同济大学“十五”规划教材
同济大学教材、学术著作出版基金委员会资助

张量分析教程

张若京　编著

同济大学出版社

内 容 提 要

本书介绍张量分析的基本内容,包括空间曲线坐标系,张量的基本概念和代数运算,二阶张量,张量场论以及曲面上的张量。考虑到笛卡尔坐标系的广泛应用,故最后一章介绍了笛卡尔张量。各章后面均附有习题。

本书可供力学专业、应用数学专业以及理工科有关专业的本科生或研究生作为教材使用,也可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

张量分析教程/张若京编著. —上海:同济大学出版社,2004.9

ISBN 7-5608-2891-4

Ⅰ. 张… Ⅱ. 张… Ⅲ. 张量分析—研究生—教材 Ⅳ. O183.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 070222 号

张量分析教程

张若京 编著

责任编辑 司徒妙龄 责任校对 郁 峰 封面设计 李志云

出版发行 同济大学出版社

(上海四平路 1239 号 邮编 200092 电话 021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 同济大学印刷厂印刷

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 7

字 数 179 000

印 数 1—3 100

版 次 2004 年 9 月第 1 版 2004 年 9 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 7-5608-2891-4/O·257

定 价 11.00 元

前　　言

今天，对于一个力学工作者来说，张量分析实在是一个极其重要的数学工具。

力学是自然科学中最早建立完备科学体系的一门学科，也是在自然科学中运用定量分析工具——数学最多的一门学科。几个世纪以来，数学和力学之间的相互影响是十分显著的。一方面，力学充分使用数学来表述和预测；另一方面，力学的需要则促进了数学的发展。德裔美国力学教授 W. Flügge 在他的《张量分析与连续介质力学》一书的“序”中写道：“由于牛顿动力学的需要产生了微积分，为了对力系的描述发展了矢量代数，对速度场和力场的研究发展了矢量分析，从力学的能量原理中产生了变分法”；又写道：“张量（Tensor）这个名字本身就表明它的来源是弹性理论。”

有的著作指出，是晶体物理学家 W. Voigt 首先把张量分析用于晶体物理的。

张量分析这门数学分支的最终建立是数学家的贡献，尤其是微分几何学家的贡献。一般认为，张量概念是 19 世纪由高斯（Gauss）、黎曼（Riemann）、克里斯托夫（Christoffel）等人在发展微分几何过程中引入的。在此基础上，1887～1901 年间，瑞西（T. Ricci）和他的学生勒维·季维塔（Levi Givita）创立了张量分析的基本框架。陈省身曾评论说，瑞西是张量分析的始祖。然而，虽然这些大师们都努力介绍过张量分析的某些应用，但当时却很少引起人们的注意。直到 1916 年，爱因斯坦（Einstein）用黎曼几何和张量分析作为工具来阐述他的广义相对论以后，才极大地推动了微分几何的发展；同时，张量分析也才开始被重视起来，成为了一个强有力的数学工具。当前，张量分析已广泛应用于理论物理、连续介质力学以及其他一些边缘学科之中；特别是在连续介质力学的近代表述中，无不采用张量分析作为数学工具。今天，不熟悉张量分析的人去阅读连续介质力学的文献时会感到困难。所以，不仅是高等学校的理工科学生，而且许多工程技术人员都产生了掌握张量分析这一数学工具的愿望。

本书作者自 1990 年开始给同济大学工程力学专业的本科生和研究生讲授张量分析与连续介质力学课程；为编写讲稿，参考了国内主要的专著、译著和教材，后几经修改，构成了本书的主要内容。

作者建议，读者可以根据自己的学习时间，按两种方式阅读本书。第一种方式是按章全文阅读；第二种方式是只阅读第一章、第三章和第五章，而把第二章和第四章分别作为进一步学习连续介质力学和壳体理论前的准备，稍后再阅读。由于这种安排，按第一种方式阅读的读者可能会觉得第五章与第二章的有关内容略有重复，建议这类读者只阅读第五章的第一节和第二节。

限于作者水平，本书难免有不足甚至错误之处，诚恳希望广大读者批评指正。

作　者

2004 年 4 月 30 日

目　　录

第 1 章　曲线坐标系

在解决数学物理问题时，一般都要首先选定坐标系。比较常用的是直角坐标系，也称笛卡尔直角坐标系。通常用 $Oxyz$ 表示笛卡尔直角坐标系。其中，O 是坐标原点，x，y 和 z 是三个坐标轴。

如果用 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 表示沿 x，y，z 轴的单位矢量（称为基矢量），则任意一个矢量可以按下式分解：

$$\boldsymbol{p}=p_x\boldsymbol{i}+p_y\boldsymbol{j}+p_z\boldsymbol{k} \tag{1.0.1}$$

式中，p_x，p_y，p_z 称为矢量 $\boldsymbol{p}$ 关于笛卡尔直角坐标系 $Oxyz$ 的分量。

矢量的点积是一个很重要的概念。设有两个非零矢量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$，按下式定义它们之间的点积（也称数量积、标量积或内积）：

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle \tag{1.0.2}$$

式中，$|\boldsymbol{u}|$ 表示矢量 $\boldsymbol{u}$ 的长度，也称为它的模或绝对值。$\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle$ 表示矢量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 之间的夹角。注意，内积的这个定义式是与坐标系无关的。

笛卡尔直角坐标系的三个基矢量是相互正交的。由上述点积定义知，它们具有以下正交归一关系：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1,\quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1,\quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1\\&\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0,\quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0,\quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0\end{aligned} \tag{1.0.3}$$

即相同基矢量的点积是 1，不同基矢量的点积为零。

利用点积运算，容易求出任意矢量在三个坐标轴上的分量。事实上，将式（1.0.1）的两端分别点乘基矢量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，则依次有

$$p_x=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{i},\quad p_y=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{j},\quad p_z=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k} \tag{1.0.4}$$

下面看看，在笛卡尔直角坐标系中，怎样用分量表示两个矢量之间的点积。假设矢量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 有着像式（1.0.1）那样的分解式，则

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=(u_x\boldsymbol{i}+u_y\boldsymbol{j}+u_z\boldsymbol{k})\cdot(v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k})=u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z \tag{1.0.5}$$

读者可以把两个括号内的求和项逐项乘开，利用正交归一关系式（1.0.3），就得到最后一个等式的右边。

1.1　斜角直线坐标系

应该看到，之所以矢量点积有着像式（1.0.5）那样简单的表达式，是因为笛卡尔直角坐标系的三个基矢量之间存在正交归一关系式（1.0.3）。为了说明这一点，我们来看看斜角直线坐标系。以图 1.1 所表示的二维斜角直线坐标系 Ox^1x^2 为例。其中，x^1 和 x^2 为两个坐标轴，两轴之间的夹角为 φ。这里，右上角的数字代表上标而不是幂次。本书中，如无特别

说明，字母右上角的数字都代表上标。选取沿 x^1 和 x^2 正向的矢量 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$ 为参考矢量（可以不是单位矢量），则 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$ 就构成了斜角直线坐标系的一组基。在这一组基下，按照矢量分解的平行四边形法则，任意一个矢量 $\boldsymbol{p}$ 可以有类似于式(1.0.1)的分解式（或称展开式）：

$$\boldsymbol{p}=p^1\boldsymbol{g}_1+p^2\boldsymbol{g}_2=\sum_{\alpha=1}^{2}p^\alpha\boldsymbol{g}_\alpha=p^\alpha\boldsymbol{g}_\alpha \tag{1.1.1}$$

式(1.1.1)中的最后一项表示，我们在某种约定下，可以省去求和号，所以称为约定求和。通常把这个约定称为爱因斯坦约定。其内容是：凡在同一项中，上、下指标成对出现，就要求和。这个成对出现的指标，如式(1.1.1)中的 α，称为哑(指)标。一般规定，用希腊字母（即 $\alpha,\beta,\cdots$）表示的指标，取值范围是 1 和 2，所以也称为二维指标。用拉丁字母（即 $i,j,\cdots$）表示的指标，取值范围是 1,2 和 3，所以也称为三维指标。哑标可以随意更换字母，例如，$p^\alpha\boldsymbol{g}_\alpha=p^\beta\boldsymbol{g}_\beta$。

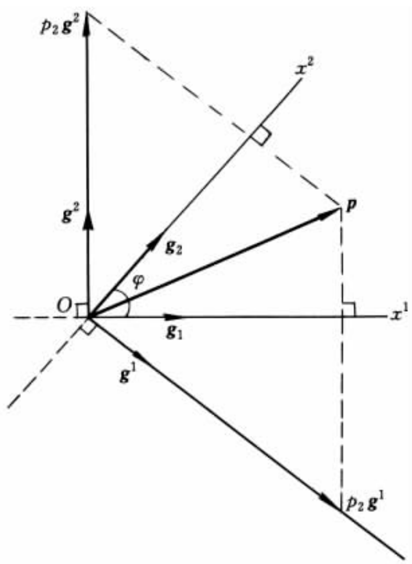


图 1.1　斜角直线坐标系的协变基和逆变基

由于斜角直线坐标系中的基矢量不相互正交，且不是单位矢量，所以点积的坐标表达式很繁杂。这可以从图 1.1 中的二维斜角直线坐标系看出。这时，点积的坐标表达式可以通过乘开下式的右端，利用式(1.0.2)而得到：

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=(u^1\boldsymbol{g}_1+u^2\boldsymbol{g}_2)\cdot(v^1\boldsymbol{g}_1+v^2\boldsymbol{g}_2)$$

可以看出，其结果是很繁杂的。

为了使斜角坐标系中的矢量点积运算也有类似于在笛卡尔直角坐标系中的简捷表达式，见式(1.0.5)，我们再引入一套与 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$ 对偶的参考矢量 $\boldsymbol{g}^1$ 和 $\boldsymbol{g}^2$。要求它们与 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$ 垂直，即

$$\boldsymbol{g}^1\cdot\boldsymbol{g}_2=\boldsymbol{g}^2\cdot\boldsymbol{g}_1=0 \tag{1.1.2a}$$

并使

$$\boldsymbol{g}^1\cdot\boldsymbol{g}_1=\boldsymbol{g}^2\cdot\boldsymbol{g}_2=1 \tag{1.1.2b}$$

式(1.1.2b)说明，虽然新引入的参考矢量 $\boldsymbol{g}^1$ 和 $\boldsymbol{g}^2$ 一般也不是单位矢量（因为 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$ 并不一定是单位矢量），但它们与 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$ 之间是按相应内积的值归一的。式(1.1.2b)还说明，$\boldsymbol{g}^1$ 与 $\boldsymbol{g}_1$ 及 $\boldsymbol{g}^2$ 与 $\boldsymbol{g}_2$ 的夹角都是锐角。由图 1.1 知，当 φ 为锐角时，此夹角为$\frac{\pi}{2}-\varphi$，当 φ 为钝角时，为 $\varphi-\frac{\pi}{2}$。所以，参考矢量 $\boldsymbol{g}^1$ 和 $\boldsymbol{g}^2$ 的长度分别是

$$|\boldsymbol{g}^1|=\frac{1}{|\boldsymbol{g}_1|\sin\varphi},\quad |\boldsymbol{g}^2|=\frac{1}{|\boldsymbol{g}_2|\sin\varphi} \tag{1.1.3}$$

以上说明，按式(1.1.2)可以惟一地确定一组新的基矢量 $\boldsymbol{g}^1$ 和 $\boldsymbol{g}^2$。式(1.1.2)可以统一地表示成

$$\boldsymbol{g}^{\alpha}\cdot\boldsymbol{g}_{\beta}=\boldsymbol{g}_{\beta}\cdot\boldsymbol{g}^{\alpha}=\delta_{\beta}^{\alpha} \tag{1.1.4}$$

这里，δ_{β}^{α}称为二维 Kronecker 符号，其值为

$$\delta_{\beta}^{\alpha}=\begin{cases}1, & 当\ \alpha=\beta \\ 0, & 当\ \alpha\neq\beta\end{cases} \tag{1.1.5}$$

为了区别 $\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2$ 和 $\boldsymbol{g}^1,\boldsymbol{g}^2$ 这两组基矢量，我们称沿坐标线的一组基矢量 $\boldsymbol{g}_{\alpha}$ 为协变基矢量，而称新引入的另一组基矢量 $\boldsymbol{g}^{\alpha}$ 为逆变基矢量。任意一个矢量 $\boldsymbol{p}$ 既可以按协变基分解，如式(1.1.1)所示，也可以按逆变基分解，即有

$$\boldsymbol{p}=p_{\alpha}\boldsymbol{g}^{\alpha}=p^{\alpha}\boldsymbol{g}_{\alpha} \tag{1.1.6}$$

以上是二维情况。对于三维斜角直线坐标系，设协变基是 $\boldsymbol{g}_j$，则逆变基 $\boldsymbol{g}^i$ 按下式引入：

$$\boldsymbol{g}^{i}\cdot\boldsymbol{g}_{j}=\delta_{j}^{i} \tag{1.1.7}$$

式中，δ_{j}^{i}是三维 Kronecker 符号，其值为

$$\delta_{j}^{i}=\begin{cases}1, & 当\ i=j \\ 0, & 当\ i\neq j\end{cases} \tag{1.1.8}$$

任意一个三维矢量 $\boldsymbol{p}$ 都可以在协变基和逆变基这两组基下分解：

$$\boldsymbol{p}=p^{i}\boldsymbol{g}_{i}=p_{i}\boldsymbol{g}^{i} \tag{1.1.9}$$

其中，矢量 $\boldsymbol{p}$ 在协变基下的分量 p^i 称为矢量的逆变分量，在逆变基下的分量 p_i 称为矢量的协变分量。利用这两组基矢量，可以方便地表示矢量的任意分量，而且表达式和在笛卡尔直角坐标系中一样简单，见式(1.0.4)。事实上，把式(1.1.9)中的第一个等号的两端同时点乘逆变基 $\boldsymbol{g}^i$，就有

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{g}^{i}=p^{j}\boldsymbol{g}_{j}\cdot\boldsymbol{g}^{i}=p^{j}\delta_{j}^{i}=p^{i} \tag{1.1.10a}$$

其中，倒数第二个等号之所以成立是因为式(1.1.7)。又因为式(1.1.8)，所以只有当上式右端 $p^j\delta_j^i$ 中的 p^j 等于 p^i 时，才有非零值。当然，也可以认为 $p^j\delta_j^i$ 是关于哑指标 j 的三项求和式，其中只有当 j 等于 i 的项非零。类似地，把式(1.1.9)中的第二个等号的两端同时点乘协变基 $\boldsymbol{g}_i$，就有

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{g}_{i}=p_{j}\boldsymbol{g}^{j}\cdot\boldsymbol{g}_{i}=p_{j}\delta_{i}^{j}=p_{i} \tag{1.1.10b}$$

把上两式写在一起就是

$$p^{i}=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{g}^{i}\quad 和\quad p_{i}=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{g}_{i} \tag{1.1.11}$$

式(1.1.11)是任意矢量在两组对偶基下的分量表达式，它们和笛卡尔直角坐标系下的类似表达式(1.0.4)一样简单。

引进逆变基以后，还可以使矢量点积的形式简单。这只要把进行点积的两个矢量分别在协变基和逆变基中分解就可以了。例如

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=u_{i}\boldsymbol{g}^{i}\cdot v^{j}\boldsymbol{g}_{j}=u_{i}v^{j}\boldsymbol{g}^{i}\cdot\boldsymbol{g}_{j}=u_{i}v^{j}\delta_{j}^{i}=u_{i}v^{i} \tag{1.1.12a}$$

注意，第二个等号表示左端的两个求和式逐项相乘的结果。类似还有

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=u^i\boldsymbol{g}_i\cdot v_j\boldsymbol{g}^j=u^iv_j\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}^j=u^iv_j\delta_i^j=u^iv_i \tag{1.1.12b}$$

式(1.1.12)表明，使用互为对偶的协变基和逆变基以后，矢量点积的形式和在笛卡尔直角坐标系下一样简单，见式(1.0.5)。

通过本节的讨论可以看出，在笛卡尔直角坐标系中，之所以矢量点积的坐标表达式具有简单的形式，其原因在于笛卡尔直角坐标系具有基矢量正交归一的特性。对于基矢量不相互正交的一般坐标系，矢量点积的坐标表达式就复杂了。克服的方法是采用两套基矢量。沿坐标轴的(原来的)基矢量称为协变基矢量，按式(1.1.7)引入的基矢量称为逆变基矢量。它们之间满足正交归一关系。

1.2 曲线坐标系的基矢量

我们知道，对于一个数学物理问题，总可以选择三个独立参数(实变数)来描述点在三维空间中的位置。这样的独立参数称为点在三维空间中的坐标。坐标与点是一一对应的。令三个参数中的某一个连续变动其值，而另外两个保持不变，则该点将描出一条轨迹曲线。称该轨迹曲线为坐标线。因为有三个独立参数，所以通过三维空间的每一点必有三根不共面的坐标线。一般情况下，坐标线是曲线。当三个参数中的一个保持不变，而其余两个参数连续变动其值，则所形成的点的集合就构成坐标面。通过三维空间的每一点必有三个坐标面。一般情况下，坐标面是曲面。

在三维空间中取一定点 O。从定点 O 出发，指向 M 点的矢量 $\boldsymbol{r}$，称为 M 点的矢径。考虑点 $M(x^1,x^2,x^3)$附近的矢径微段 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，显然有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i \tag{1.2.1}$$

此式分母中的上标表示整个分式的下标，所以满足约定求和的指标规定。i 是哑指标。式(1.2.1)中的偏导数$\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x^i}$是经过 M 点的三个矢量，它们沿坐标线 x^i 的切线方向，且指向坐标增加的一侧。我们选择$\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x^i}$作为点 M 附近的曲线坐标系的协变基矢量，即令

$$\boldsymbol{g}_i=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x^i} \tag{1.2.2}$$

因为经过 M 点的三根坐标曲线不共面，所以这样定义的三个协变基矢量也不共面。又，选择 $\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2$ 和 $\boldsymbol{g}_3$ 的顺序，使之构成右手系，这就要求

$$[\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_3]>0 \tag{1.2.3}$$

式中，符号$[\boldsymbol{abc}]=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 表示矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 所构成的体积，称为混合积。按式(1.2.2)和式(1.2.3)定义的协变基矢量也称为自然基矢量。由式(1.2.1)和式(1.2.2)知

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{g}_i\mathrm{d}x^i \tag{1.2.4}$$

它说明，这样定义的协变基矢量保证了 $\mathrm{d}r$ 是矢径的全微分。

与斜角直线坐标系类似，我们同样可以依照式(1.1.7)定义曲线坐标系的逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^i$。

显然，斜角直线坐标系中的相应公式(1.1.9)～式(1.1.12)对于这里的曲线坐标系仍然适用。所不同的只是在曲线坐标系中，基矢量的大小和方向都跟随点的位置变化而变化，基矢量是点的位置的函数，即有 $\boldsymbol{g}_i=\boldsymbol{g}_i(x^1,x^2,x^3)$，$\boldsymbol{g}^i=\boldsymbol{g}^i(x^1,x^2,x^3)$。不像直线坐标系那样，空间各点处的基矢量都相同，并不跟随点的位置变化。所以，曲线坐标系是局部坐标系，而直线坐标系是整体坐标系。我们知道，任何矢量型的物理量(例如力、速度等)总是附着在空间某个确定的点上的。例如，对于力来说，这个点就是它的作用点。对于流场中的流速，这个点就是某一特定的空间位置。对于线元 $\mathrm{d}s$，这个点就是假定该无限小量收敛到零的那个点。在曲线坐标系中，对于任何矢量都必须明确这样一个点。相应的基矢量就取自这一点。所谓矢量的分解，就是指按该点处的基矢量进行分解。

1.3 坐标变换

为了讨论坐标变换，假设除了已经建立的坐标系 x^i 以外，再引入一组“新”坐标系 $x^{i'}$，其中 i' 仍然取值 1,2,3。加上撇号只不过表示它们是新坐标系中的指标，以示与原坐标系中的指标 i 有所区别而已。

从坐标系 x^i 到 $x^{i'}$ 的坐标变换用下式表示：

$$x^{i'}=x^{i'}(x^1,x^2,x^3)=x^{i'}(x^j) \tag{1.3.1}$$

其中，$x^{i'}$ 作为 x^j 的函数有所需要的各阶连续导数，且变换的雅可比式不等于零：

$$\left|\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\right|\neq 0 \tag{1.3.2}$$

因而式(1.3.1)有逆变换

$$x^i=x^i(x^{1'},x^{2'},x^{3'})=x^i(x^{j'}) \tag{1.3.3}$$

这两组坐标系有各自的基矢量。设老坐标系 x^i 的协变基和逆变基是 $\boldsymbol{g}_i$ 和 $\boldsymbol{g}^i$。新坐标系 $x^{i'}$ 的协变基和逆变基是 $\boldsymbol{g}_{i'}$ 和 $\boldsymbol{g}^{i'}$。当然可以把新坐标系的每一个协变基在老坐标系的协变基中分解，写成

$$\boldsymbol{g}_{i'}=\beta_{i'}^{j}\boldsymbol{g}_j \tag{1.3.4}$$

此式与式(1.1.9)类似。其中，i' 是自由指标，代表三个式子，分别是三个新协变基 $\boldsymbol{g}_{i'}$ 在老协变基中的分解式。j 是哑指标，表示三项求和。变换系数 $\beta_{i'}^{j}$ 称为协变变换系数，由九个数组成。注意，上式中等号两端的自由指标是平衡的，即指标符号相同且上下位置相同。在张量指标系统中，这是必须保证的。

类似地，也可以把新坐标系的逆变基在老坐标系的逆变基中分解，写成

$$\boldsymbol{g}^{i'}=\beta_{j}^{i'}\boldsymbol{g}^j \tag{1.3.5}$$

变换系数 $\beta_{j}^{i'}$ 称为逆变变换系数，也由九个数组成。

由于在新坐标系中存在关系 $\boldsymbol{g}_{i'}\cdot\boldsymbol{g}^{k'}=\delta_{i'}^{k'}$，将式(1.3.4)和式(1.3.5)代入，得

$$\delta_{i'}^{k'}=\boldsymbol{g}_{i'}\cdot\boldsymbol{g}^{k'}=\beta_{i'}^{j}\boldsymbol{g}_j\cdot\beta_{l}^{k'}\boldsymbol{g}^l=\beta_{i'}^{j}\beta_{l}^{k'}\boldsymbol{g}_j\cdot\boldsymbol{g}^l=\beta_{i'}^{j}\beta_{l}^{k'}\delta_{j}^{l} \tag{1.3.6}$$

式(1.3.6)中的最后一个等号成立是因为在老坐标系中也存在关系 $\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}^j=\delta_i^j$。在最右端

项中,l 是哑指标,表示约定求和。由于只有当 l 取值为 j 时,$\delta_j^l=1$,其余均为零,所以,式(1.3.6)也可以继续写成 $\beta_{i'}^j\beta_j^{k'}$。当然,也可以在最右端项中对 j 求和,得到 $\beta_{i'}^l\beta_l^{k'}$。这两个结果是相同的。最终有

$$\beta_{i'}^j\beta_j^{k'}=\delta_{i'}^{k'} \tag{1.3.7}$$

此式有两个自由指标 i'和 k',表示有 $3^2=9$ 个方程。这说明,可以求解九个未知数。通常情况是,知道一组变换系数,例如式(1.3.4)中的协变变换系数 $\beta_{i'}^j$,就可以求出式(1.3.5)中的另一组逆变变换系数 $\beta_j^{k'}$。反之亦然。事实上,如果我们把变换系数的九个数按矩阵排列,其中,下指标表示行,上指标表示列,则式(1.3.7)可以写成

$$\begin{bmatrix}\beta_{1'}^1 & \beta_{1'}^2 & \beta_{1'}^3\\ \beta_{2'}^1 & \beta_{2'}^2 & \beta_{2'}^3\\ \beta_{3'}^1 & \beta_{3'}^2 & \beta_{3'}^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1^{1'} & \beta_1^{2'} & \beta_1^{3'}\\ \beta_2^{1'} & \beta_2^{2'} & \beta_2^{3'}\\ \beta_3^{1'} & \beta_3^{2'} & \beta_3^{3'}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{1.3.8}$$

它表示,由 $\beta_{i'}^j$ 和 $\beta_j^{k'}$ 组成的系数矩阵互为逆矩阵。

以上讨论的是,新基用老基表示。反过来,老基也可以用新基表示。先推导老协变基在新协变基中的分解式。为此,用 $\beta_k^{i'}$ 乘式(1.3.4)两端,得

$$\beta_k^{i'}\boldsymbol{g}_{i'}=\beta_k^{i'}\beta_{i'}^j\boldsymbol{g}_j \tag{1.3.9}$$

再看式(1.3.8),因为左端两个矩阵互为逆矩阵,所以可以交换位置,得到下述关系式:

$$\begin{bmatrix}\beta_1^{1'} & \beta_1^{2'} & \beta_1^{3'}\\ \beta_2^{1'} & \beta_2^{2'} & \beta_2^{3'}\\ \beta_3^{1'} & \beta_3^{2'} & \beta_3^{3'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_{1'}^1 & \beta_{1'}^2 & \beta_{1'}^3\\ \beta_{2'}^1 & \beta_{2'}^2 & \beta_{2'}^3\\ \beta_{3'}^1 & \beta_{3'}^2 & \beta_{3'}^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{1.3.10}$$

此式可以写成

$$\beta_k^{i'}\beta_{i'}^j=\delta_k^j \tag{1.3.11}$$

把式(1.3.11)代入式(1.3.9),就得到

$$\boldsymbol{g}_k=\beta_k^{i'}\boldsymbol{g}_{i'} \tag{1.3.12}$$

这就是老协变基按新协变基分解的表达式。再用 $\beta_{i'}^j$ 乘式(1.3.5)的两端(同时把式(1.3.5)右端的哑指标 j 换成 k),得

$$\beta_{i'}^j\boldsymbol{g}^{i'}=\beta_{i'}^j\beta_k^{i'}\boldsymbol{g}^k \tag{1.3.13}$$

把式(1.3.11)代入,可得

$$\boldsymbol{g}^j=\beta_{i'}^j\boldsymbol{g}^{i'} \tag{1.3.14}$$

这就是老逆变基按新逆变基分解的表达式。

可以看出,在新老坐标系的基矢量的四组相互表达式中,只需要两组变换系数 $\beta_{i'}^j$ 和 $\beta_j^{i'}$。这两组变换系数又通过式(1.3.7)相互联系,所以只要一组变换系数就足够了。带撇“′”的指标是下指标者叫协变变换系数,带撇“′”的指标是上指标者叫逆变变换系数。现在介绍它

们的求法。

根据协变基矢量的定义式(1.2.2),老坐标系的协变基是 $\boldsymbol{g}_i=\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}$,新坐标系的协变基是 $\boldsymbol{g}_{i'}=\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^{i'}}$。由于新老坐标系之间存在变换关系式(1.3.1)和式(1.3.3),利用复合函数的求导公式,有

$$\boldsymbol{g}_{i'}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^{i'}}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^{j}}\cdot\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}}=\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{i'}}\boldsymbol{g}_j \tag{1.3.15}$$

将此式与式(1.3.4)比较(利用 $\boldsymbol{g}_j$ 的线性无关性)知

$$\beta_{i'}^{j}=\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{i'}} \tag{1.3.16}$$

同理,可得

$$\beta_{j}^{i'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{j}} \tag{1.3.17}$$

上两式中,i'和 j 均为自由指标,故各自对应有 $3^2=9$ 个关系式。

下面,通过一个例子来说明变换系数的具体求法。设在三维空间中同时设立一个圆柱坐标系(ρ,φ,z)和一个笛卡尔直角坐标系($Oxyz$)。任意一点 p 的坐标 ρ,φ,z 和 x,y,z 之间满足如下关系:

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad z=z \tag{1.3.18}$$

不妨把圆柱坐标系看作老坐标系,即

$$x^1=\rho,\quad x^2=\varphi,\quad x^3=z$$

而把笛卡尔直角坐标系看作新坐标系,即

$$x^{1'}=x,\quad x^{2'}=y,\quad x^{3'}=z$$

所以,逆变变换系数 $\beta_{j}^{i'}$ 可以根据式(1.3.17)求出:

$$\beta_1^{1'}=\frac{\partial x}{\partial \rho}=\cos\varphi,\quad \beta_1^{2'}=\frac{\partial y}{\partial \rho}=\sin\varphi,\quad \beta_1^{3'}=\frac{\partial z}{\partial \rho}=0$$

$$\beta_2^{1'}=\frac{\partial x}{\partial \varphi}=-\rho\sin\varphi,\quad \beta_2^{2'}=\frac{\partial y}{\partial \varphi}=\rho\cos\varphi,\quad \beta_2^{3'}=\frac{\partial z}{\partial \varphi}=0$$

$$\beta_3^{1'}=\frac{\partial x}{\partial z}=0,\quad \beta_3^{2'}=\frac{\partial y}{\partial z}=0,\quad \beta_3^{3'}=\frac{\partial z}{\partial z}=1 \tag{1.3.19}$$

又由式(1.3.18),有

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\quad \tan\varphi=\frac{y}{x}$$

从而协变变换系数 $\beta_{i'}^{j}$ 为

$$\beta_{1'}^{1}=\frac{\partial\rho}{\partial x}=\cos\varphi,\quad \beta_{1'}^{2}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{\sin\varphi}{\rho},\quad \beta_{1'}^{3}=\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$\beta_{2'}^{1}=\frac{\partial\rho}{\partial y}=\sin\varphi,\quad \beta_{2'}^{2}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\cos\varphi}{\rho},\quad \beta_{2'}^{3}=\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

$$\beta_{3'}^{1}=\frac{\partial\rho}{\partial z}=0,\quad \beta_{3'}^{2}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0,\quad \beta_{3'}^{3}=\frac{\partial z}{\partial z}=1 \tag{1.3.20}$$

不难验证,它们满足式(1.3.10)。利用和笛卡尔直角坐标系之间的变换关系还可以求曲线坐标系的协变基和逆变基。因为对于笛卡尔直角坐标系来说,协变基和逆变基是重合的,它们是

$$\boldsymbol{g}_{1'}=\boldsymbol{g}^{1'}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{g}_{2'}=\boldsymbol{g}^{2'}=\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{g}_{3'}=\boldsymbol{g}^{3'}=\boldsymbol{k}$$

所以,根据式(1.3.12),可以求出圆柱坐标系的三个协变基:

$$\boldsymbol{g}_1=\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\varphi\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{g}_2=-\rho\sin\varphi\boldsymbol{i}+\rho\cos\varphi\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{g}_3=\boldsymbol{k} \tag{1.3.21}$$

根据式(1.3.14),可以求出圆柱坐标系的三个逆变基:

$$\boldsymbol{g}^1=\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\varphi\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{g}^2=-\rho\sin\varphi\boldsymbol{i}+\rho\cos\varphi\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{g}^3=\boldsymbol{k} \tag{1.3.22}$$

下面讨论给定坐标变换以后任意矢量在不同坐标系中的分量之间的变换关系。设任意矢量 $\boldsymbol{v}$ 在老坐标系 x^i 中的分解式是

$$\boldsymbol{v}=v_i\boldsymbol{g}^i=v^i\boldsymbol{g}_i \tag{1.3.23}$$

这里,v_i 是矢量 $\boldsymbol{v}$ 在老坐标系下的协变分量,v^i 是在新坐标系下的逆变分量。矢量 $\boldsymbol{v}$ 在新坐标系 $x^{i'}$ 中的分解式是

$$\boldsymbol{v}=v_{i'}\boldsymbol{g}^{i'}=v^{i'}\boldsymbol{g}_{i'} \tag{1.3.24}$$

其中,$v_{i'}$ 是矢量 $\boldsymbol{v}$ 在新坐标系下的协变分量,$v^{i'}$ 是在新坐标系下的逆变分量。将式(1.3.23)的第一个等式用式(1.3.14)改造后,得

$$\boldsymbol{v}=v_i\boldsymbol{g}^i=v_i\beta_{k'}^{i}\boldsymbol{g}^{k'}$$

再和式(1.3.24)的第一个等式相等,有

$$\boldsymbol{v}=v_{i'}\boldsymbol{g}^{i'}=v_i\beta_{k'}^{i}\boldsymbol{g}^{k'}$$

用 $\boldsymbol{g}_{j'}$ 点乘上式第二个等号的两端,得

$$v_{j'}=\beta_{j'}^{i}v_i \tag{1.3.25}$$

这就是同一矢量在不同坐标系中的协变分量之间的变换关系。

同理,利用式(1.3.12),可将式(1.3.23)和式(1.3.24)的第二个等式写成

$$\boldsymbol{v}=v^{i'}\boldsymbol{g}_{i'}=v^i\beta_{i}^{k'}\boldsymbol{g}_{k'}$$

用 $\boldsymbol{g}^{j'}$ 点乘上式第二个等号的两端,得

$$v^{j'}=\beta_{i}^{j'}v^i \tag{1.3.26}$$

这就是同一矢量在不同坐标系中的逆变分量之间的变换关系。

完全类推,如果把矢量 $\boldsymbol{v}$ 在新坐标系中分解,即从式(1.3.24)出发,再将其中的新基用

老坐标系中的老基表示，即将式(1.3.4)和式(1.3.5)代入，就可得到另两组变换关系：

$$v_i=\beta_i^{j'}v_{j'} \tag{1.3.27}$$

和

$$v^i=\beta_{j'}^{i}v^{j'} \tag{1.3.28}$$

1.4　张量

先看矢量。三维矢量有三个分量，如前述，每个分量在坐标变换式(1.3.1)下，满足如式(1.3.25)和式(1.3.26)或者式(1.3.27)和式(1.3.28)所描述的变换规律。可以把这个概念加以推广。如果一个量(或者数的集合)有 3^N 个分量(N 是幂指数)，其每个分量在三维空间 R^3 中的坐标变换式(1.3.1)下，满足以下变换规律：

$$T_{i'_1\cdots i'_m}^{j'_1\cdots j'_n}=\beta_{j_1}^{j'_1}\cdots\beta_{j_n}^{j'_n}\beta_{i'_1}^{i_1}\cdots\beta_{i'_m}^{i_m}T_{i_1\cdots i_m}^{j_1\cdots j_n} \tag{1.4.1}$$

式中，$m+n=N$，则称这个量为 N 阶张量。我们在前面称 v_i 为矢量的协变分量，v^i 为矢量的逆变分量。和这种称谓方法类似，通常把 $T_{i_1\cdots i_m}^{j_1\cdots j_n}$ 称为这个 N 阶张量的具有 m 阶协变和 n 阶逆变的混变分量。

按照这种定义，矢量是 1 阶张量(有 3^1 个分量)，矩阵(方阵)是 2 阶张量(有 3^2 个分量)，而标量是 0 阶张量(3^0 个分量)。

张量有多种类型。一种是并乘张量(并乘的概念在下一节中介绍)。例如，设由逆变分量和协变分量所给定的两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是已知的，则由等式

$$T_{ij}=a_ib_j,\quad T^{ij}=a^ib^j,\quad T_i^{\cdot j}=a_ib^j,\quad T^i_{\cdot j}=a^ib_j \tag{1.4.2}$$

所确定的量都是二阶张量。读者可以自行证明。按照这种乘法还可以构造高阶张量。这些张量可以是物理量，但目前只是形式的，并未赋予任何物理直观性。上式中，T_{ij} 称为张量的协变分量，T^{ij} 称为逆变分量，$T_i^{\cdot j}$ 和 $T^i_{\cdot j}$ 称为混变张量。在混变张量中，我们用点“·”标识一个空位，以强调指标的位置。例如，$T_i^{\cdot j}$ 表示 i 是第一指标，是协变指标；j 是第二指标，是逆变指标。而 $T^i_{\cdot j}$ 表示 i 是第一指标，是逆变指标；j 是第二指标，是协变指标。

还有一种办法可以构造张量。我们考察九个量 T_{ij}，它把矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 用下式联系起来：

$$a^iT_{ij}=b_j \tag{1.4.3}$$

它表示从任意矢量 $\boldsymbol{a}$ 到矢量 $\boldsymbol{b}$ 的映射。现在考虑坐标变换式(1.3.1)。利用矢量变换关系式(1.3.27)和式(1.3.28)，式(1.4.3)可改写成

$$a^{i'}\beta_{i'}^{i}T_{ij}=b_{k'}\beta_j^{k'} \tag{1.4.4}$$

用 $\beta_{j'}^{j}$ 乘这个方程的两端，利用式(1.3.7)，则右边等于

$$b_{k'}\beta_j^{k'}\beta_{j'}^{j}=b_{j'}$$

因此，式(1.4.4)变成

$$a^{i'}\beta_{i'}^{i}\beta_{j'}^{j}T_{ij}=b_{j'} \tag{1.4.5}$$

可以看出，当且仅当存在等式

$$T_{i'j'}=\beta_{i'}^{i}\beta_{j'}^{j}T_{ij}$$

时，对于矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 在新坐标系中的分量 $a^{i'}$ 和 $b_{j'}$，仍然满足类似于式(1.4.3)的关系

$$a^{i'}T_{i'j'}=b_{j'} \tag{1.4.7}$$

这说明,这九个量是张量。

连续介质力学中的应力张量就是按照这种方式构造的张量的一个例子。事实上,认为作用在面元上的力矢量 d$\boldsymbol{F}$ 与面元矢量 d$\boldsymbol{A}$ 之间有关系

$$\mathrm{d}F^i = \sigma^{ij}\,\mathrm{d}A_j$$

这就定义了应力张量的逆变分量。

还有其他类型的张量。例如,从式(1.3.6)可以看出,Kronecker 符号 δ_j^i 是一个一阶逆变、一阶协变的二阶混变张量。

1.5 张量的实体表示

矢量有两种表示法。一种是分量表示法,例如可以用协变分量 v_i 和逆变分量 v^i 表示矢量 $\boldsymbol{v}$。另一种是实体表示法,它是用矢量分量配以相应的基矢量而构成的。例如,下式就是矢量 $\boldsymbol{v}$ 的实体表示:

$$\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{g}_i = v_i \boldsymbol{g}^i$$

实体表示法的优点是表现了矢量不随坐标变换而变化的本来性质。根据 1.3 节的有关公式可以看出,虽然矢量分量随坐标变换而变化,但基矢量也随坐标变换而变化,而且它们各自的变换系数之间满足式(1.3.7)或式(1.3.11)。所以矢量实体 $\boldsymbol{v}$ 并不随坐标变换而变化,即存在关系

$$\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{g}_i = v^{i'} \boldsymbol{g}_{i'} = v_i \boldsymbol{g}^i = v_{i'} \boldsymbol{g}^{i'} \tag{1.5.2}$$

张量是矢量的推广。前边已经定义了张量的分量。与矢量实体类似,也可以定义张量实体。为此,先介绍矢量之间的一种乘法运算——并乘的概念。我们在前边介绍并乘张量时,曾经讲过,把两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的分量逐个相乘,所得到的一组数的集合 $a_i b_i$ 构成了张量分量。矢量分量的这种乘法对应着矢量实体的并乘运算。两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 之间的并乘运算写作 $\boldsymbol{ab}$。并乘也叫张量乘,也写作 $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$。这是因为矢量并乘的结果是张量。并乘服从以下运算规律:

结合律 $\quad (\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc}) = \boldsymbol{abc}$

分配律 $\quad \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac}$

数乘的结合律 $\quad (m\boldsymbol{a})(n\boldsymbol{b}) = (mn)\boldsymbol{ab}$

数乘的分配律 $\quad m(\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{cd}) = m\boldsymbol{ab} + m\boldsymbol{cd} \qquad (1.5.3)$

但交换律不适用,即

$$\boldsymbol{ab} \neq \boldsymbol{ba} \tag{1.5.4}$$

矢量并乘的表达式称为并矢式,多个矢量并乘的表达式称为多重并矢式,例如,$\boldsymbol{abc}$ 和 $\boldsymbol{abcd}$ 分别称为三重并矢式和四重并矢式。

并矢是张量。例如,根据数乘的结合律,二重并矢 $\boldsymbol{ab}$ 当然有如下四种表达式:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{ab} &= (a^i \boldsymbol{g}_i)(b^j \boldsymbol{g}_j) = a^i b^j \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j \\
&= (a^i \boldsymbol{g}_i)(b_j \boldsymbol{g}^j) = a^i b_j \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}^j \\
&= (a_i \boldsymbol{g}^i)(b^j \boldsymbol{g}_j) = a_i b^j \boldsymbol{g}^i \boldsymbol{g}_j \\
&= (a_i \boldsymbol{g}^i)(b_j \boldsymbol{g}^j) = a_i b_j \boldsymbol{g}^i \boldsymbol{g}^j
\end{aligned} \tag{1.5.5}$$

以式(1.5.5)的第一种表达式为例,依照式(1.3.28)和式(1.3.7),有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{ab} &= a^i b^j \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j = (\beta^i_{i'} a^{i'})(\beta^j_{j'} b^{j'})(\beta^{m'}_i \boldsymbol{g}_{m'})(\beta^{n'}_j \boldsymbol{g}_{n'}) = (\beta^i_{i'} \beta^{m'}_i)(\beta^j_{j'} \beta^{n'}_j) a^{i'} b^{j'} \boldsymbol{g}_{m'} \boldsymbol{g}_{n'} \\ &= \delta^{m'}_{i'} \delta^{n'}_{j'} a^{i'} b^{j'} \boldsymbol{g}_{m'} \boldsymbol{g}_{n'} = a^{i'} b^{j'} \boldsymbol{g}_{i'} \boldsymbol{g}_{j'} \end{aligned} \tag{1.5.6}$$

这就证明了 $\boldsymbol{ab}$ 是一个二阶张量。$a^i b^j$ 是它的逆变分量。因为 $\boldsymbol{ab}$ 并不随坐标系的变换而变化，所以，是一个张量实体，称为并矢张量。

基矢量是特殊的矢量，它们也可以进行并乘运算。因为三个协变基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 是线性无关的，逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^i$ 也是线性无关的，所以它们的并矢，例如 $\boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j$（共九个量，即 $\boldsymbol{g}_1 \boldsymbol{g}_1$，$\boldsymbol{g}_1 \boldsymbol{g}_2$，$\boldsymbol{g}_1 \boldsymbol{g}_3$，$\boldsymbol{g}_2 \boldsymbol{g}_1$，$\boldsymbol{g}_2 \boldsymbol{g}_2$，$\boldsymbol{g}_2 \boldsymbol{g}_3$，$\boldsymbol{g}_3 \boldsymbol{g}_1$，$\boldsymbol{g}_3 \boldsymbol{g}_2$，$\boldsymbol{g}_3 \boldsymbol{g}_3$），$\boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}^j$，$\boldsymbol{g}^i \boldsymbol{g}_j$ 和 $\boldsymbol{g}^i \boldsymbol{g}^j$ 都各自构成一组线性无关的并矢，称为并基。式(1.5.5)说明，任意两个矢量的并矢张量都可按照这四组并基展开。把 $a^i b^j$，$a^i b_j$，$a_i b^j$ 和 $a_j b_j$ 分别称为并矢张量 $\boldsymbol{ab}$ 关于并基 $\boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j$，$\boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}^j$，$\boldsymbol{g}^i \boldsymbol{g}_j$ 和 $\boldsymbol{g}^i \boldsymbol{g}^j$ 的分量。

和矢量实体的构成类似，任意一个张量分量配上相应的并基就构成张量实体。例如

$$T = T_{ij} \boldsymbol{g}^i \boldsymbol{g}^j = T_i^{\cdot j} \boldsymbol{g}^i \boldsymbol{g}_j = T^i_{\cdot j} \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}^j = T^{ij} \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j \tag{1.5.7}$$

就构成了二阶张量实体 T。通常用黑体大写拉丁字母或者黑体大写希腊字母表示张量实体。在手写时，则用下划线代替黑体。例如 $\underline{T}$。

利用张量（分量）的定义式(1.4.1)以及基矢量的坐标变换式(1.3.12)和式(1.3.14)，可以证明，张量实体，例如，三阶张量

$$T = T^{ijk} \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j \boldsymbol{g}_k = T_i^{\cdot jk} \boldsymbol{g}^i \boldsymbol{g}_j \boldsymbol{g}_k = \cdots = T_{ijk} \boldsymbol{g}^i \boldsymbol{g}^j \boldsymbol{g}^k$$

不随坐标变换而变化，所以也称为张量的不变性记法。以后，在不同的场合，张量分量或者张量实体都可以称为张量。张量分量有几个自由指标，就是几阶张量。张量实体有几个并基，就是几阶张量。

1.6 度量张量

只要给定一个坐标系 x^i，则在空间的任意一点都有一组确定的协变基 $\boldsymbol{g}_i$ 和一组对偶的逆变基 $\boldsymbol{g}^i$。因为任意一个矢量都可以分别按这两组基来分解，所以特殊地，这两组基矢量也可以互相分解。把协变基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 按逆变基分解，类似于式(1.1.9)，记作

$$\boldsymbol{g}_i = g_{ij} \boldsymbol{g}^j \tag{1.6.1a}$$

其中的系数 g_{ij} 具有九个量。同样，把逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^i$ 按协变基分解，记作

$$\boldsymbol{g}^i = g^{ij} \boldsymbol{g}_j \tag{1.6.1b}$$

其中的系数 g^{ij} 同样具有九个量。

类似于式(1.1.11)，可以得到

$$g_{ij} = \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j \tag{1.6.2a}$$

和

$$g^{ij} = \boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}^j \tag{1.6.2b}$$

因为点积可以交换次序，所以有

$$g_{ij} = g_{ji}, \quad g^{ij} = g^{ji} \tag{1.6.3}$$

这说明 g_{ij} 和 g^{ij} 关于指标是对称的。式(1.6.1)和式(1.6.2)都可以作为 g_{ij} 和 g^{ij} 的定义。

这两组新引入的九个量之间存在以下关系：

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j \tag{1.6.4}$$

为了证明这一关系式，作协变基矢量与逆变基矢量之间的点积。有

$$\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}^j=(g_{ik}\boldsymbol{g}^k)\cdot\boldsymbol{g}^j=g_{ik}(\boldsymbol{g}^k\cdot\boldsymbol{g}^j)=g_{ik}g^{kj}$$

另一方面,上式左端 $\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}^j=\delta_i^j$。这就完成了证明。

式(1.6.4)反映了九个量 g_{ik} 和另外九个量 g^{kj} 之间的关系。因为式(1.6.4)中有两个自由指标,所以实际上是九个等式。如果已知一组九个量,例如 g_{ik},就可以通过求解这九个线性方程组,惟一确定另一组九个量 g_{kj}。也可以把这两组九个量都按第一个指标表示行、第二个指标表示列的规定排列起来,就分别构成了两个对称矩阵$[g_{ik}]$和$[g^{kj}]$。式(1.6.4)说明,这两个矩阵互逆。

下面证明 g_{ij} 是某个二阶张量的协变分量,而 g^{ij} 是同一个二阶张量的逆变分量。

先证明 g_{ij} 和 g^{ij} 是张量的协变分量和逆变分量。为此,考虑新坐标系 $x^{i'}$ 下的协变基矢量 $\boldsymbol{g}_{i'}$ 和逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^{i'}$。新老坐标系下各自的两组对偶基矢量满足变换关系式(1.3.4)和式(1.3.5)。按定义,对于新坐标系,有

$$g_{i'j'}=\boldsymbol{g}_{i'}\cdot\boldsymbol{g}_{j'}\tag{1.6.5a}$$

和

$$g^{i'j'}=\boldsymbol{g}^{i'}\cdot\boldsymbol{g}^{j'}\tag{1.6.5b}$$

由变换关系式(1.3.4)可得

$$g_{i'j'}=\boldsymbol{g}_{i'}\cdot\boldsymbol{g}_{j'}=(\beta_{i'}^{\ i}\boldsymbol{g}_i)\cdot(\beta_{j'}^{\ j}\boldsymbol{g}_j)=\beta_{i'}^{\ i}\beta_{j'}^{\ j}\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_j=\beta_{i'}^{\ i}\beta_{j'}^{\ j}g_{ij}\tag{1.6.6a}$$

同理可得

$$g^{i'j'}=\beta_{\ i}^{i'}\beta_{\ j}^{j'}g^{ij}\tag{1.6.6b}$$

根据张量的定义式(1.4.1)知,g_{ij} 和 g^{ij} 是张量的协变分量和逆变分量。

再证明 g_{ij} 和 g^{ij} 是同一个张量的协变分量和逆变分量。设 g_{ij} 是张量 G 的协变分量,即有

$$\mathbf{G}=g_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\tag{1.6.7a}$$

根据式(1.6.1)、式(1.6.3)和式(1.6.4),上式可改写成

$$\mathbf{G}=g_{kl}\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l=g_{kl}(g^{ki}\boldsymbol{g}_i)g^{lj}\boldsymbol{g}_j=g_{lk}g^{ki}g^{lj}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j=\delta_{\ l}^{i}g^{lj}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j=g^{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\tag{1.6.7b}$$

这正说明了 g^{ij} 是同一个张量 G 的逆变分量。称张量 G 为度量张量。

利用张量的实体表示,不难写出度量张量 G 的两种混变分量 $g^i_{\cdot j}$ 和 $g_i^{\cdot j}$。事实上,由

$$\mathbf{G}=g^{ik}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_k=g^{ik}\boldsymbol{g}_i(g_{kj}\boldsymbol{g}^j)=g^{ik}g_{kj}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j=\delta^i_j\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j$$

可知

$$g^i_{\cdot j}=\delta^i_j\tag{1.6.8a}$$

再由

$$\mathbf{G}=g^{kj}\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}_j=g^{kj}(g_{ki}\boldsymbol{g}^i)\boldsymbol{g}_j=g^{jk}g_{ki}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_j=\delta^j_i\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_j$$

知 G 的另一个混变分量是

$$g_i^{\cdot j}=\delta_i^j\tag{1.6.8b}$$

以上内容表明，度量张量 G 的两种混变分量就是 Kronecker δ。G 的实体形式可完整地写成

$$\mathbf{G}=g^{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j=g_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j=\delta_i^j\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_j=\delta_j^i\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j \tag{1.6.9}$$

再来考察空间中一点处的线元长度 $\mathrm{d}s$。由于线元弧长极其微小，所以可以用相应的线元弦长代替。根据式(1.2.4)，有

$$(\mathrm{d}S)^2=\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=(g_i\mathrm{d}x^i)\cdot(g_j\mathrm{d}x^j)=g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \tag{1.6.10}$$

这说明，坐标的微小变动所导致的线元的大小完全由 g_{ij} 决定。这就是把 G 称为度量张量的原因。式(1.6.10)说明，线元长度的平方是一个二次型。因为只有当 $\mathrm{d}x^1=\mathrm{d}x^2=\mathrm{d}x^3=0$ 时，这个二次型才为零，否则，这个二次型恒大于零。这说明，这个二次型是正定的。如果把 g_{ij} 看成矩阵，这个矩阵也是正定的。

矢量的不同分量之间可以利用 g_{ij} 和 g^{ij} 进行相互转换。事实上，对于任一矢量 $\boldsymbol{u}=u^i\boldsymbol{g}_i$，利用式(1.6.1a)，可以通过变换基矢量而把展开式改写成

$$\boldsymbol{u}=u^ig_{ij}\boldsymbol{g}^j=u_j\boldsymbol{g}^j$$

上式最后一个等号的两边都是三项求和式，但因为三个逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^j(j=1,2,3)$ 是线性无关的，所以对应的系数相等，即有

$$u_j=u^ig_{ij} \tag{1.6.11a}$$

也可以这样看，用 $\boldsymbol{g}_k$ 点乘该式最后一个等号的两边，左边就变成

$$u^ig_{ij}\boldsymbol{g}^j\cdot\boldsymbol{g}_k=u^ig_{ij}\delta_k^j=u^ig_{ik}$$

右边变成

$$u_j\boldsymbol{g}^j\cdot\boldsymbol{g}_k=u_j\delta_k^j=u_k$$

让这两个结果相等，就得到式(1.6.11a)。

用同样的方法，从 $\boldsymbol{u}=u_i\boldsymbol{g}^i$ 出发，可以得到

$$u^j=u_ig^{ij} \tag{1.6.11b}$$

式(1.6.11)说明，通过 g_{ij} 和 g^{ij} 可以把矢量的协变分量与逆变分量联系起来。或者说，g_{ij} 和 g_{ij} 可以升降矢量分量的指标。这一运算，称为指标的上升或下降。

对于任意阶张量，同样可以利用 g_{ij} 和 g^{ij} 来升降其任意分量中的任意指标。以二阶张量 $\mathbf{T}=T_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j=T_i^{\cdot j}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_j=T^i_{\cdot j}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j=T^{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j$ 为例。如果要把混变分量 $T_i^{\cdot j}$ 的第一指标上升，可以用 g^{ij} 作以下运算：

$$T_i^{\cdot j}g^{ik}=T^{kj} \tag{1.6.12a}$$

如想把逆变分量 T^{ij} 的第二指标下降，则要用 g_{ij} 作以下运算：

$$T^{ij}g_{jk}=T^i_{\cdot k} \tag{1.6.12b}$$

而如想把协变分量 T_{ij} 的两个指标都上升，就要

$$T_{ij}g^{ik}g^{jl}=T^{kl} \tag{1.6.12c}$$

其正确性,请读者自行证明。可以看出升降指标的规律是:用度量张量的协变分量 g_{ij} 下降指标,用度量张量的逆变分量 g^{ij} 上升指标。欲上升或者下降的指标与 g_{ij} 或 g^{ij} 中的一个指标形成一对哑指标,进行约定求和运算。

指标的升降规律说明,如果已经知道了一个张量的一种分量,就可以用度量张量按指标升降规律得到该张量的其他各种分量。

如果某个张量在一个坐标系中有一种分量(在三维空间中,对于 N 阶张量,任一种分量有 3^N 个数)全为零,则该张量在此坐标系下的其他各种分量也全为零,并且对任何坐标系,该张量的每种分量也全为零。称这种张量为零张量,记为 $\mathbf{0}$。

1.7 矢量的叉积、混合积和 Eddington 张量

由逆变基的定义式(1.1.7) $\boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{g}_j=\delta^i_j$,可以得到逆变基用协变基表示的下述表达式:

$$\boldsymbol{g}^1=\frac{\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_3}{[\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_3]},\quad \boldsymbol{g}^2=\frac{\boldsymbol{g}_3\times\boldsymbol{g}_1}{[\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_3]},\quad \boldsymbol{g}^3=\frac{\boldsymbol{g}_1\times\boldsymbol{g}_2}{[\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_3]} \tag{1.7.1}$$

其中,混合积$[\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_3]=\boldsymbol{g}_1\cdot\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_3$。上式不难得到。以 $\boldsymbol{g}^1$ 为例,由式(1.1.7)有

$$\boldsymbol{g}^1\cdot\boldsymbol{g}_1=1,\quad \boldsymbol{g}^1\cdot\boldsymbol{g}_2=0,\quad \boldsymbol{g}^1\cdot\boldsymbol{g}_3=0 \tag{1.7.2}$$

其中后两式说明,$\boldsymbol{g}^1$ 既与 $\boldsymbol{g}_2$ 又与 $\boldsymbol{g}_3$ 正交,当然也就和 $\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_3$ 平行。所以必然有以下等式成立:

$$\boldsymbol{g}^1=a\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_3$$

式中,a 是待定常数。上式两端点乘 $\boldsymbol{g}_1$,利用式(1.7.2)的第一式,就有 $a=\dfrac{1}{[\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_3]}$,代入上式,就得到式(1.7.1)的第一式。再利用循环指标法,就得到式(1.7.1)的其余两个表达式。

再来计算由逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^1$,$\boldsymbol{g}^2$ 和 $\boldsymbol{g}^3$ 所构成的混合积$[\boldsymbol{g}^1\boldsymbol{g}^2\boldsymbol{g}^3]$。把 $\boldsymbol{g}^3$ 用式(1.7.1)代入,并利用二重叉积公式

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \tag{1.7.3}$$

可得

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{g}^1\boldsymbol{g}^2\boldsymbol{g}^3]&=\boldsymbol{g}^1\cdot\boldsymbol{g}^2\times\boldsymbol{g}^3\\&=\boldsymbol{g}^1\cdot\left[\boldsymbol{g}^2\times\frac{\boldsymbol{g}_1\times\boldsymbol{g}_2}{[\boldsymbol{g}_1\ \boldsymbol{g}_2\ \boldsymbol{g}_3]}\right]=\frac{1}{[\boldsymbol{g}_1\ \boldsymbol{g}_2\ \boldsymbol{g}_3]}\boldsymbol{g}^1\cdot[(\boldsymbol{g}^2\cdot\boldsymbol{g}_2)\boldsymbol{g}_1-(\boldsymbol{g}^2\cdot\boldsymbol{g}_1)\boldsymbol{g}_2]\end{aligned}$$

注意到 $\boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{g}_j=\delta^i_j$,从而有

$$[\boldsymbol{g}_1\ \boldsymbol{g}_2\ \boldsymbol{g}_3][\boldsymbol{g}^1\ \boldsymbol{g}^2\ \boldsymbol{g}^3]=1 \tag{1.7.4}$$

前面讲过,如果把度量张量的九个协变分量 g_{ij} 按第一个指标表示行、第二个指标表示列的规律排列起来,就构成一个方阵。设该方阵的行列式为 g,则有

$$g=|g_{ij}|=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \tag{1.7.5}$$

按同样的规律也可以把度量张量的九个逆变分量也排成一个方阵。利用式(1.6.4),**自然有**

$$\frac{1}{g}=|g^{ij}|=\begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{vmatrix} \tag{1.7.6}$$

下面来看 g **与**$[\boldsymbol{g}_1\ \boldsymbol{g}_2\ \boldsymbol{g}_3]$**之间的关系。由于**

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{g}_1\ \boldsymbol{g}_2\ \boldsymbol{g}_3]&=\boldsymbol{g}_1\cdot\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_3=(g_{1r}\boldsymbol{g}^r)\cdot(g_{2s}\boldsymbol{g}^s)\times(g_{3t}\boldsymbol{g}^t)=g_{1r}g_{2s}g_{3t}\boldsymbol{g}^r\cdot\boldsymbol{g}^s\times\boldsymbol{g}^t\\&=g_{1r}g_{2s}g_{3t}[\boldsymbol{g}^r\ \boldsymbol{g}^s\ \boldsymbol{g}^t]\end{aligned}$$

式中,r,s,t **是三对哑指标,取遍** $r,s,t=1,2,3$,**然后求和,故上式应该是** $3^3=27$ **项的求和式。但因为混合积中如有两个矢量相同,该混合积就为零,所以上式实际上只是六项求和式。在这六项求和式中都含有公因子**$[\boldsymbol{g}_1\ \boldsymbol{g}_2\ \boldsymbol{g}_3]$,**提出去,剩下部分恰好是行列式**$|g_{ij}|$**的展开式,所以有**

$$[\boldsymbol{g}_1\ \boldsymbol{g}_2\ \boldsymbol{g}_3]=g[\boldsymbol{g}^1\ \boldsymbol{g}^2\ \boldsymbol{g}^3] \tag{1.7.7}$$

上式两边乘以$[\boldsymbol{g}_1\ \boldsymbol{g}_2\ \boldsymbol{g}_3]$,**利用式**(1.7.4),**得**

$$[\boldsymbol{g}_1\ \boldsymbol{g}_2\ \boldsymbol{g}_3]^2=g \tag{1.7.8}$$

由此式知 $g>0$。**这和前面讲到的矩阵**$[g_{ij}]$**正定、所以行列式** $g=|g_{ij}|>0$ **是一致的。现选定协变基矢量** $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$, $\boldsymbol{g}_3$ **构成右手系,则**$[\boldsymbol{g}_1\ \boldsymbol{g}_2\ \boldsymbol{g}_3]>0$,**从而上式开方取算术根,得**

$$[\boldsymbol{g}_1\ \boldsymbol{g}_2\ \boldsymbol{g}_3]=\sqrt{g} \tag{1.7.9}$$

若在式(1.7.7)**的两端乘以**$[\boldsymbol{g}^1\ \boldsymbol{g}^2\ \boldsymbol{g}^3]$,**同样利用式**(1.7.4),**可得**

$$[\boldsymbol{g}^1\ \boldsymbol{g}^2\ \boldsymbol{g}^3]^2=\frac{1}{g} \tag{1.7.10}$$

只要 $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$, $\boldsymbol{g}_3$ **构成右手系,则逆变基矢量** $\boldsymbol{g}^1$, $\boldsymbol{g}^2$, $\boldsymbol{g}^3$ **也构成右手系,从而**

$$[\boldsymbol{g}^1\ \boldsymbol{g}^2\ \boldsymbol{g}^3]=\frac{1}{\sqrt{g}} \tag{1.7.11}$$

下面把这一结果加以推广。对基矢量的任意组合,定义下述两组量:

$$\varepsilon_{ijk}=[\boldsymbol{g}_i\ \boldsymbol{g}_j\ \boldsymbol{g}_k]=\begin{cases}\sqrt{g}, & \text{当 } i,j,k \text{ 为偶排列}\\ -\sqrt{g}, & \text{当 } i,j,k \text{ 为奇排列}\\ 0, & \text{其余情况}\end{cases} \tag{1.7.12a}$$

$$\varepsilon^{ijk}=[\boldsymbol{g}^i\ \boldsymbol{g}^j\ \boldsymbol{g}^k]=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{g}}, & \text{当 } i,j,k \text{ 为偶排列}\\ -\dfrac{1}{\sqrt{g}}, & \text{当 } i,j,k \text{ 为奇排列}\\ 0, & \text{其余情况}\end{cases} \tag{1.7.12b}$$

现在来证明 ε_{ijk} 和 ε^{ijk} 是同一个三阶张量的协变分量和逆变分量。这个三阶张量称为 Eddington 张量或置换张量(permutation tensor),记作 $\boldsymbol{\varepsilon}$。为此,考察坐标变换。设新坐标系 $x^{i'}$ 下的协变基矢量和逆变基矢量分别是 $\boldsymbol{g}_{i'}$ 和 $\boldsymbol{g}^{i'}$,满足新老基矢量之间的转换关系 $\boldsymbol{g}_{i'}=\beta^j_{i'}\boldsymbol{g}_j$ 和 $\boldsymbol{g}^{i'}=\beta^{i'}_j\boldsymbol{g}^j$。按定义,在新坐标系下,有

$$\varepsilon_{i'j'k'}=[\boldsymbol{g}_{i'}\boldsymbol{g}_{j'}\boldsymbol{g}_{k'}]=\beta^i_{i'}\beta^j_{j'}\beta^k_{k'}[\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}_k]=\beta^i_{i'}\beta^j_{j'}\beta^k_{k'}\varepsilon_{ijk}$$

这就证明了 ε_{ijk} 满足张量的定义,并且,它们是三阶张量的协变分量。同理可得

$$\varepsilon^{i'j'k'}=[\boldsymbol{g}^{i'}\boldsymbol{g}^{j'}\boldsymbol{g}^{k'}]=\beta^{i'}_i\beta^{j'}_j\beta^{k'}_k[\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k]=\beta^{i'}_i\beta^{j'}_j\beta^{k'}_k\varepsilon^{ijk}$$

从而证明了 ε^{ijk} 也满足张量的定义,并且,它们是三阶张量的逆变分量。此外,由于

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}&=\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_j\times\boldsymbol{g}_k=(g_{ir}\boldsymbol{g}^r)\cdot(g_{js}\boldsymbol{g}^s)\times(g_{kt}\boldsymbol{g}^t)=g_{ir}g_{js}g_{kt}\boldsymbol{g}^r\cdot\boldsymbol{g}^s\times\boldsymbol{g}^t\\&=g_{ir}g_{js}g_{kt}\varepsilon^{rst}\end{aligned}$$

就是说,ε_{ijk} 可以通过 ε^{rst} 下降指标而得到。这就证明了 ε_{ijk} 和 ε^{ijk} 是同一个三阶张量的协变分量和逆变分量。当然,根据指标的升降规律,可以写出 Eddington 张量的六种混变分量,但它们没有实用价值,所以并不使用。Eddington 张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的实体形式是

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k=\varepsilon^{ijk}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}_k \tag{1.7.13}$$

由 ε_{ijk} 的定义式(1.7.12)可见,在其三个指标中,任意交换其中两个的位置,ε_{ijk} 就会改变符号。对于 ε^{ijk} 也是同样情况。这说明,置换张量关于任两个指标是反对称的。

利用 Eddington 张量,可以表示矢量的叉积(也称矢量积或矢积)和混合积。设有三个矢量:

$$\boldsymbol{u}=u^i\boldsymbol{g}_i=u_i\boldsymbol{g}^i,\quad \boldsymbol{v}=v^i\boldsymbol{g}_i=v_i\boldsymbol{g}^i,\quad \boldsymbol{w}=w^i\boldsymbol{g}_i=w_i\boldsymbol{g}^i$$

现计算叉积 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$。设 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}=a^i\boldsymbol{g}_i=a_i\boldsymbol{g}^i$,则有

$$a_i=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{g}_i=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g}_i=(u^j\boldsymbol{g}_j)\times(v^k\boldsymbol{g}_k)\cdot\boldsymbol{g}_i=u^jv^k[\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}_k]=\varepsilon_{ijk}u^jv^k \tag{1.7.14a}$$

$$a^i=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{g}^i=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g}^i=(u_j\boldsymbol{g}^j)\times(v_k\boldsymbol{g}^k)\cdot\boldsymbol{g}^i=u_jv_k[\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k]=\varepsilon^{ijk}u_jv_k \tag{1.7.14b}$$

写成实体形式就是

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\varepsilon_{ijk}u^jv^k\boldsymbol{g}^i=\varepsilon^{ijk}u_jv_k\boldsymbol{g}_i \tag{1.7.15}$$

特别地,对于协变基矢量和逆变基矢量,分别有

$$\boldsymbol{g}_i\times\boldsymbol{g}_j=\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{g}^k \tag{1.7.16a}$$

和

$$\boldsymbol{g}^i\times\boldsymbol{g}^j=\varepsilon^{ijk}\boldsymbol{g}_k \tag{1.7.16b}$$

这个结果可以认为是式(1.7.1)的推广。

再来看三个矢量的混合积,有

$$[\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w}]=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}=(u^i\boldsymbol{g}_i)\cdot(v^j\boldsymbol{g}_j)\times(w^k\boldsymbol{g}_k)=u^iv^jw^k[\boldsymbol{g}_i\ \boldsymbol{g}_j\ \boldsymbol{g}_k]=\varepsilon_{ijk}u^iv^jw^k \quad (1.7.17a)$$

同理有

$$[\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w}]=\varepsilon^{ijk}u_iv_jw_k \quad (1.7.17b)$$

要说明的是,在混合积的定义式中,并不需要用圆括号来表示先做叉积,即不必把 $[\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w}]$ 写成 $\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})$,因为不会使读者产生误解,似乎会先做 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的点积。点积 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ 是标量,标量和矢量 $\boldsymbol{w}$ 是无法做叉积的。

由上式可以看出混合积的一个重要性质。事实上,式(1.7.17)说明,当交换混合积 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}$ 中的任何两个因子时,必须交换 ε_{ijk} 或 ε^{ijk} 中相应的下标。例如,交换 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 后混合积成为

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{v}=\varepsilon_{ikj}u^iw^kv^j=-\varepsilon_{ijk}u^iv^jw^k=-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w} \quad (1.7.18)$$

由此可以看出,顺序交换各因子,结果不变。逆序交换各因子,结果反号。就是

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u}=\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w}=-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u} \quad (1.7.19)$$

此外,因为点积的两个因子可以交换位置,所以

$$\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} \quad (1.7.20)$$

把这个式子和式(1.7.19)相比,得到

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} \quad (1.7.21)$$

这说明,把叉号和点号放在哪里无关紧要,有关系的只是各个因子的顺序。当它们形成右手系时(更确切地说,是和定义叉积的参照标架 $\boldsymbol{g}_i$ 相同的“手系”时),这个混合积为正。式(1.7.19)的前三个式子还说明了混合积的如下性质:

$$[\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w}]=[\boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w}\ \boldsymbol{u}]=[\boldsymbol{w}\ \boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}] \quad (1.7.22)$$

下面给出混合积的坐标计算式。改写式(1.7.17),可以看到,虽然 ε_{ijk} 和 ε^{ijk} 各有 27 个分量,但只有六个不为零,所以将式(1.7.17)右端的求和展开后都只包含六项。具体写出来就是

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w}]&=\varepsilon_{123}u^1v^2w^3+\varepsilon_{231}u^2v^3w^1+\varepsilon_{312}u^3v^1w^2+\varepsilon_{132}u^1v^3w^2+\varepsilon_{321}u^3v^2w^1+\varepsilon_{213}u^2v^1w^3\\&=\sqrt{g}(u^1v^2w^3+u^2v^3w^1+u^3v^1w^2-u^1v^3w^2-u^3v^2w^1-u^2v^1w^3)\end{aligned}$$

上式括号中的六项正好是一个行列式的展开式,故有

$$[\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w}]=\sqrt{g}\begin{vmatrix}u^1 & u^2 & u^3\\ v^1 & v^2 & v^3\\ w^1 & w^2 & w^3\end{vmatrix} \quad (1.7.23a)$$

同样，可把式(1.7.17b)改写成

$$[\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w}]=\frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \tag{1.7.23b}$$

读者可以把这个结果和过去在线性代数中学到的三个矢量的混合积的坐标计算式加以比较。可以发现，二者的形式是类似的，只是这里多了一个系数$\sqrt{g}$或$\frac{1}{\sqrt{g}}$。这是因为，线性代数的计算式仅适用于笛卡尔直角坐标系，而这里的表达式(1.7.23)适用于任意曲线坐标系。对于笛卡尔直角坐标系，$\sqrt{g}=1$，所以，线性代数中的计算式是本结果的特例。

下面证明一个有用的矢量等式。考虑一组矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$，把它用矢量的协变分量表示，即用式(1.7.23b)表示：

$$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=\frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

把混合积式(1.7.23a)与之相乘，得

$$[\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w}][\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=\begin{vmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} u^i a_i & u^i b_i & u^i c_i \\ v^i a_i & v^i b_i & v^i c_i \\ w^i a_i & w^i b_i & w^i c_i \end{vmatrix}$$

利用矢量的点积公式，即得

$$[\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w}][\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=\begin{vmatrix} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{c} \end{vmatrix} \tag{1.7.24}$$

这个矢量等式与坐标无关。换句话说，它适用于任意曲线坐标系。

作为特例，考虑 $\varepsilon^{ijk}=[\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k]$和 $\varepsilon_{rst}=[\boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}_s\boldsymbol{g}_t]$的乘积，并利用 $\boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{g}_j=\delta^i_j$，就可以得到一个有用的公式：

$$\begin{vmatrix} \delta^i_r & \delta^i_s & \delta^i_t \\ \delta^j_r & \delta^j_s & \delta^j_t \\ \delta^k_r & \delta^k_s & \delta^k_t \end{vmatrix}=\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{rst}=\delta^{ijk}_{rst} \tag{1.7.25}$$

由上式定义的 δ^{ijk}_{rst} 称为广义 Kronecker δ。显然，当 i,j,k 和 r,s,t 都是偶排列或都是奇排列时，$\delta^{ijk}_{rst}=1$；当 i,j,k 和 r,s,t 中一为偶排列、另一为奇排列时，$\delta^{ijk}_{rst}=-1$；其余情况，$\delta^{ijk}_{rst}=0$。

如果使广义 Kronecker δ 的上、下指标中有一对相同，一般令第一对指标相同，从而使该指标成为哑指标，则由式(1.7.25)可得

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{ist}=\delta^j_s\delta^k_t-\delta^j_t\delta^k_s=\delta^{jk}_{st} \tag{1.7.26}$$

上式右端的 δ^{jk}_{st} 也是广义 Kronecker δ。这个等式很有用。如果令上式中的第二对指标也成为哑指标，则得

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{ijt}=3\delta^{k}_{t}-\delta^{k}_{t}=2\delta^{k}_{t} \tag{1.7.27}$$

如果三对指标全是哑指标，则得

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{ijk}=2\delta^{k}_{k}=6 \tag{1.7.28}$$

最后要指出，两个矢量的叉积是一个矢量。可以证明，其绝对值等于以这两个矢量为邻边的平行四边形的面积，而指向该面积的法线方向。换句话说，两个矢量的叉积可以标识一个面积的大小和方向（用法线方向表示）。三个矢量的混合积是一个标量。可以证明，它表示以这三个矢量为邻边的平行六面体的体积。式（1.7.9）说明，$\sqrt{g}$ 可以理解为以三个协变基矢量为棱的平行六面体的体积。在连续介质力学中，面元和体元是非常重要的概念，它们分别用位置矢量的微小增量的叉积和混合积表示。

1.8 Ricci 符号和行列式

为了今后形式运算的方便，定义 Ricci 符号或称置换符号：

$$e^{ijk}\text{ 或 }e_{ijk}=\begin{cases}1, & \text{当 } i,j,k \text{ 为偶排列}\\ -1, & \text{当 } i,j,k \text{ 为奇排列}\\ 0, & \text{其余情况}\end{cases} \tag{1.8.1}$$

置换符号是与任何坐标系都无关的一个符号，不是张量。不要与置换张量相混淆。可以用置换符号来展开三级行列式，令

$$a=\begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3\\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3\\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3\end{vmatrix} \tag{1.8.2}$$

可以看出，a 实际是所有乘积 $\pm a^i_1 a^j_2 a^k_3$ 的和，其中，i,j,k 都不相等。当 i,j,k 为偶排列时取正号，当 i,j,k 为奇排列时取负号。于是，该行列式可以表示成

$$a=a^i_1 a^j_2 a^k_3 e_{ijk} \tag{1.8.3a}$$

或者换一种形式，写成

$$a=a^1_r a^2_s a^3_t e^{rst} \tag{1.8.3b}$$

如果在式（1.8.3a）中的各下标之间作任一置换，例如，写作 $e_{ijk}a^i_2 a^j_1 a^k_3$，这就相当于把行列式的两列互换，结果行列式之值反号，等于 $-a$。这种性质可以用下述形式表示：

$$ae_{lmn}=a^i_l a^j_m a^k_n e_{ijk} \tag{1.8.4a}$$

类似地，由式（1.8.3b）可得

$$ae^{ijk}=a^i_l a^j_m a^k_n e^{lmn} \tag{1.8.4b}$$

以上结果是针对式（1.8.2）中的行列式 a 的，下边考察更一般的行列式：

$$A=\begin{vmatrix} a_r^i & a_s^i & a_t^i \\ a_r^j & a_s^j & a_t^j \\ a_r^k & a_s^k & a_t^k \end{vmatrix} \tag{1.8.5}$$

显然,当 $i,j,k=r,s,t=1,2,3$ 时,就有 $A=a$,并且由于这两个序列之中的任一置换都会改变其符号,所以

$$A=ae^{ijk}e_{rst} \tag{1.8.6}$$

上述结果式(1.8.3)和式(1.8.4)容易推广到其他形式的行列式上。例如

$$a=|a^{pq}|=a^{i1}a^{j2}a^{k3}e_{ijk}=a^{1l}a^{2m}a^{3n}e_{lmn} \tag{1.8.3c}$$

$$ae^{lmn}=a^{il}a^{jm}a^{kn}e_{ijk} \tag{1.8.4c}$$

和

$$a=|a_{pq}|=a_{i1}a_{j2}a_{k3}e^{ijk}=a_{1l}a_{2m}a_{3n}e^{lmn} \tag{1.8.3d}$$

$$ae_{lmn}=a_{il}a_{jm}a_{kn}e^{ijk} \tag{1.8.4d}$$

利用式(1.8.3a)和式(1.8.4a)可以证明以下定理,即已知两个方阵 A 和 B,它们的积 $C=AB$ 的行列式等于 A 和 B 的行列式的积。证明只限于 3×3 方阵,但如果增加 Ricci 符号的指标数目(即定义广义 Ricci 符号),就不难证明此结论适用于任意阶方阵。证明如下:

设 $A=[a_i^{\cdot j}]$,$B=[b_j^{\cdot k}]$。当然,它们的积 $C=[c_i^{\cdot k}]$有元素 $c_i^{\cdot k}=a_i^{\cdot j}b_j^{\cdot k}$。用此式以及式(1.8.3a)和式(1.8.4a),可以写出 A 和 B 的行列式:

$$|A|=a=a_1^{\cdot l}a_2^{\cdot m}a_3^{\cdot n}e_{lmn}$$

$$|B|=b \quad 且 \quad e_{lmn}b=b_l^{\cdot i}b_m^{\cdot j}b_n^{\cdot k}e_{ijk}$$

它们的积是

$$\begin{aligned} ab &=a_1^{\cdot l}a_2^{\cdot m}a_3^{\cdot n}e_{lmn}b \\ &=a_1^{\cdot l}b_l^{\cdot i}a_2^{\cdot m}b_m^{\cdot j}a_3^{\cdot n}b_n^{\cdot k}e_{ijk} \\ &=c_1^{\cdot i}c_2^{\cdot j}c_3^{\cdot k}e_{ijk}=c \end{aligned} \tag{1.8.7}$$

证毕。

可以看出,置换符号和置换张量差一个因子,即有关系:

$$\varepsilon^{ijk}=\frac{1}{\sqrt{g}}e^{ijk} \quad 和 \quad \varepsilon_{ijk}=\sqrt{g}e_{ijk} \tag{1.8.8}$$

由此可得

$$e^{ijk}e_{lmn}=\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{lmn} \tag{1.8.9}$$

因为 ε_{ijk} 和 ε^{ijk} 是张量,而 Ricci 符号 e_{ijk} 和 e^{ijk} 没有张量性质,所以我们希望将上述行列式的展开公式改用置换张量写出。做法如下:以$\sqrt{g}$乘式(1.8.4a)的两边,用$\sqrt{g}$除式(1.8.4b)的

两边，利用式(1.8.8)，就得到

$$a\varepsilon_{lmn}=a_l^i a_m^j a_n^k \varepsilon_{ijk} \tag{1.8.10a}$$

$$a\varepsilon^{ijk}=a_l^i a_m^j a_n^k \varepsilon^{lmn} \tag{1.8.10b}$$

用 ε^{lmn} 乘式(1.8.10a)的两端，利用式(1.7.28)，可以得到一个重要的等式：

$$a\varepsilon_{lmn}\varepsilon^{lmn}=6a=a_l^i a_m^j a_n^k \varepsilon_{ijk}\varepsilon^{lmn} \tag{1.8.11}$$

又，利用式(1.8.9)，可以把式(1.8.6)改写成

$$A=a\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{rst} \tag{1.8.12}$$

作为式(1.8.11)的一个应用，我们来看行列式

$$\begin{vmatrix} \delta_r^i & \delta_s^i & \delta_t^i \\ \delta_r^j & \delta_s^j & \delta_t^j \\ \delta_r^k & \delta_s^k & \delta_t^k \end{vmatrix}$$

的计算。显然，它等于

$$\begin{vmatrix} \delta_r^i & \delta_s^i & \delta_t^i \\ \delta_r^j & \delta_s^j & \delta_t^j \\ \delta_r^k & \delta_s^k & \delta_t^k \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \delta_1^1 & \delta_2^1 & \delta_3^1 \\ \delta_1^2 & \delta_2^2 & \delta_3^2 \\ \delta_1^3 & \delta_2^3 & \delta_3^3 \end{vmatrix}\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{rst}$$

其中九个量 δ_j^i 是单位矩阵的元素，它们的行列式等于 1，即

$$\begin{vmatrix} \delta_1^1 & \delta_2^1 & \delta_3^1 \\ \delta_1^2 & \delta_2^2 & \delta_3^2 \\ \delta_1^3 & \delta_2^3 & \delta_3^3 \end{vmatrix}=1$$

所以有

$$\begin{vmatrix} \delta_r^i & \delta_s^i & \delta_t^i \\ \delta_r^j & \delta_s^j & \delta_t^j \\ \delta_r^k & \delta_s^k & \delta_t^k \end{vmatrix}=\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{rst}=\delta_{rst}^{ijk}$$

这个结果已经在式(1.7.25)中得到了。

下面来看度量张量作为一个矩阵的行列式 $g=|g_{ij}|$，见式(1.7.5)。关于 g，有一个有趣现象。首先，根据度量张量的协变分量的定义式(1.6.2a)，不难得到，当把 g_{ij} 变换到另一个坐标系时，有(见式(1.6.6a))

$$g_{i'j'}=g_{ij}\beta_{i'}^{i}\beta_{j'}^{j} \tag{1.8.13}$$

两边取行列式，得到

$$g'=|g_{i'j'}|=|g_{ij}||\beta_{i'}^{i}||\beta_{j'}^{j}|=g|\beta_{i'}^{i}||\beta_{j'}^{j}| \tag{1.8.14}$$

这个变换式指出，尽管 g 是一个标量(零阶张量)，但它在两个坐标系中却是不同的。这样

的标量叫做伪标量(pseudoscalar)。g 是一个伪标量。关于伪标量,本书不作讨论。

1.9 张量的代数运算

张量同矢量和标量一样,也可以进行代数运算。叙述如下:

(1) 相等

如果两个同阶张量 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{S}$ 在同一坐标系中的同类型分量(例如,协变分量、逆变分量或同一种混变分量)对应相等,就称张量 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{S}$ 相等,记为 $\mathbf{T}=\mathbf{S}$。实际上,可以证明,只要有一种类型的分量一一对应相等,则其他所有类型的分量也将一一对应相等。

(2) 加(减)

如 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{S}$ 是同阶张量,将它们在同一坐标系下的同类型分量(如协变分量、逆变分量和混变分量)一一相加(减),所得结果称为 $\mathbf{T}$ 与 $\mathbf{S}$ 的和(差),记为 $\mathbf{T}+\mathbf{S}(\mathbf{T}-\mathbf{S})$,例如

$$\mathbf{T}\pm\mathbf{S}=T^{i\cdot k}_{\cdot j\cdot}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}_k\pm S^{i\cdot k}_{\cdot j\cdot}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}_k=(T^{i\cdot k}_{\cdot j\cdot}\pm S^{i.k}_{.j.})\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}_k$$

显然,同阶张量的和(差)仍是同阶张量。

(3) 并乘

张量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的并乘记作 $\mathbf{AB}$。例如设

$$\mathbf{A}=A^{ij}_{..kl}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l \tag{1.9.1a}$$

$$\mathbf{B}=B^{rs}_{..t}\boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}_s\boldsymbol{g}^t \tag{1.9.1b}$$

则并乘 $\mathbf{AB}$ 定义为

$$\mathbf{AB}=(A^{ij}_{..kl}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l)(B^{rs}_{..t}\boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}_s\boldsymbol{g}^t)=A^{ij}_{..kl}B^{rs}_{..t}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l\boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}_s\boldsymbol{g}t \tag{1.9.2}$$

这里,$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是同一个坐标系下的两个张量,可以不同阶,可以不同类型(上例中的两个张量为不同的混变张量。也可以一为协变分量,另一为逆变分量,等等)。并乘的结果也是一个张量,其阶数为 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的阶数之和。张量的并乘与次序有关,一般地

$$\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA} \tag{1.9.3}$$

并乘也称张量乘,也记作 $\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}$。可以看出,并乘实际上就是两个求和式相乘,只不过在逐项相乘时保持基矢量并乘的前后次序不变。基矢量并乘也称为并基。

特别地,如果两并乘张量中有一个是零阶张量(即标量),那么,并乘就蜕化为通常意义下的数乘。如果两个张量都是一阶张量(即矢量),那么,这就是前边讲过的并矢。

作为例子可以看出,式(1.7.25)中引入的广义 Kronecker δ 就是两个 Eddington 张量的并乘,所以是一个 6 阶张量。

(4) 缩并

在张量的实体表达式中,将并基中的两个基矢量进行点积(一般是一个协变基矢量和一个逆变基矢量进行点积),这一运算称为张量的缩并。其结果是,张量分量中相应的两个指标变成一对哑指标。也称为指标缩并。例如,将式(1.9.1a)中的 4 阶张量中的第 2 个、第 4 个基矢量进行点积,或直接将分量中的第二、四指标进行缩并,其结果如下:

$$\overset{\ulcorner\cdot\urcorner}{\mathbf{A}}=A^{ij}_{..kl}\boldsymbol{g}_i\ \overset{\ulcorner\quad\bullet\quad\urcorner}{\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l}=A^{ij}_{..kl}\delta^{\ l}_{j}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^k=A^{ij}_{..kj}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^k \tag{1.9.4}$$

可以看出，张量经缩并运算后得到一个新张量。新张量的阶数比原张量低二阶。张量缩并的一个例子是式(1.7.26)中的四阶张量 $\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{ist}$。它是将 6 阶张量 $\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{rst}$ 的第一指标和第四指标进行缩并后得到的一个四阶张量。

(5) 点积(乘)

两个张量的点积规定为，先将这两个张量进行并乘，再把前一个张量的并基中的最后一个基矢量和后一个张量的并基中的第一个基矢量进行点积。其结果就是前一个张量分量中的最后一个指标和后一个张量分量中的第一个指标进行缩并。以式(1.9.1)中的四阶张量 $\mathbf{A}$ 和三阶张量 $\mathbf{B}$ 的点积为例，如下：

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}&=(A^{ij}_{\cdot\cdot kl}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l)\cdot(B^{rs}_{\cdot\cdot t}\boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}_s\boldsymbol{g}^t)=A^{ij}_{\cdot\cdot kl}B^{rs}_{\cdot\cdot t}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k(\boldsymbol{g}^l\cdot\boldsymbol{g}_r)\boldsymbol{g}_s\boldsymbol{g}^t\\&=A^{ij}_{\cdot\cdot kl}B^{rs}_{\cdot\cdot t}\delta^l_r\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}_s\boldsymbol{g}^t=A^{ij}_{\cdot\cdot kl}B^{ls}_{\cdot\cdot t}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}_s\boldsymbol{g}^t\end{aligned}\tag{1.9.5}$$

也可以直接将前一个张量分量 $A^{ij}_{\cdot\cdot kl}$ 中的最后一个指标(协变指标 l)和后一个张量分量 $B^{rs}_{\cdot\cdot t}$ 中的第一个指标(逆变指标 r)进行缩并而很快写出结果。

显然，当两个张量都是矢量时(一阶张量)，以上运算就是矢量的点积，它们是可以交换次序的。但是，只要其中有一个是高于一阶的张量，则点积就是不可以交换次序的。

(6) 双点积(乘)

两个张量的双点积规定为，先把两个张量进行并乘，再将前一个张量的并基中的最后两个基矢量和后一个张量的并基中的前两个基矢量分别进行点积。其结果就是，前一个张量分量中的最后两个指标和后一个张量分量中的前两个指标分别进行缩并。

双点积有两种形式，一种是前两个基矢量和后两个基矢量按“前前后后”的次序分别进行点积。用符号“ : ”表示。如下例：

$$\begin{aligned}\mathbf{A}:\mathbf{B}&=(A^{ij}_{\cdot\cdot kl}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l):(B^{rs}_{\cdot\cdot t}\boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}_s\boldsymbol{g}^t)=A^{ij}_{\cdot\cdot kl}B^{rs}_{\cdot\cdot t}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l\boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}_s)\boldsymbol{g}^t\\&=A^{ij}_{\cdot\cdot kl}B^{rs}_{\cdot\cdot t}\delta^k_r\delta^l_s\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^t=A^{ij}_{\cdot\cdot kl}B^{kl}_{\cdot\cdot t}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^t\end{aligned}\tag{1.9.6}$$

也可以将前一个张量分量 $A^{ij}_{\cdot\cdot kl}$ 中的最后两个协变指标 k,l 和后一个张量分量 $B^{rs}_{\cdot\cdot t}$ 中的前两个逆变指标 r,s 按“前前后后”的次序进行缩并而直接写出结果。

双点积的第二种形式是将前一个张量的并基中的最后两个基矢量按“里里外外”的次序和后一个张量的并基中的前两个基矢量分别进行点积。用符号“ $\cdot\cdot$ ”表示。也可以将前一个张量分量 $A^{ij}_{\cdot\cdot kl}$ 中的最后两个协变指标 k,l 和后一个张量分量 $B^{rs}_{\cdot\cdot t}$ 中的前两个逆变指标 r,s 按“里里外外”的次序进行缩并而直接写出结果。如下例：

$$\mathbf{A}\cdot\cdot\,\mathbf{B}=(A^{ij}_{\cdot\cdot kl}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l)\cdot\cdot(B^{rs}_{\cdot\cdot t}\boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}_s\boldsymbol{g}^t)=A^{ij}_{\cdot\cdot kl}B^{rs}_{\cdot\cdot\cdot t}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l\boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}_s)\boldsymbol{g}^t=A^{ij}_{\cdot\cdot kl}B^{lk}_{\cdot\cdot t}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^t\tag{1.9.7}$$

读者可以通过基矢量的点积运算来补充中间步骤。

(7) 叉积(乘)，双叉积(乘)和混积

把张量点积式中的点积符号“ · ”用叉积符号“ × ”代替，即得张量的叉积运算式。把张

量双点积式中的符号“：”用“$\overset{\times}{\times}$”代替，即得张量的双叉积式。如果用“$\overset{\times}{\cdot}$”或者“$\overset{\cdot}{\times}$”代替，则得张量的两种混积。

现以二阶张量为例说明上述的各种运算。设

$$\mathbf{A}=A_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j \tag{1.9.8a}$$

$$\mathbf{B}=B_{rs}\boldsymbol{g}^r\boldsymbol{g}^s=B^r_{\cdot s}\boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}^s=B_r^{\cdot s}\boldsymbol{g}^r\boldsymbol{g}_s \tag{1.9.8b}$$

则有叉积（乘）：

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B}&=(A_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j)\times(B_{rs}\boldsymbol{g}^r\boldsymbol{g}^s)=A_{ij}B_{rs}\boldsymbol{g}^i(\boldsymbol{g}^j\times\boldsymbol{g}^r)\boldsymbol{g}^s\\&=A_{ij}B_{rs}\varepsilon^{jrm}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_m\boldsymbol{g}^s\end{aligned} \tag{1.9.9}$$

双叉积（乘）：

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\overset{\times}{\times}\mathbf{B}&=(A_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j)\overset{\times}{\times}(B_{rs}\boldsymbol{g}^r\boldsymbol{g}^s)=A_{ij}B_{rs}(\boldsymbol{g}^i\times\boldsymbol{g}^r)(\boldsymbol{g}^j\times\boldsymbol{g}^s)\\&=A_{ij}B_{rs}\varepsilon^{irm}\varepsilon^{jsn}\boldsymbol{g}_m\boldsymbol{g}_n\end{aligned} \tag{1.9.10}$$

混积：

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\overset{\cdot}{\times}\mathbf{B}&=(A_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j)\overset{\cdot}{\times}(B^r_{\cdot s}\boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}^s)=A_{ij}B^r_{\cdot s}(\boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{g}_r)(\boldsymbol{g}^j\times\boldsymbol{g}^s)\\&=A_{ij}B^r_{\cdot s}\delta^i_r\varepsilon^{jsm}\boldsymbol{g}_m=A_{ij}B^i_{\cdot s}\varepsilon^{jsm}\boldsymbol{g}_m\end{aligned} \tag{1.9.11}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\overset{\times}{\cdot}\mathbf{B}&=(A_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j)\overset{\times}{\cdot}(B_r^{\cdot s}\boldsymbol{g}^r\boldsymbol{g}_s)=A_{ij}B_r^{\cdot s}(\boldsymbol{g}^i\times\boldsymbol{g}^r)(\boldsymbol{g}^j\cdot\boldsymbol{g}_s)\\&=A_{ij}B_r^{\cdot s}\varepsilon^{irm}\delta^j_s\boldsymbol{g}_m=A_{ij}B_r^{\cdot j}\varepsilon^{irm}\boldsymbol{g}_m\end{aligned} \tag{1.9.12}$$

两张量叉乘后，所得张量的阶数是原张量阶数之和减 1；双叉乘时减 2；混积时减 3。读者可以从以上例子中证实。

在以上例子中可以看到，在进行点积运算时，我们总是安排将一个协变基矢量去和一个逆变基矢量进行点积。而在进行叉积的时候，又总是安排协变基矢量和协变基矢量（或者逆变基矢量和逆变基矢量）进行叉积。这主要是为了演示的清晰。如果以上条件得不到满足，则可以利用度量张量将协变基矢量和逆变基矢量进行转换，以使得张量的点积、叉积运算按上面的方式进行。以式(1.9.8)中的张量为例，下述叉乘有

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B}&=(A_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j)\times(B^r_{\cdot s}\boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}^s)=A_{ij}B^r_{\cdot s}\boldsymbol{g}^i(\boldsymbol{g}^j\times\boldsymbol{g}_r)\boldsymbol{g}^s\\&=A_{ij}B^r_{\cdot s}\boldsymbol{g}^i(g_{rt}\boldsymbol{g}^j\times\boldsymbol{g}^t)\boldsymbol{g}^s=A_{ij}B^r_{\cdot s}g_{rt}\varepsilon^{jtm}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_m\boldsymbol{g}^s\end{aligned} \tag{1.9.13}$$

(8) 转置

将一个张量分量中的两个指标交换排列次序，但保持每个指标的协变性或逆变性不变（即保持指标的原有上下位置不变），这一运算步骤称为张量的转置。例如式(1.9.1a)中的张量 $A^{ij}_{\cdot\cdot kl}$ 经第一、三指标交换排列次序后得 $A_{k\cdot\cdot l}^{\cdot ji}$，后者就是前者的转置。如用实体表示，则转置张量的并基次序保持和原张量的并基次序一样。本例中的转置张量是

$$\mathbf{B}=A_{k\cdot\cdot l}^{\cdot ji}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l \tag{1.9.14}$$

其并基中的基矢量的排列次序和原张量式(1.9.1a)中的 A 一样。

(9) 对称化和反对称化

如将一个张量分量中处于同样上下水平的两个指标交换顺序后,该张量保持不变,则称此张量关于这两个指标是对称的。如用实体表示,则配上保持不变的并基就构成了关于这两个指标的对称张量。例如,式(1.9.1a)中的张量 A,说它关于第一,二指标是对称的,只要存在关系

$$A^{ij}_{\cdot\cdot kl}=A^{ji}_{\cdot\cdot kl} \tag{1.9.15a}$$

如用实体表示,可设转置张量

$$\mathbf{B}=A^{ji}_{\cdot\cdot kl}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l \tag{1.9.16}$$

只要存在关系

$$\mathbf{A}=\mathbf{B} \tag{1.9.15b}$$

则称张量 A 是关于第一、二指标的对称张量。

类似地,如果将一个张量分量中处于同样上下水平的两个指标交换次序后该张量反号,则称该张量关于这两个指标是反对称的。如用实体表示,则配上保持不变的并基就构成了关于这两个指标的反对称张量。例如,式(1.9.1a)中的张量 A,说它关于第三,四指标是反对称的,只要存在关系

$$A^{ij}_{\cdot\cdot kl}=-A^{ij}_{\cdot\cdot lk} \tag{1.9.17a}$$

如用实体表示,可设转置张量

$$\mathbf{B}=A^{ij}_{\cdot\cdot lk}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l \tag{1.9.18}$$

只要存在关系

$$\mathbf{A}=-\mathbf{B} \tag{1.9.17b}$$

则称张量 A 是关于第三、四指标的对称张量。

把任一张量 A 的分量指标中的某两个指标交换次序后,得到张量 B,并按下式构造新张量

$$\mathbf{T}=\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \tag{1.9.19}$$

则 T 必然对于这两个指标具有对称性。这种运算称为张量 A 的对称化。

类似地,如按下式构造新张量:

$$\mathbf{S}=\frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{B}) \tag{1.9.20}$$

则 S 必然对于这两个指标具有反对称性。这种运算称为张量 A 的反对称化。

根据定义不难看出,度量张量 G 是对称张量,而三阶的 Eddington 张量对于任意两个指标都是反对称张量。

容易证明,对称性和反对称性与坐标系的取法无关。就是说,若在某一坐标系下已经证

实一个张量是对称的或反对称的，则在其他任何坐标系中，该张量都将保持这一性质不变。

（10）商法则

在 1.4 节中曾经介绍了一种构造张量的方法。当时举例说，有九个量 T_{ij}，如果它与任意一个一阶张量（矢量）点乘后总成为一个一阶张量（矢量），则这九个量就是一个（二阶）张量。见式（1.4.3）—式（1.4.7）。实际上，这里表述了所谓的商法则。

商法则的一般表述是：设一组数的集合 T 含有 p 个指标，每个指标的取值范围是 1，2，3。如果它的其中 $q(q<p)$个指标与任意一个 q 阶张量的 q 个指标作 q 次缩并后成为一个 $p-q$阶张量，则这组数 T 必为 p 阶张量。

例 1.1 已知一斜角坐标系的协变基是

$$\boldsymbol{g}_1=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{g}_2=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{g}_3=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$$

其中，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是笛卡尔直角坐标系的单位基矢量。求出它的逆变基 $\boldsymbol{g}^1,\boldsymbol{g}^2,\boldsymbol{g}^3$ 的笛卡尔坐标表达式。

［解法 1］ 利用 $\boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{g}_j=\delta^i_j$，设 $\boldsymbol{g}^1=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$，则有

$$\boldsymbol{g}^1\cdot\boldsymbol{g}_1=2a+c=1,\ \boldsymbol{g}^1\cdot\boldsymbol{g}_2=a+b+c=0,\ \boldsymbol{g}^1\cdot\boldsymbol{g}_3=a+2b+c=0$$

从而解出
$$a=\frac{1}{3},\ b=-\frac{2}{3},\ c=\frac{1}{3},$$

即
$$\boldsymbol{g}^1=\frac{1}{3}(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$$

同理，可以求出
$$\boldsymbol{g}^2=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}),\ \boldsymbol{g}^3=\frac{1}{3}(-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})$$

［解法 2］ 先利用 $g_{ij}=\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_j$ 求出度量张量的协变分量。写成矩阵就是

$$[g_{ij}]=\begin{bmatrix}5&3&5\\3&3&6\\5&6&14\end{bmatrix}$$

再利用关系 $g^{ik}g_{kj}=\delta^i_j$ 可求出度量张量的逆变分量，写成矩阵就是

$$[g^{ij}]=[g_{ij}]^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-4&1\\-4&15&-5\\1&-5&2\end{bmatrix}$$

最后，利用关系式 $\boldsymbol{g}^i=g^{ij}\boldsymbol{g}_j$ 可以求出逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^i$ 如下：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{g}^1\\\boldsymbol{g}^2\\\boldsymbol{g}^3\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-4&1\\-4&15&-5\\1&-5&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{g}_1\\\boldsymbol{g}_2\\\boldsymbol{g}_3\end{bmatrix}$$

所得结果和第一种方法相同。

［解法 3］ 利用

$$\boldsymbol{g}^1=\frac{\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_3}{[\boldsymbol{g}_1\ \boldsymbol{g}_2\ \boldsymbol{g}_3]},\quad \boldsymbol{g}^2=\frac{\boldsymbol{g}_3\times\boldsymbol{g}_1}{[\boldsymbol{g}_1\ \boldsymbol{g}_2\ \boldsymbol{g}_3]},\quad \boldsymbol{g}^3=\frac{\boldsymbol{g}_1\times\boldsymbol{g}_2}{[\boldsymbol{g}_1\ \boldsymbol{g}_2\ \boldsymbol{g}_3]}$$

其中
$$[\boldsymbol{g}_1\ \boldsymbol{g}_2\ \boldsymbol{g}_3]^2=g=|g_{ij}|=\begin{vmatrix}5&3&5\\3&3&6\\5&6&14\end{vmatrix}=9$$

故
$$\boldsymbol{g}^1=\frac{1}{3}\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_3=\frac{1}{3}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&1&1\\1&2&3\end{vmatrix}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$$

其余 $\boldsymbol{g}^2,\boldsymbol{g}^3$ 的表达式都与方法 1 的结果相同。

例 1.2 对于上题给出的基矢量,已知矢量 $\boldsymbol{a}=a^i\boldsymbol{g}_i=a_i\boldsymbol{g}^i$ 的逆变分量:$a^1=1,a^2=1,a^3=-1$,求协变分量 a_i 及矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模。

[解] 利用关系式
$$a_1=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{g}_i=a^j\boldsymbol{g}_j\cdot\boldsymbol{g}_i=a^jg_{ij}$$

其中的度量张量 g_{ij} 已在上题中解出。上式用矩阵表示,有
$$\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&3&5\\3&3&6\\5&6&14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\0\\-3\end{bmatrix}$$

矢量的模
$$|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=(a^i\boldsymbol{g}_i)\cdot(a_j\boldsymbol{g}_j)=a^ia_i=1\times3+1\times0+(-1)\times(-3)=6$$

所以
$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6}$$

例 1.3 用指标法求证以下关于矢量的拉格朗日恒等式。
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$$

[证] 令 $\boldsymbol{a}=a_i\boldsymbol{g}^i,\ \boldsymbol{b}=b_j\boldsymbol{g}^j,\ \boldsymbol{c}=c^k\boldsymbol{g}_k,\ \boldsymbol{d}=d^l\boldsymbol{g}_l$

则
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})&=(a_ib_j\varepsilon^{ijm}\boldsymbol{g}_m)\cdot(c^kd^l\varepsilon_{kln}\boldsymbol{g}^n)=a_ib_jc^kd^l\varepsilon^{ijm}\varepsilon_{klm}\\&=a_ib_jc^kd^l(\delta^i_k\delta^j_l-\delta^i_l\delta^j_k)=a_ic^ib_jd^j-a_id^ib_jc^j\\&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\end{aligned}$$

证毕。

习题一

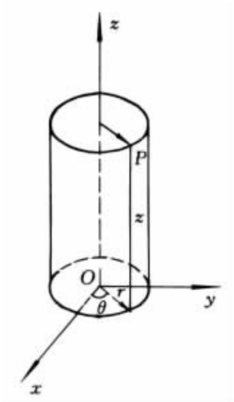
1.1 已知一斜角坐标系的协变基是 $\boldsymbol{g}_1=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{g}_2=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{g}_3=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$,其中,$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是笛卡尔直角坐标系的单位基矢量(以后同此,不再另作说明)。

(1) 求出它的逆变基 $\boldsymbol{g}^1,\boldsymbol{g}^2,\boldsymbol{g}^3$ 的直角坐标表达式;

(2) 求原点到斜角坐标为(1,1,1)点的距离;

(3) 求斜角坐标为(1,1,1)和(1,2,3)两点间的距离。

1.2 对于上题给出的基矢量,已知矢量 $\boldsymbol{a}=a^i\boldsymbol{g}_i=a_i\boldsymbol{g}^i$ 的一种分量,求另一种分量,并求矢量的模。



题 1.3 图

（1）$a_1=1$，$a_2=-1$，$a_3=1$；

（2）$a_1=2$，$a_2=3$，$a_3=4$；

（3）$a^1=1$，$a^2=1$，$a^3=1$；

（4）$a^1=2$，$a^2=0$，$a^3=1$。

1.3　设有圆柱坐标系（如图），令 $r=x^1,\theta=x^2,z=x^3$，求：

（1）协变基 $\boldsymbol{g}_i$ 用 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的表达式，并画出简图；

（2）求逆变基 $\boldsymbol{g}^i$，说明 $\boldsymbol{g}_i$ 和 $\boldsymbol{g}^i$ 的大小和方向有何关系。

1.4　设有球坐标（如图），令 $r=x^1,\theta=x^2,\varphi=x^3$，求：

（1）协变基 $\boldsymbol{g}_i$ 通过 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的表达式，并画出简图；

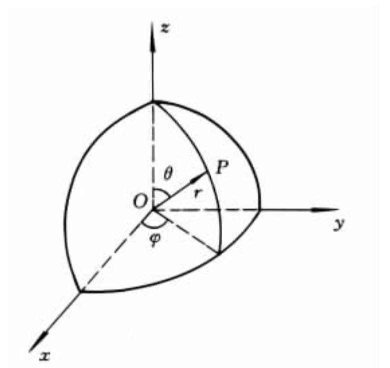
（2）求逆变基 $\boldsymbol{g}^i$，说明 $\boldsymbol{g}_i$ 和 $\boldsymbol{g}^i$ 的大小和方向有何关系。

1.5　根据题 1.3 的结果写出圆柱坐标系中一点（$r=2,\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$z=1$）处的 $\boldsymbol{g}_i$ 和 $\boldsymbol{g}^i$。若已知在该点处有两个矢量

$$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{g}_1+3\boldsymbol{g}_2+3\boldsymbol{g}_3 \quad 和 \quad \boldsymbol{b}=\boldsymbol{g}_1-\boldsymbol{g}_2+2\boldsymbol{g}_3$$

（a）求 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的协变分量，并求矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的长度以及 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 之间的夹角；

（b）直接写出 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 在笛卡尔直角坐标系中的表达式，并验证上述结果。



题 1.4 图

1.6　已知在圆柱坐标系（$x^1=r,x^2=\theta,x^3=z$）中，线元矢量为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{g}_1\mathrm{d}x^1+\boldsymbol{g}_2\mathrm{d}x^2+\boldsymbol{g}_3\mathrm{d}x^3$$

试证明：不存在坐标系 x_i，使得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{g}^1\mathrm{d}x_1+\boldsymbol{g}^2\mathrm{d}x_2+\boldsymbol{g}^3\mathrm{d}x_3$$

成立。

1.7　已知坐标变换为

$$x^{1'}=x^1+2x^2-x^3,\ x^{2'}=2x^1+x^2+3x^3,\ x^{3'}=x^1+x^2+x^3$$

其中，x^i 表示笛卡尔直角坐标系，$x^{i'}$ 是斜角直线坐标系。设笛卡尔直角坐标系的基矢量是 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，求斜角坐标系的协变基 $\boldsymbol{g}_i$ 以及逆变基 $\boldsymbol{g}^i$。

1.8　写出圆柱坐标系 x^i 与笛卡尔直角坐标系 $x^{i'}$ 的坐标变换，并据此求它们的变换系数 $\beta^i_{i'}$ 和 $\beta^{i'}_i$。

1.9　写出球坐标系 x^i 与笛卡尔直角坐标系 $x^{i'}$ 的坐标变换，并据此求它们的变换系数 $\beta^i_{i'}$ 和 $\beta^{i'}_i$。

1.10　已知笛卡尔直角坐标系中矢量 $\boldsymbol{v}$ 的分量 $v^{1'},v^{2'},v^{3'}$，求在圆柱坐标系中 $\boldsymbol{v}$ 的分量 v^1,v^2,v^3。

1.11　已知笛卡尔直角坐标系中矢量 $\boldsymbol{v}$ 的分量 $v^{1'},v^{2'},v^{3'}$，求在球坐标系中 $\boldsymbol{v}$ 的分量 v^1,v^2,v^3。

1.12　求在下列坐标系下的度量张量 g_{ij} 和 g^{ij} 以及 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|^2$：

(1) 斜角直线坐标系

$$\boldsymbol{g}_1=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{g}_2=\boldsymbol{k}+\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{g}_3=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$$

(2) 题 1.1 给出的斜角直线坐标系；

(3) 题 1.3 给出的圆柱坐标系；

(4) 题 1.4 给出的球坐标系。

1.13 试求：

(1) $\mathrm{d}x^2=\mathrm{d}x^3=0$ 时的线元长度 $\mathrm{d}s_{(1)}$；

(2) $\mathrm{d}x^3=\mathrm{d}x^1=0$ 时的线元长度 $\mathrm{d}s_{(2)}$；

(3) $\mathrm{d}x^1=\mathrm{d}x^2=0$ 时的线元长度 $\mathrm{d}s_{(3)}$。

1.14 试求上题中的两线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{(1)}$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{(2)}$ 的夹角的余弦。

1.15 对于题 1.1 给出的斜角直线坐标系，利用题 1.12(b)所得到的度量张量：

(1) 验算逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^i$；

(2) 根据指标上升和下降规律，验算题 1.2 中的结果。

1.16 对于题 1.12(a)所给的斜角直线坐标系，设有一个二阶张量的逆变分量 T^{ij} 所构成的矩阵是

$$[T^{ij}]=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 6\end{bmatrix}$$

(1) 利用指标升降规律求 $T_i^{\cdot j}$，$T_{\cdot j}^{i}$ 和 T_{ij} 所构成的矩阵(一律以第一指标 i 为行指标，第二指标 j 为列指标)；

(2) 求该二阶张量在笛卡尔直角坐标系中的各种分量。

1.17 求题 1.12 中各坐标系下的 Eddington 张量。

1.18 试用指标记法证明：

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

1.19 计算题 1.5 中两矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的叉积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的逆变分量和协变分量。

1.20 在三维欧氏空间中，写出下列和式的所有项：

(1) $a_{ij}x^ix^j$；

(2) $a_i^{\cdot i}x_jx^j$；

(3) $(a_ix^i)^2$。

1.21 写出下列各式运算结果，并指出是几阶张量。

(1) $\delta_j^ka_k$；

(2) $\delta_k^ia_ia^ka_j$；

(3) $\delta_j^iA_{i\cdot k}^{\cdot j}\delta_l^k$；

(4) $\delta_j^iA_{ik}A^{jl}\delta_l^k$。

1.22 证明：张量对任意两个指标的对称性和反对称性与坐标系选取无关。

第 2 章　二阶张量

二阶张量是最常遇到的一类张量，在应用上有特殊意义。连续介质力学中的应力张量、应变张量和变形梯度张量等都是二阶张量。本章讨论二阶张量的特性。

2.1　映射量

设有二阶张量

$$\mathbf{B}=B^{i}_{\cdot j}\boldsymbol{g}_{i}\boldsymbol{g}^{j} \tag{2.1.1}$$

它和任意矢量 $\boldsymbol{v}=v^{k}\boldsymbol{g}_{k}$ 点乘就给出另一矢量 $\boldsymbol{u}$。过程如下：

$$\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{v}=B^{i}_{\cdot j}v^{k}\boldsymbol{g}_{i}\boldsymbol{g}^{j}\cdot\boldsymbol{g}_{k}=B^{i}_{\cdot j}v^{j}\boldsymbol{g}_{i}=u^{i}\boldsymbol{g}_{i}=\boldsymbol{u} \tag{2.1.2}$$

这说明，$\mathbf{B}$ 是一个算子，它使得空间中的每一个矢量 $\boldsymbol{v}$ 都有另一个矢量 $\boldsymbol{u}$ 与之对应。我们说，$\boldsymbol{u}$ 是 $\boldsymbol{v}$ 关于算子 $\mathbf{B}$ 的映象。因为可以把二阶张量看作是一个从矢量空间到矢量空间的映射，所以，二阶张量也称为映射量。显然，二阶张量是线性算子，因为

$$\mathbf{B}\cdot(\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{w})=\alpha\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{u}+\beta\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{w} \tag{2.1.3}$$

这里，$\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 是任意矢量，α 和 β 是任意实数。

在式(2.1.1)中，对每一个确定的 j 来说，$B^{i}_{\cdot j}\boldsymbol{g}_{i}$ 代表一个矢量，记为 $\boldsymbol{f}_{j}$。所以，式(2.1.1)又可写成

$$\mathbf{B}=\boldsymbol{f}_{j}\boldsymbol{g}^{j} \tag{2.1.4}$$

这说明，任何映射量都可以表示成三对并矢之和。

两个或两个以上映射量的和或点积仍是映射量：

$$\mathbf{B}+\mathbf{D}=B^{i}_{\cdot j}\boldsymbol{g}_{i}\boldsymbol{g}^{j}+D^{i}_{\cdot j}\boldsymbol{g}_{i}\boldsymbol{g}^{j}=(B^{i}_{\cdot j}+D^{i}_{\cdot j})\boldsymbol{g}_{i}\boldsymbol{g}^{j} \tag{2.1.5}$$

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}=(B^{i}_{\cdot j}\boldsymbol{g}_{i}\boldsymbol{g}^{j})\cdot(D^{k}_{\cdot l}\boldsymbol{g}_{k}\boldsymbol{g}^{l})=B^{i}_{\cdot r}D^{r}_{\cdot j}\boldsymbol{g}_{i}\boldsymbol{g}^{j} \tag{2.1.6}$$

由式(2.1.6)式可定义映射量的幂：

$$\mathbf{B}^{n}=\underbrace{\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}\cdot\cdots\cdot\mathbf{B}}_{n} \tag{2.1.7}$$

为 $\mathbf{B}$ 的 n 次幂，表示 n 个 $\mathbf{B}$ 的自点积(n 是正整数)。二阶张量的幂仍是二阶张量。

把二阶张量的分量中的两个指标对换位置(即原来的第一指标变成第二指标，第二指标变成第一指标)，但保持协变性或逆变性不变，且保持两个基矢量的并矢次序不变，这个手续称为转置，用右上标 T 表示(请读者对照第 1.9 节)。二阶张量经转置后还是二阶张量，后者称为前者的转置张量。例如，把式(2.1.1)中的 $\mathbf{B}$ 转置，就得到它的转置张量：

$$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=B_{j}^{\cdot i}\boldsymbol{g}_{i}\boldsymbol{g}^{j} \tag{2.1.8}$$

下面证明转置运算的一个规则：

$$(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D})^{\mathrm{T}}=\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{T}} \tag{2.1.9}$$

显然，对任意两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，有

$$\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{a} \tag{2.1.10}$$

在上式中，以 $\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{b}$ 代替 $\boldsymbol{b}$，得

$$\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{B}\cdot(\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{b})=(\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{b})\cdot(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{a}) \tag{2.1.11}$$

利用式(2.1.10)，上式左端$=\boldsymbol{a}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D})^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{a}$。利用 $\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\mathbf{D}^{\mathrm{T}}$，上式右端$=\boldsymbol{b}\cdot\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{a}$，故有

$$\boldsymbol{b}\cdot(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{D})^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\cdot B^{\mathrm{T}})\cdot\boldsymbol{a} \tag{2.1.12}$$

因为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是任意的，所以式(2.1.9)成立。

2.2　正则与蜕化

考虑映射量 B。如果某三个非共面矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的映象 $\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{a},\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{b}$ 和 $\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{c}$ 也不共面，则称 B 为正则，否则为蜕化。换言之，B 是蜕化还是正则，取决于

$$Ⅲ=\frac{(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{a})\times(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{b})\cdot(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{c})}{[\boldsymbol{abc}]} \tag{2.2.1}$$

是否为零。容易证明，对其他任意三个非共面矢量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\gamma}$，恒有

$$\frac{(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\alpha})\times(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\beta})\cdot(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\gamma})}{[\boldsymbol{\alpha\beta\gamma}]}=\frac{(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{a})\times(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{b})\cdot(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{c})}{[\boldsymbol{abc}]} \tag{2.2.2}$$

这说明，Ⅲ只由 B 本身决定，而与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的选择无关。当然也可以取基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 作为这三个矢量，因而 III 与坐标系的选择无关，称之为 B 的第三主不变量(以后介绍第一、第二主不变量)。第三主不变量表示三个矢量所构成的平行六面体的体积与它们的映象所构成的平行六面体的体积之比。

判别映射量是否蜕化，还有另一个等价的准则：如果 B 蜕化，则至少存在一个方向，B 对沿此方向的所有矢量 $\boldsymbol{z}$ 的映象均为零，即 $\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{z}=0$。称这个方向为该蜕化二阶张量的零向。关于这两个判别准则等价的证明如下：设此方向存在，又设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是三个非共面矢量，则矢量 $\boldsymbol{z}$ 可表示为 $\boldsymbol{z}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}$。根据 B 的线性性质，$\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{z}=\alpha\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{a}+\beta\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{b}+\gamma\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{c}=0$，这就说明，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的映象共面。按第一个准则，B 为蜕化。反之，若 B 为蜕化，则 $\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{a},\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{b}$ 和 $\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{c}$ 共面，即存在不全为零的 α,β,γ，使 $0=\alpha\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{a}+\beta\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{b}+\gamma\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{c}=\mathbf{B}(\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c})$。就是说，对蜕化的 B，必然存在这样的方向 $\boldsymbol{z}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}$。证毕。

具有一个零向的蜕化映象量使空间全部矢量的映象处在一个平面内，该平面与零向正交。或者说，它使空间映射为平面。若具有两个零向，则这两个零向所决定的平面上的每一个方向都是零向。这时，所有映象共线，都在与此平面正交的直线上。如有三个非共面零向，则空间的所有方向都是零向。这时，映象均为零，称为零映射量。只有正则映射量才使三维空间经映射后仍为三维空间。

正则映射量使得空间内的矢量与其映象之间有一一对应关系，因而是一个可逆算子。先看一一对应关系。这是说，如果有两个矢量 $\boldsymbol{u}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{u}'=\alpha'\boldsymbol{a}+\beta'\boldsymbol{b}+\gamma'\boldsymbol{c}$，它们在 $\mathbf{B}$ 下的映象相同，$\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{u}=\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{u}'$，则必有 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}'$。这是显然的，因为把 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{u}'$ 的表达式代入并移项后得

$$(\alpha-\alpha')\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{a}+(\beta-\beta')\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{b}+(\gamma-\gamma')\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{c}=0$$

上式成立的充分必要条件是三个系数为零，所以，$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}'$。反之亦然。因为映射是一一对应的，即有 $\mathbf{B}$ 使得 $\boldsymbol{u}$ 与 $\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{u}$ 对应，当然必有 $\overset{-1}{\mathbf{B}}$ 使得 $\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 对应：$\boldsymbol{u}=\overset{-1}{\mathbf{B}}\cdot(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{u})=(\overset{-1}{\mathbf{B}}\cdot\mathbf{B})\cdot\boldsymbol{u}$，从而

$$\overset{-1}{\mathbf{B}}\cdot\mathbf{B}=\mathrm{I}\quad \text{或者}\quad \mathbf{B}\cdot\overset{-1}{\mathbf{B}}=\mathrm{I}\tag{2.2.3}$$

其中，I是单位映射量，也就是度量张量。以上观点如果用分量形式表达，就要求正则映射量 $\mathrm{B}=\mathrm{B}^{i}_{.j}\boldsymbol{g}_{i}\boldsymbol{g}^{j}$ 的系数矩阵$[\mathrm{B}^{i}_{.j}]$为满秩，或其行列式$|\mathrm{B}^{i}_{.j}|\neq0$。因为这就保证了逆矩阵$[\overset{-1}{\mathrm{B}}{}^{i}_{.j}]$的存在和惟一。下边指出，行列式$|\mathrm{B}^{i}_{.j}|$就是 $\mathbf{B}$ 的第三主不变量。为此，在式(2.2.1)中改取 $\boldsymbol{g}_i$ 作为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，有

$$\mathrm{III}=\frac{(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{g}_1)\times(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{g}_2)\cdot(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{g}_3)}{[\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_3]}=\frac{(\mathrm{B}^{r}_{.i}\boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}^{i}\cdot\boldsymbol{g}_1)\times(\mathrm{B}^{s}_{.j}\boldsymbol{g}_s\boldsymbol{g}^{j}\cdot\boldsymbol{g}_2)\cdot(\mathrm{B}^{t}_{.k}\boldsymbol{g}_t\boldsymbol{g}^{k}\cdot\boldsymbol{g}_3)}{[\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_3]}$$

$$=\frac{\mathrm{B}^{r}_{.1}\mathrm{B}^{s}_{.2}\mathrm{B}^{t}_{.3}[\boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}_s\boldsymbol{g}_t]}{[\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_3]}=e_{rst}\mathrm{B}^{r}_{.1}\mathrm{B}^{s}_{.2}\mathrm{B}^{t}_{.3}=|\mathbf{B}^{i}_{.j}|$$

所以，对正则映射量 $\mathbf{B}$ 来说，它的

$$|\mathrm{B}^{i}_{.j}|=\mathrm{III}\neq0\tag{2.2.4}$$

正则映射量 $\mathbf{B}$ 的转置 $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ 也是正则的，这是因为二者的第三主不变量相同。事实上，$|\mathrm{B}^{\mathrm{T}i}_{.j}|=|\mathrm{B}_{j}^{.i}|=|g_{jr}\mathrm{B}^{r}_{.s}g^{si}|=|g_{jr}||\mathrm{B}^{r}_{.s}||g^{si}|=|\mathrm{B}^{i}_{.j}|=\mathrm{III}\neq0$($\mathrm{B}^{\mathrm{T}i}_{.j}$ 应理解为转置张量 $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ 的混变分量，即$(\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{i}_{.j}$)。有时称 $\mathbf{B}$ 的第三主不变量为 $\mathbf{B}$ 的行列式，并记为

$$\det\mathbf{B}=|\mathrm{B}^{i}_{.j}|=|\mathrm{B}_{j}^{.i}|\tag{2.2.5}$$

但要注意 $\mathbf{B}$ 的协变分量和逆变分量，当 $g\neq1$ 时，$|\mathbf{B}_{ij}|\neq|\mathbf{B}^{ij}|\neq\det\mathbf{B}$。

对于映射量，转置和求逆运算可以交换次序。这是因为$(\overset{-1}{\mathbf{B}})^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=(\mathbf{B}\cdot\overset{-1}{\mathbf{B}})^{\mathrm{T}}=I^{\mathrm{T}}=I=(\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1}\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$，从而$[(\overset{-1}{\mathbf{B}})^{\mathrm{T}}-(\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1}]\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=0$，两边右点乘$(\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1}$，得

$$(\overset{-1}{\mathbf{B}})^{\mathrm{T}}=(\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1}\tag{2.2.6}$$

意思是，正则映射量的逆映射量的转置等于其转置的逆映射量。因此，今后可以不加说明地写 $\overset{-1}{\mathbf{B}}{}^{\mathrm{T}}$。

设有两个正则映射量 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{D}$，其点积的逆等于分别求逆并交换次序后再点积，写出来就是

$$(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D})^{-1}=\mathbf{D}^{-1}\cdot\mathbf{B}^{-1}\tag{2.2.7}$$

证明如下。因为两个正则映射量的点积 $\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}$ 仍为正则,故存在 $(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D})^{-1}$,满足

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D})^{-1}=\mathbf{I}$$

依次左点乘 $\overset{-1}{\mathbf{B}}$ 和 $\overset{-1}{\mathbf{D}}$,得式(2.2.7)。

还有一个正则映射量 $\mathbf{B}$ 的有用公式。从式(2.2.1),有

$$\mathrm{III}\,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{a})\times(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{b})\cdot(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{c})$$

把其中的$[(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{a})\times(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{b})]$看作是式(2.1.10)中的矢量 $\boldsymbol{a}$,则有

$$\begin{aligned}\mathrm{III}\,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}&=(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{a})\times(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{b})\cdot(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot[(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{a})\times(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{b})]\\&=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot[(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{a})\times(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{b})]\cdot\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

两边左点乘$(\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1}$,因为 $\boldsymbol{c}$ 是任意的,再考虑到式(2.2.6),得

$$[(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{a})\times(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{b})]=\mathrm{III}\,\overset{-1}{\mathbf{B}}{}^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\qquad(2.2.8)$$

它刻划了两个矢量所构成的有向面积与它们的映象所构成的有向面积之间的关系。

2.3 特征方向和不变量

如果非零矢量 $\boldsymbol{u}$ 及其映象 $\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{u}$ 具有相同的方向,就是说存在标量 λ 使下式成立:

$$\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{u}=\lambda\cdot\boldsymbol{u}\qquad(2.3.1)$$

则称这个方向为 $\mathbf{B}$ 的特征方向或本征方向。λ 为相应的特征值,$\boldsymbol{u}$ 为特征矢量。也称为本征值和本征矢量。上式可改写成

$$(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I})\cdot\boldsymbol{u}=0\qquad(2.3.2)$$

这说明,如果 $\mathbf{B}$ 有特征矢量 $\boldsymbol{u}$,则 $\boldsymbol{u}$ 必是映射量 $\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I}$ 的零向。因为后者是一个蜕化映射量,必有

$$\frac{[(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I})\cdot\boldsymbol{a}]\times[(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I})\cdot\boldsymbol{b}]\cdot[(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I})\cdot\boldsymbol{c}]}{[\boldsymbol{abc}]}=0\quad\text{或}\quad\det(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I})=0\qquad(2.3.3)$$

由式(2.2.5)的定义,上式又可写为

$$\det(\mathrm{B}^{i}_{.j}-\lambda\delta^{i}_{j})=\begin{vmatrix}\mathrm{B}^{1}_{.1}-\lambda & \mathrm{B}^{2}_{.1} & \mathrm{B}^{3}_{.1}\\ \mathrm{B}^{1}_{.2} & \mathrm{B}^{2}_{.2}-\lambda & \mathrm{B}^{3}_{.2}\\ \mathrm{B}^{1}_{.3} & \mathrm{B}^{2}_{.3} & \mathrm{B}^{3}_{.3}-\lambda\end{vmatrix}=0\qquad(2.3.4)$$

把展开公式(1.8.11)用于这个行列式,就得到如下表达式:

$$\begin{aligned}6\det(\mathrm{B}^{i}_{.j}-\lambda\delta^{i}_{.j})&=(\mathrm{B}^{i}_{.l}-\lambda\delta^{i}_{l})(\mathrm{B}^{j}_{.m}-\lambda\delta^{j}_{m})(\mathrm{B}^{k}_{.n}-\lambda\delta^{k}_{n})\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{lmn}\\&=\mathrm{A}-\mathrm{B}\lambda+\mathrm{C}\lambda^{2}-\mathrm{D}\lambda^{3}\end{aligned}$$

把式(1.8.11)、式(1.7.26)、式(1.7.27)和式(1.7.28)用于计算上述系数 A,B,C,D,可得

$$\mathrm{A}=6\det\mathrm{B}^{i}_{.j}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{B}&=(\delta^i_l \mathrm{B}^j_{\cdot m}\mathrm{B}^k_{\cdot n}+\mathrm{B}^i_{\cdot l}\delta^j_m\mathrm{B}^k_{\cdot n}+\mathrm{B}^i_{\cdot l}\mathrm{B}^j_{\cdot m}\delta^k_n)\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{lmn}\\
&=(\mathrm{B}^j_{\cdot m}\mathrm{B}^k_{\cdot n}\varepsilon_{ljk}+\mathrm{B}^i_{\cdot l}\mathrm{B}^k_{\cdot n}\varepsilon_{imk}+\mathrm{B}^i_{\cdot l}\mathrm{B}^j_{\cdot m}\varepsilon_{ijn})\varepsilon^{lmn}\\
&=\mathrm{B}^j_{\cdot m}\mathrm{B}^k_{\cdot n}(\delta^m_j\delta^n_k-\delta^m_k\delta^n_j)+\mathrm{B}^i_{\cdot l}\mathrm{B}^k_{\cdot n}(\delta^l_i\delta^n_k-\delta^l_k\delta^n_i)+\mathrm{B}^i_{\cdot l}\mathrm{B}^j_{\cdot m}(\delta^l_i\delta^m_j-\delta^l_j\delta^m_i)\\
&=\mathrm{B}^j_{\cdot j}\mathrm{B}^k_{\cdot k}-\mathrm{B}^j_{\cdot k}\mathrm{B}^k_{\cdot j}+\mathrm{B}^i_{\cdot i}\mathrm{B}^k_{\cdot k}-\mathrm{B}^i_{\cdot k}\mathrm{B}^k_{\cdot i}+\mathrm{B}^i_{\cdot i}\mathrm{B}^j_{\cdot j}-\mathrm{B}^i_{\cdot j}\mathrm{B}^j_{\cdot i}\\
&=3(\mathrm{B}^i_{\cdot i}\mathrm{B}^j_{\cdot j}-\mathrm{B}^i_{\cdot j}\mathrm{B}^j_{\cdot i})\\
\mathrm{C}&=(\mathrm{B}^i_{\cdot l}\delta^j_m\delta^k_n+\delta^i_l\mathrm{B}^j_{\cdot m}\delta^k_n+\delta^i_l\delta^j_m\mathrm{B}^k_{\cdot n})\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{lmn}\\
&=(\mathrm{B}^i_{\cdot l}\varepsilon^{ljk}+\mathrm{B}^j_{\cdot m}\varepsilon^{imk}+\mathrm{B}^k_{\cdot n}\varepsilon^{ijn})\varepsilon_{ijk}\\
&=2(\mathrm{B}^i_{\cdot l}\delta^l_i+\mathrm{B}^j_{\cdot m}\delta^m_j+\mathrm{B}^k_{\cdot n}\delta^n_k)=6\mathrm{B}^i_{\cdot i}\\
\mathrm{D}&=\delta^i_l\delta^j_m\delta^k_n\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{lmn}=\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ijk}=6
\end{aligned}
$$

因此，行列式方程式(2.3.4)可写成如下形式：

$$\lambda^3-\mathrm{B}^i_{\cdot i}\lambda^2+\frac{1}{2}(\mathrm{B}^i_{\cdot i}\mathrm{B}^j_{\cdot j}-\mathrm{B}^i_{\cdot j}\mathrm{B}^j_{\cdot i})\lambda-\det\mathrm{B}^i_{\cdot j}=0 \tag{2.3.5}$$

还可进一步把上述方程的系数写作

$$\mathrm{I}=\mathrm{B}^i_{\cdot i}=\frac{1}{1!}\delta^r_i\mathrm{B}^i_{\cdot r} \tag{2.3.6}$$

$$\mathrm{II}=\frac{1}{2}(\mathrm{B}^i_{\cdot i}\mathrm{B}^j_{\cdot j}-\mathrm{B}^i_{\cdot j}\mathrm{B}^j_{\cdot i})=\frac{1}{2!}\delta^{rs}_{ij}\mathrm{B}^i_{\cdot r}\mathrm{B}^j_{\cdot s} \tag{2.3.7}$$

$$\mathrm{III}=\det\mathrm{B}^i_{\cdot j}=\frac{1}{3!}\delta^{rst}_{ijk}\mathrm{B}^i_{\cdot r}\mathrm{B}^j_{\cdot s}\mathrm{B}^k_{\cdot t} \tag{2.3.8}$$

它们都不随坐标系的改变而变化，所以是 B 的主不变量，分别称为第一主不变量、第二主不变量和第三主不变量。这样，方程式(2.3.5)最终可写成

$$\lambda^3-\mathrm{I}\lambda^2+\mathrm{II}\lambda-\mathrm{III}=0 \tag{2.3.9}$$

它称为 B 的特征方程或本征方程。解特征方程可以求出映射量 B 的特征值。

第一主不变量也称为迹(trace)，表示为

$$\mathrm{I}=\mathrm{tr}\,\mathbf{B}=\mathrm{B}^i_{\cdot i} \tag{2.3.10}$$

B 的特征方程式(2.3.9)是实系数三次代数方程，必有一个实根。所以，B 至少有一个实的特征值。不妨记作 λ。相应地，至少有一个特征方向。如果对应于这个 λ，存在两个不共线的特征方向，则这两个特征方向所确定的平面上的每个方向都是特征方向。如果一个实的特征值对应于三个非共面的特征方向，则三维空间的任何一个方向都是特征方向。此时，不论映射量 B 作用于任何方向的矢量，都是把该矢量沿原方向按同一比例 λ 放大或缩小。这时，B 成为相似映射量 $\lambda\mathbf{I}$。

用 B 左点乘式(2.3.1)的两端，得

$$\mathbf{B}^2\cdot\boldsymbol{u}=\mathbf{B}\cdot(\lambda\boldsymbol{u})=\lambda\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{u}=\lambda^2\boldsymbol{u}$$

这说明 $\mathbf{B}^2$ 的特征值是 λ^2，对应的特征矢量仍是 $\boldsymbol{u}$。显然有

$$\mathbf{B}^n \cdot \boldsymbol{u} = \lambda^n \boldsymbol{u} \tag{2.3.11}$$

其中，n 是正整数。此式说明，$\mathbf{B}^n$ 的特征值是 λ^n，对应的特征矢量也还是 $\boldsymbol{u}$。

要说明的是，由式(2.3.2)所求出的特征矢量不是惟一的。事实上，从方程式(2.3.2)可以看出，如果 $\boldsymbol{u}$ 满足方程，则 $\boldsymbol{u}$ 的任何非零倍数都满足方程。要使特征矢量惟一，还要增加约束条件，比如归一化条件，即令所求的特征矢量是单位矢量。

2.4 Cayley-Hamilton 定理

任取三个非共面矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，可以证明，$\mathbf{B}$ 的第一主不变量可以写成

$$\mathrm{I} = \frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{b})+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{c})}{[\boldsymbol{abc}]} \tag{2.4.1}$$

可以证明此标量的大小与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的选择无关，只决定于映射量 $\mathbf{B}$ 本身。是坐标变换的不变量。下面，求它的大小。为此，特别取 $\boldsymbol{g}_i$ 作为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，得

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \frac{\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_3\cdot(\mathrm{B}^{i}_{.j}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j\cdot\boldsymbol{g}_1)+\boldsymbol{g}_3\times\boldsymbol{g}_1\cdot(\mathrm{B}^{p}_{.q}\boldsymbol{g}_p\boldsymbol{g}^q\cdot\boldsymbol{g}_2)+\boldsymbol{g}_1\times\boldsymbol{g}_2\cdot(\mathrm{B}^{r}_{.s}\boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}^s\cdot\boldsymbol{g}_3)}{[\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_3]}\\
&= \boldsymbol{g}^1\cdot(\mathrm{B}^{i}_{.1}\boldsymbol{g}_i)+\boldsymbol{g}^2\cdot(\mathrm{B}^{p}_{.2}\boldsymbol{g}_p)+\boldsymbol{g}^3\cdot(\mathrm{B}^{r}_{.3}\boldsymbol{g}_r)\\
&= \boldsymbol{g}^r\cdot(\mathrm{B}^{s}_{.r}\boldsymbol{g}_s)=\mathrm{B}^{r}_{.r}=\frac{1}{1!}\delta^r_i\mathrm{B}^{i}_{.r}
\end{aligned}$$

将此结果与式(2.3.6)比较，就证明了式(2.4.1)。

同样，任取三个非共面矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，可以证明，$\mathbf{B}$ 的第二主不变量可以表示成

$$\mathrm{II} = \frac{(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{a})\times(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{b})\times(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}+(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{c})\times(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}}{[\boldsymbol{abc}]} \tag{2.4.2}$$

可以证明此标量的大小与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的选择无关，只决定于映射量 $\mathbf{B}$ 本身。也是坐标变换的不变量。下面，通过求它的大小来证明上述表达式确系第二主不变量。为此，特别取 $\boldsymbol{g}_i$ 作为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，得

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} &= \frac{(\mathrm{B}^{i}_{.1}\boldsymbol{g}_i)\times(\mathrm{B}^{j}_{.2}\boldsymbol{g}_j)\cdot\boldsymbol{g}_3+(\mathrm{B}^{p}_{.2}\boldsymbol{g}_p)\times(\mathrm{B}^{q}_{.3}\boldsymbol{g}_q)\cdot\boldsymbol{g}_1+(\mathrm{B}^{r}_{.3}\boldsymbol{g}_r)\times(\mathrm{B}^{s}_{.1}\boldsymbol{g}_s)\cdot\boldsymbol{g}_2}{[\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_3]}\\
&= \mathrm{B}^{i}_{.1}\mathrm{B}^{j}_{.2}e_{ij3}+\mathrm{B}^{p}_{.2}\mathrm{B}^{q}_{.3}e_{pq1}+\mathrm{B}^{r}_{.3}\mathrm{B}^{s}_{.1}e_{rs2}\\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{B}^{i}_{.1}\mathrm{B}^{j}_{.2}e_{ij3}-\mathrm{B}^{i}_{.2}\mathrm{B}^{j}_{.1}e_{ij3})+\frac{1}{2}(\mathrm{B}^{p}_{.2}\mathrm{B}^{q}_{.3}e_{pq1}-\mathrm{B}^{p}_{.3}\mathrm{B}^{q}_{.2}e_{pq1})+\frac{1}{2}(\mathrm{B}^{r}_{.3}\mathrm{B}^{s}_{.1}e_{rs2}-\mathrm{B}^{r}_{.1}\mathrm{B}^{s}_{.3}e_{rs2})\\
&= \frac{1}{2}e_{ijt}e^{rst}\mathrm{B}^{i}_{.r}\mathrm{B}^{j}_{.s}=\frac{1}{2!}\delta^{rs}_{ij}\mathrm{B}^{i}_{.r}\mathrm{B}^{j}_{.s}
\end{aligned}$$

此结果与式(2.3.7)相同。这就证明了式(2.4.2)。

下面推导 Cayley-Hamilton 方程。

在式(2.4.1)中，用 $(\mathbf{B}^2\cdot\boldsymbol{c})$ 代替 $\boldsymbol{c}$，得等式

$$\mathrm{I}[ab(\mathbf{B}^2\cdot c)]=b\times(\mathbf{B}^2\cdot c)\cdot(\mathbf{B}\cdot a)+(\mathbf{B}^2\cdot c)\times a\cdot(\mathbf{B}\cdot b)+a\times b\cdot(\mathbf{B}^3\cdot c)$$

在式(2.4.2)中,用$-(\mathbf{B}\cdot c)$代替 c,得等式

$$-\mathrm{II}[ab(\mathbf{B}\cdot c)]=-(\mathbf{B}\cdot a)\times(\mathbf{B}\cdot b)\cdot(\mathbf{B}\cdot c)-(\mathbf{B}\cdot b)\times(\mathbf{B}^2\cdot c)\cdot a$$
$$-(\mathbf{B}^2\cdot c)\times(\mathbf{B}\cdot a)\cdot b$$

再把式(2.2.1)变形,写成

$$\mathrm{III}[abc]=(\mathbf{B}\cdot a)\times(\mathbf{B}\cdot b)\cdot(\mathbf{B}\cdot c)$$

将以上三式相加,得

$$a\times b\cdot[(\mathrm{I}\,\mathbf{B}^2-\mathrm{II}\,\mathbf{B}+\mathrm{III}\,\mathbf{I})\cdot c]=a\times b\cdot(\mathbf{B}^3\cdot c)$$

由于 a,b 是任意的,所以

$$(\mathbf{B}^3-\mathrm{I}\,\mathbf{B}^2+\mathrm{II}\,\mathbf{B}-\mathrm{III}\,\mathbf{I})\cdot c=0$$

上式说明,任意方向 c 均为括号(　)中所代表的映射量的零向,故这映射量必是零映射量:

$$\mathbf{B}^3-\mathrm{I}\,\mathbf{B}^2+\mathrm{II}\,\mathbf{B}-\mathrm{III}\,\mathbf{I}=0 \tag{2.4.3}$$

这就是著名的 Cayley-Hamilton 方程,也叫 Cayley-Hamilton 定理。这是一个映射量方程。利用这个方程,所有 $\mathbf{B}^n(n\geqslant3)$都可以用 $\mathbf{B}^2$,$\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{I}$ 以及 $\mathbf{B}$ 的三个主不变量来表达。有趣的是,这个方程的结构和 B 的特征方程式(2.3.9)相同,但后者是标量方程。

2.5　几种特殊的映射量

(1) 对称映射量

称映射量 S 为对称的,如果

$$\mathbf{S}=\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\quad 即\quad \mathrm{S}^{i}_{\cdot j}=\mathrm{S}_{j}^{\cdot i}\quad 或\quad \mathrm{S}_{ij}=\mathrm{S}_{ji} \tag{2.5.1}$$

关于对称映射量,有两个重要概念。首先,定义下述标量:

$$t\cdot\mathbf{S}\cdot n=n\cdot\mathbf{S}\cdot t=\mathrm{S}_{ij}n^i t^j \tag{2.5.2}$$

为映射量 S 在 n 和 t 方向的切分量。其中,n 和 t 是单位矢量。如果这两个单位矢量相互正交,即 $n\cdot t=0$,则称其为正交切分量。注意,上述等式中的 $t\cdot\mathbf{S}\cdot n=n\cdot\mathbf{S}\cdot t$ 仅对对称映射量成立。

另外,定义标量

$$n\cdot\mathbf{S}\cdot n=\mathrm{S}_{ij}n^i n^j \tag{2.5.3}$$

为映射量 S 在 n 方向上的法分量。如果沿任何方向的法分量都大于零,则称 S 为正定的。这时,分量 S_{ij} 是正定二次型的系数。可以证明,正定对称映射量的三个主不变量均大于零,即有 $\mathrm{I}>0$,$\mathrm{II}>0$,$\mathrm{III}>0$。

(2) 反对称映射量

称映射量 A 是反对称的,如果

$$\mathbf{A}=-\mathbf{A}^{\mathrm{T}},\quad 即\quad \mathrm{A}^{i}_{\cdot j}=-\mathrm{A}_{j}^{\cdot i}\quad 或\quad \mathrm{A}_{ij}=-\mathrm{A}_{ji} \tag{2.5.4}$$

我们来看看反对称映射量 A 对任意矢量 $\boldsymbol{v}$ 的映象：

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{v}&=(\mathbf{A}_{ij}\boldsymbol{g}^{i}\boldsymbol{g}^{j})\cdot(\boldsymbol{v}^{k}\boldsymbol{g}_{k})=\mathbf{A}_{ij}\boldsymbol{v}^{j}\boldsymbol{g}^{i}=\frac{1}{2}(\mathbf{A}_{ij}-\mathbf{A}_{ji})\boldsymbol{v}^{j}\boldsymbol{g}^{i}\\&=\frac{1}{2}\delta_{ij}^{rs}\mathbf{A}_{rs}\boldsymbol{v}^{j}\boldsymbol{g}^{i}=\varepsilon_{itj}\left(-\frac{1}{2!}\varepsilon^{trs}\mathbf{A}_{rs}\right)\boldsymbol{v}^{j}\boldsymbol{g}^{i}\\&=\left(-\frac{1}{2!}\varepsilon^{trs}\mathbf{A}_{rs}\boldsymbol{g}_{t}\right)\times(\boldsymbol{v}^{k}\boldsymbol{g}_{k})\\&=\left(-\frac{1}{2!}\varepsilon^{trs}\boldsymbol{g}_{t}\boldsymbol{g}_{r}\boldsymbol{g}_{s}:\mathbf{A}_{ij}\boldsymbol{g}^{i}\boldsymbol{g}^{j}\right)\times(\boldsymbol{v}^{k}\boldsymbol{g}_{k})\\&=\left(-\frac{1}{2!}\boldsymbol{\varepsilon}:\mathbf{A}\right)\times\boldsymbol{v}\end{aligned} \tag{2.5.5}$$

如果引入一个新的矢量

$$\boldsymbol{\omega}=-\frac{1}{2!}\boldsymbol{\varepsilon}:\mathbf{A}\quad 或\quad \omega^{i}=-\frac{1}{2!}\varepsilon^{ijk}\mathrm{A}_{jk} \tag{2.5.6}$$

则式(2.5.5)就成为

$$\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v} \tag{2.5.7}$$

上式说明,反对称映射量是一个蜕化映射量,因为它把三维空间中的任意矢量都映射到一个平面上,这个平面与矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 正交。由于反对称映射量的这一特征,所以也把反对称映射量称为轴映射量。

式(2.5.7)说明,对每一个反对称映射量 A,都有一个矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 与之对应。反过来,任给一个矢量 $\boldsymbol{\omega}$,就总能按式(2.5.6)找到一个反对称映射量 A,使得 $\boldsymbol{\omega}$ 和 A 满足式(2.5.6)所确定的关系。具体步骤是:以置换张量 $-\boldsymbol{\varepsilon}$ 左点乘式(2.5.6)两边,得

$$\begin{aligned}-\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\omega}&=\frac{1}{2!}\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}:\mathbf{A}=\frac{1}{2!}\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{g}^{i}\boldsymbol{g}^{j}\boldsymbol{g}^{k}\cdot\varepsilon^{trs}\mathrm{A}_{rs}\boldsymbol{g}_{t}\\&=\frac{1}{2!}\varepsilon_{ijt}\varepsilon^{trs}\mathrm{A}_{rs}\boldsymbol{g}^{i}\boldsymbol{g}^{j}=\frac{1}{2!}\delta_{ij}^{rs}\mathrm{A}_{rs}\boldsymbol{g}^{i}\boldsymbol{g}^{j}\\&=\frac{1}{2!}(\mathrm{A}_{ij}-\mathrm{A}_{ji})\boldsymbol{g}^{i}\boldsymbol{g}^{j}=\mathrm{A}_{ij}\boldsymbol{g}^{i}\boldsymbol{g}^{j}=\mathbf{A}\end{aligned} \tag{2.5.8}$$

可见,A 和 $\boldsymbol{\omega}$ 一一对应。称 A 和 $\boldsymbol{\omega}$ 互为反偶。称按式(2.5.6)确定的 $\boldsymbol{\omega}$ 是轴映射量 A 的反偶矢量。

因为反对称映射量或轴映射量 A 把三维空间中的矢量都映射到与反偶矢量正交的平面上,那么要问,和这个平面正交的矢量,其映象为何?答案是简单的,即与这个平面正交的矢量被映象为零(矢量)。事实上,如取矢量 $\boldsymbol{v}/\!/\boldsymbol{\omega}$,则由式(2.5.7)可知 $\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{v}=0$。这一事实也说明,反偶矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 实际上也就是反对称映射量或轴映射量的零向。

反偶矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 的运动学意义是小转动。为了说明这一点,让我们来考察映射量 $\mathbf{I}+\mathbf{A}$。任

意矢量 v 在这一个映射量下的映象的长度平方为

$$\begin{aligned}[(\mathbf{I}+\mathbf{A})\cdot\boldsymbol{v}]^2 &= (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v})^2=(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v})\\ &= \boldsymbol{v}^2+[\boldsymbol{v}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{v}]+[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}]+(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v})^2=\boldsymbol{v}^2+(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v})\\ &= \boldsymbol{v}^2+\boldsymbol{\omega}^2\boldsymbol{v}^2-(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{v})^2=\boldsymbol{v}^2[1+\boldsymbol{\omega}^2-(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n})^2]\end{aligned}$$

以上推导利用了拉格朗日矢量恒等式(第 1 章例 1.3)

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$$

又,$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{v}/|\boldsymbol{v}|$ 是无量纲单位矢量。当然有 $|\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}|\leqslant|\boldsymbol{\omega}|$。如果反偶矢量很小,即如果 $|\boldsymbol{\omega}|\ll 1$,则前式中最后两项可以忽略,而有

$$[(\mathbf{I}+\mathbf{A})\cdot\boldsymbol{v}]^2\approx\boldsymbol{v}^2 \tag{2.5.9}$$

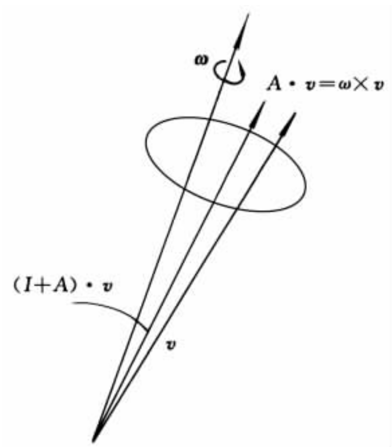


图 2.1

即 v 的映象的长度不变。公式(2.5.9)可以用图 2.1 表示。表明,矢量 v 经过增量 $\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$(式(2.5.7)),成为新的矢量$(\mathbf{I}+\mathbf{A})\cdot\boldsymbol{v}$ 后,长度不变。图 2.1 与刚体定轴转动时刚体线速度的分布图类似。可见映射量 $\mathbf{I}+\mathbf{A}$ 描述的是绕某一转轴的转动,该转轴与 $\boldsymbol{\omega}$ 同向,转向按右手螺旋法则确定,转角为$|\boldsymbol{\omega}|$。因为式(2.5.9)仅在$|\boldsymbol{\omega}|\ll 1$ 的条件下成立,所以,$\mathbf{I}+\mathbf{A}$ 描述的是绕 $\boldsymbol{\omega}$ 的小转动。故 $\boldsymbol{\omega}$ 也叫小转动矢量。

(3) 正交映射量

映射量 $\mathbf{I}+\mathbf{A}$ 只有在转角$|\boldsymbol{\omega}|$很小的条件下才能做到映象长度不变。下面来寻找映射量 $\mathbf{R}$,它能准确地保证矢量的映象长度不变。称之为正交映射量。这就要求,对任意矢量 v,都有

$$(\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{v})^2=\boldsymbol{v}^2 \tag{2.5.10}$$

也就是 $\boldsymbol{v}\cdot(\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{R})\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$。因为 v 是任意的,故有

$$\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{R}=I \tag{2.5.11a}$$

上式也可以作为正交映射量的定义式。因为 $\mathbf{R}$ 使任意矢量保持映象的长度不变,当然不可能使任何一个非零矢量的映象为零,所以,$\mathbf{R}$ 一定是正则的,一定有逆。从而

$$\mathbf{R}^{\mathrm{T}}=\overset{-1}{\mathbf{R}} \tag{2.5.12}$$

上式可以作为正交映射量的又一定义式。式(2.5.11a)写成分量形式,则为

$$\mathbf{R}_{r}^{\cdot i}\mathbf{R}_{\cdot j}^{r}=\delta_j^i \quad \text{或} \quad \mathbf{R}_{ri}\mathbf{R}^{rj}=\delta_i^j \tag{2.5.11b}$$

正交映射量不改变矢量点积的大小。这一性质可以如下证明:在式(2.5.10)中,用 $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$代替 v,则

$$(\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{u}+\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{v})^2=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})^2$$

乘开后得

$$(\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{u})\cdot(\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} \tag{2.5.13}$$

这就说明了正交映射量不改变矢量的点积。进一步，因为正交映射量的映象长度不变，所以，上式实际上说明了正交映射量不改变矢量之间的夹角，称保角性。

在式(2.5.13)中，如令 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$，则又回到式(2.5.10)。所以，式(2.5.10)和式(2.5.13)是关于正交映射量的两个等价的定义关系。

由于正交映射量的保角性和矢量的映象长度不变性，所以，正交映射量也不改变两个矢量的叉积的大小，就是

$$|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w}|=|(\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{u})\times(\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{w})| \tag{2.5.14}$$

这说明，正交映射量不改变两矢量所构成的面积。

正交映射量保持体积不变。这是因为，根据式(1.7.24)，有

$$[(\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{a})(\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{b})(\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{c})]^2=\begin{vmatrix}(\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{a})^2 & (\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{a})\cdot(\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{b}) & (\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{a})\cdot(\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{c})\\(\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{b})\cdot(\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{a}) & (\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{b})^2 & (\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{b})\cdot(\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{c})\\(\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{c})\cdot(\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{a}) & (\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{c})\cdot(\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{b}) & (\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{c})^2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\\\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}^2 & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\\\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}^2\end{vmatrix}=[\boldsymbol{abc}]^2$$

将上式代入式(2.2.1)，说明正交映射量的第三主不变量

$$\mathrm{III}=\pm1 \tag{2.5.15}$$

因为正交映射量既保持矢量的映象长度不变，又保持两矢量间的夹角不变，所以正交映射量使得标准正交基的映象仍是标准正交基。又由上式，当第三主不变量 $\mathrm{III}=+1$ 时，作为映象的标准正交基仍是右手系(假设原标准正交基是右手系)。说明 R 使得整个空间作纯转动。当第三主不变量 $\mathrm{III}=-1$ 时，作为映象的标准正交基变为左手系，说明整个空间作了转动加镜面反射。

正交映射量 R 必有一个特征值是 $+1$ 或 -1。设用单位矢量 $\boldsymbol{r}$ 表示 R 的特征方向，当然有

$$\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{r} \tag{2.5.16}$$

从而 $(\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{r})^2=\lambda^2(\boldsymbol{r})^2$。由于正交映射量保持矢量的映象长度不变，即有式(2.5.10)，故有特征值

$$\lambda^2=1,\quad \text{即}\quad \lambda=1\quad \text{或}\quad \lambda=-1 \tag{2.5.17}$$

由此知 $\lambda=1/\lambda$，从而式(2.5.16)可改写成

$$\boldsymbol{r}=\lambda\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{r} \tag{2.5.18}$$

以 $\mathbf{R}^{\mathrm{T}}$ 左乘之，再将式(2.5.11a)代入，得

$$\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{r} \tag{2.5.19}$$

这说明，正交映射量经转置后，特征值和特征方向不变。

利用上式，对任意矢量 $\boldsymbol{u}$，有

$$\boldsymbol{r}\cdot\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r} \tag{2.5.20}$$

由此可以看出，如果 $\boldsymbol{u}$ 垂直于特征矢量 $\boldsymbol{r}$（此时，$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}=0$），则其映象 $\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{u}$ 也必须垂直于 $\boldsymbol{r}$（因为上式左端 $\boldsymbol{r}\cdot(\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{u})=0$）。

取 $\boldsymbol{u}$ 为垂直于单位特征矢量 $\boldsymbol{r}$ 的单位矢量，利用矢量恒等式：

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

和式(2.5.20)，可得

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{u})\cdot[\boldsymbol{r}\times(\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{u})]&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r} & \boldsymbol{r}\cdot\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r} & \boldsymbol{u}\cdot\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{u}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r} & \lambda\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}\\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r} & \boldsymbol{u}\cdot\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{u}\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{u}\cdot\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{u}\end{vmatrix}=\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{u}\end{aligned} \tag{2.5.21}$$

前面讲过，正交映射量表示转动或转动加镜面反射。下面要具体说明转轴、转角与镜面反射面的确定方法。

先证明两个对任何映射量都成立的辅助公式：

(1) 任意映射量及其转置具有相同的第一主不变量(可证其他主不变量也相等)：

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(\mathbf{B})&=\frac{\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_3\cdot(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{g}_1)+\boldsymbol{g}_3\times\boldsymbol{g}_1\cdot(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{g}_2)+\boldsymbol{g}_1\times\boldsymbol{g}_2\cdot(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{g}_3)}{[\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_3]}\\&=\frac{\boldsymbol{g}_1\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_3)+\boldsymbol{g}_2\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{g}_3\times\boldsymbol{g}_1)+\boldsymbol{g}_3\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{g}_1\times\boldsymbol{g}_2)}{[\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_3]}\\&=\frac{\boldsymbol{g}^2\times\boldsymbol{g}^3\cdot(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{g}^1)+\boldsymbol{g}^3\times\boldsymbol{g}^1\cdot(\mathbf{B}^{T}\cdot\boldsymbol{g}^2)+\boldsymbol{g}^1\times\boldsymbol{g}^2\cdot(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{g}^3)}{[\boldsymbol{g}^1\boldsymbol{g}^2\boldsymbol{g}^3]}\\&=\mathrm{I}(\mathbf{B}^{\mathrm{T}})\end{aligned} \tag{2.5.22}$$

在以上证明中，利用了式(1.7.1)和

$$\boldsymbol{g}_1=\frac{\boldsymbol{g}^2\times\boldsymbol{g}^3}{[\boldsymbol{g}^1\boldsymbol{g}^2\boldsymbol{g}^3]},\quad \boldsymbol{g}_2=\frac{\boldsymbol{g}^3\times\boldsymbol{g}^1}{[\boldsymbol{g}^1\boldsymbol{g}^2\boldsymbol{g}^3]},\quad \boldsymbol{g}_3=\frac{\boldsymbol{g}^1\times\boldsymbol{g}^2}{[\boldsymbol{g}^1\boldsymbol{g}^2\boldsymbol{g}^3]}$$

(2) 由第一不变量表达式(2.4.1)并利用式(2.5.22)，有

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})&=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{b})+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{c})\\&=-\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}\times(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\times(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}\cdot\mathbf{B}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{c}$ 为任意，故

$$\mathbf{B}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\mathrm{I}\,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\times(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}\times(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{a}) \tag{2.5.23}$$

有了以上准备,我们来求正交映射量 R 所表示的转角和转轴。$\boldsymbol{u}$ 的映象是 $\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{u}$,也是单位矢量。它们都在垂直于特征矢量 r 的平面内。显然,点积 $\boldsymbol{u}\cdot(\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{u})$表示正交映射量使矢量 u 绕特征矢量 r 所发生的偏转角,设为 θ,有

$$\boldsymbol{u}\cdot(\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{u})=\cos\theta \tag{2.5.24}$$

由式(2.5.21),**有**

$$\boldsymbol{u}\cdot(\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{u})\cdot[\boldsymbol{r}\times(\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{u})]=\lambda(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{u})\cdot[(\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{r})\times(\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{u})]$$

以上是把式(2.5.18)**代入的结果。前面讲过,正交映射量当然是正则的,所以可以利用式**(2.2.8),**把上式右端变形成为**

$$\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{u}=\lambda\,\mathrm{III}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{u})\cdot\overset{-1}{\mathbf{R}}{}^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{u})=\lambda\,\mathrm{III}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{u})\cdot\mathbf{R}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{u})$$

再将式(2.5.23)**代入上式右端以改造其中的 $\mathbf{R}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{u})$,成为**

$$\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{u}=\lambda\,\mathrm{III}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{u})\cdot[\,\mathrm{I}\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{u}-\boldsymbol{r}\times(\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{u})+\boldsymbol{u}\times(\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{r})]$$

将式(2.5.19)**代入,得**

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{u}&=\lambda\,\mathrm{III}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{u})\cdot[\,\mathrm{I}\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{u}-\boldsymbol{r}\times(\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{u})-\lambda\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{u}]\\&=\lambda\,\mathrm{III}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{u})\cdot[(\,\mathrm{I}-\lambda)\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{u}-\boldsymbol{r}\times(\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{u})]\\&=\lambda\,\mathrm{III}[(\,\mathrm{I}-\lambda)(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{u})^2-(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{r}\times(\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{u})]\end{aligned}$$

把$(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{u})^2=1$ **和式**(2.5.21)**代入,得**

$$\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{R}\cdot u=\lambda\,\mathrm{III}(\,\mathrm{I}-\lambda-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{u})=\lambda\,\mathrm{III}(\,\mathrm{I}-\lambda-\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{u})$$

由此求出 $\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{u}$ 的表达式后,代入式(2.5.24),**得**

$$\cos\theta=\frac{\lambda\,\mathrm{III}(\,\mathrm{I}-\lambda)}{1+\lambda\,\mathrm{III}} \tag{2.5.25}$$

我们希望上式全用主不变量表示,所以还要消去特征值 λ。为此,另取一个也垂直于 r 的单位矢量 w。根据第三主不变量 III 的定义式(2.2.1),**取 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\boldsymbol{r}$ 作为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$,有**

$$\mathrm{III}=\frac{(\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{u})\times(\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{w})\cdot(\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{r})}{[\boldsymbol{uwr}]}$$

由前述,正交映射量保持 u 和 w 的叉积的大小不变,见式(2.5.14)。**又,$\boldsymbol{u}$ 和 w 经正交映射后只是作了绕特征矢量 r 的等角度转动,故上式中的叉积可以用$u\times w$代替。又因为 r 是 R 的特征矢量,有等式**(2.5.16),**故上式成为**

$$\mathrm{III}=\lambda \tag{2.5.26}$$

这个结果与式(2.5.15)**及式**(2.5.17)**是一致的。将式**(2.5.25)**中的 λ 用 III 代替,并利用** $\lambda^2=\mathrm{III}^2=1$,**最终得**

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{I}-\mathrm{III}}{2} \tag{2.5.27}$$

综上所述,正交映射量使平行于特征方向 r 的矢量的映象仍然平行于 r;使垂直于 r 的

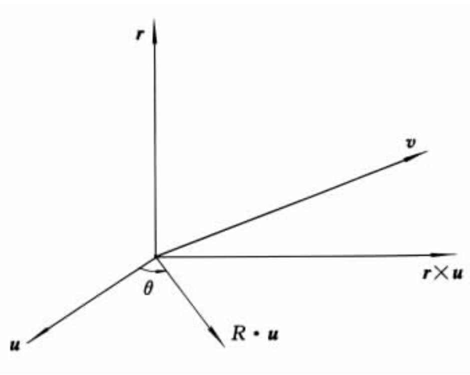


图 2.2

矢量的映象继续垂直于 r，但绕 r 旋转了 θ 角(按右手法则)。设矢量 u 垂直于 r，其映象 $\mathbf{R}\cdot u$ 必在与 r 正交的平面内，显然有分解式(图 2.2)

$$\mathbf{R}\cdot \boldsymbol{u}=\cos\theta \boldsymbol{u}+\sin\theta \boldsymbol{r}\times \boldsymbol{u} \tag{2.5.28}$$

以及

$$\boldsymbol{u}\times(\mathbf{R}\cdot \boldsymbol{u})=\sin\theta \boldsymbol{r} \tag{2.5.29}$$

现考虑空间任意矢量 v。它可以分解为平行于 r 和垂直于 r 的两个分量之和：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &=(\boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{r}+[\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{r}] \\ &=\boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{rr}+(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{rr}) \end{aligned} \tag{2.5.30}$$

根据映射量的线性性质，$\mathbf{R}\cdot v$ 是 $\mathbf{R}$ 分别作用于上式右边两矢量的结果之和。前者保持原向或反向(取决于 $\lambda=\text{Ⅲ}$ 的符号)，后者绕 r 转动 θ 角。后一分量虽然一般不是单位矢量，但对它们仍可用式(2.5.28)。于是，v 的映象写成公式就是

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\cdot \boldsymbol{v} &=(\boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{r})\mathbf{R}\cdot \boldsymbol{r}+\mathbf{R}\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{rr}) \\ &=\text{Ⅲ}(\boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{r}+\cos\theta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{rr})+\sin\theta[\boldsymbol{r}\times \boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{r}\times \boldsymbol{r}] \\ &=[\cos\theta+(\text{Ⅲ}-\cos\theta)\boldsymbol{rr}\cdot+\sin\theta \boldsymbol{r}\times]\boldsymbol{v} \end{aligned} \tag{2.5.31}$$

这是正交映射量对任意矢量作用的公式，其地位类似于对反对称映射量成立的公式(2.5.7)。

下面看几种特殊情形：

(1) $\text{Ⅲ}=1$，$\theta=0$：此时，$\mathbf{R}=I$；

(2) $\text{Ⅲ}=1$，$\theta=\pi$：此时，$\mathbf{R}=-I+2\boldsymbol{rr}$；

由式(2.5.31)，有

$$\mathbf{R}\cdot \boldsymbol{v}=-\boldsymbol{v}+2\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot \boldsymbol{v})$$

图 2.3 画出了 v 和 r 决定的平面。通过作图，可以看出，v 和 $\mathbf{R}\cdot v$ 以 r 轴为对称，即整个空间绕 r 转动 π。

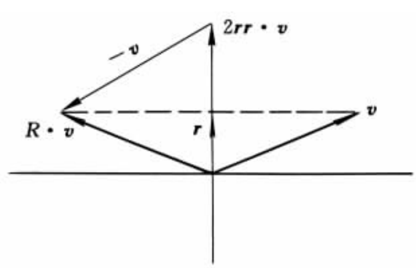


图 2.3

(3) $\text{Ⅲ}=-1$，$\theta=0$，$\mathbf{R}=I-2\boldsymbol{rr}$；

此时 $\mathbf{R}\cdot \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}-2\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot \boldsymbol{v})$

从图 2.4 可以看出，这是对垂直于 r 的平面的镜面反射。

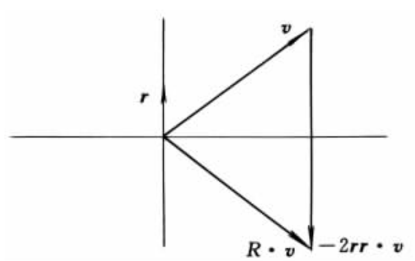


图 2.4

2.6 对称映射量的特征方向

从节 2.3 知，任何映射量 S 至少有一个实的特征值，并至少有一个特征方向与之对应。这样，对称映射量也必有一个特征方向。令它用矢量 i 代表：

$$\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{i}=\underset{1}{s}\boldsymbol{i}\tag{2.6.1}$$

其中，$\underset{1}{s}$ 是特征值，也是特征方程

$$s^3-\mathrm{I}\,s^2+\mathrm{II}\,s-\mathrm{III}=0\tag{2.6.2}$$

的一个实根。若 S 蜕化，$\mathrm{III}=0$，就取 $\underset{1}{s}=0$。这时，特征方向 i 也就是零向。

取垂直于 i 的任一非零矢量 $\boldsymbol{u}$，有

$$\boldsymbol{i}\cdot(\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{u})=\boldsymbol{i}\cdot\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{u}\cdot(\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{i})=\underset{1}{s}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{i}=0\tag{2.6.3}$$

这说明，$\boldsymbol{u}$ 的映象仍垂直于 i。注意，上式中用到了对称映射量的性质：

$$\boldsymbol{i}\cdot\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{i}$$

故结论仅对对称映射量成立。今再取单位矢量 j'，k'，使 i，j'，k'，构成正交系。根据式(2.6.3)的性质，$\mathbf{S}\cdot j'$ 和 $\mathbf{S}\cdot k'$ 都垂直于 i，所以可用 j' 和 k' 展开，设为

$$\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{j}'=a\boldsymbol{j}'+c\boldsymbol{k}'$$

$$\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{k}'=d\boldsymbol{j}'+b\boldsymbol{k}'$$

由 $j'\cdot\mathbf{S}\cdot k'=k'\cdot\mathbf{S}\cdot j'$，得 $d=c$，于是

$$\begin{aligned}\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{j}'&=a\boldsymbol{j}'+c\boldsymbol{k}'\\ \mathbf{S}\cdot\boldsymbol{k}'&=c\boldsymbol{j}'+b\boldsymbol{k}'\end{aligned}\tag{2.6.4}$$

下面分两种情形进行讨论：

(1) $c=0$。此时，j' 和 k' 是 S 的特征方向，说明 S 存在三个互相垂直的特征方向：$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}'$，$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}'$。这时，$a=\underset{2}{s}$，$b=\underset{3}{s}$ 是方程式(2.6.2)的实根(不排除 a，b 取零值的可能性。出现重根 $a=b\neq\underset{1}{s}$ 或 $a=b=\underset{1}{s}$ 也是可能的。或者 a 和 b 虽非重根，但其中之一等于 $\underset{1}{s}$ 也是可能的)。

(2) $c\neq0$。我们要证明 S 同样存在三个相互垂直的特征方向。为此，我们来找垂直于 i 的其他特征方向。这个特征方向当然有下述一般形式：

$$\boldsymbol{u}=x\boldsymbol{j}'+y\boldsymbol{k}'\tag{2.6.5}$$

因为 $c\neq0$，故 j' 和 k' 均非特征方向，所以 x 和 y 均不为零。$\boldsymbol{u}$ 的映象是

$$\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{u}=x\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{j}'+y\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{k}'=(ax+cy)\boldsymbol{j}'+(cx+by)\boldsymbol{k}'\tag{2.6.6}$$

$\boldsymbol{u}$ 是特征方向的充分必要条件是与它的映象 $\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{u}$ 平行，也就是

$$\frac{ax+cy}{x}=\frac{cx+by}{y}=s\tag{2.6.7}$$

由上式中的前一个等式得

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{a-b}{c}\left(\frac{x}{y}\right)-1=0\tag{2.6.8}$$

其根为

$$\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{a-b}{2c}\pm\sqrt{\left(\frac{a-b}{2c}\right)^2+1} \tag{2.6.9}$$

所以，对应于这两个不同根$\frac{x_2}{y_2}$，$\frac{x_3}{y_3}$的方向 $\boldsymbol{u}_2$ 和 $\boldsymbol{u}_3$（取为单位矢量）就是特征方向：

$$\boldsymbol{j}=\boldsymbol{u}_2=x_2\boldsymbol{j}'+y_2\boldsymbol{k}' \tag{2.6.10}$$

$$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{u}_3=x_3\boldsymbol{j}'+y_3\boldsymbol{k}' \tag{2.6.11}$$

由式(2.6.7)的第二个等式知对应的特征值是

$$s=c\left(\frac{x}{y}\right)+b：\underset{2}{s}=c\left(\frac{x_2}{y_2}\right)+b,\quad \underset{3}{s}=c\left(\frac{x_3}{y_3}\right)+b \tag{2.6.12}$$

再从式(2.6.8)知

$$\frac{x_2}{y_2}\cdot\frac{x_3}{y_3}=-1$$

从而

$$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=x_2x_3+y_2y_3=0 \tag{2.6.13}$$

这说明按式(2.6.10)确定的特征方向互相垂直。总之，对于 $c\neq0$ 的情形，也存在三个互相垂直的特征方向。

总的结论是：对称映射量 S 必有三个互相垂直的特征方向，其对应的特征值 $\underset{1}{s}$，$\underset{2}{s}$ 和 $\underset{3}{s}$ 均为实数，且它们就是特征方程式(2.6.2)的根的全部（若 $\underset{1}{s}$，$\underset{2}{s}$，$\underset{3}{s}$ 中有相等者，那就是重根）。

2.7 对称映射量的主值和主方向(principal direction)

先给出主方向的定义：如果空间中存在三个相互正交的方向 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，经映射量 B 作用后，其映象 $\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{i}$，$\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{j}$，$\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{k}$ 仍然保持正交，则称这三个方向 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 为此映射量 B 的主方向。

对于任意映射量，存在以下定理：任意映射量均有三个主方向。下面来证明。

首先指出，映射量 $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{B}$ 总是对称的，不论 B 是否对称，这是显然的，因为 $(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{B})^{\mathrm{T}}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot(\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{B}$。这样，根据上一节的结论，$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{B}$ 作为对称映射量，必有三个相互垂直的特征方向，设为 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，有关系：

$$(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{B})\cdot\boldsymbol{i}=\underset{1}{b}\boldsymbol{i},\qquad(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{B})\cdot\boldsymbol{j}=\underset{2}{b}\boldsymbol{j},\qquad(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{B})\cdot\boldsymbol{k}=\underset{3}{b}\boldsymbol{k}$$

其中，$\underset{1}{b}$，$\underset{2}{b}$，$\underset{3}{b}$ 是特征值。可以肯定 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 就是 B 的主方向，这是因为

$$(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{i})\cdot(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{j})=(\boldsymbol{i}\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{T}})\cdot(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{j})=\boldsymbol{i}\cdot(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{B})\cdot\boldsymbol{j}=\underset{2}{b}\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0$$

就是说，原来垂直的两个方向，其映象仍然相互垂直。这就证明了，任意映射量 B 都有三个主方向。

有了这个定理，我们来看看对称映射量。显然有结论：对称映射量 S 的特征方向同时也是主方向。这是因为，根据上述定理，S 的三个主方向就是 $\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{S}=\mathbf{S}^2$ 的三个特征方向。而依照式(2.3.11)，$\mathbf{S}^2$ 的特征方向与 S 的特征方向是相同的。

因为对称映射量的特征方向同时是它的主方向，所以特征值 $\underset{1}{s},\underset{2}{s},\underset{3}{s}$ 也称为 S 的主值。对于对称映射量，其主值可以通过求解特征方程式(2.6.2)给出具体表达式，过程如下：

先将特征方程式(2.6.2)换元

$$s=x+\frac{I}{3} \tag{2.7.1}$$

得 Cardano(卡尔丹)形式：

$$x^3+px+q=0 \tag{2.7.2}$$

其中

$$p=\mathrm{II}-\frac{\mathrm{I}^2}{3} \tag{2.7.3}$$

$$q=\frac{1}{3}\mathrm{I}\times\mathrm{II}-\frac{2}{27}\mathrm{I}^3-\mathrm{III}=-\left|\mathbf{S}^{i}_{\cdot j}-\frac{I}{3}\delta^{i}_{j}\right| \tag{2.7.4}$$

因为已知方程(2.7.2)的三个根都是实根，故其判别式

$$\triangle=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3\leqslant 0 \tag{2.7.5}$$

这说明必有 $p\leqslant 0$，于是可令

$$e^2=-p=\frac{\mathrm{I}^2}{3}-\mathrm{II} \tag{2.7.6}$$

从而判别式改写成

$$\triangle=\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{e^2}{3}\right)^3 \tag{2.7.7}$$

根据卡尔丹公式，可得方程式(2.7.2)的三个根：

$$\begin{aligned}\underset{1}{x}&=\frac{2e}{\sqrt{3}}\sin\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)\\ \underset{2}{x}&=\frac{2e}{\sqrt{3}}\sin\varphi\\ \underset{3}{x}&=\frac{2e}{\sqrt{3}}\sin\left(\varphi-\frac{2\pi}{3}\right)\end{aligned} \tag{2.7.8}$$

其中

$$\varphi=\frac{1}{3}\arcsin\frac{3\sqrt{3}q}{2e^3},\quad -\frac{\pi}{6}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{6} \tag{2.7.9}$$

最后代回式(2.7.1)，得对称映射量 S 的三个主值：

$$\underset{1}{s}=\frac{2e}{\sqrt{3}}\sin\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{1}{3}\mathrm{I}$$

$$\underset{2}{s}=\frac{2e}{\sqrt{3}}\sin\varphi+\frac{1}{3}\mathrm{I} \tag{2.7.10}$$

$$\underset{3}{s}=\frac{2e}{\sqrt{3}}\sin\left(\varphi-\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{1}{3}\mathrm{I}$$

根据式(2.7.9)的 φ 的变化范围,可知 $\underset{1}{s}\geqslant\underset{2}{s}\geqslant\underset{3}{s}$。

通常把沿主方向的单位矢量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 取作协变基 $\boldsymbol{g}_i$,称沿主方向的坐标轴为主轴(principal axis)。因为主轴(坐标)系的正交性,必有 $\boldsymbol{g}^i=\boldsymbol{g}_i$(逆变基与协变基重合),$g_{ij}=g^{ij}=\delta_j^i$。可以想象,对称映射量在主轴系下必有简洁的表达式,称为主轴表达式。

下面给出对称映射量的主轴表达式。首先写出

$$\mathbf{S}=S_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j=S_{11}\boldsymbol{ii}+S_{12}\boldsymbol{ij}+S_{13}\boldsymbol{ik}+S_{21}\boldsymbol{ji}+S_{22}\boldsymbol{jj}$$
$$+S_{23}\boldsymbol{jk}++S_{31}\boldsymbol{ki}+S_{32}\boldsymbol{kj}+S_{33}\boldsymbol{kk}$$

因为主方向 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 都是 S 的特征方向,故有

$$\underset{1}{s}\boldsymbol{i}=\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{i}=S_{11}\boldsymbol{i}+S_{21}\boldsymbol{j}+S_{31}\boldsymbol{k}$$

$$\underset{2}{s}\boldsymbol{j}=\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{j}=S_{12}\boldsymbol{i}+S_{22}\boldsymbol{j}+S_{32}\boldsymbol{k}$$

$$\underset{3}{s}\boldsymbol{k}=\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{k}=S_{13}\boldsymbol{i}+S_{23}\boldsymbol{j}+S_{33}\boldsymbol{k}$$

比较左、右两边知

$$S_{11}=\underset{1}{s},\quad S_{22}=\underset{2}{s},\quad S_{33}=\underset{3}{s}\quad \text{当 } i\neq j$$

故最终有

$$\mathbf{S}=\underset{1}{s}\boldsymbol{ii}+\underset{2}{s}\boldsymbol{jj}+\underset{3}{s}\boldsymbol{kk} \tag{2.7.11}$$

这就是对称映射量的主轴表达式。

进一步还有结论:正则对称映射量的主值均不等于零,而正定对称映射量的主值均大于零。在正定对称映射量的作用下,整个空间沿主方向被拉长为等于主值的倍数,故有时叫纯变形映射量(指没有发生歪斜或没有发生畸变)。另外,根据式(2.3.11),可以写出对称映射量 B 的 n 次幂的主轴表达式为

$$\mathbf{S}^n=\underset{1}{s}^n\boldsymbol{ii}+\underset{2}{s}^n\boldsymbol{jj}+\underset{3}{s}^n\boldsymbol{kk} \tag{2.7.12}$$

以上概念可以被推广来定义 S 的张量函数:如 $f(\mathbf{S})$ 在实数域内有意义,则有

$$f(\mathbf{S})=f(\underset{1}{s})\boldsymbol{ii}+f(\underset{2}{s})\boldsymbol{jj}+f(\underset{3}{s})\boldsymbol{kk} \tag{2.7.13}$$

例如,对非负主值的对称映射量就可以开方,有

$$\mathbf{S}^{\frac{1}{n}}=\underset{1}{s}^{\frac{1}{n}}\boldsymbol{ii}+\underset{2}{s}^{\frac{1}{n}}\boldsymbol{jj}+\underset{3}{s}^{\frac{1}{n}}\boldsymbol{kk} \tag{2.7.14}$$

这里约定 $\underset{i}{s}^{\frac{1}{n}}$ 取非负实根。例如，在连续介质力学中，就要求变形张量的 $\frac{1}{2}$ 次幂。而对正定对称映射量还可以求对数：

$$\ln \mathbf{S}=\ln \underset{1}{s}\boldsymbol{ii}+\ln \underset{2}{s}\boldsymbol{jj}+\ln \underset{3}{s}\boldsymbol{kk} \tag{2.7.15}$$

2.8 映射量的分解

（1）加法分解

任何映射量可以惟一地分解为对称部分与反对称部分之和。以 $\mathbf{B}$ 为例：

$$\mathbf{B}=\frac{1}{2}(\mathbf{B}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}})+\frac{1}{2}(\mathbf{B}-\mathbf{B}^{\mathrm{T}})\equiv\mathbf{S}+\mathbf{A} \tag{2.8.1}$$

其中

$$\mathbf{S}=\frac{1}{2}(\mathbf{B}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}),\quad \mathbf{A}=\frac{1}{2}(\mathbf{B}-\mathbf{B}^{\mathrm{T}}) \tag{2.8.2}$$

分别是对称的和反对称的。

下面证明加法分解的惟一性。设另有一分解 $\tilde{\mathbf{S}}+\tilde{\mathbf{A}}$，与式(2.8.1)比较，得

$$\mathbf{S}-\tilde{\mathbf{S}}=\mathbf{A}-\tilde{\mathbf{A}}$$

上式中左侧是对称的，右侧是反对称的，所以必等于零映射量，故 $\mathbf{S}=\tilde{\mathbf{S}}$，$\mathbf{A}=\tilde{\mathbf{A}}$。从而，加法分解的惟一性得证。

（2）乘法分解(极分解)

定理：任何正则映射量均可惟一地分解为正定对称映射量和正交映射量的点积(左分解)或惟一地分解为正交映射量和正定对称映射量的点积(右分解)。表达式是

$$\mathbf{B}=\overset{l}{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{R}=\mathbf{R}\cdot\overset{r}{\mathbf{S}} \tag{2.8.3}$$

式中，$\overset{l}{\mathbf{S}}$ 和 $\overset{r}{\mathbf{S}}$ 分别是左、右正定对称映射量，$\mathbf{R}$ 是正交映射量。

证明：从节 2.2 知，$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ 和 $\mathbf{B}$ 同时正则，故对任意非零矢量 $\boldsymbol{u}$，有

$$\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{u}\neq 0,\quad \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{u}\neq 0$$

从而
$$(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{u})^2=\boldsymbol{u}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{T}})\cdot\boldsymbol{u}>0$$

和
$$(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{u})^2=\boldsymbol{u}\cdot(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{B})\cdot\boldsymbol{u}>0$$

以上两式说明了 $\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ 和 $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{B}$ 的正定性，加上它们又都是对称的，所以说明 $\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ 和 $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{B}$ 都是正定对称映射量。根据式(2.7.14)，可求其平方根，分别定义为

$$\overset{l}{\mathbf{S}}=(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{\frac{1}{2}},\quad \overset{r}{\mathbf{S}}=(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{B})^{\frac{1}{2}} \tag{2.8.4}$$

它们也都是正定对称的，有逆存在。如果正则映射量 $\mathbf{B}$ 可以按式(2.8.3)的第一式分解(先证左分解)，则必有

$$\mathbf{R}=\overset{l}{\mathbf{S}}{}^{-1}\cdot\mathbf{B} \tag{2.8.5}$$

下面证明 R 的正交性。由式(2.8.5)和式(2.8.4),有

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}^{\mathrm{T}}=(\overset{l}{\mathbf{S}}{}^{-1}\cdot\mathbf{B})\cdot(\overset{l}{\mathbf{S}}{}^{-1}\cdot\mathbf{B})^{\mathrm{T}}=\overset{l}{\mathbf{S}}{}^{-1}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\overset{l}{\mathbf{S}}{}^{-1}$$

$$=\overset{l}{\mathbf{S}}{}^{-1}\cdot\overset{l}{\mathbf{S}}{}^{2}\cdot\overset{l}{\mathbf{S}}{}^{-1}=I$$

依式(2.5.11a),说明 R 是正交映射量。

再证明左分解的惟一性。设另有一左分解

$$\overset{l}{\tilde{\mathbf{S}}}\cdot\tilde{\mathbf{R}}=\mathbf{B}=\overset{l}{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{R}\tag{2.8.6}$$

则

$$\mathbf{R}=\overset{l}{\mathbf{S}}{}^{-1}\cdot\overset{l}{\tilde{\mathbf{S}}}\cdot\mathbf{R}\tag{2.8.7}$$

取转置

$$\overset{-1}{\mathbf{R}}=\mathbf{R}^{\mathrm{T}}=(\overset{l}{\mathbf{S}}{}^{-1}\cdot\overset{l}{\tilde{\mathbf{S}}}\cdot\tilde{\mathbf{R}})^{\mathrm{T}}=\tilde{\mathbf{R}}^{\mathrm{T}}\cdot\overset{l}{\tilde{\mathbf{S}}}\cdot\overset{l}{\mathbf{S}}{}^{-1}$$

再求其逆

$$\mathbf{R}=(\tilde{\mathbf{R}}^{\mathrm{T}}\cdot\overset{l}{\tilde{\mathbf{S}}}\cdot\overset{l}{\mathbf{S}}{}^{-1})^{-1}=\overset{l}{\mathbf{S}}\cdot\overset{l}{\tilde{\mathbf{S}}}{}^{-1}\cdot\tilde{\mathbf{R}}\tag{2.8.8}$$

此式与式(2.8.7)相减,得

$$(\overset{l}{\mathbf{S}}{}^{-1}\cdot\overset{l}{\tilde{\mathbf{S}}}-\overset{l}{\mathbf{S}}\cdot\overset{l}{\tilde{\mathbf{S}}}{}^{-1})\cdot\tilde{\mathbf{R}}=0$$

两边右点乘以 $\tilde{\mathbf{R}}^{\mathrm{T}}$,得 $\overset{l}{\mathbf{S}}{}^{-1}\cdot\overset{l}{\tilde{\mathbf{S}}}=\overset{l}{\mathbf{S}}\cdot\overset{l}{\tilde{\mathbf{S}}}{}^{-1}$,即 $\overset{l}{\tilde{\mathbf{S}}}{}^{2}=\overset{l}{\mathbf{S}}{}^{2}$,因此 $\overset{l}{\tilde{\mathbf{S}}}=\overset{l}{\mathbf{S}}$。代回式(2.8.7),又得 $\tilde{\mathbf{R}}=\mathbf{R}$。这样就证明了左分解的惟一性。同法可证右分解的存在与惟一性。

还可证明,左、右分解中的正交映射量是同一个映射量 R。为此,先设左、右分解中的正交映射量不同,即有

$$\mathbf{B}=\mathbf{R}'\cdot\overset{r}{\mathbf{S}}=\overset{l}{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{R}=(\mathbf{R}\cdot\overset{-1}{\mathbf{R}})\cdot(\overset{l}{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{R})=\mathbf{R}\cdot(\overset{-1}{\mathbf{R}}\cdot\overset{l}{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{R})\tag{2.8.9}$$

由于右边括号内所表示的映射量是对称的:

$$(\overset{-1}{\mathbf{R}}\cdot\overset{l}{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{R})^{\mathrm{T}}=\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\cdot\overset{l}{\mathbf{S}}{}^{\mathrm{T}}\cdot\overset{-1}{\mathbf{R}}{}^{\mathrm{T}}=\overset{-1}{\mathbf{R}}\cdot\overset{l}{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{R}$$

而它左边点乘的是正交映射量 R,见式(2.8.9),则根据分解的惟一性,这就是右分解,于是

$$\overset{r}{\mathbf{S}}=\overset{-1}{\mathbf{R}}\cdot\overset{l}{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{R},\quad \mathbf{R}'=\mathbf{R}$$

式(2.8.3)证毕。

习　题　二

2.1　求证对于任意映射量 T,有

$$\Delta(\lambda)=\det(\lambda\delta^{i}_{j}-T^{i}_{\cdot j})=\det(\lambda\delta^{j}_{i}-T_{i}^{\cdot j})$$

2.2 **已知任意映射量 $\mathbf{T}$ 及其转置 $\mathbf{T}^{\mathrm{T}}$ 满足下式：**

$$X=\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}^{\mathrm{T}},\quad Y=\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{T}$$

求证：X，Y 均为对称张量，且

$$\Delta(\lambda)=\det(\lambda\delta^i_j-\mathbf{X}^i_{.j})=\det(\lambda\delta^i_j-\mathbf{Y}^i_{.j})$$

2.3 **对于任意映射量 $\mathbf{T}$ 和任意矢量 $\boldsymbol{u}$，求证：**$\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{T}^{\mathrm{T}}$。

2.4 **对于任意映射量 A 和 B，求证：**$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{\mathrm{T}}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$。

2.5 **已知正则映射量 $\mathbf{T}$ 和矢量 $\boldsymbol{u}$ 满足关系** $\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{u}=0$，**求证：**$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$。

2.6 **对于正则映射量 T，求证：其逆 $\mathbf{T}^{-1}$ 的矩阵等于 T 的逆矩阵，即**$[\mathbf{T}^{-1}]=[\mathbf{T}]^{-1}$。

2.7 **对于正则映射量 T，求证：**$(\mathbf{T}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\mathbf{T}^{-1})^{\mathrm{T}}$。

2.8 **已知 A 和 B 为正则映射量。求证：**$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}$。

2.9 **对于任意映射量 T，求证：**$\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\geqslant 0$，$\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{T}\geqslant 0$。（**提示：利用题** 2.3 **和题** 2.4）

2.10 **已知正交映射量 Q，求证：**$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}=\mathbf{Q}^{-1}$ **亦为正交映射量。**

2.11 **假设对于任意矢量 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，均成立**$(\mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{u})\cdot(\mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$，**求证：**$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}=\mathbf{Q}^{-1}$，**即 Q 为正交映射量。**

2.12 **对于矢量 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 和正交映射量 Q，求证：**$(\mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{u})\times(\mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{v})=(\det\mathbf{Q})\mathbf{Q}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$。

2.13 **对于矢量 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 和正则映射量 B，求证：**$(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{u})\times(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{v})=(\det\mathbf{B})\mathbf{B}^{-\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$。

2.14 **对于任意映射量 T，定义其正交相似映射量为** $\widetilde{\mathbf{T}}=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$，**其中，Q 为一正交映射量。现假设 T 的特征值为** λ，**特征矢量为** $\boldsymbol{a}$；$\widetilde{\mathbf{T}}$ **的特征值为** $\tilde{\lambda}$，**特征矢量为** $\tilde{\boldsymbol{a}}$，**求证：**$\lambda=\tilde{\lambda}$，$\tilde{\boldsymbol{a}}=\mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{a}$。

2.15 **已知对称映射量 M 与 N 之间满足：**$\mathbf{M}^2=\mathbf{N}$，**求证：M 与 N 具有相同的主方向。**

2.16 **已知映射量 T 和 S，对于任意矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，均成立** $\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{b}$，**求证：**$\mathbf{T}=\mathbf{S}$。

2.17 **已知对称映射量 M，N，对于任意矢量 $\boldsymbol{a}$ 均成立** $\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{M}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{a}$，**求证：**$\mathbf{M}=\mathbf{N}$。

2.18 **已知 T 和 S 为任意映射量，求证：**$\mathbf{T}:\mathbf{S}=\mathbf{S}:\mathbf{T}=\mathbf{T}^{\mathrm{T}}:\mathbf{S}^{\mathrm{T}}=\mathbf{S}^{\mathrm{T}}:\mathbf{T}^{\mathrm{T}}$。

2.19 **已知映射量**

$$\mathbf{T}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2+\sqrt{3}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$$

试：（1）**进行加法分解；**（2）**进行乘法分解。**

2.20 **给定任意矢量 $\boldsymbol{v}$ 和任一单位矢量 $\boldsymbol{e}$，总可把矢量 $\boldsymbol{v}$ 分解成一个平行于 $\boldsymbol{e}$ 的分矢量和一个垂直于 $\boldsymbol{e}$ 的分矢量，证明其表达式是**

$$\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}+\boldsymbol{e}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{e})$$

2.21 **设对称映射量 B 的系数矩阵为**

$$[\mathbf{B}^i_{.j}]=\begin{bmatrix}3&2&0\\2&3&0\\0&0&9\end{bmatrix}$$

求 $\mathbf{B}$ 的平方根$\sqrt{\mathbf{B}}$。

2.22　如 $\mathbf{A}$ 是对称映射量，$\mathbf{B}$ 是反对称映射量，证明：$\mathbf{A} : \mathbf{B} = 0$。

第 3 章　张量场论

3.1　引言

“场”的概念，读者在高等数学里就已经熟悉了。如果空间某区域内的每一点都对应着某物理量的一个确定值，就说在这个空间区域内确定了该物理量的场。换句话说，所谓的“场”，就是指一个物理量在空间中的分布。当这个物理量是标量时，它在空间中的分布称为标量场。标量场的例子有温度场 $\boldsymbol{u}(x,y,z)$、密度场 $\rho(x,y,z)$、电位场 $e(x,y,z)$等。当这个物理量是矢量时，它在空间中的分布构成矢量场。矢量场的例子有流速场 $\boldsymbol{v}(x,y,z)$、电场 $\boldsymbol{E}(x,y,z)$、磁场 $\boldsymbol{H}(x,y,z)$等。

为了描述场的空间变化特性，要引入几个重要概念。其一是梯度。标量场 φ 有梯度，用 $\mathrm{grad}\varphi$ 表示。在笛卡尔直角坐标系中

$$\mathrm{grad}\varphi=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y},\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=\nabla\varphi$$

式中，$\nabla=\boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$称为（笛卡尔直角坐标系中的）哈密顿（Hamilton）算子。标量场 φ 的梯度 $\mathrm{grad}\varphi$ 是矢量，它的方向与过点(x,y,z)的等值面 $\varphi=$常数的法线方向 $\boldsymbol{N}$ 重合，并指向 φ 增加的一方，是该点处标量函数 φ 变化率最大的方向。它的长度等于$\dfrac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{N}}$。

描述场的空间变化的另一个量是散度。用 $\mathrm{div}\boldsymbol{R}$ 表示矢量场 $\boldsymbol{R}$ 的散度。矢量场的散度是标量。在笛卡尔直角坐标系中

$$\mathrm{div}\boldsymbol{R}=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=\nabla\cdot\boldsymbol{R}$$

矢量场 $\boldsymbol{R}$ 在场内某点的散度刻画了矢量 $\boldsymbol{R}$ 在该点处的通量（用 $\boldsymbol{R}$ 的面积分表示）的大小和进出（流进或流出），也称为该点处的源的强度。散度为零，表示该点处无源。

描述场的空间变化特性的第三个量是旋度。用 $\mathrm{curl}\boldsymbol{R}$ 或 $\mathrm{rot}\boldsymbol{R}$ 表示矢量场 $\boldsymbol{R}$ 的旋度。矢量场的旋度是矢量。在笛卡尔直角坐标系中

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{R}=\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}=\nabla\times\boldsymbol{R}$$

矢量场 $\boldsymbol{R}$ 在场内某点的旋度描述了矢量在该点处的环量（用矢量沿封闭曲线的曲线积分表示）的面密度的大小和方向。

以上所讲的场物理量都是空间点的函数。它的值是随点的不同而变化的。场物理量还可能随时间变化，称为非定常场。如果不随时间变化，则称为定常场。

在张量分析中，我们将从两个方面对上述场的概念加以推广。其一是把标量场、矢量场的概念推广到张量场。这时，空间中每一点上的物理量是张量。张量场的例子有应力场 $\sigma_{ij}(x,y,z)$等。第二方面的推广是关于自变量的。过去我们接触到的标量函数或矢量函

数，它们的自变量总是标量（坐标）。在张量分析中，自变量的含义可以推广到张量，即可能有张量的标量函数或者张量的张量函数。

3.2 克里斯托夫(Christoffel)符号

对于任意曲线坐标系 x^i，可以根据式(1.2.2)确定协变基矢量 $\boldsymbol{g}_i$，再根据式(1.1.7)确定逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^i$。必须强调，这些基矢量在空间的不同点上，其大小和方向一般都不同。换句话说，对于任意曲线坐标系，其基矢量是点的位置（坐标）的函数，这与直线坐标系是不同的。直线坐标系的基矢量在整个空间的任意点上都相同，不随点的位置的变化而变化。所以，也称曲线坐标系为局部坐标系，称直线坐标系为整体坐标系。笛卡尔直角坐标系是三个坐标轴相互正交的特殊的直线坐标系。

为了描述基矢量随点的位置而变化的特性，我们引入基矢量关于坐标的导数的概念。先考虑点 $M(x^i)$ 处的协变基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 关于坐标的偏导数 $\dfrac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^j}$。按偏导数的定义知，它也是一个矢量，故可在点 M 处的基矢量中分解。令分解式是

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^j}=\Gamma_{ijk}\boldsymbol{g}^k=\Gamma_{ij}^k\boldsymbol{g}_k \tag{3.2.1}$$

其中，Γ_{ijk} 和 Γ_{ij}^k 分别称为第一类和第二类克里斯托夫(Christoffel)符号。简称第一类和第二类克氏符号。

以后，我们用 ∂_j 或右下标“$,j$”代替偏导数算符 $\dfrac{\partial}{\partial x^j}$。后者也称为逗号记法，例如

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x^j}=\partial_j\boldsymbol{g}_i=\boldsymbol{g}_{i,j} \tag{3.2.2}$$

由于

$$\boldsymbol{g}_{i,j}\cdot\boldsymbol{g}_k=\Gamma_{ijl}\boldsymbol{g}^l\cdot\boldsymbol{g}_k=\Gamma_{ijl}\delta_k^l=\Gamma_{ijk} \tag{3.2.3a}$$

$$\boldsymbol{g}_{i,j}\cdot\boldsymbol{g}^k=\Gamma_{ij}^l\boldsymbol{g}_l\cdot\boldsymbol{g}^k=\Gamma_{ij}^l\delta_l^k=\Gamma_{ij}^k \tag{3.2.3b}$$

所以，也用式(3.2.3)来定义两类克氏符号。

- 克氏符号不是张量

克氏符号有三个自由指标，在三维空间中，共有 $3^3=27$ 个量。但容易证明，克氏符号并不是张量的分量。事实上，根据张量分量的坐标转换关系，如果在某一个坐标系中，一个张量的所有分量全为零，则在任意坐标系中，该张量的所有分量也必然为零。但克氏符号却不具有这样的特性。在直线坐标系中，因为基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 不变化，所以

$$\Gamma_{ijk}=\Gamma_{ij}^k=0 \quad \text{（在直线坐标系中）} \tag{3.2.4}$$

而在曲线坐标系中，一般地

$$\Gamma_{ijk}\neq 0;\quad \Gamma_{ij}^k\neq 0$$

所以，两类克氏符号 Γ_{ijk} 和 Γ_{ij}^k 都不是张量的分量。

- 克氏符号的三个指标

从式(3.2.1)可看出,哑指标 k 是克氏符号的第三指标。必须指出,虽然克氏符号不是张量的分量,但其第三指标却可以像张量分量的指标那样上升和下降。这不难看出,因为根据定义式(3.2.3),有

$$\Gamma_{ijk}=\boldsymbol{g}_{i,j}\cdot\boldsymbol{g}_k=\Gamma_{ij}^l\boldsymbol{g}_l\cdot\boldsymbol{g}_k=\Gamma_{ij}^l g_{lk} \tag{3.2.5a}$$

$$\Gamma_{ij}^k=\boldsymbol{g}_{i,j}\cdot\boldsymbol{g}^k=\Gamma_{ijl}\boldsymbol{g}^l\cdot\boldsymbol{g}^k=\Gamma_{ijl}g^{lk} \tag{3.2.5b}$$

至于克氏符号的前两个指标 i 和 j,它们是不能用度量张量进行指标升降的,因为克氏符号不是张量。但因为,根据协变基矢量的定义,有

$$\boldsymbol{g}_{i,j}=\boldsymbol{r}_{,ij}=\boldsymbol{r}_{,ji}=\boldsymbol{g}_{j,i} \tag{3.2.6}$$

所以,根据定义式(3.2.3),有

$$\Gamma_{ijk}=\Gamma_{jik},\quad \Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ji}^k \tag{3.2.7}$$

这说明,克氏符号关于前两个指标 i 和 j 是对称的。这样,每一类克氏符号只有 18 个量。

- <u>克氏符号可以用度量张量对坐标的导数表示</u>

第一类克氏符号 Γ_{ijk} 可以用度量张量的协变分量 g_{ij} 对坐标的偏导数表示。由于 $g_{ij}=\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_j$,对此式求关于坐标 x^k 的偏导数,得

$$g_{ij,k}=\boldsymbol{g}_{i,k}\cdot\boldsymbol{g}_j+\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_{j,k}$$

再利用式(3.2.3),有

$$g_{ij,k}=\Gamma_{ikj}+\Gamma_{jki} \tag{3.2.8}$$

经过指标轮换(即将指标排列从 ijk 换成 jki,再换成 kij),利用式(3.2.7),得

$$g_{jk,i}=\Gamma_{jik}+\Gamma_{kij}=\Gamma_{ijk}+\Gamma_{ikj}$$

$$g_{ki,j}=\Gamma_{kji}+\Gamma_{ijk}=\Gamma_{jki}+\Gamma_{ijk}$$

将此两式相加后减去式(3.2.8),最终得

$$\Gamma_{ijk}=\frac{1}{2}(g_{jk,i}+g_{ki,j}-g_{ij,k}) \tag{3.2.9a}$$

第二类克氏符号 Γ_{ij}^k 也可以用度量张量及其对坐标的偏导数表示。因为利用式(3.2.5b)和上式,立即可得

$$\Gamma_{ij}^l=\frac{1}{2}g^{lk}(g_{jk,i}+g_{ki,j}-g_{ij,k}) \tag{3.2.9b}$$

这说明,只要知道坐标系 x^i 的度量张量的协变分量和逆变分量,就可以按式(3.2.9)计算该坐标系下的克氏符号。

- <u>逆变基的导数</u>

以上我们实际上只讨论了协变基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 的导数。下边看看逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^i$ 关于坐标的偏导数。为此,将

$$\boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}_l = \delta^i_l$$

对坐标 x^j 求偏导数得

$$\boldsymbol{g}^i_{,j} \cdot \boldsymbol{g}_l + \boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}_{l,j} = 0$$

利用定义式(3.2.5b),得

$$\boldsymbol{g}^i_{,j} \cdot \boldsymbol{g}_l = -\Gamma^i_{jl}$$

由此可得

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial x^j} = \partial_j \boldsymbol{g}^i = \boldsymbol{g}^i_{,j} = -\Gamma^i_{jk} \boldsymbol{g}^k \tag{3.2.10}$$

- <u>克氏符号与$\sqrt{g}$的关系</u>

  我们知道,如果把度量张量的九个协变分量排成矩阵,那么,这个矩阵的行列式的值是 g。又,式(1.7.9)给出$\sqrt{g} = [\boldsymbol{g}_1 \boldsymbol{g}_2 \boldsymbol{g}_3]$。下边看$\sqrt{g}$和克氏符号的关系。

  将式(1.7.9)对坐标求偏导数,有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^j} &= \frac{\partial \boldsymbol{g}_1}{\partial x^j} \cdot \boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{g}_3 + \boldsymbol{g}_1 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{g}_2}{\partial x^j} \times \boldsymbol{g}_3 + \boldsymbol{g}_1 \cdot \boldsymbol{g}_2 \times \frac{\partial \boldsymbol{g}_3}{\partial x^j} \\
&= (\Gamma^k_{1j} \boldsymbol{g}_k) \cdot \boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{g}_3 + \boldsymbol{g}_1 \cdot (\Gamma^k_{2j} \boldsymbol{g}_k) \times \boldsymbol{g}_3 + \boldsymbol{g}_1 \cdot \boldsymbol{g}_2 \times (\Gamma^k_{3j} \boldsymbol{g}_k) \\
&= \Gamma^1_{1j} \boldsymbol{g}_1 \cdot g_2 \times \boldsymbol{g}_3 + \Gamma^2_{2j} \boldsymbol{g}_1 \cdot \boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{g}_3 + \Gamma^3_{3j} \boldsymbol{g}_1 \cdot \boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{g}_3 \\
&= (\Gamma^1_{1j} + \Gamma^2_{2j} + \Gamma^3_{3j}) [\boldsymbol{g}_1 \ \boldsymbol{g}_2 \ \boldsymbol{g}_3] = \Gamma^i_{lj} \sqrt{g}
\end{aligned}$$

所以

$$\Gamma^i_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}(\ln \sqrt{g}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x^j}(\ln g) = \frac{1}{2g} \cdot \frac{\partial g}{\partial x^j} \tag{3.2.11}$$

注意,上式中关于指标 i 是约定求和的。

3.3 协变导数

- <u>矢量的导数</u>

  将矢量 $\boldsymbol{v}$ 在其附着点处的协变基中分解,有表达式

$$\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{g}_i \tag{3.3.1a}$$

这是矢量分量与协变基矢量相乘后的求和式。将 $\boldsymbol{v}$ 对坐标 x^j 求导,自然有

$$\boldsymbol{v}_{,j} = (v^i \boldsymbol{g}_i)_{,j} = v^i_{,j} \boldsymbol{g}_i + v^i \boldsymbol{g}_{i,j} \tag{3.3.2a}$$

其中含有协变基矢量对坐标 x^j 的偏导数。把式(3.2.1)代入,得

$$\boldsymbol{v}_{,j} = v^i_{,j} \boldsymbol{g}_i + v^i \Gamma^k_{ij} \boldsymbol{g}_k \tag{3.3.3}$$

将最后一项中两个哑指标 i 和 k 互换,就可以提出公因子 $\boldsymbol{g}_i$:

$$\boldsymbol{v}_{,j}=(v^i_{,j}+v^k\Gamma^i_{jk})\boldsymbol{g}_i \tag{3.3.4a}$$

如果把上式括号中的内容定义为矢量分量 v^i 对于坐标 x^j 的协变导数(Covariant Derivative):

$$v^i_{;j}=v^i_{,j}+v^k\Gamma^i_{jk} \tag{3.3.5a}$$

或

$$\nabla_j v^i=\partial_j v^i+v^k\Gamma^i_{jk}$$

则矢量的导数最终成为

$$\boldsymbol{v}_{,j}=v^i_{;j}\boldsymbol{g}_i \quad 或 \quad \partial_j\boldsymbol{v}=\nabla_j v^i\boldsymbol{g}_i \tag{3.3.6a}$$

在本书中,用分号“;j”或 ∇_j 表示对坐标 x^j 的协变导数,以区别用逗号“,”或 ∂_j 表示普通导数。由式(3.3.5)可以看出,矢量分量的协变导数不仅与该矢量分量 v^i 有关,而且与克氏符号有关(当然是指该矢量附着点处的克氏符号)。在直线坐标系中,克氏符号为零,所以协变导数与普通导数相同。这也很容易理解,因为直线坐标系的基矢量是常量,并不参与求导运算。

矢量还可以在其附着点处的逆变基矢量中分解,有表达式

$$\boldsymbol{v}=v_i\boldsymbol{g}^i \tag{3.3.1b}$$

对坐标 x^j 求导,有

$$\boldsymbol{v}_{,j}=(v_i\boldsymbol{g}^i)_{,j}=v_{i,j}\boldsymbol{g}^i+v_i\boldsymbol{g}^i_{,j} \tag{3.3.2b}$$

把式(3.2.10)代入,交换第二项中的两对哑指标后提出公因子,有

$$\boldsymbol{v}_{,j}=(v_{i,j}-v_k\Gamma^k_{ij})\boldsymbol{g}^i \tag{3.3.4b}$$

把上式中括号中的内容定义为矢量的协变分量 v_i 对坐标 x^j 的协变导数:

$$v_{i;j}=v_{i,j}-v_k\Gamma^k_{ij} \tag{3.3.5b}$$

则矢量 $\boldsymbol{v}$ 对坐标 x^j 的导数又可以写成

$$\boldsymbol{v}_{,j}=v_{i;j}\boldsymbol{g}^i \quad 或 \quad \partial_j\boldsymbol{v}=\nabla_j v_i\boldsymbol{g}^i \tag{3.3.6b}$$

式(3.3.6)说明,矢量对坐标求导只要简单地对矢量分量求协变导数就可以了。基矢量似乎是一个常量,并不参与求导过程。

- 求协变导数的运算是张量运算

下面要说明,$v_{i;j}$ 其实是一个二阶张量的协变分量。为此,将矢量写成另一个坐标系 $x^{i'}$ 中的分量形式:

$$\boldsymbol{v}=v_{i'}\boldsymbol{g}^{i'} \tag{3.3.7}$$

对该坐标 $x^{i'}$ 求导,得

$$\boldsymbol{v}_{,j'}=v_{i';j'}\boldsymbol{g}^{i'}$$

另一方面,根据链式求导法则和式(1.3.16),有

$$\boldsymbol{v}_{,j'}=\boldsymbol{v}_{,j}\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}}=v_{i;j}\boldsymbol{g}^{i}\beta_{j'}^{j}$$

这两个方程的右边当然相等，故有

$$v_{i';j'}\boldsymbol{g}^{i'}=v_{i;j}\boldsymbol{g}^{i}\beta_{j'}^{j} \tag{3.3.8}$$

用基矢量 $\boldsymbol{g}_{k'}=\beta_{k'}^{k}\boldsymbol{g}_{k}$ 点乘上式两端，最终得

$$v_{k';j'}=v_{k;j}\beta_{k'}^{k}\beta_{j'}^{j}$$

这就证明了，$v_{k;j}$ 是一个二阶张量的协变分量。同理可以证明，$v_{;j}^{k}$ 是一个二阶张量的混变分量。因为指标 j 是协变指标，但它的意义是“求导”，所以称为求协变导数。这就是名称“协变导数”的由来。有趣的是，协变导数的每一项（见式(3.3.5)）都不按张量规律变化，但合起来却是张量的分量。

下面再证明，$v_{i;j}$ 和 $v_{;j}^{i}$ 是同一个二阶张量的不同分量。这只要证明二者的指标可以通过度量张量进行升降就可以了。把关系 $\boldsymbol{g}_{i}=g_{ik}\boldsymbol{g}^{k}$ 代入式(3.3.6a)，将结果中的两对哑指标互相交换，易得

$$\boldsymbol{v}_{,j}=v_{;j}^{k}g_{ki}\boldsymbol{g}^{i} \tag{3.3.9}$$

将此式与式(3.3.6b)比较，因 $\boldsymbol{g}^{i}$ 线性无关，故对应系数相等。这导致

$$v_{i;j}=v_{;j}^{k}g_{ki} \tag{3.3.10}$$

下面的问题是，究竟 $v_{i;j}$ 和 $v_{;j}^{i}$ 是哪一个二阶张量的分量形式？为了回答这个问题，我们先考察标量 ϕ 的导数。按照逗号记法，标量 ϕ 对坐标 x^{i} 的导数可以写成

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^{i}}=\phi_{,i} \tag{3.3.11}$$

在另一个坐标系 $x^{i'}$ 中，有

$$\phi_{,i'}=\frac{\partial\phi}{\partial x^{i'}}=\frac{\partial\phi}{\partial x^{i}}\cdot\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}}=\phi_{,i}\beta_{i'}^{i} \tag{3.3.12}$$

上式说明，$\phi_{,i}$ 和矢量的分量一样变换，或者说，$\phi_{,i}$ 其实是一个矢量（一阶张量）的分量。定义这个矢量为标量 ϕ 的梯度：

$$\boldsymbol{u}=\phi_{,i}\boldsymbol{g}^{i}=\mathrm{grad}\phi \tag{3.3.13}$$

现定义哈密顿(Hamilton)矢量微分算子：

$$\nabla=\boldsymbol{g}^{i}\frac{\partial}{\partial x^{i}} \tag{3.3.14}$$

故标量的梯度，即式(3.3.13)式，又可写成

$$\boldsymbol{u}=\mathrm{grad}\phi=\nabla\phi \tag{3.3.15}$$

这是标量的梯度的不变性写法，适用于任意空间曲线坐标系。

回到我们前面提的问题上来。根据张量的实体表示法，$v_{i;j}$ 和 $v_{;j}^{i}$ 所代表的二阶张量当

然是 $v_{i;j}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j$ 和 $v^i_{;j}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j$。利用式(3.3.6)和式(3.3.14),它们可以改写成

$$v_{i;j}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j = v^i_{;j}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j = \boldsymbol{v}_{,j}\boldsymbol{g}^j = \boldsymbol{v}\nabla \tag{3.3.16}$$

又,如果把 $v_{i;j}$ 和 $v^i_{;j}$ 所代表的二阶张量写成 $v_{i;j}\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^i$ 和 $v^i_{;j}\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}_i$,则类似地可以写成

$$v_{i;j}\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^i = \boldsymbol{g}^j v_{i;j}\boldsymbol{g}^i = v^i_{;j}\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{g}^j v^i_{;j}\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{g}^j\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^j} = \nabla\boldsymbol{v} \tag{3.3.17}$$

这说明,$v_{i;j}$ 和 $v^i_{;j}$ 所表示的二阶张量 $\nabla\boldsymbol{v}$ 或 $\boldsymbol{v}\nabla$ 就是矢量的梯度。前者称为左梯度,后者称为右梯度。显然

$$\nabla\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{v}\nabla \tag{3.3.18}$$

这里实际上对式(3.3.14)定义的哈密顿算子作了推广,定义了哈密顿左算子:

$$\nabla(\quad) = \boldsymbol{g}^i\partial_i(\quad) = \boldsymbol{g}^i\frac{\partial(\quad)}{\partial x^i} \tag{3.3.19}$$

和哈密顿右算子

$$(\quad)\nabla = (\quad)_{,j}\boldsymbol{g}^i = \frac{\partial(\quad)}{\partial x^i}\boldsymbol{g}^i \tag{3.3.20}$$

至此,我们有了矢量的梯度的概念。它是标量的梯度概念的自然推广。在高等数学中,只有标量才有梯度。在张量分析中,矢量也有梯度。矢量的梯度是二阶张量。

既然 $v_{i;j}$ 和 $v^i_{;j}$ 是二阶张量 $\nabla\boldsymbol{v}$ 或 $\boldsymbol{v}\nabla$ 的协变分量和混变张量,那自然还有另外一个混变分量

$$v_i^{;k} = v_{i;j}g^{jk} \tag{3.3.21}$$

和一个逆变分量

$$v^{i;k} = v^i_{;j}g^{jk} \tag{3.3.22}$$

必须说明,只有协变导数才表示对真实坐标 x^j 的导数。上两式左端的分号记法只表示求导指标 k 也可以用度量张量进行升降。决不可误认为存在另一套坐标系 x_k,似乎 $v^{i;k}$ 和 $v_i^{;k}$ 是来自矢量 $\boldsymbol{v}$ 对所谓坐标 x_k 的求导。

类似的概念也存在于下例之中。设空间任意一点 $M(x^1,x^2,x^3)$ 的位置矢量是 $\boldsymbol{r}(x^i)$,则位置矢量的微分(其含义是 M 点和邻近点的位置矢量的差的线性主部)是

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i = \mathrm{d}x^i\boldsymbol{g}_i \tag{3.3.23}$$

它是一个矢量。此式说明,$\mathrm{d}x^i$ 就是这个矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 在其附着点 M 处的(局部)基矢量中的分量。直接从变换规律

$$\mathrm{d}x^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i = \beta^{i'}_i\mathrm{d}x^i \tag{3.3.24}$$

也可以看出,$\mathrm{d}x^i$ 是一阶张量(矢量)的逆变分量。那么,根据矢量展开式,当然也有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}x_i\boldsymbol{g}^i \tag{3.3.25}$$

其中

$$\mathrm{d}x_i=\mathrm{d}x^j g_{ij} \tag{3.3.26}$$

这里，$\mathrm{d}x_i$ 仅仅表示它是矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的协变分量。它与真实坐标的微分 $\mathrm{d}x^i$ 通过度量张量而有着联系，或者说，它是真实坐标的微分 $\mathrm{d}x^i$ 的某种线性组合。决不可误认为存在另一套坐标系 x_i，似乎 $\mathrm{d}x_i$ 是该所谓坐标系的微分。

最后，再看式(3.3.10)。左端可改写成

$$v_{i;j}=(v^k g_{ik})_{;j}$$

将此式代入式(3.3.10)，有

$$(v^k g_{ik})_{;j}=v^k_{;j}g_{ik} \tag{3.3.27}$$

这说明，度量张量的分量在求协变导数的运算中相当于一个常量。可以将它移进或移出协变导数号的内外。

3.4 张量对坐标的导数

- 张量分量对于坐标 x^l 的协变导数

以一个三阶张量

$$\boldsymbol{T}=T^{ij}_{\cdot\cdot k}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k \tag{3.4.1}$$

为例。它对坐标 x^l 的导数是

$$\frac{\partial T}{\partial x^l}=\frac{\partial}{\partial x^l}(T^{ij}_{\cdot\cdot k}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k)=\partial_l T^{ij}_{\cdot\cdot k}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k+T^{ij}_{\cdot\cdot k}\partial_l\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k+T^{ij}_{\cdot\cdot k}\boldsymbol{g}_i\partial_l\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k+T^{ij}_{\cdot\cdot k}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\partial_l\boldsymbol{g}^k$$

将式(3.2.1)和式(3.2.10)代入，得

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial x^l}=\partial_l T^{ij}_{\cdot\cdot k}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k+T^{ij}_{\cdot\cdot k}\Gamma^m_{il}\boldsymbol{g}_m\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k+T^{ij}_{\cdot\cdot k}\Gamma^m_{jl}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_m\boldsymbol{g}^k-T^{ij}_{\cdot\cdot k}\Gamma^k_{lm}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^m$$

交换哑指标，提出公因子 $\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k$，得

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial x^l}=(\partial_l T^{ij}_{\cdot\cdot k}+T^{mj}_{\cdot\cdot k}\Gamma^i_{ml}+T^{im}_{\cdot\cdot k}\Gamma^j_{ml}-T^{ij}_{\cdot\cdot m}\Gamma^m_{lk})\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k \tag{3.4.2}$$

将上式括号中的内容定义为张量分量对于坐标 x^l 的协变导数，采用 ∇_l 记号，有

$$\nabla_l T^{ij}_{\cdot\cdot k}=\partial_l T^{ij}_{\cdot\cdot k}+T^{mj}_{\cdot\cdot k}\Gamma^i_{ml}+T^{im}_{\cdot\cdot k}\Gamma^j_{ml}-T^{ij}_{\cdot\cdot m}\Gamma^m_{lk} \tag{3.4.3a}$$

或用分号记法，有

$$T^{ij}_{\cdot\cdot k;l}=T^{ij}_{\cdot\cdot k,l}+T^{mj}_{\cdot\cdot k}\Gamma^i_{ml}+T^{im}_{\cdot\cdot k}\Gamma^j_{ml}-T^{ij}_{\cdot\cdot m}\Gamma^m_{lk} \tag{3.4.3b}$$

代入式(3.4.2)，得

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial x^l}=\partial_l\boldsymbol{T}=\nabla_l T^{ij}_{\cdot\cdot k}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k \tag{3.4.4a}$$

或写作

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial x^l}=\boldsymbol{T}_{,l}=T^{ij}_{\cdot\cdot k;l}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k \tag{3.4.4b}$$

这说明,求一个张量对坐标的偏导数,只需要简单地将它的分量对坐标求协变导数就可以了。基矢量似乎是常量,并不参与求导过程。

从式(3.4.3)可看出,张量分量对坐标的协变导数由若干项相加构成。项数等于张量的阶数加1。第一项是张量分量对坐标的普通导数,以后各项都是该张量分量与第二类克氏符号的约定求和式。将张量分量的每个指标依次用哑指标替代构成了这些约定求和式。如替代的是上指标,则该项为正,如替代的是下指标,则该项为负。

上一节讲到的矢量(一阶张量)分量的协变导数式(3.3.5),是式(3.4.3)的特例。同样,矢量求导式(3.3.6)也是张量求导式(3.4.4)的特例。

值得说明的是,对于标量而言,协变导数和普通导数是相同的。设标量为 ϕ,则有

$$\phi_{,i}=\phi_{;i} \tag{3.4.5}$$

- <u>求协变导数遵循莱布尼兹法则</u>

再来看看协变导数的一个运算规则。假设用两个矢量 u^i 和 v^j 点乘一个二阶张量 A_{ij},得到一个标量:

$$\phi=A_{ij}u^iv^j \tag{3.4.6}$$

把它对 x^k 求导,得

$$\phi_{,k}=A_{ij,k}u^iv^j+A_{ij}u^i_{,k}v^j+A_{ij}u^iv^j_{,k} \tag{3.4.7}$$

利用式(3.3.5),把 $u^i_{,k}$ 和 $v^j_{,k}$ 用它们的协变导数代替,并把项加以组合,可得

$$\begin{aligned}\phi_{,k}&=(A_{ij,k}u^iv^j-A_{ij}u^l\Gamma^i_{kl}v^j-A_{ij}u^iv^l\Gamma^j_{kl})+A_{ij}u^i_{;k}v^j+A_{ij}u^iv^j_{;k}\\&=(A_{ij,k}-A_{mj}\Gamma^m_{ki}-A_{im}\Gamma^m_{kj})u^iv^j+A_{ij}u^i_{;k}v^j+A_{ij}u^iv^j_{;k}\end{aligned}$$

上式括号中的内容就是 A_{ij} 的协变导数 $A_{ij;k}$,即有

$$A_{ij;k}=A_{ij,k}-A_{mj}\Gamma^m_{ki}-A_{im}\Gamma^m_{kj} \tag{3.4.8}$$

把式(3.4.8)和式(3.4.5)代入上式,最终得

$$\phi_{;k}=A_{ij;k}u^iv^j+A_{ij}u^i_{;k}v^j+A_{ij}u^iv^j_{;k} \tag{3.4.9}$$

将式(3.4.9)与式(3.4.7)相比,可看出,对张量并乘后求协变导数遵循和求普通导数相同的法则(莱布尼兹法则)。读者可以自行证明,对于任意两个张量分量的并乘,其协变导数就像对两个普通函数的乘积求普通导数一样,也遵循莱布尼兹法则。

- <u>张量分量的协变导数是高一阶张量(梯度)的分量</u>

与矢量分量的协变导数一样,张量分量的协变导数也是一个张量(比原张量高一阶)的分量。这个新张量就是原张量的梯度。同样,以式(3.4.1)中的张量 $\boldsymbol{T}$ 为例,它的梯度是一个张量,其分量就是张量 $\boldsymbol{T}$ 的分量的协变导数。其中,左梯度是

$$\nabla \boldsymbol{T}=\boldsymbol{g}^{l}\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial x^{l}}=\nabla_{l}T^{ij}_{\cdot\cdot k}\boldsymbol{g}^{l}\boldsymbol{g}_{i}\boldsymbol{g}_{j}\boldsymbol{g}^{k} \tag{3.4.10a}$$

右梯度是

$$\boldsymbol{T}\nabla=\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial x^{l}}\boldsymbol{g}^{l}=T^{ij}_{\cdot\cdot k;l}\boldsymbol{g}_{i}\boldsymbol{g}_{j}\boldsymbol{g}^{k}\boldsymbol{g}^{l} \tag{3.4.10b}$$

与矢量情况类似,一般地,$\nabla T\neq T\nabla$。**同样可以利用度量张量升降张量分量的协变导数中的任意指标。例如**

$$\nabla^{s}T^{ij}_{\cdot\cdot k}=g^{ls}\nabla_{l}T^{ij}_{\cdot\cdot k} \tag{3.4.11}$$

此式与式(3.3.21)**和式**(3.3.22)**类似,不赘述。**

- <u>**度量张量是常张量**</u>

前面曾经在一个特殊的情况下证明了度量张量的分量在求协变导数的运算中相当于一个常量,见式(3.3.27)。**下面直接证明,度量张量 G 的任何分量的协变导数均为零。称为 Ricci 引理。例如**

$$\nabla_{k}g_{ij}=g_{ij;k}=g_{ij,k}-g_{mj}\Gamma^{m}_{ik}-g_{im}\Gamma^{m}_{jk}$$

利用式(3.2.8)**和式**(3.2.5),**上式成为**

$$\nabla_{k}g_{ij}=g_{ij;k}=(\Gamma_{ikj}+\Gamma_{jki})-\Gamma_{ikj}-\Gamma_{jki}=0 \tag{3.4.12a}$$

又例如

$$\nabla_{k}\delta^{j}_{i}=\partial_{k}\delta^{j}_{i}+\delta^{m}_{i}\Gamma^{j}_{mk}-\delta^{j}_{m}\Gamma^{m}_{ki}=0+\Gamma^{j}_{ik}-\Gamma^{j}_{ki}=0 \tag{3.4.12b}$$

Ricci **引理说明,在空间曲线坐标系下,虽然度量张量的分量不是常数,其普通导数也不为零,但其协变导数却为零。也即度量张量的梯度** ∇G **恒为零。这表明,度量张量** G **是不随点的位置的变化而变化的"常"张量。称之为均匀场。**

- <u>Eddington **张量也是常张量**</u>

再看 Eddington **张量** $\varepsilon=\varepsilon^{ijk}\boldsymbol{g}_{i}\boldsymbol{g}_{j}\boldsymbol{g}_{k}=\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{g}^{i}\boldsymbol{g}^{j}\boldsymbol{g}^{k}$。**其中,**$\varepsilon^{ijk}$ **的协变导数是**

$$\nabla_{s}\varepsilon^{ijk}=\partial_{s}\varepsilon^{ijk}+\varepsilon^{mjk}\Gamma^{i}_{ms}+\varepsilon^{imk}\Gamma^{i}_{ms}+\varepsilon^{ijm}\Gamma^{k}_{ms} \tag{3.4.13}$$

由于

$$\begin{aligned}\partial_{s}\varepsilon^{ijk}&=\partial_{s}[\boldsymbol{g}^{i}\boldsymbol{g}^{j}\boldsymbol{g}^{k}]=[\partial_{s}\boldsymbol{g}^{i}\boldsymbol{g}^{j}\boldsymbol{g}^{k}]+[\boldsymbol{g}^{i}\partial_{s}\boldsymbol{g}^{j}\boldsymbol{g}^{k}]+[\boldsymbol{g}^{i}\boldsymbol{g}^{j}\partial_{s}\boldsymbol{g}^{k}]\\&=-\Gamma^{i}_{sm}[\boldsymbol{g}^{m}\boldsymbol{g}^{j}\boldsymbol{g}^{k}]-\Gamma^{j}_{sm}[\boldsymbol{g}^{i}\boldsymbol{g}^{m}\boldsymbol{g}^{k}]-\Gamma^{k}_{sm}[\boldsymbol{g}^{i}\boldsymbol{g}^{j}\boldsymbol{g}^{m}]\\&=-\Gamma^{i}_{sm}\varepsilon^{mjk}-\Gamma^{j}_{sm}\varepsilon^{imk}-\Gamma^{k}_{sm}\varepsilon^{ijm}\end{aligned}$$

代入式(3.4.13)**后得**

$$\nabla_{s}\varepsilon^{ijk}=0 \tag{3.4.14a}$$

同样,可得

$$\nabla_{s}\varepsilon_{ijk}=0 \tag{3.4.14b}$$

这说明 Eddington 张量也是均匀场。它与度量张量一样，在求协变导数时相当于一个常量，可以任意移进或移出协变导数号的内外。其实，关于度量张量和 Eddington 张量的各种分量的协变导数为零的结论，可以更简单地证明。事实上，因为它们的协变导数都是张量，所以，只要证明它们在一个特殊的坐标系中为零，则在所有的坐标系中就都为零。在笛卡尔直角坐标系中，因为 g_{ij} 和 ε_{ijk} 都是常数，所以有

$$g_{ij,k}=0 \quad \text{和} \quad \varepsilon_{ijk,l}=0$$

又因为在笛卡尔直角坐标系中，偏导数和协变导数恒等，所以又可以写成

$$g_{ij;k}=0 \quad \text{和} \quad \varepsilon_{ijk;l}=0$$

它们是张量方程，因此在一切坐标系中都成立。这就完成了证明。同样可以证明，上述结论对 g^{ij} 和 ε^{ijk} 也成立。

在弹性力学中，用弹性模量 E^{ijkl} 刻画物体的弹性性质，这是一个四阶张量。如果它的协变导数为零，即有 $\nabla_s E^{ijkl}=E^{ijkl}_{;s}=0$，则说明该弹性体的材料是均匀的，弹性性质处处相同。

3.5 高阶导数

前面在讨论张量对坐标的偏导数时，引入了张量分量的协变导数的概念，说明了张量分量的协变导数其实是一个新的张量的分量，这个新的张量就是原张量的梯度。现在我们关心这样一个问题：既然张量分量的协变导数也是一个张量，当然又可以求协变导数。这样，产生了张量分量的高阶导数的问题，或者说张量的高阶导数问题。

为简单起见，我们讨论矢量（一阶张量）的二阶导数。如前述，矢量分量 v_i 的协变导数是一个二阶张量，故设

$$v_{i;j}=v_{i,j}-v_m\Gamma^m_{ij}=A_{ij} \tag{3.5.1}$$

于是

$$\begin{aligned}(v_{i;j})_{;k}&=v_{i;jk}=A_{ij;k}\\&=(v_{i,j}-v_m\Gamma^m_{ij})_{,k}-(v_{l,j}-v_m\Gamma^m_{lj})\Gamma^l_{ik}-(v_{i,l}-v_m\Gamma^m_{il})\Gamma^l_{kj}\end{aligned} \tag{3.5.2a}$$

首先要问，这个结果是否与 $v_{i;kj}$ 相同。也就是问，是否能交换两个协变导数的次序。为了回答这个问题，我们来求 $v_{i;kj}$。这只要在上式中简单地交换下标 j 和 k，得

$$v_{i;kj}=(v_{i,k}-v_m\Gamma^m_{ik})_{,j}-(v_{l,k}-v_m\Gamma^m_{lk})\Gamma^l_{ij}-(v_{i,l}-v_m\Gamma^m_{il})\Gamma^l_{jk} \tag{3.5.2b}$$

因为克氏符号的前两个指标具有对称性，所以上两式的最后一项相同。把这两式相减，注意到普通导数的求导次序可以交换，最后可得

$$v_{i;jk}-v_{i;kj}=v_m(\Gamma^m_{ik,j}-\Gamma^m_{ij,k}+\Gamma^m_{lj}\Gamma^l_{ik}-\Gamma^m_{lk}\Gamma^l_{ij})=v_mR^m_{\cdot ijk} \tag{3.5.3}$$

因为等式左端是三阶张量，所以，$R^m_{\cdot ijk}$ 必定是一个四阶张量，称为黎曼-克里斯托夫(Riemann-Christoffel)张量或者曲率张量。两个协变导数的次序是不是可以交换的问题，等价于曲率张量是否为零的问题。对于一个张量而言，只要它在一个坐标系中为零，那么，就在所有的坐标系中都为零。现在，在直线坐标系中，克氏符号全为零，所以，曲率张量是零张量，从而在其他任何曲线坐标系中都是零张量。这就证明了协变导数的次序的可交换性。

但要注意，我们在这里讨论的仅局限于三维欧氏空间。在欧氏空间里：

(1) 直线坐标系是容许的；

(2) 矢量的点积(或者说度量张量)有定义。

假如放弃第一条而保留第二条，即度量张量 g_{ij} 仍有定义，则此空间就是所谓 Riemann 空间。在那里，基于度量张量的曲率张量就不一定是零张量了。拿二维空间来说会更形象些。平面是容许直线坐标系的，因而是欧氏空间，也叫平坦空间。在不容许直线坐标系的二维空间里，例如球面，曲率张量在整个区域内就不恒为零。曲面的高斯曲率正是通过曲率张量来表达的。我们说这个空间是弯曲的。这些都说明并不是一切度量空间的曲率张量均为零。在曲面上，二阶协变导数的结果和求导次序有关。

下面求矢量的二阶导数。我们从式(3.3.4b)出发。把该式对 x^k 求导

$$\boldsymbol{v}_{,jk}=(v_{i,j}\boldsymbol{g}^i-v_i\Gamma^i_{jl}\boldsymbol{g}^l)_{,k}=v_{i,jk}\boldsymbol{g}^i+v_{i,j}\boldsymbol{g}^i_{,k}-v_{i,k}\Gamma^i_{jl}\boldsymbol{g}^l-v_i\Gamma^i_{jl,k}\boldsymbol{g}^l-v_i\Gamma^i_{jl}\boldsymbol{g}^l_{,k}$$

利用式(3.2.10)，选择方便的哑指标形式，上式可改写成

$$\boldsymbol{v}_{,jk}=(v_{i,jk}-v_{l,j}\Gamma^l_{ik}-v_{m,k}\Gamma^m_{ij}-v_m\Gamma^m_{ij,k}+v_m\Gamma^m_{lj}\Gamma^l_{ik})\boldsymbol{g}^i$$

可以看出，上式圆括号中的第一、三、四项正是式(3.5.2a)右边的第一个圆括号，而第二、五项正是式(3.5.2a)右边的第二个圆括号。因此，有

$$\boldsymbol{v}_{,jk}=v_{i;jk}\boldsymbol{g}^i+(v_{i,l}-v_m\Gamma^m_{il})\Gamma^l_{kj}\boldsymbol{g}^i$$

借助于式(3.3.5b)，此式最后可写成

$$\boldsymbol{v}_{,jk}=(v_{i;jk}+v_{i;l}\Gamma^l_{jk})\boldsymbol{g}^i \tag{3.5.4a}$$

也可以写成另一种形式：

$$\boldsymbol{v}_{,jk}=(v^i_{;jk}+v^i_{;l}\Gamma^l_{jk})\boldsymbol{g}_i \tag{3.5.4b}$$

3.6 散度和旋度

1. 散度

对于一阶或一阶以上的张量场，可以定义张量场的散度和旋度。设张量的阶数大于或等于 1，定义其散度为

$$\nabla\cdot T=\boldsymbol{g}^i\cdot\frac{\partial T}{\partial x^i} \tag{3.6.1a}$$

或
$$T\cdot\nabla=\frac{\partial T}{\partial x^i}\cdot\boldsymbol{g}^i \tag{3.6.1b}$$

式中，∇ 是哈密顿算子，如式(3.3.14)所定义。可以看出，张量的散度仍是张量，但阶数降低 1 阶。正如梯度有左梯度和右梯度之分一样，$\nabla\cdot T$ 称为左散度，$T\cdot\nabla$ 称为右散度。一般说来，左、右散度不相等，即

$$\nabla\cdot T\neq T\cdot\nabla \tag{3.6.2}$$

下面来看看，矢量(一阶张量)的散度。设有矢量 $\boldsymbol{v}=v^i\boldsymbol{g}_i$，则左散度是

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}=\boldsymbol{g}^j \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^j}=\boldsymbol{g}^j \cdot (v^i_{;j}\boldsymbol{g}_i)=v^i_{;i}$$

右散度是

$$\boldsymbol{v} \cdot \nabla=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^j} \cdot \boldsymbol{g}^j=v^i_{;j}\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}^j=v^i_{;i}$$

如果将矢量在逆变基中分解,即有 $\boldsymbol{v}=v_i\boldsymbol{g}^i$,则

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}=\boldsymbol{g}^j \cdot (v_{i;j}\boldsymbol{g}^i)=v_{i;j}\boldsymbol{g}^{ij}=v^i_{;i}=v_i^{;i}$$

或

$$\boldsymbol{v} \cdot \nabla=v_{i;j}\boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}^j=v_{i;j}\boldsymbol{g}^{ij}=v^i_{;i}=v_i^{;i}$$

这说明,对于矢量,左、右散度相等,记做

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=\nabla \cdot \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v} \cdot \nabla=v^i_{;i}=v_i^{;i} \tag{3.6.3}$$

将上式中的协变导数展开,还可以进一步简化,如下:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=v^i_{;i}=v^i_{,i}+v^m\Gamma^i_{mi}$$

将式(3.2.11)代入,得

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=v^m_{,m}+v^m\frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^m}=\frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial(\sqrt{g}v^m)}{\partial x^m} \tag{3.6.4}$$

上式适用于任意空间曲线坐标系。作为特例,在笛卡尔直角坐标系中,因为$\sqrt{g}=1$, $v^1=v_x, v^2=v_y, v^3=v_z, x^1=x, x^2=y, x^3=z$,所以,上式成为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{3.6.5}$$

此式与高等数学中关于矢量的散度定义是一致的。这就说明了张量散度的概念是高等数学中矢量散度概念的推广。这表现在以下两方面:其一,张量散度的概念适用于阶数大于或等于 1 的任意张量,而不仅仅适用于矢量(一阶张量);其二,适用于任意空间曲线坐标系,而不仅仅适用于笛卡尔直角坐标系。

2. 旋度

设张量 T 的阶数大于或等于 1,定义其旋度为

$$\nabla \times \mathbf{T}=\boldsymbol{g}^i \times \frac{\partial T}{\partial x^i} \tag{3.6.6a}$$

或

$$\mathbf{T} \times \nabla=\frac{\partial T}{\partial x^i} \times \boldsymbol{g}^i \tag{3.6.6b}$$

同样,称 $\nabla \times \mathbf{T}$ 为左旋度,称 $\mathbf{T} \times \nabla$ 为右旋度。

旋度的另一种形式是

$$\nabla \times \mathbf{T} = \varepsilon : (\nabla \boldsymbol{T}) \tag{3.6.7a}$$

或

$$\mathbf{T} \times \nabla = (\mathrm{T}\nabla) : \varepsilon \tag{3.6.7b}$$

下面，以三阶张量 $\mathbf{T} = T_i^{\cdot jk} \boldsymbol{g}^i \boldsymbol{g}_j \boldsymbol{g}_k$ 为例来证明式(3.6.7a)与式(3.6.6a)的等价性，如下：

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{T} &= \boldsymbol{g}^s \times \frac{\partial T}{\partial x^s} = \boldsymbol{g}^s \times T_{i\ \ ;s}^{\cdot jk} \boldsymbol{g}^i \boldsymbol{g}_j \boldsymbol{g}_k = \varepsilon^{sil} T_{i\ \ ;s}^{\cdot jk} \boldsymbol{g}_l \boldsymbol{g}_j \boldsymbol{g}_k \\
&= (\varepsilon^{mnl} \boldsymbol{g}_m \boldsymbol{g}_n \boldsymbol{g}_l) : \boldsymbol{g}^s \frac{\partial}{\partial x^s} (T_i^{\cdot jk} \boldsymbol{g}^i \boldsymbol{g}_j \boldsymbol{g}_k) \\
&= \boldsymbol{\varepsilon} : (\nabla \boldsymbol{T})
\end{aligned}$$

一般说来，张量的左、右旋度不相等，即

$$\nabla \times \mathbf{T} \neq \mathbf{T} \times \nabla \tag{3.6.8}$$

下面来看看矢量的旋度。设有矢量 $\boldsymbol{v} = v_j \boldsymbol{g}^j$，定义矢量 $\boldsymbol{v}$ 的旋度是

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{g}^i \times \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^i} = \boldsymbol{g}^i \times \nabla_i v_j \boldsymbol{g}^j = \nabla_i v_j \boldsymbol{g}^i \times \boldsymbol{g}^j = \varepsilon^{ijk} \nabla_i v_j \boldsymbol{g}_k \tag{3.6.9}$$

式中

$$\varepsilon^{ijk} \nabla_i v_j = \varepsilon^{ijk} (\partial_i v_j - v_m \Gamma_{ij}^m) = \varepsilon^{ijk} \partial_i v_j - v_m \varepsilon^{ijk} \Gamma_{ij}^m$$

因为 ε^{ijk} 关于指标 i 和 j 是反对称的，而 Γ_{ij}^m 关于指标 i 和 j 是对称的，故上式中第二项为零。所以，v 的旋度表达式还可以进一步简化为

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{v} = \varepsilon^{ijk} \partial_i v_j \boldsymbol{g}_k = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_2 & \boldsymbol{g}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \tag{3.6.10a}$$

这里，最后一个等号的成立是因为式(1.7.17b)与式(1.7.23b)。

以上是采用了矢量在逆变基中的分解式。如改而采用矢量在协变基中的分解式 $\boldsymbol{v} = v^j \boldsymbol{g}_j$，则可以通过度量张量，把它改成类似于在逆变基中的分解式，即 $\boldsymbol{v} = v^m \boldsymbol{g}_m = v^m (g_{mj} \boldsymbol{g}^j) = (g_{mj} v^m) \boldsymbol{g}^j$。用 $(g_{mj} v^m)$ 代替式(3.6.10a)中的 v_j，可以得到

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{v} = \varepsilon^{ijk} \partial_i (g_{mj} v^m) \boldsymbol{g}_k = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_2 & \boldsymbol{g}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ v^m g_{m1} & v^m g_{m2} & v^m g_{m3} \end{vmatrix} \tag{3.6.10b}$$

请注意，对于矢量而言，$\nabla \times \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \times \nabla$。

对于笛卡尔直角坐标系，式(3.6.10)可简化为

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \tag{3.6.11}$$

即

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{v}=\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

此式与高等数学中关于矢量的旋度的定义是一致的。这就说明，张量旋度的概念是高等数学中矢量旋度概念的推广。这种推广表现在以下两方面：其一，张量旋度的概念适用于阶数大于或等于 1 的任意张量，而不仅仅适用于矢量（一阶张量）；其二，适用于任意空间曲线坐标系，而不仅仅适用于笛卡尔直角坐标系。

3. 拉普拉斯(Laplace)算子

拉普拉斯算子简称拉氏算子。张量的拉氏算子定义为张量梯度的散度。拉氏算子对任意阶张量 T 作用的结果如下：

$$\nabla^2 \boldsymbol{T}=\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{T}=\boldsymbol{g}^r\cdot\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\boldsymbol{g}^s\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial x^s}\right)=\boldsymbol{g}^r\cdot\partial_r(\boldsymbol{g}^s\partial_s\boldsymbol{T}) \tag{3.6.12}$$

以式(3.4.1)所示的三阶张量为例，其左梯度 ∇T 如式(3.4.10a)所示，故

$$\nabla^2 \boldsymbol{T}=\boldsymbol{g}^r\cdot\partial_r(\nabla_s T^{ij}_{\cdot\cdot k}\boldsymbol{g}^s\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k) \tag{3.6.13}$$

如前所述，张量的梯度仍是张量，其阶数比原张量高一阶。就是说，上式右端括号内是一个四阶张量。求散度，得

$$\nabla^2 \boldsymbol{T}=\boldsymbol{g}^r\cdot\boldsymbol{g}^s\nabla_r\nabla_s T^{ij}_{\cdot\cdot k}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k=g^{rs}\nabla_r\nabla_s T^{ij}_{\cdot\cdot k}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k \tag{3.6.14}$$

式中，$\nabla_r\nabla_s T^{ij}_{\cdot\cdot k}$ 是张量分量 $T^{ij}_{\cdot\cdot k}$ 的二阶协变导数。可以看出，拉氏算子作用于张量后仍然得到一个张量，其阶数与原张量相同。

作为特例，我们考虑拉氏算子对标量函数 $\phi=\phi(x^i)$ 的作用。其结果如下：

$$\nabla^2\phi=g^{rs}\nabla_r\nabla_s\phi=g^{rs}\nabla_r(\partial_s\phi)=g^{rs}(\partial_r\partial_s\phi-\partial_m\phi\Gamma^m_{rs}) \tag{3.6.15}$$

对于笛卡尔直角坐标系，因为 $g^{rs}=1$（如果 $r=s$），否则，$g^{rs}=0$。又因为克氏符号全为零，所以上述结果还可以进一步简化为

$$\nabla^2\phi=g^{11}\phi_{,11}+g^{22}\phi_{,22}+g^{33}\phi_{,33}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \tag{3.6.16}$$

这与高等数学的结果一致。这说明，张量的拉氏算子（即拉氏算子对张量的作用的结果）是高等数学中拉氏算子的推广。与梯度、散度和旋度的情况一样，这种推广也表现在以下两方面：其一，适用于任意张量函数，而不仅仅适用于标量函数；其二，适用于任意空间曲线坐标系，而不仅仅适用于笛卡尔直角坐标系。

4. 拉氏算子是梯度和散度的二重作用。再来看看旋度和梯度以及散度和旋度的二重作用。

(1) 标量函数的梯度场无旋。即

$$\operatorname{curl}\operatorname{grad}\phi=0 \tag{3.6.17}$$

这容易证明，因为

$$\operatorname{curl}\operatorname{grad}\phi=\nabla\times\nabla\phi=\boldsymbol{g}^r\times\partial_r(\boldsymbol{g}^s\phi_{,s})=\boldsymbol{g}^r\times\boldsymbol{g}^s\phi_{,sr}=\varepsilon^{rst}\phi_{,sr}\boldsymbol{g}_t=0$$

在以上推导中，应用了式(3.4.5)。又因为 $\phi_{,sr}$ 关于指标 s 和 r 是对称的，而 ε^{rst} 关于指标 s 和 r 是反对称的，故最终结果为零。

(2) 管量场无散度。

我们说，如果一个矢量场 $w=\operatorname{curl}\boldsymbol{v}$，那么，这个矢量场就叫管量场(Solenoidal field)，$\boldsymbol{v}$ 叫做场 w 的矢量势(Vector potential)。所谓管量场无散度，就是说，对任意矢量 v，有

$$\operatorname{div}\operatorname{curl}\boldsymbol{v}=0 \tag{3.6.18}$$

事实上

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\operatorname{curl}\boldsymbol{v} &=\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{g}^r\cdot\partial_r(\boldsymbol{g}^s\times\partial_s\boldsymbol{v})\\ &=\boldsymbol{g}^r\cdot\partial_r(\boldsymbol{g}^s\times\boldsymbol{v}_{i;s}\boldsymbol{g}^i)=\boldsymbol{v}_{i;sr}(\boldsymbol{g}^r\cdot\boldsymbol{g}^s\times\boldsymbol{g}^i)=\boldsymbol{v}_{i;sr}\varepsilon^{rsi}=0\end{aligned}$$

3.7 正交曲线坐标系

在曲线坐标系中，最常用的是正交曲线坐标系。所谓正交曲线坐标系，是指坐标曲线族相互正交的坐标系。例如，柱坐标、球坐标等是空间(三维)正交曲线坐标系，而极坐标则是平面(二维)正交曲线坐标系。因为按式(1.2.2)定义的协变基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 是沿着坐标曲线的切线方向，所以，在正交曲线坐标系中的每一点，三个协变基矢量相互正交。这导致正交曲线坐标系的度量张量十分简单，其协变分量是

$$g_{ij}=\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_j=\begin{cases}g_{ii}=|\boldsymbol{g}_i|^2 & \text{当 } i=j\\ 0 & \text{当 } i\neq j\end{cases} \tag{3.7.1}$$

设三个协变基矢量的长度为 H_i，有

$$H_1=|\boldsymbol{g}_1|=\sqrt{g_{11}},\quad H_2=|\boldsymbol{g}_2|=\sqrt{g_{22}},\quad H_3=|\boldsymbol{g}_3|=\sqrt{g_{33}} \tag{3.7.2}$$

通常把 H_1，H_2 和 H_3 称为拉梅(Lamé)系数。注意，因为曲线坐标是局部坐标，所以每一点处的拉梅系数是不相同的。或者说，拉梅系数是位置坐标的函数。如果把正交曲线坐标系的度量张量写成矩阵，则其协变分量是

$$[g_{ij}]=\begin{bmatrix}H_1^2 & & \\ & H_2^2 & \\ & & H_3^2\end{bmatrix} \tag{3.7.3}$$

逆变分量是

$$[g^{ij}]=\begin{bmatrix}H_1^{-2} & & \\ & H_2^{-2} & \\ & & H_3^{-2}\end{bmatrix} \tag{3.7.4}$$

都是对角阵。

由式(1.7.5)，可以得到正交曲线坐标系的

$$g=|g_{ij}|=(H_1H_2H_3)^2 \tag{3.7.5}$$

又由式(1.7.8)得

$$[\boldsymbol{g}_1\ \boldsymbol{g}_2\ \boldsymbol{g}_3]=\sqrt{g}=H_1 H_2 H_3 \tag{3.7.6}$$

此式从混合积$[\boldsymbol{g}_1\ \boldsymbol{g}_2\ \boldsymbol{g}_3]$的物理意义也可直接看出。

又,根据 $\boldsymbol{g}^i=g^{ij}\boldsymbol{g}_j$ 可得正交曲线坐标系的三个逆变基矢量是

$$\boldsymbol{g}^1=g^{11}\boldsymbol{g}_1=\frac{1}{H_1^2}\boldsymbol{g}_1,\quad \boldsymbol{g}^2=g^{22}\boldsymbol{g}_2=\frac{1}{H_2^2}\boldsymbol{g}_2,\quad \boldsymbol{g}^3=g^{33}\boldsymbol{g}_3=\frac{1}{H_3^2}\boldsymbol{g}_3 \tag{3.7.7}$$

这说明,对于正交曲线坐标系来说,三个逆变基与三个协变基是平行的,只是大小不同。

下面看看正交曲线坐标系下的第一类克氏符号。由式(3.2.9a):

$$\Gamma_{ijk}=\frac{1}{2}(g_{ki,j}+g_{jk,i}-g_{ij,k})$$

知

(1) 当 i,j,k 互不相等时:

$$\Gamma_{ijk}=0$$

(2) 当 i,j,k 中有两个指标相等时:

情况 1:$i=j\neq k$

$$\Gamma_{iik}=-\frac{1}{2}g_{ii,k}=-\frac{1}{2}(H_iH_i)_{,k}$$

情况 2:$i=k\neq j$

$$\Gamma_{iji}=\Gamma_{jii}=\frac{1}{2}g_{ii,j}=\frac{1}{2}(H_iH_i)_{,j}$$

(3) 当 $i=j=k$ 时:

$$\Gamma_{iii}=\frac{1}{2}g_{ii,i}=\frac{1}{2}(H_iH_i)_{,i}$$

把以上结果合并,最终得

$$\Gamma_{ijk}=0(i,j,k\ \text{互不相等}) \tag{3.7.8a}$$

$$\Gamma_{iij}=-\frac{1}{2}(H_iH_i)_{,j}\quad (i\neq j) \tag{3.7.8b}$$

$$\Gamma_{iji}=\Gamma_{jii}=\frac{1}{2}(H_iH_i)_{,j} \tag{3.7.8c}$$

其中,相同的下标在同一水平上,不是哑标,所以不求和。

再看看正交曲线坐标系下的第二类克氏符号。由式(3.2.9b):

$$\Gamma_{ij}^l=\frac{1}{2}g^{lk}(g_{ki,j}+g_{jk,i}-g_{ij,k})$$

知

(1) 当 i,j,l 互不相等时 $\Gamma_{ij}^l=0$,因为此时,无论哑指标取 i,j,l 中的哪一个,上式右端均为零。

(2) **当 i,j,l 中有两个相等时：**

情况 1：$i=j\neq l$，**因为** k **必须等于** l，**所以**

$$\Gamma_{ii}^{l}=-\frac{1}{2}g^{ll}g_{ii,l}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{H_lH_l}(H_iH_i)_{,l}$$

情况 2：$i=l\neq j$，**因为** k **必须等于** l，**所以**

$$\Gamma_{ij}^{i}=\Gamma_{ji}^{i}=\frac{1}{2}g^{ii}g_{ii,j}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{H_iH_i}(H_iH_i)_{,j}$$

(3) **当** $i=j=l$ **时：**

$$\Gamma_{ii}^{i}=\frac{1}{2}g^{ii}g_{ii,i}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{H_iH_i}(H_iH_i)_{,i}$$

最后合并为以下结果：

$$\Gamma_{ij}^{k}=0\quad(i,j,k\ \text{互不相等})\tag{3.7.9a}$$

$$\Gamma_{ii}^{j}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{H_jH_j}(H_iH_i)_{,j}\quad(i\neq j)\tag{3.7.9b}$$

$$\Gamma_{ij}^{j}=\Gamma_{ji}^{i}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{H_iH_i}(H_iH_i)_{,j}\tag{3.7.9c}$$

例如，对于圆柱坐标(ρ,φ,z)，**其三个协变基矢量是（见式**(1.3.21)**）：**

$$\boldsymbol{g}_1=\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\varphi\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{g}_2=-\rho\sin\varphi\boldsymbol{i}+\rho\cos\varphi\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{g}_3=\boldsymbol{k}$$

根据式(3.7.2)，**有**

$$H_1=1,\quad H_2=\rho,\quad H_3=1\tag{3.7.10}$$

根据式(3.7.7)，**可得** 3 **个逆变基矢量是**

$$\boldsymbol{g}^1=\boldsymbol{g}_1,\quad \boldsymbol{g}^2=\frac{1}{\rho^2}\boldsymbol{g}_2,\quad \boldsymbol{g}^3=\boldsymbol{g}_3\tag{3.7.11}$$

这与式(1.3.22)**相同。又根据式**(3.7.9)，**知圆柱坐标下的第二类克氏符号中只有三个非零，它们是**

$$\Gamma_{22}^{1}=-\rho,\quad \Gamma_{21}^{2}=\Gamma_{12}^{2}=\frac{1}{\rho}\tag{3.7.12}$$

其余全为零。

3.8 积分定理

在高等数学中，对于矢量场有高斯(Gauss)**积分定理和斯托克斯**(Stokes)**积分定理。对于标量函数有格林**(Green)**积分定理。但它们都只适用于笛卡尔直角坐标系。本节将把这些积分定理推广到任意曲线坐标系。**

(1) **高斯积分定理（也称高斯散度定理）**

设 V **是空间区域**，S **是其边界曲面。在高等数学中，已经证明，矢量场** $\boldsymbol{v}(M)=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}$，**简写为**

$$\boldsymbol{v}(M)=(v_x, v_y, v_z) \tag{3.8.1}$$

满足以下高斯积分定理

$$\int_V \mathrm{div}\boldsymbol{v}\mathrm{d}V=\int_S \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{3.8.2}$$

式中

$$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma) \tag{3.8.3}$$

是边界曲面 S 上的面元 $\mathrm{d}S$ 处的法向单位矢量。$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 是面元矢量，其三个分量分别是面元在笛卡尔直角坐标系中三个坐标面上的投影，也就是面元的法线在三个坐标轴上的投影再乘以面元的大小，所以

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\mathrm{d}S=\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{3.8.4}$$

式(3.8.2)也可写成

$$\int_V\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_S(v_x\cos\alpha+v_y\cos\beta+v_z\cos\gamma)\mathrm{d}S \tag{3.8.5}$$

式(3.8.2)是不变性记法，适合任何坐标系。下面，改写式(3.8.1)和式(3.8.3)，以得到适合任何坐标系的分量表达式。为此，借用式(3.6.3)，则式(3.8.2)可改写成

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}V=\int_S \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}S \tag{3.8.6}$$

再把面元 $\mathrm{d}S$ 处的法向单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 改写成

$$\boldsymbol{n}=n_i\boldsymbol{g}^i=n^i\boldsymbol{g}_i \tag{3.8.7}$$

其中，$\boldsymbol{g}_i$ 和 $\boldsymbol{g}^i$ 分别是面元所在处的协变基矢量和逆变基矢量。则高斯定理式(3.8.6)可写成分量形式：

$$\int_V \nabla_i\boldsymbol{v}^i\mathrm{d}V=\int_S n_i v^i\mathrm{d}S \tag{3.8.8}$$

注意，高斯积分公式(3.8.6)或式(3.8.8)中的被积函数是标量。

(2) 斯托克斯积分定理

设 S 是某一曲面，l 是其边界曲线。曲面上某点处的法向单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 指向曲面的正侧。又，若边界曲线 l 的正向与曲面的正侧(用法向矢量 $\boldsymbol{n}$ 表征)符合右手螺旋法则，则矢量 $\boldsymbol{v}$ 满足以下斯托克斯积分定理：

$$\int_S \mathrm{curl}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_S \mathrm{curl}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\oint_l \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{3.8.9}$$

式中，$\boldsymbol{n}$ 是面元 $\mathrm{d}S$ 处的法向单位矢量，按式(3.8.3)定义。线元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 指向边界曲线的正向。在笛卡尔直角坐标系的三个坐标轴上，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的投影是 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$ 和 $\mathrm{d}z$，故有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z) \tag{3.8.10}$$

所以，在笛卡尔直角坐标系中，斯托克斯积分定理的分量表达式如下：

$$\int_S \left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_S\left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right]\cos\beta+\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S \tag{3.8.11}$$

$$=\oint_l v_x\mathrm{d}x+v_y\mathrm{d}y+v_z\mathrm{d}z$$

为了得到适合任何坐标系的分量表达式，首先把式(3.8.9)改写成

$$\int_S \nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\oint_l \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{3.8.12}$$

式中，面元的法向矢量 $\boldsymbol{n}$ 如式(3.8.7)所定义，线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 可按所在处的基矢量分解：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mathrm{d}x^i\boldsymbol{g}_i=\mathrm{d}x_i\boldsymbol{g}^i \tag{3.8.13}$$

式(3.8.12)右边的积分叫做矢量 $\boldsymbol{v}$ 沿曲线 l 的环量(circulation)。有了以上准备，容易得到适合任何坐标系的斯托克斯定理的分量形式：

$$\int_S \varepsilon^{ijk}\nabla_i v_j n_k\mathrm{d}S=\oint_l v_i\mathrm{d}x^i \tag{3.8.14}$$

可以看出，斯托克斯公式中的被积函数是标量。

(3) 格林公式

我们知道，一个标量函数的梯度是矢量。设标量函数为 ϕ，将其梯度 $\nabla\varphi$ 作为矢量 $\boldsymbol{v}$ 代入高斯积分定理式(3.8.6)，得

$$\int_V \nabla\cdot\nabla\phi\mathrm{d}V=\int_S\nabla\phi\cdot\mathrm{d}S \tag{3.8.15}$$

由式(3.6.12)知，上式中体积分的被积函数是拉氏算子，故上式可改写成

$$\int_V \nabla^2\phi\mathrm{d}V=\int_S\nabla\phi\cdot\mathrm{d}S \tag{3.8.16}$$

这就是格林积分定理。由式(3.6.15)知其分量形式如下：

$$\int_V g^{ij}\nabla_i\nabla_j\phi\mathrm{d}V=\int_S\partial_i\phi n^i\mathrm{d}S \tag{3.8.17}$$

同样，格林积分定理中的被积函数也是标量。

上述积分定理仅适用于矢量场或标量场。一般说来，不去把这些积分定理推广到使之适用于任意张量场(虽然形式上很容易作这种“推广”)。因为如果把这些积分定理应用到高阶张量场上，就不能保证公式积分号下的被积函数是标量。而只要被积函数是高于或等于1阶的张量，就必然会面临(并矢)基矢量求积分的问题。我们反复强调过，曲线坐标系是局部坐标系，基矢量是随点变化的。一个张量总是附着于一个点上。从而，张量的各种运算都只局限在该点附近的微小区域中。但是，体积分(或面积分，线积分)却都是一个大范围的概念。一般很难对一个体积(或面积，或线)内不同点上的基矢量求积分。

下面看看斯托克斯积分定理的一个应用。

我们知道，给定一个标量场 $\phi = \phi(x^i)$ 就可以定义它的梯度，见式(3.3.13)。设这个梯度是矢量场 $\boldsymbol{v}$，则有

$$\boldsymbol{v} = \nabla \phi = \phi_{;j}\boldsymbol{g}^i = \phi_{,i}\boldsymbol{g}^i \tag{3.8.18}$$

现在把这个问题反过来，问从一个给定的矢量场 $\boldsymbol{v}$ 出发，能否求出一个标量场 ϕ，使得 $\boldsymbol{v}$ 就是这个 ϕ 的梯度。

对这个问题，可以如下求解：选一个固定点 o 和一个动点 p，用一条曲线 l 连接 o，p 两点并积分：

$$\int_o^p \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_o^p v_i \mathrm{d}x^i = \int_o^p \phi_{,i}\mathrm{d}x^i = \phi(p) - \phi(o) \tag{3.8.19}$$

可见，标量场 $\phi(x^i)$，即每点的 ϕ 值完全由上式左端的积分确定。为使每点 p 处的 ϕ 有惟一确定的值，此积分必须与所选的积分路径无关。也就是说，如果以 o 和 p 点为端点任意选择两条积分路线 oQp 和 oRp，则要求沿这两条路线的积分所得的结果都一样。这样，沿封闭回线 $oQpRo$ 的积分就应为零。如果我们把 ϕ 称为矢量场 $\boldsymbol{v}$ 的位势或标量势，则一个矢量场 $\boldsymbol{v}$ 存在位势 ϕ 的条件就是式(3.8.19)左端沿任何一条封闭曲线 l 的积分都必须为零。根据斯托克斯积分定理式(3.8.12)知，这只有在该封闭曲线所包围的域 S 内处处都有 $\nabla \times \boldsymbol{v} = 0$ 的情况下才有可能。

我们在式(3.6.17)中已经知道，梯度无旋。这里又看到这个论断反过来也正确，即如果

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = 0$$

则

$$\boldsymbol{v} = \nabla \phi \tag{3.8.20}$$

用文字表述，就是，旋度为零的每个矢量都是一个梯度。或者说，旋度为零的矢量必有位势，反之亦真。

平行地还可以证明(略)，散度为零的任一矢量场 $\boldsymbol{w}$ 是一个管量场。这说明，式(3.6.18)的逆定理成立，写出来就是：

如果

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0,$$

则

$$\boldsymbol{w} = \nabla \times \boldsymbol{\omega} \tag{3.8.21}$$

$\boldsymbol{\omega}$ 称为 $\boldsymbol{w}$ 的矢量势。这样，上述结论又可说成，散度为零的矢量必有矢量势，反之亦真。

根据式(3.8.20)和式(3.8.21)，可以给出矢量的斯托克斯分解式。

考虑任意矢量场 $\boldsymbol{u}$，计算它的散度和旋度：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \delta,\ \nabla \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\gamma} \tag{3.8.22}$$

现在打算求另外一个矢量 $\boldsymbol{v}$，它和矢量场 $\boldsymbol{u}$ 有相同的散度，但却没有旋度，即要求

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \delta,\ \nabla \times \boldsymbol{v} = 0 \tag{3.8.23}$$

上式的第二式说明，根据式(3.8.20)，$\boldsymbol{v}$ 一定是一个梯度场，设为

$$\boldsymbol{v} = \nabla \phi \tag{3.8.24}$$

把式(3.8.24)代入式(3.8.23)的第一式，可得泊松(Poisson)方程：

$$\nabla^2\phi = \delta \tag{3.8.25}$$

它总是有解的，并且只要规定某种边界条件，则解是惟一的。

可以看出，u 和 v 的差

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \tag{3.8.26}$$

没有散度(但与 u 有相同的旋度)。这说明 w 是一个管量场，根据式(3.8.21)，有

$$\boldsymbol{w} = \nabla \times \boldsymbol{\omega} \tag{3.8.27}$$

把式(3.8.24)和式(3.8.27)代入式(3.8.26)并移项，最终，我们有，任意一个矢量 u 总可以写成以下形式

$$\boldsymbol{u} = \nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\omega} \tag{3.8.28}$$

或者说，任意一个矢量总可以分解成一个梯度场和一个管量场之和，称为矢量的斯托克斯分解。其中，ϕ 称为标量势或位势，ω 称为矢量势。这个分解式在求弹性力学问题的通解中起有重要的作用。

3.9 无量纲自然基标架和物理分量

(1) 自然基的无量纲化

在前述各章中，矢径为 r 的点处的协变基矢量依下式确定：

$$\boldsymbol{g}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{x}^i} \tag{3.9.1}$$

同一点处的逆变基 g^i 则由对偶关系惟一确定，即

$$\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}^j = \delta_i^j \tag{3.9.2}$$

这样的基矢量也称为自然基矢量。由定义式(3.9.1)可以看出，因为矢径 r 具有长度量纲，而曲线坐标 x^i 不一定具有长度量纲，所以，自然基矢量可能有量纲。此外，g_i 的长度，即 $|\boldsymbol{g}_i| = \left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^j}\right|$ 也不一定等于1，所以，自然基矢量 g_i 不一定是无量纲的单位矢量。这样，如果把具有物理意义的张量按自然基矢量分解，则所得分量就不一定具有原物理量纲，从而给物理解释带来不便。以圆柱坐标系为例，坐标 $x^1 = r$，$x^3 = z$ 为长度量纲，模 $|\boldsymbol{g}_1| = |\boldsymbol{g}_3| = 1$，因而 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_3$ 是无量纲单位矢量。然而，$x^2 = \theta$ 却是无量纲的，且 $|\boldsymbol{g}_2| = r$(矢径长度)，因而 $\boldsymbol{g}_2$ 具有长度量纲，且大小随点而异。以均匀速度矢量 $\boldsymbol{v} = v^1\boldsymbol{g}_1 = v^2\boldsymbol{g}_2 + v^3\boldsymbol{g}_3$ 为例，根据直观，各分量都应该是常数，且量纲应当是[长度][秒]$^{-1}$。但在圆柱坐标系中，第二分量 v^2 却具有[秒]$^{-1}$ 量纲，大小随点的位置而不同(即随矢径 r 而不同)，且比真正的切向分量缩小 r 倍。

显然，为了使张量分量具有物理意义，有必要把自然基矢量加以改造，使之成为无量纲的最好是具有单位长度的矢量(下面会看到，一般无法保证协变基和逆变基同时具有单位长度)。张量按无量纲的(单位)基矢量分解后，分量具有原物理量纲，称为物理分量。改造的方法是将协变基 g_i 除以自身模长，成为

$$\boldsymbol{g}_{(i)} = \frac{\boldsymbol{g}_i}{|\boldsymbol{g}_i|} = \frac{\boldsymbol{g}_i}{\sqrt{g_{ii}}} \tag{3.9.3}$$

其中，$\sqrt{g_{ii}}=\sqrt{\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_i}$。注意，只有不同高度的相同指标才是哑指标，才需要求和。上式中，相同指标处于同一高度水平，不是哑标，不应求和。式中，g_{ii} 表示度量张量的第 i 个协变对角分量，不是三个对角分量之和。显然，$\boldsymbol{g}_{(i)}$ 不仅是无量纲的，而且是归一的（即具有单位长度）。

与 $\boldsymbol{g}_{(i)}$ 对偶的逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^{(i)}$ 可由对偶关系

$$\boldsymbol{g}_{(i)}\cdot\boldsymbol{g}^{(j)}=\delta_i^j \tag{3.9.4}$$

得到。显然，逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^{(i)}$ 也是无量纲的，但一般并不能保证是单位长。事实上，由式（3.9.3）有

$$\boldsymbol{g}^{(i)}=\sqrt{g_{ii}}\boldsymbol{g}^i \tag{3.9.5}$$

另外，任意曲线坐标系的归一化协变基矢量 $\boldsymbol{g}_{(i)}$ 虽然是无量纲的单位矢量，但并不相互正交。逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^{(i)}$ 是无量纲的，但既不是单位矢量，也不正交。设 $\boldsymbol{g}^{(i)}$ 与 $\boldsymbol{g}_{(i)}$ 之间的夹角为 α_i，由式（3.9.4）有 $\boldsymbol{g}_{(i)}\cdot\boldsymbol{g}^{(i)}=1$（指标不求和），但因 $|\boldsymbol{g}_{(i)}|=1$，故无量纲逆变基的模长为

$$|\boldsymbol{g}^{(i)}|=\frac{1}{\cos\alpha_i} \tag{3.9.6}$$

（2）矢量的物理分量

矢量 $\boldsymbol{v}$ 对无量纲自然基标架的分解式如下：

$$\boldsymbol{v}=v^{(i)}\boldsymbol{g}_{(i)}=v_{(i)}\boldsymbol{g}^{(i)} \tag{3.9.7}$$

因为无量纲逆变基 $\boldsymbol{g}^{(i)}$ 不是单位矢量，而无量纲协变基 $\boldsymbol{g}_{(i)}$ 是单位矢量，故通常把 $\boldsymbol{v}$ 的逆变分量 $v^{(i)}$ 选作矢量 $\boldsymbol{v}$ 的物理分量。又因为式（3.9.3），有

$$\boldsymbol{v}=v^{(i)}\boldsymbol{g}_{(i)}=v^{(i)}\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\boldsymbol{g}_i=v^i\boldsymbol{g}_i$$

故

$$v^{(i)}=\sqrt{g_{ii}}v^i \tag{3.9.8}$$

和

$$v^i=\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}v^{(i)} \tag{3.9.9}$$

这是矢量的物理分量 $v^{(i)}$ 和自然基分量 v^i 之间的转换关系。

（3）张量的物理分量

张量在无量纲自然基标架下具有多种分量形式，它们都具有原来的物理量纲。但选哪种分量作为物理分量，则应根据具体问题而定。以二阶张量为例。因为二阶张量是映射量，它把一个矢量映射为另一个矢量，而矢量是以其逆变分量作为物理分量的，所以应该选二阶张量 T 的混变分量 $T^{(i)}_{(j)}$ 作为物理分量。这样，就有等式：

$$v^{(i)}=T^{(i)}_{\cdot(j)}u^{(j)} \tag{3.9.10}$$

式中，$u^{(i)}$ 和 $v^{(i)}$ 分别是矢量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的物理分量。又因为在自然基下有

$$v^i=T^i_{\cdot j}u^j$$

故

$$v^{(i)} = T^{i}_{\cdot j}\sqrt{\frac{g_{ii}}{g_{jj}}}u^{(j)}$$

此式与式(3.9.10)比较,有

$$T^{i}_{\cdot j} = \sqrt{\frac{g_{jj}}{g_{ii}}}T^{(i)}_{\cdot (j)} \tag{3.9.11}$$

高阶张量的物理分量也应根据具体物理问题来选择。一般说,由于矢量的物理分量已选为逆变分量,所以在高阶张量的物理分量中,凡与矢量点积的指标,都应选为下(协变)指标。

3.10 正交曲线坐标系下的物理分量

数学物理中最常采用正交曲线坐标系。对于正交曲线坐标系,有

$$g^{ij} = g_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \quad \text{和} \quad g^{ii} = \frac{1}{g_{ii}} \tag{3.10.1}$$

按式(3.9.3)对协变基进行无量纲化和归一化,有

$$\boldsymbol{g}_{(i)} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\ \boldsymbol{g}_{i} \tag{3.10.2}$$

按式(3.9.5)将逆变基无量纲化,有

$$\boldsymbol{g}^{(i)} = \sqrt{g_{ii}}\boldsymbol{g}^{i} = \frac{1}{\sqrt{g^{ii}}}\ \boldsymbol{g}^{i} \tag{3.10.3}$$

这两个式子说明,由于式(3.10.1),正交曲线坐标系的协变基和逆变基不仅是无量纲的,而且都是单位矢量。此外,正交曲线坐标系经这样处理后的协变基和逆变基是完全重合的。事实上有

$$\boldsymbol{g}^{(i)} = \sqrt{g_{ii}}g^{ij}\boldsymbol{g}_{j} = \sqrt{g_{ii}}g^{ii}\boldsymbol{g}_{i} = \sqrt{g^{ii}}\boldsymbol{g}_{i} = \boldsymbol{g}_{(i)} \tag{3.10.4}$$

故记

$$\boldsymbol{g}\langle i\rangle = \boldsymbol{g}_{(i)} = \boldsymbol{g}^{(i)} \tag{3.10.5}$$

就是说,不区分协变基和逆变基,而成为一组标准正交基。相应地,度量张量的协变分量和逆变分量也完全相同。

由于只有一组标准正交基,所以,张量的分量形式也只有一种,它具有原来的物理量纲,就是该张量的物理分量。由此之故,把这一组标准正交基称为物理标架。

张量在物理标架中分解为

$$\Phi = \varphi\langle i\cdots j\rangle g\langle i\rangle\cdots g\langle j\rangle \tag{3.10.6}$$

其中,$\varphi\langle i\cdots j\rangle$ 是张量的物理分量。在上式的记法中,约定了一对相同指标要求和。

式(3.7.2)已经定义拉梅(Lamé)系数为

$$\sqrt{g_{ii}} = H_{i} \tag{3.10.7}$$

故自然基和物理标架之间的关系为

$$\boldsymbol{g}_i = H_i \boldsymbol{g}\langle i\rangle,\ \boldsymbol{g}^i = \frac{1}{H_i}\boldsymbol{g}\langle i\rangle \tag{3.10.8}$$

自然基的度量张量的协变分量(见式(3.7.3))为

$$g_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ (H_i)^2 & i = j \end{cases} \tag{3.10.9}$$

相应的度量张量矩阵的行列式为

$$g = |\ g_{ij}\ | = (H_1 H_2 H_3)^2 \tag{3.10.10}$$

下面用 Lamé 系数表示克氏符号。由式(3.7.8),对第一类克氏符号,有

$$\begin{cases} \Gamma_{ijk} = 0 & (i,j,k\ \text{互不相等}) \\ \Gamma g_{ii,j} = -\dfrac{1}{2}(H_i H_i)_{,j} = -H_i \dfrac{\partial H_i}{\partial x^j} & (i \neq j) \\ \Gamma_{iji} = \Gamma_{jii} = \dfrac{1}{2}(H_i H_i)_{,j} = H_i \dfrac{\partial H_i}{\partial x_j} \end{cases} \tag{3.10.11}$$

对于第二类克氏符号,由式(3.7.9),有

$$\begin{cases} \Gamma_{ij}^{k} = 0 & (i,j,k\ \text{互不相等}) \\ \Gamma_{ii}^{j} = -\dfrac{1}{2H_j H_j}(H_i H_i)_{,j} = -\dfrac{H_i}{H_j^2}\dfrac{\partial H_i}{\partial x^j} & (i \neq j) \\ \Gamma_{ij}^{i} = \Gamma_{ji}^{i} = \dfrac{1}{2H_i H_i}(H_i H_i)_{,j} = \dfrac{1}{H_i}\dfrac{\partial H_i}{\partial x^j} \end{cases} \tag{3.10.12}$$

在正交曲线坐标系下,矢量的物理分量与自然基分量之间的关系如式(3.9.9)所示,为

$$v^i = \frac{1}{H_i} v\langle i\rangle \tag{3.10.13}$$

又因为式(3.10.8),有 $\quad \boldsymbol{v} = v_i \boldsymbol{g}^i = v^i \dfrac{1}{H_i}\boldsymbol{g}\langle i\rangle = v\langle i\rangle g\langle i\rangle$

故

$$v_i = H_i v\langle i\rangle \tag{3.10.14}$$

二阶张量的物理分量与自然基分量之间的关系如式(3.9.11)所示,为

$$T^i_{\cdot j} = \frac{H_j}{H_i} T^{(i)}_{\cdot (j)} \tag{3.10.15}$$

有了以上准备,利用第三章关于任意曲线坐标系下的张量的梯度、散度和旋度的表达式,可以得到在物理标架下的相应的物理分量形式。例如,已知矢量场函数 $\boldsymbol{v}$,求物理标架下的 div$\boldsymbol{v}$ 和 curl$\boldsymbol{v}$。由式(3.6.4) 和式(3.10.13):

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}v^i) = \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\sqrt{g}}{H_i}v\langle i\rangle\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_i}v\langle i\rangle\right) \tag{3.10.16}$$

由式(3.6.10)、式(3.10.8)和式(3.10.14),有

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} \boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_2 & \boldsymbol{g}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\begin{vmatrix} H_1 g\langle 1\rangle & H_2 g\langle 2\rangle & H_3 g\langle 3\rangle \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ H_1 v\langle 1\rangle & H_2 v\langle 2\rangle & H_3 v\langle 3\rangle \end{vmatrix} \tag{3.10.17}$$

如果把标量场函数的梯度 $\nabla\varphi$ 看作矢量 $\boldsymbol{v}$,则由式(3.10.16)还可得到

$$\nabla^2\varphi = \nabla\cdot\nabla\varphi = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\right) = \frac{1}{H_1H_2H_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_i^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right) \tag{3.10.18}$$

这是拉普拉斯算子在物理标架下的展开形式。

习　题　三

3.1　计算圆柱坐标系的两类克氏符号。

3.2　计算题 1.4 所示球坐标系的两类克氏符号。

3.3　求证:$\partial_i g^{jk} = -(g^{mj}\Gamma^k_{im} + g^{mk}\Gamma^j_{im})$。

3.4　已知 φ 为标量场,$\boldsymbol{v}$ 为矢量场,求证:$\nabla(\varphi\boldsymbol{v}) = \varphi\nabla\boldsymbol{v} + (\nabla\varphi)\boldsymbol{v}$。

3.5　设 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 为矢量场,求证:$\nabla(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) = (\nabla\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v} + (\nabla\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{u}$。

3.6　设 $\boldsymbol{u}$ 为矢量场,$\boldsymbol{a}$ 为任意矢量,求证:$\operatorname{curl}\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{u}\nabla - \nabla\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{a}$。

3.7　设 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 为矢量场,求证:

$$\nabla(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}\times(\nabla\times\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u}\cdot(\nabla\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v}\cdot(\nabla\boldsymbol{u})$$

3.8　设 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 为矢量场,求证:

$$\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\cdot(\nabla\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u}\cdot(\nabla\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{u}(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}(\nabla\cdot\boldsymbol{u})$$

3.9　求证下列恒等式:

(1) $\nabla\times\nabla f = 0$,其中,f 为标量场;

(2) $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{u}) = 0$,其中,$\boldsymbol{u}$ 为矢量场;

3.10　利用指标记法证明以下各式:

(1) $\nabla\cdot\boldsymbol{x} = 3$;

(2) $\nabla\times\boldsymbol{x} = 0$;

(3) $a\cdot\nabla\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$。

其中,$\boldsymbol{x}$ 表示位置矢量,$\boldsymbol{a}$ 是任意常矢量。

3.11　求函数 $\lambda = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_3^2$ 在方向 $\boldsymbol{n} = \frac{1}{7}(2\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2 - 6\boldsymbol{e}_3)$ 上的方向导数。

3.12　把 $\nabla\boldsymbol{a}$ 分解成对称部分和反对称部分之和,证明其中反对称部分的反偶矢量是

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \boldsymbol{a}$$

3.13　**运用高斯散度定理证明：**

$$\int_{\Sigma} x^i n_j \mathrm{d}S = V\delta^i_j$$

其中，$n_j \mathrm{d}S$ **表示体积** V **的边界曲面** $\sum$ **的面素**，x^i **是位置矢量**，**而** n_j **是面素的单位外法向矢量。**

3.14　**运用高斯散度定理证明：**

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{x}) \mathrm{d}S = 2V\boldsymbol{b}$$

其中，V **是封闭曲面** $\sum$ **包围的体积**，n **是它的单位外法向矢量**，$\boldsymbol{x}$ **是位置矢量**，b **是任意常矢量。**

3.15　**若矢量** $\boldsymbol{b} = \nabla \times \boldsymbol{u}$，**证明：**

$$\int_{\Sigma} \lambda b^i n_i \mathrm{d}S = \int_{V} \lambda_{,i} b^i \mathrm{d}V$$

其中，$\lambda = \lambda(x_i)$ **是标量函数**，$\boldsymbol{u}$ **是矢量场**，V **是封闭曲面** $\sum$ **包围的体积。**

第 4 章　曲面几何

物理学和力学中的许多张量是定义在空间曲面上的，例如，壳体中的应力张量和应变张量等。本章介绍曲面几何的基础知识，介绍有关定义在曲面上的张量的微分学。

4.1　曲面上的高斯(Gauss) 坐标

在高等数学中已经讲述过曲面。曲面方程中含有两个独立变量或独立参数。所以，我们可以在曲面上建立一个二维的曲线坐标系$\{x^{\alpha}\}(\alpha=1,2)$。曲面上任意一点$M$的位置都可以用这个曲线坐标系中的两个坐标来表示，或者说，任意点的位置矢量都是两个曲线坐标的函数：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(M)=\boldsymbol{r}(x^{\alpha}) \tag{4.1.1}$$

上式也称为曲面方程的矢量式。曲面上的曲线坐标也称为高斯坐标。

与第一章类似，曲面上高斯坐标为 x^{α} 的点 M 处的协变基矢量定义为

$$\boldsymbol{a}_{\alpha}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^{\alpha}} \tag{4.1.2}$$

它们分别与 M 点处的两条坐标线相切。协变基矢量 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 所决定的平面是曲面在 M 点处的切平面。也称 $\boldsymbol{a}_{\alpha}$ 为面内协变基矢量。曲面过该点的法向单位矢量是

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2|} \tag{4.1.3}$$

规定$\boldsymbol{n}$的正向所朝向的一面是曲面的正面。上式说明，$\boldsymbol{n}$与面内协变基矢量$\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 构成右手系。如果沿 $\boldsymbol{n}$ 设置坐标线 x^3（表示离开曲面的距离），这样，就可以令这个法向单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 作为第三个协变基矢量，即令

$$\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{n} \tag{4.1.4}$$

且有

$$\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{a}_3=1 \tag{4.1.5}$$

按下式定义对偶的逆变基矢量 $\boldsymbol{a}^{\alpha}$：

$$\boldsymbol{a}^{\alpha}\cdot\boldsymbol{a}_{\beta}=\delta^{\alpha}_{\beta} \tag{4.1.6}$$

此式说明，逆变基 $\boldsymbol{a}^{\alpha}$ 也在切平面内。故也称 $\boldsymbol{a}^{\alpha}$ 为面内逆变基矢量。可以验证，第三个逆变基矢量 $\boldsymbol{a}^3$ 与第三个协变基 $\boldsymbol{a}_3$ 是重合的。即有

$$\boldsymbol{a}^3=\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{n} \tag{4.1.7}$$

定义曲面的度量张量为

$$a_{\alpha\beta}=\boldsymbol{a}_\alpha\cdot\boldsymbol{a}_\beta \tag{4.1.8}$$

此式说明,$a_{\alpha\beta}$ 关于两个指标为对称。由此式可以证明,$a_{\alpha\beta}$ 是面内协变基矢量按面内逆变基矢量分解的系数,即

$$\boldsymbol{a}_\alpha=a_{\alpha\beta}\boldsymbol{a}^\beta \tag{4.1.9}$$

另外,由式(4.1.7)知

$$a_{3\alpha}=a_{\alpha3}=\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{a}_\alpha=\boldsymbol{a}_\alpha\cdot\boldsymbol{a}_3=0 \tag{4.1.10}$$

由 $a_{\alpha\beta}$ 和 $a_{3i}=a_{i3}$ 构成的矩阵的行列式是

$$a=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&0\\a_{21}&a_{22}&0\\0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=|\,a_{\alpha\beta}\,| \tag{4.1.11}$$

与第 1.6 节完全平行,还可以定义曲面上度量张量的逆变分量 $a^{\alpha\beta}$。可以把它看作是面内逆变基矢量按面内协变基矢量分解的系数,即

$$\boldsymbol{a}^\alpha=a^{\alpha\beta}\boldsymbol{a}_\beta \tag{4.1.12}$$

由此式易得

$$a^{\alpha\beta}=\boldsymbol{a}^\alpha\cdot\boldsymbol{a}^\beta \tag{4.1.13}$$

此式说明 $a^{\alpha\beta}$ 关于两个坐标为对称。由式(4.1.9)和式(4.1.12)还可以得到如下关系式:

$$a_{\alpha\gamma}a^{\gamma\beta}=\delta_\alpha^\beta \tag{4.1.14}$$

此外,与式(4.1.10)和式(4.1.5)类似,还可得到

$$a^{3\alpha}=0 \quad \text{和} \quad a^{33}=1 \tag{4.1.15}$$

要指出的是,由面内坐标 x^α 和离面坐标 x^3 可以组成一个三维坐标系。在这个三维坐标系中,前几章所有关于三维坐标系的一切结论都可以应用。

4.2 曲面的第一基本(二次)型

曲面上相邻两点 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 之间的距离 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 所对应的弧长 $\mathrm{d}s$ 称为弧元。可以用

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x^\alpha}\mathrm{d}x^\alpha=\boldsymbol{a}_\alpha\mathrm{d}x^\alpha \tag{4.2.1}$$

定义弧元 $\mathrm{d}s$ 的平方

$$\mathrm{I}=\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=a_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta \tag{4.2.2}$$

称弧元的平方 $\mathrm{d}s^2$ 为曲面的第一基本二次型,用罗马字符 I 表示。它的系数,即度量张量的协变分量的各个元素,在曲面几何中,通常表示为

$$a_{11}=A^2,\ a_{22}=B^2 \quad \text{和} \quad a_{12}=a_{21}=AB\cos\theta \tag{4.2.3}$$

由式(4.1.8)可以看出,A 和 B 分别等于面内协变基矢量的长度,称为 Lamé 系数,见式

(3.7.2) 或式(3.10.7),即有

$$|\boldsymbol{a}_1| = A,\ |\boldsymbol{a}_2| = B \tag{4.2.4a}$$

而两个面内协变基矢量之间的夹角等于 θ,即有

$$<\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2> = \theta \tag{4.2.4b}$$

当 $\theta = \pi/2$ 或者当 $a_{12} = a_{21} = 0$ 时,曲面上的曲线坐标系是正交曲线坐标系。由此,可以把度量张量的行列式 (4.1.11) 改写成

$$a = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = A^2B^2\sin^2\theta \tag{4.2.5}$$

也称 a 为第一基本型的系数行列式。用 a 可以表示曲面上的面元。首先看由相邻坐标线围成的曲边四边形面元的面积。它可以表示为

$$|\boldsymbol{a}_1 \mathrm{d}x^1 \times \boldsymbol{a}_2 \mathrm{d}x^2| = AB\sin\theta \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 = \sqrt{a}\mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \tag{4.2.6}$$

如果用 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 表示面元矢量,其大小等于面元的面积,方向为面元的法线方向,则有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_1 \mathrm{d}x^1 \times \boldsymbol{a}_2 \mathrm{d}x^2 = \boldsymbol{n}\sqrt{a}\mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \tag{4.2.7}$$

上式中隐含了关系式:

$$\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 = \sqrt{a}\boldsymbol{n} \tag{4.2.8}$$

这也使得式(4.1.3) 可以改写成

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2}{\sqrt{a}} \tag{4.2.9}$$

这个结果与第 1.7 节中的内容是完全类似的。同样,类似地还有

$$|a^{\alpha\beta}| = \frac{1}{a} \tag{4.2.10}$$

并有

$$a^{11} = \frac{a_{22}}{a},\quad a^{22} = \frac{a_{11}}{a},\quad a^{12} = a^{21} = -\frac{a_{12}}{a} \tag{4.2.11}$$

在曲面几何中,更多地是把度量张量称为第一基本张量,其实体定义为

$$\boldsymbol{a} = \mathrm{I} = a_{\alpha\beta}\boldsymbol{a}^{\alpha}\boldsymbol{a}^{\beta} = a^{\alpha\beta}\boldsymbol{a}_{\alpha}\boldsymbol{a}_{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}\boldsymbol{a}^{\alpha}\boldsymbol{a}_{\beta} = \delta_{\beta}^{\alpha}\boldsymbol{a}_{\alpha}\boldsymbol{a}^{\beta} \tag{4.2.12}$$

4.3 曲面的第二基本(二次)型

我们知道,曲面的法向矢量 $\boldsymbol{a}_3$ 是一个单位矢量,它的长度不变,但方向却依赖于点在曲面上的位置,或者说依赖于点的面内坐标 x^{α}。因此,$\boldsymbol{a}_3$ 对坐标 x^{α} 的导数与 $\boldsymbol{a}_3$ 垂直,是一个面内矢量(指在曲面相应点处的切平面内)。不妨设

$$\boldsymbol{a}_{3,\alpha} = -b_{\alpha\beta}\boldsymbol{a}^{\beta} \tag{4.3.1}$$

由此知

$$\boldsymbol{a}_{3,\alpha} \cdot \boldsymbol{a}_\beta = -b_{\alpha\gamma}\boldsymbol{a}^\gamma \cdot \boldsymbol{a}_\beta = -b_{\alpha\beta} \tag{4.3.2}$$

下面要说明，$b_{\alpha\beta}$ 是一个二维张量的协变分量。这个二维张量称为曲率张量（Curvature Tensor）。

先看 $b_{\alpha\beta}$ 关于指标的对称性。把正交关系式（4.1.10）

$$\boldsymbol{a}_\alpha \cdot \boldsymbol{a}_3 = 0$$

对 x^β 求导。利用式（4.3.2），**得**

$$\boldsymbol{a}_{\alpha,\beta} \cdot \boldsymbol{a}_3 = -\boldsymbol{a}_\alpha \cdot \boldsymbol{a}_{3,\beta} = b_{\beta\alpha} \tag{4.3.3}$$

上式中的 $\boldsymbol{a}_{\alpha,\beta}$ 可根据式（3.2.1）**用逆变基展开为**

$$\boldsymbol{a}_{\alpha,\beta} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma}\boldsymbol{a}^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta3}\boldsymbol{a}^3 \tag{4.3.4}$$

代入式（4.3.3）**后，得**

$$b_{\beta\alpha} = \Gamma_{\alpha\beta3} \tag{4.3.5}$$

因为克氏符号关于第一、第二指标是对称的，所以 $b_{\alpha\beta}$ 关于指标 α 和 β 也是对称的。

此外，根据式（3.2.1），**我们也可以把 $\boldsymbol{a}_{3,\alpha}$ 用逆变基展开为**

$$\boldsymbol{a}_{3,\alpha} = \Gamma_{3\alpha\beta}\boldsymbol{a}^\beta \tag{4.3.6}$$

把式（4.3.6）**和式**（4.3.1）**相比较，得**

$$b_{\alpha\beta} = -\Gamma_{3\alpha\beta} = -\Gamma_{\alpha3\beta} \tag{4.3.7}$$

又由 $b_{\alpha\beta}$ 关于指标 α 和 β 的对称性，还可得

$$b_{\alpha\beta} = -\Gamma_{3\beta\alpha} \tag{4.3.8}$$

再看式（4.3.5）。**因为克氏符号的第三指标可以用度量张量升降，所以有**

$$b_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta3} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}a_{\gamma3} + \Gamma^3_{\alpha\beta}a_{33} = \Gamma^3_{\alpha\beta} \tag{4.3.9}$$

以上用到了式（4.1.10）**及 $a_{33} = 1$。**

以上各式说明了曲率张量与克氏符号的联系。下面证明，虽然克氏符号不是张量，但 $b_{\alpha\beta}$ 却是一个张量（的协变分量）。为此，在曲面上再取一套曲线坐标 $x^{\alpha'}$。由 $b_{\alpha\beta}$ 的定义式（4.3.2），**根据坐标转换关系，有**

$$b_{\alpha\beta} = -\boldsymbol{a}_{3,\alpha} \cdot \boldsymbol{a}_\beta = -\boldsymbol{a}_{3,\alpha'}\beta^{\alpha'}_\alpha \cdot \boldsymbol{a}_{\beta'}\beta^{\beta'}_\beta = b_{\alpha'\beta'}\beta^{\alpha'}_\alpha\beta^{\beta'}_\beta$$

这说明 $b_{\alpha\beta}$ 符合张量的定义，见式（1.4.1）。

由于是张量，所以，$b_{\alpha\beta}$ 的两个指标可以用度量张量来升降，得到相应的混变分量和逆变分量。但这一点也可以利用 $b_{\alpha\beta}$ 与克氏符号的关系直接得到。事实上，由式（4.3.7），**因为克氏符号的第三指标可以用度量张量升降，所以，$b_{\alpha\beta}$ 的第二指标也可以用度量张量升降，也就是**

$$b^\beta_\alpha = b_{\alpha\gamma}a^{\gamma\beta} = -\Gamma_{3\alpha\gamma}a^{\gamma\beta} = -\Gamma^\beta_{3\alpha} = -\Gamma^\beta_{\alpha3} \tag{4.3.10}$$

可以看出，在上边的 b^β_α 中，下指标是第一指标，上指标是第二指标。但由于在 $b_{\alpha\beta}$ 中，指标

α 和 β 是对称的，所以上式又可写成

$$b_{\alpha}^{\beta} = b_{\gamma\alpha} a^{\gamma\beta} \tag{4.3.11}$$

这时，上指标成了第一指标，而下指标成了第二指标。由此之故，在 b_{α}^{β} 中将不区分第一指标和第二指标。

曲率张量的逆变分量可以由下式得到：

$$b^{\alpha\beta} = b_{\gamma}^{\alpha} a^{\gamma\beta} \tag{4.3.12}$$

另外，式(4.3.10)说明，曲率张量的混变分量也可以用克氏符号表示。根据克氏符号的定义式(3.2.3b)，可以把式(4.3.10)的最后两个等式写成

$$\boldsymbol{a}_{3,\beta} \cdot \boldsymbol{a}^{\alpha} = \boldsymbol{a}_{\beta,3} \cdot \boldsymbol{a}^{\alpha} = - b_{\beta}^{\alpha} \tag{4.3.13}$$

下面引入第二基本型的概念。由式(4.3.1)，有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_{3,\alpha}\mathrm{d}x^{\alpha} = - b_{\alpha\beta}\boldsymbol{a}^{\beta}\mathrm{d}x^{\alpha} \tag{4.3.14}$$

因而

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a}_3 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = - b_{\alpha\beta}\boldsymbol{a}^{\beta}\mathrm{d}x^{\alpha} \cdot \boldsymbol{a}_{\gamma}\mathrm{d}x^{\gamma} = - b_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^{\alpha}\mathrm{d}x^{\beta} \tag{4.3.15}$$

上式中 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 是弧元，它也可以用位置矢量的微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 代替，见式(4.2.1)。

在曲面几何中，称

$$II = b_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^{\alpha}\mathrm{d}x^{\beta} \tag{4.3.16}$$

为曲面的第二基本(二次)型。它的系数 $b_{11}, b_{12} = b_{21}, b_{22}$ 分别用 E, F 和 G 表示。

通常，称曲率张量为曲面的第二基本张量，其实体用 $\boldsymbol{b}$ 表示，定义为

$$\boldsymbol{b} = b_{\alpha\beta}\boldsymbol{a}^{\alpha}\boldsymbol{a}^{\beta} = b^{\alpha\beta}\boldsymbol{a}_{\alpha}\boldsymbol{a}_{\beta} = b_{\alpha}^{\beta}\boldsymbol{a}^{\alpha}\boldsymbol{a}_{\beta} = b_{\beta}^{\alpha}\boldsymbol{a}_{\alpha}\boldsymbol{a}^{\beta} \tag{4.3.17}$$

下面我们来看看曲率张量 b_{β}^{α} 的几何意义。我们要说明，它与曲面的曲率和扭率相联系。先定义曲面的曲率。称过曲面上一点的法线所作的平面为曲面在该点的法截面，法截面与曲面的交线为该点的法截线。用法截线的曲率定义曲面的曲率。用法截线的挠率来定义曲面的扭率。通过曲面上任一点的法截线有无穷多条，给定该点的一个切线方向就有一条确定的法截线，因而也就有一个确定的曲面曲率和曲面扭率。

让我们把这一段叙述形象化。为此，把 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}_3$ 用曲率张量的混变分量表示。利用式(4.1.12)和式(4.3.11)，将式(4.3.14)改写为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a}_3 = - b_{\alpha}^{\beta}\boldsymbol{a}_{\beta}\mathrm{d}x^{\alpha} \tag{4.3.18}$$

假设只有 $b_1^1 \neq 0$，并考虑沿 x^1 线方向作曲面的法截面。因为只考虑微小弧段，所以沿 x^1 方向的法截线与 x^1 坐标线重合。因为 $|\boldsymbol{a}_3| = 1$，所以由上式，矢量

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_{3,1}\mathrm{d}x^1 = - b_1^1\boldsymbol{a}_1\mathrm{d}x^1$$

的长度等于从 A 点走到临近的 B 点时这个曲面的法线在这个平面内所转过的角度 $\mathrm{d}\varphi$(乘以 $|\boldsymbol{a}_3| = 1$)。如图 4.1(a)所示。如果用矢量 $\boldsymbol{a}_1\mathrm{d}x^1$ 的长度来除这个角度，就得到曲面在 A 点沿

x^1 方向的曲率：

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}=\frac{|\,\mathrm{d}\boldsymbol{a}_3\,|}{|\,\boldsymbol{a}_1\,|\,\mathrm{d}x^1}=|\,b_1^1\,|$$

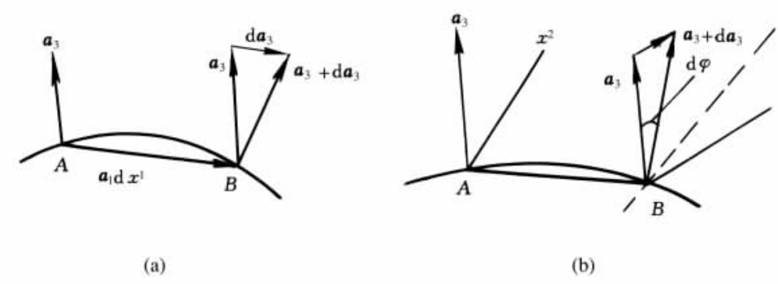


图 4.1　曲率张量的几何意义

可以看出，b_1^1 表征了曲面在 A 点沿 x^1 方向的弯曲程度。

再看第二种情况。假设 $b_1^1=0$，但 $b_1^2\neq 0$。由式(4.3.18)及从图 4.1(b)可以看出

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{a}_{3,1}\mathrm{d}x^1=-b_1^2\boldsymbol{a}_2\mathrm{d}x^1$$

其中，$\mathrm{d}\boldsymbol{a}_3$ 的长度等于从 A 走到 B 时曲面法线偏离纸面所转动的角度。法线沿单位弧长的偏转角称为曲线 x^1 在 A 点的挠率，定义为曲面沿曲线 x^1 的扭率，有

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}=\frac{|\,\mathrm{d}\boldsymbol{a}_3\,|}{|\,\boldsymbol{a}_1\,|\,\mathrm{d}x^1}=|\,b_1^2\,|\frac{|\,\boldsymbol{a}_2\,|}{|\,\boldsymbol{a}_1\,|}$$

可见，b_1^2 表征了曲面沿 x^1 方向的扭转程度。上式中，如果 $|\,\boldsymbol{a}_1\,|=|\,\boldsymbol{a}_2\,|$，那么，$b_1^2=b_2^1$，($b_2^1$ 表征曲面沿 x^2 方向的扭转程度)，都等于曲面沿坐标线 x^1 和 x^2 的扭率(二者相等)。如果 $|\,\boldsymbol{a}_1\,|\neq|\,a_2\,|$，则 $b_1^2\neq|\,b_2^1\,|$，但二者都与曲面的扭率有关。

我们知道，如果把二阶张量的分量按指标的行列规律进行排列，就得到一个矩阵。又知道，对于一个 $n\times n$ 的对称矩阵，总能找到 n 个相互正交的特征方向。对称矩阵的标准形是对角阵，对角元素就是对应的 n 个特征值。这些结论对于二阶张量也是适用的。

我们把这些结论用在曲率张量上。因为曲率张量是二维空间的二阶对称张量，所以，在曲面上任意一点都能找到两个互相正交的特征方向。如果沿这两个方向放置坐标曲线，则曲率张量一定具有对角形式。就是说，沿这两个方向有 $b_1^2=b_2^1=0$。这表明，曲面在该点沿这两个方向没有扭率。称曲率张量的特征方向为曲面在该点的主方向。沿主方向的曲率为曲面在该点的主曲率。又，在曲面上存在这样的曲线，其每点处的切线方向正好是曲面在该点的主方向。称这样的曲线为曲面的曲率线。在曲面上一定可以找到两族相互正交的曲率线。如果坐标曲线正好是曲率线，则称其为主坐标线。这样确定的坐标系称为主坐标系。显然，主坐标系一定是正交坐标系。

再来看第二基本张量或曲率张量的两个不变量。第一不变量是

$$b_\alpha^\alpha=b_1^1+b_2^2 \tag{4.3.19}$$

它表示两个主曲率之和，称为平均曲率。第二不变量是行列式

$$
b=\begin{vmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{vmatrix}=b_1^1b_2^2-b_2^1b_1^2 \tag{4.3.20}
$$

它叫做曲面的高斯曲率(Gaussian Curvature)。显然,高斯曲率是两个主曲率的积。

4.4 曲面上的单位法向矢量与基矢量的导数

(1) 单位法向矢量对坐标的导数(Weingarten 公式)

如前所述,单位法向矢量对坐标的导数是面内矢量,可以用面内逆变基矢量展开,见式(4.3.1),也可以用面内协变基矢量展开,见式(4.3.13)。把它们统一写在下面,即

$$
\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x^\alpha}=\boldsymbol{a}_{3,\alpha}=-b_{\alpha\beta}\boldsymbol{a}^\beta=-b_\alpha^\beta\boldsymbol{a}_\beta \tag{4.4.1}
$$

此式称为 Weingarten 公式。

(2) 面内基矢量对坐标的导数(Gauss 求导公式)

面内协变基矢量 $\boldsymbol{a}_\alpha$ 对坐标的导数可以用面内逆变基矢量和单位法向矢量表示,如式(4.3.4)内所示。再利用式(4.3.5),最终得

$$
\boldsymbol{a}_{\alpha,\beta}=\Gamma_{\alpha\beta\gamma}\boldsymbol{a}^\gamma+b_{\alpha\beta}\boldsymbol{n} \tag{4.4.2}
$$

利用式(4.1.12),上式中的逆变基矢量可以用协变基矢量代替,而克氏符号的第三指标相应地被度量张量升上去,成为

$$
\boldsymbol{a}_{\alpha,\beta}=\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma\boldsymbol{a}_\gamma+b_{\alpha\beta}\boldsymbol{n} \tag{4.4.3}
$$

此式称为 Gauss 求导公式。它表明,面内协变基矢量对坐标的导数是一个三维矢量,可以用面内协变基矢量和单位法向矢量表示。

式(4.4.2)中的 $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ 是曲面(二维 Riemann 空间)上的第一类 Christoffel 符号,简称第一类克氏符号,共八个分量。式(4.4.3)中的 $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ 是曲面上的第二类 Christoffel 符号,简称第二类克氏符号,也有八个分量。

将式(4.4.2)两端点乘 $\boldsymbol{a}_\lambda$,利用式(4.1.6)和式(4.1.10),易得

$$
\Gamma_{\alpha\beta\gamma}=\boldsymbol{a}_{\alpha,\beta}\cdot\boldsymbol{a}_\lambda=\frac{\partial \boldsymbol{a}_\alpha}{\partial x^\beta}\cdot\boldsymbol{a}_\lambda \tag{4.4.4}
$$

将式(4.4.3)两端点乘 $\boldsymbol{a}^\lambda$,类似可得

$$
\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda=\boldsymbol{a}_{\alpha,\beta}\cdot\boldsymbol{a}^\lambda=\frac{\partial \boldsymbol{a}_\alpha}{\partial x^\beta}\cdot\boldsymbol{a}^\lambda \tag{4.4.5}
$$

以上两式与三维空间中克氏符号的关系式式(3.2.3)完全类似。

曲面上的克氏符号可以用曲面的第一基本型系数,也就是度量张量对坐标的导数表示。事实上,利用式(4.1.8)和式(4.4.4),有

$$
a_{\alpha\beta,\gamma}=\boldsymbol{a}_{\alpha,\gamma}\cdot\boldsymbol{a}_\beta+\boldsymbol{a}_\alpha\cdot\boldsymbol{a}_{\beta,\gamma}=\Gamma_{\gamma\alpha\beta}+\Gamma_{\gamma\beta\alpha}
$$

同理有

$$
\begin{aligned}
a_{\beta\gamma,\alpha}&=\boldsymbol{a}_{\beta,\alpha}\cdot\boldsymbol{a}_\gamma+\boldsymbol{a}_\beta\cdot\boldsymbol{a}_{\gamma,\alpha}=\Gamma_{\alpha\beta\gamma}+\Gamma_{\alpha\gamma\beta}\\
a_{\gamma\alpha,\beta}&=\boldsymbol{a}_{\gamma,\beta}\cdot\boldsymbol{a}_\alpha+\boldsymbol{a}_\gamma\cdot\boldsymbol{a}_{\alpha,\beta}=\Gamma_{\beta\gamma\alpha}+\Gamma_{\beta\alpha\gamma}
\end{aligned} \tag{4.4.6}
$$

注意，在以上书写中总是把求导的指标（如第一式中的 γ）写成克氏符号的第一指标，这样便于规范书写。这里多处利用了克氏符号前两个指标的可交换性。

由此三式易得

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(a_{\beta\gamma,\alpha} + a_{\gamma\alpha,\beta} - a_{\alpha\beta,\gamma}) \tag{4.4.7}$$

当然，第二类克氏符号也可表示为

$$\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}a^{\lambda\gamma}(a_{\beta\gamma,\alpha} + a_{\gamma\alpha,\beta} - a_{\alpha\beta,\gamma}) \tag{4.4.8}$$

以上两式与三维空间中克氏符号的关系式(3.2.9)类似。

再来看看面内逆变基矢量 $\boldsymbol{a}^{\alpha}$ 对坐标的导数。首先将式(4.1.6)

$$\boldsymbol{a}^{\alpha} \cdot \boldsymbol{a}_{\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}$$

两边对坐标 x^{β} 求导，得

$$\boldsymbol{a}^{\alpha}_{,\beta} \cdot \boldsymbol{a}_{\gamma} + \boldsymbol{a}^{\alpha} \cdot \boldsymbol{a}_{\gamma,\beta} = 0$$

利用式(4.4.5)，得

$$\boldsymbol{a}^{\alpha}_{,\beta} \cdot \boldsymbol{a}_{\gamma} = -\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \tag{4.4.9}$$

其次，将等式 $\boldsymbol{a}^{\alpha} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}^{\alpha} \cdot \boldsymbol{a}_3 = 0$ 两端对坐标 x^{β} 求导，得

$$\boldsymbol{a}^{\alpha}_{,\beta} \cdot \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}^{\alpha} \cdot \boldsymbol{a}_{3,\beta} = 0$$

利用式(4.3.13)，上式改写成

$$\boldsymbol{a}^{\alpha}_{,\beta} \cdot \boldsymbol{a}_3 = b^{\alpha}_{\beta} \tag{4.4.10}$$

由式(4.4.9)和式(4.4.10)得

$$\boldsymbol{a}^{\alpha}_{,\beta} = -\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\boldsymbol{a}^{\gamma} + b^{\alpha}_{\beta}\boldsymbol{n} \tag{4.4.11}$$

式(4.4.3)和式(4.4.11)说明，面内基矢量对坐标的导数可以用克氏符号和曲率张量（第二基本张量）表示。其中，曲率张量表征它离面（离开切平面）的程度。

(3) 第一基本张量对坐标的导数

式(4.4.6)已经给出了第一基本张量的协变分量对坐标的导数的表达式。将式(4.1.14)($a_{\mu\gamma}a^{\gamma\beta} = \delta^{\beta}_{\mu}$)两端对坐标 x^{λ} 求导，则

$$a_{\mu\gamma,\lambda}a^{\gamma\beta} + a_{\mu\gamma}a^{\gamma\beta}_{,\lambda} = 0$$

由式(4.4.6)，可将其中的 $a_{\mu\gamma,\lambda}$ 用克氏符号替换，成为

$$\Gamma^{\beta}_{\lambda\mu} + \Gamma_{\lambda\gamma\mu}a^{\gamma\beta} + a_{\mu\gamma}a^{\gamma\beta}_{,\lambda} = 0$$

两端乘以 $a^{\alpha\mu}$，利用式(4.1.14)，可消去最后一项中的 $a_{\mu\gamma}$，得

$$a^{\alpha\beta}_{,\lambda} = -a^{\alpha\mu}\Gamma^{\beta}_{\lambda\mu} - a^{\mu\beta}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} \tag{4.4.12}$$

这是第一基本张量的逆变分量对坐标的导数的表达式。

我们知道，第一基本张量的协变分量的行列式是用 a 表示的，见式(4.2.5)。又由式(4.2.8)知面元的大小是

$$\sqrt{a} = (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) \cdot \boldsymbol{n} \tag{4.4.13}$$

因为面元 $\sqrt{a}$ 的大小是随曲面上点的位置变化而变化的，所以可以求 $\sqrt{a}$ 对坐标的导数。将上式对坐标求导，并利用式(4.4.1)和式(4.4.3)，则

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sqrt{a}}{\partial x^\alpha} &= \frac{\partial \boldsymbol{a}_1}{\partial x^\alpha} \times \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{a}_1 \times \frac{\partial \boldsymbol{a}_2}{\partial x^\alpha} \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x^\alpha} \\ &= \Gamma^\gamma_{1\alpha} \boldsymbol{a}_\gamma \times \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{a}_1 \times \Gamma^\gamma_{2\alpha} \boldsymbol{a}_\gamma \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \cdot (-b^\beta_\alpha \boldsymbol{a}_\beta) \\ &= (\Gamma^1_{1\alpha} + \Gamma^2_{2\alpha})(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{n}) = \Gamma^\beta_{\alpha\beta} \sqrt{a}\end{aligned} \tag{4.4.14}$$

此式与式(3.2.11)相似。由此式还可以得到

$$\Gamma^\beta_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \sqrt{a}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\ln \sqrt{a}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\ln \alpha) = \frac{1}{2a} \frac{\partial a}{\partial x^\alpha} \tag{4.4.15}$$

4.5 面内协变导数

(1) 曲面上的 Christoffel 符号

我们知道，面内的基矢量和法向矢量是正交的，如式(4.1.10)所示。将此式对坐标 x^β 求导，得

$$\boldsymbol{a}_{\alpha,\beta} \cdot \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_{3,\beta} \cdot \boldsymbol{a}_\alpha = 0$$

利用式(3.2.3)和对称关系式(3.2.7)，由上式得

$$\Gamma_{\alpha\beta 3} = -\Gamma_{3\beta\alpha} = -\Gamma_{\beta 3\alpha} = \Gamma_{\beta\alpha 3} = -\Gamma_{3\alpha\beta} = -\Gamma_{\alpha 3\beta} \tag{4.5.1}$$

以上最后两个等式，是将正交关系 $\boldsymbol{a}_\beta \cdot \boldsymbol{a}_3 = 0$ 对坐标 x^α 求导而得到的。类似地，对式(4.1.5)求导，得

$$\boldsymbol{a}_{3,\alpha} \cdot \boldsymbol{a}_3 = 0$$

因此

$$\Gamma_{3\alpha 3} = \Gamma_{\alpha 33} = 0 \tag{4.5.2a}$$

又由于曲面上的法向矢量 $\boldsymbol{a}_3$ 只是坐标 x^α 的函数，所以，$\boldsymbol{a}_{3,3} = 0$。利用这一关系，再利用克氏符号的定义式(3.2.3)，易得

$$\Gamma_{33\alpha} = \Gamma_{333} = 0 \tag{4.5.2b}$$

方程(4.5.2)指出，对于曲面上的第一类克氏符号 Γ_{ijk}，如果它的下标中有两个或两个以上是 3，则这个克氏符号为零。

再看第二类克氏符号。因为克氏符号的第三指标可以通过度量张量加以升降，由式(3.2.5)，有

$$\Gamma^3_{3\alpha} = \Gamma_{3\alpha m} a^{m3} = \Gamma_{3\alpha\beta} a^{\beta 3} + \Gamma_{3\alpha 3} a^{33} = \Gamma_{3\alpha 3} = 0 \tag{4.5.3a}$$

在以上推导中,使用了关系式(4.1.15)。

类似地,可以得到

$$\Gamma^3_{\alpha 3} = \Gamma^\alpha_{33} = \Gamma^3_{33} = 0 \tag{4.5.3b}$$

式(4.5.3)同样说明,对于曲面上的第二类克氏符号,只要有两个或两个以上指标是 3,则这个克氏符号为零。

(2) 矢量对坐标的导数,面内协变导数

考虑一个定义在曲面上的矢量 $\boldsymbol{v}$,它是坐标 x^α 的函数。然而,$\boldsymbol{v}$ 不一定是面内矢量即与切平面平行的矢量,它可以有一个法向分量,因此

$$\boldsymbol{v} = v_i \boldsymbol{a}^i = v_\alpha \boldsymbol{v}^\alpha + v_3 \boldsymbol{a}^3 \tag{4.5.1a}$$

或

$$\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{a}_i = v^\alpha \boldsymbol{a}_\alpha + v^3 \boldsymbol{a}_3 \tag{4.5.1b}$$

从式(4.5.1a)出发,按照式(3.3.6b)和式(3.3.5b),可以写出 $\boldsymbol{v}$ 对坐标 x^β 的导数:

$$\boldsymbol{v}_{,\beta} = v_{i;\beta} \boldsymbol{a}^i = v_{\alpha;\beta} \boldsymbol{a}^\alpha + v_{3;\beta} \boldsymbol{a}^3 \tag{4.5.2}$$

式中

$$v_{\alpha;\beta} = v_{\alpha,\beta} - v_m \Gamma^m_{\alpha\beta} = v_{\alpha,\beta} - v_\gamma \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} - v_3 \Gamma^3_{\alpha\beta} \tag{4.5.3a}$$

$$v_{3;\beta} = v_{3,\beta} - v_m \Gamma^m_{3\beta} = v_{3,\beta} - v_\gamma \Gamma^\gamma_{3\beta} - v_3 \Gamma^3_{3\beta} \tag{4.5.3β}$$

利用式(4.3.9)、式(4.3.10)和式(4.5.3),得

$$v_{\alpha;\beta} = v_{\alpha,\beta} - v_\gamma \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} - v_3 b_{\alpha\beta} \tag{4.5.4}$$

$$v_{3;\beta} = v_{3,\beta} + v_\gamma b^\gamma_\beta \tag{4.5.5}$$

与式(3.3.5)相比较,可以把式(4.5.4)右端前两项定义为面内协变导数,并用符号表示成

$$\gamma_{\alpha\circ\beta} = v_{\alpha,\beta} - v_\gamma \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \tag{4.5.6a}$$

或

$$\overset{\circ}{\nabla}_\beta v_\alpha = v_{\alpha,\beta} - v_\gamma \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \tag{4.5.6b}$$

可以看出,面内协变导数的意义就是,矢量的面内分量对坐标求协变导数。对坐标 x^α 的面内协变导数用句号记法“$\circ\ \alpha$”或 $\overset{\circ}{\nabla}_\alpha$ 表示。这样,式(4.5.4)可以改写成

$$v_{\alpha;\beta} = v_{\alpha\circ\beta} - v_3 b_{\alpha\beta} \tag{4.5.7a}$$

或

$$\nabla_\beta v_\alpha = \overset{\circ}{\nabla}_\beta v_\alpha - v_3 b_{\alpha\beta} \tag{4.5.7b}$$

现在可以把式(4.5.2)改写成

$$\boldsymbol{v}_{,\beta} = (v_{\alpha\circ\beta} - v_3 b_{\alpha\beta}) \boldsymbol{a}^\alpha + (v_{3,\beta} + v_\gamma b^\gamma_\beta) \boldsymbol{a}^3 \tag{4.5.8a}$$

也可以写成另一种形式

$$\partial_\beta \boldsymbol{v}=(\overset{\circ}{\nabla}_\beta v_\alpha - v_3 b_{\alpha\beta})\boldsymbol{a}^\alpha+(v_{3,\beta}+v_\gamma b_\beta^\gamma)\boldsymbol{a}^3$$

类似地，从式(4.5.1b)出发，按照式(3.3.6a)和式(3.3.5a)，可以平行地得到逆变分量 v^α 的面内协变导数：

$$\overset{\circ}{\nabla}_\beta v^\alpha = v^\alpha_{\circ\beta}=v^\alpha_{,\beta}+v^\gamma \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} \tag{4.5.9}$$

由此可以得到

$$v^\alpha_{;\beta}=v^\alpha_{\circ\beta}-v^3 b^\alpha_\beta \tag{4.5.10a}$$

或

$$\nabla_\beta v^\alpha = \overset{\circ}{\nabla}_\beta v^\alpha - v^3 b^\alpha_\beta \tag{4.5.10b}$$

还可以得到

$$v^3_{;\beta}=v^3_{,\beta}+v^\gamma b_{\gamma\beta} \tag{4.5.11}$$

由此可以给出式(4.5.8a)的另一种形式：

$$\boldsymbol{v}_{,\beta}=v^\alpha_{;\beta}\boldsymbol{a}_\alpha+v^3_{;\beta}\boldsymbol{a}_3=(v^\alpha_{\circ\beta}-v^3 b^\alpha_\beta)\boldsymbol{a}_\alpha+(v^\alpha_{,\beta}+v^\gamma b_{\gamma\beta})\boldsymbol{a}_3 \tag{4.5.8b}$$

对于面内矢量，以下事实值得注意。就是，虽然面内矢量 $\boldsymbol{v}$ 的离面分量为零，也就是 $v^3=v_3=0$。但是这些离面分量关于面内坐标的协变导数却不为零。这从式(4.5.5)和式(4.5.11)可以看出，有

$$v_{3;\beta}=v_\gamma b^\gamma_\beta,\quad v^3_{;\beta}=v^\gamma b_{\gamma\beta} \tag{4.5.12}$$

造成这一现象的原因是面内基矢量对面内坐标的导数是一个三维矢量，存在着离面分量，这从式(4.4.3)和式(4.4.11)可以看出。由于这一原因，任意一个面内矢量 $\boldsymbol{v}$ 对面内坐标的导数也是一个三维矢量，同样有离面分量。这从式(4.5.8)可以看出(令式中 $v_3=v^3=0$，$v_{3,\beta}=v^3_{,\beta}=0$)：

$$\boldsymbol{v}_{,\beta}=v_{\alpha\circ\beta}\,\boldsymbol{a}^\alpha+v_\gamma b^\gamma_\beta\,\boldsymbol{a}^3=v^\alpha_{\circ\beta}\,\boldsymbol{a}_\alpha+v^\gamma b_{\gamma\beta}\,\boldsymbol{a}_3 \tag{4.5.13}$$

其中，曲率张量表征了面内矢量求导后的离面程度。所以，对于面内矢量 $\boldsymbol{v}=v_\alpha\boldsymbol{a}^\alpha=v^\alpha\boldsymbol{a}_\alpha$，不能把它对面内坐标的导数写成 $\boldsymbol{v}_{,\beta}=(v_\alpha\boldsymbol{a}^\alpha)_{,\beta}=v_{\alpha;\beta}\,\boldsymbol{a}^\alpha$，而必须形式地加上 $v_{3;\beta}\,\boldsymbol{a}^3$ 这一项。

此外，如果矢量 $\boldsymbol{v}$ 不只是面内坐标 x^α 的函数，而且还是离面坐标 x^3 的函数，则可以对 x^3 求导数。具体又分两种情况：

第一种情况：矢量 $\boldsymbol{v}$ 是一般矢量，即不仅有面内分量，而且还有法向分量。这时，矢量对坐标 x^3 的导数如下：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{,3}&=v_{i;3}\boldsymbol{a}^i=v_{\alpha;3}\boldsymbol{a}^\alpha+v_{3;3}\boldsymbol{a}^3=(v_{\alpha,3}-v_m\Gamma^m_{\alpha3})\boldsymbol{a}^\alpha+(v_{3,3}+v_m\Gamma^m_{33})\boldsymbol{a}^3\\&=(v_{\alpha,3}-v_\gamma\Gamma^\gamma_{\alpha3})\boldsymbol{a}^\alpha+v_{3,3}\boldsymbol{a}^3=(v_{\alpha,3}+v_\gamma b^\gamma_\alpha)\boldsymbol{a}^\alpha+v_{3,3}\boldsymbol{a}^3\end{aligned} \tag{4.5.14a}$$

以上用到了式(4.3.10)。$\boldsymbol{v}_3$ 也可以用协变基展开,这导致

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{,3}&=v^i_{;3}\boldsymbol{a}_i=v^\alpha_{;3}\boldsymbol{a}_\alpha+v^3_{;3}\boldsymbol{a}_3=(v^\alpha_{,3}+v^m\Gamma^\alpha_{m3})\boldsymbol{a}_\alpha+(v^3_{,3}+v^m\Gamma^3_{m3})\boldsymbol{a}_3\\&=(v^\alpha_{,3}+v^\gamma\Gamma^\alpha_{\gamma3})\boldsymbol{a}_\alpha+v^3_{,3}\boldsymbol{a}_3=(v^\alpha_{,3}-v^\gamma b^\alpha_\gamma)\boldsymbol{a}_\alpha+v^3_{,3}\boldsymbol{a}_3\end{aligned}\tag{4.5.14b}$$

在式(4.5.14)的两式中,$\boldsymbol{a}_3$ 和 $\boldsymbol{a}^3$ 没有区别,v_3 和 v^3 之间也没有区别。

第二种情况:v 是面内矢量(即与切平面平行的矢量)。这时,因为 v 的大小和方向与距离曲面的远近有关,即不仅是面内坐标 x^α 的函数,也是离面坐标 x^3 的函数,所以仍然可以求 $\boldsymbol{v}_{,3}$。但这时,在式(4.5.14)中,将没有 $\boldsymbol{a}^3$ 或 $\boldsymbol{a}_3$ 项。这说明,面内矢量对 x^3 求导后仍然是面内矢量。

(3) 张量对坐标的导数

与矢量情况一样,前面(第 3.4 节)关于张量对坐标的导数的一般论述在这里都是适用的。只是在曲面情况下,往往把对面内坐标的导数和对离面坐标的导数分开讨论而已。以二阶张量的逆变分量为例,它的协变导数,根据 3.4 节的一般理论,当然是

$$A^{ij}_{;\gamma}=A^{ij}_{,\gamma}+A^{mj}\Gamma^i_{m\gamma}+A^{im}\Gamma^j_{mr}=A^{ij}_{,\gamma}+A^{\delta j}\Gamma^i_{\delta\gamma}+A^{3j}\Gamma^i_{3\gamma}+A^{i\delta}\Gamma^j_{\delta\gamma}+A^{i3}\Gamma^j_{3\gamma}\tag{4.5.15}$$

现在讨论面内张量。这时,只有 $A^{\alpha\beta}$,而 $A^{3\beta}=A^{\alpha3}=A^{33}=0$。先求面内协变导数,即对张量的面内分量求面内坐标的协变导数,如下:

$$A^{\alpha\beta}_{;\gamma}\equiv A^{\alpha\beta}_{\circ\gamma}=A^{\alpha\beta}_{,\gamma}+A^{\gamma\beta}\Gamma^\alpha_{\delta\gamma}+A^{\alpha\delta}\Gamma^\beta_{\delta\gamma}\tag{4.5.16}$$

与面内矢量存在 $v_{3;\beta}$ 的道理一样,面内张量也存在离面分量对面内坐标的协变导数 $A^{\alpha3}_{;\gamma}$,$A^{3\beta}_{;\gamma}$ 和 $A^{33}_{;\gamma}$。由式(4.5.15),有

$$\begin{aligned}&A^{\alpha3}_{;\gamma}=A^{\alpha3}_{,\gamma}+A^{\delta3}\Gamma^\alpha_{\delta\gamma}+A^{\alpha\delta}\Gamma^3_{\delta\gamma}=A^{\alpha\delta}b_{\gamma\delta}\\&A^{3\beta}_{;\gamma}=A^{\delta\beta}b_{\gamma\delta}\end{aligned}\tag{4.5.17}$$

和

$$A^{33}_{;\gamma}=0$$

4.6 柯达兹(Codazzi)公式

把面内协变基矢量的求导公式(4.4.3)改写成

$$\boldsymbol{a}_{\alpha,\beta}=\Gamma^\delta_{\alpha\beta}\boldsymbol{a}_\delta+b_{\alpha\beta}\boldsymbol{a}_3\tag{4.6.1}$$

继续求二阶导数

$$\boldsymbol{a}_{\alpha,\beta\gamma}=\Gamma^\delta_{\alpha\beta,\gamma}\boldsymbol{a}_\delta+\Gamma^\delta_{\alpha\beta}\boldsymbol{a}_{\delta,\gamma}+b_{\alpha\beta,\gamma}\boldsymbol{a}_3+b_{\alpha\beta}\boldsymbol{a}_{3,\gamma}$$

用式(4.4.1)和式(4.4.3)消去基矢量的导数:

$$\boldsymbol{a}_{\alpha,\beta\gamma}=\Gamma^\delta_{\alpha\beta,\gamma}\boldsymbol{a}_\delta+\Gamma^\zeta_{\alpha\beta}(\Gamma^\delta_{\zeta\gamma}\boldsymbol{a}_\delta+b_{\zeta\gamma}\boldsymbol{a}_3)+b_{\alpha\beta,\gamma}\boldsymbol{a}_3-b_{\alpha\beta}b^\delta_\gamma\boldsymbol{a}_\delta$$

合并同类项,得

$$\boldsymbol{a}_{\alpha,\beta\gamma}=(\Gamma^\delta_{\alpha\beta,\gamma}+\Gamma^\zeta_{\alpha\beta}\Gamma^\delta_{\zeta\gamma}-b_{\alpha\beta}b^\delta_\gamma)\boldsymbol{a}_\delta+(\Gamma^\zeta_{\alpha\beta}b_{\zeta\gamma}+b_{\alpha\beta,\gamma})\boldsymbol{a}_3\tag{4.6.2}$$

另外，在式(4.6.2)中互换指标 β 和 γ，还可以得到 $a_{\alpha,\gamma\beta}$ 的表达式。

此处之 $a_{\alpha,\beta\gamma}$ 必然等于 $a_{\alpha,\gamma\beta}$，因为普通导数的求导顺序可以交换。从而，这两个二阶导数中关于 a_3 的分量必然相等，这就给出了等式：

$$b_{\alpha\beta,\gamma}+\Gamma^{\zeta}_{\alpha\beta}b_{\zeta\gamma}=b_{\alpha\gamma,\beta}+\Gamma^{\zeta}_{\alpha\gamma}b_{\zeta\beta}$$

移项后两端减去相等的项

$$b_{\alpha\delta}\Gamma^{\delta}_{\beta\gamma}=b_{\alpha\delta}\Gamma^{\delta}_{\gamma\beta}$$

得

$$b_{\alpha\beta,\gamma}-\Gamma^{\zeta}_{\alpha\gamma}b_{\zeta\beta}-b_{\alpha\delta}\Gamma^{\delta}_{\beta\gamma}=b_{\alpha\gamma,\beta}-\Gamma^{\zeta}_{\alpha\beta}b_{\zeta\gamma}-b_{\alpha\delta}\Gamma^{\delta}_{\gamma\beta} \tag{4.6.3}$$

这就是

$$b_{\alpha\beta\circ\gamma}=b_{\alpha\gamma\circ\beta} \quad \text{或} \quad \mathring{\nabla}_{\gamma}b_{\alpha\beta}=\mathring{\nabla}_{\beta}b_{\alpha\gamma} \tag{4.6.4a}$$

式(4.6.4a)称为柯达兹(Codazzi)公式。

它说明，曲面的第二基本张量的面内协变导数 $\mathring{\nabla}_{\gamma}b_{\alpha\beta}$ 关于其三个指标中的任意两个均对称。另外，由于 $b_{\alpha\beta}$ 的对称性，式(4.6.4a)只有两个独立的方程：

$$\mathring{\nabla}_{2}b_{11}=\mathring{\nabla}_{1}b_{12},\quad \mathring{\nabla}_{1}b_{22}=\mathring{\nabla}_{2}b_{21} \tag{4.6.5}$$

它说明，曲面的三个第二基本型系数不独立。除了式(4.6.4a)以外，柯达兹公式的另一种张量形式是

$$b^{\alpha}_{\beta\circ\gamma}=b^{\alpha}_{\gamma\circ\beta} \quad \text{或} \quad \mathring{\nabla}_{\gamma}b^{\alpha}_{\beta}=\mathring{\nabla}_{\beta}b^{\alpha}_{\gamma} \tag{4.6.4b}$$

4.7 高斯公式，黎曼-克里斯托夫(Riemann-Christoffel)张量

因为式(4.6.2)中 a_{δ} 的系数和 $a_{\alpha,\gamma\beta}$ 中对应项 a_{δ} 的系数应该相等，所以可以得到关系式

$$\Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma,\beta}-\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta,\gamma}+\Gamma^{\zeta}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\zeta\beta}-\Gamma^{\zeta}_{\alpha\beta}\Gamma^{\delta}_{\zeta\gamma}=b_{\alpha\gamma}b^{\delta}_{\beta}-b_{\alpha\beta}b^{\delta}_{\gamma} \tag{4.7.1}$$

把上式左端与式(3.5.3)中的 $R^{m}_{\cdot ijk}$ 对比，表明它是以 x^{α} 为坐标的二维空间中的黎曼-克里斯托夫(Riemann-Christoffel)张量*：

$$R^{\delta}_{\cdot\alpha\beta\gamma}=\Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma,\beta}-\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta,\gamma}+\Gamma^{\zeta}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\delta}_{\zeta\beta}-\Gamma^{\zeta}_{\alpha\beta}\Gamma^{\delta}_{\zeta\gamma} \tag{4.7.2}$$

从而有

$$R^{\delta}_{\cdot\alpha\beta\gamma}=b_{\alpha\gamma}b^{\delta}_{\beta}-b_{\alpha\beta}b^{\delta}_{\gamma} \tag{4.7.3}$$

---

* 关于黎曼-克里斯托夫张量是张量这一事实，本书为简明起见，不予证明。有兴趣的读者，可参阅有关专著。

上式称为高斯(Gauss)公式。式(4.7.2)说明,二维黎曼-克里斯托夫张量可以用两类克氏符号表示,进而由第一基本型系数完全决定(克氏符号与第一基本型系数的关系由式(4.4.7)和式(4.4.8)给出)。然而,式(4.7.3)说明,二维黎曼-克里斯托夫张量还可以用第二基本型系数表示。所以,高斯公式实际上给出了曲面的第一基本型系数与第二基本型系数的关系。

可以把高斯公式中的指标 δ 降下来,得到高斯公式的另一种形式:

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma}=b_{\alpha\gamma}b_{\beta\delta}-b_{\alpha\beta}b_{\gamma\delta} \tag{4.7.4}$$

下面,先推导一个有用的公式。式(1.7.25)是关于三维置换张量的一个关系式,我们要给出一个适用于二维空间的类似公式。我们知道,在置换张量 ε^{ijk} 中,上标之一必须是 3,而我们总能用循环置换的方法,安排使 $k=3$,于是,i 和 j 就限制在范围 1 和 2 中。因此,就可以引入一个二维置换张量 $\varepsilon^{\alpha\beta}$。类似地,可以限制 ε_{rts} 中的下标 $t=3$,从而引入另一个二维置换张量 $\varepsilon_{\delta\gamma}$。用这样的办法,在式(1.7.25)中,用 α 代替 i,用 β 代替 j,用 γ 代替 r,用 δ 代替 s,可以得到式(1.7.25)的二维形式

$$\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\delta}=\begin{vmatrix}\delta^{\alpha}_{\gamma} & \delta^{\alpha}_{\delta}\\ \delta^{\beta}_{\gamma} & \delta^{\beta}_{\delta}\end{vmatrix}=\delta^{\alpha}_{\gamma}\delta^{\beta}_{\delta}-\delta^{\alpha}_{\delta}\delta^{\beta}_{\gamma}=\delta^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} \tag{4.7.5}$$

这里,定义

$$\varepsilon_{\alpha\beta3}=\varepsilon_{\alpha\beta} \tag{4.7.6a}$$

其中

$$\varepsilon_{11}=\varepsilon_{22}=0,\quad \varepsilon_{12}=-\varepsilon_{21}=\sqrt{a} \tag{4.7.7a}$$

式中,a 是度量张量的行列式。另外,定义

$$\varepsilon^{\alpha\beta3}=\varepsilon^{\alpha\beta} \tag{4.7.6b}$$

其中

$$\varepsilon^{11}=\varepsilon^{22}=0,\quad \varepsilon^{12}=-\varepsilon^{21}=\frac{1}{\sqrt{a}} \tag{4.7.7b}$$

下面回到式(4.7.4)。显然有

$$\begin{aligned}R_{\delta\alpha\beta\gamma}&=b^{\lambda}_{\alpha}b^{\mu}_{\delta}(a_{\gamma\lambda}a_{\beta\mu}-a_{\beta\lambda}a_{\gamma\mu})=b^{\lambda}_{\alpha}b^{\mu}_{\delta}(\delta^{\nu}_{\lambda}\delta^{\rho}_{\mu}-\delta^{\nu}_{\mu}\delta^{\rho}_{\lambda})a_{\gamma\nu}\alpha_{\beta\rho}\\&=b^{\lambda}_{\alpha}b^{\mu}_{\delta}\varepsilon^{\nu\rho}\varepsilon_{\lambda\mu}a_{\gamma\nu}a_{\beta\rho}=b^{\lambda}_{\alpha}b^{\mu}_{\delta}\varepsilon_{\gamma\beta}\varepsilon_{\lambda\mu}\end{aligned} \tag{4.7.8}$$

这是高斯公式的第三种形式。

再看看关于二阶行列式的一个展开公式。对于三阶行列式,式(1.8.10a)给出了展开公式。采用与上述相同的办法,即令 $n=3,k=3$,再将 l 换成 α,m 换成 δ,i 换成 λ,j 换成 μ,就得到二阶行列式 b(式(4.3.20))的展开公式:

$$b\varepsilon_{\alpha\delta}=b_{\alpha}^{\lambda}b_{\delta}^{\mu}\varepsilon_{\lambda\mu} \tag{4.7.9}$$

用 $\varepsilon_{\gamma\beta}$ 乘两边，再把式(4.7.8)代入，就得到

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma}=b\varepsilon_{\alpha\delta}\varepsilon_{\gamma\beta} \tag{4.7.10}$$

这个方程说明，当且仅当高斯曲率 $b=0$ 时，黎曼-克里斯托夫张量 $R_{\delta\alpha\beta\gamma}$ 的所有分量才为零。我们在第 3.5 节中已经证明，只有当黎曼-克里斯托夫张量是零张量时，两个求协变导数的次序才是可以交换的。上式说明，当高斯曲率 $b\neq 0$ 时，在曲面内求协变导数是不可以交换次序的。例如 $v_{\alpha\circ\beta\gamma}\neq v_{\alpha\circ\gamma\beta}$。

方程式(4.7.10)还说明了以下对称关系：

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma}=-R_{\alpha\delta\beta\gamma}=-R_{\delta\alpha\gamma\beta}=R_{\alpha\delta\gamma\beta} \tag{4.7.11}$$

最后可以看出，式(4.7.10)实际上只有一个独立方程：

$$R_{1212}=b\varepsilon_{21}\varepsilon_{21}=ab \tag{4.7.12}$$

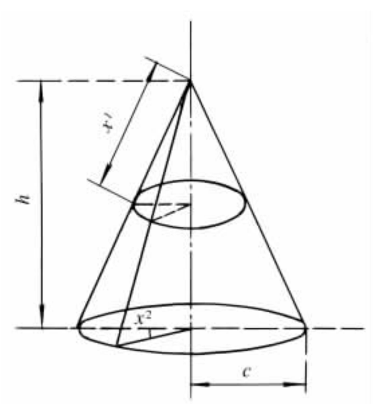
由此知曲面的高斯曲率：

$$b=\frac{R_{1212}}{a} \tag{4.7.13}$$

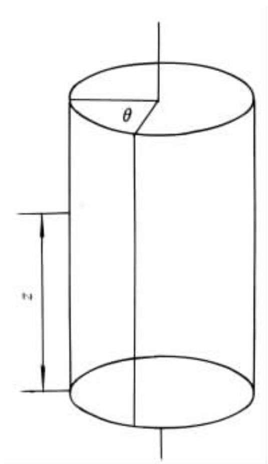
因为黎曼-克里斯托夫张量完全由第一基本型系数决定，所以式(4.7.13)说明，曲面的高斯曲率完全由曲面的第一基本型系数决定。这个结论很重要，称为高斯定理。

习　题　四

4.1　在一个正圆锥上(题图 4-1)，坐标 x^{α} 如图所示。从线元的表达式出发，计算 $a_{\alpha\beta}$，$b_{\alpha\beta}$，$\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$，$R^{\delta}_{\cdot\alpha\beta\gamma}$。



题 4-1 图



题 4-2 图

4.2　**在笛卡尔直角坐标系** x, y, z **中，双曲抛物面的方程为** $z=\frac{xy}{c}$。**用笛卡尔直角坐标** $x=x^1$ **和** $y=x^2$ **作为双曲抛物面上点的坐标** x^α。**试用这些坐标** x^α **计算以下各量：**$a_{\alpha\beta}$，$a^{\alpha\beta}$，$b_{\alpha\beta}$，b^α_β，$b^{\alpha\beta}$，$\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$，$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$，$R^\delta_{.\alpha\beta\gamma}$。

4.3　**在一个半径为** a **的圆柱面上（题 4-2 图），坐标系定义如下：**

$$x^1=z-a\theta\tan\omega=z-c\theta,\ x^2=\theta$$

其中，ω **和** $c=a\tan\omega$ **都是常数。试求度量张量** $a_{\alpha\beta}$ **和曲率张量** $b_{\alpha\beta}$，b^α_β。

4.4　**已知：旋转曲面上的** Gauss **坐标为**(θ, z)，**曲面上点的矢径为** $\boldsymbol{\rho}=f(z)\cos\theta\boldsymbol{i}+f(z)\sin\theta\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$。**求：**$a_{\alpha\beta}$，$b_{\alpha\beta}$，**主曲率**$\frac{1}{R_1}$，$\frac{1}{R_2}$，**平均曲率，**Gauss **曲率。**

4.5　**求证：**$\frac{\partial a^{\alpha\beta}}{\partial\xi^\lambda}=-a^{\alpha\omega}\Gamma^\beta_{\lambda\omega}-a^{\omega\beta}\Gamma^\alpha_{\omega\lambda}$。

第 5 章　笛卡尔张量

我们知道，在求解数学物理问题时，只要有可能，都尽量采用笛卡尔直角坐标系。所以，本章专门讨论张量在笛卡尔直角坐标系中的表示法及其运算。我们把这样表示的张量称为笛卡尔张量。在这个意义上讲，笛卡尔张量是前面介绍的一般张量的特例。

因为一切张量方程都与所选用的坐标系无关，所以，为了证明某个张量方程成立，只要在某一特定坐标系中进行即可。另外，在某一坐标系中用指标记法写出的张量方程只要改用不变性记法，则适用于一切坐标。笛卡尔直角坐标最为简单，所以往往都选用在笛卡尔坐标系中做这两件事。这也是讨论笛卡尔张量的重要意义所在。

5.1　关于笛卡尔张量

笛卡尔直角坐标系是指原点固定、坐标轴指向固定且相互正交的直线坐标系。它的特点如下：

（1）不再区分协变基和逆变基，而代之以一组标准正交基（定义见下文）。

（2）标准正交基的大小和方向是固定不变的。

不要把笛卡尔直角坐标系和第 3.7 节和第 3.10 节中的正交曲线坐标系相混淆。虽然正交曲线坐标系的三个坐标轴也相互垂直，但是它的两组基矢量的大小和方向却是随点的位置而变化的。在这个意义上讲，正交曲线坐标系是局部坐标系，而笛卡尔直线坐标系是整体坐标系。

对应于笛卡尔直角坐标系的上述特点，笛卡尔张量亦有以下特点：

（1）不再区分协变分量，逆变分量和混合分量，而只有一种分量形式。相应的，不再区分上指标和下指标，而统统采用下指标。

（2）由于基矢量处处相同，且只有一种分量形式，所以一般就用分量表示笛卡尔张量，不再配以并基后缀。

（3）由于标准正交基都是无量纲的单位矢量，所以，笛卡尔张量（分量）都是物理分量。

（4）由于基矢量处处相同，所以在张量求导数时，基矢量视同常量，不参与求导。由此之故，不再有协变导数的概念。张量的导数就是分量的普通导数。当然，两类克氏符号都为零。

此外，因为笛卡尔张量只有一种分量形式，所以，如果把二阶笛卡尔张量的分量按矩阵形式排列，则二阶笛卡尔张量的分量形式与其矩阵形式是一一对应的。因此，可以方便地采用矩阵形式来表达笛卡尔张量的各种性质和运算规则。这一点与任意曲线坐标系下的二阶张量不同。任意曲线坐标系下的二阶张量有四种分量形式，与矩阵没有一一对应关系。所以，我们在前面、尤其是在第二章（二阶张量）的讲述过程中，完全避免用矩阵的概念讲述一般二阶张量。相反，在本章讲述二阶笛卡尔张量时，却尽量采用矩阵的表达形式，目的是让读者明了张量与矩阵的密切关系。

掌握了上述特点后，前文关于任意曲线坐标系下张量的分量表达就可以方便地平移到

笛卡尔张量中来。本章只是对其中的要点加以强调而已。

5.2 标准正交基

设 x^i 是三维欧式空间的笛卡尔直角坐标系，沿坐标轴正向依次取单位矢量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 作为协变基矢量。设与它们对偶的逆变基矢量是 $\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \boldsymbol{e}^3$，则由于 $\boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta^i_j$，且 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 是相互正交的，所以

$$\boldsymbol{e}^i = \boldsymbol{e}_i \tag{5.2.1}$$

就是说，笛卡尔直角坐标系的协变基与逆变基是完全重合的。由此，在笛卡尔直角坐标系中，不区分协变基和逆变基，而统称为标准正交基，用 $\boldsymbol{e}_i$ 表示。

相应地，在笛卡尔坐标系中，任何张量就不再有协变分量、逆变分量和混变分量等，而只有一种分量形式，其指标统统写在下边。例如，矢量的分解式是

$$\boldsymbol{v} = v_i \boldsymbol{e}_i \tag{5.2.2}$$

任意阶张量的并基展开式是

$$\mathbf{T} = T_{ij\cdots k} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \cdots \boldsymbol{e}_k \tag{5.2.3}$$

爱因斯坦约定求和仍然成立，只是改成：一对相同的下标要求和，称为哑标。

在笛卡尔坐标系中，度量张量为

$$g_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \tag{5.2.4}$$

其中，δ_{ij} 仍称为 Kronecker δ。又，显然

$$g = |g_{ij}| = |\delta_{ij}| = 1 \tag{5.2.5}$$

所以，在笛卡尔坐标系下的 Eddington 张量（置换张量）是

$$\varepsilon_{ijk} = [\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_k] = \begin{cases} 1, & \text{当 } i,j,k \text{ 为偶排列} \\ -1, & \text{当 } i,j,k \text{ 为奇排列} \\ 0, & \text{其余情况} \end{cases} \tag{5.2.6a}$$

其实体是

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_k \tag{5.2.6b}$$

可以看出，在笛卡尔直角坐标系中，置换张量和置换符号相同。又，笛卡尔坐标记作 x_i 而不再记作 x^i。当把一个笛卡尔直角坐标系变换到另一个笛卡尔直角坐标系 x'_i 时，设变换系数为 a_{ij}（任意曲线坐标的变换系数记作 $\beta^i_{i'}$）。当新老坐标系的原点相同时，其变换形式可以写成

$$x'_i = a_{ij} x_j \quad \text{或} \quad x_i = a_{ij} x'_j \tag{5.2.7}$$

设新坐标系的标准正交基为 $\boldsymbol{e}'_j$，则新老坐标系下两组标准正交基之间的变换关系为

$$\boldsymbol{e}'_j = a_{ij} \boldsymbol{e}_j \quad \text{或} \quad \boldsymbol{e}_i = a_{ij} \boldsymbol{e}'_j \tag{5.2.8}$$

若把变化系数所组成的矩阵记作 A，则有

$$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{5.2.9}$$

显然,A 是正交阵,即满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I} \tag{5.2.10}$$

式中,A^{T} 表示 A 的置换矩阵,I 是单位矩阵。写成分量的形式就是

$$a_{ij}a_{ik}=\delta_{jk} \quad \text{或} \quad a_{ij}a_{kj}=\delta_{ik} \tag{5.2.11}$$

这里的 δ_{ik} 和 δ_{jk} 都是 Kronecker δ。

再来看张量分量的变换规则。由于标准正交基之间具有变换关系式(5.2.8),所以,任意阶笛卡尔张量(见式(2.1.3)所示)之间存在如下变换规则:

$$\Phi'_{ij\cdots k}=a_{ip}a_{jq}\cdots a_{kr}\Phi_{pq\cdots r} \tag{5.2.12}$$

上式中,变换系数的第一指标是自由指标,第二指标是哑标。特别地,对于二阶张量 T_{ij},有

$$T'_{ij}=a_{ip}a_{jq}T_{pq} \tag{5.2.13}$$

写成矩阵形式,就是

$$[T'_{ij}]=[a_{ip}][T_{pq}][a_{jq}]^{\mathrm{T}} \tag{5.2.14}$$

这个结论与线性代数的结果是一致的。

设在笛卡尔坐标系中,有两个矢量:

$$\boldsymbol{u}=u_i\boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{v}=v_i\boldsymbol{e}_i \tag{5.2.15}$$

则它们的点积就是

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=u_iv_i \tag{5.2.16}$$

如设它们的叉积为 $\boldsymbol{a}$,即 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}=a_i\boldsymbol{e}_i$,则有

$$a_i=\varepsilon_{ijk}u_jv_k \tag{5.2.17}$$

再设 $\boldsymbol{w}=w_k\boldsymbol{e}_k$,则 $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 的混合积是

$$[\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w}]=\varepsilon_{ijk}u_jv_kw_k \tag{5.2.18}$$

还有,一般曲线坐标系下的广义 Kronecker δ 在笛卡尔直角坐标系中变成了

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{rst}=\begin{vmatrix} \delta_{ir} & \delta_{is} & \delta_{it} \\ \delta_{jr} & \delta_{js} & \delta_{jt} \\ \delta_{kr} & \delta_{ks} & \delta_{kt} \end{vmatrix} \tag{5.2.19}$$

通过缩并,可以从它导出下面有用的关系式:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ist}=\delta_{js}\delta_{kt}-\delta_{jt}\delta_{ks} \tag{5.2.20a}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn}=3\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{kj}=2\delta_{kn} \tag{5.2.20b}$$

和
$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}=2\delta_{kk}=6 \tag{5.2.20c}$$
它们与式(1.7.25)—式 (1.7.28)类似。以上各式都可以看作是一般张量公式在笛卡尔直角坐标系下的表示形式。

同样,第一章定义的张量的代数运算也适用于笛卡尔直角坐标系,只是所有指标都是下标。这里不再一一列举。最后引入行列式的计算公式。由行列式的定义并利用置换张量 ε_{ijk},显然有
$$a=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\varepsilon_{ijk}a_{1i}a_{2j}a_{3k}=\varepsilon_{ijk}a_{i1}a_{j2}a_{k3} \tag{5.2.21}$$
还有一个有用的关系式:
$$a\varepsilon_{lmn}=a_{il}a_{jm}a_{kn}\varepsilon_{ijk} \tag{5.2.22}$$
读者可以与任意曲线坐标系下的行列式的表达式(见第 1.8 节)加以比较。

5.3 二阶张量的矩阵表达法

在笛卡尔直角坐标系下,张量只有一组分量。所以,可以把二阶张量写成矩阵的形式。具体说,在 n 维空间,每一个二阶笛卡尔张量都对应着一个 $n\times n$ 矩阵。下边讨论三维空间。设在笛卡尔直角坐标系 x_i 下的标准正交基为 $\boldsymbol{e}_i$,则任一矢量 $\boldsymbol{v}$ 按式(5.2.2)可以分解为 $\boldsymbol{v}=v_i\boldsymbol{e}_i$。我们称
$$[v_i]=[v_1\ \ v_2\ \ v_3] \tag{5.3.1}$$
为矢量在坐标架 $\boldsymbol{e}_i$ 或坐标系 x_i 下的对应(行)矩阵。

对于任意二阶张量 $\mathbf{D}$,在坐标架 $\boldsymbol{e}_i$ 或坐标系 x_i 下的并基展开式是
$$\mathbf{D}=D_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{5.3.2}$$
称矩阵
$$\mathbf{D}=[D_{ij}]=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \tag{5.3.3}$$
为二阶张量 D 在坐标架 $\boldsymbol{e}_i$ 或坐标系 x_i 下的对应矩阵。可以看出,将分量 D_{ij} 按第一指标指示行号、第二指标指示列号的规则排列,就可以得到上述对应矩阵。

在讨论二阶张量的坐标变换和代数运算时,把二阶张量用矩阵表示是方便的。说明如下:

先讨论坐标变换。设新的坐标系 x_i' 的标准正交基为 $\boldsymbol{e}_i'$,新、老坐标系的基矢量之间满足变换关系式(5.2.8),则由张量变换规律知,任一矢量 $\boldsymbol{v}$ 在新、老坐标系下的分量形式之间存在如下变换关系:
$$v_i'=a_{ij}v_j \tag{5.3.4}$$

引用矢量和二阶张量的对应矩阵的概念，见式(5.3.1)和式(5.3.3)，上式可写成矩阵形式

$$[v_i'] = [a_{ij}][v_j]^{\mathrm{T}} = A[v_j]^{\mathrm{T}} \tag{5.3.5}$$

式中，右上标 T 表示转置。转置矩阵的概念，读者在线性代数中已经熟悉了。

再看二阶张量的坐标变换关系。设在新坐标系 x_i' 下，二阶张量 **D** 的分量是 D_{ij}'，则它的坐标变换规律如式(5.1.13)所示，为

$$D_{ij}' = a_{ip}a_{jq}D_{pq} \tag{5.3.6}$$

写成矩阵形式就是

$$[D_{ij}'] = [a_{ip}][D_{pq}][a_{jq}]^{\mathrm{T}} \tag{5.3.7}$$

也就是

$$\mathbf{D}' = \mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \tag{5.3.8}$$

以上讨论说明，矢量和二阶张量的坐标变换关系可以用矩阵形式表示。

对于二阶张量与矢量以及二阶张量之间的点积运算，也可以用矩阵表示，例如

$$\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{v} = D_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\cdot v_k\boldsymbol{e}_k = D_{ij}v_j\boldsymbol{e}_i = a_i\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{a} \tag{5.3.9}$$

这个点积运算的实体记法是

$$\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \tag{5.3.10}$$

指标记法是

$$D_{ij}v_j = a_i \tag{5.3.11}$$

用矩阵形式表示，就是

$$[D_{ij}][v_j]^{\mathrm{T}} = [a_i]^{\mathrm{T}} \tag{5.3.12}$$

再看

$$\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{D} = v_k\boldsymbol{e}_k\cdot D_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = v_iD_{ij}\boldsymbol{e}_j = b_j\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{b} \tag{5.3.13}$$

这个点积运算的实体记法是

$$\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{D} = \boldsymbol{b} \tag{5.3.14}$$

指标记法是

$$v_iD_{ij} = b_j \tag{5.3.15}$$

用矩阵形式表示，就是

$$[v_i][D_{ij}] = [b_j] \tag{5.3.16}$$

在这两个例子中，请读者注意置换矩阵的使用。

二阶张量 **D** 的转置所对应的矩阵是 **D** 所对应的矩阵的转置，写出来就是

$$\mathbf{D}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} \\ D_{12} & D_{22} & D_{32} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix} \tag{5.3.17}$$

下面定义对称张量。称二阶张量 $\mathbf{D}$ 是对称张量，如果 $\mathbf{D}=\mathbf{D}^{\mathrm{T}}$，用指标记法是 $D_{ij}=D_{ji}$，用矩阵表示就是 $\mathbf{D}=\mathbf{D}^{\mathrm{T}}$。还可以定义反对称张量。称二阶张量 $\mathbf{D}$ 是反对称张量，如果 $\mathbf{D}=-\mathbf{D}^{\mathrm{T}}$。用指标记法是 $D_{ij}=-D_{ji}$，用矩阵表示就是 $\mathbf{D}=-\mathbf{D}^{\mathrm{T}}$。

另外，我们把二阶张量

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i=\delta_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{5.3.18}$$

称为单位二阶张量。显然，$\boldsymbol{I}$ 的对应矩阵就是单位矩阵，即

$$\mathbf{I}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.3.19}$$

事实上，对于笛卡尔张量而言，单位张量就是度量张量 $\mathbf{G}$。对于任意矢量 $\boldsymbol{u}$ 和任意二阶张量 $\mathbf{D}$，恒有

$$\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{I}=\boldsymbol{u} \tag{5.3.20}$$

$$\mathbf{I}\cdot\mathbf{D}=\mathbf{D}\cdot\mathbf{I}=\mathbf{D} \tag{5.3.21}$$

利用矩阵表示法，容易看出它们是显然的。如果两个二阶张量 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{E}$ 满足

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}=\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}=\mathbf{I} \tag{5.3.22}$$

这时，它们的对应矩阵满足等式

$$\mathbf{DE}=\mathbf{ED}=\mathbf{I} \tag{5.3.23}$$

即两个矩阵 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{E}$ 互逆。相应的，我们称二阶张量 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{E}$ 是互逆的，记为

$$\mathbf{D}=\mathbf{E}^{-1}\text{或 }\mathbf{E}=\mathbf{D}^{-1} \tag{5.3.24}$$

显然，二阶张量 $\mathbf{D}$ 有逆 $\mathbf{D}^{-1}$ 的充分必要条件是对应的矩阵 $\mathbf{D}$ 是满秩的。

显然，二阶张量 $\mathbf{D}$ 的 n 次幂 $\mathbf{D}^n$（式(2.1.7)）所对应的矩阵是 $\mathbf{D}^n$。这里，n 是正整数。

对于可逆的二阶张量 $\mathbf{D}$，可以定义

$$\mathbf{D}^0=\mathbf{D}\cdot\mathbf{D}^{-1}=\mathbf{I} \tag{5.3.25}$$

以及

$$\mathbf{D}^{-n}=(\mathbf{D}^{-1})^n \tag{5.3.26}$$

就是说，对于可逆的二阶张量，可以定义它的所有整数次幂。

5.4 二阶张量的特征值，特征方向和不变量

设 $\mathbf{T}$ 是二阶张量，如果非零矢量 $\boldsymbol{u}$ 及其映象 $\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{u}$ 具有相同的方向，就是说，存在标量 λ

使得下式成立：

$$\mathbf{T}\cdot \boldsymbol{u}=\lambda \boldsymbol{u} \tag{5.4.1}$$

则称这个方向(用 $\boldsymbol{u}$ 表征)为 $\mathbf{T}$ 的特征方向，λ 为相应的特征值，$\boldsymbol{u}$ 为特征矢量。上式可改写成

$$(\mathbf{T}-\lambda I)\cdot \boldsymbol{u}=0 \tag{5.4.2}$$

对应的矩阵方程是

$$[T_{ij}-\lambda\delta_{ij}][u_j]^{\mathrm{T}}=0 \tag{5.4.3a}$$

具体写出每个元素，就是

$$\begin{bmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22-\lambda} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_j \\ u_j \\ u_j \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.4.3b}$$

式(5.4.3)表明，二阶张量 $\mathbf{T}$ 的特征值和对应的特征矢量就是 $\mathbf{T}$ 的对应矩阵 $\mathbf{T}=[T_{ij}]$ 的特征值和对应的特征矢量。由此，可以通过求对应矩阵的特征值和特征矢量来确定二阶张量的特征值和特征方向。

在线性代数，中已经知道，方程式(5.4.3)存在非零解的充分必要条件是系数行列式

$$|T_{ij}-\lambda\delta_{ij}|=0 \tag{5.4.4a}$$

即

$$\begin{vmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{5.4.4b}$$

上式是以 λ 为未知数的一元三次代数方程，可以展开为

$$\lambda^3-\mathrm{I}\lambda^2+\mathrm{II}\lambda-\mathrm{III}=0 \tag{5.4.5}$$

其中，三个系数是

$$\mathrm{I}=T_{ii}=\mathrm{tr}T \tag{5.4.6a}$$

$$\mathrm{II}=\frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj}-T_{ij}T_{ji}) \tag{5.4.6b}$$

$$\mathrm{III}=|T_{ij}|=\det T \tag{5.4.6c}$$

它们的大小与坐标系的选择无关，或者说它们在坐标变换下是不变的，称为二阶张量的第一不变量、第二不变量、第三不变量。相应地，方程式(5.4.5)在坐标系变换下也是不变的，称为二阶张量的特征方程。

可以在复数范围内求解特征方程式(5.4.5)，得到三个特征值，再根据式(5.4.3)求出相应的特征矢量。要说明的是，由式(5.4.3)求出的特征矢量不是惟一的。事实上，从方程式(5.4.2)可以看出，如果 $\boldsymbol{u}$ 满足方程，则 $\boldsymbol{u}$ 的任何非零倍数都满足方程。要使特征矢量惟一，还要增加约束条件。通常采用归一化条件，即令所求出的特征矢量是单位矢量。就是

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|} \tag{5.4.7}$$

当然，$|\boldsymbol{n}|=1$。

由于二阶张量的特征值和对应的归一化特征方向 $\boldsymbol{n}$ 满足

$$\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{n}=\lambda\boldsymbol{n} \tag{5.4.8}$$

用 T 点乘上式两端，得

$$\mathbf{T}^2\cdot\boldsymbol{n}=\mathbf{T}\cdot(\lambda\boldsymbol{n})=\lambda\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{n}=\lambda^2\boldsymbol{n} \tag{5.4.9}$$

所以说明 $\mathbf{T}^2$ 的主值是 λ^2，对应于这个特征值的特征方向仍然是 $\boldsymbol{n}$。进一步还可以证明

$$\mathbf{T}^m\cdot\boldsymbol{n}=\lambda^m\boldsymbol{n} \tag{5.4.10}$$

其中，m 是正整数。此式说明，$\mathbf{T}^m$ 的特征值是 λ^m，对应于这个特征值的特征方向是 $\boldsymbol{n}$。

5.5 二阶对称张量的性质

如前所定义，称 $\mathbf{S}=S_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ 是二阶对称张量，记为 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}$，其分量有关系 $S_{ij}=S_{ji}$，对应矩阵 $\boldsymbol{S}=[S_{ij}]$满足 $\mathbf{S}=\mathbf{S}^{\mathrm{T}}$。

首先说明，在坐标变换下，二阶对称张量 S 的对称性保持不变。事实上，经坐标变换后，(设变换的系数矩阵为 A)，S 对应的矩阵变为 $\mathrm{ASA}^{\mathrm{T}}$，所以保持对称性不变。

二阶对称张量的一个重要性质是，它的三个特征值都是实数，并且一定存在着对应于这三个特征值的相互正交的特征矢量。称相互正交的三个特征方向为主方向，相应的特征值为主值。所以，二阶对称张量有三个主方向。我们把沿二阶对称张量 S 的相互正交的三个主方向的轴线称为主轴，由三根主轴构成的坐标系称为主轴系。通常把主轴系取为右手系。记作 x_i^*。沿主轴的正向取单位矢量 $\boldsymbol{e}_i^*$ 构成标准正交基。把 $\boldsymbol{e}_i^*$ 在原坐标系 x_i 中展开(设主轴系和原坐标系有相同的坐标原点)，有

$$\boldsymbol{e}_i^*=\boldsymbol{n}^{(i)}=n_j^{(i)}\boldsymbol{e}_j \tag{5.5.1a}$$

或

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_1^*=\boldsymbol{n}^{(1)}=n_1^{(1)}\boldsymbol{e}_1+n_2^{(1)}\boldsymbol{e}_2+n_3^{(1)}\boldsymbol{e}_3\\ \boldsymbol{e}_2^*=\boldsymbol{n}^{(2)}=n_1^{(2)}\boldsymbol{e}_1+n_2^{(2)}\boldsymbol{e}_2+n_3^{(2)}\boldsymbol{e}_3\\ \boldsymbol{e}_3^*=\boldsymbol{n}^{(3)}=n_1^{(3)}\boldsymbol{e}_1+n_2^{(3)}\boldsymbol{e}_2+n_3^{(3)}\boldsymbol{e}_3\end{cases} \tag{5.5.1b}$$

从而坐标变换的变换矩阵由表 5.1 给出。

表 5.1 主轴系的变换矩阵

x^* \ x	x_1	x_2	x_3
x_1^*	$a_{11}=n_1^{(1)}$	$a_{12}=n_2^{(1)}$	$a_{13}=n_3^{(1)}$
x_2^*	$a_{21}=n_1^{(2)}$	$a_{22}=n_2^{(2)}$	$a_{23}=n_3^{(2)}$
x_3^*	$a_{31}=n_1^{(3)}$	$a_{32}=n_2^{(3)}$	$a_{33}=n_3^{(3)}$

(5.5.2)

显然,在主轴系下,二阶对称张量 S 的并基展开式为

$$\mathbf{S}=\lambda_{(1)}\boldsymbol{e}_1^*\boldsymbol{e}_1^*+\lambda_{(1)}\boldsymbol{e}_2^*\boldsymbol{e}_2^*+\lambda_{(3)}\boldsymbol{e}_3^*\boldsymbol{e}_3^* \tag{5.5.3}$$

其对应的矩阵 S^* 是如下形式的对角阵:

$$S^*=\begin{bmatrix}\lambda_{(1)} & 0 & 0\\ 0 & \lambda_{(2)} & 0\\ 0 & 0 & \lambda_{(3)}\end{bmatrix} \tag{5.5.4}$$

二阶对称张量 S 的 n 次幂 S^n 仍然是二阶对称张量,并且,它的主值是 S 的主值的 n 次方,即 $\lambda_{(1)}^n$,$\lambda_{(2)}^n$ 和 $\lambda_{(3)}^n$,它的主方向与 S 的主方向相同。

再定义二阶正定对称张量。取单位矢量 $\boldsymbol{n}$,对二阶对称张量 S 作点乘

$$\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{n}=S_{ij}n_in_j \tag{5.5.5}$$

如对任何单位矢量,上式都大于零,则称 S 为正定。可以证明二阶正定对称张量的三个主不变量均大于零:$\mathrm{I}>0$,$\mathrm{II}>0$,$\mathrm{III}>0$。同时,三个主值都不小于零:$\lambda_{(1)}\geqslant 0$,$\lambda_{(2)}\geqslant 0$,$\lambda_{(3)}\geqslant 0$。

对于二阶正定对称张量 S,也可以定义 $S^{\frac{1}{2}}$ 如下:先把正定的 S 变换到主轴形式,把 S 看成是张量 $S^{\frac{1}{2}}$ 的二次幂,从而得到 $S^{\frac{1}{2}}$ 在主轴系下的对应矩阵。其形式必然是

$$\sqrt{\mathbf{S}^*}=\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_{(1)}} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{\lambda_{(2)}} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_{(3)}}\end{bmatrix} \tag{5.5.6}$$

再把它变换到原来的坐标系,就可以得到 $S^{\frac{1}{2}}$ 在原来坐标系下的九个分量。以上主值开方只取算术根,这样就保证了 $S^{\frac{1}{2}}$ 也是正定的,且可以从 S 惟一确定。$S^{\frac{1}{2}}$ 的对应矩阵记作 $\sqrt{S}$。

这些结果在第二章中都得到了,但这里更加强调矩阵观点。

5.6 二阶反对称张量的性质

若设 $\mathbf{A}=A_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ 是二阶反对称张量,则有 $A_{ij}=-A_{ji}$,对应的矩阵 $\mathbf{A}=[\mathbf{A}_{ij}]$ 满足 $A=-A^{\mathrm{T}}$。据此,$A=-A^{\mathrm{T}}$,我们可以具体写出对应矩阵

$$\mathbf{A}=[A_{ij}]=\begin{bmatrix}0 & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & 0 & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & 0\end{bmatrix} \tag{5.6.1}$$

其中

$$A_{12}=-A_{21},\ A_{13}=-A_{31},\ A_{23}=-A_{32} \tag{5.6.2}$$

由此看出,二阶反对称张量只有三个独立分量。这说明,二阶反对称张量实际上定义了一个矢量。同样,我们可以按照第二章的式(2.5.6)来定义 A 的反偶矢量:

$$\boldsymbol{\omega}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{A}\quad 或 \quad \omega_i=-\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}A_{jk} \tag{5.6.3}$$

可以证明,反对称张量 A 也可以用其反偶矢量 ω 来表示(见第二章):

$$\mathbf{A}=-\varepsilon\cdot\boldsymbol{\omega}\quad 或\quad A_{ij}=-\varepsilon_{ijk}\omega_k \tag{5.6.4}$$

并且对任何矢量,有

$$\mathbf{A}\boldsymbol{u}=\omega\times\boldsymbol{u} \tag{5.6.5}$$

从而当 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\omega}$ 时,有

$$\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\omega}=0 \tag{5.6.6}$$

由定义式(5.6.3)知,反偶矢量 ω 的三个分量是:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\omega}_1=-\dfrac{1}{2}(A_{23}-A_{32})=-A_{23}=A_{32}\\[2ex]\boldsymbol{\omega}_2=-\dfrac{1}{2}(A_{31}-A_{13})=-A_{31}=A_{13}\\[2ex]\boldsymbol{\omega}_3=-\dfrac{1}{2}(A_{12}-A_{21})=-A_{12}=A_{21}\end{cases} \tag{5.6.7}$$

这样,我们也可以把二阶反对称张量 A 的对应矩阵用反偶矢量 ω 的分量来表示:

$$[A_{ij}]=\begin{bmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{bmatrix} \tag{5.6.8}$$

二阶反对称张量 A 的第一不变量、第二不变量和第三主不变量分别为

$$\begin{cases}\mathrm{I}=\mathrm{tr}\mathbf{A}=0\\[2ex]\mathrm{II}=\dfrac{1}{2}(A_{ii}A_{jj}-A_{ij}A_{ji})=\omega_i\cdot\omega_i=\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}=|\boldsymbol{\omega}|^2\\[2ex]\mathrm{III}=\det\mathbf{A}=0\end{cases} \tag{5.6.9}$$

从而 A 的特征方程式为

$$\lambda^3+|\boldsymbol{\omega}|^2\lambda=0 \tag{5.6.10}$$

由此可知,$\lambda=0$ 是 A 的单重特征值。再由式(5.6.6)可知,对应的特征方向就是 A 的反偶矢量 $\boldsymbol{\omega}$。

现在我们取新的坐标系 $Ox_1'x_2'x_3'$,其标准正交基为 $\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3'$,并保证第三个基矢量 $\boldsymbol{e}_3'$ 为

$$\boldsymbol{e}_3'=\frac{1}{|\boldsymbol{\omega}|}\boldsymbol{\omega} \tag{5.6.11}$$

另外,两个基矢量 $\boldsymbol{e}_1'$ 和 $\boldsymbol{e}_2'$ 可以是任意两个与 $\boldsymbol{e}_3'$ 垂直的单位矢量,但 $\boldsymbol{e}_1'$ 和 $\boldsymbol{e}_2'$ 之间也相互垂直。容易证明,在这一坐标系下,A 对应的矩阵就是

$$\mathbf{A}'=[A'_{ij}]=\begin{bmatrix}0 & -|\boldsymbol{\omega}| & 0\\ |\boldsymbol{\omega}| & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\tag{5.6.12}$$

事实上,由式(5.6.11),在新坐标系下 $Ox'_1x'_2x'_3$,A 的反偶矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{\omega}=|\boldsymbol{\omega}|\boldsymbol{e}'_3\tag{5.6.13}$$

从而可根据式(5.6.4)计算出所有的 A'_{ij},如下:

$$A'_{12}=-A'_{21}=-\omega'_3=-|\boldsymbol{\omega}|$$

$$A'_{13}=-A'_{31}=\omega'_2=0$$

$$A'_{23}=-A'_{32}=-\omega'_1=0$$

$$A'_{11}=A'_{22}=A'_{33}=0$$

由此得 $\mathbf{A}$ 在新坐标系下的对应矩阵为式(5.6.12)。进一步可写出 $\mathbf{A}$ 在新坐标系下的并基展开式为

$$\mathbf{A}=-|\boldsymbol{\omega}|\boldsymbol{e}'_1\boldsymbol{e}'_2+|\boldsymbol{\omega}|\boldsymbol{e}'_2\boldsymbol{e}'_1\tag{5.6.14}$$

关于其他特殊二阶张量的各种性质的讨论,相信读者可以方便地从第二章平移过来。这里不再赘述。

习　题　五

(本习题中,$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 为笛卡尔直角坐标系中的标准正交基。)

5.1　若新坐标系 x'_i 是绕 x_3 轴逆时针方向转过 θ 角而得到的。

(1) 求变换系数 a_{ij};

(2) 求矢量 $\boldsymbol{v}=v_i\boldsymbol{e}_i$ 在新坐标系下的分量;

(3) 求二阶张量 $\mathbf{D}=3\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3+5\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$ 在新坐标系中的并基展开式。

5.2　已知 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{r}$ 均为矢量,证明:

$$[\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

【提示:考虑 $\boldsymbol{a}\times[(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{r}]$的两种展开式】

5.3　在笛卡尔坐标系中计算下列各量的值:

(1) δ_{ii};

(2) $\delta_{ij}\delta_{ij}\delta_{ji}$;

(3) $\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{ki}$;

(4) $\delta_{ij}\varepsilon_{ijk}$;

(5) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kji}$。

5.4　证明:$\varepsilon_{ijk}a_ja_k\boldsymbol{e}_i=0$

5.5　利用 $\det\mathbf{A}=\varepsilon_{ijk}A_{1i}A_{2j}A_{3k}$,证明:

$$\det(\mathbf{AB})=(\det\mathbf{A})(\det\mathbf{B})$$

5.6　**对于矢量** $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_3$ **,** $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_2-6\boldsymbol{e}_3$ **和二阶张量** $\mathbf{D}=3\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3-4\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2-5\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2$ **,用矩阵表示法计算:**

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{D}$;

(2) $\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{b}$;

(3) $\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{b}$。

5.7　**已知** $\mathbf{D}=3\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3+5\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$ **和** $\mathbf{F}=4\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3+6\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$ **,计算:**

(1) **$\mathbf{D}\cdot\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{F}\cdot\mathbf{D}$ 的并基展开式;**

(2) **$\mathbf{D}:\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{D}\cdot\cdot\mathbf{F}$ 的值。**

5.8　**证明:对任意二阶张量 A 和 B,$\mathbf{T}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{S}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ 具有相同的主不变量。**

5.9　**设** A_{ij} **是二阶张量,证明** $A_{ij}A_{ij}$ **和** $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kjp}A_{ip}$ **在坐标变换下都是不变量。**

5.10　**已知矢量** $\boldsymbol{a}=a_i\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{b}=b_i\boldsymbol{e}_i$ **,计算并矢** $\boldsymbol{ab}$ **的三个主不变量。**

5.11　**设二阶对称张量** $\boldsymbol{T}$ **的对应矩阵是**

$$[T_{ij}]=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

求它的主值、主方向和主不变量。并且直接通过张量变换规律,验证在主轴系中的对应矩阵 $[T'_{ij}]$ **是对角阵。**

5.12　**对于题** 5.11 **中的 T,计算** $\mathbf{T}^2$ **的主值和主方向。**

5.13　**设二阶对称张量 T 的对应矩阵是**

$$[T_{ij}]=\begin{bmatrix}7 & 3 & 0\\ 3 & 7 & 4\\ 0 & 4 & 7\end{bmatrix}$$

求它的主值和主方向。

5.14　**设二阶对称张量 B 的对应矩阵是**

$$[B_{ij}]=\begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{bmatrix}$$

求 B 的平方根 $\sqrt{\mathbf{B}}$。

5.15　**若** A_{ij} **是对称的,** B_{ij} **是反对称的,证明:** $A_{ij}B_{ij}=0$。

5.16　**设** b_i **是矢量的分量,证明二阶张量** $\boldsymbol{B}_{ij}=\varepsilon_{ijk}b_k$ **是反对称的。**

5.17　**证明:二阶张量 T 为反对称的充分必要条件是:对于任意矢量** $\boldsymbol{d}$ **,恒有**

$$\boldsymbol{d}\cdot\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{d}=0$$

5.18　**若将并矢** $\boldsymbol{ab}$ **分解成对称部分与反对称部分之和,证明其反对称部分的反偶矢量为**

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$$

参考文献

[1] 郭仲横.非线性弹性理论.北京:科学出版社,1980

[2] W·弗留盖著. 张量分析与连续介质力学. 白诤译.北京:中国建筑工业出版社,1980

[3] 黄克智,薛明德,陆明万. 张量分析. 北京:清华大学出版社,1986

[4] 钱曙复,陆林生. 三维欧式空间张量分析. 上海:同济大学出版社,1997

[5] 杜□. 连续介质力学引论. 北京:清华大学出版社,1985

[6] 黄克智,薛明德,陆明万. 张量分析(第2版). 北京:清华大学出版社,2003