Рюкзак

Дано:

- веса $w[i]$, $i = \overline{1,n}$
- стоимтости $c[i]$, $i = \overline{1,n}$
- W - максимальный вес, вместимость рюкзака

Найдите подмножество элементов I такое, что:

- Общий вес предметов в I не превышает W, $\sum_{i \in I} w[i] \leq W$
- Общая стоимость элементов в I максимальна W, $max_{I \subset \{1,\ldots,n\}} \sum_{i \in I} c[i]$

Базовое решение для рюкзака

- $dp[i][c]$ - сохраняет минимально достижимый вес для первого i элементы со значениями c.
- $0 \leq i \leq n$, $0 \leq c \leq C$
- dp пересчет:

$$dp[i][c] = \begin{cases} dp[i-1][c], & \text{если } c[i] > c, \\ \min\left(dp[i-1][c], dp[i-1][c-c[i]] + w[i]\right), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Итоговая ассимптотика: $\underline{O}(n * C_{max})$

Аппроксимационный полиномиальный рюкзак

Given:

- веса $w[i]$, $i = \overline{1,n}$
- стоимости $c[i]$, $i = \overline{1,n}$
- W - максимальный вес, вместимость рюкзака
- ε - допустимая ошибка.

Найдите подмножество элементов I такое, что:

- Общий вес предметов в I не превышает W, $\sum_{i \in I} w[i] \leq W$
- Максимальная общая стоимость предметов в I отличается от реального ответа не более чем на $1 + \varepsilon$
- Алгоритм работает в полиномиальной асимптотике.

Приближенное полиномиальное решение

1. Найдем $K = \frac{\varepsilon * C_{max}}{n}$, $C_{max} = max_{i=\overline{1,n}} c[i]$

2. $c^{'}[i] = \lfloor \frac{c[i]}{K} \rfloor$

3. Решите задачу о рюкзаке с помощью $c^{'}[i]$

окончательная асимптотика: $\underline{O}(n^2 \lfloor \frac{C_{max}}{K} \rfloor) = \underline{O}(n^2 \lfloor \frac{n}{\varepsilon} \rfloor)$

Корректность: Пусть $S^{'}$ - множество предметов который мы взяли в работе полиномиального алгоритма. Докажем следующую лемму.

Лемма $C(S^{'}) \geq (1 - \varepsilon) * OPT$, где OPT - это правильный ответ, $C(S)$ - возвращает суммарную стоимость предметов из множества S: $C(S) = \sum_{i \in S} c[i]$

Доказательство. Пусть $C^{'}(S)$ - это сумма стоимомтей измененных объектов: $C^{'}(S) = \sum_{i \in S} c^{'}[i]$

Пусть S - это оптимальный набор, то есть $C(S) = OPT$. После проведения преобразований с объектами, их стоимости будут разделены на K и округлены в меншьшую сторону. Тогда для каждого отдельного объекта a верно: $K * c^{'}[a] \leq c[a]$.

Тогда для множества S в целом, применяя это неравенство к каждому его объекту имеем:

$$C(S) - K * C^{'}(S) \leq n * K \ (*)$$

После решения задачи о рюкзаке для измененного набора данных мы получаем ответ множество $S^{'}$. После шага динамического программирования мы получаем набор, который является оптимальным для масштабируемого экземпляра и, следовательно, должен быть по крайней мере таким же хорошим, как выбор набора S с меньшей прибылью:

$$C(S^{'}) \geq K * C^{'}(S) \ (**)$$

Далее из $(*)$, $(**)$ получаем: $C(S^{'}) \geq K * C^{'}(S) \geq C(S) - n * K \geq OPT - \varepsilon * C_{max} \geq (1 - \varepsilon) * OPT$, так как $OPT \geq C_{max}$, если это не так то мы просто можем выкинуть объект максимальной стоимости из рассмотрения. □