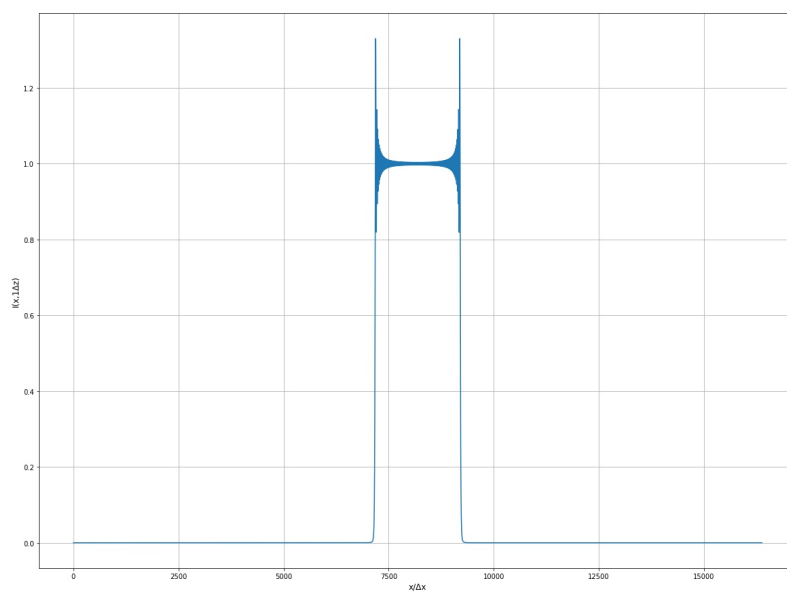


Рис. 5: Поле вначале

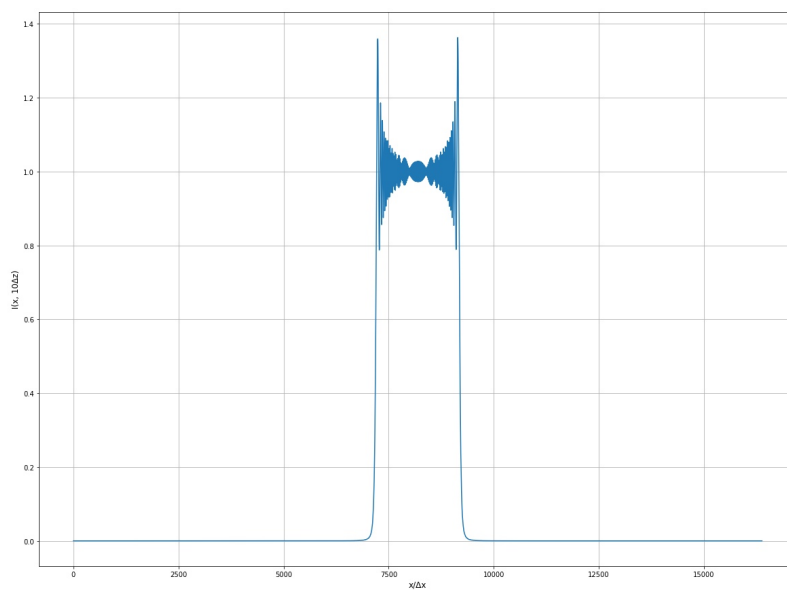


Рис. 6: Поле вначале

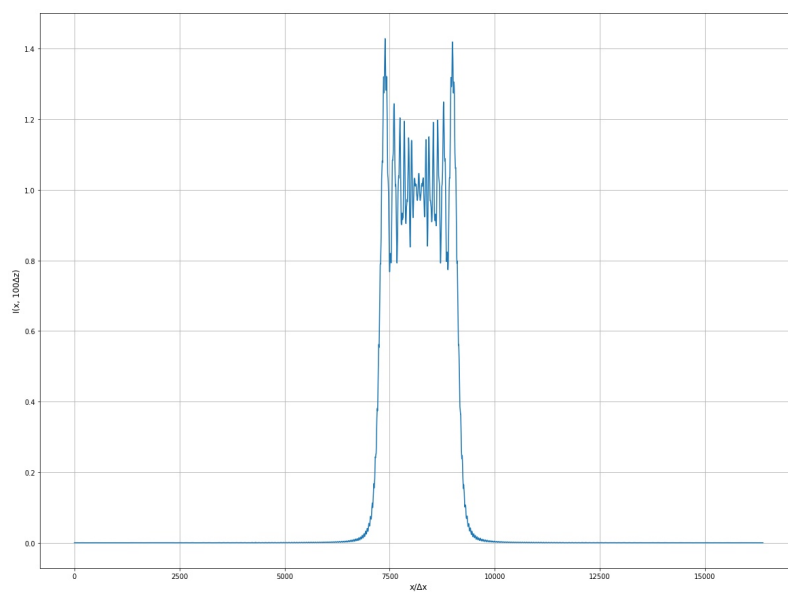


Рис. 7: Поле вначале

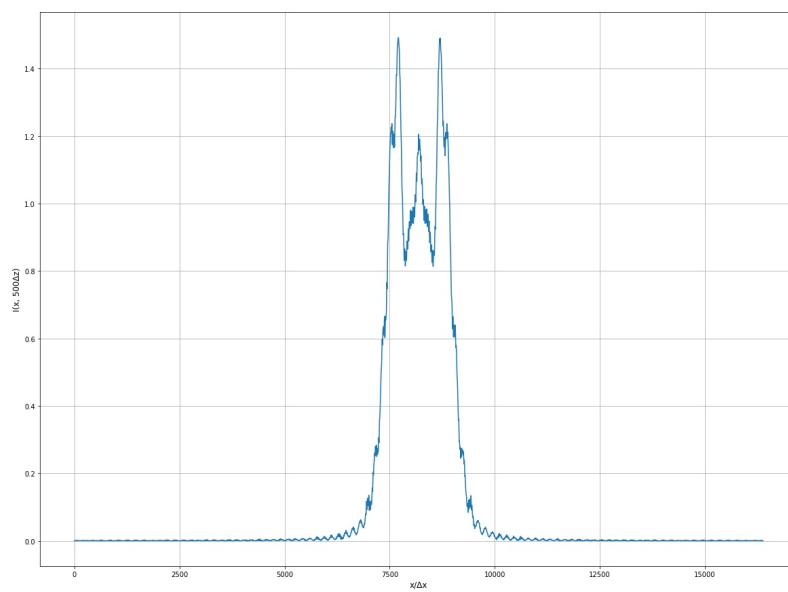


Рис. 8: Зона Френелевской дифракции

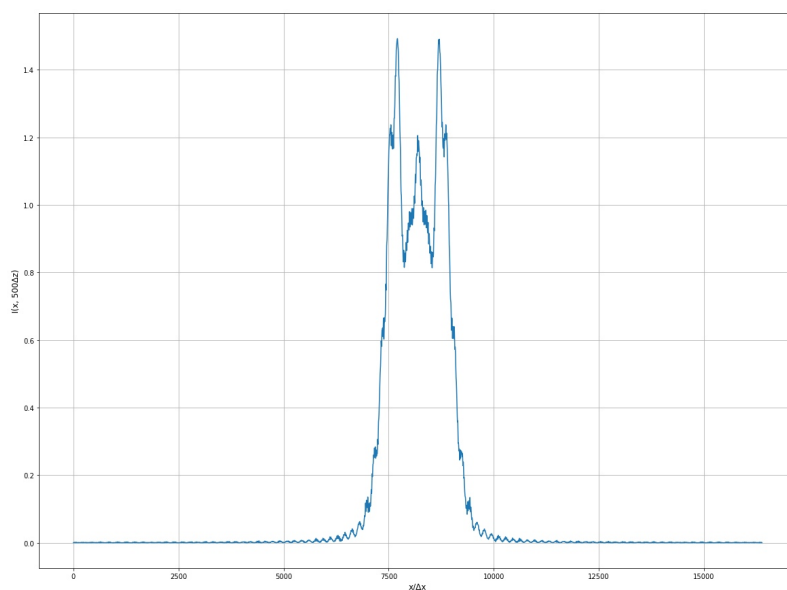


Рис. 9: Зона Френелевской дифракции

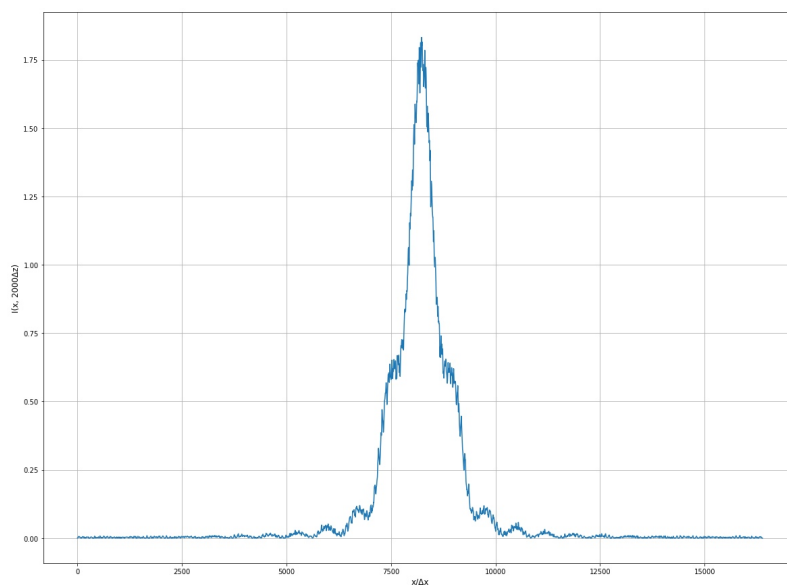


Рис. 10: Зона Фраунгоферовской дифракции

Как видно из пространственного распределения интенсивности, модель описывает реальные явления не только на качественном, но и на количественном уровнях. Это можно считать первым серьезным этапом валидации нашей модели.

Дифракционная решетка:

В данном эксперименте было смоделировано поведение фронта при распространении за дифракционную решетку с периодом $b = 100 \cdot 16/2^{14} \text{ m}$. Модель снова показала, что воспроизводит реальность с хорошей точностью, т.к. мы получили не только первый порядок дифракции, но еще и ± 1 (странное распространение волнового фронта ненулевых порядков объясняется необходимостью выполнения ЗСЭ, в связи с чем наша решетка является замкнутой структурой). Формула для угла первого порядка: $\sin \alpha = m\lambda/b = \pm \lambda/b$.

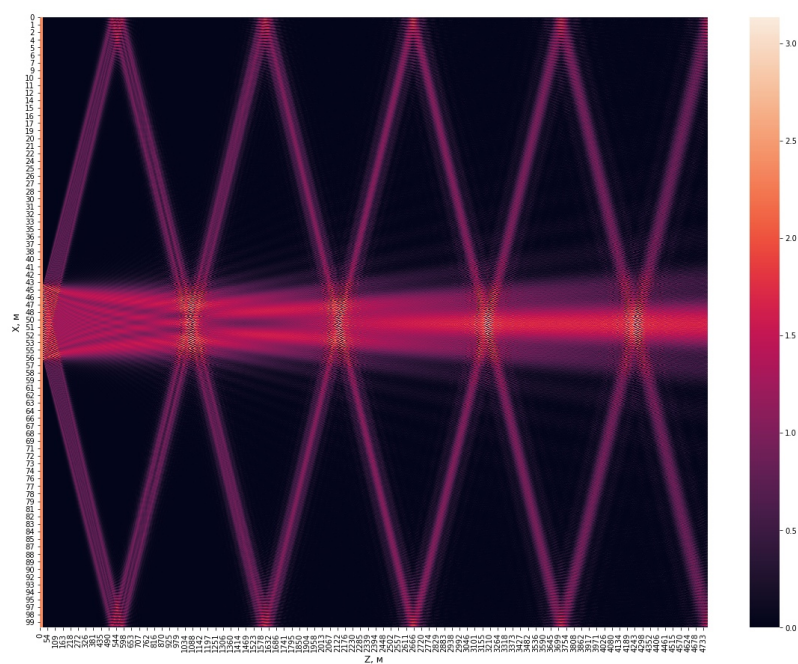


Рис. 11: Зависимость интенсивности от координаты

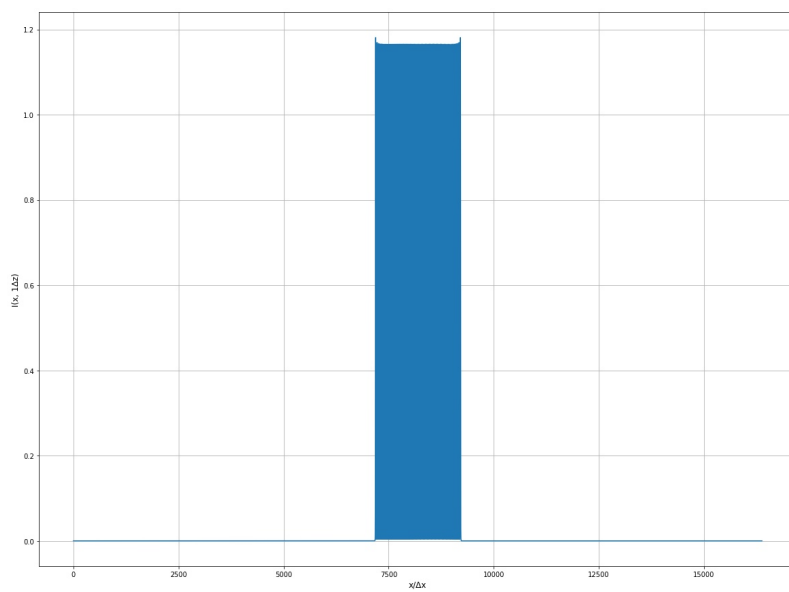


Рис. 12: Дифракционная картина вначале

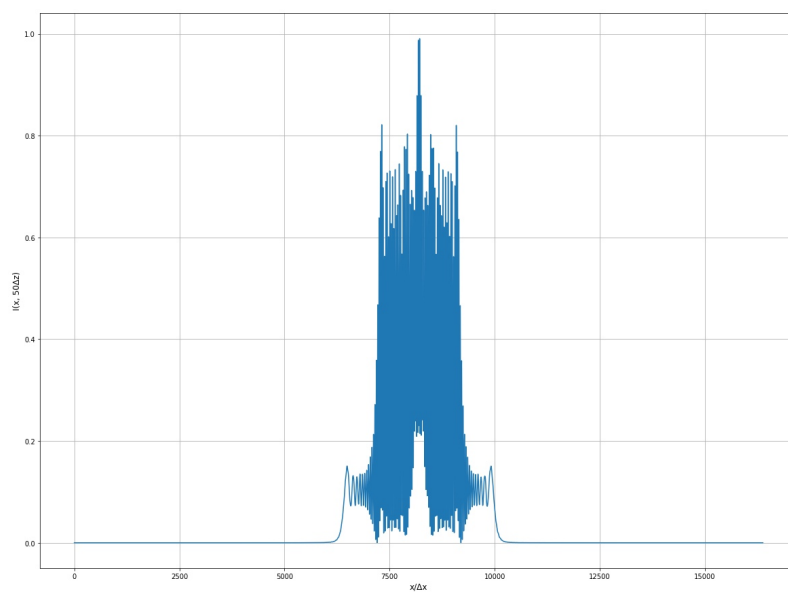


Рис. 13: Дифракционная картина на среднем удалении

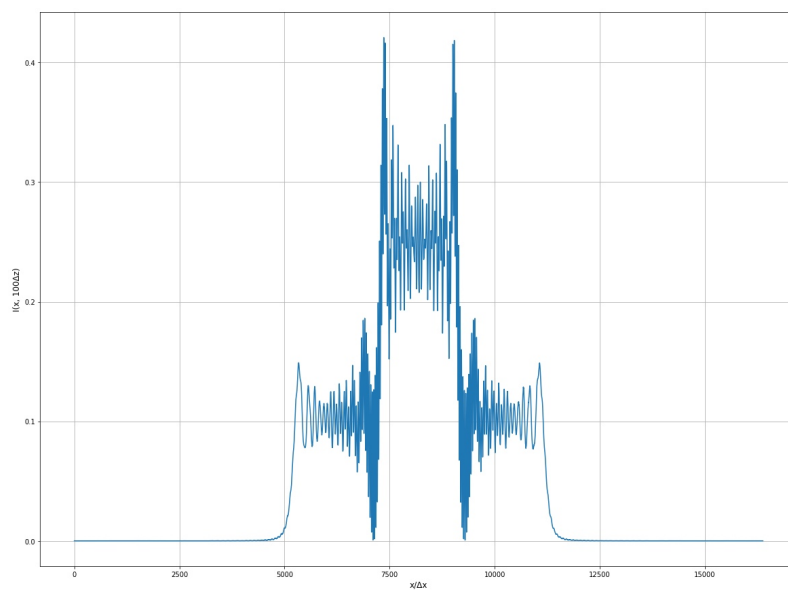


Рис. 14: Дифракционная картина на среднем удалении

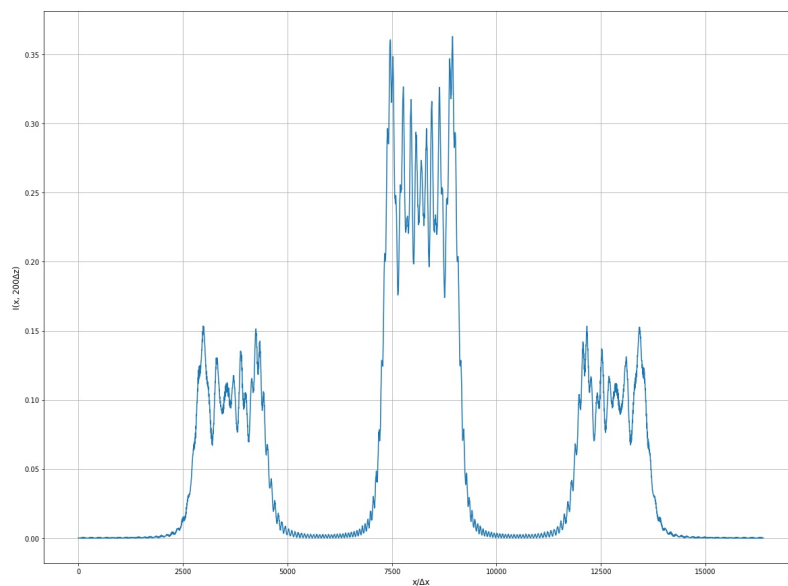


Рис. 15: Дальняя дифракционная картина

Опыт Юнга (интерференция на двух щелях):

В этом эксперименте на две щели размером порядка λ падает плоский фронт. Наблюдается наглядная интерференция двух источников.

Полученные данные:

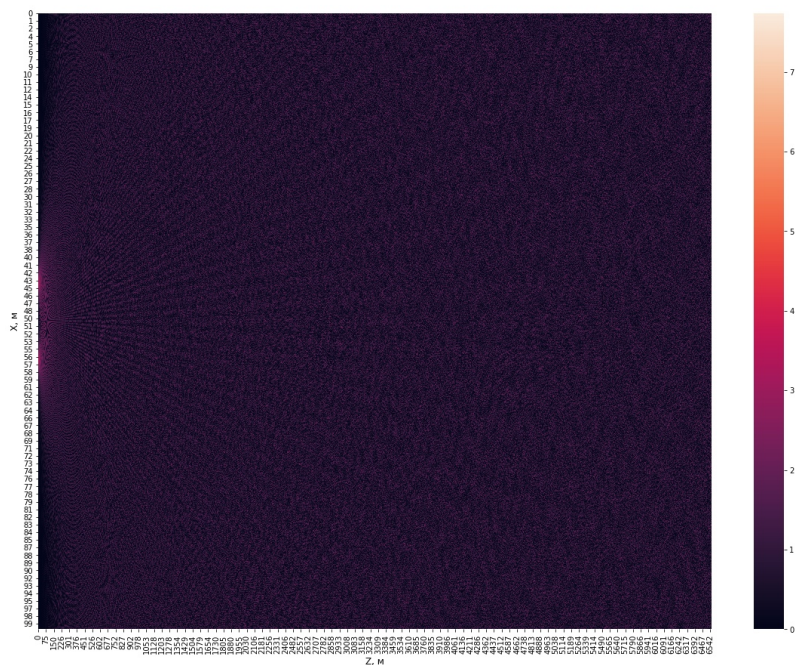


Рис. 16: Зависимость интенсивности от координаты

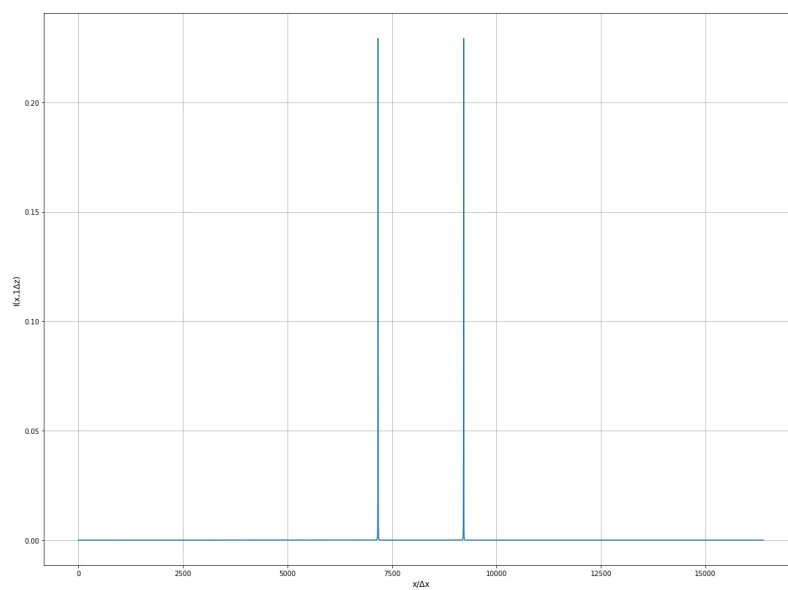


Рис. 17: интерференционная картина вначале

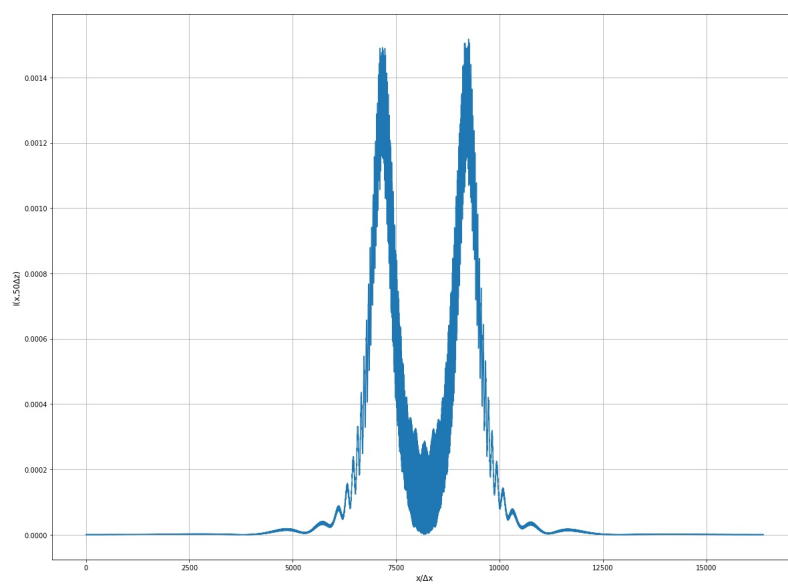


Рис. 18: Интерференционная картина на среднем удалении

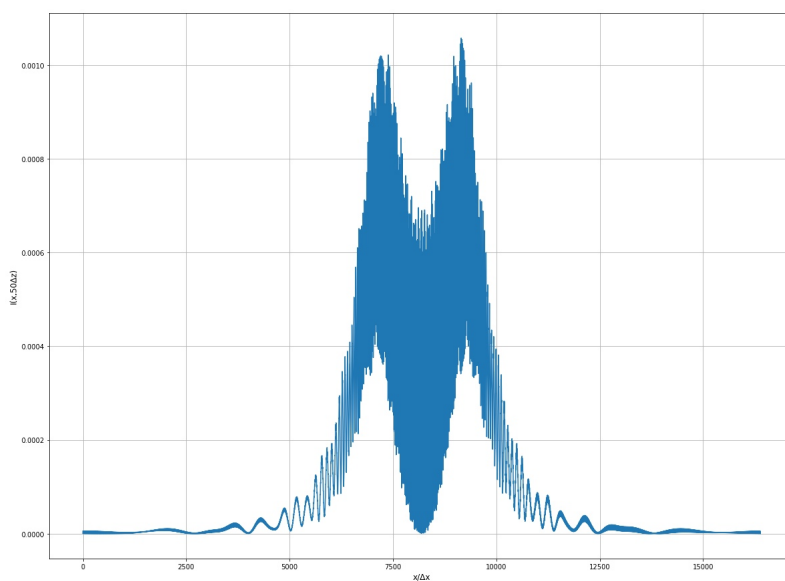


Рис. 19: Дальняя интерференционная картина

В данном эксперименте обойдемся тем, что удостоверимся в неплохом качественном описании теоретических результатов, и перейдем к сравнению распространения пучка в вакууме и в атмосфере.

Гауссов пучок в вакууме:

В этом эксперименте наблюдается распространение гауссова пучка в свободной от искажений и препятствий среде. Наблюдается дифракционное расхождение пучка без искажений по амплитуде и фазе.

Полученные данные:

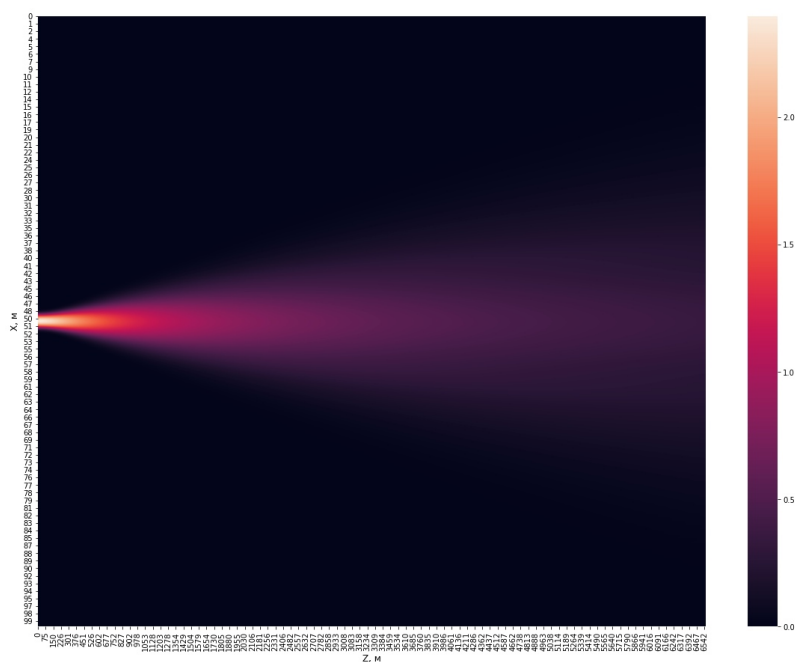


Рис. 20: Зависимость интенсивности от координаты

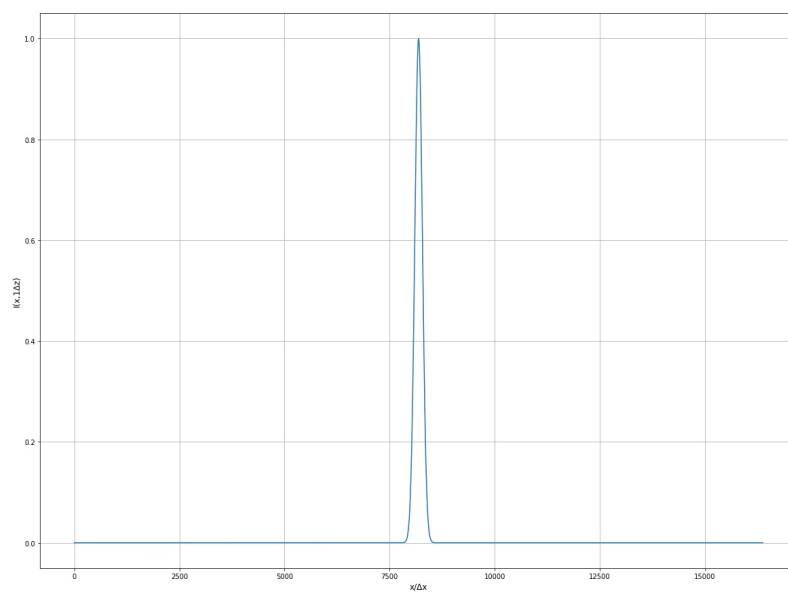


Рис. 21: Энергетический профиль вначале

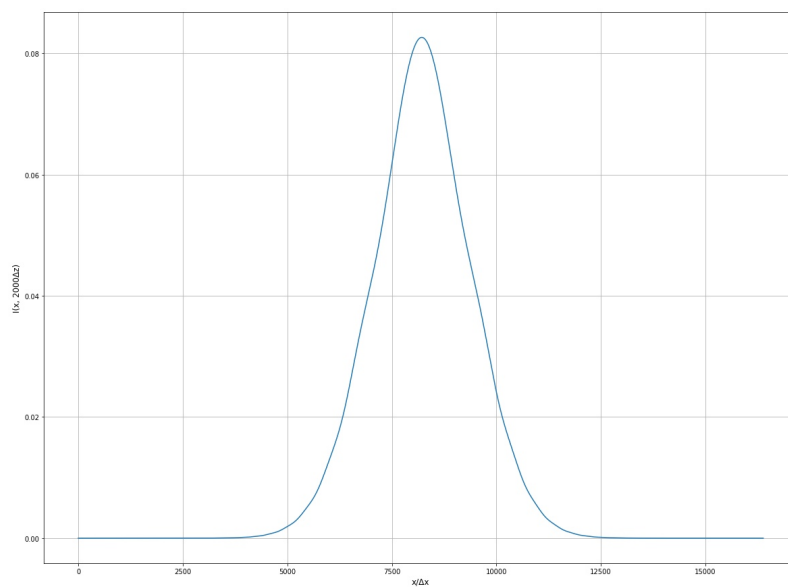


Рис. 22: Энергетический профиль на среднем удалении

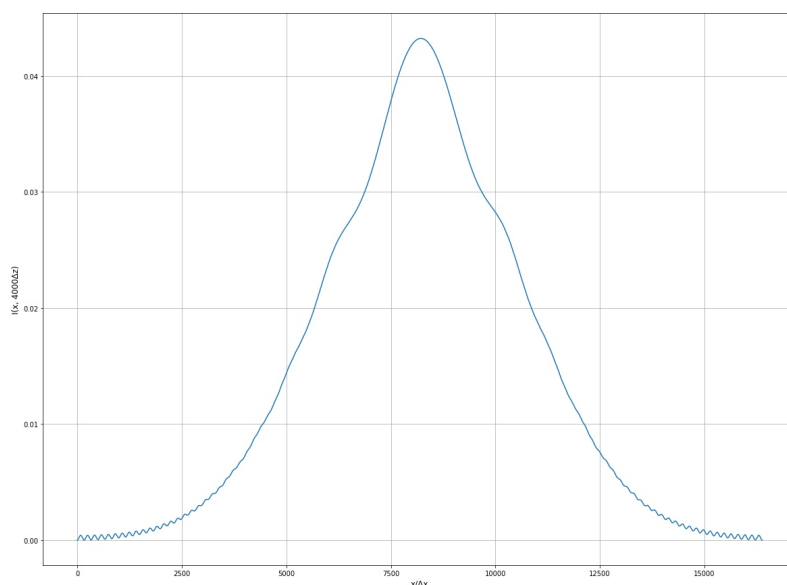


Рис. 23: Дальний энергетический профиль

Теперь сравним картину с полученной для атмосферы (MPS).

Гауссов пучок в атмосфере:

В этом эксперименте наблюдается распространение гауссова пучка в случайно возбужденной атмосфере. Как видно из графиков, наблюдается заметный разброс по фазе и общее уменьшение амплитуды в связи с разностью фазовых скоростей по всему фронту.

Полученные данные:

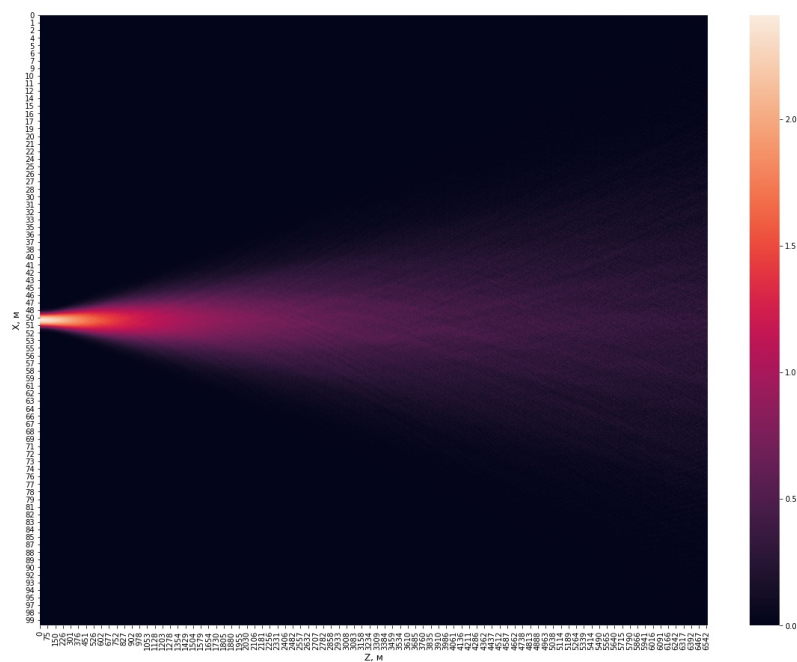


Рис. 24: Зависимость интенсивности от координаты

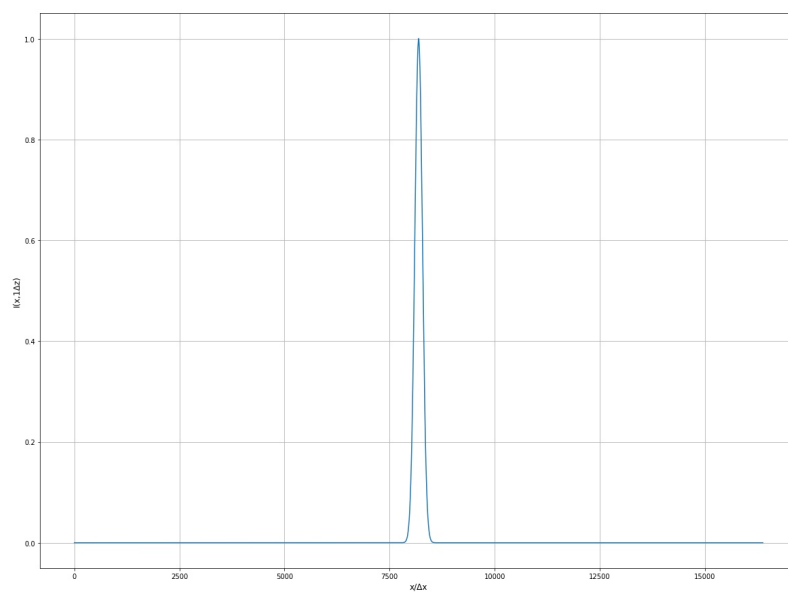


Рис. 25: Энергетический профиль вначале

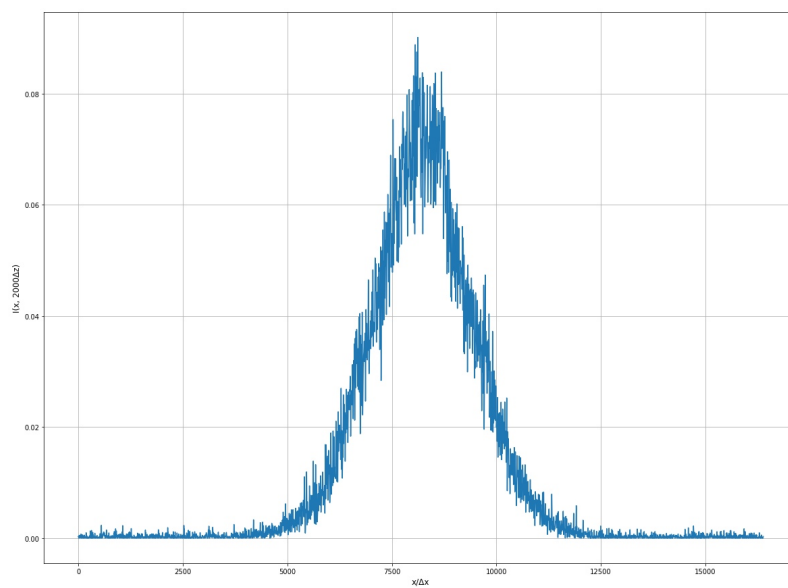


Рис. 26: Энергетический профиль на среднем удалении

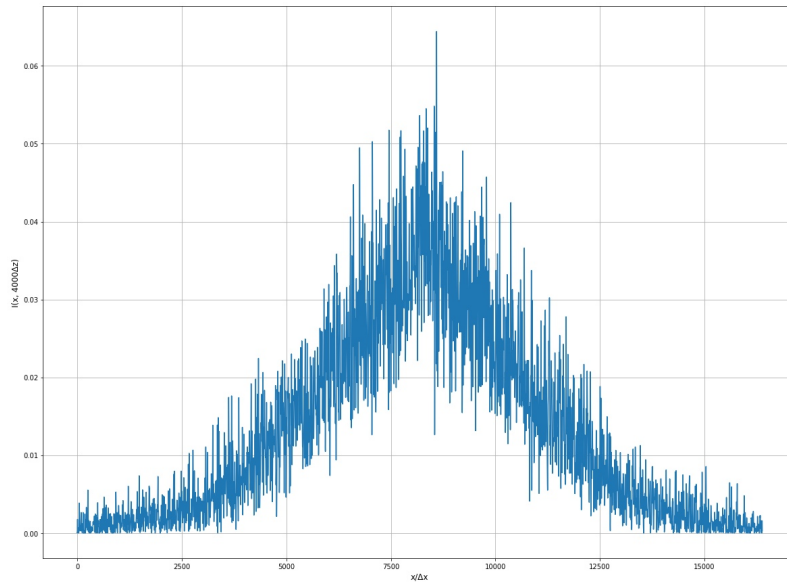


Рис. 27: Энергетический профиль на большом удалении

По данной картине (точнее по набору таких картин для большого числа длин волн) можно дать оценку параметрам B_c и T_c , оговоренным ранее и сделать соответствующие инженерные поправки. В данной работе мы эту оценку не производим, т.к. это не входит в изначально поставленные задачи.

Вывод:

В настоящей работе были изучены основные постулаты метода множественных фазовых экранов и кругов, причем алгоритмы MPS были реализованы в компьютерной модели. В последствии данная модель была провалидирована на нескольких качественных экспериментах. В конце было получено описание распространения пучка в ионосфере Земли, которое в дальнейшем может быть использовано для оценки параметров когерентности для передаваемого сигнала.

Аномальная канализация:

В ходе экспериментов с моделью было выявлено следующее поведение пучка при явлении канализации с параметром $n_2 = 0.0001/I_0$:

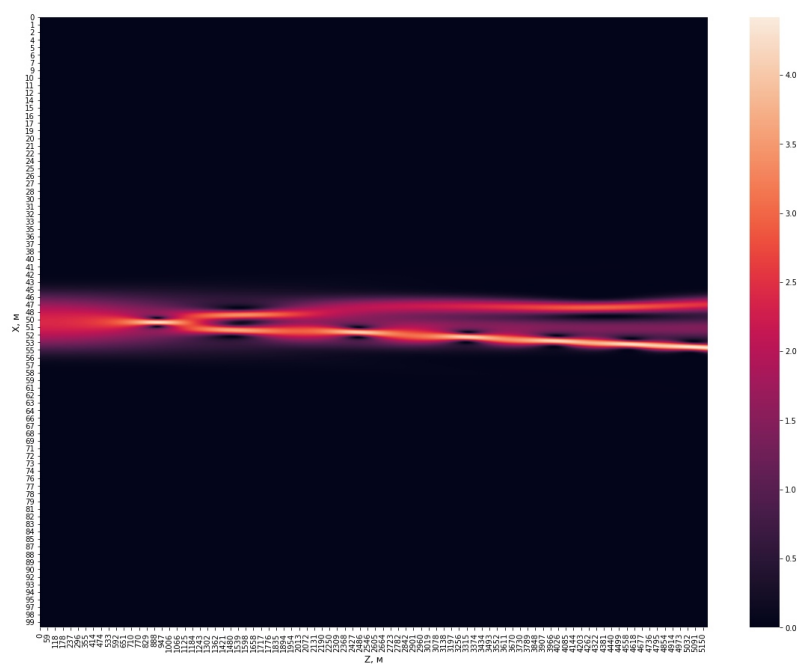


Рис. 28: Зависимость интенсивности от координаты

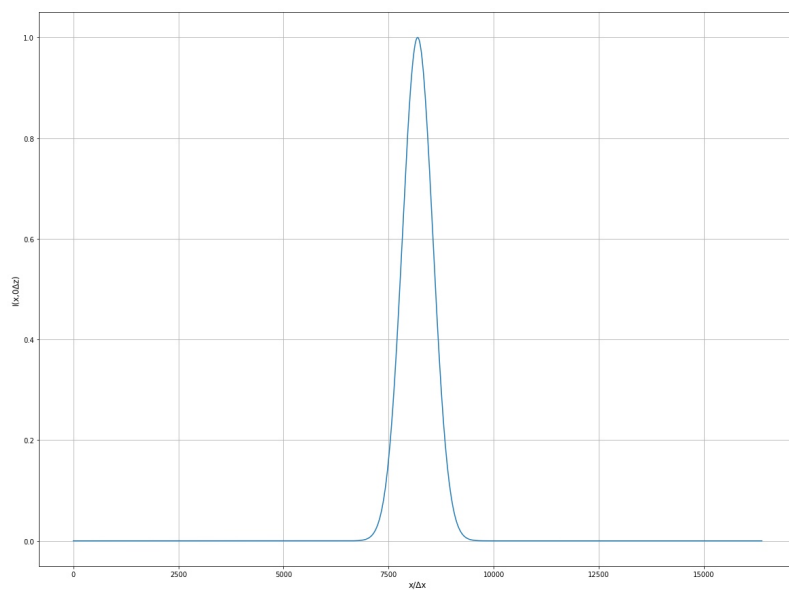


Рис. 29: Энергетический профиль вначале

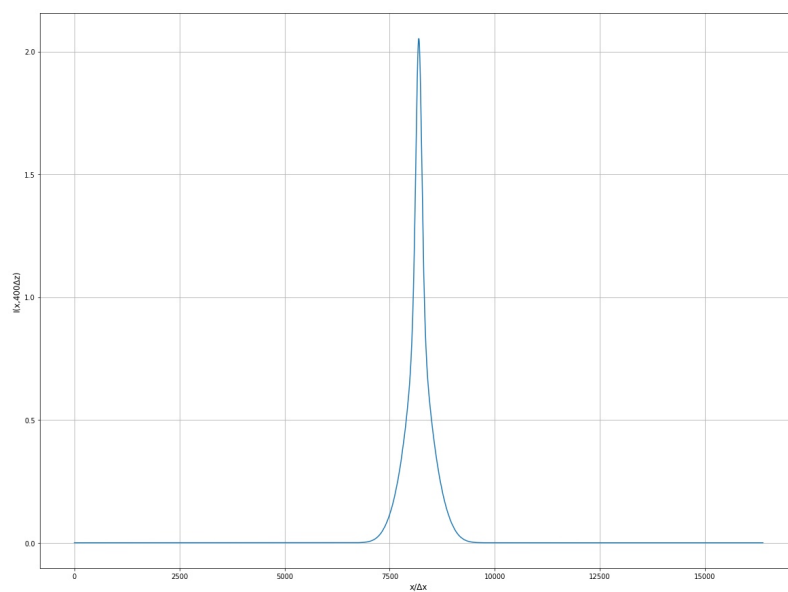


Рис. 30: Энергетический профиль на среднем удалении

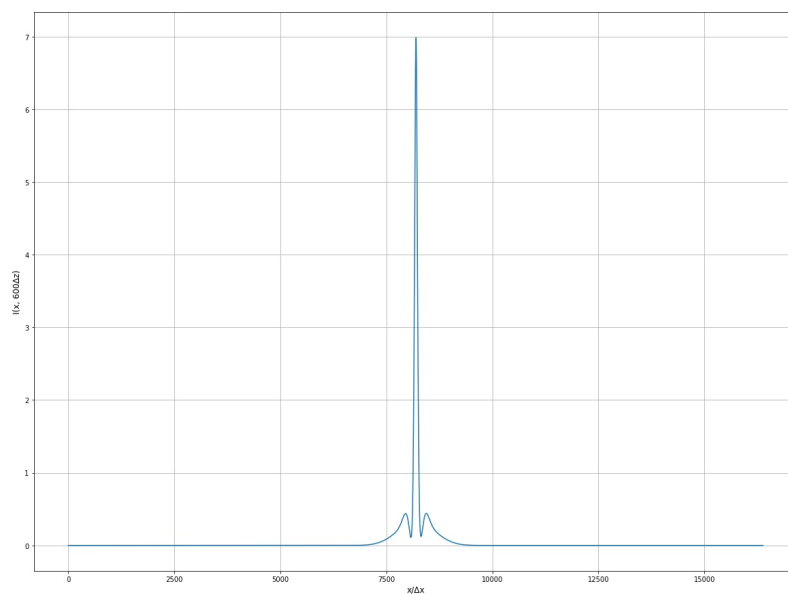


Рис. 31: Энергетический профиль на среднем удалении

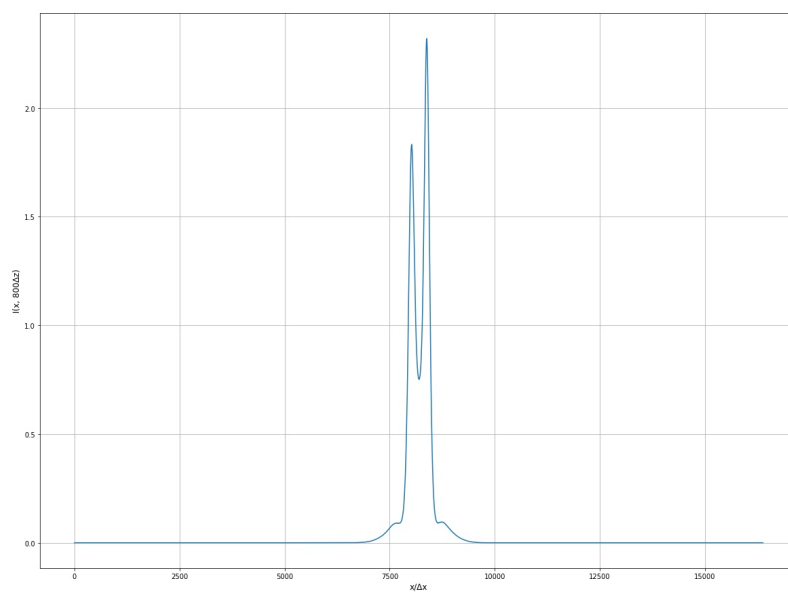


Рис. 32: Энергетический профиль на среднем удалении

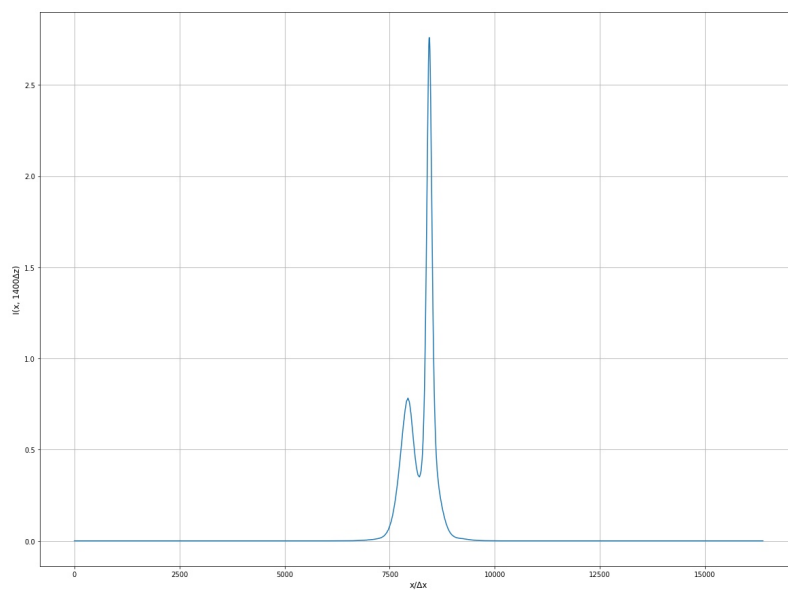


Рис. 33: Энергетический профиль на среднем удалении

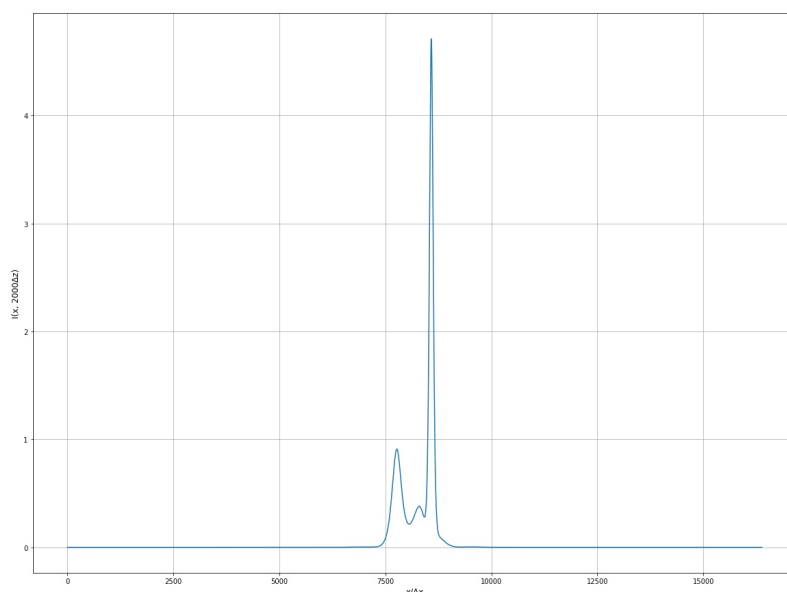


Рис. 34: Энергетический профиль на большом удалении

Как видно из графиков, после успешной фокусировки пучок начинает вести себя аномально: делится на несколько гармоник и распространяется за пределы изначальной трубки, причем все гармоники кроме одной очень быстро угасают. Данному явлению нами не было найдено ни теоретического ни практического объяснения. Данный вопрос остается на рассмотрение принимающего.

Список литературы:

1. А.С. Гурович, А.И. Кон, В.Л. Миронов, С.С. Хмелевцов "Лазерное излучение в турбулентной атмосфере". изд. Наука, Москва, 1976
2. Christophe Grimault "A multiple phase screen technique for electromagnetic wave propagation through random ionospheric irregularities Radio Science, Volume 33, Number 3, Pages 595-605, May-June 1998
3. Vladimir P. Lukin "Atmospheric adaptive optics Article in Physics Uspekhi, August 2003
4. Emmanuel Candes, "Applied Fourier Analysis and Elements of Modern Signal Processing 2016
5. DENNIS L. KNEPP, MEMBER, IEEE "Multiple Phase-Screen Calculation of the Temporal Behavior of Stochastic Waves PROCEEDINGS OF THE IEEE, VOL. 71, NO. 6, JUNE 1983
6. CLIFFORD L. RUFENACH "Power-Law Wavenumber Spectrum Deduced from Ionospheric Scintillation Observation VOL. 77, NO. 25 JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH SEPTEMBER 1, 1972
7. Hai-Xing Yan, Shu-Shan Li, De-Liang Zhang, and She Chen "Numerical simulation of an adaptive optics system with laser propagation in the atmosphere"