

В.В. Матвеев, А.И. Соколов, А.А. Краснов
ОАО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор", г. Санкт-Петербург, Россия,
vladimir.matveev.1994@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЭМПИРИЧЕСКОЙ МОДОВОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ

*Изложен метод эмпирической модовой декомпозиции.
Работоспособность метода продемонстрирована на
примере обработки сигнала, содержащего аддитивный
белый шум.*

Введение

Алгоритм эмпирической модовой декомпозиции (EMD) был предложен Норденом Хуангом в 1995г. в рамках его работы по изучению поверхностных волн тайфунов. Затем, в 1998г. им же и группой соавторов был разработан обобщенный метод, дающий возможность применять алгоритм в различных задачах обработки информации.

Настоящая работа посвящена описанию метода эмпирической модовой декомпозиции сигнала в задачах обработки информации, позволяющего разложить исходный узкополосный сигнал на эмпирические составляющие, свойства которых описаны в следующих разделах.

Применение метода эмпирической модовой декомпозиции сигнала позволяет выполнить процедуру фильтрации полезного сигнала на фоне аддитивного шума, при этом в отличие от известных, в предлагаемом методе достаточно знать грубо частотный диапазон полезного сигнала, тогда как «традиционным» методам (фильтр Калмана, фильтр Винера и т.п.), как правило, требуется более детальная информация о сигнале, такая как: вид корреляционной функции или спектральной плотности, значение параметров математической модели сигнала.

Приводится методический пример, демонстрирующий обработку сигнала с аддитивным белым шумом.

Проводится сравнение рассматриваемого метода с фильтром Калмана [1].

Постановка задачи и описание алгоритма

Введем в рассмотрение входной сигнал $S(t)$, который может быть как детерминированным, так и случайным, при этом он может быть представлен в виде полезного сигнала с аддитивным шумом. Для пояснения работы алгоритма модовой декомпозиции сигнала покажем свойства выделяемых эмпирических составляющих, получаемых при выполнении приведенного ниже алгоритма.

Пусть входной сигнал $S(t)$ имеет локальные экстремумы, как минимумы, так и максимумы. Верхней (нижней) огибающей $S(t)$ будем называть кривую, интерполирующую точки локальных максимумов (минимумов) $S(t)$ с помощью кубического сплайна [2-5]. Функцией средних значений $m(t)$ назовем среднее арифметическое огибающих $S(t)$.

Принцип алгоритма EMD состоит в последовательном выделении из сигнала эмпирических мод (*IMF*) – функций, отвечающих следующим требованиям:

1. Количество локальных экстремумов функции и точек пересечения ею нуля не должно различаться больше чем на единицу
 $|N - P| \leq 1$, где N – количество нулей *IMF*, а P – количество ее экстремумов.
2. Функция средних значений эмпирической моды должна быть равной нулю на всем временном интервале $m(t) = 0, \forall t \in [0, T]$ где T – конечный момент времени.

После выделения из сигнала эмпирических мод входной сигнал $S(t)$ может быть представлен следующим образом:

$$S(t) = \sum_i IMF_i(t) + r(t),$$

где $S(t)$ – входной или исходный сигнал, $IMF_i(t)$ – эмпирические модовые функции, $r(t)$ – некоторая монотонная функция. Отметим, что $r(t)$ может быть равна нулю на всем временном промежутке.

Описание алгоритма EMD проведем на следующем методическом примере: рассмотрим детерминированный сигнал $S(t)$, представляющий собой сумму трех синусоид с одинаковыми амплитудами и частотами равными $f_1 = 500 \text{Гц}$, $f_2 = 1000 \text{Гц}$, $f_3 = 2000 \text{Гц}$ при частоте дискретизации 100кГц ,

$$S(t) = \sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t) + \sin(\omega_3 t),$$

где $\omega_1 = 2\pi f_1$, $\omega_3 = 2\pi f_3$.

Требуется разложить сигнал $S(t)$ на эмпирические модовые функции, определив тем самым частотный состав заданного входного сигнала.

Для последовательного выделения *IMF* требуется выполнить следующий алгоритм EMD, состоящий из следующих шагов:

1. Введем в рассмотрение функцию $IMF_i(t)$ и присвоим ей значение $S(t)$.

$$IMF_i(t) = S_i(t),$$

$$i = 1 \quad S_i(t) = S(t).$$

2. Найдем функцию средних значений $IMF_i(t)$, которую будем обозначать $m(t)$, и вычтем ее из функции $IMF_i(t)$. Результат этой операции присвоим $IMF_i(t)$.

$$IMF_{i,j+1}(t) = IMF_{i,j}(t) - m_j(t),$$

Шаг 2 повторяется j раз пока функция $IMF_{i,j}(t)$ не будет удовлетворять условиям эмпирической моды.

3. На последнем шаге из исходного сигнала $S_i(t)$ вычитается вычисленная на предыдущем шаге модовая функция $IMF_i(t)$. Полученное значение присваивается $S_{i+1}(t)$:

$$S_{i+1}(t) = S_i(t) - IMF_i(t).$$

Будем повторять шаги 1-3, пока сигнал $S_i(t)$ не станет монотонной функцией.

Применив алгоритм EMD к ранее описанному примеру, получим три модовые функции $IMF_1(t)$ $IMF_2(t)$ $IMF_3(t)$, которые будут представлять собой приближения гармоник, суммой которых является $S(t)$.

Таким образом, с помощью алгоритма EMD решается задача декомпозиции сигнала, то есть его разложение на частотные составляющие. Определим среднеквадратические отклонения (СКО) разности гармонических составляющих сигнала $S(t)$ и вычисленных модовых функций, полученные по следующей формуле:

$$CKO\{z^j\} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_i^j - \bar{z})^2}, \quad (1)$$

где $z^j = IMF_j[i] - \sin(\omega_j i \Delta t)$ – разность гармонических составляющих сигнала $S(t)$ и вычисленных модовых функций; j – номер выделенной модовой функции; Δt – шаг дискретизации; $\bar{z}_i^j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^j$ – среднее значение z .

Используя эту формулу, получим $CKO\{z^1\} = 0.06$; $CKO\{z^2\} = 0.06$; $CKO\{z^3\} = 0.03$.

На рис. 1 приведен график, иллюстрирующий вид сигнала $S(t)$. На рис. 2 приведен график, иллюстрирующий вид спектра сигнала $S(t)$ (модуль преобразования Фурье от сигнала $S(t)$).

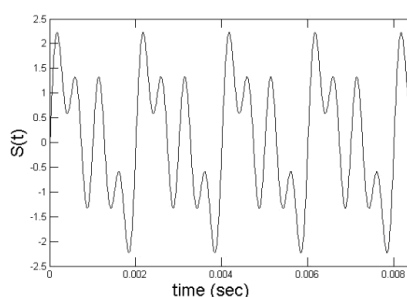


Рисунок 1. Вид сигнала $S(t)$

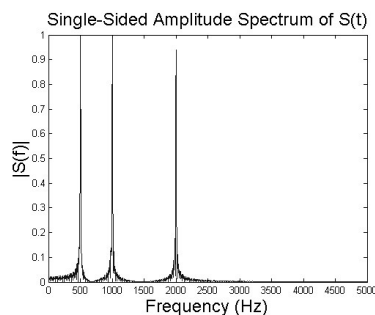


Рисунок 2. Спектр сигнала $S(t)$

На рис. 3 приведена иллюстрация второго шага алгоритма, а также вид функции $IMF_1(t)$ (рис. 4) и ее спектра (рис. 5).

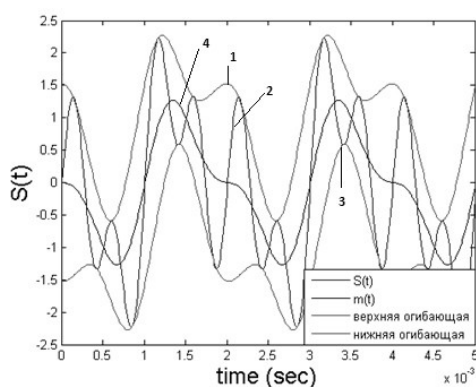


Рисунок 3. Увеличенный фрагмент исходного сигнала $S(t)$ (2), верхней и нижней огибающих (1) (3), а также функции средних значений сигнала $m(t)$ (4)

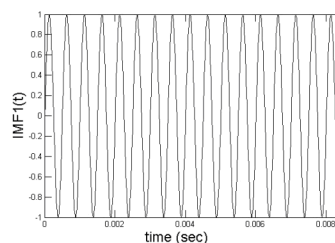


Рисунок 4. Вид функции $IMF_1(t)$

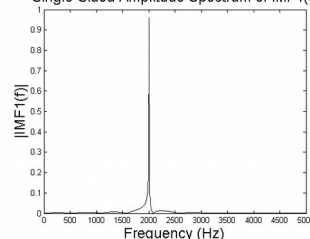


Рисунок 5. Вид спектра функции $IMF_1(t)$

Заметим, что в силу того, что функция средних значений строится с помощью интерполяции кубическим сплайном [2-5] с естественными краевыми условиями, сигнал искажается на концах анализируемого временного интервала T , поэтому модовые функции следует обрезать на 2 периода колебаний с каждой стороны, т.е. длительность рассматриваемого сигнала должна быть не менее $6T$.

Вид частотных спектров IMF для случайных процессов

Для пояснения работы алгоритма EMD при обработке случайных сигналов рассмотрим результаты их декомпозиции в частотной области. Метод эмпирической модовой декомпозиции позволяет разложить такие процессы на простые колебания, которыми в общем случае представляются модовые функции. Это значит, что модовая функция может менять свою частоту и амплитуду во времени, но она всегда симметрична относительно своей функции средних значений и не может быть представлена как сумма двух гармоник с различными частотами [2-5].

Следует пояснить, что вышеуказанные утверждения верны только в том случае, если алгоритм EMD выполнен идеально, то есть функции средних значений модовых функций тождественно равны нулю. Однако на практике, в силу конечной точности вычислений, функция $m(t)$ никогда не будет тождественно равна нулю, поэтому при реализации метода EMD завершение работы алгоритма осуществляется не при достижении $m(t)=0$, а при достижении всех значений функции $m(t)$ некоторой окрестности точки ноль. При этом результат декомпозиции будет тем более приближен к идеальному, чем меньше выбрана окрестность нуля.

$$|m(t)| < \delta \quad \forall t \in T. \quad (2)$$

В формуле (2) нормированный коэффициент $\delta = EQ$, где Q – среднеквадратическое значение (СКЗ) зашумленного входного сигнала, вычисленное по формуле (1), где $x = S(i\Delta t) = S[i]$. Нормировка позволяет компенсировать влияние СКЗ входного сигнала на уровень декомпозиции, и иметь возможность априорно оценить его по одному вводимому параметру E . Уточним, что под уровнем декомпозиции здесь понимается количество модовых функций, на которые раскладывается исходный сигнал.

Покажем, как выбор окрестности нуля (E) влияет на результат декомпозиции сигнала. В качестве исходного входного сигнала $S(t)$ рассмотрим белый гауссовый шум при частоте дискретизации 100 кГц и разложим его на эмпирические модовые функции при $E = 0.1$ и $E = 0.0001$. На рисунке 6 приведены спектры эмпирических мод, полученных при декомпозиции белого шума.

На основе полученных данных можно выделить следующие свойства алгоритма эмпирической модовой декомпозиции.

- 1) Содержащиеся в модовой функции частоты тем меньше, чем меньше порядковый номер модовой функции.
- 2) Ширина полосы частот модовой функции тем уже, чем меньше содержащиеся в ней частоты относительно частоты дискретизации.

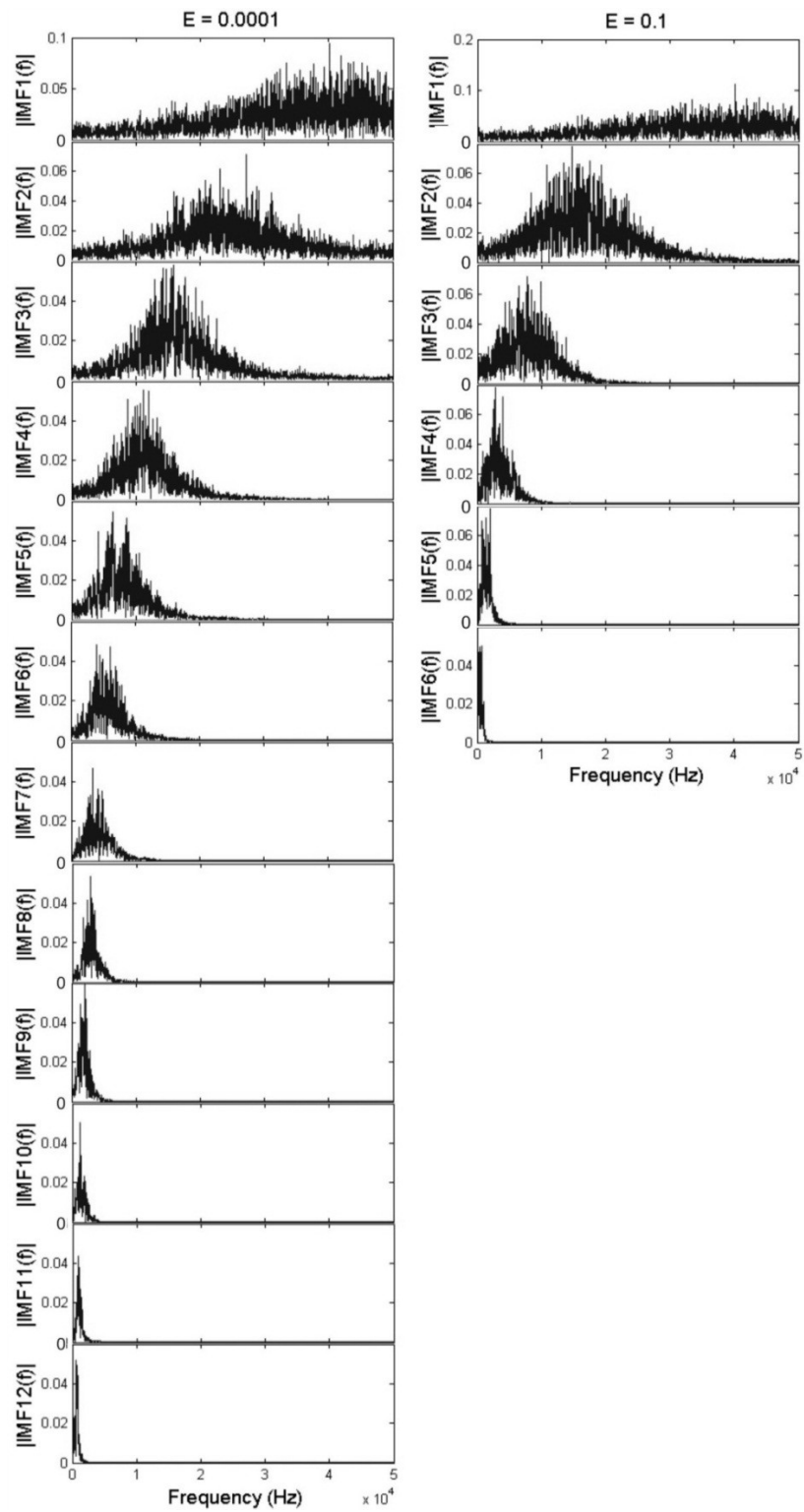


Рисунок 6. Спектры модовых функций, полученные при декомпозиции белого шума при разных E .

Из рис. 6 следует, что выбор меньшего параметра E ведет к улучшению частотного разрешения, позволяющего с большей подробностью выделять из входного сигнала модовые функции.

Фильтрация сигнала на фоне белого шума с помощью алгоритма эмпирической модовой декомпозиции

Рассмотрим алгоритм фильтрации полезного сигнала на фоне аддитивного белого шума с помощью метода эмпирической модовой декомпозиции на примере сигнала $S(t) = x(t) + v(t)$, где $v(t)$ – белый шум с интенсивностью 0.1; $x(t)$ – узкополосный марковский процесс второго порядка со спектральной плотностью вида [1]:

$$S_x(\omega) = \frac{2\sigma^2\alpha(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2)}{(\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\omega^2\alpha^2}, \quad (3)$$

где β – параметр модели сигнала, отвечающий за центральную частоту $x(t)$, которая равна 2 кГц; α – параметр модели сигнала $x(t)$, отвечающий за ширину полосы частот, которая равна 100 Гц; σ^2 – дисперсия $x(t)$, которая равна 1. Частота дискретизации сигнала была выбрана равной 100 кГц.

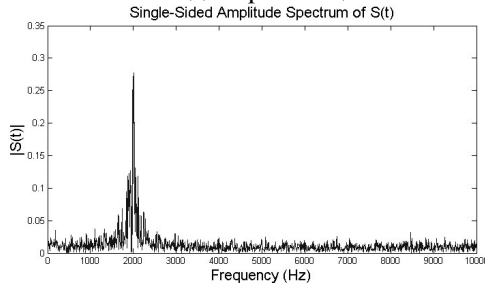


Рисунок 7. Спектр реализации сигнала узкополосного случайного марковского процесса с аддитивным шумом измерения $S(t) = y(t) + v$

Разложим сигнал $S(t)$ на эмпирические модовые функции. С помощью преобразования Фурье эмпирических модовых функций в наличие в них частот, амплитуда которых выше порога Δ , выбираемого как $\Delta = 0.5 \max\{|S(f)|\}$, где $|S(f)|$ – модуль преобразования Фурье $S(t)$. Уровень декомпозиции и константу E , его задающую, необходимо подбирать

исходя из условий задачи, то есть, ориентируясь на центральную частоту полезного сигнала. Из анализа, проведенного в предыдущем разделе, можно заключить, что чем более высокими частотами представлен полезный сигнал, тем шире будет спектр частот модовой функции, в которую попадут его высокочастотные составляющие. Поэтому чем больше центральная частота сигнала, тем больший требуется уровень декомпозиции, то есть необходимо уменьшать параметр E . При этом не стоит всегда стараться увеличить уровень декомпозиции, так как это отрицательно скажется на вычислительной сложности алгоритма.

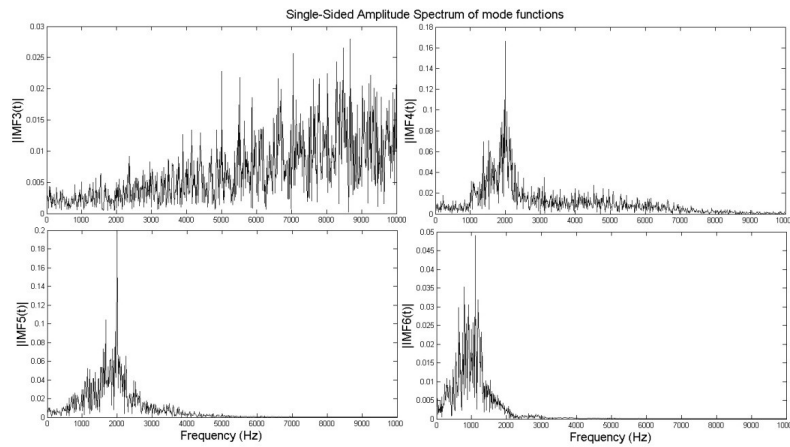


Рисунок 8. Спектры модовых функций

Сложим те модовые функции, амплитуды которых больше порога Δ . В рассматриваемом примере это четвертая и пятая модовые функции, суммируя их, получим оценку сигнала $x(t)$, которую обозначим как $S_I(t)$. СКО ошибки оценки $S_I(t)-x(t)$ метода эмпирической модовой декомпозиции будет равна 0.37. Для сравнения фильтр Калмана, параметры которого выбраны соответствующими параметрам моделируемого сигнала $x(t)$ и шума $v(t)$, для приведённого примера позволяет получить СКО ошибки оценки на уровне 0.3. Однако алгоритм эмпирической модовой декомпозиции требует меньше априорной информации о сигнале, т.к. для EMD достаточно грубо знать частотный диапазон, в котором существует сигнал, при этом не важна форма спектральной плотности полезного сигнала.

Метод EMD целесообразно применять только в случае, когда максимальная частота полезного сигнала в 20 раз меньше его частоты дискретизации, так как в противном случае уровень декомпозиции на рассматриваемом промежутке частот будет недостаточно высок для того, чтобы отфильтровать аддитивный шум.

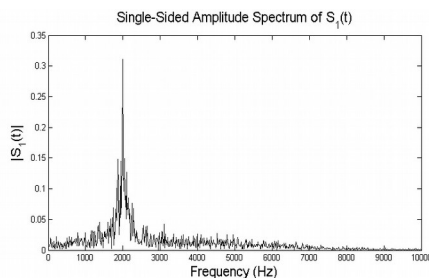
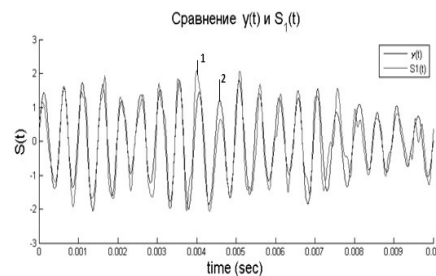


Рисунок 9. Спектр сигнала $S_I(t)$ Рисунок 10.



Сравнение временной реализации сигналов $y(t)(2)$ и $S_I(t)(1)$

Заключение

В представленной работе на методическом примере описан алгоритм эмпирической модовой декомпозиции. На модельных данных был приведен пример его практического использования для фильтрации сигналов от

аддитивных шумов. В заключении выделим некоторые общие свойства рассмотренного алгоритма.

1. Метод эмпирической модовой декомпозиции сигнала не является рекуррентным, то есть для его применения требуется наличие всей временной реализации.
2. Алгоритм EMD не использует априорные сведения о полезном сигнале, такие как: дисперсия, математическое ожидание, вид корреляционной функции или спектральной плотности полезного сигнала и т.п.
3. Метод EMD может применяться как к стационарным, так и к нестационарным случайным процессам.
4. Эмпирическая модовая декомпозиция сигнала в силу высокой вычислительной емкости в основном применяется для камеральной обработки сигнала.

ЛИТЕРАТУРА

1. **О.А.Степанов.** Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Часть 2. Введение в теорию фильтрации. - СПб.: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электрон», 2012. - 417 с.
2. **В. А. Давыдов.** Очистка геофизических данных от шумов с использованием преобразования Гильберта-Хуанга. / В. А. Давыдов, А. В. Давыдов. <http://geoin.org/dsp/doc/dsp24.doc>
3. **Hassan H. Hassan.** Empirical Mode Decomposition (EMD) of potential field data: airborne gravity data as an example. / Hassan H. Hassan, John W. Peirce. // CSEG Recorder – JAN 2008, VOL. 33, NO. 1.
4. **Huang, N.E.** The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis / Huang, N.E., Shen, Z., Long, S.R., Wu, M.C., Shih, H.H., Zheng, Q., Yen, N., Tung, C.C., Liu, H.H.. London: Royal Society London, 1998, 903-995.
5. **Huang, N.E.** The Hilbert-Huang transform and its applications . / Huang, N.E, Samuel S.P. Shen. // Singapore: World Scientific Publishing Co., 2005, - 324 с.