Ансамблирование HAR и GARCH для предсказания волатильности на рынках криптовалюты

Садчиков Андрей, Юрченко Владимир

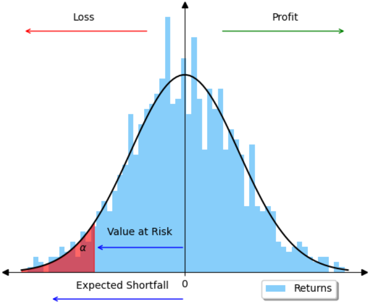
Московский физико-технический институт

14 апреля 2025

ФПМИ

Зачем нужно предсказывать волатильность?

- Критично для оценки риска - например, VaR



- Необходимо в трейдинге (лимитные заявки)
- И во многих других приложениях

Ключевые модели предсказания волатильности

- Наиболее известная модель - GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity)

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

  Имеет множество вариаций (J-GARCH, E-GARCH, ...)
- Фундаментально другая модель - HAR (Heteroscedastic Autoregression)

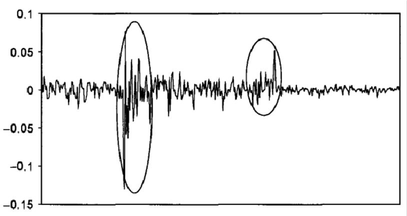
$$\mathrm{RV}_t = \beta_0 + \beta_1 \mathrm{RV}_{t-1} + \beta_2 \mathrm{RV}_{t-1}^{w} + \beta_3 \mathrm{RV}_{t-1}^{m} + \varepsilon_t, \qquad (1)$$

  Где RV_{t-1}, RV_{t-1}^{w}, и RV_{t-1}^{m} - это выборочная волатильность за дневной, недельный и месячный горизонты соответственно.

Вариации моделей предсказания волатильности

Волатильность эмпирически обладает рядом свойств

- Ассиметрия волатильности
- Кластеризация волатильности
- и т.д.



Чтобы учесть эти изменения, были созданы вариации GARCH и HAR

Некоторые улучшения GARCH

EGARCH

Добавляет ассиметричный отклик - негативные события сильнее увеличивают волатильность, чем позитивные

$$\ln\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i g(z_{t-i}) + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \ln\sigma_{t-j}^2$$

$$g(z_t) = \delta_1 z_t + \delta_2(|z_t| - \sqrt{2/\pi}),\ \ z_t \sim iid(0,1)$$

GJR-GARCH

Похожая мотивация, но реализация отличается - теперь используем пороговый механизм

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=}^{q} (\alpha_i u_{t-i}^2 + \gamma_i I_{t-i}^- u_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

$$I_t^- = \begin{cases} 1, u_t < 0 \\ 0, u_t \geq 0 \end{cases}$$

Некоторые улучшения HAR

Jump component

Хотим учесть влияние внезапных "шоков" на временной ряд.
Предположим, что

$$RV_t = CV_t + J_t$$

Где CV_t - компонента, отражающая "непрерывные" изменения волатильности, а J_t - компонента, отражающая шоки.

Вопрос

Как смоделировать обе компоненты?

HAR с прыжками

$$J_t = IV_t - BPV_t$$

$$BPV_t = \sum_{i=2}^{n} |r_{t,i-1}| \cdot |r_{t,i}|,$$

Здесь:

- BPV - Bipower Variation - оценка CV
- $r_{i,t}$ - внутридневные returns
- IV - integrated volatility - "общая" волатильность, подсчитаная, например, как выборочная дисперсия.

Отсюда рождается модель **HAR-CJ**:

$$\hat{RV}_t = \beta_0 + \beta_1 \mathrm{RV}_{t-1} + \beta_2 \mathrm{RV}^w_{t-1} + \beta_3 \mathrm{RV}^m_{t-1} + \beta_4 \mathrm{J}_t + \varepsilon_t,$$

Другие улучшения

В общем, такие дополнения имеют своей целью уловить тяжёлые хвосты распределения returns.

Более высокий куртозис может свидетельствовать о более тяжёлых хвостах.

HAR-Q

$$
\begin{aligned}
\mathrm{RV}_t = {} & \beta_0 + \beta_1 \mathrm{RV}_{t-1} + \beta_2 \mathrm{RV}^{w}_{t-1} + \beta_3 \mathrm{RV}^{m}_{t-1} \\
& + \beta_4 \sqrt{\mathrm{RQ}_{t-1}} \cdot \mathrm{RV}_{t-1} + \beta_5 \sqrt{\mathrm{RQ}^{w}_{t-1}} \cdot \mathrm{RV}^{w}_{t-1} \\
& + \beta_6 \sqrt{\mathrm{RQ}^{m}_{t-1}} \cdot \mathrm{RV}^{m}_{t-1} + \varepsilon_t
\end{aligned}
$$

Где RQ_t^{period} - выборочный куртозис за соответствующий период.

Ансамбль

Ансамбль моделей составляется методом бэггинга. Создадим два ансамбля:

- $\widehat{\mathrm{RV}}_{\mathrm{Ensemble}_1} := \alpha_1 \cdot \widehat{\mathrm{RV}}_{\mathrm{HAR}} + \alpha_2 \cdot \widehat{\mathrm{RV}}_{\mathrm{GARCH}}$
- $\widehat{\mathrm{RV}}_{\mathrm{Ensemble}_2} := \beta_1 \cdot \widehat{\mathrm{RV}}_{\mathrm{HAR}} + \beta_2 \cdot \widehat{\mathrm{RV}}_{\mathrm{GARCH}} + \beta_3 \cdot \widehat{\mathrm{RV}}_{\mathrm{Naive}}$
  Где Naive - наивная модель:

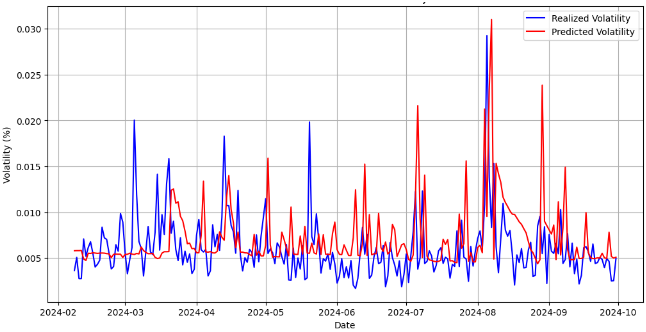
$$\widehat{RV}_t := RV_{t-1}$$

- Комментарий:

$$\text{Realized Volatility on day } t = \mathrm{RV}_t = \mathrm{Std}(r_t^1, \ldots, r_t^{24}) \cdot \sqrt{24} \tag{2}$$

Данные

Сравнение было проведено на данных пар BTC-USDT и ETH-USDT за период с 01.12.2023 по 01.12.2024. На графике ниже - пример предсказаний модели для другого временного промежутка.



Результаты

Table 2: Performance Metrics for Model Evaluation on BTC-USD data

Model	MSSE^{-1}	MAE^{-1}
Naive	1.0000	1.0000
HAR	1.1499	1.1200
HAR-Q	1.0029	1.0382
HAR-J	1.1298	1.1124
GARCH	1.0517	1.0198
Ensemble_1	1.1659	1.1034
Ensemble_2	1.3380	1.1796

Table 3: Performance Metrics for Model Evaluation on ETH-USD data

Model	MSE^{-1}	MAE^{-1}
Naive	1.0000	1.0000
HAR	1.2038	1.1445
HAR-Q	1.1969	1.1080
HAR-J	1.2495	1.1709
GARCH	0.6564	0.8563
Ensemble_1	1.0233	1.0248
Ensemble_2	1.1947	1.1083

Веса для ансамблей были выбраны равными для всех моделей.

Автокорреляция и стэкинг

Также была проведена попытка создать стэкинг базовой модели на основе HAR для предсказания волатильности и ARIMA, так как тест Льюнга-Бокса показал наличие остаточной автокорреляции.

Lag Number	HAR		GARCH(1,1)	
	LB-Statistic	p-value	LB-Statistic	p-value
1	14.03	0.0	0.01	0.904228
2	20.61	0.000033	1.43	0.489933
3	22.28	0.000057	16.09	0.001089
4	22.28	0.000176	16.32	0.002619
5	23.84	0.000236	16.46	0.005656

Table 1: Statistical Tests Results for HAR and GARCH models

Однако результат оказался неудовлетворительным, метрики для такого ансамбля оказались хуже, чем для базовых моделей.

Даже такой простой вид ансамблирования как бэггинг даёт значительный прирост метрик.

Эксперименты со стэкингом не дали результатов, но авторы считают, что это интересное направление. Возможно, замена ARIMA на другую модель даст результат.