Вариант 1

Система из двух обыкновенных дифференциальных уравнений для вектор-функции $U(x) = (u_1(x), u_2(x))^T$:

$$U' + AU = F(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{1}$$

Здесь $A = \{a_{ij}\}$ — матрица с постоянными коэффициентами, а вектор-функция $F(x)$ имеет следующий вид:

$$F(x) = \begin{pmatrix} \phi_1'(x) + a_{11}\phi_1(x) + a_{12}\phi_2(x) \\ \phi_2'(x) + a_{21}\phi_1(x) + a_{22}\phi_2(x) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $\phi_1(x), \phi_2(x)$ — заданные функции решения.

Начальное условие для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1):

$$U(0) = (0, 0)^T. \tag{3}$$

Найти численное решение задачи Коши (1) и (3) используя неявный метод Эйлера и метод Рунге – Кутты четвертого порядка.

В качестве матрицы A при тестировании взять:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 80 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

В качестве функции ϕ_1 взять x^5, в качестве ϕ_2 взять $\sin(\pi x)$. Вычисления вести с двойной точностью.

Представить сведения о теоретических свойствах численных методов. Описать логическую схему программы. Показать сходимость численных методов путем построения на одном графике точного решения и серии приближенных решений на последовательно измельчающихся сетках (например: $N = 5, 10, 20, \dots$). Численно определить порядок аппроксимации путем построения графика изменения погрешности численного решения в зависимости от количества узлов N сетки (в логарифмических осях). Сравнить использованные методы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хакимзянов Г. С., Черный С. Г. Методы вычислений: учеб. пособие: в 4 ч. Ч. 1. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений — Новосибирск: НГУ, 2003. — 160 с.

2. Михайлов А. П. Учебные задания вычислительной практики в компьютерном классе: учеб. пособие. — Новосибирск: НГУ, 2003 — 86 с.