

Лабораторная работа 3.6.1
Спектральный анализ электрических сигналов

Вехов Владимир

27 ноября 2024 г.

1 Введение

Цель работы: изучить спектры сигналов различной формы и влияние параметров сигнала на вид соответствующих спектров; проверить справедливость соотношений неопределённостей; познакомиться с работой спектральных фильтров на примере RC-цепочки.

В работе используются:

генератор сигналов произвольной формы,
цифровой осциллограф с функцией быстрого преобразования Фурье или цифровой USB-осциллограф,
подключённый к персональному компьютеру.

2 Теория

2.1 Ряд Фурье и спектральный анализ

Согласно теореме Фурье, любая периодическая функция может быть представлена в виде ряда (конечного или бесконечного) гармонических функций с кратными частотами — ряда Фурье. Одно из представлений ряда Фурье для функции с периодом T имеет вид

Пусть заданная функция $f(t)$ периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, где T - период повторения. Ее разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)]$$

Здесь $\frac{a_0}{2}$ - среднее значение функции $f(t)$,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t) dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t) dt.$$

Операцию, при которой функции $f(t)$ ставится в соответствие её ряд (или интеграл) Фурье называют преобразованием Фурье. Это преобразование является взаимно-однозначным, а восстановление исходной функции по её спектру называется обратным преобразованием Фурье. Однако при спектральном анализе электрических сигналов, как правило, измеряются именно амплитуды $|a_n|$ (или интенсивности $|a_n|^2$) спектральных компонент, а информация об их фазах ϕ_n теряется. Это приводит к тому, что пропадает взаимно-однозначное соответствие между сигналом и спектром, и весьма разные сигналы могут иметь один и тот же амплитудный спектр (пример: амплитудная и фазовая модуляции).

2.2 Соотношения неопределённостей

Между сигналом как функцией времени $f(t)$ и его спектром как функции частоты $a(\nu)$ имеется простая и универсальная взаимосвязь. А именно, если у сигнала $f(t)$ есть какое характерное время Δt (например, период повторения, длительность импульса, время нарастания и т.п.), то в спектре $a(\nu)$ в том или ином виде будет наблюдаться характерный масштаб $\Delta \nu \approx 1/\Delta t$ (расстояния между пиками, ширина спектра, ширина пиков и т.п.).

Соотношения вида

$$\Delta\nu\Delta t \simeq 1$$

принято называть соотношениями неопределённостей. Конкретный вид соотношения неопределённостей зависит от обстоятельств, в которых оно применяется. Например, если $\Delta t = \tau$ — характерная длительность импульса, то характерная ширина спектра по порядку величины будет равна $\Delta\nu \approx 1/\Delta t$. Здесь единица в правой части (4) — это единица именно по порядку величины. Конкретное числовое значение зависит, во-первых, от детальной формы сигнала, и, во-вторых, от того, что именно мы называем «характерным» временем и что — «шириной» спектра.

Другой пример, для любого сигнала с периодом T в спектре обязательно будут наблюдаться гармоники на расстоянии $\delta\nu = 1/T$ друг от друга. В данном случае соотношение является точным и от формы сигнала не зависит

2.3 Методы спектрального анализа

Современные методы спектрального анализа электрических сигналов можно разделить на два типа: цифровые (математические) и аналоговые (физические).

Простейшим физическим анализатором частот является высокочастотный колебательный контур (RLC-цепочка). Такой контур, как известно, хорошо откликается на частоты, близкие к его резонансной, и почти не реагирует на частоты, находящиеся за пределами его узкой (т.к. контур высокочастотный) амплитудно-частотной характеристики. Подстраивая параметры контура и изменяя его резонансную частоту, можно «просканировать» весь частотный спектр поступающего на него сигнала. В современной лаборатории спектральные приборы, основанные на физических методах (как правило, довольно дорогостоящие), применяются для анализа высоких частот (сотни мегагерц и более).

Если же частота исследуемого сигнала не слишком велика (заведомо меньше тактовой частоты процессоров), современная цифровая техника позволяет проводить частотный анализ сигналов в реальном времени непосредственно по математическим формулам (2). Входящий сигнал при этом оцифровывается (дискретизируется) и, с помощью так называемого алгоритма «быстрого преобразования Фурье», осуществляется вычисление частот и амплитуд его гармоник.

Цифровой спектральный анализ имеет две отличительные особенности, о которых стоит упомянуть.

Во-первых, при цифровом анализе возникает частота дискретизации $\nu_{\text{дискр}}$, то есть частота, с которой считываются значения напряжения, подаваемого на входной канал анализатора. Ясно, что дискретизация не позволит исследовать спектр частот, превышающих частоту $\nu_{\text{дискр}}$, и исказит спектр вблизи неё. Поэтому надёжно получать спектр можно лишь на достаточно низких частотах $\nu \ll \nu_{\text{дискр}}$, когда влияние дискретности минимально (точнее, как следует из теоремы Котельникова, необходимо выполнение условия $\nu < \nu_{\text{дискр}}/2$). Внутренняя частота дискретизации осциллографов обычно велика (типичное значение — 1 ГГц), однако для преобразования Фурье в целях оптимизации скорости работы она может существенно урезаться. В настройках цифровых осциллографов часто используется параметр «количество точек» на интервал времени. Например, если сигнал записывался в течение 1 с, то при стандартных для многих осциллографов 4096 точках дискретизации, спектр будет заведомо ограничен лишь частотой 2 кГц!

Во-вторых, интервал времени Δt , в течение которого регистрируется сигнал, всегда ограничен. Для анализа сигнала вырезается его участок — «окно» $t \in [t_0; t_0 + \Delta t]$. Такое преобразование Фурье часто называют «оконным». Из-за ограниченности размеров «окна» неизбежно возникают дополнительные искажения спектра (их можно назвать «краевыми эффектами»). Чтобы компенсировать эти искажения, значениям регистрируемой функции в пределах «окна» придают разный вес. В таком случае говорят об «оконной» (или «весовой») функции преобразования Фурье. На практике применяются различные оконные функции, каждая из которых обладает своими достоинствами и недостатками (одни уменьшают шумы, другие уменьшают ширину пиков и погрешность частоты, третьи погрешность измерения амплитуд и т.д.). В нашей работе важно аккуратное измерения амплитуд, для чего лучше всего подходят окна «с плоской вершиной» (flat top) и, в меньшей степени,

Блэкмана (Blackman). Для более точного измерения частот предпочтительнее окна Ханна (Hann) и Хэмминга (Hamming).

3 Ход работы

Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов и проверка соотношений неопределённости

В начале настроим прямоугольный сигнал с параметрами $\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц, $\tau = T/20 = 50$ мкс, так чтобы была устойчивая картина на экране.

Получим на экране спектр прямоугольных импульсов (преобразование Фурье).

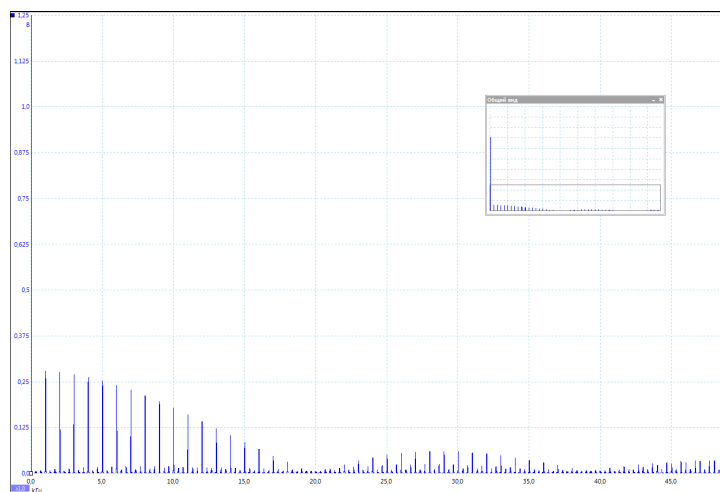


Рис. 1: Спектр прямоугольных импульсов (преобразование Фурье)

Пронаблюдаем изменения спектра при изменении параметров сигнала

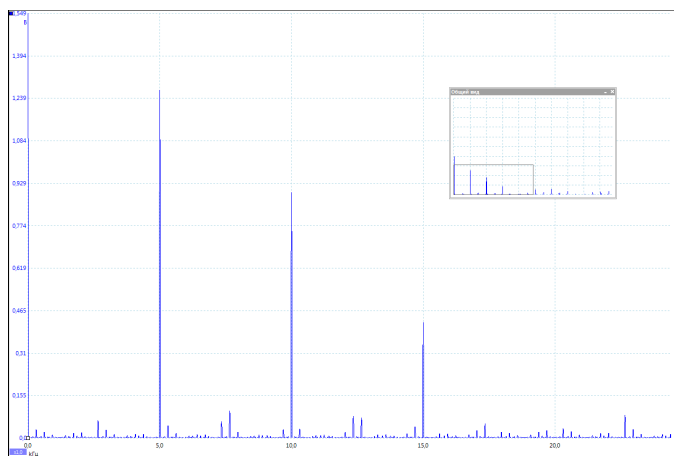


Рис. 2: Спектр прямоугольного сигнала ($\nu_{\text{повт}} = 5$ кГц; $\tau = 50$ мкс)

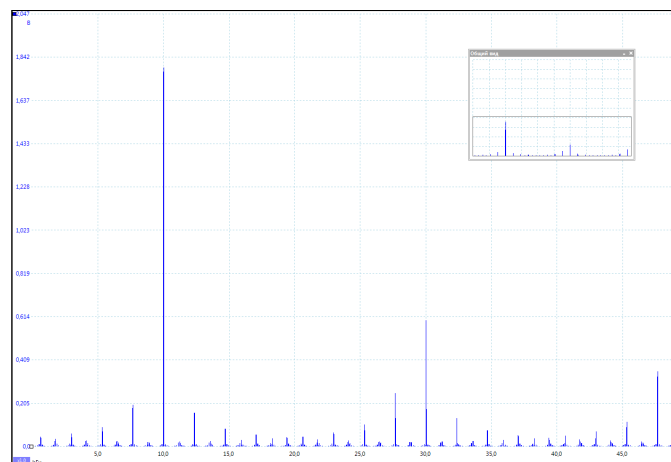


Рис. 3: Спектр прямоугольного сигнала ($\nu_{\text{повт}} = 10$ кГц; $\tau = 50$ мкс)

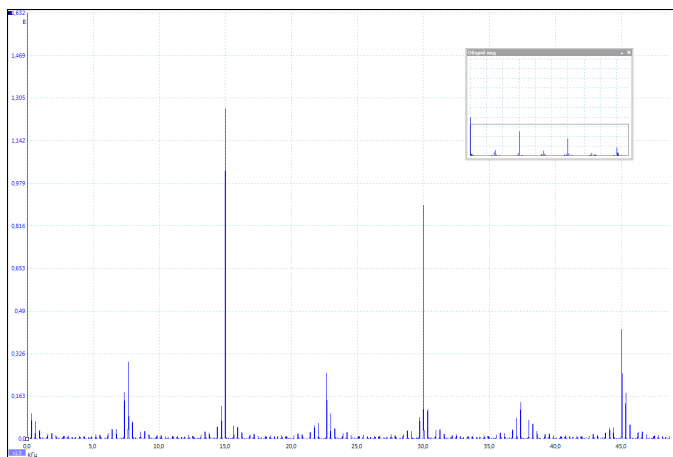


Рис. 4: Спектр прямоугольного сигнала
($\nu_{\text{повт}} = 15$ кГц; $\tau = 50$ мкс)

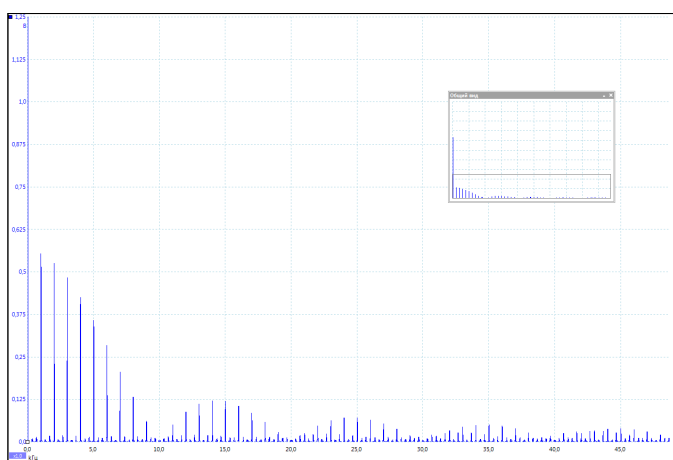


Рис. 5: Спектр прямоугольного сигнала
($\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц; $\tau = 100$ мкс)

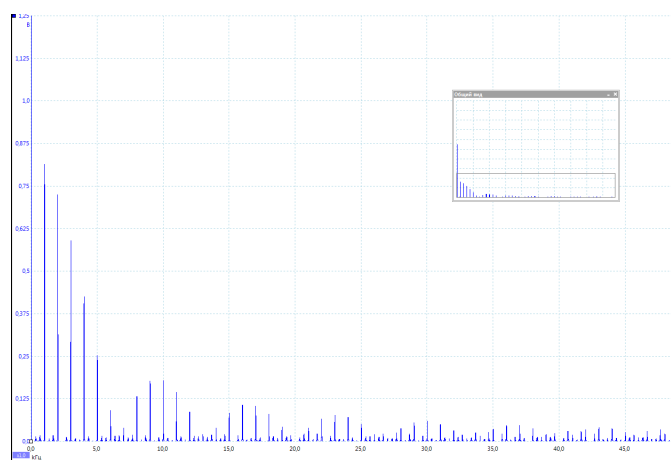


Рис. 6: Спектр прямоугольного сигнала
($\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц; $\tau = 150$ мкс)

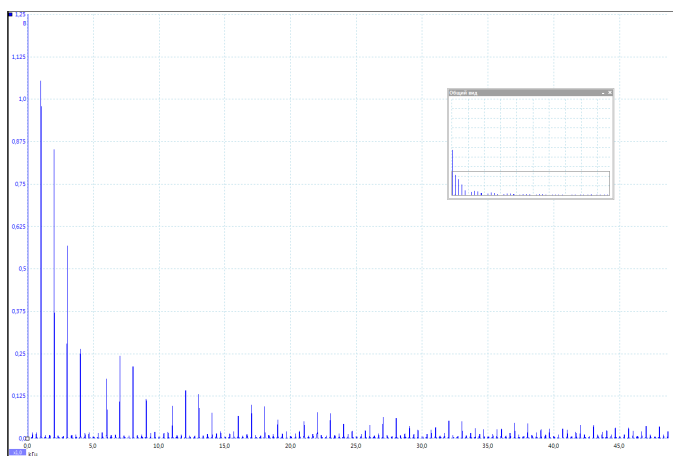


Рис. 7: Спектр прямоугольного сигнала
($\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц; $\tau = 200$ мкс)

Измерение параметров спектра

$$\nu_n^{\text{теор}} = \frac{n}{T}, \quad |a_n| = \frac{|\sin \frac{\pi n \tau}{T}|}{\pi n} = \frac{\tau}{T} \frac{|\sin \pi \nu_n \tau|}{\pi \nu_n \tau}$$

Результаты измерений и расчётов в таблице 1

n	1	2	3	4	5
$\nu_n^{\text{эксп}}, \text{кГц}$	0.988	1.99	2.989	3.99	5
$\nu_n^{\text{теор}}, \text{кГц}$	1	2	3	4	5
$ a_n ^{\text{эксп}}, \text{усл.ед.}$	280	276.8	271.2	263.6	252.5
$ a_n/a_1 ^{\text{эксп}}$	1	0.988	0.968	0.941	0.902
$ a_n/a_1 ^{\text{теор}}$	1	0.988	0.967	0.939	0.904

n	6	9	12	15	17	19
$\nu_n^{\text{эксп}}, \text{кГц}$	6	9	12	15	17	19
$\nu_n^{\text{теор}}, \text{кГц}$	6	9	12	15	17	19
$ a_n ^{\text{эксп}}, \text{усл.ед.}$	241.7	196.6	141.9	84.8	48.15	14.2
$ a_n/a_1 ^{\text{эксп}}$	0.863	0.702	0.507	0.303	0.172	0.051
$ a_n/a_1 ^{\text{теор}}$	0.862	0.702	0.507	0.302	0.171	0.053

Таблица 1: Параметры спектра прямоугольного сигнала

Измерение полной ширины спектра при различных длинах импульса

Зафиксируем $T = 1$ мс.

Измерение расстояния между соседними гармониками при различных периодах повторения сигнала

Зафиксируем $\tau = 100$ мкс.

Результаты представлены в таблицах ниже

$\tau, \text{мкс}$	$\Delta\nu, \text{кГц}$
20	49.0 ± 0.5
35	26.0 ± 0.5
40	25.0 ± 0.5
50	20.0 ± 0.5
75	13.5 ± 0.5
100	10.0 ± 0.5
150	7.0 ± 0.5
200	5.0 ± 0.5

$T, \text{мкс}$	$\delta\nu, \text{кГц}$
200	5.00 ± 0.01
500	1.00 ± 0.01
1000	0.50 ± 0.01
1500	0.33 ± 0.01
2000	0.25 ± 0.01
2500	0.2 ± 0.01
3000	0.17 ± 0.01
4000	0.125 ± 0.01
5000	0.1 ± 0.01

Таблица 2: Зависимость полной ширины спектра от длительности импульса

Таблица 3: Зависимость расстояния между соседними гармониками от периода повторения

Графики зависимостей $\Delta\nu(1/\tau)$ и $\delta\nu(1/T)$. Проверка соотношений неопределённости

Проверим соотношения неопределённости: $\Delta\nu \sim \frac{1}{\tau}$ и $\delta\nu \sim \frac{1}{T}$

По МНК коэффициенты: $k_\tau = 0.962 \pm 0.027$; $k_T = 1.002 \pm 0.097$. Соотношения выполняются с хорошей точностью.

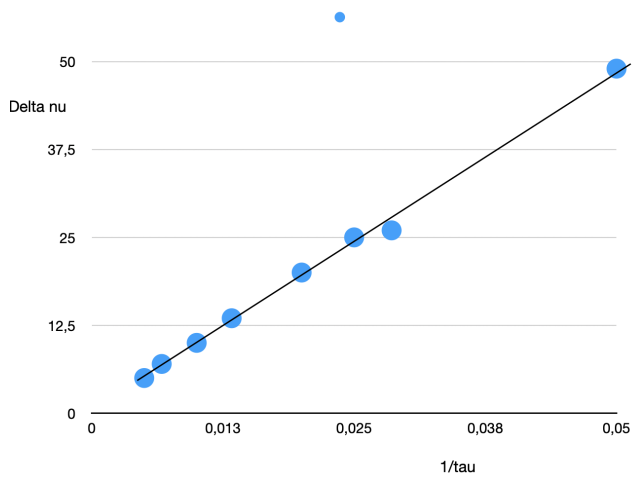


Рис. 8: График зависимости $\Delta\nu(1/\tau)$

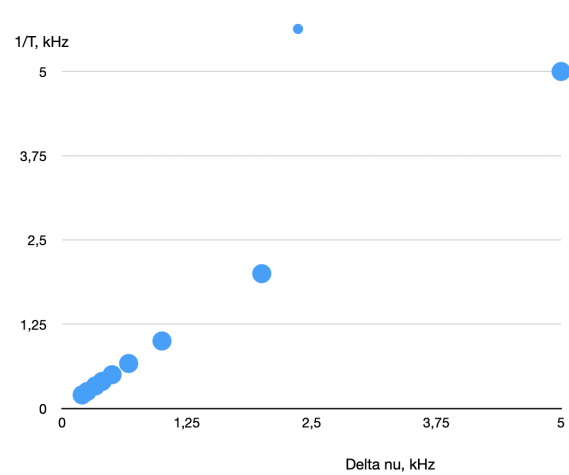


Рис. 9: График зависимости $\delta\nu(1/T)$

Наблюдение периодической последовательности цугов

Устойчивая картина цугов на экране осциллографа

Частота несущей $\nu_0 = 50$ кГц, период повторения $T = 1$ мс, число периодов синусоиды в одном импульсе $N = 5$

Спектр периодической последовательности цугов

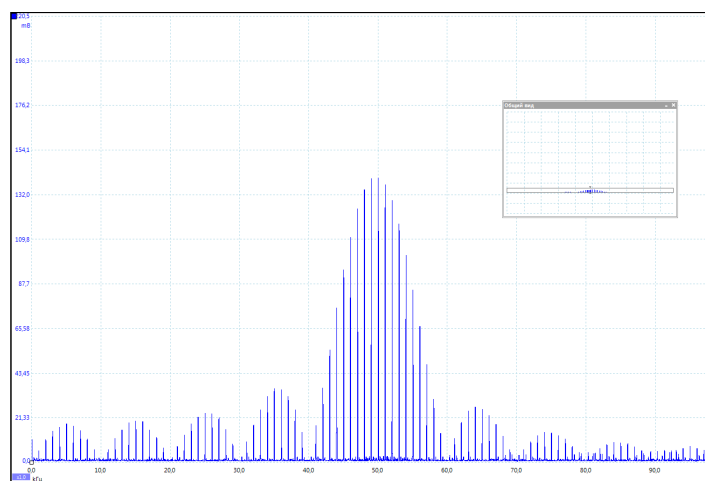


Рис. 10: Спектр цугов
($\nu_0 = 50$ кГц; $T = 1$ мс; $N = 5$)

Изменение спектра при изменении параметров

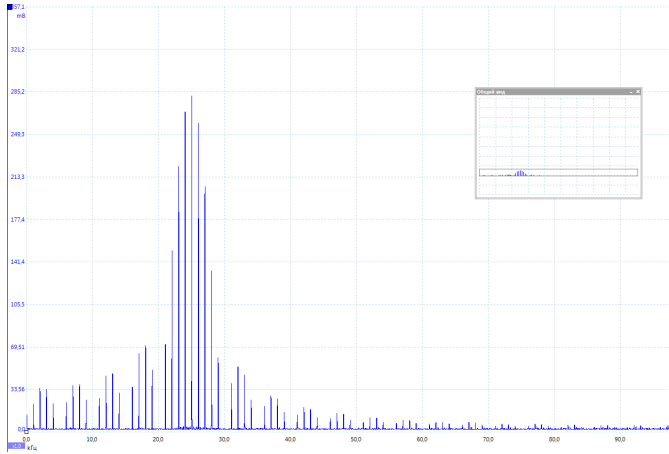


Рис. 11: Спектр цугов
($\nu_0 = 25$ кГц; $T = 1$ мс; $N = 5$)

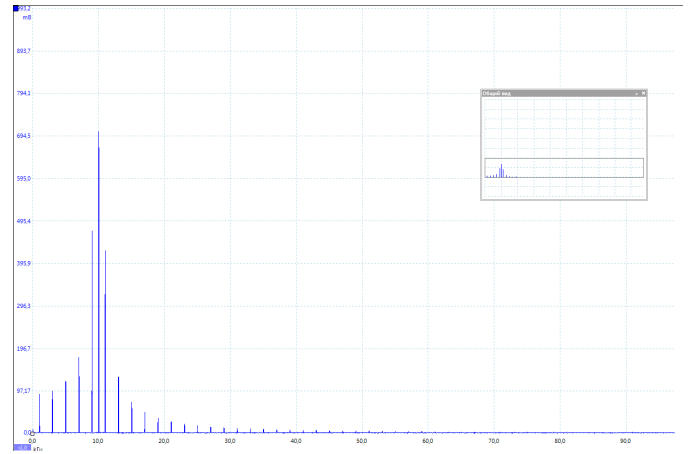


Рис. 12: Спектр цугов
($\nu_0 = 10$ кГц; $T = 1$ мс; $N = 5$)

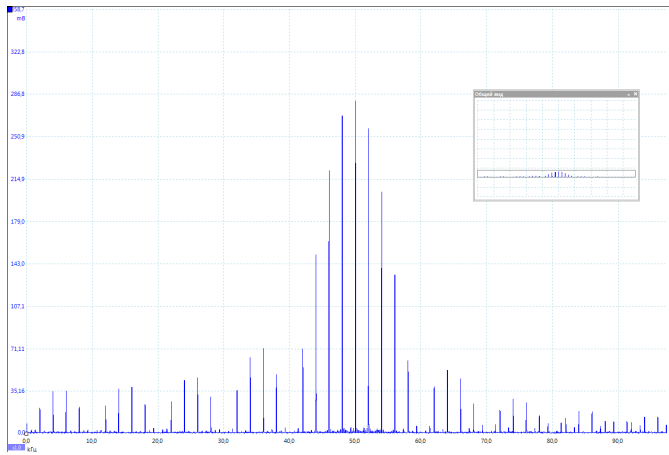


Рис. 13: Спектр цугов
($\nu_0 = 50$ кГц; $T = 0.5$ мс; $N = 5$)

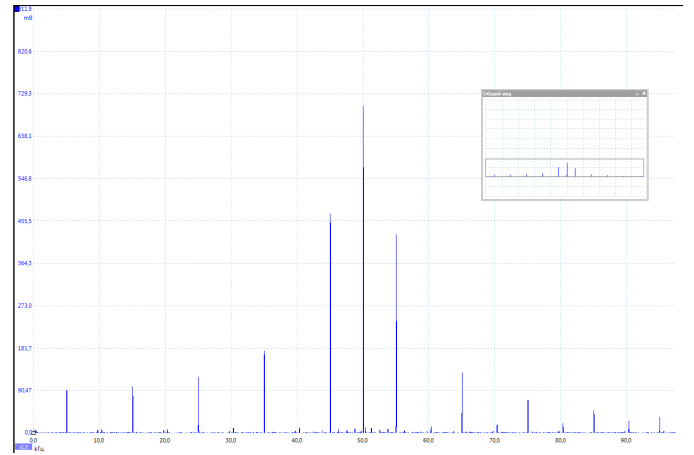


Рис. 14: Спектр цугов
($\nu_0 = 50$ кГц; $T = 0.2$ мс; $N = 5$)

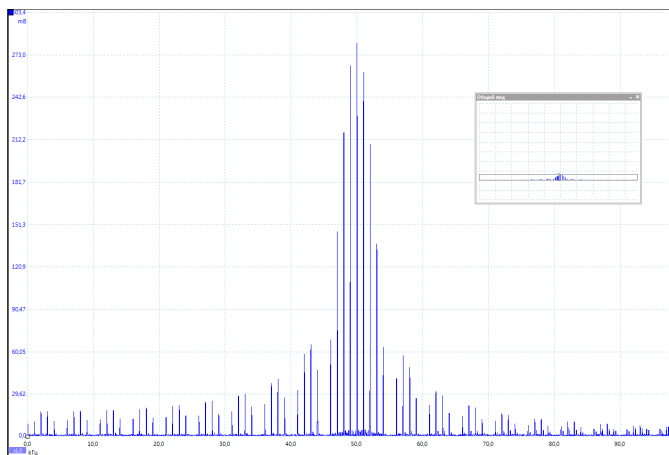


Рис. 15: Спектр цугов
($\nu_0 = 50$ кГц; $T = 1$ мс; $N = 10$)

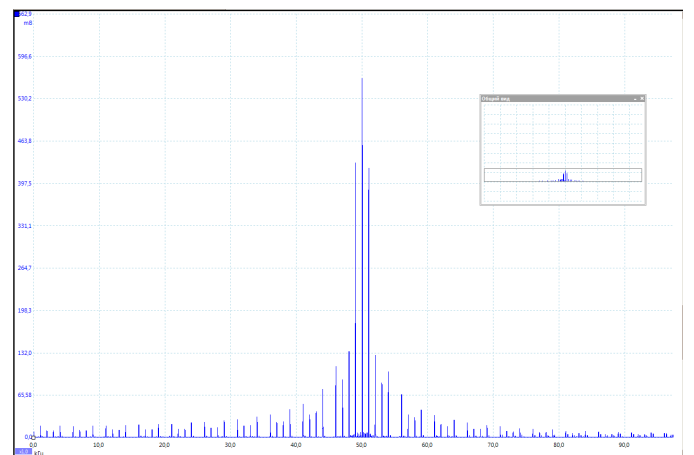


Рис. 16: Спектр цугов
($\nu_0 = 50$ кГц; $T = 0.2$ мс; $N = 20$)

Параметры спектров, проверка соотношений неопределённостей

Проверим соотношения неопределённостей: должно выполняться $\Delta\nu \cdot \tau_0 \sim 1$ и $\delta\nu \cdot T \sim 1$

По теореме смещения, смещение по времени не меняет амплитуд спектральных компонент, а лишь сдвигает их фазы (пропорционально частоте компоненты)

τ_0 , мс	$\Delta\nu$, кГц	$\Delta\nu \cdot \tau_0$	T , мс	$\delta\nu$, кГц	$\delta\nu \cdot T$
0.1	10	1	1	1	1
0.04	25	1	1	1	1
0.1	10	1	0.5	2	1
0.2	5	1	1	1	1

Таблица 4: Параметры спектра последовательности цугов

Исследование спектра амплитудно-модулированного сигнала

Модулированный по амплитуде синусоидальный сигнал

Частота несущей $\nu_0 = 50$ кГц, частота модуляции $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц, глубина модуляции 50 % ($m = 0.5$)

3.0.1 Параметры сигнала

$$A_{\max} = 1.252 \text{ В}$$

$$A_{\min} = 0.48 \text{ В}$$

$$m = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}} = 0.497\%$$

Изменение спектра при изменении параметров

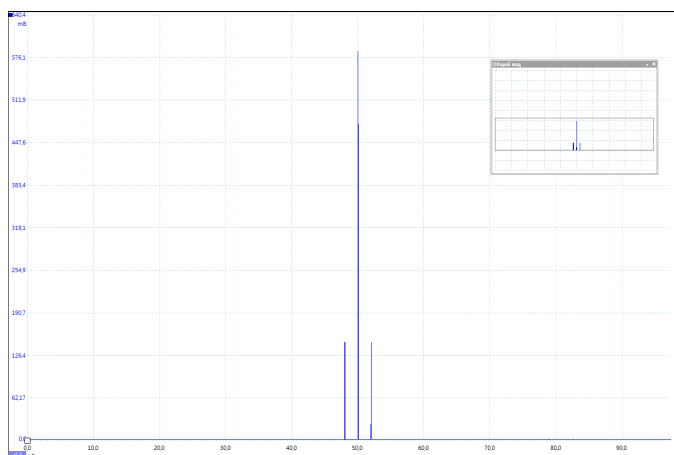


Рис. 17: Спектр модулированного сигнала ($\nu_0 = 50$ кГц; $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц; $m = 0.5$)

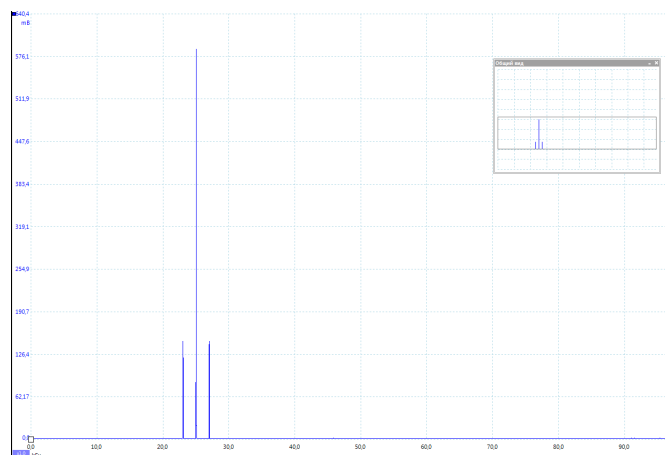


Рис. 18: Спектр модулированного сигнала ($\nu_0 = 25$ кГц; $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц; $m = 0.5$)

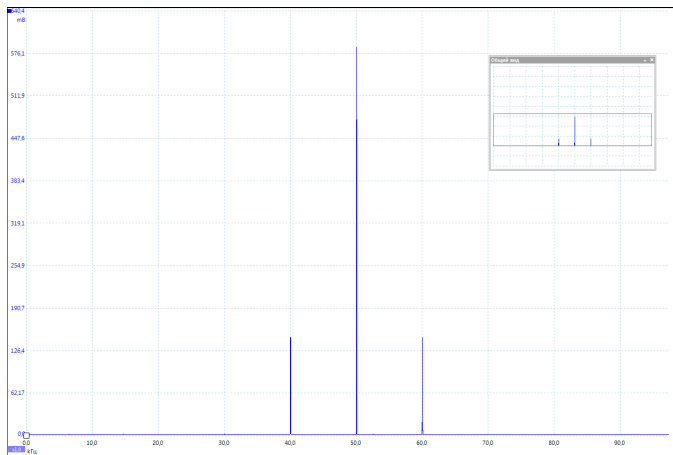


Рис. 19: Спектр модулированного сигнала
 $(\nu_0 = 50 \text{ кГц}; \nu_{\text{мод}} = 10 \text{ кГц}; m = 0.5)$

m	$\frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{осн}}}$
0.1	0.05
0.2	0.10
0.35	0.17
0.5	0.25
0.7	0.35
0.8	0.40
0.9	0.45
1	0.50

Таблица 5: Отношение амплитуд при различной глубине модуляции

$m, \%$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{осн}}}$	0.051	0.1	0.15	0.2	0.249	0.299	0.348	0.399	0.449	0.495

Таблица 6: Отношение амплитуд при различной глубине модуляции

График зависимости $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ от m

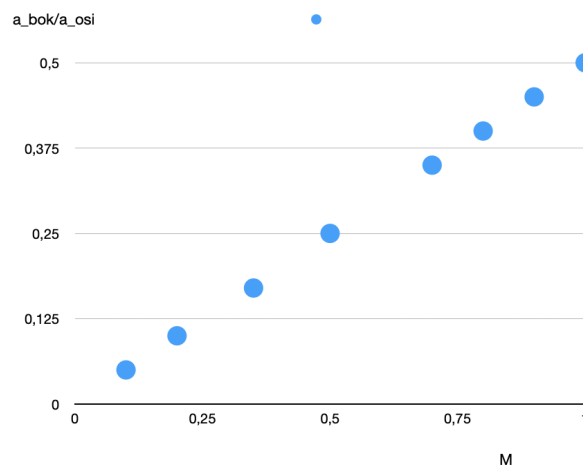


Рис. 20: График зависимости $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ от m

График совпадает с теорией, что $a(t)$ прямо пропорциональна m .

Изучение фильтрации сигналов

Параметры RC-цепочки:

$$R = 3 \text{ кОм} \quad C = 1000 \text{ пФ} \quad \tau_{RC} = RC = 3 \text{ мкс} \quad \nu_{RC} = 1/\tau_{RC} = 0.33 \text{ МГц}$$

Прямоугольные импульсы с периодом повторения $T = 3 \text{ мкс} \sim \tau_{RC}$ и длительностью $\tau = 150 \text{ нс} \sim T/20$

Изменение спектра при изменении параметров

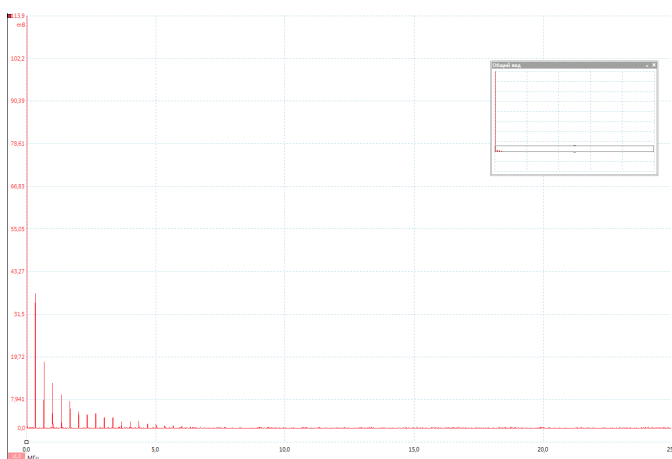


Рис. 21: Прямоугольные импульсы
($T = 3 \text{ мкс}$; $\tau = 150 \text{ нс}$)

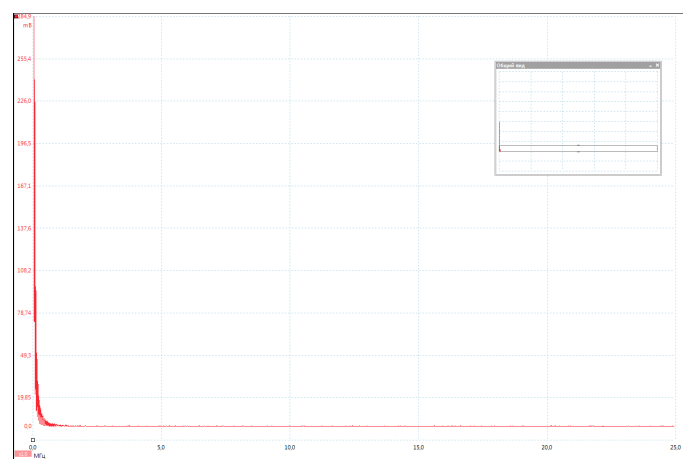


Рис. 22: Прямоугольные импульсы
($T = 500 \text{ мкс}$; $\tau = 150 \text{ нс}$)

Сравнение амплитуд спектральных гармоник исходного и фильтрованного сигналов

Подадим последовательность прямоугольных импульсов с периодом повторения $T = 3 \text{ мкс}$ и длительностью $\tau = 150 \text{ нс}$

Результаты измерения амплитуд фильтрованного и исходного сигнала в таблице 7

n	$a_n^0, \text{ мВ}$	$a_n^\Phi, \text{ мВ}$	$K_n = a_n^\Phi / a_n^0 $
1	265 ± 10	37	0.141
2	264 ± 10	18	0.069
3	260 ± 10	12	0.047
4	250 ± 10	9	0.036
5	242 ± 10	7.4	0.031
6	233 ± 10	4.5	0.019
7	219 ± 10	3.7	0.017
9	190 ± 10	2.9	0.015
13	120 ± 10	1.6	0.013
15	90 ± 10	1.0	0.012

Таблица 7: Сравнение амплитуд спектральных гармоник исходного и фильтрованного сигналов

В теории $K = \frac{1}{\tau_{RC}} \int_0^t f(t') dt'$

Построим график $K(1/\nu)$. По углу наклона определим τ_{RC}

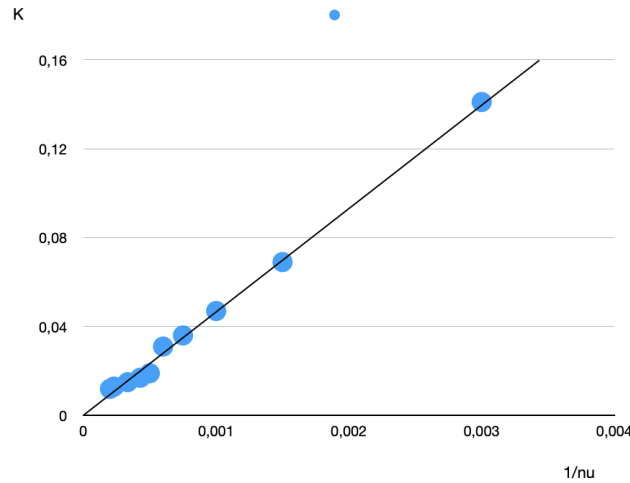


Рис. 23: График зависимости $K(1/\nu)$

$$\tau_{RC} = \frac{1}{2\pi k} = (3.5 \pm 0.4) \text{ мкс}$$

4 Вывод

В данной работе мы изучили спектры сигналов различной формы (прямоугольных импульсов, цугов гармонических колебаний, гармонических сигналов, модулированных по амплитуде и частоте) и влияние параметров сигнала на вид соответствующих спектров; проверили справедливость соотношений неопределённостей; проанализировали фильтрацию сигналов при прохождении их через RC контур.