Алгоритмы и Алгоритмические Языки

Семинар #16.1:

1. Критерий баланса в АВЛ-дереве.
2. Балансировка АВЛ-дерева.
3. Задачи к экзамену.

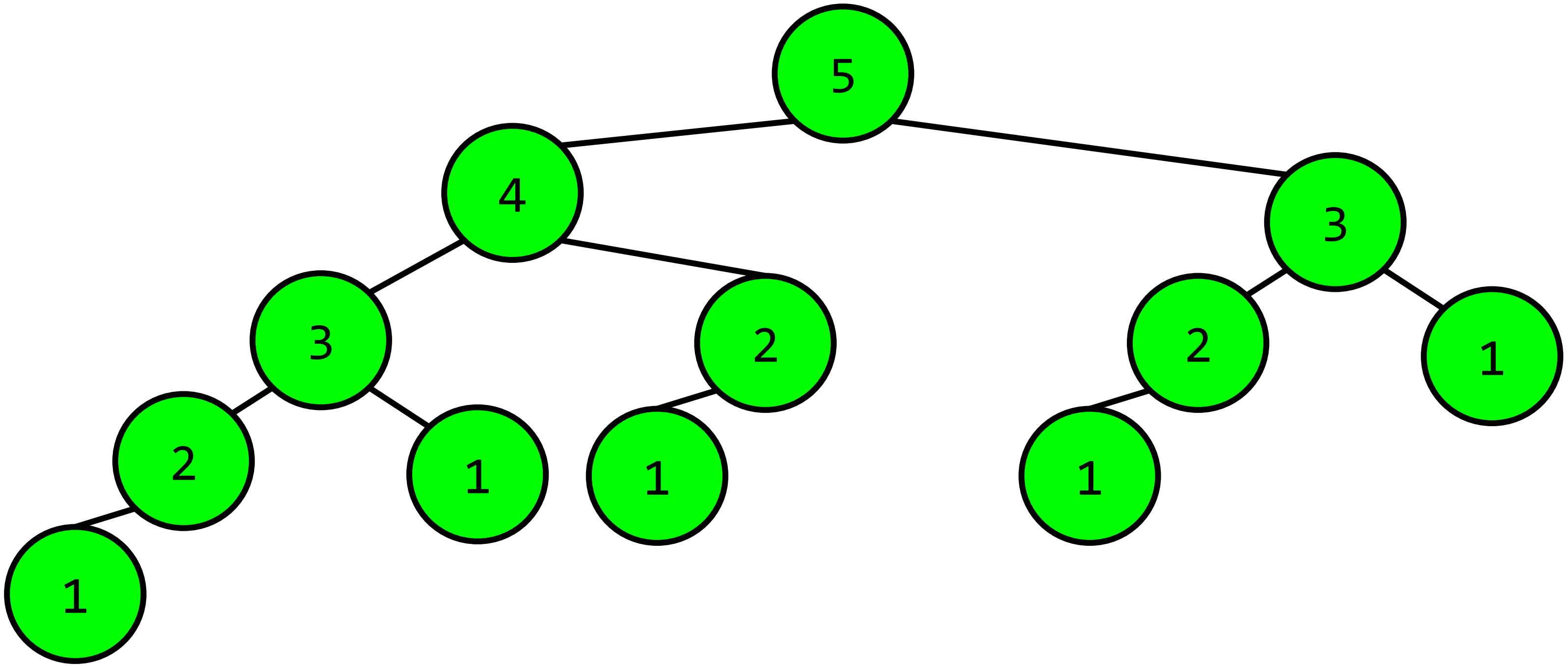
10.12.2025

Критерий баланса в АВЛ-дереве

Критерий баланса в АВЛ-дереве

Идея: каждая вершина хранит высоту своего поддерева.

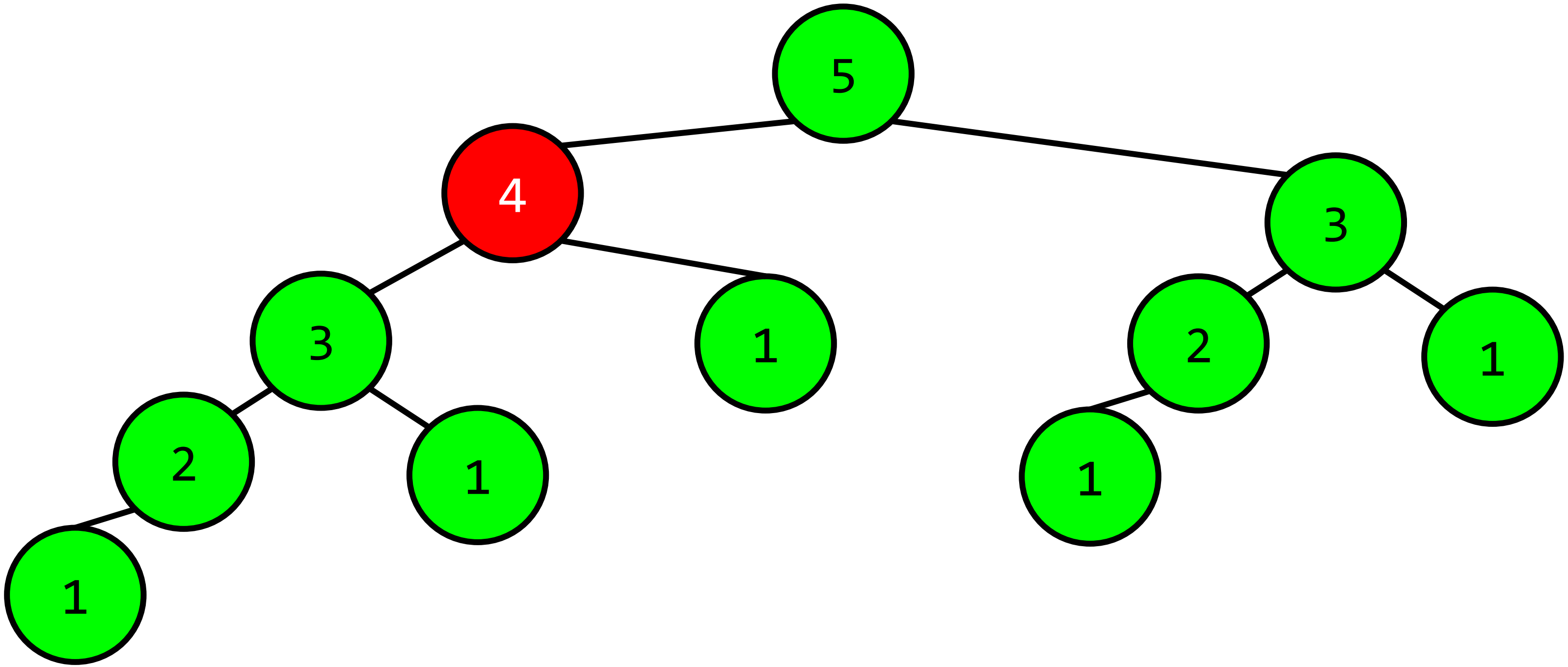
`height(node)` – высота поддереве, заданного узлом `node`.



Критерий баланса в АВЛ-дереве

`balance(node) = height(node->left) - height(node->right)`

Условие дисбаланса: `|balance(node)| > 1`



Критерий баланса в АВЛ-дереве

Самое худшее дерево для данного критерия – дерево Фибоначчи.

Кол-во узлов дерева Фибоначчи:

$F_1 = 1$

$F_2 = 2$

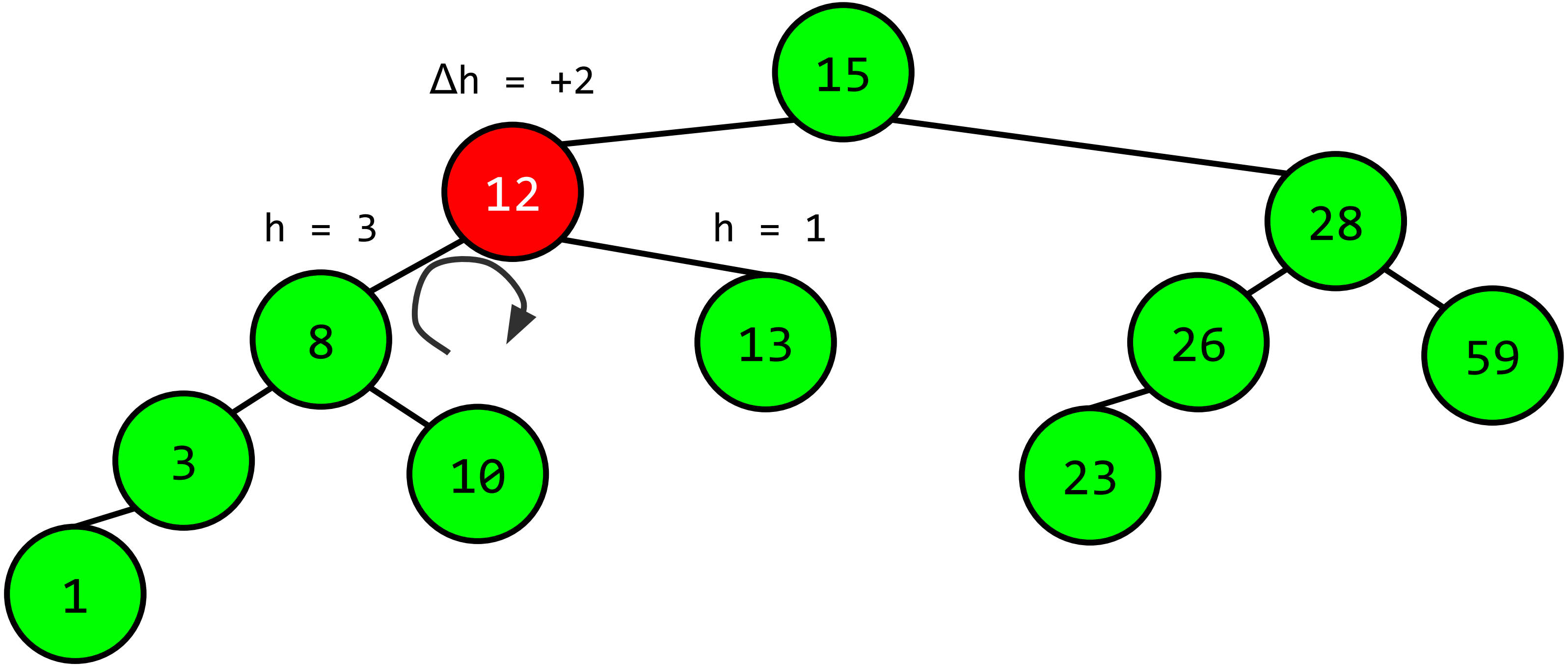
$F_h = F_{h-1} + F_{h-2} + 1$

Легко заметить, что: $F_h = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{h+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{h+2}\right) - 1$

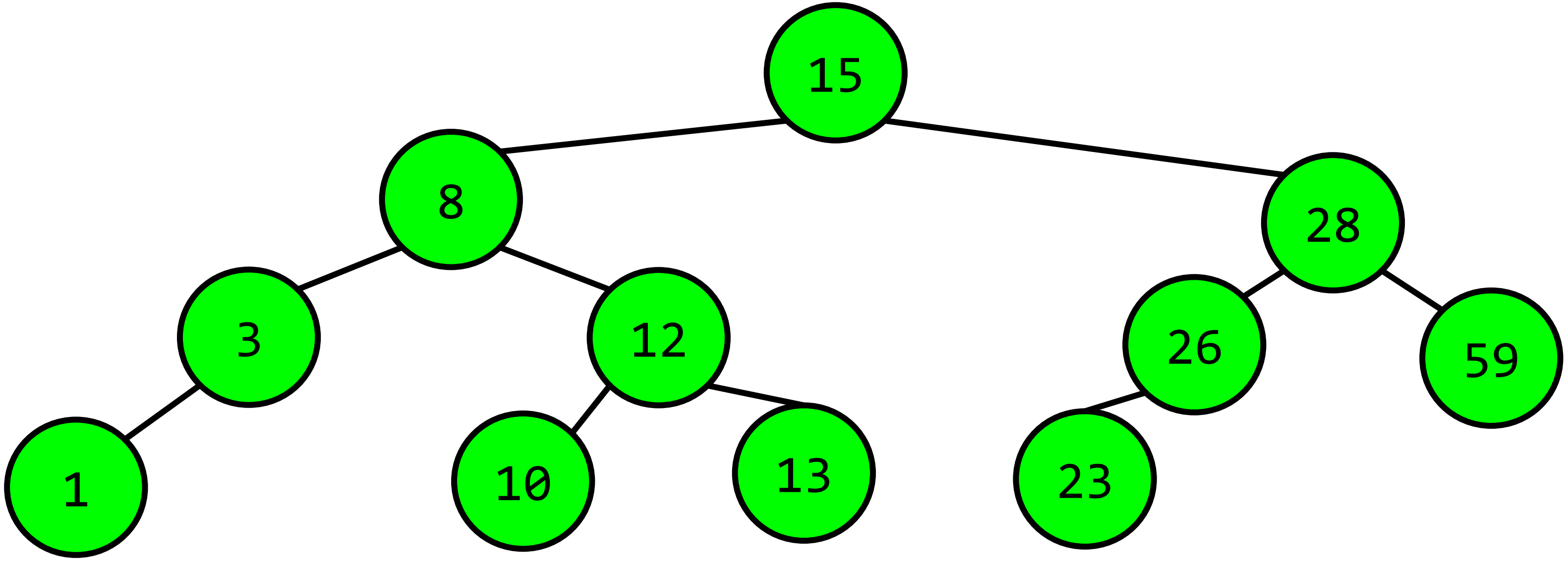
А значит, высота дерева логарифмически растёт с ростом количества элементов.

Балансировка АВЛ-дерева

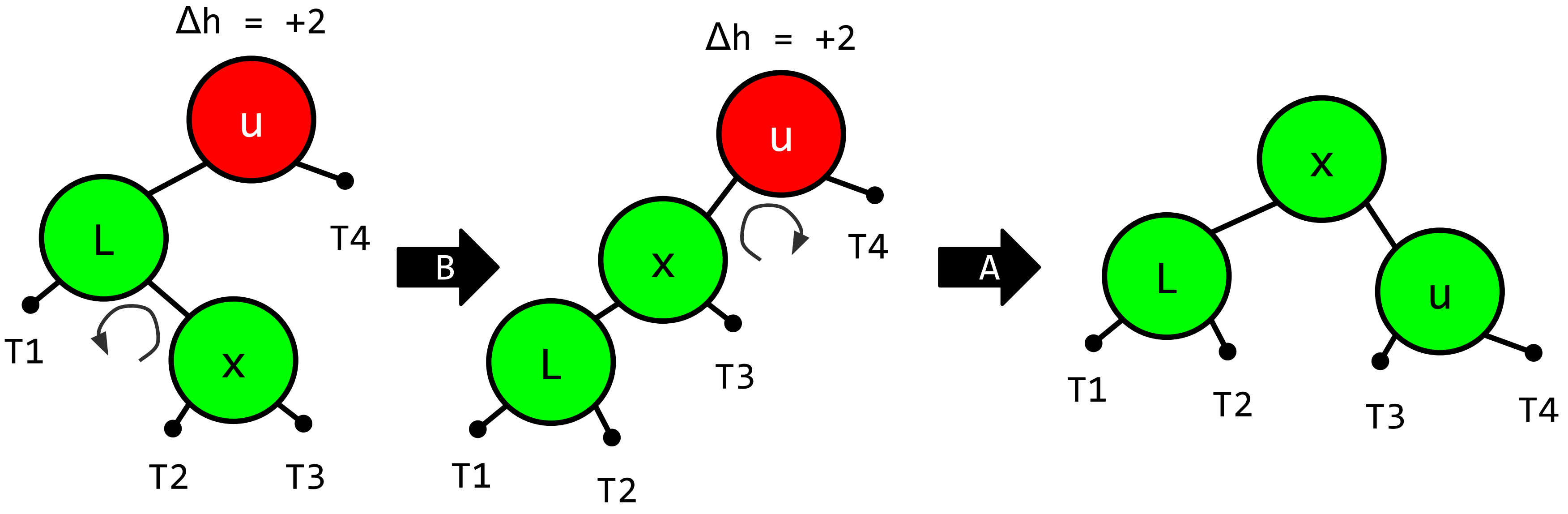
Идея балансировки AVL-дерева



Идея балансировки AVL-дерева



Доказательство корректности



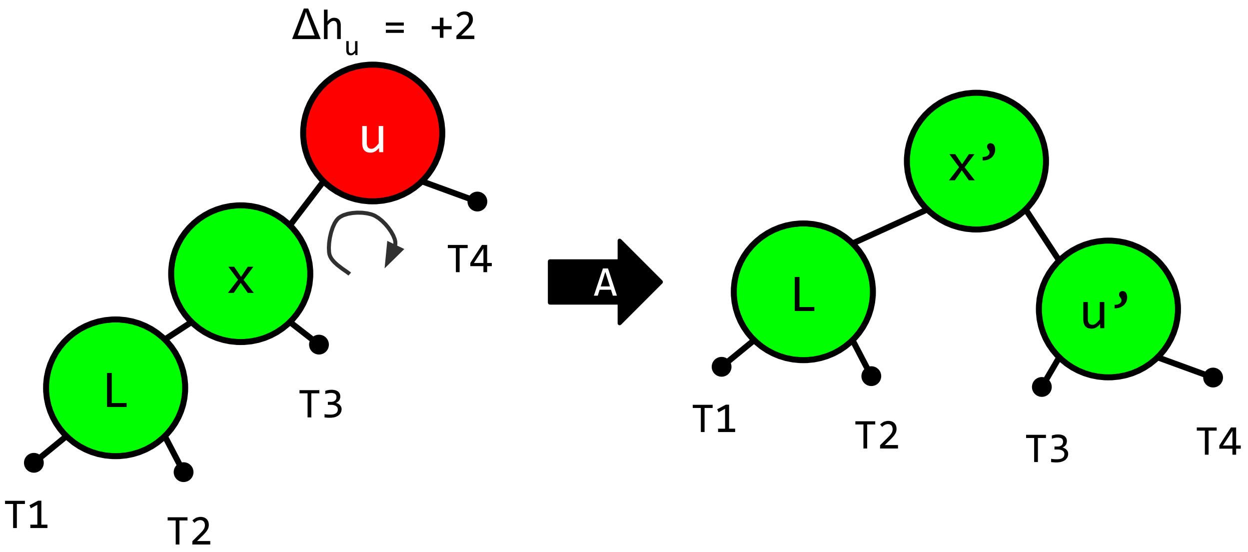
Доказательство корректности, часть A

До поворота:

$H_x = 1 + \max(H_3, H_L)$

$\Delta h_u = H_x - H_4 = 2$

$(H_L - H_3) \in \{0, 1, 2\}$



После поворота:

$H_{u'} = 1 + \max(H_3, H_4)$

$\Delta h_{x'} = H_L - H_{u'} \in \{-1, 0, 1\}$

$\Delta h_{u'} = H_3 - H_4 \in \{-1, 0, 1\}$

Доказательство корректности, часть A

$$\begin{cases} H_x = 1 + \max(H_3, H_L) \\ H_x - H_4 = 2 \\ (H_L - H_3) \in \{0, 1, 2\} \\ H_{u'} = 1 + \max(H_3, H_4) \\ \Delta h_{x'} = H_L - H_{u'} \\ \Delta h_{u'} = H_3 - H_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_4 + 2 = 1 + H_L \\ (H_L - H_3) \in \{0, 1, 2\} \\ H_{u'} = 1 + \max(H_3, H_4) \\ \Delta h_{x'} = H_L - H_{u'} \\ \Delta h_{u'} = H_3 - H_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_L - H_4 = 1 \\ (H_L - H_3) \in \{0, 1, 2\} \\ H_{u'} - H_L = 1 + \max(H_3 - H_L, H_4 - H_L) \\ \Delta h_{x'} = H_L - H_{u'} \\ \Delta h_{u'} = H_3 - H_4 = (H_3 - H_L) + (H_L - H_4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_L - H_4 = 1 \\ (H_L - H_3) \in \{0, 1, 2\} \\ (H_{u'} - H_L) \in \{1, 0\} \\ \Delta h_{x'} = (H_L - H_{u'}) \in \{-1, 0\} \\ \Delta h_{u'} = H_3 - H_4 \in \{-1, 0, 1\} \end{cases}$$

Готово!

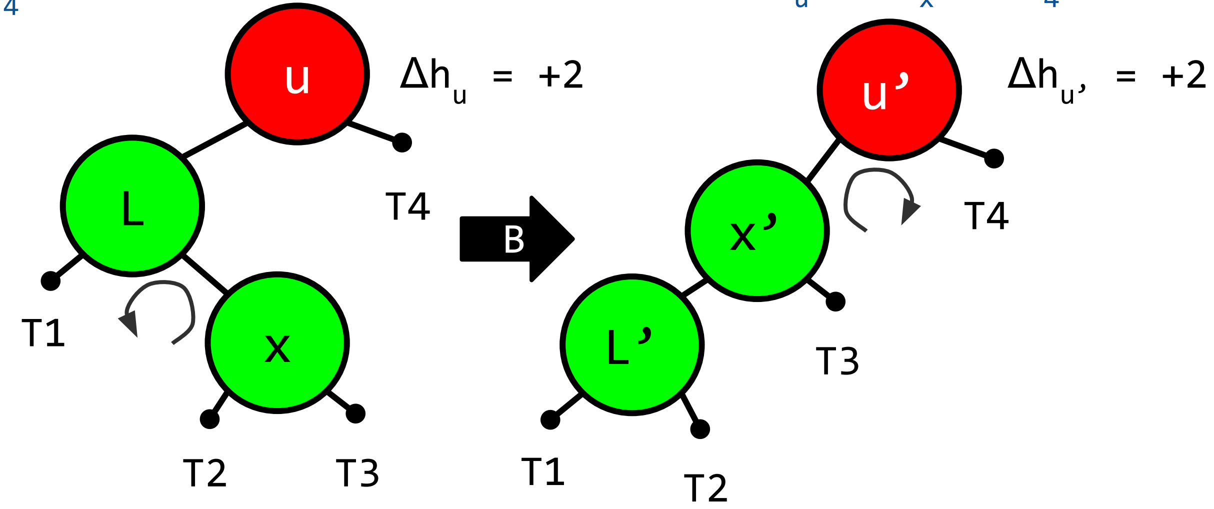
Доказательство корректности, часть B

До поворота:

$H_x = 1 + \max(H_2, H_3)$
$H_L = 1 + \max(H_1, H_x)$
$|H_2 - H_3| \le 1$
$H_1 - H_x = -1$
$\Delta h_u = H_L - H_4 = 2$

После поворота:

$H_{L'} = 1 + \max(H_1, H_2)$
$H_{x'} = 1 + \max(H_{L'}, H_3)$
$\Delta h_{L'} = H_1 - H_2 \in \{-1, 0, 1\}$
$\Delta h_{x'} = H_{L'} - H_3 \in \{0, 1, 2\}$
$\Delta h_{u'} = H_{x'} - H_4 = 2$



Доказательство корректности, часть B

$$
\begin{cases}
H_x = 1 + \max(H_2, H_3) \\
H_L = 1 + \max(H_1, H_x) \\
|H_2 - H_3| \le 1 \\
H_1 - H_x = -1 \\
H_L - H_4 = 2 \\
H_{L'} = 1 + \max(H_1, H_2) \\
H_{x'} = 1 + \max(H_{L'}, H_3) \\
\Delta h_{L'} = H_1 - H_2 \\
\Delta h_{x'} = H_{L'} - H_3 \\
\Delta h_{u'} = H_{x'} - H_4
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
H_x = H_1 + 1 = 1 + \max(H_2, H_3) \\
H_L = H_4 + 2 = 1 + \max(H_1, 1 + H_1) \\
|H_2 - H_3| \le 1 \\
H_{L'} = 1 + \max(H_1, H_2) \\
H_{x'} = 1 + \max(H_{L'}, H_3) \\
\Delta h_{L'} = H_1 - H_2 \\
\Delta h_{x'} = H_{L'} - H_3 \\
\Delta h_{u'} = H_{x'} - H_4
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
H_1 = \max(H_2, H_3) \\
H_4 = H_1 \\
|H_2 - H_3| \le 1 \\
H_{L'} = 1 + \max(H_1, H_2) \\
H_{x'} = 1 + \max(H_{L'}, H_3) \\
\Delta h_{L'} = H_1 - H_2 \\
\Delta h_{x'} = H_{L'} - H_3 \\
\Delta h_{u'} = H_{x'} - H_4
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
|H_2 - H_3| \le 1 \\
H_{L'} = 1 + \max(\max(H_2, H_3), H_2) \\
H_{x'} = 1 + \max(H_{L'}, H_3) \\
\Delta h_{L'} = \max(H_2, H_3) - H_2 \\
\Delta h_{x'} = H_{L'} - H_3 \\
\Delta h_{u'} = H_{x'} - \max(H_2, H_3)
\end{cases}
$$

Доказательство корректности, часть B

$$\begin{cases} |H_2 - H_3| \le 1 \\ H_{L'} = 1 + \max(H_2, H_3) \\ H_{x'} = 1 + \max(H_{L'}, H_3) \\ \Delta h_{L'} = \max(H_2, H_3) - H_2 \\ \Delta h_{x'} = H_{L'} - H_3 \\ \Delta h_{u'} = H_{x'} - \max(H_2, H_3) \end{cases}$$

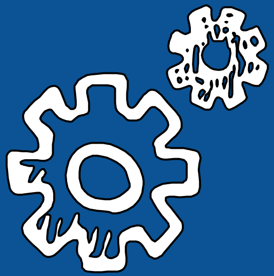
$$\begin{cases} |H_2 - H_3| \le 1 \\ H_{x'} = 1 + \max(1 + \max(H_2, H_3), H_3) = 2 + \max(H_2, H_3, H_3 - 1) \\ \Delta h_{L'} = \max(0, H_3 - H_2) \\ \Delta h_{x'} = 1 + \max(H_2, H_3) - H_3 = 1 + \max(H_2 - H_3, 0) \\ \Delta h_{u'} = H_{x'} - \max(H_2, H_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} |H_2 - H_3| \le 1 \\ H_{x'} = 2 + \max(H_2, H_3) \\ \Delta h_{L'} = \max(0, H_3 - H_2) \\ \Delta h_{x'} = 1 + \max(H_2, H_3) - H_3 = 1 + \max(H_2 - H_3, 0) \\ \Delta h_{u'} = H_{x'} - \max(H_2, H_3) = 2 \end{cases}$$

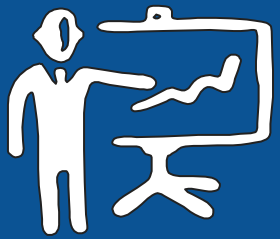
$$\begin{cases} |H_2 - H_3| \le 1 \\ \Delta h_{L'} \in \{0, 1\} \\ \Delta h_{x'} \in \{1, 2\} \\ \Delta h_{u'} = 2 \end{cases}$$

Готово!

Задачи к экзамену



Вопросы?



Красивые иконки взяты с сайта handdrawngoods.com